PROBLÈMES MATHÉMATIQUES DANS LA THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ

par

T. Carleman

UPPSALA 1957

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА „МАТЕМАТИКА“

Т. КАРЛЕМАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Перевод с французского
В.—К. И. КАРАБЕГОВА

Под редакцией
Н. Н. БОГОЛЮБОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва 1960

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора 5
Предисловие 7

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Глава I. **Общее изучение уравнения Больцмана** 9
§ 1. Определение функции распределения 9
§ 2. Вывод уравнения Больцмана 9
§ 3. Общая структура уравнения Больцмана 17
§ 4. Классические основные формулы 18
§ 5. Состояние равновесия однородного газа 22
§ 6. Решение уравнения $F(p')F(p_1')-F(p)F(p_1)=0$ . . 23
§ 7. Граничные условия 25
§ 8. H-теорема Больцмана 27
§ 9. Общее изучение состояния равновесия газа 30
§ 10. Соотношения между функцией F и величинами, характеризующими физическое состояние газа . . . 32
§ 11. Новое преобразование уравнения Больцмана 32
§ 12. Верхние границы для выражений $J(F)$, $J(F, G)$, $L(F)$, $T(F)$ 39
Глава II. **Решение уравнения Больцмана в случае, когда фуикция распределения не зависит от x, y, z** . . 43
§ 1. Общие свойства решений уравнения $\frac{\partial F}{\partial t}=T(F)$ . . . 43
§ 2. Теоремы существования и единственности 53
§ 3. Поведение решения при $t\to\infty$ 63

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Введение 67
Глава I. **Уравиение Больцмана вблизи равновесия** 70
§ 1. Изучение линейного оператора $S(\varphi)$ 70

§ 2. Свойства ядра $G(p, p_1)$ 73
§ 3. Изучение уравнения $\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \lambda S(\varphi) = 0$ в случае неограниченного пространства 80

Глава II. **Уравнение Больцмана в специальных случаях** 87
§ 1. Ряд Гильберта 87
§ 2. О решении уравнения Больцмана в области $0 \leqslant x \leqslant l$ 91
§ 3. О сопротивлении, испытываемом твердым телом, движущимся прямолинейно и равномерно в неограниченном газе 96
Замечание I 106
Замечание II 109
Замечание III 111
Замечание IV 112

Т. Карлеман
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Редактор *М. С. АГРАНОВИЧ* Технический редактор *С. В. Приданцева*
Корректор *Т. П. Пашковская*

Сдано в производство 24/IX 1959 г. Подписано к печати 2/II 1960 г.
Бумага 84×108¹/₃₂=1,9 бум. л. 6,1 печ. л. Уч.-изд. л.-5,70. Изд. № 1/4666
Цена 4 руб. Зак. 734

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

АННОТАЦИЯ

Посмертно вышедшая работа одного из крупнейших мировых аналитиков — шведского ученого Т. Карлемана, подготовленная к печати его учениками. Автор работал над этой темой в течение нескольких десятилетий. Им были получены важные результаты, относящиеся к вопросам существования и единственности решений уравнения Больцмана, которые и излагаются в данной работе.

Работа представляет интерес для физиков-теоретиков, занимающихся статистической механикой, и для математиков, занимающихся интегро-дифференциальными уравнениями. Доступна для студентов старших курсов и аспирантов физико-математических факультетов университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Предлагаемая вниманию читателя монография известного шведского математика Торстейна Карлемана представляет собой неоконченную рукопись по математическим проблемам, связанным с кинетическим уравнением Больцмана, изданную учениками Карлемана после его смерти. В основу этой рукописи легла известная статья Карлемана, опубликованная в *Acta Mathematica* еще в 1932 г., в которой впервые было проведено строгое исследование вопросов существования, единственности и предельных свойств решения кинетического уравнения Больцмана.

Книга Карлемана, несомненно, имеет глубокое математическое содержание и доставляет целый ряд свежих идей, несмотря на сказывающуюся местами вполне понятную отрывочность изложения. Мы надеемся поэтому, что она будет с интересом встречена нашими читателями.

Большое внимание в монографии уделяется изучению случая, когда функция распределения не зависит от пространственных координат, однако и приводимое изучение некоторых частных случаев при наличии зависимости от пространственных координат весьма поучительно.

Книга представляет интерес не только для лиц, занимающихся специально математическими вопросами кинетической теории газов, но также и для более широких кругов математиков и физиков-теоретиков.

Н. Н. Боголюбов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящая монография Торстейна Карлемана, скончавшегося 11 января 1949 года, ведет свое начало от одной его работы, напечатанной в журнале *Acta Mathematica*, том 60, 1932 г., и озаглавленной „О теории интегро-дифференциального уравнения Больцмана". В этой работе строго доказано существование единственного решения уравнения Больцмана для частного случая, когда функция распределения скоростей молекул $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$ не зависит от пространственных координат x, y, z. Карлеман предполагает также, что эта функция зависит только от t и от модуля скорости $\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, и называет свою работу предварительным мемуаром, добавляя, что использованные в ней методы применимы также в общем случае, который он намерен изучить в последующем. Очевидно, это намерение не могло быть осуществлено без перерывов; в течение многих лет Карлеман несколько раз возвращался к этому большому делу. К моменту его кончины имелся черновик рукописи, в которой он осуществил свои планы, одновременно расширив их. Завершить свой труд Карлеману не удалось.

Мы сочли невозможным без чрезмерного насилия над рукописью полностью соединить отдельные части монографии, так же как и добавить к ней последние достижения науки. Своей главной задачей мы считали проверку доказательств и внесение дополнений в текст, чтобы сделать его более ясным. Но даже эта скромная программа привела

в ряде мест к значительным отклонениям от первоначального текста Карлемана. Так, новым является нахождение функции F в случае равновесия, приведенное в § 6, и лемма из § 8, важная для строгого доказательства H-теоремы Больцмана в обобщенной форме, которая принадлежит Карлсону. Эта лемма применяется также при изучении поведения решения при $t \to \infty$, благодаря чему удается сократить довольно длинные рассуждения, проводившиеся Карлеманом в соответствующем месте его статьи в *Acta Mathematica*. Мы изъяли два коротких параграфа во второй части: один, посвященный изучению решений уравнений (17) в окрестности точки $\alpha = \beta = \gamma = x = 0$, и второй — ряду Энскога. Содержание этих параграфов было настолько неполным, что не стоило включать их в данную работу.

Леннарт Карлсон *Отто Фростман*
Уппсала и Стокгольм, ноябрь 1956 г.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Глава I

ОБЩЕЕ ИЗУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

§ 1

Определение функции распределения

Рассмотрим газ, молекулы которого отличаются друг от друга только положениями и скоростями. Для изучения свойств такого газа вводят функцию распределения

$$F(x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ t),$$

которая определяется таким образом, что $F dv\, d\omega$ представляет собой число молекул, центры которых в момент времени t находятся в элементе объема $dv = dx\, dy\, dz$, а векторы скорости $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ оканчиваются в элементе $d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ пространства скоростей Ω. Обозначим через p вектор с компонентами $\xi,\ \eta,\ \zeta$ и условимся употреблять следующую краткую запись:

(1) $$F\ (x,\ y,\ z,\ \xi, \eta,\ \zeta, t) = F\,(p).$$

Больцман вывел интегро-дифференциальное уравнение для функции F в двух случаях, соответствующих следующим гипотезам:

1) Молекулы являются абсолютно упругими шарами.

2) Молекулы отталкиваются (или притягиваются) центральными силами.

§ 2

Вывод уравнения Больцмана

Заметим с самого начала, что вывод, который мы проведем, в сильной степени страдает отсутствием строгости, так же как и само определение функции распределения.

в ряде мест к значительным отклонениям от первоначального текста Карлемана. Так, новым является нахождение функции F в случае равновесия, приведенное в § 6, и лемма из § 8, важная для строгого доказательства H-теоремы Больцмана в обобщенной форме, которая принадлежит Карлсону. Эта лемма применяется также при изучении поведения решения при $t \to \infty$, благодаря чему удается сократить довольно длинные рассуждения, проводившиеся Карлеманом в соответствующем месте его статьи в *Acta Mathematica*. Мы изъяли два коротких параграфа во второй части: один, посвященный изучению решений уравнений (17) в окрестности точки $\alpha = \beta = \gamma = x = 0$, и второй — ряду Энскога. Содержание этих параграфов было настолько неполным, что не стоило включать их в данную работу.

Леннарт Карлсон *Отто Фростман*
Уппсала и Стокгольм, ноябрь 1956 г.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

Глава I

ОБЩЕЕ ИЗУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

§ 1

Определение функции распределения

Рассмотрим газ, молекулы которого отличаются друг от друга только положениями и скоростями. Для изучения свойств такого газа вводят функцию распределения

$$F(x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ t),$$

которая определяется таким образом, что $F dv\, d\omega$ представляет собой число молекул, центры которых в момент времени t находятся в элементе объема $dv = dx\, dy\, dz$, а векторы скорости $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ оканчиваются в элементе $d\omega = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ пространства скоростей $\mathfrak{Q}$. Обозначим через p вектор с компонентами $\xi,\ \eta,\ \zeta$ и условимся употреблять следующую краткую запись:

(1) $$F\ (x,\ y,\ z,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ t) = F\ (p).$$

Больцман вывел интегро-дифференциальное уравнение для функции F в двух случаях, соответствующих следующим гипотезам:

1) Молекулы являются абсолютно упругими шарами.

2) Молекулы отталкиваются (или притягиваются) центральными силами.

§ 2

Вывод уравнения Больцмана

Заметим с самого начала, что вывод, который мы проведем, в сильной степени страдает отсутствием строгости, так же как и само определение функции распределения.

Для того чтобы найти функциональное уравнение для функции F, мы рассмотрим произвольную область G в пространстве шести измерений $(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$ и функцию $\phi(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, обращающуюся в нуль на границе области G и вне G. Образуем сумму

$$I = \sum_G \phi(x_\nu, y_\nu, z_\nu, \xi_\nu, \eta_\nu, \zeta_\nu),$$

распространенную на все те молекулы, которые представляются точками $(x, y, z, \xi, \eta, \zeta)$, принадлежащими G. Так как ϕ обращается в нуль вне G, мы можем распространить суммирование на все молекулы. Вычислим приращение I за время dt, большое по сравнению с продолжительностью отдельного соударения, но малое по сравнению со средним временем, протекающим между двумя соударениями. Допустим, что газ находится в поле внешних сил с составляющими X, Y, Z. Большинство молекул не подвергаются соударениям за время dt. Приращение dI величины I за время dt равно

$$dI = d_1 I + d_2 I, \tag{2}$$

где $d_1 I$ есть приращение, соответствующее регулярному движению молекул, не подвергающихся соударениям, а $d_2 I$ обозначает изменение, вызванное соударениями. Имеем

$$d_1 I = \sum_G{}' \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx_\nu}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy_\nu}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz_\nu}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{d\xi_\nu}{dt} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{d\eta_\nu}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\frac{d\zeta_\nu}{dt} \right) dt = \sum_G{}' \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\xi_\nu + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial\phi}{\partial y}\eta_\nu + \frac{\partial\phi}{\partial z}\zeta_\nu + X\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + Y\frac{\partial\phi}{\partial\eta} + Z\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \right) dt.$$

Так как сумма $\sum_G{}'$ охватывает большинство рассматриваемых молекул, то мы можем в согласии со смыслом функции F написать эту формулу в виде

$$d_1 I = \int_G \left[\xi\frac{\partial\phi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\phi}{\partial y} + \zeta\frac{\partial\phi}{\partial z} + X\frac{\partial\phi}{\partial\xi} + \right.$$

$$\left. + Y\frac{\partial\phi}{\partial\eta} + Z\frac{\partial\phi}{\partial\zeta} \right] F\, dv\, d\omega\, dt.$$

После интегрирования по частям получим

$$(3)\qquad d_1 I = -dt \int\limits_G \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta}\right] \phi \, dv \, d\omega.$$

Для того чтобы вычислить $d_2 I$, мы предположим сначала, что молекулы являются упругими шарами диаметра χ. Обозначим через dM_p множество молекул, принадлежащих элементу $dv\, d\omega_p$, и через dM_{p_1} множество, соответствующее $dv\, d\omega_{p_1}$. Пусть в момент соударения A и B обозначают центры двух молекул, принадлежащих dM_p и dM_{p_1}. Вектор $\overrightarrow{BA}$ можно записать в виде χq, где q — вектор единичной длины. Если предположить, что начало вектора q зафиксировано, то конец q описывает сферу Σ единичного радиуса. Чтобы найти число соударений между молекулами из dM_p и молекулами из dM_{p_1}, мы можем заменить молекулы из dM_{p_1} молекулами радиуса χ, а молекулы из dM_p — точками. Число столкновений, для которых q принадлежит некоторому определенному элементу поверхности $d\sigma$, можно вычислить следующим образом. Для каждой молекулы из dM_{p_1} построим конус, соответствующий телесному углу $d\sigma$ с вершиной в точке B. Этот конус вырезает из сферы радиуса χ с центром в B элемент поверхности $d\alpha$. Построим в каждой точке $d\alpha$ вектор, равный $(p_1 - p)\, dt$. При этом получится наклонный цилиндр, объем которого равен

$$\chi^2 \, d\sigma \, (p_1 - p,\ q)\, dt = dV.$$

Ясно, что число соударений между молекулами, принадлежащими dM_p, и молекулами из dM_{p_1}, для которых q принадлежит $d\sigma$, равно числу молекул из dM_p, центры которых находятся в одном из объемов dV. Если предположить, что эти молекулы образуют локально хаотическое множество, то это число должно равняться

$$\chi^2 F(p) F(p_1) (p_1 - p,\ q)\, d\omega_p \, d\omega_{p_1} \, d\sigma_q \, dv \, dt.$$

Очевидно, что область изменения q должна быть ограничена той полусферой, где $(p_1 - p,\ q) \geqslant 0$. Следовательно, число

столкновений за единицу времени, соответствующих элементу $d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q\, dv$, равно

$$\chi^2 F(p) F(p_1) (p_1 - p,\ q)\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q\, dv. \tag{4}$$

Теперь мы займемся вычислением значений скоростей p' и p_1' молекул A и B после соударения. Если рассматривать движение A относительно B, то A имеет скорость

$$P = p - p_1.$$

Разложим P на составляющие: одну — в направлении q, другую — перпендикулярную к q:

$$P = q(p - p_1,\ q) + (P - q(p - p_1,\ q)). \tag{5}$$

После соударения первая из этих составляющих меняет знак, а вторая остается без изменения. Поэтому относительная скорость P' после соударения дается формулой

$$P' = -q(p - p_1,\ q) + (P - q(p - p_1,\ q)), \tag{6}$$

которую можно записать также в следующем виде:

$$p' - p_1' = p - p_1 - 2q(p - p_1,\ q). \tag{7}$$

Согласно теореме о движении центра масс, имеем

$$p + p_1 = p' + p_1'.$$

Следовательно,

$$p' = p - q(p - p_1,\ q),$$
$$p_1' = p_1 + q(p - p_1,\ q),$$
$$(p' - p_1',\ q) = -(p - p_1,\ q).$$

Если положить

$$q' = -q,$$

то

$$W' = (p' - p_1',\ q') = (p - p_1,\ q) = W.$$

Следовательно, окончательно

$$(8)\qquad \begin{cases} p' = p - q(p - p_1,\ q), \\ p_1' = p_1 + q(p - p_1,\ q), \\ q' = -q; \end{cases}$$

$$(9)\qquad \begin{cases} p = p' - q'(p' - p_1',\ q'), \\ p_1 = p_1' + q'(p' - p_1',\ q'), \\ q = -q'. \end{cases}$$

Отсюда заключаем, что преобразование (8) инволютивно.

Обозначим через E_1 ту часть многообразия $\Omega \times \Omega_1 \times \Sigma$, которая удовлетворяет соотношению $(p_1 - p,\ q) \geqslant 0$. Очевидно, преобразование (8) является инволютивной подстановкой, которая переводит E_1 в себя. Введя прямоугольные координаты $(\xi,\ \eta,\ \zeta)$, $(\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1)$, $(l,\ m,\ n)$ для p, p_1, q, находим

$$(10)\qquad \begin{aligned} \xi' &= \xi - lW, \quad \xi_1' = \xi_1 + lW, \quad l' = -l, \\ \eta' &= \eta - mW, \quad \eta_1' = \eta_1 + mW, \quad m' = -m, \\ \zeta' &= \zeta - nW, \quad \zeta_1' = \zeta_1 + nW, \quad n' = -n, \end{aligned}$$

где

$$W = l(\xi - \xi_1) + m(\eta - \eta_1) + n(\zeta - \zeta_1).$$

В силу свойства инволютивности это преобразование сохраняет элемент объема многообразия $\Omega \times \Omega_1 \times \Sigma$, что мы можем записать символически так:

$$d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q = d\omega_{p'}\, d\omega_{p_1'}\, d\sigma_{q'}\ ^{1}).$$

Пусть Δ — область пространства Ω. Обозначим через L ту часть множества E_1, для которой векторы p принадлежат Δ, а через L' — образ L при преобразовании (8). Обозначим также через LL' пересечение L и L'. Число молекул в dv, для которых представляющие точки векторов скорости выходят из Δ за время dt, очевидно, равно

$$\chi^2\, dv\, dt \int\limits_{L-LL'} F(p)\, F(p_1)\, W\, d\omega_{p_1}\, d\omega_p\, d\sigma.$$

---

1) См., например, Chapman — Cowling, The mathematical theory of non-uniform gases, Cambridge, 1939, pp. 64—65. [Русский перевод готовится к печати. — *Прим. ред.*]

Число молекул, входящих в Δ, равно, в силу свойства инволютивности (8),

$$\chi^2\, dv\, dt \int\limits_{L'-LL'} F(p)\, F(p_1)\, W\, d\omega_{p_1}\, d\omega_p\, d\sigma = \\ = \chi^2\, dv\, dt \int\limits_{L-LL'} F(p')\, F(p_1')\, W\, d\omega_{p_1}\, d\omega_p\, d\sigma.$$

Таким образом, полное приращение числа молекул в Δ равно

$$\chi^2\, dv\, dt \left\{ \int\limits_{L'} F(p)\, F(p_1)\, W\, d\omega_{p_1}\, d\omega_p\, d\sigma - \right. \\ \left. - \int\limits_{L} F(p)\, F(p_1)\, W\, d\omega_{p_1}\, d\omega_p\, d\sigma \right\} = \\ = \chi^2\, dv\, dt \int\limits_{L} [F(p')\, F(p_1') - F(p)\, F(p_1)]\, W\, d\omega_{p_1}\, d\omega_p\, d\sigma = \\ = \frac{\chi^2}{2}\, dv\, dt \int\limits_{\Delta \times \Omega_1 \times \Sigma} [F(p')\, F(p_1') - F(p)\, F(p_1)]\, |W|\, d\omega_{p_1}\, d\omega_p\, d\sigma.$$

Отсюда следует, что

$$(11) \qquad d_2 I = dt \cdot \frac{\chi^2}{2} \int\limits_{G} \phi \int\limits_{\Omega_1 \times \Sigma} [F(p')\, F(p_1') - \\ - F(p)\, F(p_1)]\, |W|\, d\omega_{p_1}\, d\sigma\, d\omega_p\, dv.$$

Следовательно, замечая, что

$$I = \int\limits_{G} \phi F\, dv\, d\omega, \quad \frac{\partial I}{\partial t} = \int\limits_{G} \phi\, \frac{\partial F}{\partial t}\, dv\, d\omega,$$

получим, согласно соотношениям (2), (3) и (11),

$$\int\limits_{G} \phi \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + \right. \\ + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta} - \frac{\chi^2}{2} \int\limits_{\Omega_1 \times \Sigma} [F(p')\, F(p_1') - \\ \left. - F(p)\, F(p_1)]\, |W|\, d\omega_{p_1}\, d\sigma \right] dv\, d\omega = 0.$$

Так как это соотношение имеет место для произвольной функции, обращающейся в нуль на границе области G, то

$$(12)\quad \frac{\partial F}{\partial t}+\xi\frac{\partial F}{\partial x}+\eta\frac{\partial F}{\partial y}+\zeta\frac{\partial F}{\partial z}+X\frac{\partial F}{\partial \xi}+Y\frac{\partial F}{\partial \eta}+Z\frac{\partial F}{\partial \zeta}=$$
$$=\frac{\chi^2}{2}\int_{\Sigma}\int_{\Omega_1}\left[F(p')F(p_1')-F(p)F(p_1)\right]|W|\,d\omega_{p_1}\,d\sigma.$$

Это и есть уравнение Больцмана в случае, когда молекулы являются абсолютно упругими шарами.

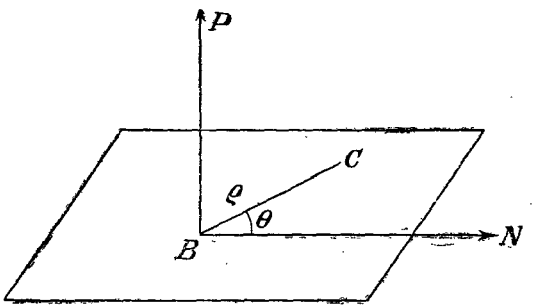

Рис. 1.

Рассмотрим теперь случай, когда взаимодействие молекул определяется центральными силами. Величина d_1I вычисляется так же, как и в предыдущем случае. Для того чтобы найти выражение для d_2I, сохраним обозначения, введенные выше при изучении влияния упругих соударений. Мы будем говорить, что молекула A, имеющая скорость p, соударяется с другой молекулой B, имеющей скорость p_1, если в относительном движении A по отношению к B продолжение линии движения A (до соударения) пройдет от B на расстоянии, меньшем некоторой определенной величины ρ_0, которую мы назовем радиусом действия молекулы B. Заметим, что ρ_0 может зависеть от величины относительной скорости $|p-p_1|$. Для того чтобы характеризовать соударения между A и B, мы построим вектор $P=p-p_1$ (с началом в B) и плоскость E, проходящую через B перпендикулярно к P. Обозначим через C точку, в которой траектория относительного движения A (до соударения) пересекает плоскость E. Мы определим положение C при помощи полярных координат ρ, θ в E,

вводя произвольную ось BN, соответствующую значению $\theta = 0$. Удобно выбрать в качестве BN линию пересечения плоскости E с плоскостью, проходящей через векторы

$$P \text{ и } Q = \frac{p + p_1}{2}.$$

При соударении точка A отклоняется в плоскости, содержащей P и точку C, на угол φ, зависящий только от ρ и $|p - p_1|$. Обозначим, как и выше, через p' и p_1' скорости молекул A и B после соударения и положим $P' = p' - p_1'$. Согласно теореме о движении центра масс, мы имеем

$$Q = \frac{p + p_1}{2} = \frac{p' + p_1'}{2} = Q'. \tag{13}$$

Для того чтобы охарактеризовать движение после соударения, мы введем координаты ρ', θ' в плоскости E', соответствующие координатам ρ и θ в плоскости E. Имеем $\rho' = \rho$, и, кроме того, можно выразить P' и Q' в виде функций от P, Q, ρ и θ. Эти соотношения инволютивны, и мы, таким образом, получили инволютивное преобразование

$$(P, Q, \rho, \theta) \rightleftarrows (P', Q', \rho', \theta').$$

Утверждается, что это преобразование сохраняет объемную меру[1]), т. е. что можно записать символически

$$d\omega_{p'}\, d\omega_{p_1'} \rho'\, d\rho'\, d\theta' = d\omega_p\, d\omega_{p_1} \rho\, d\rho\, d\theta. \tag{14}$$

Вернемся теперь к нахождению выражения для $d_2 I$. Очевидно, что в данном случае формулу (4) следует заменить формулой

$$F(p)\, F(p_1)\, |p - p_1|\, d\omega_p\, d\omega_{p_1} \rho\, d\rho\, d\theta,$$

откуда заключаем с помощью рассуждений, подобных проведенным выше, что

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta} = \tag{15}$$

$$= \int_{\Omega_1} \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho_0} [F(p')\, F(p_1') - F(p)\, F(p_1)]\, |p - p_1|\, \rho\, d\rho\, d\theta\, d\omega_{p_1}.$$

[1]) Ср. Chapman — Cowling, *loc. cit.*

§ 3

Общая структура уравнения Больцмана

Рассмотрим восьмимерную область $E = \Omega \times \Omega_1 \times \Sigma$, которая получается, когда точки p, p_1, q пробегают соответственно пространства Ω, Ω_1 и Σ, где Ω есть все пространство точек p, Ω_1 — все пространство точек p_1, а Σ — заданная поверхность, являющаяся областью изменения q. Предположим заданным некоторое преобразование области E в себя:

$$\begin{aligned} p' &= g_1(p, p_1, q), \\ p_1' &= g_2(p, p_1, q), \\ q' &= g_3(p, p_1, q). \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначая через U тройку точек (p, p_1, q) и аналогично (p', p_1', q') через U', мы можем записать это преобразование в сокращенном виде

$$U' = S(U).$$

Мы сделаем относительно S следующие предположения:

1) S есть инволютивное преобразование, т. е.

$$S(S(U)) = U.$$

2) Преобразование S сохраняет элемент объема

$$d\omega_p \, d\omega_{p_1} \, d\sigma_q.$$

Обозначим через $h(p, p_1, q)$ положительную функцию, инвариантную относительно преобразования S. Тогда обобщенное уравнение Больцмана есть, по определению,

$$D(F) = \int_{\Omega_1} \int_{\Sigma} [F(p')F(p_1') - F(p)F(p_1)] \times \times h(p, p_1, q) \, d\sigma_q \, d\omega_{p_1} = T(F), \tag{17}$$

где положено

$$D(F) = \frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial \xi} + + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta}. \tag{18}$$

Уравнения (12) и (15) предыдущего параграфа относятся, очевидно, к категории функциональных уравнений, которую мы только что определили. Для уравнения (12) поверхностью Σ служит сфера единичного радиуса, в то время как для уравнения (15) Σ есть бесконечная плоскость.

Наконец, заметим, что преобразования $S(U)$, соответствующие уравнениям (12) и (15), оставляют инвариантными следующие функции:

$$\begin{aligned} &\xi+\xi_1;\\ &\eta+\eta_1;\\ &\zeta+\zeta_1;\\ &\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2. \end{aligned} \tag{19}$$

Заметим, что в случаях (10) и (14) преобразование S обладает еще тем свойством, что замена p на p_1 влечет замену p' на p_1', если только в то же время заменить q точкой q^* поверхности Σ таким образом, чтобы это преобразование Σ в себя сохраняло элемент площади. Имеем также

$$h(p,\ p_1,\ q)=h(p_1,\ p,\ q^*).$$

В случае (10) преобразование $q\to q^*$ является тождественным преобразованием, в то время как в случае (14) следует заменить θ на $-\theta$.

§ 4

Классические основные формулы

В литературе по кинетической теории газов часто употребляются следующие обозначения (см., например, Hilbert, Grundzüge der Theorie der Integralgleichungen):

$$F(p)=F,\quad F(p_1)=F_1,\quad F(p')=F',\quad F(p_1')=F_1'; \tag{20}$$

$$[F,\ F]=h\left(F'F_1'-FF_1\right); \tag{21}$$

$$[F,\ G]=\frac{h}{2}\left(F'G_1'+F_1'G'-FG_1-F_1G\right). \tag{22}$$

Мы будем изучать выражение

$$\int_{\Omega}\phi(p)\,T(F)\,d\omega_p,$$

где $\phi(p)$ — произвольная заданная функция, а $T(F)$ — правая часть введенного выше обобщенного уравнения Больцмана.

Получаем

$$(23)\quad \int_{\Omega} \phi T(F)\, d\omega_p = \int_{\Sigma}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega} \phi\,[F,\ F]\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q = \\ = -\int_{\Sigma}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega} \phi'\,[F,\ F]\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q,$$

где последний член получен применением преобразования S к подинтегральному выражению предыдущего члена. Формула (23) дает сразу

$$(24)\quad \int_{\Omega} \phi T(F)\, d\omega_p = \frac{1}{2}\int_{\Sigma}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega} (\phi - \phi')\,[F,\ F]\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q.$$

Сделав в этой формуле замену переменных $p \rightleftarrows p_1$, $q \to q^*$, о которой говорилось в конце предыдущего параграфа, найдем

$$(25)\quad \int_{\Omega} \phi T(F)\, d\omega_p = \frac{1}{2}\int_{\Sigma}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega} (\phi_1 - \phi_1')\,[F,\ F]\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q.$$

Складывая равенства (24) и (25), получаем

$$(26)\quad \int_{\Omega} \phi T(F)\, d\omega_p = \\ = \frac{1}{4}\int_{\Sigma}\int_{\Omega_1}\int_{\Omega} (\phi + \phi_1 - \phi' - \phi_1')\,[F,\ F]\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q.$$

Если положить $\phi = \log F$, то мы придем к формуле

$$(27)\quad \int_{\Omega} T(F) \log F\, d\omega_p = \frac{1}{4}\int\int\int_{\Sigma\ \Omega_1\ \Omega} [F,\ F] \log \frac{FF_1}{F'F_1'}\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q.$$

Функция, находящаяся под знаком интеграла в правой части, необходимо отрицательна или равна нулю, откуда следует *важное неравенство*

$$(28)\quad \int_{\Omega} T(F) \log F\, d\omega_p \leqslant 0.$$

Заметим, что если $h = \frac{\chi^2}{2} |W|$ и если

$$\frac{c_1}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}} \leqslant F \leqslant \frac{c_2}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \qquad \varkappa > 6, \tag{29}$$

то все выписанные выше интегралы абсолютно сходятся для $\phi = \log F$. Таким образом, соотношение (28) доказано строго. Оно вытекает непосредственно из факта существования двух таких постоянных C_1 и C_2, что

$$C_1 < \frac{|p'| + |p_1'|}{|p| + |p_1|} < C_2.$$

Выражение $T(F, G)$

Мы определим $T(F, G)$ формулой

$$T(F, G) = \int_{\Omega_1} \int_{\Sigma} [F, G]\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q.$$

Соотношение (26) сразу обобщается следующим образом:

$$\int_{\Omega} \phi T(F, G)\, d\omega_p = \tag{30}$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} \int_{\Sigma} (\phi + \phi_1 - \phi' - \phi_1')\, [F, G]\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q.$$

Выражения $J(F)$, $J(F, G)$, $L(F)$

Выражение $T(F)$ можно записать так:

$$T(F) = J(F) - FL(F), \tag{31}$$

где положено

$$J(F) = \int_{\Omega_1} \int_{\Sigma} F(p') F(p_1')\, h(p, p_1, q)\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q, \tag{32}$$

$$L(F) = \int_{\Omega_1} \int_{\Sigma} F(p_1)\, h(p, p_1, q)\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q. \tag{33}$$

$J(F)$ есть однородное функциональное преобразование второго порядка функции F, $L(F)$ — линейное функциональное преобразование этой функции. Рассмотрим выражение

$$\int_{\Omega} \phi J(F)\, d\omega_p = \tag{34}$$

$$= \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} \int_{\Sigma} \phi(p) F(p') F(p_1')\, h(p, p_1, q)\, d\omega_{p_1}\, d\omega_p\, d\sigma_q.$$

Осуществив преобразование S под знаком интеграла, найдем

$$(35)\quad \int_{\Omega} \phi J(F)\, d\omega_p = \int_{\Omega}\int_{\Omega_1}\int_{\Sigma} \varphi(p') F(p) F(p_1) h(p, p_1, q)\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q.$$

Определим еще $J(F, G)$ формулой

$$(36)\quad J(F, G) = \int_{\Omega_1}\int_{\Sigma} F(p') G(p_1') h(p, p_1, q)\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q.$$

Сразу получим

$$(37)\quad \int_{\Omega} \phi J(F, G)\, d\omega_p = \int_{\Omega}\int_{\Omega_1}\int_{\Sigma} \phi(p') F(p) G(p_1) h(p, p_1, q)\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q.$$

Отметим, наконец, формулу

$$(38)\quad \int_{\Omega} \phi T(F)\, d\omega_p = \int_{\Omega}\int_{\Omega_1}\int_{\Sigma} [\phi(p') - \phi(p)] F(p) F(p_1) \times h(p, p_1, q)\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}\, d\sigma_q.$$

Следствия из формулы (30)

Заменим в формуле (30) функцию ϕ одной из функций $1, \xi, \eta, \zeta, \xi^2+\eta^2+\zeta^2$. В силу свойств инвариантности, отмеченных в конце предыдущего параграфа, имеем

$$\phi(p) + \phi(p_1) - \phi(p') - \phi(p_1') = 0,$$

откуда заключаем, что

$$(39)\quad \int_{\Omega} T(F, G)\, d\omega_p = 0,$$

$$\int_{\Omega} \xi T(F, G)\, d\omega_p = \int_{\Omega} \eta T(F, G)\, d\omega_p = \int_{\Omega} \zeta T(F, G)\, d\omega_p = 0,$$

$$\int_{\Omega} (\xi^2+\eta^2+\zeta^2) T(F, G)\, d\omega_p = 0.$$

§ 5

Состояние равновесия однородного газа

Если состояние газа не зависит от координат x, y, z, то мы можем предположить, что функция F независима от этих переменных. В этом случае уравнение Больцмана можно записать в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t}+X\frac{\partial F}{\partial \xi}+Y\frac{\partial F}{\partial \eta}+Z\frac{\partial F}{\partial \zeta}=T(F). \tag{40}$$

Если умножить это уравнение на $d\omega_p$ и проинтегрировать по Ω, то получим, сделав необходимые предположения о сходимости,

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} F\,d\omega_p=\int\limits_{\Omega} T(F)\,d\omega_p=0. \tag{41}$$

Умножением (40) на $\log F$ и интегрированием получим

$$\int\limits_{\Omega}\frac{\partial F}{\partial t}\log F\,d\omega_p=\int\limits_{\Omega} T(F)\log F\,d\omega_p. \tag{42}$$

Таким образом, учитывая (41), мы видим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega} F\log F\,d\omega_p=\int\limits_{\Omega} T(F)\log F\,d\omega_p= \tag{43}$$

$$=\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Sigma}[F,\ F]\log\frac{FF_1}{F'F_1'}\,d\omega_p\,d\omega_{p_1}\,d\sigma_q\leqslant 0.$$

Если имеется равновесие, то левая часть (43) должна равняться нулю, откуда следует, что

$$F(p')F(p_1')-F(p)F(p_1)=0 \tag{44}$$

тождественно, каковы бы ни были p, p_1, q.

Из свойств инвариантности (19) немедленно следует, что функция

$$F=e^{-\alpha(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+a\xi+b\eta+c\zeta+d} \tag{45}$$

является решением уравнения (44), каковы бы ни были α, a, b, c, d. Соотношение (17) показывает, что

$$T(F)=0,$$

если F есть функция распределения, соответствующая состоянию равновесия. В этом случае имеем также

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

откуда заключаем, что

$$X\frac{\partial F}{\partial \xi} + Y\frac{\partial F}{\partial \eta} + Z\frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0. \tag{46}$$

Если (45) есть самое общее решение уравнения (44) (это мы скоро докажем), то из (46) непосредственно следует, что для того, чтобы однородный газ допускал состояние равновесия, составляющие X, Y, Z должны равняться нулю.

§ 6

Решение уравнения $F(p')F(p_1') - F(p)F(p_1) = 0$

Положим $\log F(p) = f(p)$; тогда уравнение (44) перепишется так:

$$f(p) + f(p_1) = f(p') + f(p_1'). \tag{47}$$

Очевидно, можно предположить $f(0) = 0$, откуда непосредственно следует, что

(48) из $(p, p_1) = 0$ вытекает $f(p) + f(p_1) = f(p + p_1)$.

Действительно, соотношение (47) должно иметь место, каков бы ни был вектор q, определяющий преобразование (8); выбрав $q = p/|p|$, получим в этом случае $p' = 0$ и $p_1' = p + p_1$.

Положим, далее,

$$g(p) = f(p) + f(-p),$$
$$h(p) = f(p) - f(-p).$$

Если $(p, p_1) = 0$, то, в силу (48), имеем

$$g(p) + g(p_1) = f(p + p_1) + f(-(p + p_1)) = g(p + p_1) \tag{49}$$

и также

$$g(p) + g(p_1) = f(p - p_1) + f(-(p - p_1)) = g(p - p_1).$$

Следовательно,

$$\text{из } (p,\ p_1)=0 \text{ вытекает } g(p+p_1)=g(p-p_1).$$

Предположим теперь, что $|p|=|p_1|=r$, а в остальном p и p_1 произвольны; тогда векторы $s=\frac{p+p_1}{2}$ и $s_1=\frac{p-p_1}{2}$ взаимно ортогональны, и предыдущее соотношение дает нам

$$g(p)=g(s+s_1)=g(s-s_1)=g(p_1),$$

т. е. $g(p)$ зависит только от r. Положим тогда

$$g(p)=\varphi(r^2).$$

Функция φ должна удовлетворять вытекающему из (49) соотношению

$$\varphi(r^2)+\varphi(r_1^2)=\varphi(|p+p_1|^2)=\varphi(r^2+r_1^2),$$

где $|p|=r$ и $|p_1|=r_1$ произвольны и $(p,\ p_1)=0$, откуда следует, что

$$\varphi(r^2)=-2\alpha r^2.$$

Далее мы хотим доказать, что функция $h(p)$ аддитивна для произвольных векторов p и p_1. Пусть j и $j_1=\pm j$ — два вспомогательных вектора, удовлетворяющие условиям

(50) $\quad (j,\ p)=(j,\ p_1)=0, \qquad (j,\ j_1)+(p,\ p_1)=0.$

В силу (48), имеем

$$h(p)+h(p_1)=[f(p+j)+f(p_1+j_1)]-[f(-p+j)+f(-p_1+j_1)].$$

Заметив, что условия (50) влекут за собой равенства

$$(p+j,\ p_1+j_1)=(-p+j,\ -p_1+j_1)=0,$$
$$(p+p_1,\ j+j_1)=0,$$

получаем

$$h(p)+h(p_1)=f((p+p_1)+(j+j_1))-f(-(p+p_1)+(j+j_1))=f(p+p_1)-f(-(p+p_1))=h_1(p+p_1).$$

Следовательно, функция $h(p)$ необходимо имеет вид

$$h(p)=2a\xi+2b\eta+2c\zeta,$$

откуда вытекает наконец, что

$$f(p)=\frac{1}{2}[g(p)+h(p)]=-\alpha(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+a\xi+b\eta+c\zeta.$$

Если отказаться от условия $f(0)=0$, принятого выше, то к полученному решению следует добавить аддитивную константу d, так что

$$F(p)=e^{-\alpha(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+a\xi+b\eta+c\zeta+d}.$$

Это самое общее решение уравнений (44). В силу соотношения (27), оно является также наиболее общим решением уравнения

$$T(F)=0,$$

где α, a, b, c, d — произвольные функции от x, y, z, t.

§ 7

Граничные условия

Предположим, что газ заключен в неподвижный сосуд, оболочкой которого служит поверхность S. Мы укажем граничные условия для функции F, приняв одну из двух следующих простых гипотез:

I. Молекулы зеркально отражаются абсолютно упругой стенкой, так что угол падения равен углу отражения, а абсолютная скорость до и после удара о стенку остается неизменной. В этом случае граничное условие для $F(p)$ можно выразить формулой

$$F(p)=F(p'),$$

где p — первоначальная скорость, а p' — скорость после отражения и

$$l\xi+m\eta+n\zeta\leqslant 0,$$

где l, m, n — направляющие косинусы внутренней нормали.

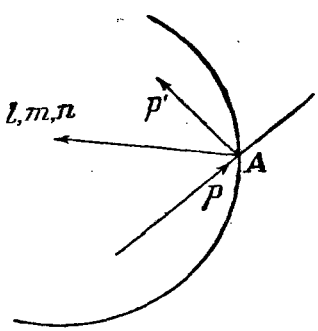

Рис. 2.

II. В этом случае мы предположим, что почти все молекулы, ударяющиеся о стенку, входят внутрь твердого

материала, из которого сделана оболочка сосуда, и приобретают среднее количество движения, соответствующее температуре оболочки в точке соударения. Мы предположим, кроме того, что молекулы возвращаются обратно в сосуд с распределением скоростей Максвелла. Если

$$l\xi + m\eta + n\zeta > 0,$$

то мы должны иметь

$$F(\xi, \eta, \zeta) = Ae^{-\alpha(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)},$$

где A и α зависят только от x, y, z и удовлетворяют следующим условиям:

1) Масса, которая входит внутрь через элемент поверхности, должна равняться массе, выходящей оттуда:

$$(51) \quad -\int\limits_{l\xi+m\eta+n\zeta<0} F(p)\,[l\xi + m\eta + n\zeta]\,d\omega_p = \int\limits_{l\xi+m\eta+n\zeta>0} Ae^{-\alpha(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\,(l\xi + m\eta + n\zeta)\,d\omega_p.$$

2) Количество энергии, которое входит внутрь через элемент поверхности, должно равняться количеству выходящей энергии:

$$(52) \quad -\int\limits_{l\xi+m\eta+n\zeta<0} F(p)\,(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,(l\xi + m\eta + n\zeta)\,d\omega_p = \int\limits_{l\xi+m\eta+n\zeta>0} Ae^{-\alpha(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}\,(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\times \times (l\xi + m\eta + n\zeta)\,d\omega_p + C\frac{\partial T}{\partial N}.$$

(N есть внутренняя нормаль к поверхности сосуда, T — температура, $C > 0$.)

Указанные условия, вообще говоря, приводят к резкому скачку температуры на поверхности оболочки сосуда.

В обоих случаях, I и II, мы имеем на поверхности оболочки

$$(53) \quad \int\limits_{\Omega} F(p)\,(l\xi + m\eta + n\zeta)\,d\omega_p = 0,$$

В случае I имеем, кроме того,

$$(54) \qquad \int_{\Omega} F(p)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(l\xi+m\eta+n\zeta)\,d\omega_p = 0,$$

а в случае II

$$(55) \qquad \int_{\Omega} F(p)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)(l\xi+m\eta+n\zeta)\,d\omega_p = -C\frac{\partial T}{\partial N}.$$

§ 8

H-теорема Больцмана

Лемма об одной вариационной задаче

Пусть μ *— положительное распределение массы и* ψ *— некоторая непрерывная функция. Рассмотрим класс* C *непрерывных функций* $\varphi \geqslant 0$, *удовлетворяющих условиям*

$$(A) \int_{\Omega} \varphi\, d\mu = A, \qquad (B) \int_{\Omega} \varphi\psi^2\, d\mu \leqslant B,$$

и предположим, что существует функция

$$\varphi_0 = ae^{-\alpha\psi^2}, \quad \alpha > 0, \quad \varphi_0 \in C,$$

такая, что в (B) *имеет место знак равенства. Тогда для всех* $\varphi \in C$

$$I(\varphi) = \int_{\Omega} \varphi \log \varphi\, d\mu \geqslant I(\varphi_0),$$

и знак равенства имеет место только в том случае, если $\varphi \equiv \varphi_0$ *в области существования* μ.

Действительно, рассмотрим для $\varphi > 0$ функцию от φ

$$h(\varphi) = \varphi \log \varphi + \alpha\psi^2\varphi - (\log a + 1)\varphi.$$

Элементарным вычислением находим, что $h(\varphi)$ будет минимально тогда и только тогда, когда $\varphi = \varphi_0$, и это минимальное значение равно $-\varphi_0$. Поэтому для любой фиксированной точки пространства Ω имеем

$$\varphi \log \varphi \geqslant -\alpha\psi^2\varphi + (\log a + 1)\varphi - \varphi_0,$$

где знак равенства имеет место только в том случае, если $\varphi = \varphi_0$. Интегрируя это неравенство по неотрицательному распределению μ, получаем

$$I(\varphi) \geqslant -\alpha B + (\log a + 1) A - A = I(\varphi_0),$$

где равенство имеет место только в указанном выше случае.

Рассмотрим теперь газ, содержащийся в сосуде V с поверхностью Γ, и предположим, что граничными условиями являются условия I или II предыдущего параграфа. Образуем интеграл

$$H = \int_V \int_\Omega F \log F \, d\omega_p \, dv.$$

Дифференцируя по t, получаем

$$\frac{dH}{dt} = \int_V \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial t} \, d\omega_p \, dv + \int_V \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial t} \log F \, d\omega_p \, dv = I_1 + I_2.$$

Заменим $\partial F/\partial t$ на выражение

$$-\xi \frac{\partial F}{\partial x} - \eta \frac{\partial F}{\partial y} - \zeta \frac{\partial F}{\partial z} - X \frac{\partial F}{\partial \xi} - Y \frac{\partial F}{\partial \eta} - Z \frac{\partial F}{\partial \zeta} + T(F).$$

Мы найдем, что

$$I_1 = \int_\Gamma \int_\Omega F(p) (l\xi + m\eta + n\zeta) \, d\omega_p \, d\sigma - \int_V \int_\Omega \left(X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta} \right) d\omega_p \, dv + \int_V \int_\Omega T(F) \, d\omega_p \, dv.$$

Легко видеть, что

$$\int_\Omega \frac{\partial F}{\partial \xi} \, d\omega_p = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial \eta} \, d\omega_p = \int_\Omega \frac{\partial F}{\partial \zeta} \, d\omega_p = 0.$$

В силу (53), и первый член равен нулю. Следовательно, мы имеем, учитывая (39),

$$I_1 = 0,$$

Отсюда следует, что мы можем записать I_2 в виде

$$I_2 = \int_V \int_\Omega (\log F + 1)\frac{\partial F}{\partial t}\, d\omega_p\, dv =$$

$$= \int_\Gamma \int_\Omega F \log F\,(l\xi + m\eta + n\zeta)\, d\omega_p\, d\sigma -$$

$$- \int_V \int_\Omega \left(X\frac{\partial F\log F}{\partial \xi} + Y\frac{\partial F\log F}{\partial \eta} + Z\frac{\partial F\log F}{\partial \zeta}\right) d\omega_p\, dv +$$

$$+ \int_V \int_\Omega T(F)\log F\, d\omega_p\, dv = J_1 + J_2 + J_3.$$

Интегрированием по частям убеждаемся, что второй член J_2 равен нулю. В случае граничных условий I мы видим, что J_1 также равен нулю. Поэтому, учитывая неравенство (28), имеем

$$\frac{dH}{dt} \leqslant 0.$$

Предположим теперь, что на поверхности оболочки выполняются условия II и что поток тепла идет внутрь сосуда, т. е. что $\partial T/\partial N \leqslant 0$. Отыскивая минимум выражения

$$\int_{l\xi+m\eta+n\zeta<0} F\log F\,|\,l\xi + m\eta + n\zeta\,|\, d\omega_p$$

при условиях

$$(56)\qquad \int_{l\xi+m\eta+n\zeta<0} F(p)\,|\,l\xi + m\eta + n\zeta\,|\, d\omega_p = \text{const}$$

и

$$(57)\qquad \int_{l\xi+m\eta+n\zeta<0} F(p)\,(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\,|\,l\xi + m\eta + n\zeta\,|\, d\omega_p \leqslant \text{const},$$

по доказанной лемме находим, что этот минимум достигается для распределения Максвелла φ_0. Постоянные в условиях (56) и (57) являются интегралами из формул (51) и (52), соответствующими распределению Максвелла. Следовательно, так как $F = \varphi_0$ для $l\xi + m\eta + n\zeta > 0$, то

$$\int_\Omega F\log F\,(l\xi + m\eta + n\zeta)\, d\omega_p \leqslant \int_\Omega \varphi_0 \log\varphi_0\,(l\xi + m\eta + n\zeta)\, d\omega_p.$$

Но, поскольку φ_0 есть четная функция, последний интеграл равен нулю, откуда заключаем, что $J_1 \leqslant 0$ и, следовательно,

$$\frac{dH}{dt} \leqslant 0.$$

Таким образом, мы доказали знаменитую H-теорему Больцмана в следующей форме:

Предположим, что газ заключен в сосуд, не отдающий тепла окружающим телам, и что отражение молекул газа от стенок сосуда подчинено законам I *или* II. *Тогда состояние газа изменяется так, что функция*

$$H = \int_V \int_\Omega F \log F \, d\omega_p \, dv$$

никогда не возрастает.

§ 9

Общее изучение состояния равновесия газа

Для того чтобы газ, заключенный в V, находился в равновесии, должно выполняться равенство $\partial F/\partial t = 0$, и, следовательно,

$$\frac{dH}{dt} = 0,$$

откуда заключаем, согласно сказанному в предыдущем параграфе, что

$$T(F) = 0$$

и, следовательно,

$$F = e^{-\alpha\,(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+a\xi+b\eta+c\zeta+d}.$$

Величины α, a, b, c, d в этом случае не зависят от t, но могут зависеть от x, y, z. Функция F должна удовлетворять уравнению $D(F) = 0$, откуда заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\xi\left(-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\xi\frac{\partial a}{\partial x}+\eta\frac{\partial b}{\partial x}+\zeta\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial d}{\partial x}\right)+\\
&+\eta\left(-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\xi\frac{\partial a}{\partial y}+\eta\frac{\partial b}{\partial y}+\zeta\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{\partial d}{\partial y}\right)+\\
&+\zeta\left(-(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\xi\frac{\partial a}{\partial z}+\eta\frac{\partial b}{\partial z}+\zeta\frac{\partial c}{\partial z}+\frac{\partial d}{\partial z}\right)+\\
&+X(-2\alpha\xi+a)+Y(-2\alpha\eta+b)+Z(-2\alpha\zeta+c)=0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$(58)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}=\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}=\dfrac{\partial\alpha}{\partial z}=0, & \dfrac{\partial a}{\partial x}=\dfrac{\partial a}{\partial y}=\dfrac{\partial a}{\partial z}=0, \\ \dfrac{\partial b}{\partial x}=\dfrac{\partial b}{\partial y}=\dfrac{\partial b}{\partial z}=0, & \dfrac{\partial c}{\partial x}=\dfrac{\partial c}{\partial y}=\dfrac{\partial c}{\partial z}=0; \end{cases}$$

$$(59)\quad \begin{cases} X=\dfrac{1}{2\alpha}\dfrac{\partial d}{\partial x}, \quad Y=\dfrac{1}{2\alpha}\dfrac{\partial d}{\partial y}, \quad Z=\dfrac{1}{2\alpha}\dfrac{\partial d}{\partial z}, \\ aX+bY+cZ=0. \end{cases}$$

Равенства (58) показывают, что α, a, b, c являются константами. Из (59) выводим, что внешние силы X, Y, Z необходимо являются потенциальными с потенциалом $\varphi=-d/2\alpha$. На границе имеем

$$\int_{\Omega} e^{-\alpha|p|^2+a\xi+b\eta+c\zeta+d}(l\xi+m\eta+n\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=0.$$

Из формулы

$$\int_{\Omega} e^{-\alpha(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+a\xi+b\eta+c\zeta+d}\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{\frac{a^2+b^2+c^2}{4\alpha}+d}$$

дифференцированием по a получаем

$$\int_{\Omega} e^{-\alpha(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+a\xi+b\eta+c\zeta+d}\,\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{\frac{a^2+b^2+c^2}{4\alpha}+d}\frac{a}{2\alpha}.$$

Используя также аналогичные формулы, получающиеся дифференцированием по b и c, находим

$$\int_{\Omega} e^{-\alpha|p|^2+a\xi+b\eta+c\zeta+d}(l\xi+m\eta+n\zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta=$$

$$=\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{3/2} e^{\frac{a^2+b^2+c^2}{4\alpha}+d}\,\frac{al+bm+cn}{2\alpha}=0.$$

Так как это соотношение должно иметь место для значений l, m, n, соответствующих всем нормалям к Γ, то мы получаем, что

$$a=b=c=0.$$

Следовательно, функция распределения F в случае равновесия необходимо имеет вид

$$F = Ce^{-k\left[\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+\varphi(x, y, z)\right]},$$

где φ есть потенциал внешних сил.

§ 10

Соотношения между функцией F и величинами, характеризующими физическое состояние газа

Обозначим через ρ, u, v, w, T плотность, компоненты скорости и температуру в данной точке x, y, z. Тогда имеем

$$\int_\Omega F\,d\omega = \frac{\rho}{m},$$

$$\int_\Omega F\xi\,d\omega = \frac{\rho}{m}u, \quad \int_\Omega F\eta\,d\omega = \frac{\rho}{m}v, \quad \int_\Omega F\zeta\,d\omega = \frac{\rho}{m}w;$$

$$T = \frac{m}{3k}\frac{\int_\Omega F\left((\xi-u)^2+(\eta-v)^2+(\zeta-w)^2\right)d\omega}{\int_\Omega F\,d\omega},$$

$k = 1{,}37 \times 10^{-16}$ *эрг/градус*; m есть масса одной молекулы.

§ 11

Новое преобразование уравнения Больцмана

Мы ограничимся случаем, когда молекулы предполагаются абсолютно упругими шарами. Заменив F на kF, где k — соответствующим образом подобранная константа, мы можем записать уравнение Больцмана в виде

$$D(F) = J(F) - F(p)\,L(F),$$

где положено

$$J(F)=\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Sigma} F(p')\,F(p_1')\,|W|\,d\omega_{p_1}\,d\sigma_q,$$

$$L(F)=\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Sigma} F(p_1)\,|W|\,d\omega_{p_1}\,d\sigma_q.$$

Вводя координаты θ и φ на сфере Σ ($l^2+m^2+n^2=1$) при помощи уравнений

$$\begin{aligned} l &= \sin\theta\cos\varphi,\\ m &= \sin\theta\sin\varphi, \qquad d\sigma_q=\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,\\ n &= \cos\theta, \end{aligned}$$

мы можем записать $J(F)$ в виде

$$J(F)=\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi} F'F_1'\,|W|\,\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,d\xi_1\,d\eta_1\,d\zeta_1.$$

Возьмем в качестве новых переменных интегрирования величины ξ', η', ζ', ξ_1', η_1'. Положим

$$\frac{\partial l}{\partial\theta}=l', \quad \frac{\partial m}{\partial\theta}=m', \quad \frac{\partial n}{\partial\theta}=n', \quad \frac{\partial l}{\partial\varphi}=l'', \quad \frac{\partial m}{\partial\varphi}=m'', \quad \frac{\partial n}{\partial\varphi}=n''$$

и образуем функциональный определитель

$$\frac{D(\xi',\,\eta',\,\zeta',\,\xi_1',\,\eta_1')}{D(\xi_1,\,\eta_1,\,\zeta_1,\,\theta,\,\varphi)}=\frac{D(\xi'+\xi_1',\,\eta'+\eta_1',\,\zeta',\,\xi_1',\,\eta_1')}{D(\xi_1,\,\eta_1,\,\zeta_1,\,\theta,\,\varphi)}.$$

В силу инвариантности выражений (19), этот определитель сводится к

$$\frac{D(\zeta',\,\xi_1',\,\eta_1')}{D(\zeta_1,\,\theta,\,\varphi)}=\begin{vmatrix} n^2-n'W-n\dfrac{\partial W}{\partial\theta} & -n''W-n\dfrac{\partial W}{\partial\varphi}\\ -ln \quad l'W+l\dfrac{\partial W}{\partial\theta} & l''W+l\dfrac{\partial W}{\partial\varphi}\\ -mn \quad m'W+m\dfrac{\partial W}{\partial\theta} & m''W+m\dfrac{\partial W}{\partial\varphi} \end{vmatrix}=$$

$$=nW^2\begin{vmatrix} l & l' & l''\\ m & m' & m''\\ n & n' & n'' \end{vmatrix}=nW^2\sin\theta;$$

следовательно,

$$\left| \frac{D(\xi_1, \eta_1, \zeta_1, \theta, \varphi)}{D(\xi', \eta', \zeta', \xi_1', \eta_1')} \right| = \frac{1}{|n| W^2 \sin\theta}.$$

Области изменения переменных ξ_1, η_1, ζ_1, θ, φ соответствует дважды пробегаемое бесконечное пространство $(\xi', \eta', \zeta', \xi_1', \eta_1')$. Следовательно, получаем

$$J(F) = 2 \int\int \int_{-\infty}^{+\infty} \int\int F(\xi', \eta', \zeta') F(\xi_1', \eta_1', \zeta_1') \times \\ \times \frac{1}{|n||W|} d\xi' d\eta' d\zeta' d\xi_1' d\eta_1'.$$

Когда значения ξ', η', ζ' фиксированы, точка ξ_1', η_1', ζ_1' описывает плоскость, заданную уравнением

$$(60) \quad (\xi' - \xi)(\xi_1' - \xi) + (\eta' - \eta)(\eta_1' - \eta) + (\zeta' - \zeta)(\zeta_1' - \zeta) = 0.$$

Эта плоскость проходит через точку $p \sim (\xi, \eta, \zeta)$ и перпендикулярна вектору $\overrightarrow{pp'}$. Обозначим эту плоскость через $E_{pp'}$. Пусть q — произвольная точка на $E_{pp'}$. Имеем

$$d\xi_1' d\eta_1' = |n| d\sigma_q,$$

где $d\sigma_q$ есть элемент площади на $E_{pp'}$. Величина $|W|$ может быть записана в виде

$$|W| = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2} = r_{pp'},$$

где $r_{pp'}$ — расстояние между p и p' в пространстве скоростей. Таким образом, мы получаем

$$J(F) = 2 \int_{\Omega'} \frac{F(p')}{r_{pp'}} \int_{E_{pp'}} F(q) \, d\sigma_q \, d\omega_{p'}.$$

Если заменить p' на p_1, то получаем окончательно

$$(61) \quad J(F) = 2 \int_{\Omega_1} \frac{F(p_1)}{r_{pp_1}} \int_{E_{pp_1}} F(q) \, d\sigma_q \, d\omega_{p_1}.$$

Рассмотрим теперь величину

$$L(F) = \int\limits_{\Omega_1} \int\limits_{\Sigma} F(p_1) \mid W \mid d\omega_{p_1} d\sigma_q =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1} F(p_1) \int\limits_{\Sigma} \mid l(\xi_1 - \xi) + m(\eta_1 - \eta) + n(\zeta_1 - \zeta) \mid d\sigma_q \, d\omega_{p_1}.$$

Вводя полярные координаты θ и φ на сфере Σ так, чтобы $\theta = 0$ соответствовало направлению $\overrightarrow{pp_1}$, найдем

$$\int\limits_{\Sigma} \mid l(\xi_1 - \xi) + m(\eta_1 - \eta) + n(\zeta_1 - \zeta) \mid d\sigma_q =$$

$$= 4\pi r_{pp_1} \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta = 2\pi r_{pp_1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$L(F) = 2\pi \int\limits_{\Omega_1} r_{pp_1} F(p_1) \, d\omega_{p_1}. \tag{62}$$

Теперь мы изучим более подробно выражение

$$\int\limits_{\Omega} \phi J(F) \, d\omega_p,$$

где ϕ — произвольная функция. В случае, которым мы занимаемся, согласно формуле (35), имеем

$$\int\limits_{\Omega} \phi J(F) \, d\omega_p = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega_1} F(p) F(p_1) \int\limits_{\Sigma} \phi(p') \mid W \mid d\sigma_q \, d\omega_p \, d\omega_{p_1}.$$

Теперь нужно вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Sigma} \phi(p') \mid W \mid d\sigma_q.$$

Имеем

$$p' = p + q(p_1 - p, \; q).$$

Обратимся к рис. 3, где мы изобразили сферу, имеющую pp_1 диаметром, и другую сферу Σ радиуса 1 с центром в p. Мы обозначим первую сферу через K, а ее центр — через p_2.

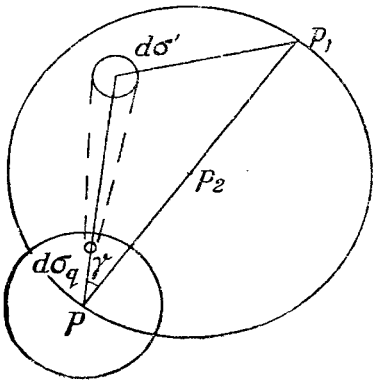

Рис. 3.

Очевидно, имеем соотношения

$$d\sigma' \cos\gamma = W^2\, d\sigma_q,$$

$$W = r_{pp_1} \cos\gamma.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\Sigma} \phi(p')\,|W|\,d\sigma_q = \frac{2}{r_{pp_1}} \int_K \phi\, d\sigma'. \tag{63}$$

Мы получили, таким образом, следующую важную формулу, имеющую весьма прозрачный геометрический смысл:

$$\int_{\Omega} \phi J(F)\, d\omega_p = 2 \int_{\Omega_1} \int_{\Omega} F(p) F(p_1) \frac{1}{r_{pp_1}} \int_K \phi\, d\sigma\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}. \tag{64}$$

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующими легко доказываемыми формулами:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \int_{\Omega_1} e^{-\alpha r_{pp_1}^2} f(p_1)\, d\omega_{p_1} = f(p), \tag{65}$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\Omega} e^{-\alpha\varphi^2} f\, d\omega = \int_{\varphi=0} \frac{f}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|}\, d\sigma, \tag{66}$$

где $\partial\varphi/\partial n$ — нормальная производная к поверхности $\varphi = 0$, и

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{S} e^{-\alpha\varphi^2} f\, d\sigma = \int_{\varphi=0} \frac{f}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|}\, ds, \tag{67}$$

где $\partial\varphi/\partial n$ есть нормальная производная к линии $\varphi = 0$ на S.

Эти формулы мы можем использовать для упрощенного вывода формулы (61). Согласно (64) и (65), имеем

$$J(F)_P = 2 \lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2} \times$$

$$\times \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} F(p) F(p_1) \frac{1}{r_{pp_1}} \int_{K} e^{-\alpha r_{Pq}^2} d\sigma_q \, d\omega_p \, d\omega_{p_1}.$$

Но интеграл

$$\int_{K} e^{-\alpha r_{Pq}^2} d\sigma_q$$

можно непосредственно вычислить. Положив $p_2 = (p_1 + p)/2$, будем иметь

$$\int_{K} e^{-\alpha r_{Pq}^2} d\sigma = \frac{\pi r_{pp_1}}{2\alpha} \frac{e^{-\alpha \left(r_{Pp_2} - \frac{r_{pp_1}}{2}\right)^2} - e^{-\alpha \left(r_{Pp_2} + \frac{r_{pp_1}}{2}\right)^2}}{r_{Pp_2}},$$

откуда

$$J(F)_P = \lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} F(p) F(p_1) e^{-\alpha \left(r_{Pp_2} - \frac{r_{pp_1}}{2}\right)^2} d\omega_p \, d\omega_{p_1} -$$

$$- \lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} F(p) F(p_1) e^{-\alpha \left(r_{Pp_2} + \frac{r_{pp_1}}{2}\right)^2} d\omega_p \, d\omega_{p_1}.$$

Последний член равен нулю, и, таким образом, мы имеем

$$J(F)_P =$$

$$= \lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} F(p) F(p_1) \frac{e^{-\alpha \left(r_{Pp_2} - \frac{r_{pp_1}}{2}\right)^2}}{r_{Pp_2}} d\omega_p d\omega_{p_1}. \tag{68}$$

Для того чтобы функция

$$\varphi(p) = r_{Pp_2} - \frac{r_{pp_1}}{2} = r_{Pp_2} - r_{p_1 p_2} \tag{69}$$

равнялась нулю, p должен находиться в плоскости E_{Pp_1}. Следовательно, обозначая через n_p и n_{p_2} нормали к плоскостям E_{Pp_1} и к параллельной ей плоскости, проходящей через p_2, легко получим в силу подобия

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n_p}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n_{p_2}}\right| = \frac{r_{Pp_1}}{2r_{Pp_2}}.$$

В силу (66), отсюда заключаем, что

$$J(F)_P = 2\int_{\Omega_1} \frac{F(p_1)}{r_{Pp_1}}\, d\omega_{p_1} \int_{E_{Pp_1}} F\, d\sigma,$$

— формула, эквивалентная формуле (61).

Соотношение взаимности $J(F, G) = J(G, F)$

Согласно предыдущему, мы можем преобразовать правую часть в (64) так, что получим

$$\int_{\Omega} \phi J(F, G)\, d\omega_p = 2\int_{\Omega}\int_{\Omega_1} F(p)\, G(p_1) \frac{1}{r_{pp_1}} \int_K \phi\, d\sigma\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}.$$

Так как функция

$$\frac{1}{r_{pp_1}} \int_K \phi\, d\sigma,$$

на которую умножается $F(p)\,G(p_1)$ под двумя первыми знаками интегрирования, симметрична относительно p и p_1, то мы получаем

$$\int_{\Omega} \phi J(F, G)\, d\omega_p = \int_{\Omega} \phi J(G, F)\, d\omega_p,$$

откуда заключаем, в силу произвольности функции ϕ, что

$$J(F, G) = J(G, F). \tag{70}$$

§ 12

Верхние границы для выражений $J(F)$, $J(F, G)$, $L(F)$, $T(F)$

Обозначим через $M(R)$ верхнюю грань $F(p)$ на сфере радиуса R с центром в начале координат. Тогда правая часть равенства (68) допускает мажоранту

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int\limits_{\Omega_1}F(p_1)\int\limits_{\Omega}M(r_p)\frac{e^{-\alpha\left(r_{Pp_2}-\frac{r_{pp_1}}{2}\right)^2}}{r_{Pp_2}}\,d\omega_p\,d\omega_{p_1}.$$

Кроме того, имеем

$$\int\limits_{\Omega}M(r_p)\frac{e^{-\alpha\left(r_{Pp_2}-\frac{r_{pp_1}}{2}\right)^2}}{r_{Pp_2}}\,d\omega_p=\int\limits_0^{\infty}M(R)\int\limits_{S_R}\frac{e^{-\alpha\left(r_{Pp_2}-\frac{r_{pp_1}}{2}\right)^2}}{r_{Pp_2}}\,d\sigma_p dR,$$

где S_R — сфера радиуса R с центром в начале. Поэтому следует найти предел

$$I=\lim_{\alpha\to\infty}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2}\int\limits_{S_R}\frac{e^{-\alpha\left(r_{Pp_2}-\frac{r_{pp_1}}{2}\right)^2}}{r_{Pp_2}}\,d\sigma_p.$$

Здесь точки P и p_1 рассматриваются как фиксированные. Если плоскость E_{Pp_1} пересекает сферу S_R, то функция (69) равна нулю в точках окружности L, по которой они пересекаются. Вычислением, аналогичным проведенному выше, доказывается, что

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|=\frac{r_{Pp_1}}{2r_{Pp_2}}\sin\varphi,$$

где n обозначает теперь нормаль к L на сфере и где φ есть угол, под которым плоскость пересекает сферу. Так как длина L равна $2\pi R\sin\varphi$, то, используя формулу (67), получаем

$$I=\frac{4\pi R}{r_{Pp_1}}.$$

Если плоскость E_{Pp_1} не пересекает эту сферу, то $I=0$.

Заменяя P на p, получаем, таким образом, формулу

$$J(F) \leqslant 4\pi \int_0^\infty RM(R) \int_{\Omega_1} \frac{1}{r_{pp_1}} \theta F(p_1)\, d\omega_{p_1} dR, \tag{71}$$

где θ — величина, равная 1 или 0, в зависимости от того, пересекает или нет плоскость E_{pp_1} сферу S_R.

Неравенство (71) может быть выведено также из соотношения взаимности (70) заменой G на $M(|p|) = M(r)$ с учетом равенства

$$J(F) = J(F, F).$$

Мы находим также, что

$$J(F, G) \leqslant 4\pi \int_0^\infty RM(R) \int_{\Omega_1} \frac{\theta}{r_{pp_1}} G(p_1) d\omega_{p_1} dR \tag{72}$$

и

$$J(F, G) \leqslant 4\pi \int_0^\infty RM_1(R) \int_{\Omega_1} \frac{\theta}{r_{pp_1}} F(p_1)\, d\omega_{p_1} dR, \tag{73}$$

где $M_1(R)$ — максимум $G(p)$ на сфере $|p| = R$.

Введем функции $F_1(p_1)$ и $F_2(p_1)$ при помощи соотношений

$$\begin{aligned} F_1(p_1) &= F(p_1) \text{ при } |p_1| < |p|, \\ F_1(p_1) &= 0 \quad\;\; \text{при } |p_1| \geqslant |p|, \\ F_2(p_1) &= F(p_1) \text{ при } |p_1| \geqslant |p|, \\ F_2(p_1) &= 0 \quad\;\; \text{при } |p_1| < |p|. \end{aligned}$$

Используя равенство

$$\begin{aligned} J(F) = J(F, F) = J(F, F_1) + J(F, F_2) = J(F_2, F_1) + \\ + J(F_1, F_1) + J(F, F_2) = \\ = 2J(F, F_2) + J(F_1, F_1) - J(F_2, F_2), \end{aligned}$$

получаем

$$J(F) \leqslant 2J(F, F_2) + J(F_1, F_1). \tag{74}$$

Для $J(F, F_2)$ мы имеем, согласно (73), полагая $|p| = r$,

$$J(F, F_2) < 4\pi \int_{\Omega_1} \frac{1}{r_{pp_1}} F(p_1)\, d\omega_{p_1} \int_r^\infty RM(R)\, dR. \tag{75}$$

Для того чтобы найти верхнюю границу $J(F_1, F_1)$, мы рассмотрим сферу $S_{r/\sqrt{2}}$ и область Γ, заключенную между $S_{r/\sqrt{2}}$ и S_r. Разобьем F_1 на сумму $F_1' + F_1''$, где F_1' равна $F(p_1)$ внутри $S_{r/\sqrt{2}}$ и нулю в остальных точках, в то время как F_1'' равна $F(p_1)$ в Γ и нулю в остальных точках. Следовательно, имеем

$$J(F_1, F_1) = J(F_1', F_1) + J(F_1'', F_1) = \\ = J(F_1', F_1') + J(F_1'', F_1'') + 2J(F_1', F_1'').$$

В силу приведенных выше неравенств и соотношений,

$$J(F_1', F_1') = 0,$$

$$J(F_1, F_1) < 8\pi \int\limits_{r/\sqrt{2}}^{r} RM(R)\, dR \int\limits_{S_r} \frac{1}{r_{pp_1}} F(p_1)\, d\omega_{p_1}.$$

Таким образом, окончательно получаем, принимая во внимание (74) и (75),

$$J(F) < 8\pi \int\limits_{\Omega_1} \frac{1}{r_{pp_1}} F(p_1)\, d\omega_{p_1} \int\limits_{r/\sqrt{2}}^{\infty} RM(R)\, dR. \tag{76}$$

Заметим, что если

$$F < \frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \quad \varkappa > 6,$$

то имеет место неравенство

$$J(F_1) < 4\pi a^2 \int\limits_{S_r} \frac{1}{(\sqrt{1+r_1^2})^{\varkappa}} \frac{d\omega_{p_1}}{r_{pp_1}} \int\limits_{\sqrt{r^2-r_1^2}}^{r} \frac{t\, dt}{(\sqrt{1+t^2})^{\varkappa}},$$

откуда следует, что

$$J(F) < \frac{8\pi a \int\limits_{\Omega} F\, d\omega}{(\varkappa-2)(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa-1}} + \frac{k(\varkappa)\, a^2}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}} = S(F). \tag{77}$$

Порядок роста $L(F)$, $J(F)$ и $T(F)$

Предполагая, что

$$M(r) < \frac{k}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}} \sim \frac{k}{r^{\varkappa}}, \quad \varkappa > 6,$$

$$A = \int_{\Omega_1} F(p_1)\, d\omega_{p_1},$$

находим

$$L(F) = 2\pi A r + O(1),$$

$$\int_{\Omega_1} \frac{1}{r_{pp_1}} F(p_1)\, d\omega_{p_1} = \frac{A}{r} + O\left(\frac{1}{r^{\varkappa-2}}\right),$$

$$J(F) = O\left(\frac{1}{r^{\varkappa-1}}\right),$$

$$T(F) = O\left(\frac{1}{r^{\varkappa-1}}\right).$$

Глава II

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА В СЛУЧАЕ, КОГДА ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕ ЗАВИСИТ ОТ x, y, z

В дальнейшем предполагается, что внешние силы отсутствуют. В этом случае уравнение Больцмана принимает простой вид:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = T(F), \tag{78}$$

или, более подробно,

$$\frac{\partial F}{\partial t} + L(F)\,F = J(F). \tag{79}$$

Мы поставим себе следующие задачи:

1) Изучить общие свойства решения, предполагая, что оно существует в конечном интервале времени.

2) Найти решения, принимающие заданные начальные значения.

3) Изучить поведение решения при $t \to \infty$.

§ 1

Общие свойства решений уравнения $\frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$

Первые интегралы

Пусть $F(p, t)$ — решение уравнения (78), непрерывное вместе с производной $\partial F/\partial t$ в области

$$p \in \Omega, \quad t_0 \leqslant t < t_1,$$

и удовлетворяющее неравенствам

$$0 \leqslant F(p, t) < \frac{k}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \quad \varkappa > 6, \tag{80}$$

где k — некоторая постоянная.

Обозначим через $h(p)$ такую функцию, что интеграл

$$\int_{\Omega} |h(p)| \frac{1}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa-1}} d\omega_p$$

сходится. Из этого условия следует равномерная сходимость интеграла

$$\int_{\Omega} h(p) \frac{\partial F}{\partial t} d\omega_p,$$

откуда заключаем, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} h(p) F(p, t) d\omega_p = \int_{\Omega} h(p) T(F) d\omega_p.$$

Если правая часть этого равенства обращается в нуль тождественно для любой функции F, то, как мы видим, интеграл

$$\int_{\Omega} h(p) F(p, t) d\omega_p$$

остается независимым от t во всем интервале $t_0 \leqslant t < t_1$, в котором $F(p, t)$ удовлетворяет условию (80). Мы будем говорить, что $h(p)$ есть первый интеграл уравнения (78). Формулы, приведенные в конце § 4 гл. I, показывают, что функции

(81) $$1, \quad \xi, \eta, \zeta, \quad \xi^2+\eta^2+\zeta^2 = r^2$$

обладают этим свойством. Можно выбрать начало координат в Ω так, что эти соотношения запишутся в виде

(82) $$\int_{\Omega} \xi F \, d\omega = \int_{\Omega} \eta F \, d\omega = \int_{\Omega} \zeta F \, d\omega = 0,$$

(83) $$\int_{\Omega} F \, d\omega = A,$$

(84) $$\int_{\Omega} F r^2 \, d\omega = B,$$

где A и B — положительные постоянные.

Строгое доказательство H-теоремы Больцмана

Доказательство H-теоремы Больцмана, данное в § 8 гл. I, предполагает абсолютную сходимость тех интегралов, которые в нем фигурируют. В действительности эта сходимость будет иметь место, в частности, если F ограничена снизу и сверху посредством неравенств вида (29). Неравенство (80) уже устанавливает верхнюю границу; для того чтобы получить также и нижнюю границу, мы добавим к решению F уравнения Больцмана (78) не зависящий от времени член подобного вида. Итак, положим

$$F_n = F + \frac{1}{n(1+r^2)^{x/2}}, \quad x > 6,$$

и умножим (78) на $\log F_n$, что дает

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_n \cdot \log F_n) = (T(F_n) + T(F) - T(F_n)) \log F_n + \frac{\partial F}{\partial t}.$$

Заметив, что $\int\limits_\Omega F\, d\omega = A$, и обозначив через f_{0n} значение F_n при $t = 0$, получим после интегрирования

$$\int\limits_\Omega F_n \log F_n\, d\omega - \int\limits_\Omega f_{0n} \log f_{0n}\, d\omega = \int\limits_0^t dt \int\limits_\Omega T(F_n) \log F_n\, d\omega +$$

$$+ \int\limits_0^t dt \int\limits_\Omega (T(F) - T(F_n)) \log F_n\, d\omega,$$

где интегралы абсолютно сходятся. Но легко видеть, что

$$|T(F) - T(F_n)| < \frac{c}{n} \frac{1}{(1+r^2)^{\frac{x-1}{2}}},$$

и, таким образом, при $n \to \infty$ последний член в правой части стремится к нулю. В то же время F_n и f_{0n} стремятся, убывая, к F и f_0 соответственно, и, в силу неравенства (28), верного и для F_n, первый член в правой части $\leqslant 0$. Отсюда заключаем, что

$$\int\limits_\Omega F \log F\, d\omega \leqslant \int\limits_\Omega f_0 \log f_0\, d\omega. \tag{85}$$

Мы должны будем также воспользоваться еще одним неравенством:

$$\int_{\Omega} F \overset{+}{\log} F \, d\omega \leqslant K, \tag{86}$$

где K есть постоянная, определяемая заданием f_0; докажем его. Пусть $\Delta \subset \Omega$ — множество, где

$$F(p) \geqslant e^{-r}.$$

Тогда

$$\int_{\Delta} F \overset{+}{\log} \frac{1}{F} \, d\omega \leqslant \int_{\Delta} Fr \, d\omega \leqslant \frac{1}{2} \int_{\Omega} F(1+r^2) \, d\omega = \frac{A+B}{2}.$$

Кроме того, так как $x \overset{+}{\log} \frac{1}{x}$ есть возрастающая функция на интервале $(0, 1/e)$ и всюду $\leqslant 1/e$, то мы имеем

$$\int_{\Omega-\Delta} F \overset{+}{\log} \frac{1}{F} \, d\omega \leqslant A + \int_{\Omega-\Delta} e^{-r} r \, d\omega \leqslant A + 24\pi.$$

Учитывая (85), мы приходим к приведенному выше результату (86).

Нижняя граница для $L(F)$

Мы будем исходить из формулы (86) и неравенства

$$xy \leqslant x \overset{+}{\log} x + e^{y-1}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

В силу (86), имеем

$$L(F) > 2\pi l \int_{r_{pp_1} > l} F(p_1) \, d\omega_{p_1} =$$

$$= 2\pi l \left(A - \frac{1}{\lambda} \int_{r_{pp_1} \leqslant l} F(p_1) \lambda \, d\omega_{p_1} \right) >$$

$$> 2\pi l \left(A - \frac{K}{\lambda} - \frac{e^{\lambda-1}}{\lambda} \frac{4}{3} \pi l^3 \right),$$

где λ и l — положительные числа. Положив $\lambda = 2K/A$, имеем $L(F) > 2\pi l(-Cl^3 + A/2)$, где C — постоянная, зависящая только от начального значения f_0, что мы выражаем с помощью

обозначения $C \in I$. Итак, выбирая l таким образом, чтобы выражение в скобках равнялось $A/4$, получаем

$$L(F) > \beta > 0, \quad \beta \in I. \tag{87}$$

Лемма об одном дифференциальном неравенстве

Если для всех $0 \leqslant t \leqslant t_1$ выполняется неравенство

$$\frac{du}{dt} + p(t)\, u \leqslant q(t), \qquad p(t) > 0,$$

то, обозначив через u_0 начальное значение $u(0)$, получаем

$$\sup_t u(t) \leqslant \max\left(u_0, \sup_t \frac{q(t)}{p(t)}\right). \tag{88}$$

Мажоранты решений $F(p, t)$

Мы намереваемся теперь разыскать верхние границы для $F(p, t)$, пригодные для интервала $(0, t_1)$ и зависящие только от начальных значений $f_0(p)$, принимаемых $F(p, t)$ при $t = 0$.

Найдем сначала верхнюю границу для

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r_{p'p}} J(F)\, d\omega_p.$$

Согласно формуле (64), мы можем записать это выражение в виде

$$2 \int_{\Omega} \int_{\Omega_1} F(p)\, F(p_1) \frac{1}{r_{pp_1}} \int_K \frac{1}{r_{p'q}}\, d\sigma_q\, d\omega_p\, d\omega_{p_1}.$$

В силу хорошо известных свойств поверхностных потенциалов, заключаем, что интеграл

$$\int_K \frac{1}{r_{p'q}}\, d\sigma_q$$

не превосходит того значения, которое он принимает, когда p' находится в центре K, т. е. не превосходит $2\pi r_{pp_1}$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} \frac{1}{r_{p'p}} J(F)\, d\omega_p \leqslant 4\pi A^2. \tag{89}$$

Если E есть плоскость, то, заменяя в (64) ϕ на $\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/2} e^{-\alpha d^2}$ (где d есть расстояние от точки p до E) и осуществив предельный переход ($\alpha \to \infty$), находим

$$\int_E J(F)\, d\sigma = \pi \int_\Omega \int_{\Omega_1} F(p) F(p_1)\, \theta\, d\omega_p\, d\omega_{p_1},$$

где $\theta = 1$, если E пересекает сферу K, и 0 в противном случае. Таким образом,

$$\int_E J(F)\, d\sigma \leqslant \pi A^2. \tag{90}$$

Теперь рассмотрим уравнение Больцмана (79) и заменим $L(F)$ его нижней границей β, существование которой мы только что доказали. Из (90), интегрируя по плоскости E, находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_E F\, d\sigma + \beta \int_E F\, d\sigma \leqslant \pi A^2.$$

Учитывая (88), выводим, что

$$\int_E F\, d\sigma < C_1; \qquad C_1 \in I.$$

Таким же способом получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \frac{1}{r_{p'p}} F\, d\omega_p + \beta \int_\Omega \frac{1}{r_{p'p}} F\, d\omega_p \leqslant 4\pi A^2,$$

откуда вытекает, что

$$\int_\Omega \frac{1}{r_{p'p}} F\, d\omega_p < C_2, \qquad C_2 \in I.$$

Из формулы (61) следует, что

$$J(F) < C_3, \qquad C_3 \in I,$$

и, наконец, вновь используя (88), находим, что

$$F < M^*,$$

где константа M^* зависит только от начальных значений F.

Для того чтобы получить оценку сверху для F как функции от $|p|=r$, нужно сначала найти еще одну нижнюю границу для $L(F)$. Имеем

$$(91)\quad L(F)=2\pi\int\limits_{\Omega_1} r_{pp_1}F(p_1)\,d\omega_{p_1}\geqslant 2\pi\int\limits_{\Omega_1}(r-r_1)F(p_1)\,d\omega_{p_1}\geqslant$$
$$\geqslant 2\pi Ar-\pi\int\limits_{\Omega_1}\left(1+r_1^2\right)F(p_1)\,d\omega_{p_1}=2\pi Ar-\pi(A+B).$$

Мы всегда будем предполагать, что

$$f_0<\frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}},\qquad \varkappa>6.$$

Так как $J(F)<C_3$, то из (79) и (88) следует, что

$$(92)\qquad F<\frac{C_4}{\sqrt{1+r^2}},\qquad C_4\in I.$$

Эта новая оценка сверху для F позволяет нам доказать следующую лемму:

Из условий (83), (84) *и* (92) *вытекает, что*

$$(93)\qquad V(F)=\int\limits_{\Omega_1}\frac{1}{r_{pp_1}}F(p_1)\,d\omega_{p_1}=\frac{A}{r}+\frac{\varphi(p)}{r^{5/3}},$$

где $|\varphi(p)|<C_5$, $\quad C_5\in I$.

Действительно, запишем

$$V(F)=\frac{A}{r}+\int\limits_{\Omega_1}\frac{r^2-r_{pp_1}^2}{rr_{pp_1}(r+r_{pp_1})}F(p_1)\,d\omega_{p_1}=$$
$$=\frac{A}{r}+\int\limits_{\Omega_1}\frac{2(p,p_1)-r_1^2}{rr_{pp_1}(r+r_{pp_1})}F(p_1)\,d\omega_{p_1}$$

и предположим для определенности, что $r>3$. Если мы разобьем Ω_1 на три области сферой с центром p и радиусом $r^{-1/3}$ и сферой $S_{r/2}$, то мы найдем интегрированием по различным областям, с учетом упомянутых условий, что модуль последнего члена в выражении $V(F)$ меньше $C_5r^{-5/3}$, где C_5 зависит только от B и C_4.

Докажем наконец, что существует константа $c \in I$, такая, что

$$F(p, t) < \frac{c}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_2.$$

С этой целью запишем

$$F = F_1 + F_2,$$

где

$$F_1 = F \quad \text{для} \quad r_1 \leqslant \rho,$$
$$F_1 = 0 \quad \text{для} \quad r_1 > \rho.$$

В силу формулы (84), имеем

$$\int_{\Omega_1} F_2(p_1)\, d\omega_{p_1} \leqslant \frac{B}{\rho^2} = \varepsilon.$$

Положим, далее,

$$m(r) = \sup R^{\varkappa} M(R)$$

для $R \geqslant r$ и для $0 \leqslant t \leqslant t_2$. Из формул (76) и (93) мы получим

$$J(F_2) \leqslant 8\pi\left(\frac{\varepsilon}{r} + \frac{C_5}{r^{5/3}}\right) \int_{r/\sqrt{2}}^{\infty} RM(R)\, dR < C(\varkappa)\, \varepsilon r^{1-\varkappa} m\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)$$

для $r > r_1(\rho)$, $r_1(\rho) \in I$. Кроме того, согласно формуле (72), замечая, что в этом случае $\theta = 0$ для $0 < R < r - \rho$, имеем

$$J(F_1, F_2) < \frac{4\pi A}{\varkappa - 2} \cdot \frac{m(r-\rho)}{(r-\rho)^{\varkappa-1}}.$$

Очевидно, что $J(F_1) = 0$ для $r > \sqrt{2}\,\rho$, и, таким образом, для $r > \max\left(r_1(\rho), \sqrt{2}\,\rho\right)$ будем иметь

$$J(F) < \frac{8\pi A}{\varkappa - 2} \cdot \frac{m(r-\rho)}{(r-\rho)^{\varkappa-1}} + C(\varkappa)\, \varepsilon r^{1-\varkappa} m\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right). \tag{94}$$

Теперь мы воспользуемся формулами (88), (91) и (94). Легко видеть, что можно выбрать сначала $\varepsilon \in I$, а затем некоторое число $l \in I$ так, чтобы для $r \geqslant l$ иметь

$$F \leqslant \left[a + (1-2\eta)\, m(r-\rho) + \eta\, m\left(\frac{r}{\sqrt{2}}\right)\right] r^{-\varkappa}, \tag{95}$$

где η — постоянная, принадлежащая I. Возможны два случая: или $m(r) \equiv m(0) = m$ для $r \leqslant l$, или $m(l) < m(0)$. В первом случае мы можем применить неравенство (95), откуда следует, что

$$m \leqslant a + (1 - 2\eta)\, m + \eta m,$$

$$m \leqslant \frac{a}{\eta}.$$

Во втором случае $\sup R^{\varkappa} M(R)$ для $R \geqslant 0$ и для $0 \leqslant t \leqslant t_2$ достигается для значения $R < l$, и тогда

$$m(r) < M^* l^{\varkappa}.$$

Таким образом, мы приходим к следующей основной теореме:

Теорема I. *Пусть* $F(p, t)$ *— решение уравнения* $\frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$, *удовлетворяющее неравенствам*

$$0 \leqslant F \leqslant \frac{k}{(\sqrt{1 + r^2})^{\varkappa}}, \quad \varkappa > 6,$$

в области $0 \leqslant t < t_1$ *и принимающее для* $t = 0$ *начальное значение* $f_0(p)$, *подчиненное условиям*

$$0 \leqslant f_0(p) \leqslant \frac{a}{(\sqrt{1 + r^2})^{\varkappa}}.$$

Тогда существует постоянная c, *не зависящая от* t *и зависящая только от* a, A, B, $\varkappa$, *такая, что*

$$F(p, t) < \frac{c}{(\sqrt{1 + r^2})^{\varkappa}}.$$

Сформулируем также еще две теоремы [1]).

Теорема II. *Пусть* $F(p, t)$ *— неотрицательное решение уравнения Больцмана, удовлетворяющее условиям теоремы* I *для* $0 \leqslant t < t_1$ *и обращающееся при* $t = 0$ *в непрерывную функцию* $f_0(p)$, *отличную от тождественного нуля. Если заданы два положительных сколь угодно малых числа* ε *и* t_0, *то для* $t_0 \leqslant t < t_1$ *имеем*

$$\log F(p, t) > -c_1 (1 + r^2)^{1+\varepsilon},$$

[1]) Ср. работу, цитированную в предисловии, теоремы 3 и 4.

где c_1 — конечная постоянная, зависящая только от $f_0(p)$, t_0, t_1, ε.

Комбинируя только что полученные неравенства, находим

$$|\log F(p, t)| < c_2(1+r^2)^{1+\varepsilon}, \quad t_0 \leqslant t < t_1. \tag{96}$$

Следовательно, интегралы

$$H = \int_{\Omega} F \log F \, d\omega,$$

$$\int_{\Omega} T(F)(\log F + 1)\, d\omega = \int_{\Omega} T(F) \log F \, d\omega$$

являются абсолютно и равномерно сходящимися. Отсюда вытекает, что H имеет производную по t и что

$$\frac{dH}{dt} = \int_{\Omega} T(F) \log F \, d\omega.$$

Из неравенства (96) следует также, что условия сходимости, необходимые для вывода формулы (27) (из § 4), удовлетворяются.

Из этой теоремы вытекает такое следствие: если в начальный момент скорости всех молекул газа принадлежат некоторой конечной области, то, несмотря на это, в следующее мгновение множество скоростей молекул будет содержать все скорости.

Теорема III. *Пусть $F(p, t)$ — решение уравнения $\frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$, удовлетворяющее условиям теоремы* I *во всем интервале $0 \leqslant t < \infty$ и обращающееся при $t = 0$ в функцию $f_0(p)$, непрерывную в Ω. Если задано сколь угодно малое положительное число ε, то мы можем найти такое положительное δ, что*

$$|F(p', t) - F(p, t)| < \varepsilon$$

при

$$|p' - p| < \delta,$$

$$p \in \Omega, \quad p' \in \Omega, \quad 0 < t < \infty.$$

§ 2

Теоремы существования и единственности

Для доказательства существования решения уравнения $\frac{\partial F}{\partial t} = T(F)$, обращающегося при $t = 0$ в заданную функцию $f_0(p)$, мы применим метод последовательных приближений, который позволит одновременно заключить, что полученное решение будет положительным.

Предположим, что функция $f_0(p)$ непрерывна и что она удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant f_0(p) \leqslant \frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \quad \varkappa > 6.$$

Определим функции

$$F_n = F_n(p, t), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

последовательно при помощи соотношений $F_0(p) = f_0(p)\, e^{\gamma t}$, где γ — положительная постоянная,

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + L(F_0)\, F_1 = J(F_0),$$

. . . . . .

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + L(F_{n-1})\, F_n = J(F_{n-1}),$$

. . . . . .

$$[F_n(p)]_{t=0} = f_0(p).$$

Прежде всего по индукции заключаем, что если f_0 неотрицательна, то $F_n \geqslant 0$. Будем теперь доказывать, что можно так выбрать γ и интервал $0 \leqslant t \leqslant t_0$, чтобы последовательность функций F_n была равномерно ограниченной. Мы положим

$$F_n = e^{\gamma t} f_n,$$

что даст нам

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + e^{\gamma t}\left[L(f_{n-1}) + e^{-\gamma t}\gamma\right] f_n = e^{\gamma t} J(f_{n-1}). \tag{97}$$

Область изменения t, $0 \leqslant t \leqslant \tau$, подчиним ограничению

$$e^{-\gamma t} > \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + e^{\gamma t}\left(L(f_{n-1}) + \frac{\gamma}{2}\right) f_n \leqslant e^{\gamma t} J(f_{n-1}).$$

Рассмотрим сначала случай $n = 1$. Лемма (88) показывает, что f_1 не превосходит наибольшей из величин

$$I_1 = \frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}},$$

$$I_2 = \frac{J(f_0)}{L(f_0) + \frac{\gamma}{2}}.$$

Положим, как и выше,

$$A = \int_{\Omega} f_0 \, d\omega, \qquad B = \int_{\Omega} f_0 r^2 \, d\omega.$$

Тогда мы, очевидно, будем иметь для $L(f_0)$ неравенство (91) и, следовательно,

$$L(f_0) + \frac{\gamma}{2} > 2\pi A r - \pi (A + B) + \frac{\gamma}{2}.$$

Так как, согласно формуле (77), мы имеем также

$$J(f_0) < S(f_0) = \frac{8\pi a A}{(\varkappa - 2)(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa - 1}} + \frac{k(\varkappa)\, a^2}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}},$$

$$\varkappa > 6,$$

то ясно, что при заданных a и $\varkappa$ мы можем выбрать γ столь большим, чтобы для некоторого положительного числа α иметь

$$I_2 < \frac{S(f_0)}{L(f_0) + \frac{\gamma}{2}} < (1-\alpha)^2 \frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}. \tag{98}$$

Отсюда вытекает следующее неравенство:

$$F_1 \leqslant \frac{a e^{\gamma t}}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}.$$

Перейдем теперь к определению F_2. Согласно (97), имеем

$$L(f_1) = L(f_0) + \int_0^t L\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\right) dt >$$

$$> L(f_0) - \int_0^t L\left[\left(L\left(\frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}\right) + \gamma\right) \frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}\right] e^{\gamma t}\, dt.$$

Выберем τ_0 так, чтобы правая часть была больше

$$(1-\alpha) L(f_0) \quad \text{для} \quad 0 < t < \tau_0.$$

Тогда

$$L(f_1) + \frac{\gamma}{2} > (1-\alpha)\left(L(f_0) + \frac{\gamma}{2}\right).$$

Для $J(f_1)$ получаем неравенство

$$J(f_1) < \frac{8\pi a \int\limits_{\Omega} f_0\, d\omega}{(\varkappa - 2)(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa-1}} + \frac{k(\varkappa)\, a^2}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}} +$$

$$+ \frac{8\pi a}{(\varkappa-2)(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa-1}} \int_0^t \int_{\Omega} \left|\frac{\partial f_1}{\partial t}\right| d\omega\, dt.$$

Полагая $h(p) = \dfrac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}$, получаем, в силу (97),

$$\int_0^t dt \int_{\Omega} \left|\frac{\partial f_1}{\partial t}\right| d\omega < \int_0^t e^{\gamma t} \int_{\Omega} [(L(h) + \gamma) h + J(h)]\, d\omega\, dt.$$

Но мы можем так выбрать число τ_0', зависящее только от f_0, a, $\varkappa$ и γ, чтобы иметь

$$J(f_1) < S(f_1) < \frac{S(f_0)}{1-\alpha}$$

для $0 < 1 < \tau_0'$. Отсюда, в силу (98), вытекает, что

$$\frac{J(f_1)}{L(f_1) + \frac{\gamma}{2}} < \frac{S(f_0)}{L(f_0) + \frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{1}{(1-\alpha)^2} < \frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}},$$

если $0 < t < \tau$, где τ — наименьшее из чисел

$$\tau_0,\ \tau_0',\ \tau_1,$$

а τ_1 — положительный корень уравнения

$$e^{-\gamma\tau_1} = 1/2.$$

Таким образом, получаем

$$f_2 < \frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^\varkappa},$$

$$F_2 < \frac{ae^{\gamma t}}{(\sqrt{1+r^2})^\varkappa} \quad \text{для} \quad 0 < t < \tau.$$

Точно такими же выкладками показываем, что

$$F_3 < \frac{ae^{\gamma t}}{(\sqrt{1+r^2})^\varkappa} \quad \text{для} \quad 0 < t < \tau$$

и т. д., и, таким образом, имеем

$$F_n < \frac{ae^{\gamma t}}{(\sqrt{1+r^2})^\varkappa} \quad \text{для} \quad 0 < t < \tau.$$

Заметим еще, что для любого положительного числа μ можно определить $\delta < \tau$ так, чтобы для $0 \leqslant t \leqslant \delta$ иметь

$$\left| \int_\Omega F_n \, d\omega - A \right| < \mu A$$

и

$$L(F_n) > 2\pi A(1-\mu) r - c.$$

Сходимость последовательности F_n

Вычитая из уравнения

$$\frac{\partial F_{n+1}}{\partial t} + L(F_n) F_{n+1} = J(F_n)$$

уравнение

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + L(F_{n-1}) F_n = J(F_{n-1}),$$

получаем

$$\frac{\partial (F_{n+1} - F_n)}{\partial t} + L(F_n)(F_{n+1} - F_n) = \tag{99}$$

$$= J(F_n + F_{n-1},\ F_n - F_{n-1}) - F_n L(F_n - F_{n-1}).$$

Положим

$$
\begin{aligned}
&F_n - F_{n-1} = \varphi_n \frac{e^{\beta t}}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \\
&\int\limits_{\Omega} |F_n - F_{n-1}|\, d\omega = \psi_n e^{\beta t}.
\end{aligned} \tag{100}
$$

Подставив выражение (100) в левую часть (99), получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \varphi_{n+1}}{\partial t} + [L(F_n) + \beta]\, \varphi_{n+1} = \\
&= e^{-\beta t} (\sqrt{1+r^2})^{\varkappa} [J(F_n + F_{n-1},\ F_n - F_{n-1}) - \\
&\qquad - F_n L(F_n - F_{n-1})].
\end{aligned} \tag{101}
$$

Пусть ω_n при $0 \leqslant t \leqslant \delta$ есть верхняя граница для $|\varphi_n|$ в Ω, а θ_n — верхняя граница ψ_n. Используя неравенства

$$
\begin{aligned}
&F_n + F_{n-1} < \frac{2ae^{\gamma t}}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \\
&|F_n - F_{n-1}| \leqslant \omega_n \frac{e^{\beta t}}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \\
&\int\limits_{\Omega} (F_n + F_{n-1})\, d\omega < 2A(1+\mu), \\
&\int\limits_{\Omega} |F_n - F_{n-1}|\, d\omega = \psi_n e^{\beta t} \leqslant \theta_n e^{\beta t}
\end{aligned}
$$

и применяя неравенства

$$
\begin{aligned}
J(F,\ G) < &\frac{4\pi a \int\limits_{\Omega} |G|\, d\omega}{(\varkappa - 2)(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa - 1}} + \frac{4\pi a' \int\limits_{\Omega} |F|\, d\omega}{(\varkappa - 2)(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa - 1}} + \\
&+ \frac{k(\varkappa)\, aa'}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}},
\end{aligned}
$$

$$
|F| < \frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \qquad |G| < \frac{a'}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}},
$$

находим:

$$|J(F_n+F_{n-1},\ F_n-F_{n-1})| \leqslant \frac{8\pi(1+\mu)A\omega_n e^{\beta t}}{(\varkappa-2)(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa-1}} + \\ + \frac{8\pi a\theta_n e^{(\beta+\gamma)t}}{(\varkappa-2)(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa-1}} + \frac{2k(\varkappa)a\omega_n e^{(\beta+\gamma)t}}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}.$$

Мы имеем также

$$|L(F_n-F_{n-1})| < 2\pi\theta_n r e^{\beta t} + C_1(\varkappa)\omega_n e^{\beta t},$$

где $C_1(\varkappa)$ — постоянная, зависящая только от $\varkappa$. Следовательно, абсолютная величина правой части (101) меньше

$$\frac{8\pi(1+\mu)A\omega_n\sqrt{1+r^2}}{\varkappa-2} + \frac{10\pi a\theta_n e^{\gamma\delta}\sqrt{1+r^2}}{\varkappa-2} + \\ + 2k(\varkappa)a\omega_n e^{\gamma\delta} + aC_1(\varkappa)\omega_n e^{\gamma\delta}.$$

В силу (101) и леммы (88), получаем

(102) $$|\varphi_{n+1}| \leqslant \\ \leqslant \omega_n \frac{8\pi(1+\mu)A\sqrt{1+r^2} + (\varkappa-2)e^{\gamma\delta}a[2k(\varkappa)+C_1(\varkappa)]}{(\varkappa-2)[2\pi A(1-\mu)r-c+\beta]} + \\ + \theta_n \frac{10\pi a e^{\gamma\delta}\sqrt{1+r^2}}{(\varkappa-2)[2\pi A(1-\mu)r-c+\beta]}.$$

Кроме того, имеем

(103) $$\theta_{n+1} \leqslant \sup_{0\leqslant t\leqslant\delta} \int_{\Omega} \frac{|\varphi_{n+1}|}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}\, d\omega.$$

Коэффициенты при ω_n и при θ_n в неравенстве (102) стремятся при $r\to\infty$ соответственно к величинам

$$\frac{4(1+\mu)}{(\varkappa-2)(1-\mu)} = k_1 \quad \text{и} \quad \frac{5ae^{\gamma\delta}}{(\varkappa-2)A(1-\mu)} = k.$$

Выбрав

$$\mu < \frac{\varkappa-6}{\varkappa+2},$$

получим $k_1 < 1$, и, таким образом, можно записать

$$k_1 = 1-\alpha,$$

где α — положительное число. С другой стороны, видно, что указанные коэффициенты стремятся к нулю, если r

фиксировано, а $\beta \to \infty$. Но, в силу неравенства (103), мы можем зафиксировать такое число β, что

$$\omega_{n+1} \leqslant \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\omega_n + 2k\theta_n,$$

(104)

$$\theta_{n+1} \leqslant \varepsilon(\omega_n + \theta_n),$$

где ε — заданное сколь угодно малое число. Из (104) выводим, что

$$\omega_{n+1} + \frac{2k}{1-\alpha}\theta_{n+1} \leqslant \left(1 - \frac{\alpha}{2} + \frac{2k\varepsilon}{1-\alpha}\right)\omega_n + \\ + 2k\left(1 + \frac{\varepsilon}{1-\alpha}\right)\theta_n.$$

Взяв в качестве ε положительное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\frac{2\varepsilon k}{1-\alpha} < \frac{\alpha}{4}, \qquad \varepsilon < \frac{3\alpha}{4},$$

находим

$$\omega_{n+1} + \frac{2k}{1-\alpha}\theta_{n+1} \leqslant \left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)\left(\omega_n + \frac{2k}{1-\alpha}\theta_n\right).$$

Отсюда следует, что

$$\omega_n + \frac{2k}{1-\alpha}\theta_n < C\left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)^n,$$

где C — постоянная. Из полученного неравенства вытекает, что

$$\omega_n < C\left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)^n.$$

Следовательно, ряд

$$\sum (F_n(p, t) - F_{n-1}(p, t))$$

допускает мажоранту

$$\sum \frac{Ce^{\beta t}\left(1 - \frac{\alpha}{4}\right)^n}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}},$$

откуда заключаем, что $F_n(p, t)$ сходятся равномерно для $0 \leqslant t \leqslant \delta$ к некоторому пределу $F(p, t)$.

Используя неравенство

$$|F-F_n|<\frac{4Ce^{\beta t}\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)^{n+1}}{\alpha\left(\sqrt{1+r^2}\right)^{\varkappa}},$$

легко доказываем, что

$$\lim_{n\to\infty} J(F_n)=J(F),$$

$$\lim_{n\to\infty} L(F_n)=L(F)$$

равномерно на отрезке $0\leqslant t\leqslant\delta$. Отсюда вытекает, что функция

$$F(p,\ t)=\lim_{n\to\infty} F_n(p,\ t)$$

обладает непрерывной производной $\partial F/\partial t$, удовлетворяющей соотношениям

$$\frac{\partial F}{\partial t}+L(F)\,F=J(F),$$

$$\lim_{t\to 0} F(p,\ t)=f_0(p).$$

Таким образом, мы нашли неотрицательное решение уравнения Больцмана, определенное на отрезке $0\leqslant t\leqslant\delta$ и принимающее при $t=0$ заданные значения $f_0(p)$.

Заменим теперь в предыдущих выкладках число a числом c, где c — постоянная, фигурирующая в теореме I предыдущего параграфа. Пусть δ_1 — число, соответствующее δ при этой замене. Тогда предельная функция $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(p,\ t)=$ $=F(p,\ t)$ обладает при $t=\delta_1$ мажорантой

$$0\leqslant F(p,\ \delta_1)<\frac{c}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Если теперь строить последовательные приближения, соответствующие начальной функции $F(p,\ \delta_1)$, и если известно, что решение единственно, то мы получим продолжение решения на отрезок $\delta_1\leqslant t\leqslant 2\delta_1$. Повторяя этот же процесс n раз подряд, найдем решение на отрезке $0\leqslant t\leqslant n\delta_1$. Так как n произвольно, то отсюда следует, что решение продолжимо непрерывным образом на все положительные значения t.

Единственность решения

Мы хотим доказать, что решение $F(p, t)$, только что полученное, является единственным, принимающим значения $f_0(p)$ при $t=0$ и удовлетворяющим на отрезке $0 \leqslant t \leqslant t_1$ неравенству вида

$$|F(p, t)| < \frac{C}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \qquad \varkappa > 6, \qquad C \text{ — постоянная.}$$

Предположим противное: пусть существует второе решение ϕ, удовлетворяющее этим условиям. Имеем

$$\frac{\partial (F-\phi)}{\partial t} + L(F)(F-\phi) = \tag{105}$$
$$= J(F+\phi,\ F-\phi) - \phi L(F-\phi).$$

Положим

$$F-\phi = \frac{e^{\beta t}}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}\varphi, \qquad \int\limits_{\Omega} |F-\phi|\, d\omega = \psi e^{\beta t}.$$

Пусть ω — верхняя граница $|\varphi|$ в Ω для $0 \leqslant t \leqslant t_1$, θ — верхняя граница ψ для $0 \leqslant t \leqslant t_1$. Теперь уравнение (105) можно записать в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (L(F)+\beta)\varphi =$$
$$= e^{-\beta t}(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}\,[J(F+\phi,\ F-\phi) - \phi L(F-\phi)].$$

Мы найдем, что

$$|J(F+\phi,\ F-\phi)| \leqslant |J(2F,\ F-\phi)| + |J(F-\phi)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{8\pi A\omega e^{\beta t}}{(\varkappa-2)(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa-1}} + \frac{24\pi\theta C e^{\beta t}}{(\varkappa-2)(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa-1}} + \frac{4k(\varkappa)\,C\omega e^{\beta t}}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}},$$

откуда заключаем, что

$$e^{-\beta t}(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}\,|J(F+\phi,\ F-\phi)| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{8\pi A\sqrt{1+r^2}}{\varkappa-2} + 4k(\varkappa)\,C\right)\omega + \frac{24\pi C\sqrt{1+r^2}}{\varkappa-2}\theta.$$

Имеем также

$$|e^{-\beta t}(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}\,\phi L(F-\phi)| < C'\omega,$$
$$L(F)+\beta > 2\pi A r - c + \beta.$$

Следовательно,

$$(106)\quad |\varphi| \leqslant \frac{\omega}{2\pi Ar - c + \beta}\left[\frac{8\pi A\sqrt{1+r^2}}{\varkappa - 2} + 4k(\varkappa)C + C'\right] + \\ + \frac{24\pi C\sqrt{1+r^2}}{(\varkappa-2)(2\pi Ar - c + \beta)}\theta.$$

Верхние границы коэффициентов при ω и θ в равенстве (106) стремятся соответственно к пределам

$$\frac{4}{\varkappa - 2} = 1 - \alpha' \quad \text{и} \quad \frac{12C}{A(\varkappa - 2)} = k',$$

когда r стремится к бесконечности. С другой стороны, находим, что коэффициенты при ω и θ в (106) стремятся к нулю, когда r фиксировано, а $\beta \to \infty$. Но таким же способом, как и выше, мы можем определить положительное число β так, чтобы иметь

$$\omega \leqslant \left(1 - \frac{\alpha'}{2}\right)\omega + 2k'\theta$$

и, например,

$$\theta \leqslant \frac{\alpha'}{16k'}\omega + \frac{\theta}{2}.$$

Следовательно,

$$\theta < \frac{\alpha'}{8k'}\omega,$$

$$0 \leqslant \omega \leqslant \left(1 - \frac{\alpha'}{2}\right)\omega + \frac{\alpha'}{4}\omega = \left(1 - \frac{\alpha'}{4}\right)\omega,$$

откуда заключаем, что

$$\omega = 0,$$

т. е. $F = \phi$ для $0 \leqslant t \leqslant t_1$, что и требовалось доказать.

Полученные результаты мы объединим в следующей теореме:

Если дана непрерывная функция $f_0(p)$, подчиняющаяся условиям

$$0 \leqslant f_0(p) \leqslant \frac{a}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \qquad \varkappa > 6,$$

то существует решение $F(p, t)$ уравнения $\partial F/\partial t = T(F)$, непрерывное во всей области Ω и сводящееся при $t = 0$

к функции $f_0(p)$. Оно удовлетворяет неравенствам

$$0 \leqslant F(p, t) < \frac{c}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}},$$

где c — постоянная, не зависящая от t и r. Не существует другого решения, имеющего те же начальные значения и удовлетворяющего в интервале $0 \leqslant t < t_1$ неравенству вида

$$|F| < \frac{C}{(\sqrt{1+r^2})^{\varkappa}}, \qquad \varkappa > 6, \qquad C \text{ — постоянная.}$$

§ 3

Поведение решения при $t \to \infty$

Мы хотим изучить поведение при $t \to \infty$ решения $F(p, t)$, существование которого установили в предыдущем параграфе. Рассмотрим функцию Больцмана

$$H(t) = \int_{\Omega} F(p, t) \log F(p, t)\, d\omega.$$

Согласно сформулированной на стр. 51 теореме II, эта функция непрерывна по t и (при $t > 0$) обладает непрерывной и неположительной производной

$$H'(t) = \int_{\Omega} T(F) \log F\, d\omega.$$

Учитывая соотношения

$$\int_{\Omega} F(p, t)\, d\omega = A,$$

$$\int_{\Omega} F(p, t)\, r^2\, d\omega = B, \tag{107}$$

где A и B — положительные постоянные, мы на основании результатов предыдущего параграфа заключаем, что $H(t)$

обладает конечной нижней границей. Отсюда (с учетом соотношения $H'(t) \leqslant 0$) получаем, что

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} H'(t) = 0.$$

Следовательно, мы можем выбрать такую последовательность $t_1, t_2, \ldots, t_n$, что

$$\lim_{n \to \infty} H'(t_n) = 0.$$

Используя теорему III из § 1, мы видим, что из последовательности $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ можно выделить такую подпоследовательность t_{n_ν} ($\nu = 1, 2, \ldots$), чтобы последовательность $F(p, t_{n_\nu})$ сходилась равномерно к непрерывной функции $f(p)$, когда ν стремится к бесконечности. Согласно (107) и неравенству (85), мы имеем

$$\int_{\Omega} f(p)\, d\omega = A,$$

$$\int_{\Omega} f(p)\, r^2\, d\omega = B. \tag{108}$$

Докажем, что выражение

$$f'f'_1 - ff_1 = f(p')f(p'_1) - f(p)f(p_1)$$

есть тождественный нуль в области $\Omega \times \Omega_1 \times \Sigma$. Действительно, если бы это было не так, то можно было бы найти область D с положительной мерой, в которой

$$|f'f'_1 - ff_1| > \rho > 0,$$

где ρ — постоянная. Отсюда заключаем, что можно выбрать такое число ν_0, что

$$F(p', t_{n_\nu}) F(p'_1, t_{n_\nu}) - F(p, t_{n_\nu}) F(p_1, t_{n_\nu}) > \frac{\rho}{2} \tag{109}$$

в D для $\nu > \nu_0$. Используя формулу (30), получаем

$$H'(t_{n_\nu}) < -\frac{1}{4} \int_D (F'F'_1 - FF_1) \log \frac{F'F'}{FF_1}\, h\, d\omega\, d\omega_1\, d\sigma. \tag{110}$$

Обозначим через M верхнюю грань $F(p, t)$ в Ω для $0 < t < \infty$. Тогда, в силу (109), будем иметь

$$\left[(F'F_1' - FF_1)\log\frac{F'F_1'}{FF_1}\right]_{t=t_{n_\nu}} \geqslant \frac{\rho}{2}\log\left(1+\frac{\rho}{2M^2}\right)$$

и, в силу формулы (110),

$$H'(t_{n_\nu}) < -\frac{\rho}{8}\log\left(1+\frac{\rho}{2M^2}\right)\int\limits_D h\,d\omega\,d\omega_1\,d\sigma.$$

Отсюда, устремляя ν к бесконечности, выводим

$$0 \leqslant -\frac{\rho}{8}\log\left(1+\frac{\rho}{2M^2}\right)\int\limits_D h\,d\omega\,d\omega_1\,d\sigma,$$

что невозможно. Таким образом, необходимо будем иметь

$$f(p')f(p_1') - f(p)f(p_1) = 0. \tag{111}$$

Но мы уже отмечали, что это уравнение влечет за собой равенство

$$f(p) = Ce^{-\alpha r^2}, \tag{112}$$

где C и α — постоянные, определяемые соотношениями (108) [1]).

Теперь мы можем доказать, что $F(p, t)$ стремится к $Ce^{-\alpha r^2}$, когда t произвольным образом стремится к бесконечности. Действительно, в противном случае нашлась бы последовательность $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu, \ldots$, неограниченно растущая и такая, что $F(p, \tau_\nu)$ равномерно при $\nu \to \infty$ сходится к неотрицательной функции $\psi(p)$, отличной от $Ce^{-\alpha r^2}$. Пусть k — нижняя грань выражения

$$\int\limits_\Omega f\log f\,d\omega$$

для функций f, удовлетворяющих условиям (108). По лемме об одной вариационной проблеме, доказанной в § 8 гл. I,

[1]) Приведенный выше вывод основан на теореме III из § 1, полное доказательство которой доведено до конца только в случае, когда $F(p, t)$ зависит только от $|p|$. Тем не менее легко видеть, что можно получить строгое доказательство, заменяя равномерную сходимость слабой сходимостью, которой достаточно, потому что решение функционального уравнения (111) пригодно при единственном условии, что f есть измеримая функция.

эта нижняя грань достигается для функции (112). Из только что доказанного результата следует, что

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = k.$$

Таким образом, мы имеем

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\Omega} F(p, \tau_\nu) \log F(p, \tau_\nu)\, d\omega = k.$$

С другой стороны,

$$k = \lim_{\nu\to\infty} \int_{\Omega} F(p, \tau_\nu) \log F(p, \tau_\nu)\, d\omega \geqslant \int_{\Omega} \psi \log \psi\, d\omega. \tag{113}$$

Согласно неравенству (85), мы можем в очевидных соотношениях

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\Omega} F(p, \tau_\nu)\, d\omega = A,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\Omega} F(p, \tau_\nu)\, r^2\, d\omega = B$$

осуществить предельный переход под знаком интеграла, который дает

$$\int_{\Omega} \psi\, d\omega = A,$$

$$\int_{\Omega} \psi r^2\, d\omega = B.$$

Таким образом, согласно той же самой лемме, в соотношении (113) должен иметь место знак равенства и

$$\psi = Ce^{-\alpha r^2}$$

вопреки предположению.

Итак, доказано, что решение $F(p, t)$ уравнения Больцмана при $t \to \infty$ стремится равномерно к функции Максвелла

$$Ce^{-\alpha r^2}.$$

ВВЕДЕНИЕ

В первой части этой книги мы дали полную теорию интегро-дифференциального уравнения Больцмана в случае, когда функция распределения зависит только от координат вектора скорости. В этой второй части мы будем предполагать, что состояние газа может меняться в пространстве от точки к точке. Однако мы ограничимся изучением поведения системы, находящейся вблизи равновесия. Этот случай особенно важен для практических приложений.

В кинетической теории газов рассматривают функцию распределения скоростей $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$, определенную таким образом, что $F\,dv\,d\omega$ обозначает число молекул, центры которых в момент времени t находятся внутри элемента объема $dv = dx\,dy\,dz$, а векторы скоростей (ξ, η, ζ) оканчиваются в элементе $d\omega = d\xi\,d\eta\,d\zeta$ пространства скоростей. В этих предположениях уравнение Больцмана для функции F имеет вид

$$D(F) = T(F), \tag{1}$$

где $D(F)$ есть дифференциальное выражение

$$D(F) = \frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta}.$$

X, Y, Z — компоненты внешних сил. $T(F)$ — некоторый однородный оператор второго порядка; мы его сейчас определим. Ограничимся случаем, когда молекулы являются абсолютно упругими шарами с диаметром χ, а внешние силы

эта нижняя грань достигается для функции (112). Из только что доказанного результата следует, что

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = k.$$

Таким образом, мы имеем

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\Omega} F(p, \tau_\nu) \log F(p, \tau_\nu)\, d\omega = k.$$

С другой стороны,

$$k = \lim_{\nu\to\infty} \int_{\Omega} F(p, \tau_\nu) \log F(p, \tau_\nu)\, d\omega \geqslant \int_{\Omega} \psi \log \psi\, d\omega. \tag{113}$$

Согласно неравенству (85), мы можем в очевидных соотношениях

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\Omega} F(p, \tau_\nu)\, d\omega = A,$$

$$\lim_{\nu\to\infty} \int_{\Omega} F(p, \tau_\nu)\, r^2\, d\omega = B$$

осуществить предельный переход под знаком интеграла, который дает

$$\int_{\Omega} \psi\, d\omega = A,$$

$$\int_{\Omega} \psi r^2\, d\omega = B.$$

Таким образом, согласно той же самой лемме, в соотношении (113) должен иметь место знак равенства и

$$\psi = Ce^{-\alpha r^2}$$

вопреки предположению.

Итак, доказано, что решение $F(p, t)$ уравнения Больцмана при $t \to \infty$ стремится равномерно к функции Максвелла

$$Ce^{-\alpha r^2}.$$

ВВЕДЕНИЕ

В первой части этой книги мы дали полную теорию интегро-дифференциального уравнения Больцмана в случае, когда функция распределения зависит только от координат вектора скорости. В этой второй части мы будем предполагать, что состояние газа может меняться в пространстве от точки к точке. Однако мы ограничимся изучением поведения системы, находящейся вблизи равновесия. Этот случай особенно важен для практических приложений.

В кинетической теории газов рассматривают функцию распределения скоростей $F(x, y, z, \xi, \eta, \zeta, t)$, определенную таким образом, что $F\,dv\,d\omega$ обозначает число молекул, центры которых в момент времени t находятся внутри элемента объема $dv = dx\,dy\,dz$, а векторы скоростей (ξ, η, ζ) оканчиваются в элементе $d\omega = d\xi\,d\eta\,d\zeta$ пространства скоростей. В этих предположениях уравнение Больцмана для функции F имеет вид

$$D(F) = T(F), \tag{1}$$

где $D(F)$ есть дифференциальное выражение

$$D(F) = \frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} + \eta \frac{\partial F}{\partial y} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z} + X \frac{\partial F}{\partial \xi} + Y \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z \frac{\partial F}{\partial \zeta}.$$

X, Y, Z — компоненты внешних сил. $T(F)$ — некоторый однородный оператор второго порядка; мы его сейчас определим. Ограничимся случаем, когда молекулы являются абсолютно упругими шарами с диаметром χ, а внешние силы

отсутствуют. Обозначим через p и p_1 точки в пространстве скоростей с координатами ξ, η, ζ и ξ_1, η_1, ζ_1, и пусть l, m, n — декартовы координаты точки, лежащей на сфере Σ радиуса 1 с центром в начале. Положим

$$\begin{aligned}
\xi' &= \xi - lW, \qquad \xi_1' = \xi_1 + lW, \qquad l' = -l,\\
\eta' &= \eta - mW, \qquad \eta_1' = \eta_1 + mW, \qquad m' = -m,\\
\zeta' &= \zeta - nW, \qquad \zeta_1' = \zeta_1 + nW, \qquad n' = -n,\\
W &= l(\xi - \xi_1) + m(\eta - \eta_1) + n(\zeta - \zeta_1).
\end{aligned}$$

Если обозначить точки

$$(\xi', \eta', \zeta') \quad \text{и} \quad (\xi_1', \eta_1', \zeta_1')$$

через p' и p_1', то можно определить $T(F)$ следующим образом:

$$T(F) = \frac{\chi^2}{2} \int\limits_{\Sigma} \int\limits_{\Omega_1} \left(F(p')F(p_1') - F(p)F(p_1)\right) |W| \, d\omega_{p_1} \, d\sigma.$$

Ω_1 есть неограниченное пространство, пробегаемое p_1, а $d\sigma$ — элемент поверхности сферы Σ. В первой части было доказано, что $T(F)$ можно преобразовать к виду

$$T(F) = \frac{\chi^2}{2}\left(2 \int\limits_{\Omega_1} \frac{1}{r_{pp_1}} F(p_1) \int\limits_{E_{pp_1}} F(q) \, d\sigma_q \, d\omega_{p_1} - \right.$$
$$\left. - 2\pi F(p) \int\limits_{\Omega_1} r_{pp_1} F(p_1) \, d\omega_{p_1}\right),$$

где

$$r_{pp_1} = \sqrt{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + (\zeta - \zeta_1)^2}$$

и где E_{pp_1} есть плоскость, проходящая через p перпендикулярно вектору $\overrightarrow{pp_1}$. q есть переменная точка плоскости E_{pp_1}, а $d\sigma_q$ — соответствующий элемент поверхности.

Для изучения решений уравнения (1), мало отклоняющихся от соответствующего равновесию решения

$$F^* = Ae^{-ar^2},$$

где положено $r = |p|$, естественно сделать подстановку

$$F = A\left(e^{-ar^2} + e^{-\frac{a}{2}r^2}\phi\right).$$

Если положить, далее,

$$\phi\left(\frac{p}{\sqrt{a}},\quad t\sqrt{a}\right)=\varphi(p,\ t),$$

то уравнение Больцмана примет вид

$$(2)\quad \frac{\partial\varphi}{\partial t}+\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial z}=$$
$$=\lambda\left(2e^{r^2/2}T'\left(e^{-r^2},\ e^{-r^2/2}\varphi\right)+e^{r^2/2}T'\left(e^{-r^2/2}\varphi\right)\right),$$

где

$$\lambda=\frac{\chi^2}{2}\frac{A}{a^{3/2}},$$

а $T'(F)$ и $T'(F,\ G)$ определены соотношениями (ср. формулу, на которую мы сослались выше)

$$T'(F)=\int\limits_{\Sigma}\int\limits_{\Omega_1}\left[F(p')F\left(p_1'\right)-F(p)\left(p_1\right)\right]|W|\,d\omega_{p_1}\,d\sigma=$$

$$=2\int\limits_{\Omega_1}\frac{1}{r_{pp_1}}F(p_1)\int\limits_{E_{pp_1}}F(q)\,d\sigma_q\,d\omega_{p_1}-2\pi F(p)\int\limits_{\Omega_1}r_{pp_1}F(p_1)\,d\omega_{p_1};$$

$$T'(F,\ G)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Sigma}\left[F(p')G\left(p_1'\right)+F\left(p_1'\right)G(p')-F(p)G\left(p_1\right)-\right.$$

$$\left.-F(p_1)G(p)\right]|W|\,d\omega_{p_1}\,d\sigma_q=2\int\limits_{\Omega_1}\frac{1}{r_{pp_1}}F(p_1)\int\limits_{E_{pp_1}}G(q)\,d\sigma_q\,d\omega_{p_1}-$$

$$-\pi F(p)\int\limits_{\Omega_1}r_{pp_1}G(p_1)\,d\omega_{p_1}-\pi G(p)\int\limits_{\Omega_1}r_{pp_1}F(p_1)\,d\omega_{p_1}.$$

Уравнение (2) может быть формально решено посредством степенного ряда вида

$$\mu(\varphi_0+\mu\varphi_1+\mu^2\varphi_2+\ldots).$$

Если начальные значения φ_0 обладают достаточно малой мажорантой, то этот ряд сходится при $\mu=1$ и первый член будет превосходить остаток ряда. Следовательно, чтобы получить аппроксимацию движения вблизи равновесия, мы можем предположить, что φ — решение линейного уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\xi\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\eta\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\zeta\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\lambda S(\varphi)=0,$$

где $S(\varphi)$ — линейный оператор

$$S(\varphi)=-2e^{r^2/2}T'\left(e^{-r^2},\ e^{-r^2/2}\varphi\right).$$

Глава I

УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА ВБЛИЗИ РАВНОВЕСИЯ

§ 1

Изучение линейного оператора $S(\varphi)$

Из соотношения

$$S(\varphi) = -2e^{r^2/2}T'(e^{-r^2},\ e^{-r^2/2}\varphi)$$

видно, что $S(\varphi)$ — линейный оператор. Прежде всего мы изучим интеграл

$$\int_{\Omega} \psi S(\varphi)\, d\omega = -2\int_{\Omega} e^{r^2/2}T'(e^{-r^2},\ e^{-r^2/2}\varphi)\,\psi\, d\omega.$$

Воспользуемся следующей формулой, выведенной в первой части:

$$\int_{\Omega} HT'(F,\ G)\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{4}\int_{\Omega}\int_{\Omega_1}\int_{\Sigma}\left(H + H_1 - H' - H_1'\right)[F,\ G]\, d\sigma\, d\omega_1\, d\omega.$$

Если мы положим

$$\psi e^{r^2/2} = \Psi, \quad \varphi e^{r^2/2} = \Phi,$$

то из нее будет следовать, что

$$\int_{\Omega} \psi S(\varphi)\, d\omega = -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Omega_1}\int_{\Sigma}\left(\Psi + \Psi_1 - \Psi' - \Psi_1'\right)\times$$

$$\times[e^{-r^2},\ \Phi e^{-r^2}]\, d\sigma\, d\omega_1\, d\omega = \frac{1}{4}\int_{\Omega}\int_{\Omega_1}\int_{\Sigma}\left(\Psi + \Psi_1 - \Psi' - \Psi_1'\right)\times$$

$$\times\left(\Phi + \Phi_1 - \Phi' - \Phi_1'\right) e^{-\left(r^2 + r_1^2\right)} |W|\, d\omega\, d\omega_1\, d\sigma. \tag{3}$$

Таким образом, $S(\varphi)$ — положительно определенный оператор, т. е.

$$\int_{\Omega} \bar{\varphi} S(\varphi)\, d\omega \geqslant 0.$$

Из того факта, что уравнение

$$\Phi + \Phi_1 - \Phi_1' - \Phi' = 0$$

не имеет других решений, кроме 1, ξ, η, ζ, $\xi^2+\eta^2+\zeta^2$ или их линейных комбинаций, следует, что множество решений уравнения

$$S(\varphi) = 0$$

образовано функциями

$$\begin{aligned} &\varphi_1 = e^{-r^2/2}, \quad \varphi_2 = e^{-r^2/2}\xi, \quad \varphi_3 = e^{-r^2/2}\eta, \\ &\varphi_4 = e^{-r^2/2}\zeta, \quad \varphi_5 = e^{-r^2/2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2) \end{aligned} \tag{4}$$

и их линейными комбинациями с коэффициентами, не зависящими от ξ, η, ζ. В силу симметрии последнего члена в равенстве (3) относительно Φ и Ψ, находим, что $S(\varphi)$ есть *самосопряженный* оператор.

Определение явного вида $S(\varphi)$

Мы имеем

$$S(\varphi) = -2e^{r^2/2}T'(e^{-r^2}, e^{-r^2/2}\varphi), \tag{5}$$

$$T'(e^{-r^2}, e^{-r^2/2}\varphi) = 2\int_{\Omega_1} e^{-r_1^2/2}\varphi(p_1)\frac{1}{r_{pp_1}}d\omega_{p_1}\int_{E_{pp_1}} e^{-|q|^2}d\sigma_q - \tag{6}$$

$$-\pi\left(e^{-r^2/2}\varphi(p)\int_{\Omega_1} r_{pp_1}e^{-r_1^2}d\omega_{p_1} + e^{-r^2}\int_{\Omega_1} r_{pp_1}e^{-r_1^2/2}\varphi(p_1)d\omega_{p_1}\right).$$

Сразу находим, что

$$\int_{E_{pp_1}} e^{-|q|^2}d\sigma_q = \pi e^{-r^2\cos^2\theta},$$

где θ — угол между векторами p и pp_1. Обозначая r_{pp_1} через ρ, получаем соотношения

$$r_1^2 = r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos\theta, \tag{7}$$

$$r\cos\theta = \frac{r_1^2 - r^2 - \rho^2}{2\rho}. \tag{8}$$

Отсюда в результате элементарного подсчета получим, что

$$\int\limits_{\Omega_1} r_{pp_1} e^{-r_1^2} d\omega_{p_1} = 2\pi \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\pi e^{-(r^2+\rho^2+2\rho r\cos\theta)} \rho^3 \sin\theta \, d\theta \, d\rho =$$

$$= \frac{\pi}{r}\left(r e^{-r^2} + (2r^2+1) \int\limits_0^r e^{-\rho^2} d\rho \right).$$

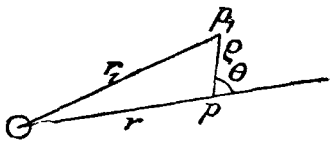

Рис. 4.

Первый член в правой части уравнения (6) можно записать в виде

$$\int\limits_{\Omega_1} \frac{2\pi}{\rho} e^{-r_1^2/2 - r^2\cos^2\theta} \varphi(p_1) \, d\omega_{p_1}.$$

Поэтому для $S(\varphi)$ имеем соотношение

$$S(\varphi) = \int\limits_{\Omega_1} \left[2\pi\rho e^{-\left(r^2+r_1^2\right)/2} \frac{4\pi}{\rho} e^{\left(r^2-r_1^2\right)/2 - r^2\cos^2\theta} \right] \varphi(p_1) \, d\omega_{p_1} +$$

$$+ \varphi(p) \cdot 4\pi^2 \left(\frac{e^{-r^2}}{2} + \left(r + \frac{1}{2r} \right) \int\limits_0^r e^{-r^2} dr \right).$$

Согласно (8), имеем

$$\frac{r^2 - r_1^2}{2} - r^2\cos^2\theta = -\frac{\rho^2}{4} - \frac{\left(r^2-r_1^2\right)^2}{4\rho^2}.$$

Итак, очевидно, что $S(\varphi)$ выражается формулой

$$S(\varphi) = k(r)\,\varphi(p) - \int\limits_{\Omega_1} G(p, p_1)\,\varphi(p_1)\, d\omega_{p_1}, \tag{9}$$

где положено:

$$k(r) = 4\pi^2 \left(\frac{e^{-r^2}}{2} + \left(r + \frac{1}{2r} \right) E(r) \right), \tag{10}$$

$$E(r) = \int\limits_0^r e^{-r^2} dr,$$

$$G(p, p_1) = \frac{4\pi}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{4} - \frac{\left(r^2-r_1^2\right)^2}{4\rho^2}} - 2\pi\rho e^{\frac{r^2+r_1^2}{2}}. \tag{11}$$

Свойства функции $k(r)$

Непосредственно находим, что

$$\lim_{r \to 0} k(r) = 4\pi^2,$$

$$\lim_{r \to \infty} \frac{k(r)}{r} = 2\pi^2 \sqrt{\pi}.$$

Теперь мы докажем, что $k(r)$ есть возрастающая функция от r.

Дифференцируя $k(r)$, получаем

$$(12) \quad k'(r) = 4\pi^2 \left(\left(r + \frac{1}{2r} \right) e^{-r^2} - re^{-r^2} + \left(1 - \frac{1}{2r^2} \right) E(r) \right) =$$

$$= 4\pi^2 \left(\frac{1}{2r} e^{-r^2} + \left(1 - \frac{1}{2r^2} \right) E(r) \right).$$

Отсюда следует, что $k'(r) > 0$ для $r > 1/\sqrt{2}$. Умножим уравнение (12) на $2r^2/4\pi^2(1 - 2r^2)$ и положим

$$g(r) = \frac{2r^2}{4\pi^2(1 - 2r^2)} k'(r).$$

Тогда

$$g(r) = + \frac{re^{-r^2}}{1 - 2r^2} - E(r),$$

$$g(0) = 0,$$

$$g'(r) = - \frac{2r^2 e^{-r^2}}{1 - 2r^2} - e^{-r^2} + \frac{e^{-r^2}}{1 - 2r^2} +$$

$$+ \frac{4r^2}{(1 - 2r^2)^2} e^{-r^2} = \frac{4r^2}{(1 - 2r^2)^2} e^{-r^2}.$$

Итак, ясно, что $g(r) > 0$ для $r < 1/\sqrt{2}$ и, следовательно, $k'(r) > 0$ для $r < 1/\sqrt{2}$. Поэтому $k'(r)$ положительна при $r > 0$, что и доказывает наше утверждение.

§ 2

Свойства ядра $G(p, p_1)$

Имеем

$$r + r_1 \geqslant \rho,$$

откуда

$$\rho^2 \leqslant r^2 + r_1^2 + 2rr_1 \leqslant 2(r^2 + r_1^2)$$

и, следовательно,

$$|G(p, p_1)| \leqslant \frac{4\pi}{\rho} e^{-\rho^2/4} + 2\pi\rho e^{-\rho^2/4}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\int_{\Omega} |G(p, p_1)|\, d\omega_{p_1} < C, \tag{13}$$

где C — конечная постоянная, не зависящая от p. Согласно хорошо известной теореме [1]), отсюда следует, что функция $G(p, p_1)$, являющаяся симметричным ядром, ограничена в смысле Гильберта, т. е. что

$$\left| \int_{\Omega}\int_{\Omega} G(p, p_1)\, u(p)\, v(p_1)\, d\omega_p\, d\omega_{p_1} \right| < k,$$

где k — конечная постоянная, если

$$\int_{\Omega} |u(p)|^2\, d\omega_p \leqslant 1, \quad \int_{\Omega_1} |v(p_1)|^2\, d\omega_{p_1} \leqslant 1.$$

Положим

$$G_1(p, p_1) = \frac{4\pi}{\rho} e^{-\frac{\rho^2}{4} - \frac{(r_1^2 - r^2)^2}{4\rho^2}}.$$

Мы теперь изучим интеграл

$$I = \int_{\Omega_1} G_1(p, p_1)^{\beta} \frac{1}{(1 + r_1)^{\alpha}}\, d\omega_{p_1},$$

где β подчинено условию

$$1 \leqslant \beta < 3.$$

Учитывая (7), получаем

$$I = (4\pi)^{\beta} \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{\rho^{\beta}} \frac{e^{-\frac{\beta}{4}(\rho^2 + (\rho + 2r\cos\theta)^2)}}{(1 + \sqrt{r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos\theta})^{\alpha}} \cdot 2\pi\rho^2 \sin\theta\, d\rho\, d\theta =$$

$$= 2\pi (4\pi)^{\beta} \int_0^{\infty}\int_0^{\pi} \frac{1}{\rho^{\beta-2}} \cdot \frac{e^{-\frac{\beta}{4}(\rho^2 + (\rho + 2r\cos\theta)^2)}}{(1 + \sqrt{r^2 + \rho^2 + 2r\rho\cos\theta})^{\alpha}} \sin\theta\, d\rho\, d\theta =$$

$$= \frac{2\pi (4\pi)^{\beta}}{r^{\beta-3}} \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\beta-2}} \frac{e^{-\frac{\beta r^2}{4}(t^2 + (t + 2\cos\theta)^2)}}{(1 + r\sqrt{1 + t^2 + 2t\cos\theta})^{\alpha}} \sin\theta\, dt\, d\theta.$$

[1]) См. ниже, стр. 78.

Полагая

$$t + 2\cos\theta = s,$$

будем иметь

$$I = \frac{\pi(4\pi)^{\beta}}{r^{\beta-3}} \iint_D \frac{e^{-\frac{\beta}{4} r^2 (s^2+t^2)}}{t^{\beta-2}(1 + r\sqrt{1+ts})^{\alpha}}\, ds\, dt,$$

где D — область в плоскости s, t, определенная неравенствами

$$|s - t| \leqslant 2, \qquad 0 < t < \infty.$$

Если выкинуть круг $s^2 + t^2 < l^2$, то, как легко видеть, этот интеграл имеет при r, стремящемся к бесконечности, поря-

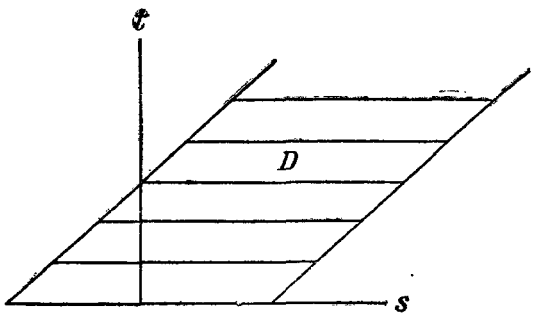

Рис. 5.

док $e^{-\gamma r^2}$. Нетрудно заметить, что в этом случае интеграл асимптотически равен

$$\frac{\pi(4\pi)^{\beta}}{r^{\beta-3}} \frac{1}{(1+r)^{\alpha}} \int_{-l}^{l}\int_{0}^{l} \frac{e^{-\frac{\beta r^2}{4}(t^2+s^2)}}{t^{\beta-2}}\, dt\, ds =$$

$$= \frac{\pi(4\pi)^{\beta}}{r^{\beta-3}} \frac{1}{(1+r)^{\alpha}} \int_{-\frac{rl}{2}\sqrt{\beta}}^{\frac{rl}{2}\sqrt{\beta}} \int_{0}^{\frac{rl\sqrt{\beta}}{2}} \frac{e^{-(t^2+s^2)}}{t^{\beta-2}}\, dt\, ds \cdot \left(\frac{r\sqrt{\beta}}{2}\right)^{\beta-4} \sim$$

$$\sim \frac{(\sqrt{\pi})^3 (4\pi)^{\beta}}{2} \Gamma\left(\frac{3-\beta}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{\beta}}{2}\right)^{\beta-4} \frac{1}{r^{\alpha+1}} \sim \frac{C(\beta)}{r^{\alpha+1}}, \qquad r \to \infty,$$

Замечая, что интеграл I ограничен и меньше

$$(4\pi)^{\beta+1}\int_0^\infty \frac{1}{\rho^{\beta-2}}\, e^{-\frac{\beta\rho^2}{4}}\, d\rho,$$

находим, что существует постоянная $C'(\alpha, \beta)$, с которой

$$\int_{\Omega_1} G_1(p, p_1)^\beta \frac{1}{(1+r_1)^\alpha}\, d\omega_{p_1} < \frac{C'(\alpha, \beta)}{(1+r)^{\alpha+1}},$$

а отсюда легко вывести, что

$$\int_{\Omega_1} |G(p, p_1)|^\beta \frac{1}{(1+r_1)^\alpha}\, d\omega_{p_1} < \frac{C}{(1+r)^{\alpha+1}}, \tag{14}$$

где C — постоянная, зависящая только от α и β. Мы воспользовались только хорошо известным неравенством

$$\left[\int |f+g|^\beta\, d\omega\right]^{1/\beta} \leqslant \left[\left(\int |f|^\beta\, d\omega\right)^{1/\beta} + \left(\int |g|^\beta\, d\omega\right)^{1/\beta}\right].$$

Фигурирующее в теории Гильберта [1]) и Энскога уравнение в точности совпадает с уравнением

$$k(r)\varphi(p) - \int_\Omega G(p, p_1)\varphi(p_1)\, d\omega_{p_1} = h(p). \tag{15}$$

Ядро $K(p, q)$ равно $G(p, q)/k(r)$. Важно знать, выполняются ли для этого ядра теоремы Фредгольма. Этот вопрос, оставленный без ответа Гильбертом, был разработан его учеником Е. Гекке [2]) методом, который, быть может, сложен, но весьма интересен и глубок.

Сейчас мы попытаемся получить указанный результат с помощью самых общих методов, требующих минимального количества выкладок.

Рассмотрим ядро $K(p, q)$, ограниченное в смысле Гильберта, и предположим, кроме того, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega K(p, q)\, u_n(p)\, v_n(q)\, d\omega_p\, d\omega_q = 0$$

---

[1]) Мы дадим изложение этой теории в последней главе.

[2]) Hecke E., Über die Integralgleichung der kinetischen Gastheorie, *Math. Zeitschrift*, 12 (1922).

для любых последовательностей функций с интегрируемым квадратом, удовлетворяющих условиям

$$\int_{\Omega} |u_n(p)|^2 d\omega_p < C_1, \quad \int_{\Omega} |v_n(p)|^2 d\omega_p < C_2,$$

а также

$$\lim_{n\to\infty} u_n(p) = 0 \quad \text{почти всюду},$$

$$\lim_{n\to\infty} v_n(p) = 0 \quad \text{почти всюду}.$$

В этом случае ядро $K(p, q)$ вполне непрерывно. Из указанных условий следует, что для уравнения

$$\varphi(p) - \int_{\Omega} K(p, q)\varphi(q)\, d\omega = f(p)$$

справедливы теоремы Фредгольма.

Для приложений очень важным является разыскание простых критериев, позволяющих судить, является ли ограниченное ядро вполне непрерывным или нет. Приведем один критерий, который может быть полезным в некоторых случаях.

Рассмотрим неограниченное пространство Ω, и пусть $G(p, q)$ — ограниченное ядро. Положим

$$K(p, q) = g(p)\, G(p, q)$$

и предположим, что

$$\lim_{|p|\to\infty} g(p) = 0,$$

а интеграл

$$\int_{|p|<R} \int_{|q|<\infty} |G(p, q)|^2 d\omega_p\, d\omega_q$$

конечен. Этих условий достаточно, чтобы утверждать, что ядро $K(p, q)$ вполне непрерывно.

Чтобы доказать это, достаточно воспользоваться следующей очевидной теоремой. Если ядро $K(p, q)$ можно представить в виде суммы двух ядер K_1 и K_2,

$$K(p, q) = K_1(p, q) + K_2(p, q),$$

одно из которых вполне непрерывно, а второе ограничено сколь угодно малым числом, то $K(p, q)$ вполне непрерывно.

Приведем теперь еще одну теорему. Если

$$\int_{\Omega} |K(p, q)|\, d\omega_q \quad \text{и} \quad \int_{\Omega} |K(q, p)|\, d\omega_q$$

меньше некоторой постоянной C, не зависящей от p, то $K(p, q)$ ограничено. Действительно, имеем

$$\left|\int_{\Omega}\int_{\Omega} K(p, q)\, u(p)\, v(q)\, d\omega_p\, d\omega_q\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{\Omega} |K(p, q)|\,(|u(p)|^2 + |v(q)|^2)\, d\omega_p\, d\omega_q \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{2}\int_{\Omega} |u(p)|^2\, d\omega_p + \frac{C}{2}\int_{\Omega} |v(p)|^2\, d\omega_p.$$

Учитывая теперь неравенство (13), мы видим, что сформулированных теорем достаточно, чтобы утверждать, что теоремы Фредгольма применимы к уравнению (15).

Уравнение (15) можно записать в форме

$$\varphi^*(p) - \int_{\Omega_1} G^*(p, p_1)\, \varphi^*(p_1)\, d\omega_{p_1} = h^*(p_1),$$

если произвести следующее преобразование:

$$G^*(p, p_1) = \frac{G(p, p_1)}{\sqrt{k(r)}\cdot\sqrt{k(r_1)}},$$

$$\varphi^*(p) = \sqrt{k(r)}\,\varphi(p),$$

$$h^*(p) = \frac{h(p)}{\sqrt{k(r)}}.$$

Обозначим через G_1^*, G_2^*, ..., G_n^* $(G_1^* = G^*)$ последовательность итераций для G^*. Гекке доказал, что пятая итерация G_5^* имеет интегрируемый квадрат, т. е. что

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} G_5^*(p, q)^2\, d\omega_p\, d\omega_q < \infty.$$

Однако полученный им номер больше, чем требуется. Действительно, мы докажем сейчас, что уже итерация G_2^* обла-

дает указанным свойством. Исходя из формулы

$$G_2^*(p, p_1) = \int_{\Omega} G^*(p, p_2)\, G^*(p_2, p_1)\, d\omega_{p_2}$$

и замечая, что

$$k(r) > c(1+r), \quad c = \text{const},$$

получаем, применяя неравенство Шварца и используя неравенство (14) для $\beta = 2$,

$$|G_2^*(p, p_1)| < \frac{C_1}{(1+r)^{1/2}\cdot(1+r_1)^{1/2}} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} \frac{G^2(p, p_2)}{1+r_2}\, d\omega_{p_2}} \times$$
$$\times \sqrt{\int_{\Omega} \frac{G^2(p_1, p_2)}{1+r_2}\, d\omega_{p_2}} = \frac{C_2}{(1+r)^{3/2}(1+r_1)^{3/2}}.$$

Образуем третью итерацию

$$G_3^*(p, p_1) = \int_{\Omega} G^*(p, p_2)\, G_2^*(p_2, p_1)\, d\omega_{p_2}.$$

Получаем

$$|G_3^*| < C_3 \frac{1}{(1+r)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1+r_1)^{3/2}} \cdot \int_{\Omega} |G(p, p_2)| \frac{1}{(1+r_2)^2}\, d\omega_{p_2} <$$
$$< C_4 \frac{1}{(1+r)^{7/2}} \cdot \frac{1}{(1+r_1)^{3/2}}$$

и, в силу симметрии,

$$|G_3^*| < \frac{C_5}{(1+r)^{5/2}(1+r_1)^{3/2}}.$$

Для

$$G_4^* = \int_{\Omega} G^*(p, p_2)\, G_3^*(p_2, p_1)\, d\omega_{p_2}$$

мы таким же способом получим

$$|G_4^*| < \frac{C_6}{(1+r)^{1/2}} \cdot \frac{1}{(1+r_1)^{5/2}} \cdot \int_{\Omega} |G(p, p_2)| \frac{1}{(1+r_2)^3}\, d\omega_{p_2} <$$
$$< \frac{C_7}{(1+r)^{3/2}(1+r_1)^{5/2}};$$

поэтому

$$|G_4^*(p, p)| = \int_{\Omega_1} (G_2^*(p, p_1))^2 d\omega_{p_1} < \frac{C_7}{(1+r)^7}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_{\Omega_1}\int_{\Omega} G_2^*(p, p_1)^2 d\omega_p d\omega_{p_1} < 4\pi^2 C_7 \int_0^\infty \frac{r^2}{(1+r)^7} dr,$$

откуда и вытекает сформулированная теорема.

§ 3

Изучение уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \lambda S(\varphi) = 0$$

в случае неограниченного пространства

В этом случае естественной краевой задачей является разыскание решения φ, сводящегося при $t = 0$ к заданной функции f_0. Для сокращения обозначений мы будем писать $\varphi(\xi, \eta, \zeta, x, y, z, t)$ в виде $\varphi(p, q, t)$, где q обозначает точку x, y, z. Итак, нашей задачей будет найти такое решение приведенного выше уравнения, что

$$[\varphi(p, q, t)]_{t=0} = f_0(p, q).$$

В пространстве x, y, z, t рассмотрим кривую, определяемую дифференциальными уравнениями

$$\frac{dx'}{\xi} = \frac{dy'}{\eta} = \frac{dz'}{\zeta} = d\tau$$

и проходящую через точку $(x, y, z, t) = (q, t)$. Мы обозначим через $L_{p,q,t}$ отрезок этой кривой, ограниченный точкой $t = 0$ и $q'(\tau)$ — произвольной точкой этой кривой, $0 \leqslant \tau \leqslant t$. Рассматриваемое уравнение вдоль кривой $L_{p,q,t}$ можно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{d\tau} + \lambda k(r)\varphi = \lambda \int_{\Omega} G(p, p_1)\varphi(p_1, q'(\tau), \tau) d\omega_{p_1} \tag{16}$$

и, таким образом, получить

$$\varphi(p, q, t) = f_0(p, q_0)\, e^{-\lambda k(r)\, t} + \\ + \lambda \int\limits_{L_{p,q,t}} e^{-\lambda k(r)\,(t-\tau)} \int\limits_{\Omega_1} G(p, p_1)\, \varphi(p_1, q'(\tau), \tau)\, d\omega_{p_1}\, d\tau,$$

или, в сокращенных обозначениях, не могущих привести к каким-либо недоразумениям,

$$\varphi(p) = f_0 e^{-\lambda k(r)\, t} + \lambda \int\limits_{L_{p,q,t}} e^{-\lambda k(r)(t-\tau)} \int\limits_{\Omega_1} G(p, p_1)\, \varphi(p_1)\, d\omega_{p_1}\, d\tau.$$

Для того чтобы решить это уравнение, мы применим метод последовательных приближений, полагая

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots,$$

$$\varphi_0 = f_0 e^{-\lambda k(r)\, t},$$

. . . . . .

$$\varphi_n = \lambda \int\limits_{L_{p,q,t}} e^{-\lambda k(r)\,(t-\tau)} \int\limits_{\Omega_1} G(p, p_1)\, \varphi_{n-1}(p_1)\, d\omega_{p_1}\, d\tau,$$

. . . . . .

Предположим теперь, что $|f_0|$ обладает мажорантой $\psi(p)$, не зависящей от x, y, z. Последовательно получаем

$$|\varphi_0| < \psi,$$

$$|\varphi_1| < \lambda t \int\limits_{\Omega_1} |G(p, p_1)|\, \psi(p_1)\, d\omega_{p_1},$$

$$|\varphi_2| < \lambda^2 \frac{t^2}{2} \int\limits_{\Omega_1} G_*^{(2)}(p, p_1)\, \psi(p_1)\, d\omega_{p_1}$$

и вообще

$$|\varphi_n| < \frac{\lambda^n t^n}{n!} \int\limits_{\Omega_1} G_*^{(n)}(p, p_1)\, \psi(p_1)\, d\omega_{p_1},$$

где положено $G_*(p, p_1) = |G(p, p_1)|$.

Так как ряд

$$\psi(p) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!} \int\limits_{\Omega_1} G_*^{(\nu)}(p, p_1)\, \psi(p_1)\, d\omega_{p_1}$$

сходится, то будет сходиться и ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu.$$

Таким образом, мы доказали существование решения рассматриваемой краевой задачи.

Однако будет уместным заметить, что приведенные рассуждения не доказывают, что полученное решение остается ограниченным для всех положительных значений t. Этот вопрос будет выяснен другим методом, который мы изложим в следующем параграфе.

Вопрос о единственности

Использованный нами метод показывает, что существует только одно решение поставленной краевой задачи, если потребовать, чтобы верхняя грань $M(p)$ для $|\varphi(p, q, t)|$, когда q пробегает все пространство, а $0 < t < t_1$, имела интегрируемый квадрат, каково бы ни было t. Действительно, рассмотрим тот специальный случай, когда $f_0 = 0$. Для $M(p)$ получаем последовательность неравенств

$$M(p) \leqslant \frac{(\lambda t_1)^n}{n!} \int_{\Omega_1} G_*^{(n)}(p, p_1)\, M(p_1)\, d\omega_{p_1}$$

и, следовательно, обозначая через k верхнюю грань $G_*(p, p_1)$, имеем

$$\int_{\Omega} M(p)^2\, d\omega_p \leqslant \frac{(\lambda t_1 k)^{2n}}{(n!)^2} \cdot \int_{\Omega} M(p)^2\, d\omega_p.$$

Так как это неравенство справедливо для всех целых положительных значений n, то мы должны иметь

$$\int_{\Omega} M(p)^2\, d\omega_p = 0,$$

т. е. $M(p) = 0$, что и требовалось доказать.

Применение интеграла Фурье

Если мы в уравнении (16) заменим x, y, z, t на x/λ, y/λ, z/λ, t/λ, то получим уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \eta \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial z} + k(r)\varphi - \int_{\Omega_1} G(p, p_1)\, \varphi(p_1)\, d\omega_{p_1} = 0.$$

Займемся решением краевой задачи

$$[\varphi]_{t=0} = h(p, x, y, z).$$

Мы применим преобразование Фурье — Лапласа

$$\phi(p, \alpha, \beta, \gamma, \varkappa) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{-\varkappa t + i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} \varphi(p, x, y, z, t)\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Таким образом, для ϕ получаем интегральное уравнение Фредгольма

$$(17)\quad (\varkappa + k(r) - i(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta))\,\phi(p) - \int_\Omega G(p, p_1)\,\phi(p_1)\, d\omega_{p_1} = H(p),$$

где

$$H(p) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{i(\alpha x + \beta y + \gamma z)} h(p, x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Из общей теории следует, что решение $\phi(p)$ есть мероморфная функция от $\varkappa$ в полуплоскости

$$R[\varkappa] > -k(0) = -4\pi^2.$$

Изучим теперь однородное уравнение, соответствующее уравнению (17):

$$(\varkappa + k(r) - i(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta))\,\phi(p) - \int_{\Omega_1} G(p, p_1)\,\phi(p_1)\, d\omega_{p_1} = 0.$$

Если мы умножим это уравнение на $\bar{\phi}(p)$ и проинтегрируем по p, то, в силу неравенства

$$\int_\Omega \bar{\phi}(p)\, S(\phi)\, d\omega_p \geqslant 0,$$

будем иметь

$$\varkappa \int_\Omega |\phi(p)|^2\, d\omega_p - i \int_\Omega (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)\,|\phi(p)|^2\, d\omega_p \leqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$R[\varkappa] \leqslant 0.$$

Следовательно, решение $\phi(p, \varkappa)$ регулярно справа от мнимой оси в плоскости $\varkappa$.

Изучение решения уравнения (17) для больших значений $I[\varkappa]$ в области $R[\varkappa] > -4\pi^2$

Запишем для краткости

$$L(p) = \varkappa + k(r) - i(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta).$$

Тогда можно переписать уравнение (17) в виде

$$\phi(p) - \frac{1}{L(p)} \int_{\Omega_1} G(p, p_1)\, \phi(p_1)\, d\omega_{p_1} = \frac{H(p)}{L(p)}.$$

Этому уравнению соответствует следующий ряд Неймана:

$$\phi(p) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \phi_\nu(p), \tag{18}$$

где

$$\phi_0(p) = \frac{H(p)}{L(p)},$$

$$\phi_1(p) = \frac{1}{L(p)} \int_{\Omega_1} G(p, p_1) \frac{H(p_1)}{L(p_1)}\, d\omega_{p_1},$$

. . . . . .

$$\phi_n(p) = \frac{1}{L(p)} \int_{\Omega_n} \int_{\Omega_{n-1}} \dots \int_{\Omega_1} G(p, p_1) \frac{1}{L(p_1)} G(p_1, p_2) \frac{1}{L(p_2)} \dots$$

$$\dots G(p_{n-1}, p_n) \frac{H(p_n)}{L(p_n)}\, d\omega_{p_1} d\omega_{p_1} \dots d\omega_{p_n}.$$

. . . . . .

Для изучения сходимости ряда (18) мы применим неравенство Гёльдера к выражению, представляющему $\phi_n(p)$. Это неравенство имеет вид

$$\left| \int fg\, d\omega \right| \leqslant \left[\int |f|^{1+\frac{1}{m}}\, d\omega \right]^{\frac{m}{m+1}} \left[\int |g|^{1+m}\, d\omega \right]^{\frac{1}{1+m}},$$

где число измерений области интегрирования произвольно. Мы получим

$$|\phi_n(p)| \leqslant \frac{1}{|L(p)|}\left[\int\int\dots\int |G(p, p_1)|^{1+\frac{1}{m}} \times \right.$$

$$\times |G(p_1, p_2)|^{1+\frac{1}{m}} \dots |G(p_{n-1}, p_n)|^{1+\frac{1}{m}} \times$$

$$\left.\times |H(p_n)|^{1+\frac{1}{m}} d\omega_{p_1} d\omega_{p_2} \dots d\omega_{p_n}\right]^{\frac{m}{m+1}} \cdot \left[\int_{\Omega} \frac{1}{|L(p)|^{1+m}} d\omega_p\right]^{\frac{n}{m+1}}.$$

Положим $m = 3$ и предположим, что $|H(p)|^{1+\frac{1}{m}}$ допускает такую мажоранту $M(p)$, что [см. (14)] имеет место неравенство

$$\int |G(p, p_1)|^{1+\frac{1}{m}} M(p_1)\, d\omega_{p_1} < kM(p),$$

где k — постоянная. Тогда

$$\int\int\dots\int |G(p, p_1)|^{1+\frac{1}{m}} |G(p_1, p_2)|^{1+\frac{1}{m}} \dots |G(p_{n-1}, p_n)|^{1+\frac{1}{m}} \times$$

$$\times |H(p_n)|^{1+\frac{1}{m}} d\omega_{p_1} \dots d\omega_{p_n} \leqslant k^n M(p).$$

Рассмотрим теперь выражение

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|L(p)|^4} d\omega_p.$$

Если $R[\varkappa] > -4\pi^2$, то мы можем утверждать, что существуют такие постоянные $a > 0$ и $b > 0$, что

$$|L(p)| > \sqrt{(a+br)^2 + (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta - \tau)^2}, \quad \tau = I[\varkappa].$$

Отсюда следует существование такой постоянной k', что

$$\frac{1}{|L(p)|^4} < k' \frac{1}{[1 + r^2 + (\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta - \tau)^2]^2}.$$

Осуществив подходящее ортогональное преобразование, получим

$$\int_{\Omega} \frac{1}{|L(p)|^4} d\omega_p <$$

(19)

$$< k' \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left(1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + c^2\left(\xi - \frac{\tau}{c}\right)^2\right)^2} d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

где положено

$$c = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}.$$

Вводя переменную $\rho = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$, мы можем записать правую часть неравенства (19) в виде

$$2\pi k' \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\rho}{\left(1 + \rho^2 + \xi^2 + c^2\left(\xi - \frac{\tau}{c}\right)^2\right)^2} d\xi\, d\rho.$$

Можно вычислить этот интеграл в явном виде и найти, что он равен

$$\frac{\pi^2 k'}{\sqrt{1 + c^2 + \tau^2}}.$$

Следовательно, окончательно получается, что

$$|\phi_n(p)| < \frac{[M(p)]^{3/4}}{|L(p)|}\left(\frac{k^3\pi^2 k'}{\sqrt{1 + c^2 + \tau^2}}\right)^{n/4}.$$

Итак, ряд (18) сходится, если $|\tau|$ достаточно велик.

Глава II

УРАВНЕНИЕ БОЛЬЦМАНА В СПЕЦИАЛЬНЫХ СЛУЧАЯХ

§ 1

Ряд Гильберта

Гильберт в своем большом труде Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen посвятил последнюю главу математическому изучению кинетической теории газов. Из одного места в предисловии к этой книге ясно видно, какое важное значение он придавал приложению теории интегральных уравнений к этой области математической физики. Я воспроизвожу здесь следующую цитату [1]:

„В конце я прибавил новую главу о кинетической теории газов. В то время как до сих пор во всех многочисленных приложениях теории интегральных уравнений всегда имелось некоторое дифференциальное уравнение, к которому применялась теория интегральных уравнений, в теории газов интегральное уравнение появляется как первичное, как прямое следствие из формул соударения, и так как, кроме того, для систематического обоснования теории газов теория интегральных уравнений представляется незаменимой, то я вижу в теории газов наиболее блестящее применение для теорем о разрешимости интегральных уравнений".

Речь идет о решении уравнения

$$D(F) = T(F).$$

Положим

$$F = \frac{F_0 + F_1\lambda + F_2\lambda^2 + \dots}{\lambda};$$

тогда

$$\lambda D(F_0 + \lambda F_1 + \lambda^2 F_2 + \dots) = T(F_0 + \lambda F_1 + \lambda^2 F_2 + \dots).$$

Это уравнение можно записать еще и так:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{\nu=0}^{n} T(F_\nu, F_{n-\nu}) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} D(F_n)\lambda^n.$$

---

[1]) Мы приводим перевод с немецкого. — *Прим. перев.*

Приравнивая коэффициенты при λ в обеих частях этого уравнения, получаем

$$T(F_0, F_0) = 0,$$
$$2T(F_0, F_1) = D(F_0),$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$2T(F_0, F_n) + \sum_{\nu=1}^{n-1} T(F_\nu, F_{n-\nu}) = D(F_{n-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Из первой формулы следует, что F_0 есть функция вида

$$e^{-a_1(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+a_2\xi+a_3\eta+a_4\zeta+a_5},$$

где a_ν — функция от x, y, z, t. Запишем, далее, приведенные выше уравнения в следующем виде:

$$T(F_0, F_0) = 0,$$
$$T(F_0, F_1) = \frac{1}{2} D(F_0),$$
$$T(F_0, F_2) = \frac{1}{2} D(F_1) - \frac{1}{2} T(F_1, F_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(21) $$T(F_0, F_n) = \frac{1}{2} D(F_{n-1}) - \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n-1} T(F_\nu, F_{n-\nu}).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$T(F_0, F)$ — есть линейный оператор, действующий на F; мы обозначим его через $\Gamma(F)$. Написанные соотношения, позволяющие последовательно определить функции F_1, F_2, F_3, ..., имеют вид уравнений Фредгольма.

Если продифференцировать уравнение

$$T(F_0, F_0) = 0,$$

то мы получим

$$T\left(F_0, \frac{\partial F_0}{\partial a_\nu}\right) = 0,$$

т. е.

$$T(F_0, F_0\phi_\nu) = 0,$$

где положено

$$\phi_1 = 1, \quad \phi_2 = \xi, \quad \phi_3 = \eta, \quad \phi_4 = \zeta,$$
$$\phi_5 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Таким образом, пять функций $F_0\phi_\nu$ являются линейно независимыми решениями уравнения $\Gamma(F)=0$. Можно доказать, что решений, отличных от их линейных комбинаций, не существует.

Теперь мы должны изучить решения соответствующего сопряженного уравнения $\Gamma'(\phi)=0$. Этот сопряженный оператор определяется абстрактно соотношением

$$\int_\Omega \phi\Gamma(F)\,d\omega = \int_\Omega F\Gamma'(\phi)\,d\omega,$$

которое должно удовлетворяться для всех функций F. Если мы заменим ϕ на ϕ_ν, то увидим, что левая часть равна нулю, какова бы ни была F. Следовательно,

$$\Gamma'(\phi_\nu)=0, \qquad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ 5,$$

и, таким образом, ϕ_1, ϕ_2, ..., ϕ_5 являются собственными функциями сопряженного уравнения.

Теперь, предполагая, что классическая теория Фредгольма применима к линейному оператору $\Gamma(F)$, мы можем найти функции F_ν следующим способом. Для разрешимости уравнения (20) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_\Omega \phi_\nu D(F_0)\,d\omega = 0, \qquad \nu=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5.$$

Отсюда мы получаем пять уравнений в частных производных для функций a_ν. Если функции a_ν удовлетворяют этим уравнениям, то F_1 существует и имеет вид

$$F_1 = F_1^* + \sum_{\nu=1}^{5} c_{1\nu}F_0\phi_\nu,$$

где $c_{1\nu}$ — произвольные функции от x, y, z, t.

Перейдем теперь к вычислению F_2. Для разрешимости уравнения (21) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_\Omega \phi_\nu\left(D(F_1^*)+D\left(\sum_{\nu=1}^{5} c_{1\nu}F_0\phi_\nu\right)\right)d\omega = 0.$$

Это дает нам еще одну систему уравнений в частных производных для $c_{1\nu}$, $\nu = 1, \ldots, 5$. Мы получим

$$F_2 = F_2^* + \sum_{\nu=1}^{5} c_{2\nu} F_0 \phi_\nu.$$

Этот процесс можно продолжать неограниченно. При каждом шаге вводятся пять новых произвольных функций от x, y, z, t. Последующее уравнение порождает пять уравнений в частных производных для этих функций. Функции F_n^* можно выбрать таким образом, чтобы они были ортогональны к ϕ_ν. Следовательно, $c_{n\nu}$ являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами из

$$\int_\Omega F_n \phi_\nu \, d\omega, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 5.$$

Итак, мы получаем следующую теорему Гильберта. Если дана последовательность функций

$$g_{n\nu}(x, y, z), \quad \begin{matrix} n = 0, 1, 2, \ldots, \\ \nu = 1, 2, \ldots, 5, \end{matrix}$$

то существует один и только один степенной ряд

$$F = \frac{F_0 + \lambda F_1 + \lambda^2 F_2 + \ldots}{\lambda},$$

для которого

$$\left[\int_\Omega F_n \phi_\nu \, d\omega\right]_{t=0} = g_{n\nu}.$$

Неизвестно, является ли ряд Гильберта сходящимся. Вероятно, даже, что он не сходится. Другое неудобство этого ряда заключается в том, что последовательно определенные коэффициенты содержат члены, зависящие от t и стремящиеся к бесконечности при $t \to \infty$. С этой точки зрения следует предпочесть ряд Энскога. Об этом ряде можно прочесть в трудах Энскога. Однако уместно заметить, что и для этого последнего ряда вопрос о сходимости остается открытым.

§ 2

О решении уравнения Больцмана в области $0 \leqslant x \leqslant l$

Предположим, что F зависит только от p, x, t, и пусть $l = \pi$. В качестве краевых условий примем $F(p) = F(p')$, где p' — отражение вектора p, т. е.

$$F(\xi, \eta, \zeta, x, t) = F(-\xi, \eta, \zeta, x, t)$$

для $x = 0$ и $x = \pi$. Для интересующего нас случая мы можем написать

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi \frac{\partial F}{\partial x} = T(F)\ ^{1}).$$

Если положить

$$F = e^{-r^2} + e^{-r^2/2}\varphi, \qquad r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,$$

то мы придем к уравнению

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \xi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + S(\varphi) = L(\varphi, \varphi), \tag{22}$$

где

$$S(\varphi) = k(r)\varphi - \int_{\Omega_1} G(p, p_1)\varphi(p_1)\, d\omega_{p_1},$$

$$L(f, g) = 2e^{r^2/2} \int_{\Omega_1} \frac{e^{-r_1^2/2}}{r_{pp_1}} f(p_1) \int_{E_{pp_1}} e^{-r_q^2/2} g(q)\, d\sigma_q\, d\omega_{p_1} -$$

$$- 2\pi e^{r^2/2} f(p) \int_{\Omega_1} r_{pp_1} e^{-r_1^2/2} g(p_1)\, d\omega_{p_1}.$$

Введем теперь функцию

$$\psi(\xi, \eta, \zeta) = \varphi(-\xi, \eta, \zeta).$$

Заменяя ξ на $-\xi$ в уравнении (22), получаем при помощи очевидных преобразований

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \xi \frac{\partial \psi}{\partial x} + S(\psi) = L(\psi, \psi). \tag{23}$$

Записав

$$u = \varphi(\xi, \eta, \zeta) + \varphi(-\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\xi, \eta, \zeta) + \psi(\xi, \eta, \zeta),$$
$$v = \varphi(\xi, \eta, \zeta) - \varphi(-\xi, \eta, \zeta) = \varphi(\xi, \eta, \zeta) - \psi(\xi, \eta, \zeta),$$

---

[1]) Мы предполагаем, как и выше, что $X = Y = Z = 0$.

найдем

$$\varphi = \frac{u+v}{2}, \qquad \psi = \frac{u-v}{2},$$

$$L(\varphi, \varphi) = \frac{1}{4} L(u, u) + \frac{1}{4}(L(u, v) + L(v, u)) + \frac{1}{4} L(v, v),$$

$$L(\psi, \psi) = \frac{1}{4} L(u, u) - \frac{1}{4}(L(u, v) + L(v, u)) + \frac{1}{4} L(v, v).$$

Следовательно, складывая и вычитая уравнения (22) и (23), получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \xi \frac{\partial v}{\partial x} + S(u) = \frac{1}{2}(L(u, u) + L(v, v)),$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \xi \frac{\partial u}{\partial x} + S(v) = \frac{1}{2}(L(u, v) + L(v, u)).$$

Заметим, что эти уравнения определяют u и v как четные или нечетные функции от ξ, если начальные условия

$$[u]_{t=0}, \qquad [v]_{t=0}$$

соответственно четны или нечетны. Для того чтобы удовлетворить граничным условиям на поверхности оболочки сосуда, мы полагаем

$$u = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \cos \nu x, \qquad v = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \sin \nu x,$$

где a_ν и b_ν — функции от ξ, η, ζ, t. Кроме того, мы предполагаем, что a_ν являются четными функциями от ξ, а b_ν — нечетными. Тогда формально получим

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \cos \nu x \left(\frac{\partial a_\nu}{\partial t} + \nu \xi b_\nu + S(a_\nu) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=0,\, n=0}^{\infty} L(a_m, a_n) \cos mx \cdot \cos nx +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{m=1,\, n=1}^{\infty} L(b_m, b_n) \sin mx \sin nx =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{m=0,\, n=0}^{\infty} L(a_m, a_n)(\cos(m+n)x + \cos(m-n)x) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{m=1,\, n=1}^{\infty} L(b_m, b_n)(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$

и аналогично

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \sin \nu x \cdot \left(\frac{\partial b_\nu}{\partial t} - \xi \nu a_\nu + S(b_\nu) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos mx \sin nx \, L(a_m, b_n) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \cos mx \sin nx \, L(b_n, a_m) =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\sin(n+m)x + \sin(n-m)x)(L(a_m, b_n) + L(b_n, a_m)).$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos \nu x$ и $\sin \nu x$ в обеих частях этих равенств, получаем [1])

$$\frac{\partial a_0}{\partial t} + S(a_0) = \frac{1}{2} L(a_0, a_0) + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} (L(a_n, a_n) + L(b_n, b_n)),$$

$$\frac{\partial a_\nu}{\partial t} + \nu \xi b_\nu + S(a_\nu) = \frac{1}{4} \sum_{m+n=\nu} (L(a_m, a_n) - L(b_m, b_n)) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (L(a_{n+\nu}, a_n) + L(b_{n+\nu}, b_n)) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} (L(a_m, a_{m+\nu}) + L(b_m, b_{m+\nu})),$$

$$\frac{\partial b_\nu}{\partial t} - \nu \xi a_\nu + S(b_\nu) = \frac{1}{4} \sum_{m+n=\nu} (L(a_m, b_n) + L(b_n, a_m)) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{m=0}^{\infty} (L(a_m, b_{m+\nu}) + L(b_{m+\nu}, a_m)) +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (L(a_{n+\nu}, b_n) + L(b_n, a_{n+\nu})).$$

[1]) Мы полагаем $b_0 = 0$.

Мы можем объединить написанные выше уравнения в одно, записав

$$a_\nu + ib_\nu = A_\nu,$$

$$a_\nu = \frac{A_\nu + \bar{A}_\nu}{2}, \qquad b_\nu = \frac{A_\nu - \bar{A}_\nu}{2i}.$$

Тогда получим

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} + k(r) A_0 - \int_{\Omega_1} G(p, p_1) A_0(p_1) d\omega_{p_1} =$$

$$= \frac{1}{2} L(A_0, A_0) + \frac{1}{8} \sum_{n=1}^{\infty} (L(A_n, \bar{A}_n) + L(\bar{A}_n, A_n)),$$

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial t} + (k(r) - i\nu\xi) A_\nu - \int_{\Omega_1} G(p, p_1) A_\nu(p_1) d\omega_{p_1} = \tag{24}$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{m+n=\nu} L(A_n, A_m) + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (L(\bar{A}_n, A_{n+\nu}) + L(A_{n+\nu}, \bar{A}_n)),$$

$$\nu = 1, 2, \ldots.$$

Если положить здесь формально

$$A_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k A_\nu^{(k)}, \tag{25}$$

то найдем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ в обоих частях приведенных выше уравнений, что коэффициенты $A_\nu^{(k)}$ могут быть определены последовательно. Коэффициенты $A_\nu^{(1)}$ получаем из уравнения

$$\frac{\partial A_\nu^{(1)}}{\partial t} + (k(r) + i\nu\xi) A_\nu^{(1)} - \int_{\Omega_1} G(p, p_1) A_\nu^{(1)}(p_1) d\omega_{p_1} = 0$$

с начальными условиями

$$\left[A_\nu^{(1)}\right]_{t=0} = \alpha_\nu + i\beta_\nu,$$

где α_ν и β_ν определены при помощи разложений

$$\varphi_0(\xi, \eta, \zeta) + \varphi_0(-\xi, \eta, \zeta) = \sum \alpha_\nu \cos \nu x,$$

$$\varphi_0(\xi, \eta, \zeta) - \varphi_0(-\xi, \eta, \zeta) = \sum \beta_\nu \sin \nu x,$$

а $\varphi_0(\xi, \eta, x)$ — начальное значение φ. Последующие коэффициенты определяются из уравнений

$$\frac{\partial A_\nu^{(k)}}{\partial t} + (k(r) - i\nu\xi) A_\nu^{(k)} - \int_{\Omega_1} G(p, p_1) A_\nu^{(k)}(p_1)\, d\omega_{p_1} = S_\nu^{(k)},$$

$$k = 2, 3, \ldots,$$

где $S_\nu^{(k)}$ — определенные выражения второго порядка, которые получаются из правых частей уравнений (24) и которые зависят только от $A_\nu^{(l)}$ при $l < k$. Следует добавить начальные условия

$$[A_\nu^{(k)}]_{t=0} = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots.$$

Таким образом, вопрос о последовательном разыскании функций $A_\nu^{(k)}$ сводится к задаче разрешения интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + (k(r) - i\nu\xi)\psi - \int_{\Omega_1} G(p, p_1)\psi(p_1)\, d\omega_{p_1} = g(\xi, \eta, \zeta, t),$$

$$[\psi]_{t=0} = h(\xi, \eta, \zeta),$$

где g и h — заданные функции. Мы можем свести эту задачу к одному интегральному уравнению Фредгольма, вводя функцию

$$\Psi(\xi, \eta, \zeta, \varkappa) = \int_0^\infty e^{-\varkappa t}\psi(\xi, \eta, \zeta, t)\, dt.$$

Получим

$$(\varkappa + k(r) - i\nu\xi)\Psi - \int_{\Omega_1} G(p, p_1)\Psi(p_1)\, d\omega_{p_1} =$$

$$= h + \int_0^\infty e^{-\varkappa t} g(\xi, \eta, \zeta, t)\, dt.$$

Применяя указанный метод, можно доказать, что ряд (25) сходится для $\mu = 1$, если $|\varphi_0|$ обладает достаточно малой мажорантой. Таким образом, мы приходим к полному решению уравнения Больцмана вблизи равновесия и при начальных условиях, указанных в названии этого параграфа.

Примем теперь гипотезу, что законно пренебрежение членами второго порядка. В этом случае мы получим уравнения

$$\frac{\partial A_0}{\partial t} + k(r) A_0 - \int_{\Omega} G(p, p_1) A_0(p_1) d\omega_{p_1} = 0,$$

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial t} + (k(r) - i\nu\xi) A_\nu - \int_{\Omega} G(p, p_1) A_\nu(p_1) d\omega_{p_1} = 0.$$

Для изучения собственных колебаний мы положим

$$A_\nu = e^{\varkappa t}\omega_\nu(\xi, \eta, \zeta).$$

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что $A_0 = 0$. Поэтому мы должны иметь

$$(\varkappa - i\nu\xi)\omega_\nu + k(r)\omega_\nu - \int_{\Omega_1} G(p, p_1)\omega_\nu(p_1) d\omega_{p_1} = 0,$$

$$\nu = 1, 2, \ldots.$$

Из результатов, приведенных на стр. 83, следует, что у всех собственных значений ($\varkappa$) этих уравнений вещественные части отрицательны и, таким образом, все эти колебания являются затухающими.

Замечание. Представляется вероятным, что существует лишь конечное число собственных колебаний.

Наконец, мы заметим, что только что примененный нами метод может быть также использован для описания движения в параллелепипеде. В этом случае мы симметризуем по составляющим ξ, η, ζ и разложим полученные восемь функций в ряды Фурье по x, y, z.

§ 3

О сопротивлении, испытываемом твердым телом, движущимся прямолинейно и равномерно в неограниченном газе

Предположим, что твердое тело K, ограниченное поверхностью Σ, движется со скоростью a в направлении оси x внутри газа, для которого в начальный момент времени функция скоростей равнялась e^{-r^2}. Если рассмотреть систему

координат, связанную с этим телом, то для функции распределения, соответствующей стационарному режиму, найдем выражение вида

$$F = e^{-r^2} + e^{-\frac{r^2}{2}}\left(e^{\frac{r^2}{2}-[(\xi+a)^2+\eta^2+\zeta^2]} - e^{-\frac{r^2}{2}} + \varphi\right);$$

здесь φ — функция, стремящаяся к нулю, когда $x^2+y^2+z^2 \to \infty$, и удовлетворяющая в первом приближении уравнению

$$(26)\quad \xi\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \eta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial z} + k(r)\varphi - \int_{\Omega_1} G(p, p_1)\varphi(p_1)\, d\omega_{p_1} = $$
$$= -S\left(e^{\frac{r^2}{2}-[(\xi+a)^2+\eta^2+\zeta^2]} - e^{-\frac{r^2}{2}}\right),$$

где предполагается, что a — малая величина. В силу этого предположения, мы можем заменить

$$e^{\frac{r^2}{2}-[(\xi+a)^2+\eta^2+\zeta^2]} - e^{-\frac{r^2}{2}}$$

на

$$-2a\xi e^{-\frac{r^2}{2}}.$$

Отсюда следует, что правая часть равенства (26) в первом приближении равна нулю. В качестве граничных условий примем те условия, которые вытекают из гипотезы о зеркальном отражении молекул от поверхности Σ. Если p' обозначает скорость, приобретаемую после отражения молекулой, ударявшейся о стенку со скоростью p, то на Σ мы будем иметь

$$F(p) = F(p'),$$

откуда заключаем, что

$$\varphi(p') - \varphi(p) = e^{-\frac{r^2}{2}}\left(e^{-2\xi a} - e^{-2\xi' a}\right) \sim e^{-\frac{r^2}{2}} 2a(\xi' - \xi),$$

где ξ', η', ζ' — компоненты p'.

Для решения уравнения (26) мы сделаем преобразование Фурье, предположив, что $\varphi = 0$ внутри Σ:

$$\phi(p, \alpha, \beta, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty}\int\int e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\varphi(p, x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Интегрируя затем по частям, находим

$$[k(r)+i(\xi\alpha+\eta\beta+\gamma\zeta)]\,\phi-\int_{\Omega}G(p,\,p_1)\,\phi(p_1)\,d\omega_{p_1}=$$

$$=\int_{\Sigma}\int e^{-i(\alpha x+\beta y+\gamma z)}\varphi(\xi\,dy\,dz+\eta\,dx\,dz+\zeta\,dx\,dy).$$

Рассмотрим, в частности, случай, когда Σ представляет собой бесконечный цилиндр с образующей, параллельной оси z, пересечение которого с плоскостью x, y есть L. В этом случае мы полагаем

$$\phi(p,\,\alpha,\,\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{-i(\alpha x+\beta y)}\varphi(p,\,x,\,y)\,dx\,dy,$$

$$(27)\qquad (k(r)+i(\xi\alpha+\eta\beta))\,\phi-\int_{\Omega}G(p,\,p_1)\,\phi(p_1)\,d\omega_{p_1}=$$

$$=\int_{L}(\xi l+\eta m)\,e^{-i(\alpha x+\beta y)}\varphi(p,\,x,\,y)\,ds,$$

где l и m — направляющие косинусы внутренней нормали к L. Обозначим через $\Phi(p,\,\alpha,\,\beta)$ решение уравнения

$$(28)\qquad [k(r)+i(\xi\alpha+\eta\beta)]\,\Phi-\int_{\Omega_1}G(p,\,p_1)\,\Phi(p_1)\,d\omega_{p_1}=$$

$$=(\xi l+\eta m)\,\varphi(p,\,x,\,y).$$

Тогда

$$(29)\qquad \phi(p)=\int_{L}e^{-i(\alpha x+\beta y)}\,\Phi(p)\,ds.$$

Уравнение (28) является регулярным интегральным уравнением Фредгольма. Из приведенных на стр. 83 и 71 рассуждений следует, что это уравнение обладает одним и только одним решением для $\alpha\neq 0$ и $\beta\neq 0$. Для $\alpha=\beta=0$ однородное уравнение, соответствующее уравнению (28), обладает пятью линейно независимыми решениями. Отсюда можно заключить, что Φ стремится к бесконечности, когда $\alpha^2+\beta^2\to 0$. Для изучения решения уравнения (28), когда $p^2=\alpha^2+\beta^2$ стремится к нулю, мы введем ядро

$$G_1(p,\,p_1)=G(p,\,p_1)-\sum_{\nu=1}^{5}\psi_\nu(p)\,\psi_\nu(p_1)\,k(r)\,k(r_1),$$

где $\psi_\nu(p)$ — решения однородного уравнения

$$k(r)\psi(p) - \int_{\Omega_1} G(p, p_1)\psi(p_1)\,d\omega_{p_1} = 0,$$

нормированные таким образом, что

$$\int_{\Omega} \psi_i(p)\psi_k(p)\,k(p)\,d\omega_p = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$k(r)\Phi - \int_{\Omega_1} G_1(p, p_1)\Phi(p_1)\,d\omega_{p_1} + i(\alpha\xi + \beta\eta)\Phi =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{5} k(r)\psi_\nu(p)\,C_\nu + (\xi l + \eta m)\varphi(p, x, y),$$

где

$$C_\nu = \int_{\Omega} k(r)\Phi(p)\psi_\nu(p)\,d\omega_p.$$

Определим функции $\Psi_\nu(p)$ при помощи уравнений

$$k(r)\Psi_\nu(p) - \int_{\Omega_1} G_1(p, p_1)\Psi_\nu(p_1)\,d\omega_{p_1} + i(\alpha\xi + \beta\eta)\Psi_\nu(p) =$$

$$= k(r)\psi_\nu(p)$$

и введем функцию $\phi^*(p)$, удовлетворяющую уравнению

$$k(r)\phi^*(p) - \int_{\Omega_1} G_1(p, p_1)\phi^*(p_1)\,d\omega_{p_1} + i(\alpha\xi + \beta\eta)\phi^*(p) =$$

$$= (\xi l + \eta m)\varphi(p, x, y).$$

Тогда найдем

$$\Phi = \phi^* + \sum C_\nu \Psi_\nu,$$

$$C_\mu = \int_{\Omega} \phi^*\psi_\mu\,k(r)\,d\omega + \sum_{\nu=1}^{5} C_\nu \int_{\Omega} \psi_\mu \Psi_\nu\,k(r)\,d\omega.$$

Функции $\Psi_\nu(p)$ можно разлагать по положительным степеням α, β. Полагая сначала $\beta = 0$, мы, таким образом, можем написать

$$\Psi_\nu(p) = \Psi_{\nu 0}(p) + \alpha\Psi_{\nu 1}(p) + \ldots,$$

где $\Psi_{\nu 0}(p) = \psi_\nu(p)$, а остальные коэффициенты определяются последовательно из интегрального уравнения

$$k(r)\Psi_{\nu m}(p) - \int_{\Omega_1} G_1(p, p_1)\Psi_{\nu m}(p_1)\, d\omega_{p_1} = i\xi\Psi_{\nu, m-1}(p).$$

Учитывая явные выражения для $\psi_\nu(p)$ [1]), можно показать при помощи нетрудных, но громоздких выкладок, что определитель

$$\left\| \int_{\Omega} \psi_\mu \Psi_\nu k(r)\, d\omega - \delta_{\mu\nu} \right\|$$

есть величина порядка α^6 при $\alpha \to 0$, в то время как все определители, получаемые при нахождении C_ν из приведенной выше системы уравнений, имеют порядок $O(\alpha^5)$. Поэтому для произвольных α, β имеем

$$\Phi = O\left((\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}\right).$$

Функция $\varphi(p, x, y)$ выражается через $\phi(p, \alpha, \beta)$ по формуле

$$\varphi(p, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int e^{i(\alpha x + \beta y)} \phi(p, \alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Правая часть равна нулю, если точка (x, y) находится внутри L. Заменим в формуле (27) x и y на x_0 и y_0. Получим

(30) $$\varphi(p, x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_L \int_{-\infty}^{\infty}\int e^{i(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0))} \Phi(p)\, d\alpha\, d\beta\, ds_0,$$

где $\Phi = \Phi(p, \alpha, \beta, x_0, y_0)$ определяется из уравнения

(31) $$(k(r) + i(\xi\alpha + \eta\beta))\Phi - \int_{\Omega_1} G(p, p_1)\Phi(p_1)\, d\omega_{p_1} = (\xi l_0 + \eta m_0)\varphi(p, x_0, y_0).$$

[1]) Ср. с формулой (4), стр. 71.

Соотношение (30) определяет $\varphi(p, x, y)$ как результат применения линейного оператора к $\varphi(p, x_0, y_0)$ [(x_0, y_0) расположена на L]. Если разбить область интегрирования по α, β на две части K_{ρ_0} и K'_{ρ_0}, где K_{ρ_0} определено неравенством $\alpha^2+\beta^2=\rho^2\leqslant\rho_0^2$, а K'_{ρ_0} — неравенством $\rho^2>\rho_0^2$, то найдем, что первый член справа в формуле

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int e^{i(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0))}\Phi(p)\,d\alpha\,d\beta=$$

$$=\int\limits_{K_{\rho_0}}+\int\limits_{K'_{\rho_0}} e^{i(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0))}\Phi(p)\,d\alpha\,d\beta$$

является абсолютно непрерывным оператором, действующим на $\varphi(p, x_0, y_0)$, в силу того, что $\Phi(p)$ стремится к бесконечности не быстрее, чем $1/\rho$ при $\rho\to 0$, как это показывает изучение, подробно проведенное выше.

Сингулярности этого оператора происходят от того, что интеграл не сходится равномерно относительно $x-x_0$, $y-y_0$, когда $\alpha^2+\beta^2\to\infty$. Таким образом, если отбросить два первых члена в ряде Неймана для Φ, то мы получим абсолютно непрерывный оператор. Таким образом, сингулярности оператора, выражающего $\varphi(p, x, y)$ через $\varphi(p, x_0, y_0)$, сосредоточены в следующих выражениях:

$$I_1=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{1}{k(r)+i(\alpha\xi+\beta\eta)}\int\limits_L e^{i(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0))}\times$$

$$\times(\xi l_0+\eta m_0)\,\varphi(p, x_0, y_0)\,d\alpha\,d\beta\,ds_0,$$

$$I_2=\frac{1}{(2\pi)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\frac{1}{k(r)+i(\alpha\xi+\beta\eta)}\int\limits_{\Omega_1} G(p, p_1)\times$$

$$\times\frac{1}{k(r_1)+i(\alpha\xi_1+\beta\eta_1)}\,d\omega_{p_1}\int\limits_L(\xi_1 l_0+\eta_1 m_0)\,e^{i(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0))}\times$$

$$\times\varphi(p_1, x_0, y_0)\,d\alpha\,d\beta\,ds_0.$$

Вычисление этих интегралов мы произведем с помощью двух искусственных приемов.

1) Заменим

$$\frac{1}{k(r)+i(\alpha\xi+\beta\eta)}$$

выражением

$$\int_0^\infty e^{-t(k(r)+i(\alpha\xi+\beta\eta))}\,dt.$$

2) Интегрирование по α, β мы выполним посредством метода суммирования

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int e^{-\varepsilon(\alpha^2+\beta^2)}[\quad]\,d\alpha\,d\beta.$$

При этом мы воспользуемся формулой

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varepsilon\alpha^2+i\alpha x}\,d\alpha=\sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon}}\,e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}.$$

Тогда получим

$$I_1=\frac{1}{(2\pi)^2}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\infty\int_L e^{-\varepsilon\alpha^2+i\alpha(x-x_0-t\xi)-\varepsilon\beta^2+i\beta(y-y_0-t\eta)-tk(r)}\times$$
$$\times(\xi l_0+\eta m_0)\,\varphi(p,\ x_0,\ y_0)\,d\alpha\,d\beta\,dt\,ds_0=$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{4\pi\varepsilon}\int_0^\infty\int_L e^{-\frac{1}{4\varepsilon}((x-x_0-t\xi)^2+(y-y_0-t\eta)^2)-tk(r)}\times$$
$$\times(\xi l_0+\eta m_0)\,\varphi(p,\ x_0,\ y_0)\,dt\,ds_0.$$

Легко видеть, что величина интеграла по существу определяется только окрестностью точек (x_0, y_0, t), для которых

$$x-x_0=t\xi,\qquad y-y_0=t\eta.$$

Осуществим следующее геометрическое построение. Из точки $P=(x, y)$, расположенной вне L, проведем полупрямую, проходящую в направлении, противоположном направлению вектора ξ, η. Если эта полупрямая не пересекает L, то уравнения $x-x_0=t\xi$, $y-y_0=t\eta$ не имеют решений при $t>0$. Следовательно, I_1 равен нулю. Другой случай будем иметь, если существуют точки пересечения, скажем A

и B (для простоты мы предполагаем, что L — выпуклая кривая). Положим

$$x_0 + t\xi - x = u \quad \text{и} \quad y_0 + t\eta - y = v$$

(для окрестности точки пересечения) и осуществим это преобразование в двойном интеграле, фигурирующем в последнем выражении для I_1. Таким образом находим

$$I_1 = \sum \frac{1}{\left|\frac{D(u, v)}{D(s_0, t)}\right|} (\xi l_0 + \eta m_0)\, \varphi(p, x_0, y_0)\, e^{-k(r)\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}},$$

где сумма берется по всем точкам пересечения. С другой стороны, имеем

$$\frac{D(u, v)}{D(s_0, t)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial s_0} & \xi \\ \frac{\partial y_0}{\partial s_0} & \eta \end{vmatrix} = l_0\xi + m_0\eta.$$

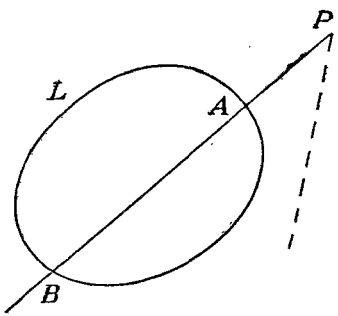

Рис. 6.

Следовательно,

$$I_1 = \sum \pm \varphi\left(p, x_0^{(\nu)}, y_0^{(\nu)}\right) e^{-k(r)\, t_\nu},$$

где следует выбрать знак + или — в зависимости от того, входит ли полупрямая в рассматриваемой точке пересечения внутрь области или выходит из нее.

Рассуждая аналогичным образом, получаем для I_2 следующее выражение:

$$I_2 = \int_{\Omega_1} \frac{G(p, p_1)}{|\Delta|} \int_{L_{pp_1}} e^{-k(r)\, t - k(r_1)\, t} \times$$

$$\times (\xi_1 l_0 + \eta_1 m_0)\, \varphi(p_1, x_0, y_0)\, ds_0\, d\omega_{p_1},$$

где $\Delta = \xi\eta_1 - \eta\xi_1$ и где смысл отрезков кривой L_{pp_1} пояснен на рис. 7. Если P расположена на L, то мы имеем

$$I_2 = \int_{\Omega_1} \frac{G(p, p_1)}{|\Delta|} \int_{L_{pp_1}} (\xi_1 l_0 + \eta_1 m_0)\, \varphi(p_1, x_0, y_0)\, ds_0\, d\omega_{p_1},$$

где L_{pp_1} изображено на рис. 8.

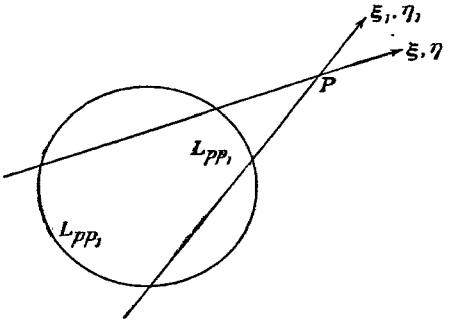

Рис. 7.

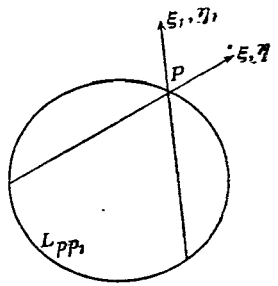

Рис. 8.

Согласно сказанному, мы можем записать $\varphi(p, x, y)$ в виде

$$\varphi(p, x, y) = I_1(\varphi(p, x_0, y_0)) + \\ + I_2(\varphi(p, x_0, y_0)) + I_3(\varphi(p, x_0, y_0)),$$

где I_1 и I_2 — введенные нами обозначения, а $I_3(\varphi(p, x_0, y_0))$ — абсолютно непрерывный оператор. Для дальнейшего нужно установить следующее различие между значениями, принимаемыми функцией $\varphi(p, x_0, y_0)$. Обозначим через $\varphi^+(p, x_0, y_0)$ те значения φ, которые соответствуют молекулам, падающим на стенку, а через $\varphi^-(p, x_0, y_0)$ — значения, соответствующие отраженным молекулам. Очевидно (по крайней мере для выпуклых L), что

$$I_1(\varphi^+(p, x_0, y_0)) \to 0,$$

если (x, y) стремится к точке, расположенной на L. Следовательно,

$$\varphi^+(p, x, y) = I_2(\varphi(p, x_0, y_0)) + I_3(\varphi(p, x_0, y_0)),$$

где (x, y) обозначает теперь точку на L. Каждый из членов, входящих в правую часть, линейно раскладывается на два, из которых один содержит $\varphi^+(p, x_0, y_0)$, а второй $\varphi^-(p, x_0, y_0)$. Используя граничные условия, указанные на странице 97, мы можем преобразовать выражения, содержащие $\varphi^-(p, x_0, y_0)$, в члены, содержащие линейно

$\varphi^+(p, x_0, y_0)$ + известные члены. В результате получаем уравнение вида

$$\varphi^+(p, x, y) - J(\varphi^+(p, x_0, y_0)) = g(p, x_0, y_0),$$

где g есть известная функция. Таким образом, мы свели задачу о сопротивлении к уравнению типа Фредгольма.

В моей заметке „Sur la théorie de l'équation intégrodifférentielle de Boltzmann" (Arkiv för Matematik etc., **23A**, N:o 22) я кратко указал на другой метод исследования этой задачи.

ЗАМЕЧАНИЕ I

В качестве примера применения метода, изложенного на стр. 97 и последующих, мы изучим задачу об определении внутри области, ограниченной кривой C, регулярной аналитической функции, вещественная часть которой принимает на C заданные значения.

Для $f(z) = u + iv$ мы имеем дифференциальные уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Введем функции

$$\varphi(\alpha, \beta) = \iint_D e^{-i(\alpha x + \beta y)} u(x, y)\, dx\, dy,$$
$$\psi(\alpha, \beta) = \iint_D e^{-i(\alpha x + \beta y)} v(x, y)\, dx\, dy,$$

где D есть конечная область, ограниченная кривой C. Умножим дифференциальные уравнения на $e^{-i(\alpha x + \beta y)}$ и проинтегрируем по x, y. После интегрирования по частям получим

$$i\alpha\varphi - i\beta\psi = -\int_C e^{-i(\alpha x + \beta y)} (u\, dy + v\, dx),$$
$$i\beta\varphi + i\alpha\psi = \int_C e^{-i(\alpha x + \beta y)} (u\, dx - v\, dy).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = \frac{1}{i(\alpha^2 + \beta^2)} \int_C e^{-i(\alpha x + \beta y)} (-\alpha(u\, dy + v\, dx) + \beta(u\, dx - v\, dy)),$$

$$\psi = \frac{1}{i(\alpha^2 + \beta^2)} \int_C e^{-i(\alpha x + \beta y)} (\beta(u\, dy + v\, dx) + \alpha(u\, dx - v\, dy)).$$

Заменим в правых частях написанных здесь уравнений x на x_0 и y на y_0, умножим на

$$\frac{1}{(2\pi)^2} e^{i(\alpha x+\beta y)}$$

и проинтегрируем по α и β по всей плоскости α, β. По теореме Фурье получится (x, y лежит внутри C)

$$u(x, y) = -\int_C P(u\,dy_0 + v\,dx_0) + \int_C Q(u\,dx_0 - v\,dy_0),$$

$$v(x, y) = \int_C Q(u\,dy_0 + v\,dx_0) + \int_C P(u\,dx_0 - v\,dy_0),$$

где введены обозначения

$$P = \frac{1}{i(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} e^{i(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0))}\,d\alpha\,d\beta,$$

$$Q = \frac{1}{i(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty}\int \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} e^{i(\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0))}\,d\alpha\,d\beta.$$

Для вычисления этих интегралов положим

$$\alpha = \rho\cos\theta, \quad x - x_0 = r\cos\varphi,$$
$$\beta = \rho\sin\theta, \quad y - y_0 = r\sin\varphi.$$

Тогда получим

$$P = \frac{1}{i(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos(\theta-\varphi)} \cos\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{i(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\rho \int_0^{2\pi} e^{ir\rho\cos\theta}(\cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi)\,d\theta =$$

$$= \frac{\cos\varphi}{i(2\pi)^2} \int_0^{\infty} d\rho \int_{-\pi}^{\pi} e^{ir\rho\cos\theta}\cos\theta\,d\theta.$$

Интегрируя сначала по ρ с применением метода суммирования $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\infty} e^{-\varepsilon\rho} f(\rho)\,d\rho$, получаем

$$P = \frac{1}{2\pi}\frac{\cos\varphi}{r} = \frac{1}{2\pi}\frac{x-x_0}{r^2}.$$

Для нахождения Q нам нужно только поменять ролями $(x-x_0)$ и $(y-y_0)$, откуда заключаем, что

$$Q=\frac{1}{2\pi}\frac{y-y_0}{r^2}.$$

Введем теперь l и m — направляющие косинусы внутренней нормали в точке (x_0, y_0):

$$dx_0=m\,ds_0, \qquad dy_0=-l\,ds_0.$$

Тогда получим:

$$u(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{l\cos\varphi+m\sin\varphi}{r}u\,ds_0+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{-m\cos\varphi+l\sin\varphi}{r}v\,ds_0,$$
$$v(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{-l\sin\varphi+m\cos\varphi}{r}u\,ds_0+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{m\sin\varphi+l\cos\varphi}{r}v\,ds_0.$$

Пусть ω — угол между вектором $(x-x_0, y-y_0)$ и внутренней нормалью в точке (x_0, y_0). Получаем

$$u(x, y)=\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\cos\omega}{r}u\,ds_0+\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\sin\omega}{r}v\,ds_0,$$
$$v(x, y)=-\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\sin\omega}{r}u\,ds_0+\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\cos\omega}{r}v\,ds_0.$$

Если (x, y) расположена вне C, то левые части в предыдущих формулах следует заменить нулем.

Если устремить (x, y) к какой-либо точке p контура, то для v получим интегральное уравнение Фредгольма

$$-v(p)+\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\cos\omega}{r_{pq}}v(q)\,ds_q=\frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\sin\omega}{r_{pq}}u(q)\,ds_q,$$

которое дает решение поставленной задачи. Так как однородное уравнение допускает единственное собственное решение $v=\text{const}$, то мы находим, что v определяется с точностью до произвольной постоянной.

ЗАМЕЧАНИЕ II

Здесь мы будем говорить о некоторых простых системах уравнений в частных производных, в которых проявляется глубокая аналогия с уравнением Больцмана.

Заметим прежде всего, что изучение таких систем весьма полезно для нахождения методов, которым надлежит следовать для успешного изучения уравнения Больцмана.

Если рассмотреть воображаемый линейный газ, молекулы которого могут обладать только двумя различными значениями скорости, взаимно меняющимися при столкновениях, и если предположить, что плотностями этих двух видов молекул являются положительные величины u и v, зависящие только от x и t, то нужно будет рассматривать систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = v^2 - u^2,$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} = u^2 - v^2,$$

обладающую многими свойствами, аналогичными свойствам уравнения Больцмана:

$u + v$ играет ту же роль, что и $\int F\, d\omega$.

Положительные решения уравнения $T(F) = 0$ соответствуют соотношению $u = v$.

Предполагая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u + v)\, dx < \infty,$$

из дифференциальных уравнений находим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} (u + v)\, dx\right] = 0.$$

Построим теперь выражение, соответствующее H-функции Больцмана:

$$u \log u + v \log v.$$

Выражение, соответствующее интегралу $\int \log F \cdot T(F)\, d\omega$, равно

$$(v^2 - u^2)\log u + (u^2 - v^2)\log v = (v^2 - u^2)\log \frac{u}{v} \leqslant 0.$$

Получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(u \log u + v \log v) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \log u \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + \log v \cdot \frac{\partial v}{\partial t} =$$
$$= \frac{\partial (u+v)}{\partial t} - \log u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \log v \cdot \frac{\partial v}{\partial x} - (u^2 - v^2)\log \frac{u}{v}.$$

Интегрирование по x приводит к неравенству

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} (u \log u + v \log v)\, dx = - \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 - v^2)\log \frac{u}{v}\, dx \leqslant 0,$$

соответствующему H-теореме.

Из дифференциальных уравнений непосредственно следует, что

$$\frac{\partial (u+v)}{\partial t} = \frac{\partial (v-u)}{\partial x}.$$

Поэтому мы можем положить

$$\frac{u+v}{2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \frac{v-u}{2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Таким образом, рассматриваемая система эквивалентна уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Следующая система с тремя переменными также является аналогом уравнения Больцмана:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = v^2 + w^2 - 2u^2,$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial y} = w^2 + u^2 - 2v^2,$$
$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z} = u^2 + v^2 - 2w^2.$$

Складывая эти уравнения, получаем

$$\frac{\partial (u+v+w)}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Умножим правые части на $\log u$, $\log v$ и $\log w$ соответственно. Тогда получим

$$(v^2-u^2+w^2-u^2)\log u+(u^2-v^2+w^2-v^2)\log v+$$
$$+(u^2-w^2+v^2-w^2)\log w=(v^2-u^2)\log\frac{u}{v}+$$
$$+(w^2-u^2)\log\frac{u}{w}+(w^2-v^2)\log\frac{v}{w}\leqslant 0.$$

ЗАМЕЧАНИЕ III

Здесь мы приведем несколько соображений о разложениях, аналогичных разложениям Гильберта в теории дифференциальных уравнений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\lambda y''=y'^2-y^2$$

и выясним, обладает ли оно решением, голоморфным вблизи начала и разлагающимся в степенной ряд

$$y=y_0(x)+\lambda y_1(x)+\ldots+\lambda^n y_n(x)+\ldots,$$

где первый коэффициент отличен от нуля. Сразу замечаем, что в этом случае он не может быть независимым от x. Подставляя написанный сейчас ряд в дифференциальное уравнение, получаем

$$\lambda\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu y''_\nu=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu\left(\sum_{p=0}^{\nu}y'_p y'_{\nu-p}-\sum_{p=0}^{\nu}y_p y_{\nu-p}\right)=$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu\sum_{p=0}^{\nu}(y'_p-y_p)(y'_{\nu-p}+y_{\nu-p}).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях уравнения, найдем

$$y'^2_0-y_0^2=0,\quad y'_0=\pm y_0.$$

Возьмем, в частности, $y'_0=y_0$, $y_0=ke^x$. Как обычно, получим

$$(y'_\nu-y_\nu)2y_0+R(y_0\ldots y_{\nu-1},\ y'_0\ldots y'_{\nu-1})=y''_{\nu-1}.$$

Поэтому можно последовательно вычислить все коэффициенты y_ν, вводя на каждом шаге произвольную постоянную.

Спрашивается, является ли этот ряд сходящимся? Ответ получим, решая уравнение в явной форме. С этой целью положим

$$y = \lambda t, \quad y'^2 = \lambda^2 u,$$

что приводит к уравнению

$$u' - 2u = -2t^2,$$

общее решение которого имеет вид

$$u = C(\lambda)\, e^{2t} + t^2 + t + \frac{1}{2}.$$

Возвращаясь к старым переменным, получим

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = P(\lambda)\, e^{2y/\lambda} + y^2 + \lambda y + \frac{\lambda^2}{2}.$$

По предположению, левая часть есть голоморфная функция от λ. Следовательно, такой же должна быть функция $P(\lambda)\, e^{2y/\lambda}$.

Но в силу того, что y_0 зависит от x, это возможно только при условии, что $P(\lambda)$ есть нуль. Поэтому голоморфные решения необходимо являются решениями дифференциального уравнения

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2 + \lambda y + \frac{\lambda^2}{2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ IV

Здесь мы будем искать функции вида

$$F = e^{\alpha(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+a\xi+b\eta+c\zeta+d},$$

удовлетворяющие уравнению Больцмана, где α, a, b, c, d — функции от x, y, z, t. Проверке подлежит следующее уравнение:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \xi\frac{\partial F}{\partial x} + \eta\frac{\partial F}{\partial y} + \zeta\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial \zeta} = 0,$$

где φ есть функция от внешних сил.

Положим

$$R^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

Подставляя указанную выше функцию F в только что выписанное дифференциальное уравнение, получим

$$R^2\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\xi\frac{\partial a}{\partial t}+\eta\frac{\partial b}{\partial t}+\zeta\frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial d}{\partial t}+$$
$$+\xi\left(R^2\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\xi\frac{\partial a}{\partial x}+\eta\frac{\partial b}{\partial x}+\zeta\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial d}{\partial x}\right)+$$
$$+\eta\left(R^2\frac{\partial\alpha}{\partial y}+\xi\frac{\partial a}{\partial y}+\eta\frac{\partial b}{\partial y}+\zeta\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{\partial d}{\partial y}\right)+$$
$$+\zeta\left(R^2\frac{\partial\alpha}{\partial z}+\xi\frac{\partial a}{\partial z}+\eta\frac{\partial b}{\partial z}+\zeta\frac{\partial c}{\partial z}+\frac{\partial d}{\partial z}\right)+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\left(2\alpha\xi+a\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left(2\alpha\eta+b\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(2\alpha\zeta+c\right)=0.$$

Левая часть есть многочлен третьей степени от ξ, η, ζ. Необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты этого многочлена равнялись нулю. Рассмотрим прежде всего члены третьей степени. Это дает

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\frac{\partial\alpha}{\partial z}=0.$$

Отсюда следует, что α зависит только от переменной t. Приравнивая нулю члены второго порядка, получаем

$$(31)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial a}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial b}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial c}{\partial z}=0,$$

$$(32)\qquad \frac{\partial b}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial a}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial c}{\partial y}+\frac{\partial b}{\partial z}=0.$$

Члены первого порядка дают уравнения

$$(33)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{\partial d}{\partial x}+2\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=0,\\ \frac{\partial b}{\partial t}+\frac{\partial d}{\partial y}+2\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=0,\\ \frac{\partial c}{\partial t}+\frac{\partial d}{\partial z}+2\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial z}&=0,\end{aligned}$$

а постоянный член — уравнение

$$\frac{\partial d}{\partial t}+a\frac{\partial\varphi}{\partial x}+b\frac{\partial\varphi}{\partial y}+c\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

Число уравнений превышает число неизвестных функций. Легко находим

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial y^2}=0, \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial z^2}=0$$

и аналогичные уравнения для b и c. Следовательно, функция a необходимо имеет вид

$$a=c_0^{(1)}+c_1^{(1)}x+c_2^{(1)}y+c_3^{(1)}z+c_{23}^{(1)}yz+c_{13}^{(1)}xz+c_{12}^{(1)}xy+ \\ +c^{(1)}xyz.$$

Аналогичным образом получаем

$$b=c_0^{(2)}+c_1^{(2)}x+c_2^{(2)}y+c_3^{(2)}z+c_{23}^{(2)}yz+c_{13}^{(2)}xz+ \\ +c_{12}^{(2)}xy+c^{(2)}xyz,$$

$$c=c_0^{(3)}+c_1^{(3)}x+c_2^{(3)}y+c_3^{(3)}z+c_{23}^{(3)}yz+c_{13}^{(3)}xz+ \\ +c_{12}^{(3)}xy+c^{(3)}xyz.$$

Подставим теперь эти выражения для a и b в первое из уравнений (32). Получим

$$c_1^{(2)}+c_{13}^{(2)}z+c_{12}^{(2)}y+c^{(2)}yz+c_2^{(1)}+c_{23}^{(1)}z+c_{12}^{(1)}x+c^{(1)}xz=0,$$

откуда заключаем, что $c^{(2)}=c^{(1)}=c_{12}^{(1)}=c_{12}^{(2)}=0$.

Тот же процесс приводит к уравнению $c^{(3)}=0$, и, следовательно, в силу очевидных свойств симметрии, a, b, c являются линейными функциями от x, y, z с коэффициентами, зависящими только от переменной t.

Эти линейные функции могут быть записаны так $\left(\alpha'=\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)$:

$$a=-\alpha' x+Bz-Cy+l,$$
$$b=-\alpha' y+Cx-Az+m,$$
$$c=-\alpha' z+Ay-Bx+n.$$

Согласно (33), $\partial a/\partial t$, $\partial b/\partial t$, $\partial c/\partial t$ являются частными производными некоторой функции по x, y, z. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t\,\partial y}=-\frac{\partial^2 b}{\partial t\,\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 a}{\partial t\,\partial z}=-\frac{\partial^2 c}{\partial t\,\partial x}, \qquad \frac{\partial^2 b}{\partial t\,\partial z}=-\frac{\partial^2 c}{\partial t\,\partial y}.$$

Из уравнения (31) следует, что

$$A'=B'=C'=0;$$

поэтому A, B, C — постоянные. Имеем

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\alpha'' x + l',$$

$$\frac{\partial b}{\partial t} = -\alpha'' y + m',$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\alpha'' z + n',$$

$$d + 2\alpha\varphi = \frac{\alpha''}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (l'x + m'y + n'z) + g,$$

где g есть функция от одного только t. Находим

$$\frac{\partial d}{\partial t} = \frac{\alpha'''}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (l''x + m''y + n''z) + g' - 2\alpha'\varphi,$$

$$a\frac{\partial \varphi}{\partial x} + b\frac{\partial \varphi}{\partial y} + c\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\alpha'\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y} + z\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) +$$
$$+ A\left(y\frac{\partial \varphi}{\partial z} - z\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + B\left(z\frac{\partial \varphi}{\partial x} - x\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + C\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) +$$
$$+ l\frac{\partial \varphi}{\partial x} + m\frac{\partial \varphi}{\partial y} + n\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Если мы предположим, что $\varphi = 0$, то получим

$$\frac{\alpha'''}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (l''x + m''y + n''z) + g' = 0.$$

Следовательно,

$$\alpha''' = 0, \qquad l'' = m'' = n'' = 0, \qquad g' = 0;$$

α является многочленом второй степени; l, m, n — линейные функции от t, а g — постоянная.

Скорости

Имеем тождественно

$$e^{\alpha(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)+a\xi+b\eta+c\zeta+d} = e^{\alpha\left(\left(\xi+\frac{a}{2\alpha}\right)^2+\left(\eta+\frac{b}{2\alpha}\right)^2+\left(\zeta+\frac{c}{2\alpha}\right)^2\right)+d-\frac{a^2+b^2+c^2}{4\alpha}}.$$

Составляющими средней скорости являются

$$u = -\frac{a}{2\alpha}, \qquad v = -\frac{b}{2\alpha}, \qquad w = -\frac{c}{2\alpha}.$$

Для определения движения точки, в которой средняя скорость газа равна нулю, имеем уравнения

$$-\alpha' x + Bz - Cy + l = 0,$$
$$-\alpha' y + Cx - Az + m = 0,$$
$$-\alpha' z + Ay - Bx + n = 0.$$

Оси мы можем выбрать так, чтобы $A = B = 0$.

В этом случае имеем

$$z = \frac{n}{\alpha'}, \quad \alpha' x + Cy = l, \quad -Cx + \alpha' y = m.$$

Положим

$$\alpha' = \tau, \quad l = l_1\tau + l_2, \quad m = m_1\tau + m_2, \quad n = n_1\tau + n_2.$$

Получаем

$$x = \frac{l_1\tau^2 + l_2\tau - C(m_1\tau + m_2)}{\tau^2 + C^2},$$
$$y = \frac{m_1\tau^2 + m_2\tau + C(l_1\tau + l_2)}{\tau^2 + C^2},$$
$$z = \frac{n_1\tau + n_2}{\tau}.$$

Таким образом, проекцией кривой нулевой средней скорости на плоскость x, y является эллипс. Если $n_2 = 0$, то и сама кривая есть эллипс.

Имеем формулу

$$d = \frac{\alpha''}{2}(x^2 + y^2 + z^2) - (l'x + m'y + n'z) + g.$$

Температура T вычисляется по формуле

$$T = -\frac{m}{2k\alpha}.$$

Плотность ρ равна

$$\rho = \frac{\pi^{3/2} m}{(-\alpha)^{3/2}} e^{\frac{\alpha''}{2}(x^2+y^2+z^2) - (l'x + m'y + n'z) + g - \frac{a^2+b^2+c^2}{4\alpha}}.$$

Предположим, что

$$A = B = C = 0, \quad l = m = n = 0.$$

В этом случае имеем

$$T = -\frac{m}{2k\alpha},$$

$$\rho = \frac{\pi^{3/2} m}{(-\alpha)^{3/2}} e^{\left(\frac{\alpha''}{2} - \frac{\alpha'^2}{4\alpha}\right)(x^2+y^2+z^2)+g}.$$

Выбрав подходящим образом начало отсчета времени, мы можем считать

$$\alpha = -(\gamma t^2 + \delta),$$

откуда заключаем, что

$$T = \frac{m}{2k} \cdot \frac{1}{\gamma t^2 + \delta},$$

$$\rho = \frac{\pi^{3/2} m}{(\gamma t^2 + \delta)^{3/2}} e^{-\frac{\gamma\delta}{\gamma t^2+\delta}(x^2+y^2+z^2)+g}.$$

Очевидно, что H-функция Больцмана остается постоянной.

Полная масса равна

$$\frac{m\pi^3 e^g}{(\gamma\delta)^{3/2}} = M,$$

а полная кинетическая энергия —

$$\frac{3m}{4} \frac{\pi^3 e^g}{(\gamma\delta)^{3/2}\delta} = \frac{3}{4}\frac{M}{\delta}.$$

Вычислим максимум ρ в данной точке (x, y, z). Для

$$\frac{2}{3}(x^2 + y^2 + z^2)\gamma > 1$$

находим

$$\max_t \rho = \left(\frac{3}{2\pi e}\right)^{3/2} \frac{M}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Соответствующее максимуму время дается формулой

$$\gamma t^2 + \delta = \frac{2}{3}\gamma\delta(x^2 + y^2 + z^2).$$

Следовательно, скорость распространения асимптотически равна

$$\sqrt{\frac{3}{2\delta}} = \sqrt{\frac{3kT_0}{m}}.$$

Формулы, полученные нами для некоторых движений массы газа в пустом бесконечном пространстве, особенно важны потому, что они не зависят от закона взаимодействия молекул газа.