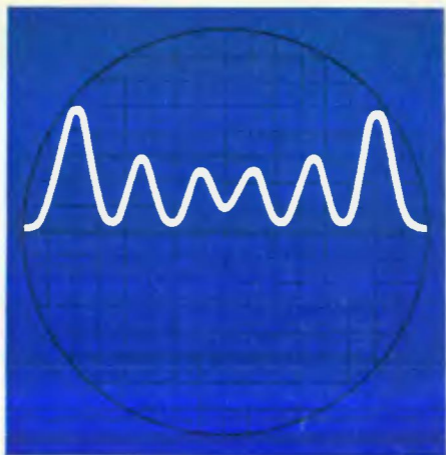


530  
K-26  
31275



В. И. КАРПМАН

**НЕЛИНЕЙНЫЕ  
ВОЛНЫ  
В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ  
СРЕДАХ**

В. И. КАРПМАН

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1973

**Нелинейные волны в диспергирующих средах.** Карпман В. И. Монография. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1973.

Книга посвящена изложению с единой точки зрения широкого круга вопросов теории нелинейных волн в средах с дисперсией и диссипацией. Эта сравнительно молодая бурно развивающаяся область нелинейной динамики вызывает в настоящее время значительный интерес у специалистов, работающих в самых различных областях. Основное внимание уделяется нестационарным процессам. Общие закономерности иллюстрируются большим числом примеров из гидродинамики, физики плазмы, радиофизики, оптики и т. д. Рисунков 25, библиография 116 названий.

К  $\frac{0231-1735}{042(02)-73}$  116-73

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	5
§ 1. Введение . . . . .	7
<b>Глава I. Линейное приближение . . . . .</b>	<b>10</b>
§ 2. Общее решение линеаризованных уравнений . . . . .	1
§ 3. Линеаризованное уравнение Кортевега — де Вриза . . . . .	1
<b>Глава II. Примеры диспергирующих сред . . . . .</b>	<b>17</b>
§ 4. Гравитационные волны на поверхности жидкости . . . . .	17
§ 5. Уравнения Буссинеска . . . . .	19
§ 6. Ионно-звуковые волны в плазме без магнитного поля . . . . .	24
§ 7. Нелинейные волны в плазме, находящейся в сильном магнитном поле . . . . .	27
§ 8. Нелинейные электромагнитные волны в изотропных диэлектриках . . . . .	34
§ 9. Звуковые волны с дисперсией . . . . .	40
<b>Глава III. Нелинейные стационарные волны . . . . .</b>	<b>45</b>
§ 10. Стационарные решения уравнений Буссинеска . . . . .	45
§ 11. Стационарные волны, распространяющиеся поперек магнитного поля в разреженной плазме . . . . .	52
§ 12. Другие примеры стационарных волн. Нелинейные дисперсионные уравнения . . . . .	54
Гравитационные волны в глубокой воде (55). Электромагнитные волны в нелинейных диэлектриках (56).	
<b>Глава IV. Нелинейные волны в слабо диспергирующих средах . . . . .</b>	<b>60</b>
§ 13. Уравнение Бюргера . . . . .	60
§ 14. Решение уравнения Бюргера . . . . .	65
§ 15. Уравнение Кортевега — де Вриза . . . . .	68
§ 16. Законы сохранения для уравнения Кортевега — де Вриза . . . . .	72
§ 17. Общая картина эволюции начальных возмущений в слабо диспергирующих средах . . . . .	75
§ 18. Об аналитическом решении уравнения Кортевега — де Вриза . . . . .	78
§ 19. Асимптотические выражения для амплитуд солитонов и «хвостов» при больших $\sigma$ . . . . .	86
1*	3

§ 20. Автомодельное решение уравнения Кортевега — де Вриза . . . . .	89
§ 21. Квазилинейные решения уравнения Кортевега — де Вриза . . . . .	91
§ 22. Обтекание тонкого тела в диспергирующей среде . . . . .	99
§ 23. Ударные воли в диспергирующих средах . . . . .	107
Глава V. Волны «оггибающих» . . . . .	111
§ 24. Нелинейная геометрическая оптика . . . . .	111
§ 25. Критерий неустойчивости стационарных воли. Гравитационные волны в глубокой воде (115). Электромагнитные волны в нелинейном диэлектрике (115).	114
§ 26. Эволюция волн оггибающих в гидродинамическом приближении . . . . .	117
§ 27. Нелинейное параболическое уравнение. . . . .	125
§ 28. Само модуляция волн . . . . .	133
§ 29. Самофокусировка и самоканализация волн. . . . .	140
§ 30. Электроакустические волны в плазме . . . . .	145
Приложение А. Нелинейные воли с медленно изменяющимися параметрами (адиабатическое приближение Уитэма) . . . . .	150
A1. Вариационный принцип . . . . .	150
A2. Адиабатические инварианты . . . . .	154
A3. Нелинейная геометрическая оптика . . . . .	157
Приложение Б. Эволюция электроакустических волн в плазме с отрицательной диэлектрической проницаемостью . . . . .	158
B1. Граничные условия . . . . .	158
B2. Возбуждение и эволюция электроакустических волн . . . . .	160
B3. Решение граничной задачи . . . . .	167
B4. Общее решение основных уравнений . . . . .	170
Литература . . . . .	172

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является переработанным и расширенным изложением курса лекций, прочитанных автором в Новосибирском государственном университете. Являясь введением в быстро развивающуюся область, она не претендует на исчерпывающий характер изложения.

В некоторых случаях. (особенно это относится к содержанию второй главы) выбор материала, в определенной степени, связан с интересами автора.

С другой стороны, мы стремились с достаточной полнотой отразить основные идеи и результаты. Ряд вопросов, примыкающих в той или иной степени к настоящей книге, содержится, например, в обзорах и монографиях [2—5, 8—12, 37, 116], а также в сборнике [7]. Автор отдает себе отчет, что далеко не все интересные работы, посвященные вопросам, обсуждаемым в этой книге, нашли свое отражение в библиографии. Особенно это относится к публикациям, вышедшим после того как рукопись книги была сдана в печать.

Книга написана в ряде мест довольно сжато, однако она не требует от читателя подготовки, выходящей за пределы общих университетских курсов теоретической физики и механики сплошных сред.

Автор выражает глубокую признательность Б. Б. Кадомцеву и Р. З. Сагдееву за плодотворные обсуждения ряда вопросов, рассмотренных в этой книге, А. Г. Куликовскому и Р. В. Хохлову, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд ценных замечаний.

*В. Карпман*

## § 1. Введение

Нелинейные волновые процессы интенсивно изучаются в настоящее время в самых различных разделах физики и механики: оптике, физике плазмы, радиофизике, акустике, гидродинамике и т. д. Хотя в каждой из этих областей есть свои специфические проблемы, методы и результаты, можно указать ряд качественных закономерностей, являющихся, по существу, простыми следствиями общей теории нелинейных волн в диспергирующих средах. Несмотря на то, что такая теория еще далека от своего завершения, в ряде ее направлений уже достигнута определенная ясность; особого внимания при этом заслуживает анализ некоторых предельных случаев, когда удается получить достаточно общие результаты асимптотического характера.

Классическим примером волн с дисперсией, легко доступных непосредственному наблюдению, являются гравитационные волны на поверхности воды. Если глубина жидкости мала, то, как известно, фазовая скорость колебаний равна  $\omega/k = \sqrt{gh}$ , т. е. дисперсия несущественна; нелинейные волны распространяются в этом случае, как и в обычной газодинамике (теория «мелкой воды») [1, 2]. Наиболее важным нелинейным эффектом при этом является увеличение крутизны фронта волны, приводящее к ее опрокидыванию. По мере увеличения глубины жидкости становится существенной дисперсия. В этом случае волны с разными  $k$  имеют различную скорость, и нелинейное укручение фронта может уравновеситься его дисперсионным расплыванием. Благодаря этому становится возможным существование так называемых стационарных волн, распространяющихся без изменения своей формы с постоянной скоростью. Ясно, что этот эффект является достаточно общим и может иметь место в любых диспергирующих средах. Поэтому не случайно, что нелинейные стационарные волны (в гидродинамике

они иногда называются «прогрессивными») впоследствии были обнаружены в плазме (где влияние дисперсии часто очень существенно), а также и в других диспергирующих средах \*).

Еще сравнительно недавно доказательство существования нелинейных стационарных волн было почти единственным общим результатом теории. В последнее время центр тяжести исследований переместился в направлении изучения нестационарных волновых процессов. Один из подходов к этому кругу вопросов состоит в соответствующем обобщении некоторых представлений гидродинамики. В последней, как известно, характерные особенности нелинейных эффектов могут быть выявлены на примере так называемых простых волн. Оказывается, что это понятие можно в определенном смысле обобщить и на случай слабо диспергирующих сред при условии, что амплитуды волн достаточно малы. Такие волны можно называть «квазипростыми». В простейшем случае обычной газодинамики с вязкостью и теплопроводностью, где дисперсия является «мнимой», этот подход приводит к уравнению Бюргерса, решение которого хорошо описывают такие нестационарные процессы, как, например, образование ударных волн. Для сред с «действительной» дисперсией мы получаем в том же приближении уравнение Кортевега — де Вриза (КдВ).

Одним из наиболее замечательных достижений последнего времени является создание последовательной теории уравнения КдВ, позволившей установить ряд важных закономерностей нестационарных волновых процессов в слабо диспергирующих средах (здесь следует особенно выделить фундаментальную работу [6]).

Другое плодотворное направление связано с так называемой адиабатической теорией нелинейных волн [7], которая применима в принципе и к сильно диспергирующим волнам произвольной амплитуды. Основные допущения этой теории сводятся к «медленности» изменения амплитуды, волнового числа и других величин, характеризующих волну на расстояниях и за времена порядка одного периода колебания. В определенном смысле такое приближение представляет собой обобщение теории адиабатических инвариантов в механике. Для волн малой амплитуды основные уравнения адиабатического при-

ближения могут быть получены путем нелинейного обобщения известного перехода от волновой оптики к геометрической. При этом они принимают вид уравнений гидродинамики, где, однако, квадрат скорости «звука» может быть как положительной, так и отрицательной величиной. В последнем случае соответствующие волны оказываются неустойчивыми относительно малых возмущений их огибающей. Нелинейная самофокусировка света, интенсивно изучаемая в настоящее время (см., например, обзоры [8, 9]), также относится к этому кругу явлений. Ясно, что для неустойчивых волн уравнение адиабатического приближения имеет весьма ограниченную область применимости. Для устойчивых волн это приближение перестает быть оправданным после того, как из-за нелинейного укрупнения формы огибающей перестают выполняться условия адиабатичности. Учет соответствующих членов с высшими производными (описывающих дисперсионное расплывание волновых пакетов и дифракционные эффекты) приводит к так называемому нелинейному параболическому уравнению, которое позволяет объяснить ряд наблюдаемых на опыте эффектов для самых различных типов волн.

Сказанное выше определяет содержание книги.

В первой главе рассматривается распространение волн с дисперсией в линейном приближении. Мы ограничились здесь изложением наиболее важных моментов, связанных с нелинейными обобщениями, которые обсуждаются в дальнейшем. Во второй главе рассматриваются некоторые характерные примеры диспергирующих сред и выясняются общие особенности уравнений, описывающих нелинейные волны в таких средах. Третья глава посвящена изучению стационарных волн. В четвертой главе излагается теория нелинейных волн со слабой дисперсией. Здесь выводятся и исследуются уравнения Бюргерса и Кортевега — де Вриза, которые применяются затем к ряду конкретных задач. В пятой главе рассматриваются основы адиабатической теории нелинейных волн и нелинейное параболическое уравнение. В соответствии с индуктивным характером изложения, принятым в книге, мы ограничились здесь наиболее простой формой адиабатической теории, применимой к волнам достаточно малой амплитуды. Общая формулировка основных принципов адиабатической теории дана в Приложении А.

\*) См., например, [2—5] и цитированную там литературу.

## ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

## § 2. Общее решение линеаризованных уравнений

Ряд характерных особенностей распространения волн в диспергирующих средах можно проследить уже в линейном приближении. Предположим, что рассматриваемые колебания описываются совокупностью величин  $\Phi_i(\mathbf{r}, t)$ , удовлетворяющих определенной системе линейных уравнений в частных производных (в дальнейшем индекс  $i$  для краткости опускается). Фундаментальные решения этой системы в линейном приближении имеют вид плоских волн

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0 \exp\{i[\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega(\mathbf{k})t]\}, \quad (2.1)$$

где закон дисперсии

$$\omega = \omega(\mathbf{k}) \quad (2.2)$$

определяется системой основных уравнений.

Ограничимся для простоты одномерным случаем. Тогда общее решение основных уравнений имеет вид

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \chi(k) \exp\{i[kx - \omega(k)t]\} dk, \quad (2.3)$$

где  $\chi(k)$  — фурье-компонента начального возмущения

$$\chi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, 0) e^{-ikx} dx. \quad (2.4)$$

Рассмотрим асимптотику выражения (2.3) при больших  $t$ . Используя метод стационарной фазы (см., например, [13]), нетрудно получить

$$\Phi(x, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi |\omega''(k)| t}} \times \\ \times \operatorname{Re} \left\{ \chi(k) \exp \left[ i(kx - \omega(k)t - \frac{\pi}{4} \operatorname{sign} \omega''(k)) \right] \right\}, \quad (2.5)$$

где  $k$  есть положительный корень уравнения

$$u(k) \equiv \omega'(k) = x/t \quad (\omega'(k) = d\omega/dk). \quad (2.6)$$

Если уравнение (2.6) имеет несколько положительных корней  $k$ , то в (2.5) надо написать сумму по этим  $k$ .

Рассмотрим физический смысл формулы (2.5). Из нее следует, что при тех значениях  $x$ , для которых уравнение (2.6) имеет вещественные корни  $k(x, t)$ , возмущение представляет собой волновой пакет с переменным волновым числом  $k(x, t)$ , частотой  $\omega(x, t)$  ( $k$  и  $\omega$  связаны между собой дисперсионным уравнением (2.2)) и амплитудой, пропорциональной  $|\omega''(k)t|^{-1/2} \chi(k)$ , где  $\chi(k)$  определяется формулой (2.4). Из (2.6) также вытекает, что локальное волновое число  $k(x, t)$  перемещается в пространстве с групповой скоростью  $u = \omega'(k)$ , т. е. сохраняет постоянное значение вдоль характеристики

$$x = u(k)t. \quad (2.7)$$

Плотность энергии пакета как функция  $x, t$  определяется выражением

$$W(x, t) \equiv \frac{d\mathcal{E}}{dx} = \operatorname{const} \cdot \frac{|\chi(k)|^2}{|\omega''(k)|t}. \quad (2.8)$$

Выражение (2.8) имеет простой физический смысл, который проще всего сформулировать, если перейти от  $dx$  к  $dk$ . При смещении на  $dx$  локальное волновое число изменится на величину  $dk$ , которая, согласно (2.6), равна

$$dk = \frac{dx}{\omega''(k)t}. \quad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) получаем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dk} = \operatorname{const} \cdot |\chi(k)|^2, \quad (2.10)$$

т. е. спектральная плотность энергии  $d\mathcal{E}/dk$  при эволюции пакета не меняется и равна спектральной плотности в начальный момент времени. Из (2.8) и (2.9) также следует, что

$$W(x, t) \delta x = \operatorname{const} \cdot |\chi(k)|^2 \delta k, \quad (2.11)$$

где  $\delta x$  — интервал пакета, на котором волновое число  $k$  изменяется на  $\delta k$ . Соотношение (2.11) можно записать в другой форме. Именно, из (2.11) следует, что величина  $W(x, t) \delta x$  не меняется, когда концы интервала  $\delta x$  перемещаются с групповой скоростью. Это означает, что плотность энергии распространяется с групповой скоростью и должна удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [uW(x, t)]}{\partial x} = 0, \quad (2.12)$$

где  $u = u[k(x, t)]$  — групповая скорость в точке  $x, t$ .

В свою очередь волновое число  $k(x, t)$ , сохраняя свое значение вдоль характеристики (2.7), должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u(k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \quad (2.13)$$

Подставляя в (2.13)  $u(k) = d\omega/dk$ , получаем это уравнение в другой форме

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad (2.14)$$

из которого следует, что локальное волновое число и частота пакета есть производные одной и той же функции

$$k = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \omega = - \frac{\partial \theta}{\partial t}. \quad (2.15)$$

При этом нетрудно убедиться, что

$$\theta(x, t) = k(x, t)x - \omega(x, t)t + \text{const.}$$

(Действительно, дифференцируя функцию  $\theta(x, t)$  по  $x$  и  $t$  и учитывая (2.6), получаем (2.15).) Таким образом, выражение (2.5) может быть представлено в виде квазистационарной волны

$$\Phi(x, t) = \text{Re}\{a(x, t) \exp[i\theta(x, t)]\}, \quad (2.16)$$

где амплитуда  $a(x, t)$  определяется предэкспоненциальным множителем в (2.5), а  $|a|^2$  удовлетворяет уравнению непрерывности, аналогичному (2.12).

Для того чтобы асимптотическое выражение (2.5), из которого вытекают все эти результаты, было достаточно точным, необходимо, чтобы  $k(x, t)$  и  $\omega(x, t)$ , а также  $W(x, t)$  изменялись достаточно мало на расстояниях порядка длины волны  $2\pi/k$  и за промежутки времени порядка  $2\pi/\omega$ . Иными словами, возмущение должно быть быстроосциллирующим при достаточно больших  $t$ . Поэтому все эти результаты можно было бы получить также методом геометрической оптики [14], представляя нашу нестационарную волну в виде (2.16), где  $a(x, t)$  — медленно меняющаяся амплитуда, а эйконал  $\theta(x, t)$  — «большая» величина. Вводя волновое число и частоту с помощью (2.15) и требуя, чтобы  $\omega$  и  $k$  были связаны между собой дисперсионным уравнением (2.2), а энергия распространялась с групповой скоростью, мы приходим к выражению (2.5) (с точностью до постоянного слагаемого  $\pm\pi/4$  в фазе).

Такой подход можно распространить и на нелинейные волны (нелинейная геометрическая оптика или адiabатическое приближение [15, 16]). Поскольку геометрическая оптика теряет силу там, где «медленные» параметры (амплитуда, волновое число и т. д.) начинают заметно изменяться на расстояниях порядка длины волны, она не позволяет в ряде случаев получить полную картину эволюции возмущения во всей области его существования (в частности, в области, где уравнение (2.6) не имеет вещественных решений для  $k$ ). Поэтому ее следует комбинировать (где это возможно) с другими асимптотическими методами, не основанными на допущениях о быстроосциллирующем характере возмущения.

### § 3. Линеаризованное уравнение Кортевега — де Вриза

В качестве простого примера, где можно проследить и за областью, недоступной для геометрической оптики, рассмотрим волны с законом дисперсии

$$\omega(k) = c_0 k - \beta k^3. \quad (3.1)$$

С общей точки зрения, выражение (3.1) можно рассматривать как первые два члена разложения частоты  $\omega(k)$  по степеням  $k$  для достаточно длинных волн в прозрачной среде. Дисперсионному уравнению (3.1) отвечает следующее дифференциальное уравнение для волновой



функции

$$\Phi_t + c_0 \Phi_x + \beta \Phi_{xxx} = 0.$$

Переходя к новой координате  $x \rightarrow x - c_0 t$  (отвечающей системе отсчета, которая движется со скоростью  $c_0$ ), получим

$$\Phi_t + \beta \Phi_{xxx} = 0. \quad (3.2)$$

Таким образом, уравнение (3.2) имеет довольно универсальное значение: оно описывает достаточно длинные волны в средах, где предел  $\omega/k$  при  $k \rightarrow 0$  имеет конечное значение (слабо диспергирующие волны). Нелинейное уравнение для слабо диспергирующих волн, которое подробно изучается в главе IV, называется уравнением Кортевега — де Вриза (КдВ). Соответственно уравнение (3.2) мы будем называть линеаризованным уравнением КдВ. Общее решение уравнения (3.2), как нетрудно проверить, имеет вид

$$\Phi(x, t) = \pi^{-1/2} (3\beta t)^{-1/3} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Ai} \left[ \frac{x - x'}{(3\beta t)^{1/3}} \right] \Phi(x', 0) dx', \quad (3.3)$$

где

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \cos \left( \frac{v^3}{3} + vz \right) dv \quad (3.4)$$

есть функция Эйри, имеющая следующую асимптотику [13]:

$$\text{Ai}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2} z^{-1/4} \exp \left( -\frac{2}{3} z^{3/2} \right), & z \rightarrow \infty, \\ |z|^{-1/4} \cos \left( \frac{2}{3} |z|^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right), & z \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (3.5)$$

Полезно также иметь в виду соотношение

$$\pi^{-1/2} (3\beta t)^{-1/3} \text{Ai} \left( \frac{x}{(3\beta t)^{1/3}} \right) \rightarrow \delta(x) \quad (\beta t \rightarrow 0), \quad (3.6)$$

которое следует из (3.4).

Рассмотрим теперь асимптотический вид выражения (3.3) при больших  $t$ , предполагая, что начальное возму-

щение достаточно быстро затухает при  $x \rightarrow \pm \infty$ . Тогда можно разложить  $\text{Ai}(z - z')$  в (3.3) в ряд по степеням  $z'$ ; в результате получим

$$\Phi(x, t) = \pi^{-1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m p_m}{m!} (3\beta t)^{-(m+1)/3} \text{Ai}^{(m)}(z), \quad (3.7)$$

где

$$z = \frac{x}{(3\beta t)^{1/3}}, \quad p_m = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \Phi(x, 0) dx. \quad (3.8)$$

Подставляя в (3.7) асимптотические выражения для производных функций Эйри

$$\text{Ai}^{(m)}(z) = \begin{cases} \frac{(-1)^m}{2} z^{(2m-1)/4} \exp \left( -\frac{2}{3} z^{3/2} \right), & z \rightarrow \infty, \\ (-1)^m |z|^{(2m-1)/4} \cos \left[ \frac{2}{3} |z|^{3/2} + \frac{\pi}{2} \left( m - \frac{1}{2} \right) \right], & z \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (3.9)$$

и используя разложение в ряд Фурье-компоненты начального возмущения (2.4)

$$\chi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, 0) e^{-ikx} dx = \sum_{m=0}^{\infty} p_m \frac{(-ik)^m}{m!}, \quad (3.10)$$

получаем при  $z \rightarrow -\infty$  (т. е.  $x/\beta < 0$ )

$$\Phi(x, t) = |3\pi^2 \beta t x|^{-1/4} \text{Re} \left\{ \chi \left( \left| \frac{x}{3\beta t} \right|^{1/2} \right) \exp \left[ -i \left( \frac{2}{3} |z|^{3/2} - \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}. \quad (3.11)$$

При  $z \rightarrow \infty$  ( $x/\beta > 0$ ) имеет место

$$\Phi(x, t) = \frac{(3\pi^2 \beta t x)^{-1/4}}{2} \chi \left[ i \left( \frac{x}{3\beta t} \right)^{1/2} \right] \exp \left( -\frac{2}{3} z^{3/2} \right). \quad (3.12)$$

Наконец, при  $z \ll 1$  и достаточно больших  $t$  решение

описывается первым исчезающим членом в формуле (3.7), например, при  $p_0 \neq 0$

$$\Phi \approx \pi^{-1/2} (3\beta t)^{-1/3} \text{Ai}(z).$$

Формула (3.11) есть частный случай общего асимптотического выражения (2.5) при законе дисперсии (3.1). Локальное волновое число, согласно (2.6), имеет вид

$$k(x, t) = \left| \frac{x}{3\beta t} \right|^{1/2}, \quad (3.13)$$

а локальная частота определяется выражением  $\omega = -\beta k^3$ , так что фаза  $kx - \omega t$  совпадает (с точностью до постоянного слагаемого) с аргументом в экспоненте (3.11). Таким образом, быстрые осцилляции, при которых

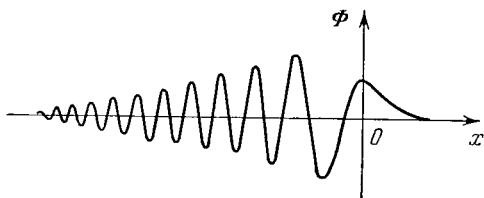


Рис. 3.1. Эволюция возмущения, описываемого линеаризованным уравнением Кортевега — де Вриза (3.2).

применимо приближение геометрической оптики, лежат в области  $x < 0$ , если  $\beta > 0$  (в этом случае коротковолновые осцилляции отстают от длинных), и в области  $x > 0$ , если  $\beta < 0$  (короткие волны уходят вперед). Общий вид решения (3.3) при  $\beta > 0$  изображен на рис. 3.1.

## Глава II

### ПРИМЕРЫ ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕД

#### § 4. Гравитационные волны на поверхности жидкости

Переходя к изучению нелинейных эффектов в диспергирующих средах, рассмотрим прежде всего характерный пример из гидродинамики, имеющий в то же время и самостоятельное значение, а именно гравитационные волны на поверхности идеальной несжимаемой жидкости. Предполагая, что движение потенциальное, можно написать

$$\mathbf{v} = \text{grad} \Phi. \quad (4.1)$$

Выберем систему координат так, чтобы ось  $z$  была направлена вертикально вверх, а плоскость  $xy$  совпадала с невозмущенной поверхностью жидкости. В качестве первого основного уравнения можно выбрать уравнение Бернулли

$$\Phi_t + \frac{1}{2} (\nabla \Phi)^2 + \frac{p - p_0}{\rho} + gz = 0, \quad (4.2)$$

которое получится, если подставить (4.1) в уравнение Эйлера

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho}$$

и проинтегрировать последнее один раз. В (4.2) предполагается, что внешнее давление на свободную поверхность жидкости равно  $p_0 = \text{const}$ . Уравнение непрерывности  $\text{div} \mathbf{v} = 0$  совместно с (4.1) дает

$$\Delta \Phi = 0. \quad (4.3)$$

Эти уравнения нужно дополнить граничными условиями. Первое из них следует из того, что производные по времени от координат точек поверхности жидкости

должны равняться скоростям этих точек. Записывая уравнение поверхности в момент времени  $t$  в виде

$$z = \eta(x, y, t) \quad (4.4)$$

и дифференцируя обе части (4.4) по  $t$  с учетом (4.1), получаем

$$\begin{aligned} \eta_t + \eta_x \Phi_x + \eta_y \Phi_y - \Phi_z = 0 \\ z = \eta(x, y, t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Это уравнение называется кинематическим граничным условием.

Применяя уравнение (4.2) к точкам, лежащим на поверхности жидкости, получаем так называемое динамическое граничное условие

$$\Phi_t + \frac{1}{2}(\nabla\Phi)^2 + g\eta = 0, \quad (4.6)$$

$$z = \eta(x, y, t)$$

и, наконец, поскольку нормальная составляющая скорости у дна (которое предполагается горизонтальным) должна исчезать,

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)_{z=-h} = 0, \quad (4.7)$$

где  $h$  — глубина жидкости. Уравнения (4.1) — (4.7) представляют искомую полную систему уравнений.

Рассмотрим прежде всего волны настолько малой амплитуды, что основные уравнения можно линеаризовать (параметр малости  $a/\lambda \ll 1$ , где  $a$  — амплитуда смещения,  $\lambda$  — длина волны). Линеаризованные уравнения (4.5), (4.6) принимают вид

$$\Phi_t + g\eta = 0 \quad (z=0), \quad (4.8)$$

$$\eta_t - \Phi_z = 0 \quad (z=0). \quad (4.9)$$

Из (4.8), (4.9) и (4.3), (4.7) получаем дисперсионное уравнение для монохроматических волн

$$\omega^2 = gk \operatorname{th} kh. \quad (4.10)$$

Рассмотрим два наиболее интересных предельных случая: длина волны велика по сравнению с глубиной, т. е.  $kh \ll 1$  (мелкая вода) и обратный предельный случай

глубокой воды —  $kh \gg 1$ . Из (4.10) получаем

$$\omega(k) = k\sqrt{gh} \left[ 1 - \frac{(kh)^2}{6} + \dots \right] \quad (kh \ll 1), \quad (4.11)$$

$$\omega(k) = \sqrt{gk} \quad (kh \gg 1). \quad (4.12)$$

Таким образом, в мелкой воде (или в случае достаточно длинных волн) дисперсия является слабой: при  $kh \rightarrow 0$  фазовая скорость стремится к постоянному значению  $c_0 = \sqrt{gh}$ . Соответственно эволюция достаточно длинных волн в линейном приближении описывается формулами (3.3), (3.11), (3.12), где

$$\beta = c_0 h^2 / 6.$$

## § 5. Уравнения Буссинеска

Линеаризованные уравнения (4.8), (4.9) содержат первые члены разложения исходных уравнений по степеням  $a/\lambda$  или, что все равно, по степеням отношения  $v_0/c$ , где  $v_0$  — амплитуда скорости частиц жидкости, а  $c$  — фазовая скорость волны. Можно поставить вопрос о построении систематической процедуры разложения по степеням этого параметра. Мы здесь рассмотрим следующее приближение в случае мелкой воды, когда дисперсия невелика.

Таким образом, в нашем распоряжении имеются два малых параметра

$$\varepsilon = \frac{h}{l} \ll 1, \quad \mu = \frac{v_0}{c} \ll 1, \quad (5.1)$$

где  $l$  — характерный линейный масштаб возмущения, а

$$c_0 = \sqrt{gh} \quad (5.2)$$

есть предельная скорость распространения волн в мелкой воде. Мы будем считать, что  $\varepsilon^2 \sim \mu$ , и задача состоит в получении уравнений, описывающих волны на мелкой воде с точностью до членов второго порядка по  $\varepsilon^2$ ,  $\mu$  включительно. Эти уравнения, таким образом, будут содержать нелинейные и дисперсионные члены в первом неисчезающем приближении.

Переходя к безразмерным переменным

$$x' = \frac{x}{l}, \quad y' = \frac{y}{l}, \quad z' = \frac{z}{h};$$

$$t = \frac{c_0 t}{l}, \quad \Phi' = \frac{\Phi}{v_0 l}, \quad \eta = \frac{c_0 \eta}{v_0 h}, \quad (5.3)$$

получаем основные уравнения в виде

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} + \varepsilon^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y'^2} \right) = 0, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + \frac{\mu}{2} \left[ \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial y'} \right)^2 \right] + \frac{\mu}{2\varepsilon^2} \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial z} \right)^2 + \eta' = 0 \Big|_{z'=\mu\eta'}, \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial z'} = 0 \Big|_{z'=-1}. \quad (5.6)$$

Разложим теперь  $\Phi'$  по степеням  $z'$ :

$$\Phi'(t', x', y', z') = \varphi'(t', x', y') + z' \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right)_0 + \frac{z'^2}{2} \left( \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} \right)_0 + \dots, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \Phi'(t', x', y', z')}{\partial z'} = \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right)_0 + z' \left( \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} \right)_0 + \dots, \quad (5.8)$$

где

$$\varphi(t, x, y) = \Phi'(t', x', y', 0), \quad \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right)_0 = \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right)_{z'=0}. \quad (5.9)$$

Из (5.4) следует

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z'^2} \right)_0 = -\varepsilon^2 \Delta \Phi', \quad (5.10)$$

где  $\Delta$  — оператор Лапласа, действующий только на безразмерные переменные  $x', y'$ :

$$\Delta = \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)^2 + \left( \frac{\partial}{\partial y'} \right)^2.$$

Далее можно написать

$$\left( \frac{\partial^3 \Phi'}{\partial z'^3} \right)_0 = -\varepsilon^2 \Delta \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right)_0, \quad \left( \frac{\partial^4 \Phi'}{\partial z'^4} \right)_0 = \varepsilon^4 \Delta^2 \Phi'. \quad (5.11)$$

Из (5.11) и (5.6) — (5.8) находим

$$\left( \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right)_0 + \varepsilon^2 \Delta \Phi' - \frac{\varepsilon^2}{2} \Delta \left( \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right)_0 - \frac{\varepsilon^4}{6} \Delta^2 \Phi' = 0. \quad (5.12)$$

Решая это уравнение методом последовательных приближений, получим

$$\left( \frac{\partial \Phi'}{\partial z'} \right)_0 = -\varepsilon^2 \Delta \Phi' - \frac{\varepsilon^4}{3} \Delta^2 \Phi'. \quad (5.13)$$

Используя (5.13), (4.5) и (5.5) — (5.10), можно написать следующую систему уравнений для величин  $\varphi', \eta'$ , зависящих только от переменных  $t', x', y'$ :

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{\mu}{2} (\nabla \varphi')^2 + \eta' + O(\varepsilon^4, \mu^2, \varepsilon^2 \mu) = 0, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t'} + \mu \nabla \varphi' \nabla \eta' + \Delta \varphi' + \mu \eta' \Delta \varphi' + \\ + \frac{\varepsilon^2}{3} \Delta^2 \varphi' + O(\varepsilon^4, \mu^2, \varepsilon^2 \mu) = 0. \end{aligned}$$

Если теперь вернуться к старым переменным и ввести двумерный потенциал скорости

$$\varphi(t, x, y) = v_0 l \varphi' - g h t \quad (5.15)$$

и полную высоту жидкости над уровнем дна

$$H(t, x, y) = h + \eta(t, x, y), \quad (5.16)$$

то уравнения (5.14) принимают вид

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + g H = 0, \quad (5.17)$$

$$H_t + \nabla (\nabla \varphi H) + \frac{h^3}{3} \Delta^2 \varphi = 0. \quad (5.18)$$

Иногда более удобно исходить из несколько иных уравнений, имеющих ту же степень точности, что и (5.17),

(5.18). Если ввести новый потенциал

$$\psi = \varphi + \frac{h^2}{3} \Delta \varphi, \quad (5.19)$$

то с принятой степенью точности уравнения (5.17) и (5.18) принимают вид

$$\psi_t + \frac{1}{2} (\nabla \psi)^2 + gH + \frac{gh^2}{3} \Delta H = 0, \quad (5.20)$$

$$H_t + \nabla (H \nabla \psi) = 0 \quad (5.21)$$

(при получении последнего члена в (5.20) мы воспользовались соотношением  $\Delta \varphi_t = -g \Delta H$ , которое следует из линеаризованного уравнения (5.17)).

Если теперь ввести «горизонтальную скорость»

$$\mathbf{v}(t, x, y) = \nabla \psi(t, x, y) \quad (5.22)$$

и взять градиент от (5.20), то получатся уравнения

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla gH + \frac{gh^2}{3} \Delta \nabla H = 0, \quad (5.23)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla (H \mathbf{v}) = 0, \quad (5.24)$$

которые мы будем называть уравнениями Буссинеска.

Линеаризуя (5.23), (5.24), нетрудно получить одно уравнение

$$\eta_{tt} - c_0^2 \Delta \eta - \frac{c_0^2 h^2}{3} \Delta^2 \eta = 0, \quad (5.25)$$

которому отвечает дисперсионное соотношение (4.11) (с точностью до членов порядка  $(kh)^2$  включительно, принятой при выводе уравнений (5.23) — (5.24)). Дисперсионный член  $(kh)^2/6$  в (4.11) возник из-за последнего члена в (5.23); если им пренебречь, то основные уравнения принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{H} \nabla \frac{gH^2}{2}, \quad (5.26)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \operatorname{div}(H \mathbf{v}) = 0$$

и совпадают по форме с уравнениями газодинамики, где роль плотности играет глубина жидкости  $H$ , а давление — величина  $gH^2/2$ , что соответствует эффективному показателю адиабаты  $\gamma=2$ . Соотношения (5.26) называются уравнениями мелкой воды [1, 2]. На них автоматически распространяются все результаты, справедливые для соответствующих уравнений газодинамики (инварианты Римана, простые волны и т. д.). Роль скорости звука при этом играет величина  $c = \sqrt{gH}$ .

Уравнения Буссинеска легко дополнить членами, учитывающими капиллярные эффекты. Будем предполагать, что кривизна поверхности не очень велика (что выполняется при достаточно больших длинах волн). Добавочное давление на жидкость, обусловленное поверхностным натяжением, определяется формулой Лапласа

$$\delta p = \alpha (R_1^{-1} + R_2^{-1}), \quad (5.27)$$

где  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, а  $R_1, R_2$  — главные радиусы кривизны поверхности. Если  $z = \eta(x, y, t)$  — уравнение поверхности и величина  $\eta$  достаточно мала (поверхность слабо изогнута), то можно написать ([1], § 60):

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\Delta \eta, \quad \delta p = -\alpha \Delta \eta. \quad (5.28)$$

Заменяя в уравнении (5.23) гидростатическое давление  $\rho gH$  на  $\rho gH + \delta p$  ( $\rho$  — плотность жидкости), получаем уравнения Буссинеска, учитывающие капиллярные эффекты

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + g \nabla H + \left( \frac{gh^2}{3} - \frac{\alpha}{\rho} \right) \Delta \nabla H = 0, \quad (5.29)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \nabla (H \mathbf{v}) = 0.$$

Уравнения (5.29) отличаются от (5.23), (5.24) лишь коэффициентом перед дисперсионным членом. Это приводит к изменению дисперсионного уравнения, а именно, вместо (4.11) теперь будем иметь

$$\omega(k) = c_0 k \left[ 1 - \frac{1}{6} \left( h^2 - \frac{3\alpha}{\rho g} \right) k^2 + \dots \right], \quad (5.30)$$

где по-прежнему  $c_0 = \sqrt{gh}$ . Таким образом, мы опять приходим к выводу, что эволюция достаточно длинных волн в линейном приближении определяется формулами (3.3), (3.11), (3.12); при этом параметр дисперсии  $\beta$  определяется формулой

$$\beta = \frac{c_0}{6} \left( h^2 - \frac{3\alpha}{\rho g} \right). \quad (5.31)$$

Существенно, что при достаточно большом  $\alpha$ , а именно

$$\alpha > \frac{\rho g h^2}{3}, \quad (5.32)$$

параметр дисперсии меняет знак; это влечет за собой качественное изменение характера эволюции по сравнению со случаем, когда капиллярные эффекты невелики и  $\beta > 0$ . Именно, в этом случае более короткие волны имеют большую скорость, чем длинные, и поэтому обгоняют последние.

Оказывается, что уравнения Буссинеска справедливы не только для гравитационно-капиллярных волн; аналогичные уравнения можно получить и для других типов волн, в частности для волн в плазме.

## § 6. Ионно-звуковые волны в плазме без магнитного поля

Здесь, а также в последующих параграфах мы будем рассматривать плазму в «двухжидкостном» приближении, т. е. будем предполагать, что ионная и электронная компоненты плазмы описываются уравнениями гидродинамики.

Если магнитное поле отсутствует, то основные уравнения принимают вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{i,e}}{\partial t} + (\mathbf{v}_{i,e} \nabla) \mathbf{v}_{i,e} = - \frac{1}{nm_{i,e}} \nabla p_{i,e} - \frac{e_{i,e}}{m_{i,e}} \nabla \varphi, \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial n_{i,e}}{\partial t} + \text{div}(n_{i,e} \mathbf{v}_{i,e}) = 0, \quad (6.2)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi e (n_i - n_e), \quad (6.3)$$

где  $\varphi$  — потенциал электрического поля; индексы  $i, e$  указывают на сорт частиц (ионы, электроны, причем  $e_i = e = -e_e$ ).

Уравнения (6.1) — (6.3) написаны в предположении, что ионная и электронная компоненты плазмы слабо взаимодействуют между собой и поэтому могут иметь существенно различные температуры (и соответственно давления, поскольку  $p \sim nT$ ). Такие условия реализуются в достаточно разреженной плазме.

Кроме того, мы будем рассматривать здесь лишь «медленные» (ионные) колебания плазмы, обратные времена которых значительно меньше электронной ленгмювской частоты

$$\tau^{-1} \ll \omega_{0e} = \left( \frac{4\pi n_0 e^2}{m_e} \right)^{1/2}. \quad (6.4)$$

Как известно (см., например, [17]), такие колебания будут слабо затухающими \*) только при выполнении условия  $T_e \gg T_i$ . В дальнейшем мы будем для простоты предполагать, что  $T_i = 0$  и, следовательно,  $p_i = 0$ . Что касается электронов, то мы будем считать их время релаксации настолько малым (по сравнению с периодом ионных колебаний), что электронная плотность описывается распределением Больцмана

$$n_e = n_0 \exp(e\varphi/T), \quad (6.5)$$

где через  $T$  здесь и всюду в дальнейшем будет обозначаться электронная температура  $T_e$ .

В силу сделанных предположений уравнения движения для ионов принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= - \frac{e}{m_i} \nabla \varphi, \\ \Delta \varphi &= 4\pi e [n_0 \exp(e\varphi/T) - n], \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}) = 0$$

(индекс  $i$  при величинах  $v, m, n$  здесь и в дальнейшем опускается).

В случае малых колебаний, когда эти уравнения можно линеаризовать, получаем дисперсионное уравнение

$$\omega = \sqrt{T/m} k (1 + k^2 D^2)^{-1/2}; \quad (6.7)$$

здесь  $D$  — дебаевский радиус:

$$D^2 = \frac{T}{4\pi n_0 e^2}. \quad (6.8)$$

\*) Имеется в виду затухание Ландау [18].

Соотношение (6.7) есть известное дисперсионное уравнение для ионных колебаний в плазме, где  $T_i=0$ . В предельном случае длинных волн  $kD \ll 1$  оно принимает вид (3.1), где

$$c_0 = \left( \frac{T}{m} \right)^{1/2}, \quad \beta = \frac{c_0 D^2}{2} \quad (6.9)$$

и соответственно эволюция линейных нестационарных волн описывается соотношениями (3.3), (3.11), (3.12).

Рассмотрим теперь, какой вид принимают нелинейные уравнения (6.6) для достаточно длинных волн. При этом, как и в аналогичной задаче для гравитационных волн, мы будем предполагать, что отклонения от равновесных значений не слишком велики, так что можно ограничиться нелинейными членами второго порядка. Таким образом, можно ввести два малых параметра

$$\epsilon = \frac{D}{l} \ll 1, \quad \mu = \frac{n - n_0}{n_0} \sim \frac{v}{c_0} \ll 1, \quad (6.10)$$

и будем удерживать лишь члены второго порядка малости относительно  $\epsilon$ ,  $\mu$ .

Поскольку левая часть второго уравнения (6.6) имеет порядок  $\epsilon^2$  по отношению к другим членам, мы можем решать это уравнение относительно  $\varphi$  методом последовательных приближений. Ограничиваясь двумя итерациями, получим

$$n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{T}\right) \approx n + \frac{T}{4\pi e^2} \Delta \ln \frac{n}{n_0}.$$

Тогда

$$e \nabla \varphi = T \exp\left(-\frac{e\varphi}{T}\right) \nabla \exp\left(\frac{e\varphi}{T}\right) \approx \frac{T}{n} \nabla n + \frac{T}{n_0} D^2 \nabla \Delta n. \quad (6.11)$$

Подставляя это в первое из уравнений (6.6), получаем основные уравнения в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -c_0^2 \frac{\nabla n}{n} - \frac{2c_0 \beta \nabla \Delta n}{n_0}, \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0,$$

где  $c_0$  и  $\beta$  определены в (6.9). Уравнения (6.12) имеют вид, аналогичный уравнениям Буссинеска (5.23), (5.24). Член со старшей производной в (6.12) —  $2c_0 \beta \nabla \Delta n/n_0$  — является дисперсионным. Если им пренебречь, то получаются уравнения гидродинамики с эффективным показателем адиабаты  $\gamma=1$ .

## § 7. Нелинейные волны в плазме, находящейся в сильном магнитном поле

Перейдем теперь к плазме, находящейся в магнитном поле. Рассматривая для простоты случай, когда магнитное давление значительно больше кинетического, т. е.  $\frac{H^2}{8\pi T} \gg 1$  и скорости волн значительно меньше скорости света  $c$ , мы можем принять в качестве основных следующие уравнения:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}_i \mathbf{H}], \quad (7.1)$$

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e \mathbf{H}], \quad (7.2)$$

$$\frac{dn_{i,e}}{dt} + \operatorname{div}(n_{i,e} \mathbf{v}_{i,e}) = 0, \quad (7.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi e}{c} (n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e), \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (7.5)$$

Будем также предполагать, что выполняются условия квазинейтральности

$$n_i \approx n_e = n, \quad (7.6)$$

что законно, если частоты колебаний малы по сравнению с ионной ленгмюровской частотой  $\omega_{oi}$ .

Вводя «массовую» скорость плазмы

$$\mathbf{u} = (m_i \mathbf{v}_i + m_e \mathbf{v}_e)/m, \quad \dot{m} = m_i + m_e \quad (7.7)$$

и складывая (7.1), (7.2), а также используя (7.4), (7.6),

получим

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{4\pi nm} [\text{rot } \mathbf{H} \mathbf{H}]. \quad (7.8)$$

Из (7.1), (7.2) и (7.7) получаем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{u} \mathbf{H}] + \frac{m_i}{e} \frac{d\mathbf{u}}{dt} - \frac{m_e}{e} \frac{d\mathbf{v}_e}{dt}. \quad (7.9)$$

Подставляя (7.9), (7.6), (7.7) в уравнения Максвелла (7.4), (7.5), будем иметь

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi ne}{c} \frac{m}{m_i} (\mathbf{u} - \mathbf{v}_e), \quad (7.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{u} \mathbf{H}] - \frac{m_i c}{e} \text{rot} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{m_e c}{e} \text{rot} \frac{d\mathbf{v}_e}{dt}. \quad (7.11)$$

Уравнения (7.8), (7.10), (7.11) совместно с уравнением непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} (n\mathbf{u}) = 0 \quad (7.12)$$

образуют полную систему уравнений «холодной» плазмы в случае низкочастотных колебаний ( $\omega \ll \omega_{oi}$ ).

Последние два члена в уравнении (7.11) очень малы при условии

$$\omega \ll \omega_{Hi} = \frac{eH}{m_i c}. \quad (7.13)$$

Если ими пренебречь, то основные уравнения переходят в уравнения магнитной гидродинамики, в которых опущен член с  $\nabla p$ .

Если положить

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad n = n_0 + n',$$

и пренебречь квадратами возмущений  $\mathbf{h}$ ,  $n'$ ,  $\mathbf{u}$ , то получившиеся линейные уравнения относительно этих величин приводят к следующему закону дисперсии для линейных колебаний:

$$\omega_{1,2} = \frac{c_A k}{2\sqrt{1+k^2 c^2/\omega_{0e}^2}} \left\{ \left[ (1+\cos\alpha)^2 + \frac{k^2 c^2}{\omega_{0i}^2} \frac{\cos^2\alpha}{1+k^2 c^2/\omega_{0e}^2} \right]^{1/2} \pm \left[ (1-\cos\alpha)^2 + \frac{k^2 c^2}{\omega_{0i}^2} \frac{\cos^2\alpha}{1+k^2 c^2/\omega_{0e}^2} \right]^{1/2} \right\}, \quad (7.14)$$

где  $\alpha$  — угол между волновым вектором и магнитным полем,  $c$  — скорость света, а  $c_A$  — альфвеновская скорость:

$$c_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi nm}}, \quad m = m_e + m_i. \quad (7.15)$$

Знаки  $\pm$  в (7.14) отвечают двум типам волн. В предельном случае длинных волн

$$k^2 c^2 \ll \omega_{0e}^2, \quad k^2 c^2 \cos^2 \alpha \ll \omega_{0i}^2 (1 - \cos \alpha)^2 \quad (7.16)$$

дисперсионные уравнения для этих двух ветвей принимают вид

$$\omega_1 = c_A k, \quad \omega_2 = c_A k \cos \alpha, \quad (7.17)$$

т. е. переходят в дисперсионные уравнения для быстрой магнитозвуковой и альфвеновской волн в магнитной гидродинамике (когда  $p \ll H^2/8\pi$ ). Соответственно две ветви, отвечающие знакам  $\pm$  в уравнениях (7.14), мы также будем называть магнитозвуковой и альфвеновской. В дальнейшем мы ограничимся изучением лишь магнитозвуковых волн и предположим, что угол между направлением распространения и магнитным полем не слишком мал, а именно

$$\alpha^4 \gg k^2 c^2 / \omega_{0i}^2, \quad (7.18)$$

т. е. не будем рассматривать волны, распространяющиеся вдоль магнитного поля и близкие к ним (следует отметить, что в случае достаточно длинных волн ( $k \ll \omega_{0i}/c$ ) нижняя граница для  $\alpha$  весьма мала).

Разлагая (7.14) для магнитозвуковой ветви с точностью до членов второго порядка по  $k$  включительно, получим

$$\omega \approx c_A k \left[ 1 - \frac{k^2 c^2}{2\omega_{0i}^2} \left( \frac{m_e}{m_i} - \text{ctg}^2 \alpha \right) \right]. \quad (7.19)$$

Это соотношение относится к типу (3.1), причем

$$c_0 = c_A, \quad \beta = c_A \frac{c^2}{2\omega_{0i}^2} \left( \frac{m_e}{m_i} - \text{ctg}^2 \alpha \right). \quad (7.20)$$

Для волн, распространяющихся поперек магнитного поля ( $\alpha = \pi/2$ ), параметр  $\beta$  принимает вид

$$\beta = c_A \frac{c^2}{2\omega_{0e}^2} \quad (7.21)$$

и дисперсионные эффекты становятся большими при



$k \gg \omega_{0e}/c$  (им соответствуют частоты  $\omega \sim \sqrt{\omega_{H1}\omega_{He}}$ ). Величину

$$\delta_e = \frac{c}{\sqrt{2}\omega_{0e}} \quad (7.22)$$

можно называть длиной дисперсии для гидромагнитных волн, распространяющихся поперек магнитного поля. У косых волн характер дисперсии существенно изменяется. В частности, при  $\text{tg}^2 \alpha < m_i/m_e$  изменяется знак дисперсии — параметр  $\beta$  в (7.20) становится отрицательным, т. е. такие волны качественно аналогичны капиллярным волнам на поверхности жидкости (§ 5), в то время как волны, распространяющиеся поперек магнитного поля, аналогичны гравитационным поверхностным волнам в неглубокой воде.

При  $\text{tg}^2 \alpha \ll m_i/m_e$  существенно изменяется и порядок длины дисперсии, а именно, в этом случае

$$\delta_i = \frac{c \text{ctg} \alpha}{\sqrt{2}\omega_{0i}}. \quad (7.23)$$

Вернемся теперь к нелинейным уравнениям (7.8) — (7.12). Рассмотрим сначала движение плазмы поперек магнитного поля. Пусть последнее направлено параллельно оси  $z$ , а скорость — параллельно плоскости  $xy$ , и все величины зависят только от  $x$ ,  $y$  и  $t$ .

Если рассматривать случай достаточно длинных волн (по сравнению с длиной дисперсии (7.22)) и считать амплитуду достаточно малой, удерживая лишь члены второго порядка по  $(H-H_0)/H_0$ , т. е. рассматривать такое же приближение, как при выводе уравнений Буссинеска для гравитационно-капиллярных волн (§ 5), то нетрудно прийти к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\frac{H_0}{4\pi n_0 m} \nabla H, \quad (7.24)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \text{div} (H\mathbf{u}) + 2\delta_e^2 H_0 \Delta \text{div} \mathbf{u} = 0, \quad (7.25)$$

где  $\delta_e$  определено в (7.22). После подстановки  $\mathbf{u} = \nabla \phi$  эти уравнения принимают точно такой же вид, как и уравнения для гравитационных волн в неглубокой воде в приближении Буссинеска (см. (5.17), (5.18)). При этом

малые параметры  $\varepsilon$ ,  $\mu$  (5.1) имеют здесь вид

$$\varepsilon = \frac{\delta_e}{c}, \quad \mu = \frac{H-H_0}{H_0}. \quad (7.26)$$

Сходство основных уравнений позволяет говорить об аналогии между гравитационными волнами в жидкости и волнами в плазме (впервые это было отмечено в [19—20]).

Рассмотрим теперь косые волны. При этом мы будем считать движение одномерным, так чтобы параметр дисперсии (7.20) был постоянным. Таким образом, все величины будут функциями только  $x$ ,  $t$ .

Удобно ввести вместо  $x$  координату Лагранжа  $x'$ , которая определяется как координата частицы в какой-нибудь фиксированный момент времени  $t_0$ :  $x = x(t, x')$ ,  $x(t_0, x') = x'$ .

Тогда можно написать:

$$u_x = \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)_{x'}. \quad (7.27)$$

Обозначая вторую частную производную через

$$N = \left( \frac{\partial x}{\partial x'} \right)_t, \quad \left( \frac{\partial N}{\partial t} \right)_{x'} = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x'} \right)_t, \quad (7.28)$$

получаем соотношения, определяющие переход к новым независимым переменным

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_x = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{x'} - \frac{u_x}{N} \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)_t, \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_t = \frac{1}{N} \left( \frac{\partial}{\partial x'} \right)_t. \quad (7.29)$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt} \equiv \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_x + u_x \left( \frac{\partial}{\partial x} \right)_t = \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_{x'}. \quad (7.30)$$

Используя (7.28), (7.29), можно привести уравнение (7.12) к виду  $\partial(nN)/\partial t = 0$ , откуда вытекает, что  $N = n_0(x')/n(x', t)$ , где  $n_0(x')$  есть плотность в момент времени  $t_0$ , когда  $x = x'$ . Не нарушая общности, всегда можно считать, что в момент  $t_0$  система находилась в невозмущенном состоянии с постоянной плотностью  $n_0$ .

Таким образом, можно написать

$$N = n_0/n(x', t). \quad (7.31)$$

Уравнения (7.8), (7.10), (7.11) в лагранжевых координатах принимают вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{1}{8\pi n_0 m} \frac{\partial}{\partial x'} (H_z^2 + H_y^2),$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{H_x}{4\pi n_0 m} \frac{\partial}{\partial x'} H_y, \quad (7.32)$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{H_x}{4\pi n_0 m} \frac{\partial H_z}{\partial x'},$$

$$\frac{\partial (NH_y)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( u_y H_x + \frac{m_i c}{e} \frac{\partial u_z}{\partial t} - \frac{m_e c}{c} \frac{\partial v_{ez}}{\partial t} \right), \quad (7.33)$$

$$\frac{\partial (NH_z)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x'} \left( u_z H_x - \frac{m_i c}{e} \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{m_e c}{e} \frac{\partial v_{ey}}{\partial t} \right),$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x'} = -\frac{4\pi n_0 e}{c} \frac{m}{m_i} (u_y - v_{ey}), \quad (7.34)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x'} = -\frac{4\pi n_0 e}{c} \frac{m}{m_i} (u_z - v_{ez}), \quad (7.35)$$

$$H_x = \text{const}$$

(последнее вытекает из уравнения  $\text{div } \mathbf{H} = 0$ ). Простыми преобразованиями из этих уравнений можно исключить все скорости; после этого будем иметь (в дальнейшем опускаем штрихи при  $x$ ) с точностью до членов порядка  $m_e/m_i$ :

$$\frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = -\frac{1}{8\pi n_0 m} \frac{\partial}{\partial x^2} (H_y^2 + H_z^2), \quad (7.36)$$

$$\frac{\partial^2 (NH_y)}{\partial t^2} = c_A^2 \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{c^2}{\omega_{0e}^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2} + \frac{H_0 c}{4\pi n_0 e} \cos \alpha \frac{\partial H_z}{\partial t} \right) \quad (7.37)$$

и

$$\frac{\partial^2 (NH_z)}{\partial t^2} = c_A^2 \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{c^2}{\omega_{0e}^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2} - \frac{H_0 c}{4\pi n_0 e} \cos \alpha \frac{\partial H_y}{\partial t} \right), \quad (7.38)$$

где  $H_0$  — невозмущенное магнитное поле, составляющее угол  $\alpha$  с направлением распространения волны, т. е. осью  $x$ . (При получении (7.36) мы воспользовались соотношением  $\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial u_x}{\partial x}$ .)

Рассмотрим теперь, что получается из уравнений (7.37), (7.38) в том приближении, которое приводит к уравнениям Буссинеска. Введем малые параметры

$$\varepsilon = \frac{\beta}{c_A^2} \ll 1, \quad \mu = \frac{H_z - H_0 \sin \alpha}{H_0} \ll 1 \quad (7.39)$$

и ограничимся членами второго порядка по этим величинам. В первом приближении по параметрам (7.39) мы получим линейные уравнения, приводящие к дисперсионным формулам (7.17).

В случае магнитозвуковой ветви (исследованием которой мы здесь ограничимся) нетрудно проверить, что в первом приближении  $H_y = 0$ . Следовательно,  $H_y$  — величина второго порядка по отношению к величинам (7.39) и ее можно сразу определить из (7.37), если заменить  $\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2}$  на  $\frac{1}{c_A^2} \frac{\partial^2 H_y}{\partial t^2}$ . Ограничиваясь членами

наинизшего порядка малости в (7.37), будем иметь

$$H_y = \frac{H_0 c}{4\pi n_0 e c_A^2} \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (7.40)$$

Подставляя это в (7.38), получаем

$$\frac{\partial^2 (NH_z)}{\partial t^2} = c_A^2 \cos^2 \alpha \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{2\beta}{c_A} \frac{\partial^4 H_z}{\partial x^2 \partial t^2}, \quad (7.41)$$

где  $\beta$  — параметр дисперсии, определенный формулой (7.20).

Соотношения (7.36), (7.41) можно рассматривать как полную систему уравнений в лагранжевых координатах

натах с точностью до членов второго порядка по параметрам (7.39). Если перейти от  $N$ ,  $H_z$  к соответствующим возмущениям

$$N=1+\delta N, \quad H_z=H_0 \sin \alpha+h, \quad (7.42)$$

то система (7.36), (7.41) сводится с принятой точностью к одному уравнению [21]

$$h_{tt}-c_A^2 h_{xx}-\frac{\sin \alpha}{H_0}\left[(h^2)_{tt}+\frac{c_A^2}{2}(h^2)_{xx}\right]-\frac{2\beta}{c_A} h_{ttxx}=0. \quad (7.43)$$

При  $\alpha=\pi/2$  это уравнение можно также получить из уравнений Буссинеска (7.25), если перейти в последних к лагранжевым координатам.

В линейном приближении из (7.43) следует дисперсионное уравнение (7.19).

### § 8. Нелинейные электромагнитные волны в изотропных диэлектриках

В рассматриваемом случае следует исходить из уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{\mathcal{H}}=\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}}=-\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t}, \quad (8.1)$$

$$\vec{\mathcal{D}}=\vec{\mathcal{E}}+4\pi\vec{\mathcal{P}}, \quad (8.2)$$

или после исключения  $\vec{\mathcal{H}}$

$$\vec{\mathcal{D}}_{tt}-c^2 \Delta \vec{\mathcal{E}}+c^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\mathcal{E}}=0, \quad \operatorname{div} \vec{\mathcal{P}}=0. \quad (8.3)$$

При этом, вообще говоря, вектор поляризации  $\vec{\mathcal{P}}(\mathbf{r}, t)$  зависит (нелинейным образом) от значений напряженности электрического поля  $\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t')$  при всех значениях времени  $t' < t$  (пространственной дисперсией для простоты пренебрегаем).

Будем предполагать, что электромагнитное поле является квазимонохроматическим, т. е.

$$\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t}+\mathbf{E}^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t}\right], \quad (8.4)$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\mathbf{r}, t)=\frac{1}{2}\left[\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t}+\mathbf{H}^*(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t}\right],$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$  медленно изменяются со временем  $t$  (по сравнению с фазовым множителем  $e^{-i\omega t}$ ).

Если при этом физические процессы, приводящие к нелинейности, протекают достаточно быстро по сравнению со временем изменения амплитуд в (8.4), то нелинейную часть вектора поляризации  $\vec{\mathcal{P}}_{\text{нл}}$  можно представить в виде разложения по степеням электрического поля. Первый не исчезающий член такого ряда, описывающий нелинейные эффекты на основной частоте  $\omega$ , имеет вид

$$\vec{\mathcal{P}}_{\text{нл}}(\omega)=A \vec{\mathcal{E}}(\vec{\mathcal{E}} \vec{\mathcal{E}}^*)+B \vec{\mathcal{E}}^*(\vec{\mathcal{E}} \vec{\mathcal{E}}), \quad (8.5)$$

где  $A$  и  $B$  — некоторые параметры среды (зависящие от  $\omega$ ).

Простейшим механизмом нелинейности, приводящим к выражению (8.5), является оптический эффект Керра, заключающийся в ориентации анизотропных молекул в поле волны\*). В этом случае можно показать, что между коэффициентами  $A$  и  $B$  в формуле (8.5) имеет место соотношение [22, 23]

$$B=3A. \quad (8.6)$$

Нетрудно убедиться, что в случае, когда имеет место (8.5), уравнениям Максвелла удовлетворяет решение вида (8.4), где

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}, \quad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (8.7)$$

и амплитуды  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{H}_0$  не зависят от времени.

Полагая в (8.3)

$$\vec{\mathcal{D}}=\varepsilon_0 \vec{\mathcal{E}}+4\pi\vec{\mathcal{P}}_{\text{нл}}, \quad (8.8)$$

где  $\varepsilon_0(\omega)$  — диэлектрическая проницаемость в линейном приближении, получим

$$\left(\varepsilon_0-\frac{c^2 k^2}{\omega^2}\right) E_i+\frac{c^2(\mathbf{k}\mathbf{E})}{\omega^2} k_i+\left. +A(\mathbf{E}\mathbf{E}^*) E_i+B(\mathbf{E}\mathbf{E}) E_i^*=0 \quad (i=x, y, z). \quad (8.9)\right.$$

\*) Характерное время поворота молекул весьма мало, так что выражение (8.5) в случае эффекта Керра имеет большую область применимости.

Для линейно поляризованной волны, распространяющейся, скажем, вдоль оси  $z$ , имеем ( $E = E_x$ )

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_0(\omega) + (A + B) |E|^2. \quad (8.10)$$

Таким образом, нелинейная добавка в показателе преломления  $n = kc/\omega$  для линейно поляризованной волны равна

$$\delta n_i^{(нл)} \approx \frac{(A + B)}{2n_0} |E|^2. \quad (8.11)$$

Здесь  $n_0 = \sqrt{\varepsilon_0}$  — показатель преломления в линейном приближении. Для волны с круговой поляризацией получаем

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_0 + A |E|^2, \quad (8.12)$$

$$\delta n_c^{(нл)} \approx \frac{A}{2n_0} |E|^2. \quad (8.13)$$

Таким образом, при  $B \neq 0$  нелинейные эффекты приводят к различным показателям преломления для волн с линейной и круговой поляризациями. Если, в частности, нелинейность обусловлена эффектом Керра, т. е. имеет место соотношение (8.6), то отношение нелинейных добавок показателя преломления для волн с линейной и круговой поляризацией равно четырем.

Эллиптически поляризованные волны с постоянными во времени амплитудами, вообще говоря, не удовлетворяют нелинейному уравнению (8.3), т. е. эллипс поляризации должен поворачиваться. Это явление наблюдалось экспериментально (подробнее см. в [11]).

Кроме эффекта Керра существует целый ряд других процессов, приводящих к нелинейным членам в выражении для вектора поляризации  $\vec{P}$ . Среди них — электрострикция (изменение плотности среды под действием сил давления электромагнитного поля), ионизация среды полем волны и т. д. Остановимся здесь подробнее на электрострикции.

В этом случае нелинейный показатель преломления не может зависеть от типа поляризации. Поэтому в выражении (8.5)

$$B = 0. \quad (8.14)$$

Стрикционные эффекты, в частности, могут играть преобладающую роль в изотропной достаточно разреженной плазме [9]. Диэлектрическая проницаемость последней определяется, как известно, выражением

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}, \quad \omega_{0e}^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m_e}. \quad (8.15)$$

В сильном высокочастотном поле (8.4) на каждую частицу действует средняя сила, вызванная давлением волны и равная  $-\nabla\Phi$  где [24, 25],

$$\Phi = \frac{e^2}{4m\omega^2} |E(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (8.16)$$

Если размеры неоднородности поля  $E(\mathbf{r}, t)$  много больше дебаевского радиуса, то вследствие (8.16)

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{\Phi}{T_e + T_i}\right) = N_0 \exp\left(-\frac{|E|^2}{E_0^2}\right), \quad (8.17)$$

$$E_0^2 = \frac{4m\omega^2(T_e + T_i)}{e^2}.$$

Таким образом, нелинейные стрикционные эффекты становятся большими, когда напряженность поля близка к  $E_0$ . При  $|E|/E_0 \ll 1$  получаем

$$\delta n^{(нл)} = \frac{4e^4 N_0 |E|^2}{2n_0 m^2 \omega^4 (T_e + T_i)}. \quad (8.18)$$

Мы пренебрегли диссипативными процессами. Если последние становятся существенными, то в плазме (а также и в других средах) появляется ряд дополнительных механизмов нелинейности, рассмотренных, например, в [17, 26, 9].

Следует отметить, что если нелинейные эффекты определяются электрострикцией, справедливость выражения (8.5) весьма ограничена: им можно пользоваться только в том случае, когда изменение плотности среды и соответственно амплитуд поля происходит со скоростью, значительно меньшей скорости звука. В общем случае надо рассматривать уравнения Максвелла совместно с уравнениями гидродинамики или теории упругости. Соответствующие нелинейные волны можно называть электроакустическими.

Рассмотрим, например, общие уравнения, описывающие электроакустические волны в жидкостях. В этом случае состояние среды описывается уравнениями гидродинамики

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (8.19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \mathbf{f}_E, \quad (8.20)$$

где  $\mathbf{f}_E$  — плотность сил давления электромагнитного поля, которую в соответствии с результатами работы [27] можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_E &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \nabla \left( |\vec{\mathcal{E}}|^2 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) - |\vec{\mathcal{E}}|^2 \nabla \varepsilon \right\} = \\ &= \frac{1}{16\pi} \left\{ \nabla \left( |E|^2 \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) - |E|^2 \nabla \varepsilon \right\}, \quad (8.21) \end{aligned}$$

где  $\varepsilon = \varepsilon(\omega, \rho)$  — диэлектрическая проницаемость жидкости. Для газов  $\varepsilon(\omega, \rho)$  есть линейная функция плотности, и можно написать (см., например, [28])

$$\varepsilon(\omega, \rho) = 1 + \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}. \quad (8.22)$$

Выражение для силы  $\mathbf{f}_E$  принимает при этом более простой вид \*)

$$\mathbf{f}_E = \frac{\varepsilon - 1}{16\pi} \nabla |E|^2. \quad (8.23)$$

Перейдем теперь к обсуждению уравнений Максвелла, которые сводятся к уравнению (8.3) и соотношению, связывающему индукцию  $\mathcal{D}$  с напряженностью поля  $\mathcal{E}$ . Поскольку свойства среды медленно меняются со временем (как и плотность  $\rho(t)$ ), то последнее соотношение

\*) В частности, для изотропной плазмы, где  $\varepsilon$  определяется выражением (8.15), сила, действующая на единицу объема, может быть представлена в виде

$$\mathbf{f}_E = -\frac{Ne^2}{4m\omega^2} \nabla |E|^2,$$

что согласуется с формулой (8.16).

должно иметь следующий общий вид:

$$\mathcal{D}(t) = \mathcal{E}(t) + \int_0^\infty f(\tau, t) \mathcal{E}(t - \tau) d\tau, \quad (8.24)$$

где функция  $f(\tau, t)$  определяет диэлектрическую проницаемость нестационарной среды  $\tilde{\varepsilon}(\omega, t)$ , введенную Л. П. Питаевским [27]

$$\tilde{\varepsilon}(\omega, t) = 1 + \int_0^\infty f(\tau, t) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (8.25)$$

(При этом предполагается, что  $\partial f / \partial t \ll \partial f / \partial \tau$ .) Как показано в цитированной выше работе [27], функция  $\tilde{\varepsilon}(\omega, t)$  не совпадает, вообще говоря, с диэлектрической проницаемостью стационарной среды  $\varepsilon(\omega, \rho)$ , в которую подставлено  $\rho = \rho(t)$ . Общее соотношение между этими двумя величинами имеет вид \*)

$$\tilde{\varepsilon}(\omega, t) = \varepsilon(\omega, \rho) + \frac{i}{2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \omega \partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (8.26)$$

(если, разумеется, свойства среды достаточно медленно изменяются со временем  $t$ ).

Из (8.24), (8.25) и (8.4) следует, что

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[ -i\omega \tilde{\varepsilon} \mathbf{E} + \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{\partial(\omega \tilde{\varepsilon})}{\partial \omega} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right] e^{-i\omega t} + \text{к.с.},$$

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[ -i\omega \mathbf{H} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right] e^{-i\omega t} + \text{к.с.} \quad (8.27)$$

Из (8.27), (8.26), уравнений Максвелла (8.1) и гидродинамики (8.19) — (8.21) вытекает закон сохранения полной энергии среды и поля в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{16\pi} \left[ \frac{\partial(\omega \varepsilon)}{\partial \omega} |E|^2 + |H|^2 \right] + \frac{\rho v^2}{2} + \rho u \right\} = \\ = -\operatorname{div} \left\{ \frac{c}{4\pi} (E^* H) + [E H^*] + \right. \\ \left. + \mathbf{v} \left( \frac{\rho v^2}{2} + p + \rho u + \frac{|E|^2}{16\pi} \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right) \right\}, \quad (8.28) \end{aligned}$$

\*) При учете пространственной дисперсии выражение (8.26) видоизменяется следующим образом [29]:

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon(\omega, \rho) + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \omega \partial t} - \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial k_\alpha \partial x_\alpha} \right).$$

где  $u$  — внутренняя энергия среды, приходящаяся на единицу массы \*).

При исследовании электроакустических процессов в дальнейшем мы будем предполагать, что отклонение плотности  $\rho$  от равновесного значения  $\rho_0$  мало, т. е.

$$(\rho - \rho_0)/\rho_0 \ll 1. \quad (8.29)$$

В этом случае можно написать

$$\varepsilon(\omega, \rho) = \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_0} (\rho - \rho_0), \quad \varepsilon_0 = \varepsilon(\omega, \rho_0). \quad (8.30)$$

Учитывая при этом, что

$$\frac{\partial(\rho - \rho_0)}{\partial t} \ll \omega(\rho - \rho_0), \quad (8.31)$$

мы можем получить из приведенных выше соотношений следующее приближенное уравнение для амплитуды электрического поля  $E$ :

$$c^2(\Delta - \text{grad div}) E + i \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon_0)}{\partial \omega} \frac{\partial E}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2(\omega^2 \varepsilon_0)}{\partial \omega^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \omega^2 \left[ \varepsilon_0 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_0} (\rho - \rho_0) \right] E = 0, \quad (8.32)$$

где опущены члены более высокого порядка малости, чем  $\omega^2(\rho - \rho_0)E/\rho_0$ . Применение этого уравнения к плазме рассматривается в § 30 и в Приложении Б.

## § 9. Звуковые волны с дисперсией

Одной из наиболее распространенных причин дисперсии звука в газах и жидкостях являются релаксационные процессы, возникающие в волне при отклонениях от термодинамического равновесия [30]. В качестве примеров таких процессов можно привести перераспределение энергии между различными степенями свободы частиц среды, процессы диссоциации и рекомбинации, химические реакции и т. д. \*\*).

\*) При выводе (8.28) предполагается, что диссипативные процессы отсутствуют, так что  $du = TdS + \frac{p}{\rho^2} d\rho = \frac{p}{\rho^2} d\rho$ . Соответственно все производные по  $\rho$  в этом разделе понимаются при постоянной энтропии  $S$ .

\*\*) Более подробно об этом см., например, в [31].

Отвлекаясь от диссипации, не связанной с релаксационными процессами, мы можем принять в качестве исходных уравнения гидродинамики

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{1}{\rho} \nabla p, \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \mathbf{v} = 0,$$

которые должны быть дополнены выражением, определяющим вариацию давления.

При отсутствии релаксационных процессов малое изменение давления определяется соотношением

$$\delta p = c_s^2 \delta \rho, \quad (9.2)$$

где  $c_s$  — скорость звука при отсутствии диссипации

$$c_s^2 = \left( \frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_S \quad (9.3)$$

( $S$  — энтропия).

Если при изменениях плотности протекает релаксационный процесс, то связь между  $\delta p$  и  $\delta \rho$  становится уже нелокальной во времени, так как следует учитывать зависимость  $\delta p(t)$  от вариаций плотности в предыдущие моменты времени. Это может быть описано соотношением

$$\delta p(t) = a(\rho, S) \delta \rho + b(\rho, S) \int_0^\infty \delta \rho(t-t') \varphi\left(\frac{t'}{\tau}\right) \frac{dt'}{\tau}, \quad (9.4)$$

где  $\varphi(t/\tau)$  — функция, определяющая релаксационный процесс. Для удобства мы ввели некоторое эффективное время релаксации, определяющее область значений  $t$ , где запаздывание существенно (т. е.  $\varphi(t/\tau)$  быстро исчезает при  $t > \tau$ ). Для определенности нормируем функцию  $\varphi(t/\tau)$  следующим условием:

$$\int_0^\infty \varphi(\xi) d\xi = 1. \quad (9.5)$$

Для выяснения физического смысла коэффициентов  $a$  и  $b$  применим (9.4) к двум предельным случаям: большой и малой частоты звуковой волны. В первом случае ( $\omega\tau \gg 1$ ) интегральный член исчезает и получается  $\delta p = a \delta \rho$ , так что величина  $a$  имеет смысл квадрата

скорости высокочастотного «звука»

$$c_{\infty}^2 \equiv \left( \frac{\delta p}{\delta \rho} \right)_{\omega \tau \rightarrow \infty} = a.$$

В противоположном предельном случае из-под знака интеграла можно вынести медленно меняющуюся величину  $\delta\rho$ . Учитывая при этом (9.5), получаем  $\delta\rho = (a+b)\delta\rho$ , т. е.

$$c_0 \equiv \left( \frac{\delta p}{\delta \rho} \right)_{\omega \tau \rightarrow 0} = a + b,$$

$$b = c_0^2 - c_{\infty}^2.$$

Очевидно, что скорость низкочастотного «звука»  $c_0$  совпадает с величиной  $c_S$ , определенной в (9.3). Итак, вместо (9.4) можно написать

$$\delta p(t) = c_{\infty}^2 \delta\rho(t) - (c_{\infty}^2 - c_0^2) \int_0^{\infty} \delta\rho(t-t') \varphi\left(\frac{t'}{\tau}\right) \frac{dt'}{\tau}, \quad (9.6)$$

где  $c_0$  и  $c_{\infty}$ , разумеется, зависят от равновесных значений термодинамических величин (например, от  $\rho$  и  $S$ ). При этом всегда

$$c_{\infty}^2 > c_0^2. \quad (9.7)$$

Это соотношение является следствием принципа Ле Шателье (см. [1], § 78).

Переходя в (9.6) к компонентам Фурье, получаем

$$\delta p(\omega) = [c_{\infty}^2 - (c_{\infty}^2 - c_0^2) \chi(\omega)] \delta\rho(\omega), \quad (9.8)$$

$$\chi(\omega) = \int_0^{\infty} d\xi \varphi(\xi) \exp(i\omega\tau\xi). \quad (9.9)$$

Из (9.8) следует выражение для комплексной «скорости звука» при частоте  $\omega$ :

$$c^2(\omega) \equiv \frac{\delta p(\omega)}{\delta\rho(\omega)} = c_{\infty}^2 - (c_{\infty}^2 - c_0^2) \chi(\omega). \quad (9.10)$$

Формула (9.10) полностью определяет дисперсию и диссипацию «звука», обусловленные данным релаксационным процессом\*. Из нее, в частности, вытекает связь

\*) В случае, когда отклонение от термодинамического равновесия характеризуется одной величиной  $\lambda$ , удовлетворяющей соотношению  $\partial\lambda/\partial t = -(\lambda - \lambda_0)/\tau$ , функция  $\varphi(t/\tau)$ , как нетрудно убедиться, имеет вид  $\varphi(t/\tau) = \exp(-t/\tau)$ . Соответственно из (9.10) в этом случае получается известное соотношение простейшего варианта релаксационной теории  $k^2/\omega^2 = (1 - i\omega\tau)/(c_0^2 - i c_{\infty}^2 \omega\tau)$  (см. [1], § 78).

между действительной и мнимой частями величины  $c^2(\omega)$ , аналогичная дисперсионным соотношениям Крамерса — Кронига для диэлектрической проницаемости [28], поскольку функция  $\chi(\omega)$ , согласно формуле (9.9), является аналитической в верхней полуплоскости. Далее, рассуждая так же, как и в [28] (§ 62), можно убедиться, что  $\chi(\omega)$  не принимает вещественных значений ни в какой конечной точке верхней полуплоскости, за исключением точек мнимой оси; на последней  $\chi(\omega)$  монотонно убывает от значения  $\chi(0) = 1$  до  $\chi(i\infty) = 0$ . Учитывая (9.7), заключаем отсюда, что на мнимой оси величина  $c^2(\omega)$  монотонно возрастает от  $c_0^2$  до  $c_{\infty}^2$ . Таким образом,  $c^2(\omega) \neq 0$  в верхней полуплоскости и, следовательно, дисперсионные соотношения можно написать не только для  $c^2(\omega)$ , но и для  $c(\omega)$ , а также для величины  $1/c(\omega)$ .\*

Рассмотрим теперь подробнее случай, когда время релаксации достаточно мало по сравнению с характерным периодом волны. Тогда величину  $\delta\rho(t-t')$  в формуле (9.4) можно разложить по степеням  $t'$ . Ограничиваясь двумя членами разложения, получаем

$$\delta p = c_0^2 \delta\rho + (c_{\infty}^2 - c_0^2) \left[ \delta\dot{\rho}\tau \int_0^{\infty} \xi \varphi(\xi) d\xi - \frac{\delta\ddot{\rho}\tau^2}{2} \int_0^{\infty} \xi^2 \varphi(\xi) d\xi \right]$$

$$\left( \dot{\rho} = \frac{\partial\rho}{\partial t} \right). \quad (9.11)$$

Предполагая, что величины  $\delta\dot{\rho}\tau/\rho$ ,  $\delta\ddot{\rho}\tau^2/\rho^2$  являются достаточно малыми, мы можем с точностью до членов высшего порядка малости заменить  $\delta\rho$  на  $c_0^2 \Delta\rho$  (поскольку в первом приближении  $\delta\rho$  удовлетворяет волновому уравнению  $\delta\ddot{\rho} - c_0^2 \Delta\rho = 0$ ) и  $\delta\dot{\rho}$  на  $-\rho \operatorname{div} \mathbf{v}$  (согласно уравнению непрерывности). Подставляя это в (9.11) и используя (9.1), получаем с принятой степенью точности

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{c_0^2(\rho)}{\rho} \nabla \rho + \zeta_r \frac{\nabla(\nabla \mathbf{v})}{\rho_0} + \frac{2c_0 \beta}{\rho_0} \Delta \nabla \rho, \quad (9.12)$$

$$\rho_t + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (9.13)$$

\*) Дисперсионные соотношения для звука в общем виде, не зависящем от механизма дисперсии, получены впервые в [32]. В этой работе рассматривается функция  $1/c(\omega)$ .

где величины  $\zeta_r$  и  $\beta$  определяются выражениями

$$\zeta_r = \rho_0 (c_\infty^2 - c_0^2) \tau \int_0^\infty \xi \varphi(\xi) d\xi, \quad (9.14)$$

$$\beta = \frac{c_0 (c_\infty^2 - c_0^2) \tau^2}{2} \int_0^\infty \xi^2 \varphi(\xi) d\xi, \quad (9.15)$$

Сравнивая (9.12) с уравнением Навье — Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \eta \frac{\Delta \mathbf{v}}{\rho_0} + \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \frac{\nabla(\nabla \mathbf{v})}{\rho_0}, \quad (9.16)$$

где  $\eta$  и  $\zeta$  — коэффициенты первой и второй вязкости соответственно, мы видим, что величина  $\zeta_r$  в уравнении (9.12) имеет смысл коэффициента второй вязкости, обусловленной релаксационным процессом. Что касается члена с третьими производными в уравнении (9.12), то он, как видно из следующего ниже уравнения (9.17), определяет дисперсионную поправку к вещественной части частоты звука (в связи с этим обратим внимание на то, что по форме он совпадает с дисперсионным членом в уравнениях Буссинеска (6.12), (5.23)).

Линеаризуя уравнения (9.12), (9.13), получаем закон дисперсии для звука в следующем виде:

$$\omega = c_0 k - \beta k^3 - i \mu k^2, \quad (9.17)$$

где величина

$$\mu = \frac{1}{2\rho} \zeta_r \quad (9.18)$$

есть коэффициент релаксационного затухания звука, а  $\beta$  — параметр «вещественной» дисперсии, определенный формулой (9.15).

## Глава III

### НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ

#### § 10. Стационарные решения уравнений Буссинеска

Уравнения линейного приближения (без диссипативных членов), рассматривавшиеся в гл. I, всегда имеют решения в виде так называемых стационарных волн, распространяющихся с постоянной скоростью без деформации профиля. Все величины, описывающие такую волну, зависят только от  $x - Vt$  (где  $x$  — координата в направлении распространения,  $V = \omega/k$ ).

Нелинейные коэффициенты приводят, вообще говоря, к искажению профиля волны. В газодинамике, например, благодаря нелинейным эффектам крутизна профиля увеличивается до тех пор, пока не станут существенными диссипативные эффекты. Последние приводят к некоторому расплыванию профиля и в конечном итоге уравновешивают его нелинейное укручение.

Благодаря этому уравнения Навье — Стокса, в отличие от уравнений Эйлера, имеют непрерывные стационарные решения, где все величины зависят только от  $x - Vt$ . Эти решения описывают стационарные ударные волны. Для сред без диссипации, но с дисперсией ситуация в известной мере аналогична, так как зависимость фазовой скорости возмущений от длины волны также приводит к расплыванию профиля, которое может компенсировать нелинейное укручение. Таким образом, в диспергирующих средах возможно распространение нелинейных стационарных волн. Структура таких волн при отсутствии диссипативных эффектов, однако, существенно отличается от ударных, поскольку дисперсия в этом случае не приводит к каким-либо необратимым процессам. Благодаря этому нелинейные стационарные волны в случае «действительной» дисперсии могут быть либо периодическими, либо уединенными.

В качестве типичного примера рассмотрим нелинейные стационарные решения уравнений Буссинеска, опи-



сывающих, как мы видели в предыдущей главе, нелинейные волны в ряде диспергирующих сред — плазме, на поверхности жидкости небольшой глубины и др. Резюмируя рассмотренные в §§ 5—7 примеры, запишем эти уравнения в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \nabla \rho + \frac{2c_0 \beta}{\rho_0} \nabla \Delta \rho = 0, \quad (10.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

где  $\rho$  — обобщенная «плотность» (для волн на поверхности жидкости — это глубина, для ионно-звуковых волн в плазме без магнитного поля — обычная плотность, для волн, распространяющихся поперек магнитного поля в разреженной плазме, — напряженность магнитного поля),  $c(\rho)$  — обобщенная скорость «звука» при плотности  $\rho$  в пренебрежении дисперсией. Величина  $\beta$  — параметр дисперсии; закон дисперсии для достаточно длинных волн малой амплитуды, следующий из (10.1), имеет вид

$$\omega = c_0 k - \beta k^3 + \dots \quad (10.2)$$

Величины  $c_0$  и  $\beta$  определяются в упомянутых выше случаях формулами (5.2) и (5.31), (6.9) и (7.20).

В рассмотренных в главе II случаях зависимость  $c(\rho)$  определялась «адиабатической» формулой Пуассона

$$c^2(\rho) = c_0^2 (\rho/\rho_0)^{\gamma-1}, \quad (10.3)$$

где  $\rho_0$  — невозмущенная «плотность», а  $\gamma$  — эффективный показатель «адиабаты». Формула (10.3) будет предполагаться справедливой и в дальнейшем.

Если теперь ввести в уравнения (10.1) потенциал скорости  $\mathbf{v} = \nabla \varphi$  и исключить из них плотность (это можно сделать, ограничиваясь только членами второго порядка малости, поскольку сами уравнения Буссинеска были получены с этой степенью точности), то получается следующее уравнение для потенциала:

$$\varphi_{tt} - c_0^2 \Delta \varphi + \nabla \varphi \nabla \varphi_t + \gamma \Delta \varphi \varphi_t - 2c_0 \beta \Delta^2 \varphi = 0. \quad (10.4)$$

Рассмотрим теперь стационарные решения этого уравнения. Полагая  $\varphi = \varphi(x - Vt)$ , получим

$$(v^2 - c_0^2) \varphi'' - (\gamma + 1) V \varphi' \varphi' - 2c_0 \beta \varphi''' = 0.$$

Скорость стационарных волн должна быть достаточно близкой к  $c_0$ , если их амплитуда мала (проще всего в этом убедиться, рассматривая выражения для скорости  $V$ , полученные ниже). Поэтому величину  $V - c_0$  можно рассматривать как малую первого порядка. Ограничиваясь членами второго порядка малости и вводя новую независимую переменную

$$u = \frac{\gamma + 1}{2} \varphi',$$

получим окончательно

$$\beta u''' + uu' - (V - c_0) u' = 0. \quad (10.5)$$

Для дальнейшего полезно иметь в виду, что уравнение (10.5) инвариантно относительно преобразования

$$u \rightarrow u + \text{const}, \quad V \rightarrow V + \text{const}, \quad (10.6)$$

которое означает просто переход к новой системе отсчета.

Интегрируя уравнение (10.5) два раза, мы можем привести его к форме

$$3\beta u'^2 = (b_1 - u)(b_2 - u)(b_3 - u), \quad (10.7)$$

где  $b_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) — постоянные, являющиеся некоторыми комбинациями скорости  $V$  и двух констант интегрирования. При этом связь между скоростью  $V$  и  $b_i$  имеет вид

$$V = \frac{1}{3} (b_1 + b_2 + b_3) + c_0. \quad (10.8)$$

Рассмотрим сначала случай, когда  $\beta > 0$ . Из условия ограниченности решения следует, что все  $b_i$  должны быть вещественными (так что можно считать  $b_1 > b_2 \geq b_3$ ), причем  $b_2 \leq u \leq b_1$ .

Если  $b_2 = b_3$ , то решение уравнения (10.7) имеет вид уединенной волны (рис. 10.1), или, как мы будем говорить в дальнейшем, «солитона»:

$$u(\xi) = \frac{a}{\text{ch}^2(\sqrt{a/12\beta}\xi)} + b_3 \quad (10.9)$$

с амплитудой  $a = b_1 - b_2$ , шириной порядка  $\sqrt{12\beta/a}$  (т. е. обратно пропорциональной корню из амплитуды) и

скоростью

$$V = c_0 + \frac{a}{3} + b_3. \quad (10.10)$$

Величина  $b_3$  определяет величину поля при  $\xi \rightarrow \pm \infty$

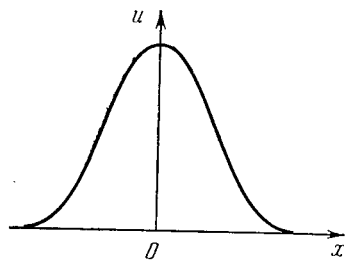


Рис. 10.1. Форма солитона при  $\beta > 0$ .

(согласно (10.6) всегда можно перейти к такой системе отсчета, где  $b_3=0$ ).

При  $b_3 < b_2$  решение уравнения (10.7) представляет собой периодическую волну и описывается выражением

$$u(\xi) = \frac{2b}{s^2} \operatorname{dn}^2(z; s) + b_3, \quad (10.11)$$

где  $\operatorname{dn}(z, s)$  — эллиптическая функция Якоби с модулем  $s$ ,  $\operatorname{dn}^2(z, s) = 1 - s^2 \operatorname{sn}^2(z, s)$  ( $\operatorname{sn}(z, s)$  — эллиптический синус),

$$b = \frac{b_1 - b_2}{2}, \quad s^2 = \frac{b_1 - b_2}{b_1 - b_3}, \quad z = \sqrt{\frac{b}{6\beta}} \frac{\xi}{s}. \quad (10.12)$$

Величина  $b$  при этом является амплитудой волны. Поскольку функция  $\operatorname{dn}^2 z$  имеет период, равный  $2K(s)$ , где  $K(s)$  — полный эллиптический интеграл первого рода, то длина волны периодического решения (10.11) определяется соотношением

$$\lambda = 2 \left( \frac{6\beta}{b} \right)^{1/2} s K(s), \quad (10.13)$$

а среднее значение  $\bar{u} = \lambda^{-1} \int_0^\lambda u(\xi) d\xi$  и скорость выражаются следующим образом:

$$\bar{u} = \frac{2b}{s^2} \frac{E(s)}{K(s)} + b_3, \quad V = c_0 + \frac{2a(2-s^2)}{3s^2} + b_3 \quad (10.14)$$

( $E(s)$  — полный эллиптический интеграл второго рода).

Параметр  $s$  ( $0 < s < 1$ ) может служить мерой нелинейности волны. При  $s \ll 1$  эллиптические функции близки

к тригонометрическим. Поэтому при  $s \rightarrow 0$ , выражение (10.11) переходит в решение линеаризованных уравнений.

Из разложения

$$\operatorname{dn} z = \frac{\pi}{2K(s)} + \frac{2\pi}{K(s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{\pi n z}{K(s)},$$

$$q = \exp \left[ -\pi \frac{K(s')}{K(s)} \right], \quad s' = \sqrt{1-s^2}$$

следует, что при  $s \ll 1$  периодическое решение (10.11) принимает вид

$$u(\xi) = \bar{u} + b \left[ \cos k\xi + \frac{1}{8} s^2 \cos 2k\xi + O(s^4) \right], \quad (10.15)$$

где  $\bar{u}$  — среднее значение,  $b$  — амплитуда, определенная в (10.12),  $k=2\pi/\lambda$  — волновое число, связь которого с параметром  $s$  определяется соотношением (10.13) и при  $s \ll 1$  имеет вид \*)

$$\frac{2b}{3\beta k^2} = s^2 \left( 1 + \frac{s^2}{2} \right) + O(s^6). \quad (10.16)$$

Выражение для  $V$  при  $s^2 \ll 1$  следует из (10.14), (10.16):

$$V = c_0 + \bar{u} - \beta k^2 \left[ 1 - \frac{3}{32} s^4 + O(s^6) \right] =$$

$$= c_0 + \bar{u} - \beta k^2 \left[ 1 - \frac{b^2}{24\beta^2 k^4} + O(s^3) \right]. \quad (10.17)$$

При  $\bar{u}=0$  члены, не зависящие от амплитуды, приводят к выражению для фазовой скорости волны в линейном приближении (ср. с формулой (3.1)).

\*) Разложения эллиптических интегралов при  $s \ll 1$  имеют вид

$$K(s) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \frac{1}{4} s^2 + \frac{9}{64} s^4 + \dots \right),$$

$$E(s) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \frac{1}{4} s^2 - \frac{3}{64} s^4 + \dots \right).$$

В другом предельном случае, когда  $s \rightarrow 1$ , имеют место соотношения [33]

$$K(s) \approx \frac{1}{2} \ln \left( \frac{16}{1-s^2} \right) \rightarrow \infty, \quad \operatorname{dn} z \rightarrow \frac{1}{\operatorname{ch} z}. \quad (10.18)$$

Тогда из (10.13) следует, что длина волны стремится к бесконечности, а формула (10.11) переходит в (10.9).

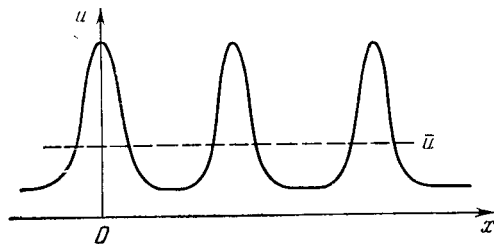


Рис. 10.2. Периодическая волна при значениях параметра  $s$ , близких к единице.

Таким образом, при  $s \rightarrow 1$ ,  $b = \text{const}$  периодическая волна асимптотически приближается к последовательности солитонов (рис. 10.2) с амплитудами  $a = 2b$  (относительно

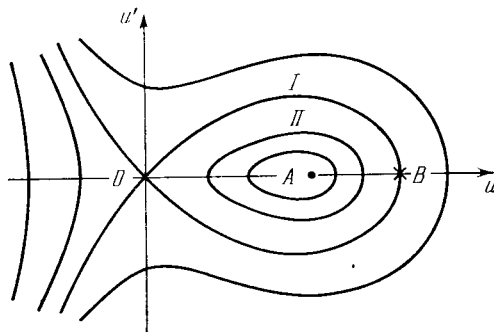


Рис. 10.3. Фазовые кривые для уравнения (10.7). Сепаратриса I отвечает солитону, а замкнутые кривые, расположенные внутри сепаратрисы — периодическим волнам.

уровня  $u = \bar{u}$ ). Расстояние между ними по порядку величины определяется формулой

$$\lambda = \sqrt{\frac{12\beta}{a} |\ln(1-s^2)|}. \quad (10.19)$$

Скорость распространения солитона всегда больше  $c_0$ . Для периодических волн малой амплитуды  $V < c_0$  (при  $\bar{u} = 0$ ).

Укажем, наконец, что на фазовой плоскости  $(u, u')$  интегральные кривые уравнения (10.7) имеют вид, изображенный на рис. 10.3. Точка O является седлом, A — центром. Фазовая кривая, отвечающая солитону, имеет вид I, (OB изображает амплитуду солитона), а периодическим волнам соответствуют кривые II; по мере уменьшения амплитуды они приближаются к центру.

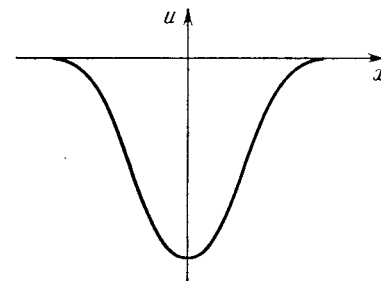


Рис. 10.4. Форма солитона при  $\beta < 0$ .

Все сказанное выше относилось к случаю, когда параметр дисперсии  $\beta$  положителен. При  $\beta < 0$  в специальном исследовании нет необходимости; если в уравнении (10.5) положить

$$\xi \rightarrow -\xi, \quad u \rightarrow -u, \quad V - c_0 \rightarrow -(V - c_0), \quad (10.20)$$

то оно перейдет в такое же уравнение, но с величиной  $\beta$  противоположного знака. Поэтому все формулы для отрицательных  $\beta$  получаются из приведенных выше, если там сделать замену (10.20). В частности, вместо положительных солитонов (рис. 10.1) в этом случае будут отрицательные солитоны (рис. 10.4). При этом их скорость меньше  $c_0$ , в то время как для периодических волн  $V > c_0$  (при  $\bar{u} = 0$ ).

Изложенная теория относилась к стационарным волнам небольшой амплитуды, когда можно ограничиться нелинейными членами второго порядка. Исследование волн большой амплитуды показывает, что общая качественная картина, рассмотренная выше, сохраняется и в этом случае. Новым важным эффектом, который нельзя получить, ограничиваясь членами второго порядка, является существование в ряде случаев критической амплитуды, выше которой волна не может оставаться стационарной. В следующем параграфе мы рассмотрим этот эффект на примере волн в разреженной плазме, распространяющихся поперек магнитного поля.

§ 11. Стационарные волны, распространяющиеся поперек магнитного поля в разреженной плазме [34—37, 3]

Будем исходить из основных уравнений § 7 в лагранжевых переменных (7.36) — (7.38). Полагая в них  $\alpha = \pi/2$ ,  $H_y = 0$ ,  $H_z = H(x-Vt)$ ,  $N = N(x-Vt)$  и интегрируя два раза, получим

$$\frac{c^2}{\omega_{0e}^2} \frac{d^2 H}{dx^2} - (H - H_0) + H \frac{H^2 - H_e^2}{2H_0^2 M^2} = 0, \quad (11.1)$$

$$N = \frac{n_0}{n} = 1 - \frac{H^2 - H_0^2}{H_0^2 M^2}. \quad (11.2)$$

Здесь  $H_0$  — постоянная интегрирования, имеющая смысл магнитного поля в невозмущенной плазме (где плотность  $n$  равна невозмущенному значению  $n_0$ ), а  $M$  — магнитное число Маха

$$M = \frac{V}{c_A}, \quad c_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n_0 m}}. \quad (11.3)$$

Уравнение (11.1) имеет наглядную механическую интерпретацию: оно описывает движение частицы (роль координаты играет  $H$ , а времени —  $x$ ), находящейся в силовом поле с потенциальной энергией

$$P(H) = \frac{(H - H_0)^2}{2} \left[ \frac{(H_0 + H)^2}{4H_0^2 M^2} - 1 \right]. \quad (11.4)$$

«Интеграл энергии» уравнения (11.1) имеет вид

$$\frac{c^2}{2\omega_{0e}^2} \left( \frac{dH}{dx} \right)^2 + P(H) = \text{const.} \quad (11.5)$$

Фазовые кривые этого уравнения изображены на рис. 11.1. Точки «равновесия», являющиеся корнями уравнения  $P'(H) = 0$ , определяются выражениями  $H_0$ ,  $H_{1,2} = -H_0(1 \mp \sqrt{(1+8M^2)/2})$ . В случае  $M > 1$  точка  $H_0$  будет седловой, а  $H_1, H_2$  — фокусами, при этом  $H_2 < H_0 < H_1$ . При  $M < 1$  седло находится в точке  $H_1$ , причем  $H_2 < H_1 < H_0$ .

Из всех кривых, изображенных на рис. 11.1, реализуются только траектории, лежащие справа от седловой

точки. Действительно, для остальных решений величина  $N$  в (11.2), являющаяся по своему смыслу положительной, принимает отрицательные значения (в этом нетрудно убедиться, подставляя  $H = H_2$  в (11.2)). При этом сепаратрисы изображают солитоны, а остальные кривые — периодические волны.

Рассмотрим подробнее решение уравнения (11.5), описывающее солитон с предельными значениями магнитного поля  $H_0$  при  $x \rightarrow \pm \infty$  (в этом случае  $M > 1$ ).

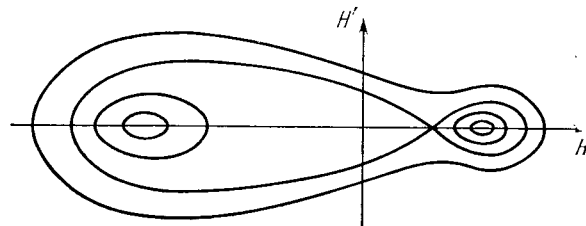


Рис. 11.1. Фазовые кривые для уравнения (11.5) (ср. с рис. 10.3).

Обозначая максимальную величину поля в солитоне через  $H_{\max}$  и полагая в (11.5)  $\text{const} = 0$ ,  $H = H_{\max}$ ,  $dH/dx = 0$ , получаем соотношение между числом Маха  $M$  и амплитудой солитона

$$M = \frac{H_0 + H_{\max}}{2H_0}. \quad (11.6)$$

Из (11.2) и (11.6) вытекает, что в вершине солитона величина  $N$  принимает минимальное значение  $N_{\min} = n_0/n_{\max} = 1 - 2(M-1)/M$ . Из условия  $N > 0$  получаем следующие ограничения на скорость и амплитуду солитона:

$$M < 2, \quad H_{\max} < 3H_0. \quad (11.7)$$

При  $M = 2$  плотность плазмы на гребне волны обратилась бы в бесконечность. Таким образом, уединенные волны, распространяющиеся поперек магнитного поля в холодной плазме, имеют предельное значение числа Маха и соответственно амплитуды.

Существование предельного числа Маха для стационарных волн означает, что при достаточно больших

амплитудах дисперсионные эффекты не могут «уравновесить» нелинейное укручение профиля волны, что приводит к ее опрокидыванию.

В случае чисел Маха, достаточно близких к единице, интегрирование общего уравнения (11.5) приводит к простым аналитическим выражениям, которые совпадают с формулами для стационарных решений уравнений Буссинеска, рассмотренных в предыдущем параграфе (с учетом того, что  $H$  играет роль обобщенной плотности  $\rho$ ). Это естественно, поскольку, как мы видели в § 7, волны достаточно малой амплитуды, распространяющиеся поперек магнитного поля, описываются уравнениями Буссинеска с показателем адиабаты  $\gamma=2$  \*).

Аналогичным образом могут быть рассмотрены стационарные волны, распространяющиеся под углом [38—40] и вдоль [41—43] магнитного поля. При этом оказывается, что в случае косых магнитозвуковых волн солитоны могут быть отрицательными. Это обстоятельство связано с тем, что, согласно формуле (7.20), параметр дисперсии  $\beta$  у таких волн становится отрицательным при  $\text{ctg}^2\alpha > m_e/m_i$  ( $\alpha$  — угол между направлением распространения и магнитным полем), что, как мы видели в § 10, приводит к изменению знака солитона (см. рис. 10.4).

## § 12. Другие примеры стационарных волн. Нелинейные дисперсионные уравнения

В отличие от монохроматических волн, являющихся стационарными решениями линеаризованных уравнений, скорость нелинейных стационарных волн зависит не только от их длины, но и от амплитуды, а также от некоторых других параметров, например от средних значений колеблющихся величин. Так, например, для периодических стационарных волн, рассматривавшихся в § 10, скорость волны в пределе малых, но конечных амплитуд содержит член, пропорциональный  $a^2$  (см. (10.17)). Зависимость частоты или скорости стационарной волны от волнового числа, амплитуды и других

\* Соответственно кривые рис. 11.1, лежащие в «физической» части фазовой плоскости, качественно подобны финитным траекториям на рис. 10.3 и при  $M \ll 1$  переходят в последние.

параметров мы будем называть нелинейным дисперсионным уравнением \*).

В дополнение к волнам, исследовавшимся в предыдущем параграфе, рассмотрим здесь еще несколько типичных примеров нелинейных стационарных волн и определим их дисперсионные уравнения.

**Гравитационные волны в глубокой воде.** Основные уравнения имеют вид (4.1) — (4.6); вместо (4.7) здесь достаточно потребовать, чтобы  $\Phi$  было ограниченным при всех  $z$ .

Для стационарной волны можно считать, что

$$z = \eta(x - Wt), \quad (12.1)$$

$$\Phi = \Phi(x - Wt, z), \quad (12.2)$$

где  $W$  — скорость волны. Подставляя (12.1), (12.2) в (4.5) и (4.6), получим следующие уравнения:

$$\eta_x = \Phi_z(\Phi_x - W), \quad (12.3)$$

$$[W^2\Phi_{xx} + g\Phi_z - 2W(\Phi_x\Phi_{xx} + \Phi_z\Phi_{xz}) + \Phi_x^2\Phi_{xx} + 2\Phi_x\Phi_z\Phi_{xz} + \Phi_z^2\Phi_{zz}]_{z=\eta} = 0. \quad (12.4)$$

Кроме этого,  $\Phi(x, z)$  удовлетворяет еще линейному уравнению Лапласа (4.3). Можно показать, что эти два уравнения не имеют решения в виде уединенных волн. Периодическое решение с длиной волны  $\lambda$  можно искать в виде ряда Фурье по  $\cos nkx$ ,  $\sin nkx$ , где  $k = 2\pi/\lambda$ , а коэффициенты этого ряда как функции  $z$  определить из уравнения (4.3) и условия ограниченности при  $z < 0$ . При этом получается выражение вида

$$\Phi(x, z) = b \sin kxe^{kz} + b^2(c_1 \sin 2kx + c_2 \cos 2kx)e^{2kz} + \dots, \quad (12.5)$$

где коэффициенты  $c_1$  и т. д., а также функции  $\eta(x)$  могут быть определены из (12.4) методом последовательных приближений. В первом (линейном) приближении получаем для формы свободной поверхности волны выражение

$$\eta = \frac{b}{W} \cos k(x - Wt). \quad (12.6)$$

Подставляя (12.5) в (12.4) и удерживая члены до третьего порядка включительно, получим, приравняв

\* В случае уединенных волн, которые можно рассматривать как предельный случай периодических (см. § 10), дисперсионное уравнение вырождается в зависимость между скоростью волны (числом Маха) и амплитудой (см., например, формулы (10.10) и (11.6)).

члены при одинаковых гармониках,

$$c_1 = c_2 = 0, \quad \Omega = kW = \sqrt{gk} \left( 1 + \frac{a^2 k^2}{2} + \dots \right), \quad (12.7)$$

где  $a = b/W$  — амплитуда колебаний свободной поверхности жидкости.

Можно показать, что при увеличении амплитуды волны стремятся к некоторому предельному виду с заострениями на гребнях, причем углы при заострениях равны  $120^\circ$ ; а скорости частиц на гребнях совпадают со скоростью волны  $W$  (подробнее об этом см. в [44], § 250).

**Электромагнитные волны в нелинейных диэлектриках.** Пусть сначала нелинейность определяется выражением (8.5). Это выражение по своему смыслу применимо лишь для высокочастотных волн, которые можно представить в виде (8.4).

Поэтому стационарные волны, удовлетворяющие уравнениям (8.3), (8.5), как нетрудно убедиться, следует искать в виде

$$\vec{\mathcal{E}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)} + \text{к. с.},$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \mathbf{H}_0 e^{i(kx - \omega t)} + \text{к. с.},$$

где амплитуды  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  (после соответствующей перенормировки частоты) можно считать постоянными. Такие решения уже обсуждались в § 8. Нелинейное дисперсионное уравнение для них имеет вид (8.10).

В качестве примера, иллюстрирующего другие возможности, рассмотрим модель нелинейного диэлектрика, состоящего из ангармонических осцилляторов с одной и той же собственной частотой.

Уравнение, определяющее зависимость поляризации среды  $\mathcal{P}$  от напряженности поля  $\mathcal{E}$  будет иметь вид

$$\mathcal{P}_{tt} - \omega_0^2 \mathcal{P} - \alpha \mathcal{P}^3 = \frac{\omega_p^2}{4\pi} \mathcal{E}, \quad (12.8)$$

где  $\omega_0$ ,  $\alpha$  и  $\omega_p$  — постоянные (такая модель обсуждалась

в работе [45]). Уравнения Максвелла (8.1) приводятся в рассматриваемом случае к уравнению \*)

$$\mathcal{E}_{tt} - c^2 \Delta \mathcal{E} = -4\pi \mathcal{P}_{tt}, \quad (12.9)$$

которое вместе с (12.8) образует замкнутую систему.

Рассмотрим теперь стационарные решения этой системы, считая, что  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{P}$  являются функциями только от  $x - Wt$  или, что все равно, от фазы  $\theta = kx - \omega t$  ( $\omega = kW$ ). Последнюю мы нормируем условием

$$\mathcal{P}(\theta) = \mathcal{P}(\theta + 2\pi), \quad \mathcal{E}(\theta) = \mathcal{E}(\theta + 2\pi). \quad (12.10)$$

Система (12.8), (12.9) после простых вычислений приводится к виду

$$\frac{d^2 \mathcal{P}}{d\theta^2} + \left( \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 c^2} \right) \mathcal{P} - \frac{\alpha}{\omega^2} \mathcal{P}^3 = 0, \quad (12.11)$$

$$\mathcal{E} = \frac{4\pi \omega^2}{k^2 c^2 - \omega^2} \mathcal{P}. \quad (12.12)$$

Если пренебречь нелинейным членом в (12.11), то соотношения периодичности (12.10) будут выполняться только при условии обращения коэффициента при  $\mathcal{P}$  в единицу. Получающееся при этом соотношение дает линейный закон дисперсии

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_0(\omega), \quad (12.13)$$

где

$$\varepsilon_0(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (12.14)$$

есть линейная диэлектрическая проницаемость в рассматриваемой модели.

В общем случае финитные решения уравнения (12.11) могут быть представлены в виде

$$\mathcal{P}(\theta) = b \operatorname{sn}(\theta; s), \quad (12.15)$$

\*) Мы ограничиваемся здесь обсуждением чисто поперечных волн.

где  $\operatorname{sn}(z; s)$  — эллиптический синус с модулем  $s$ ,

$$s^2 = \frac{\alpha b^2}{2A^2 \omega^2}, \quad (12.16)$$

$$A^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 c^2} - \frac{\alpha b^2}{2\omega^2}. \quad (12.17)$$

Поскольку функция  $\operatorname{sn}(z; s)$  имеет период  $4K(s)$  ( $K(s)$  — полный эллиптический интеграл первого рода), то условие периодичности (12.10) принимает вид

$$A = \frac{2}{\pi} K(s). \quad (12.18)$$

Это соотношение совместно с (12.16), (12.17) дает нелинейное дисперсионное уравнение, определяющее зависимость между  $\omega$ ,  $k$  и амплитудой колебаний  $b$ .

Используя (12.16), уравнение (12.18) можно представить в виде

$$\frac{\alpha b^2}{2\omega^2} = \frac{4}{\pi^2} K^2(s) s^2. \quad (12.19)$$

Графическое изображение зависимости между  $b$  и  $s$ ,

Рис. 12.1. График зависимости (12.19).

определяемой соотношением (12.19), приведено на рис. 12.1.

При  $s \ll 1$ , т. е.

$$\frac{\alpha b^2}{2\omega^2} \ll 1, \quad (12.20)$$

из выражения (12.15) следует

$$\mathcal{P}(\theta) = b \sin \theta + \frac{\alpha b^3}{32\omega^2 A^2} \sin 3\theta + \dots, \quad (12.21)$$

$$\theta = kx - \omega t.$$

Чтобы получить нелинейное дисперсионное уравнение

В этом случае, разлагаем  $K(s)$  в степенной ряд \*) в соотношении (12.18) и используем (12.16). В результате имеем

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_0^2 + 3\alpha b^2/4}. \quad (12.22)$$

В другом предельном случае

$$b\sqrt{\alpha/2\omega} \gg 1 \quad (12.23)$$

величина  $s$  близка к единице (как видно, например, из рис. 12.1). Тогда из (12.16), (12.17) следует

$$W \rightarrow c \left( 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - b^2 \alpha} \right)^{-1/2} \quad (s \rightarrow 1), \quad (12.24)$$

где  $W = \omega/k$  — скорость распространения волны. Чтобы получить асимптотическую форму волны в этом предельном случае, используем соотношение [33]

$$\operatorname{sn}(z; s) \rightarrow \operatorname{th} z \quad (s \rightarrow 1).$$

Тогда из (12.15), (12.16) и (12.24) следует

$$\mathcal{P} \rightarrow b \operatorname{th} \left[ \frac{x - Wt}{\delta} \right],$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\alpha} \frac{W}{b}}. \quad (12.25)$$

Соотношение (12.25) дает представление о форме волны на участке  $-\lambda/2 < x - Wt < \lambda/2$  (где  $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны); при этом условие (12.23) эквивалентно соотношению  $\lambda \gg \delta$ .

\*) См. примечание на стр. 49.

Глава IV  
НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ  
В СЛАБО  
ДИСПЕРГИРУЮЩИХ СРЕДАХ

§ 13. Уравнение Бюргерса

Эта и последующие главы будут посвящены изучению нестационарных нелинейных волн. Мы начнем с рассмотрения слабо диспергирующих сред. Оказывается, что в этом случае можно продвинуться довольно далеко в направлении построения последовательной аналитической теории, описывающей основные качественные, а в ряде случаев и количественные закономерности эволюции нелинейных волн.

Рассмотрим сначала нелинейные волны в газах, описываемые уравнениями Навье — Стокса

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} \left( \zeta + \frac{1}{3} \eta \right) \nabla(\nabla \mathbf{v}),$$

$$\rho_t + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$S_t + (\mathbf{v}\nabla)S = \frac{\kappa}{\rho T} \Delta T +$$

$$+ \frac{\eta}{2\rho T} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \nabla \mathbf{v} \right)^2 + \frac{\eta}{\rho T} (\nabla \mathbf{v})^2, \quad (13.1)$$

$$d\rho = \left( \frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S dp + \left( \frac{\partial \rho}{\partial S} \right)_p dS$$

(здесь  $S$  — энтропия единицы массы).

Если в системе уравнений (13.1) пренебречь диссипативными членами, то эта система превратится в уравнения

Эйлера

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\frac{c^2}{\rho} \nabla \rho, \quad (13.2)$$

$$\rho_t + \Delta(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (13.3)$$

$$c^2(\rho) = \frac{\partial p(\rho, S)}{\partial \rho}, \quad S = \text{const.} \quad (13.4)$$

Важнейшими решениями последних являются так называемые простые волны, которые можно интерпретировать как волны, бегущие в одном направлении (см., например, [1]).

Все величины, описывающие простую волну, представляются в виде функций одной из них. Например, можно считать, что  $\rho = \rho(v)$ ,  $c = c(v)$ . Тогда из уравнений (13.2), (13.3) следует

$$c(v) \frac{d\rho}{dv} = \pm \rho(v). \quad (13.5)$$

Подставляя это в уравнение (13.2), получим для волны, распространяющейся в положительном направлении оси  $x$  (в этом случае в (13.5) следует взять плюс),

$$\frac{\partial v}{\partial t} + [v + c(v)] \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (13.6)$$

Чтобы определить функцию  $c(v)$ , используем уравнение адиабатического процесса

$$p = p_0 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma, \quad c^2 = c_0^2 \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1}, \quad (13.7)$$

где  $\rho_0$  — невозмущенная плотность газа, а  $c_0 = c(\rho_0)$  — скорость звука в линейном приближении. Из (13.5) и (13.7) следует (для волны, распространяющейся в положительном направлении)

$$c(v) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} v. \quad (13.8)$$

Подставляя это в (13.6), приходим к следующему дифференциальному уравнению для простой волны:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v \right) \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (13.9)$$



Общее решение уравнения (13.6) имеет вид

$$v = f(x - g(v)t), \quad g(v) = c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v, \quad (13.10)$$

где  $f(x)$  — произвольная функция, определяемая формой волны при  $t=0$ :

$$f(x) = v(x, 0).$$

Если пренебречь зависимостью  $g$  от скорости течения  $v$ , т. е. положить  $g(v) \approx c_0$ , то (13.10) переходит в решение линеаризованных уравнений Эйлера  $v = f(x - c_0 t)$ , описывающее распространение волны без изменения ее формы. Рост скорости звука  $c(v)$  при увеличении  $v$  приводит к укрупнению профиля волны на участках, где скорость  $v$  больше. При достаточно больших  $t$  функция  $v(x)$  становится неоднозначной. Однако еще до этого момента решение вида (13.10) становится непригодным, поскольку при очень большой крутизне профиля отброшенные диссипативные члены существенны даже при малых диссипативных коэффициентах.

Таким образом, при описании эволюции нелинейных волн в газе при достаточно больших  $t$  следует исходить из уравнений Навье — Стокса (13.1). К сожалению, исследование нестационарных решений этих уравнений в общем случае сопряжено с большими трудностями. Решения же типа простых волн, где все величины, характеризующие возмущение, могут быть представлены в виде функций одной из них, не удовлетворяют уравнениям (13.1). Однако, как будет показано ниже, при достаточно малых (но конечных) амплитудах и малых диссипативных коэффициентах существуют решения, которые можно рассматривать как аналог простых волн, бегущих в одну сторону. Такие волны мы будем называть квазипростыми. Основные уравнения для квазипростых волн получаются из (13.1), если ограничиться в последних нелинейными членами второго порядка и считать при этом диссипативные коэффициенты малыми первого порядка. Соответственно линейные диссипативные члены будут малыми второго порядка, а нелинейными диссипативными членами мы можем пренебречь.

Предположим, что возмущение распространяется вдоль оси  $x$ . Тогда первое и третье из уравнений (13.1)

с принятой степенью точности принимают вид

$$\rho(v_t + vv_x) = -p_x + \left(\frac{4}{3}\eta + \zeta\right)v_{xx}, \quad (13.11)$$

$$S_t + vS_x = \frac{\kappa}{\rho T} T_{xx}. \quad (13.12)$$

Из (13.12) следует, что изменение энтропии есть величина второго порядка малости.

Уравнение непрерывности удобно переписать в другой форме, выразив возмущения плотности через изменения давления и энтропии и отбросив малые третьего порядка:

$$\begin{aligned} p_t + p_x v + c^2 \rho v_x &= -\frac{c^2 \kappa}{\rho T} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p T_{xx} = \\ &= -\frac{c^2 \kappa}{\rho T} \left(\frac{\partial \rho}{\partial S}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S p_{xx}, \end{aligned} \quad (13.13)$$

где  $c$  есть адиабатическая скорость звука, определяемая соотношением (13.4). Используя общие термодинамические соотношения (см., например, [46], § 16), нетрудно убедиться, что

$$\frac{1}{T} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p},$$

где  $c_v, c_p$  — теплоемкости, отнесенные к единице массы. Подставляя это в (13.13) и учитывая (13.4), получим

$$p_t + vp_x + c^2 \rho v_x = \frac{\kappa}{\rho} \left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right) p_{xx}. \quad (13.14)$$

Уравнения (13.11), (13.12) и (13.14) составляют полную систему уравнений для одномерного течения с точностью до членов второго порядка включительно.

Чтобы получить дифференциальное уравнение для квазипростой волны, положим

$$\begin{aligned} p(x, t) &= p(v) + \psi(x, t), \\ \rho(x, t) &= \rho(v) + \phi(x, t), \end{aligned} \quad (13.15)$$

где функции  $p(v)$  и  $\rho(v)$  определяются теми же

уравнениями, что и в простой волне, т. е.

$$c(v) \frac{d\rho}{dv} = \rho(v), \quad c(v) = c_0 + \frac{\gamma-1}{2} v,$$

$$\frac{d\rho}{dv} = c^2(v) \frac{d\rho}{dv} = c(v) \rho(v). \quad (13.16)$$

Что касается функций  $\psi(x, t)$  и  $\varphi(x, t)$ , то их следует искать в таком виде, чтобы соответствующее решение было как можно ближе к простой волне. Предположим, что эти функции — второго порядка малости. (Из окончательного результата будет видно, что такое решение существует.)

Очевидно, что с точностью до членов второго порядка можно считать, что  $\psi(x, t)$ ,  $\varphi(x, t)$  удовлетворяют линейным уравнениям

$$\psi_t + c_0 \psi_x = \varphi_t + c_0 \varphi_x = 0. \quad (13.17)$$

Подставляя (13.5) в (13.11) и (13.14) и учитывая (13.17) получим с указанной точностью \*)

$$v_t + [v + c(v)] v_x = -\frac{1}{\rho_0} \left[ \psi_x + \left( \frac{4}{3} \eta + \zeta \right) v_{xx} \right],$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left[ \frac{4}{3} \eta + \zeta - \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial x} \quad (13.18)$$

(где  $\rho_0$  — равновесная плотность).

Исключая  $\psi$  из этих уравнений, приходим к следующему дифференциальному уравнению для квазипростой волны:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( c_0 + \frac{\gamma+1}{2} v \right) \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad (13.19)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2\rho_0} \left[ \frac{4}{3} \eta + \zeta + \kappa \left( \frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p} \right) \right]. \quad (13.20)$$

Уравнение (13.19) отличается от уравнения простой волны правой частью, описывающей диссипативные эффекты.

\*) Функция  $\varphi(x, t)$  при этом выпадает. Это связано с тем, что в уравнениях (13.11) и (13.14) плотность  $\rho$  всюду умножается на величины первого порядка малости.

Линеаризованное уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} + c_0 \frac{\partial v}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (13.21)$$

описывает эволюцию слабо затухающей звуковой волны в линейном приближении. Ему удовлетворяют решения вида

$$v = v_0 e^{-\mu k^2 t} \exp [ik(x - c_0 t)], \quad (13.22)$$

отвечающие дисперсионному уравнению

$$\omega = c_0 k - i\mu k^2. \quad (13.23)$$

Отметим, что соотношения (13.20) и (13.22) совпадают с известными формулами акустики, определяющими закон затухания звука в линейном приближении (см., например, [1], § 77).

Из результатов следующего параграфа будет видно, что уравнение (13.19) хорошо описывает и нелинейные эффекты, в частности формирование и эволюцию ударных волн.

Заметим, наконец, что если перейти к системе отсчета, движущейся со скоростью  $c_0$  относительно среды, и ввести новый масштаб для возмущений скорости частиц, т. е. положить

$$\xi = x - c_0 t, \quad \tau = t, \quad u = \frac{\gamma+1}{2} v, \quad (13.24)$$

то уравнение (13.19) принимает еще более простую форму:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \xi} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \quad (13.25)$$

Это уравнение впервые рассматривалось Бюргерсом [47] и носит его имя.

#### § 14. Решение уравнения Бюргерса

Замечательно, что общее решение уравнения Бюргерса можно получить в замкнутом аналитическом виде [48]. Именно, если положить

$$u = -2\mu \frac{\partial}{\partial \xi} \ln \varphi(\xi, \tau), \quad (14.1)$$

то для  $\varphi$  получается уравнение теплопроводности

$\varphi = \mu \varphi_{\xi\xi}$ . Отсюда следует, что решение уравнения Бюргера при начальном условии

$$u(\xi, 0) = u_0(\xi) \quad (14.2)$$

имеет вид (14.1), где

$$\varphi(\xi, \tau) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{4\mu\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{(\xi - \eta)^2}{4\mu\tau} - \frac{1}{2\mu} \int_0^{\eta} u_0(\eta') d\eta' \right\} d\eta. \quad (14.3)$$

Для сходимости интеграла в (14.3) достаточно, чтобы начальное возмущение (14.2) удовлетворяло условию

$$\int_0^x u_0(x') dx' \leq \text{const} \cdot x \quad (x \rightarrow \infty), \quad (14.4)$$

которое мы будем предполагать в дальнейшем выполненным.

Рассмотрим теперь эволюцию начальных возмущений, затухающих при  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Будем считать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) d\xi = M < \infty. \quad (14.5)$$

(В остальном профиль начального возмущения может быть произвольным.)

Прежде всего заметим, что при любом  $\tau$

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, \tau) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) d\xi = M. \quad (14.6)$$

В справедливости соотношения (14.6) проще всего убедиться, если написать уравнение Бюргера в дивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{1}{2} u^2 - \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0$$

и проинтегрировать обе части его по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Таким образом, площадь, ограниченная функцией  $u(\xi, \tau)$  (которая в дальнейшем будет называться главным моментом), не меняется во времени, т. е. является интегралом движения.

При условии (14.5) решение уравнения Бюргера имеет довольно простую асимптотику при  $\tau \rightarrow \infty$ , а именно

$$u(\xi, \tau) \approx -2\mu \frac{d}{d\xi} \ln F \left( \frac{\xi}{\sqrt{4\mu\tau}} \right), \quad (14.7)$$

где

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[ e^{-\frac{M}{4\mu}} \int_{-\infty}^x e^{-\eta^2} d\eta + e^{\frac{M}{4\mu}} \int_x^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta \right]. \quad (14.8)$$

Этот результат интересен тем, что из него следует универсальность асимптотического вида профиля скорости  $u(\xi, \tau)$  при достаточно больших  $\tau$ . Единственной

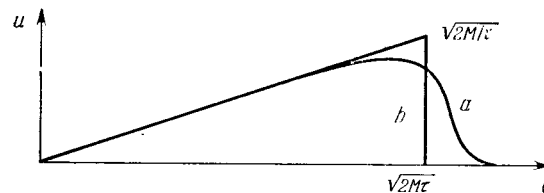


Рис. 14.1. Асимптотический вид решения уравнения Бюргера при начальном условии (14.5) и больших  $t$ . Кривая  $a$  изображает решение при конечном  $\mu$ , кривая  $e$  — при  $\mu \rightarrow 0$ .

величиной, зависящей от начального условия в (14.7), (14.8), является главный момент  $M$ ; детальный же вид начального условия оказывается несущественным.

Если диссипативный параметр  $\mu$  исчезает, то из (14.7) и (14.8) следует (при  $M > 0$ )

$$\lim u(\xi, \tau) = \begin{cases} \xi/\tau, & 0 < \xi < \sqrt{2M\tau}, \\ 0, & \xi < 0, \xi > \sqrt{2M\tau}. \end{cases} \quad (14.9)$$

При  $M < 0$  соответствующее предельное выражение получается из (14.9) преобразованием  $u \rightarrow -u$ ,  $\xi \rightarrow -\xi$ ,  $\tau \rightarrow \tau$ .

Асимптотический вид профиля при больших  $\tau$  изображен на рис. 14.1. При  $\mu \rightarrow 0$  он имеет вид треугольника с ударной волной в передней или задней части профиля (в зависимости от знака  $M$ ). Величина скачка в ударной волне равна  $(2M/\tau)^{1/2}$ , т. е. убывает пропорционально корню из времени; основание профиля, наоборот, растет как  $\tau^{1/2}$ , так что полная его площадь не изменяется и

равна  $M$ . Эти результаты хорошо согласуются с общей теорией нестационарных ударных волн. (Ср. [1], § 95.)

Заметим, наконец, что уравнение Бюргера имеет также стационарное решение, описывающее волну, перемещающуюся без деформации с постоянной скоростью  $W$ :

$$u = f(\xi - W\tau). \quad (14.10)$$

Подставляя (14.10) в (13.21) и интересуясь только ограниченными решениями получившегося обыкновенного дифференциального уравнения, будем иметь

$$f(\xi) = u_0 + \frac{\Delta u}{1 + \exp(\Delta u x / 2\mu)}, \quad (14.11)$$

$$W = u_0 + \Delta u / 2, \quad (14.12)$$

где  $u_0$ ,  $\Delta u$  — постоянные интегрирования.

Решение (14.11) представляет собой ударную волну с величиной скачка  $\Delta u$  и шириной переходной области

$$\delta = \frac{2\mu}{\Delta u}, \quad (14.13)$$

которая обращается в нуль при  $\mu \rightarrow 0$ .

Используя общее нестационарное решение (14.1) — (14.3), можно показать, что всякое возмущение, удовлетворяющее при  $\tau = 0$  условиям

$$\begin{aligned} u_0(\xi) &\rightarrow u_0 + \Delta u & (\xi \rightarrow -\infty), \\ u_0(\xi) &\rightarrow u_0 & (\xi \rightarrow +\infty) \end{aligned} \quad (14.14)$$

( $\Delta u > 0$ ), принимает при достаточно больших  $\tau$  стационарный асимптотический вид, определяемый формулами (14.10) — (14.12)\*).

### § 15. Уравнение Кортевега — де Вриза

Рассмотрим теперь среды, где диссипация пренебрежимо мала, но зато имеется вещественная дисперсия (достаточно слабая), так что дисперсионное уравнение в линейном приближении имеет вид

$$\omega = c_0 k - \beta k^3. \quad (15.1)$$

В этом случае также можно получить уравнение для

\* Об обобщении уравнения Бюргера для сферических волн см. [49].

квазипростой волны, отличающееся, как и уравнение Бюргера, от (13.9) членом со старшей производной.

Пусть, например, нелинейные волны описываются обобщенными уравнениями Буссинеска (10.1):

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \nabla \rho + \frac{2c_0 \beta}{\rho_0} \nabla \Delta \rho = 0, \quad (15.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (15.3)$$

$$c^2(\rho) = c_0(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}. \quad (15.4)$$

Предположим, что величины

$$v/c_0, (\rho - \rho_0)/\rho_0, \delta/\lambda$$

( $\delta = (|\beta|/c_0)^{1/2}$  — длина дисперсии,  $\lambda$  — характерная длина волны) являются малыми первого порядка.

Как и в § 13, будем искать решение уравнений (15.2) — (15.4) в виде

$$\rho(x, t) = \rho(v) + \varphi(x, t), \quad (15.5)$$

где  $\rho(v)$  совпадает с соответствующей функцией в простой волне, т. е. определяется соотношениями (13.5), (13.8), а  $\varphi(x, t)$  — некоторая величина второго порядка малости. Имея в виду волну, распространяющуюся в положительном направлении и пренебрегая членами выше второго порядка малости, мы можем считать, что  $\varphi(x, t)$  удовлетворяет уравнению

$$\varphi_t + c_0 \varphi_x = 0 \quad (15.6a)$$

(ср. с (13.17)). Подставляя (15.5) в (15.2) — (15.4) и используя (13.5), (13.8), получим с принятой точностью

$$\varphi_t - c_0 \varphi_x = \frac{2\beta \rho_0}{c_0} v_{xxx}, \quad (15.6b)$$

$$v_t + v_x \left( c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v \right) + 2\beta v_{xxx} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \varphi_x = 0. \quad (15.6b)$$

Исключая  $\varphi$  из уравнений (15.6), приходим к уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \left( c_0 + \frac{\gamma + 1}{2} v \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0, \quad (15.7)$$

которое описывает квазипростую волну при наличии дисперсии. При  $\beta=0$  оно превращается в уравнение для простой волны, а в линейном приближении приводит к закону дисперсии (15.1).

Переходя к новым переменным

$$x' = x - c_0 t, \quad t' = t, \quad u = \frac{\gamma + 1}{2} v, \quad (15.8)$$

получаем уравнение (15.7) в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (15.9)$$

(здесь и в дальнейшем штрихи при независимых переменных опускаются).

Уравнение (15.9) было впервые получено Кортевегом и де Вризом для волн на поверхности неглубокой воды (где дисперсионное уравнение имеет вид (5.30)) [50] и в недавнее время для ряда других случаев (волны в плазме, ангармонические колебания в решетке и т. д.) [20, 21, 51—59]. Из вышеизложенного ясно, что уравнение Кортевега — де Вриза (КдВ) имеет универсальный характер: оно справедливо во всех случаях, когда закон дисперсии имеет вид (15.1) и при  $\beta=0$  существуют простые волны.

Рассмотрим, например, плазменные волны, распространяющиеся под углом к магнитному полю, описываемые уравнением (7.43). При  $\beta=0$  это уравнение имеет решения типа простых волн, которые получаются, если считать, что производные  $h_t$  и  $h_x$  являются функциями только  $h$ . При  $\beta \neq 0$ , поступая как и выше, мы получим следующее уравнение для квазипростой волны [21, 51]:

$$h_t + c_A h_x + \frac{3c_A \sin \alpha}{2H_0} h h_x + \beta h_{xxx} = 0. \quad (15.10)$$

Это уравнение имеет форму (15.7).

Уравнение КдВ в форме (15.9) удобно для задач с начальными условиями. В этом случае решение  $u(x, t)$  однозначно определяется начальным возмущением  $u(x, 0)$ . Чтобы получить аналогичное уравнение для задач с граничными условиями, заметим, что в уравнении для квазипростой волны (15.7) с точностью до малых членов

второго порядка включительно можно положить

$$\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \approx -\frac{1}{c_0^3} \frac{\partial^3 v}{\partial t^3}, \quad v \frac{\partial v}{\partial x} \approx -\frac{1}{c_0} v \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Подставляя это в (15.7) и переходя к новым переменным

$$\xi = -x, \quad \tau = t - \frac{x}{c_0}, \quad f = \frac{\gamma + 1}{2c_0^2} v, \quad (15.11)$$

получим уравнение КдВ

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} + f \frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{\beta}{c_0^4} \frac{\partial^3 f}{\partial \tau^3} = 0. \quad (15.12)$$

Решение этого уравнения  $f(\xi, \tau)$  однозначно определяется граничным условием  $f(0, \tau) \equiv f(0, t)$ .

Наконец, заметим, что если диссипацией нельзя пренебрегать и закон дисперсии имеет вид

$$\omega = c_0 k - \beta k^3 - i \mu k^2, \quad (15.13)$$

то вместо (15.9) имеет место уравнение

$$u_t + uu_x - \mu u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0, \quad (15.14)$$

которое мы будем называть уравнением Кортевега — де Вриза — Бюргерса (оно получается, например, из уравнений (9.12), (9.13) методом, изложенным выше).

Аналогичным образом можно поступать и при других законах затухания. Например, учет затухания Ландау для ионно-звуковых волн в плазме, рассмотренных в § 6, приводит в случае малых  $k$  к дисперсионному уравнению (см., например, [60])

$$\omega = c_0 k - \beta k^3 - i \alpha |k|,$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left( \frac{m_e}{m_i} \right)^{1/2} c_0,$$

а  $c_0$  и  $\beta$  определены в (6.9). Соответственно вместо (15.14) получаем

$$u_t + uu_x + \hat{L}[u] + \beta u_{xxx} = 0, \quad (15.14a)$$

где  $\hat{L}[u]$  — линейный оператор, определяемый выражением

$$\hat{L}[u] = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} |k| \int_{-\infty}^{\infty} u(x') e^{ik(x-x')} dx'.$$

Используя соотношение

$$\frac{i\pi |k|}{k} = P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{z} e^{ikz},$$

где  $P$  — символ главного значения, нетрудно убедиться, что [61]

$$\hat{L}[u] = \frac{\alpha}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx'}{x-x'} \frac{\partial u(x')}{\partial x'}. \quad (15.146)$$

Параметр дисперсии  $\beta$  в уравнениях (15.9) и (15.14) может иметь оба знака (в отличие от коэффициентов затухания, которые всегда положительны). Поскольку эти уравнения инвариантны относительно замены

$$u \rightarrow -u, \quad x \rightarrow -x, \quad t \rightarrow t, \quad \beta \rightarrow -\beta, \quad (15.15)$$

то решения уравнений (15.9) и (15.14) при  $\beta < 0$  можно получить из соответствующих решений при  $\beta > 0$  путем преобразования (15.15). Таким образом, не нарушая общности, мы можем считать параметр  $\beta$  положительным, что и будет предполагаться в дальнейшем.

Остановимся теперь на вопросе о стационарных волнах, описываемых уравнением КдВ (для уравнения (15.14) этот вопрос рассматривается в § 23). Полагая в (15.9)  $u = u(x - Wt)$ , получим уравнение  $\beta u''' + uu' - Wu' = 0$ , которое совпадает по форме с уравнением (10.5), описывающим стационарные решения уравнений Буссинеска. Таким образом, стационарные решения уравнения КдВ представляют собой солитоны и периодические волны, подробно рассмотренные в § 10\*).

### § 16. Законы сохранения для уравнения Кортевега — де Вриза

Уравнение КдВ может быть написано в дивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} + \beta u_{xx} \right) = 0, \quad (16.1)$$

\* О затухании солитонов, обусловленном диссипативными членами в уравнениях (15.14) и (15.14а), см. [61, 62].

имеющей вид закона сохранения «импульса»  $\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ .

Умножая обе части уравнения КдВ на  $u$  и  $u^2$ , после несложных вычислений получим еще два закона сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u^3}{3} + \beta \left( uu_{xx} - \frac{u_x^2}{2} \right) \right] = 0, \quad (16.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^3}{3} - \beta u_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{u^4}{4} + \beta (u^2 u_{xx} + 2u_t u_x) + \beta^2 u_{xx}^2 \right] = 0. \quad (16.3)$$

Соотношение (16.2) можно интерпретировать как закон сохранения энергии. Что касается уравнения (16.3), то оно, по-видимому, не имеет достаточно простого физического истолкования (впервые на этот закон сохранения обратил внимание Уитэм [15]). Крускал, Забуски и Миура [55] получили ряд других независимых законов сохранения. После этого в работах [63, 64] было доказано, что уравнению КдВ отвечает бесконечное число сохраняющихся величин (инвариантов)

$$I_m = \int_{-\infty}^{\infty} Q_m(x, t) dx, \quad (16.4)$$

плотности которых  $Q_m(x, t)$  удовлетворяют соотношениям вида

$$\frac{\partial Q_m(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial P_m(x, t)}{\partial x} = 0, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (16.5)$$

и являются (вместе с потоками  $P_m(x, t)$ ) полиномами от  $\beta$ ,  $u$  и пространственных производных  $u_x, u_{xx}, u_{xxx}$  \*).

Рассмотрим коротко общую структуру плотностей  $Q_m[u]$ . Расположим члены в  $Q_m[u]$  в порядке возрастания степеней параметра дисперсии  $\beta$ . Тогда член, не содержащий  $\beta$ , всегда пропорционален  $u^m$ . Пользуясь

\* Производные по времени можно исключить с помощью уравнения КдВ. Заметим также, что величины  $Q_m(x, t)$  определяются с точностью до выражений, являющихся полными производными по  $x$ .

тем, что величины  $Q_m[u]$  определяются с точностью до постоянного множителя, удобно писать этот член в виде  $u^m/m$ . Далее, величина  $Q_m[u]$  содержит члены, пропорциональные  $\beta^k$  ( $k=1, 2, \dots$ ), причем коэффициенты при  $\beta^k$  имеют вид некоторых полиномов от  $u$ ,  $u_x$ ,  $u_{xx}$ ,  $\dots$ , общую структуру которых можно установить из соображений размерности. Каждое слагаемое должно иметь размерность  $u^m$ ; поэтому, если общий член такого полинома имеет вид  $u^l u_x^{l_1} u_{xx}^{l_2}$ , то показатели степеней должны удовлетворять условиям

$$l_1 + 2l_2 + 3l_3 + \dots = 2k, \quad l = m - l_1 - l_2 - \dots - k, \quad (16.6)$$

где

$$k = 1, 2, \dots, m-2.$$

(В частности, величины  $Q_1[u]$  и  $Q_2[u]$  не содержат  $\beta$ .)

В качестве иллюстрации приведем здесь первые шесть плотностей сохраняющихся величин [55, 63, 64] \*):

$$\begin{aligned} Q_1[u] &= u, \quad Q_2[u] = \frac{u^2}{2}, \quad Q_3[u] = \frac{u^3}{3} - \beta u_x^2, \\ Q_4[u] &= \frac{u^4}{4} - 3\beta u u_x^2 + \frac{2}{5} \beta^2 u_{xx}^2, \\ Q_5[u] &= \frac{u^5}{5} - 6\beta u^2 u_x^2 + \frac{36}{5} \beta^2 u u_{xx}^2 - \frac{108}{35} \beta^3 u_{xxx}^2, \quad (16.7) \\ Q_6[u] &= \frac{u^6}{6} - 10\beta u^3 u_x^2 + \beta^2 (-5u_x^4 + 18u^2 u_{xx}^2) + \\ &+ \beta^3 \left( -\frac{108}{7} u u_{xxx}^2 + \frac{120}{7} u_{xx}^3 \right) + \frac{36}{7} \beta^4 u_{xxxx}. \end{aligned}$$

Общий алгоритм вычисления численных коэффициентов при отдельных слагаемых в  $Q_m[u]$ , полученный в работах [63, 64], здесь рассматриваться не будет. Мы укажем только, что коэффициент в  $Q_m[u]$  при члене, содержащем  $\beta$  в первой степени, имеет довольно простой вид,

\*) Соответствующие плотности потоков  $P_m[u]$  можно получить по данному  $Q_m[u]$  с помощью соотношения (16.5) и уравнения КдВ.

а именно

$$Q_m[u] = \frac{u^m}{m} - \beta \frac{(m-1)(m-2)}{2} u_x^2 u^{m-3} + O(\beta^2). \quad (16.8)$$

Эту формулу можно использовать для вычисления  $Q_m[u]$  в том случае, когда величина  $\beta$  является малым параметром.

Приведем также еще одно общее соотношение, а именно значение инварианта произвольного порядка

$$I_m[u] = \int_{-\infty}^{\infty} Q_m[u] dx \quad \text{для солитона, описываемого уравнением КдВ. В этом случае}$$

$$u = u_s(x, t) = a \operatorname{sech}^2 \sqrt{\frac{a}{12\beta}} \left( x - \frac{a}{3} t \right) \quad (16.9)$$

(см. формулы (10.9), (10.10), где положено  $b_3=0$ ). В [65] было указано, что

$$I_m^{(s)} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} Q_m[u_s] dx = \sqrt{12\beta} \frac{2^m [(m-1)!]^2}{(2m-1)!} a^{(2m-1)/2}, \quad (16.10)$$

где  $I_m^{(s)}$  — значение инварианта  $I_m$  для солитона.

## § 17. Общая картина эволюции начальных возмущений в слабо диспергирующих средах

Предположим, что в слабо диспергирующей среде, где справедливы, скажем, уравнения Буссинеска (10.1), имеется некоторое одномерное начальное возмущение с амплитудой скорости  $v_0$  и шириной порядка  $l$ . Если  $v_0 \ll c_0$ , то возмущение можно считать слабо нелинейным и при не слишком большой величине  $l$  оно распадается на две квазипростые волны, бегущие в разные стороны со скоростями, близкими к  $\pm c_0$ . Эволюцию каждой из этих волн можно исследовать с помощью уравнения КдВ (15.7) или — в системе отсчета, движущейся со скоростью  $c_0$  относительно среды, — (15.9).

Рассмотрим теперь решение уравнения КдВ (15.9) при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0 \varphi(x/l), \quad (17.1)$$

где  $\varphi(\xi)$  — безразмерная функция, характеризующая начальный профиль квазипростой волны.

Переходя к безразмерным переменным

$$\eta = \frac{u}{u_0}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{tu_0}{l}, \quad (17.2)$$

получаем уравнение КдВ и начальное условие (17.1) в виде

$$\eta_\tau + \eta\eta_\xi + \frac{1}{\sigma^2}\eta_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (17.3)$$

$$\eta(\xi, 0) = \varphi(\xi), \quad (17.4)$$

где  $\sigma$  — безразмерный параметр, определяемый формулой

$$\sigma = l \left( \frac{u_0}{\beta} \right)^{1/2}. \quad (17.5)$$

Из (17.3) и (17.4) следует, что решения уравнения КдВ, отвечающие начальным условиям с одинаковыми  $\sigma$  и  $\varphi(\xi)$ , должны быть подобными между собой [67].

В частности, для всех солитонов, удовлетворяющих уравнению КдВ (см. формулу (16.9)), параметр  $\sigma$  имеет одно и то же значение, которое мы обозначим через  $\sigma_s$ ; если принять, что для солитона  $l = \sqrt{12\beta/a}$ , то

$$\sigma_s = \sqrt{12}. \quad (17.6)$$

Заметим, что величина  $\sigma^2$  определяет отношение нелинейного члена в уравнении Кортевега — де Вриза к дисперсионному (в начальной стадии эволюции). Поэтому при малых значениях  $\sigma^2$  дисперсионные эффекты проявляются гораздо раньше, чем нелинейные, а при больших — наоборот. Поскольку при этом для солитонов дисперсионные и нелинейные эффекты находятся в равновесии, то при

$$\sigma^2 \ll \sigma_s^2 \quad (17.7)$$

возмущение будет слабо нелинейным, а при

$$\sigma^2 \gg \sigma_s^2 \quad (17.8)$$

— сильно нелинейным. Соответственно в случае (17.7) (и не слишком больших значениях  $t$ ) возмущение будет приближенно описываться решением линеаризованного

уравнения КдВ, рассмотренным в § 3. Оно имеет вид волнового пакета, изображенного на рис. 3.1 \*).

В случае (17.8) возмущение ведет себя сначала как простая волна без дисперсии, т. е. крутизна профиля увеличивается там, где возмущение больше. При достаточно большой крутизне станет существенной дисперсия и в результате возмущение распадется на отдельные группы волн. Как показали численные решения уравнения КдВ, проведенные в работах [66, 67, 55], и появившаяся вскоре аналитическая теория [6], эти группы в конечном итоге превращаются либо в солитоны, либо в почти линейный волновой пакет, который распадается с течением времени.

Поскольку при этом скорости солитонов  $W$  пропорциональны их амплитудам:  $W = a/3$  (см. (16.9)), то солитоны располагаются в порядке возрастания амплитуд, т. е. впереди будет наибольший. Быстро осциллирующий волновой пакет (или «хвост», как мы будем называть в дальнейшем) остается сзади, так как, согласно дисперсионному уравнению линейной теории  $\omega = -\beta k^3$  \*\*, его групповая скорость отрицательна.

В качестве иллюстрации сказанного мы приводим рис. 17.1, где изображены численные решения уравнения КдВ, полученные в работе [67] для начального импульса вида  $\varphi(\xi) = e^{-\xi^2}$  и значений параметра  $\sigma = 1,9$  и  $\sigma = 16,5$ . В первом случае возмущение распадается на один солитон и волновой пакет. Во втором — на шесть солитонов; волновой пакет при этом имеет очень малую амплитуду и на рисунке не изображен. Нетрудно видеть, что вершины солитонов лежат примерно на одной прямой. Это связано с тем, что скорость солитона пропорциональна его амплитуде, поэтому расстояния, пройденные солитонами, будут пропорциональны их амплитудам.

В работе [55] исследовалось «столкновение» двух солитонов: солитон большой амплитуды, находившийся вначале сзади, догонял солитон меньшей амплитуды. Возмущение, которое возникало после их наложения,

\*) При очень больших  $t$ , однако, из головной части этого волнового пакета может, при определенных условиях, сформироваться солитон (см. следующий параграф).

\*\*) Все это относится, разумеется, к системе отсчета, движущейся со скоростью  $c_0$  относительно среды.



распадалось опять на два солитона, в точности совпадающих с начальными, но теперь уже расположенных в обратном порядке: больший солитон — впереди, а меньший — сзади. Этот результат по существу является

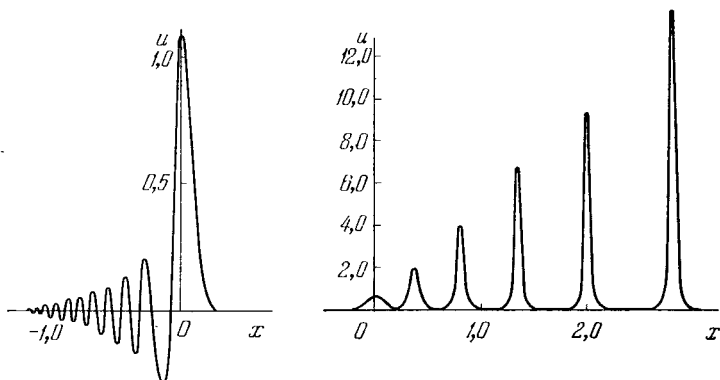


Рис. 17.1. Вид решений уравнения КдВ  $u(x, t)$  при достаточно большом  $t$  для двух значений параметра подобия:  $\sigma=1,9$  (слева) и  $\sigma=16,5$  (справа).

экспериментальным доказательством устойчивости солитонов: они сохраняют свои характеристики после взаимодействия \*). Аналогичные результаты — образование солитонов и их сохранение после взаимодействия — получены в работе [66] при начальном условии

$$\varphi(\xi) = \sin \xi. \quad (17.9)$$

## § 18. Об аналитическом решении уравнения Кортевега — де Вриза

Глубокие аналитические результаты, позволяющие понять ряд общих закономерностей эволюции возмущений, описываемых уравнением КдВ, были получены в работе [6] (см. также [68]). Оказалось, что амплитуды солитонов, образующихся из начального возмущения (17.1) (достаточно быстро затухающего при  $x \rightarrow \pm\infty$ ), определяются собственными значениями некоторой крае-

\*) Исследование устойчивости солитонов по отношению к поперечным (т. е. зависящим от  $y$ ) возмущениям показало, что при  $\beta > 0$  солитоны устойчивы, а при  $\beta < 0$  — неустойчивы [82]. Эта неустойчивость имеет характер самофокусировки, рассматриваемой ниже в гл. V (см. § 25).

вой задачи Штурма — Лиувилля (или, выражаясь языком квантовой механики, уровнями энергии в некоторой потенциальной яме). Чтобы показать это, а также ряд других важных результатов, рассмотрим уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{6} [\lambda(t) - v(x, t)] \psi(x, t) = 0, \quad (18.1)$$

где потенциальная энергия  $v(x, t)$ , собственное значение  $\lambda(t)$  и волновая функция  $\psi(x, t)$  зависят от  $t$  как от параметра, причем эта зависимость определяется тем, что  $v(x, t)$  удовлетворяет уравнению КдВ вида

$$v_t - vv_x + v_{xxx} = 0, \quad (18.2)$$

$$v(x, 0) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty). \quad (18.3)$$

Определяя  $v$  из уравнения (18.1) и подставляя в (18.2), получим

$$\begin{aligned} -\lambda_t \psi^2 &= \\ &= 6 \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \psi \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \right) \left( \psi_t - \frac{3\psi_x \psi_{xx}}{\psi} + \psi_{xxx} - \lambda \psi_x \right) \right] \equiv \\ &\equiv 6 \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \psi \frac{\partial}{\partial x} - \psi_x \right) \left[ \psi_t - \frac{1}{2} \psi_x (v + \lambda) + \psi_{xxx} \right] \right\}. \quad (18.4) \end{aligned}$$

Если  $\lambda$  принадлежит к дискретному спектру, то  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi^2 dx$  сходится. Интегрируя обе части соотношения (18.4) по  $x$ , получим

$$\lambda_t = 0, \quad (18.5)$$

т. е. собственные числа дискретного спектра не зависят от времени. Что касается непрерывного спектра, то в этом случае можно считать, что соотношение (18.5) выполняется автоматически. Интегрируя дважды уравнение (18.4) и учитывая (18.5), получим

$$\psi_t - \frac{1}{2} \psi_x (v + \lambda) + \psi_{xxx} = A\psi + B\psi \int \psi^2 dx, \quad (18.6)$$

где  $A(t)$  и  $B(t)$  — постоянные интегрирования. Если  $\psi(x)$  есть собственная функция дискретного спектра, то  $B=0$  (поскольку  $\psi$  экспоненциально затухает при

$|x| \rightarrow \infty$ ). Из условия нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1$  ясно, что постоянная  $A$  также должна равняться нулю. Таким образом, зависимость собственных функций дискретного спектра от времени определяется уравнением

$$\psi_t - \frac{1}{2} \psi_x [v(x, t) + \lambda] + \psi_{xxx} = 0. \quad (18.7)$$

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение  $\psi$  при  $|x| \rightarrow \infty$ . Для собственной функции  $n$ -го уровня  $\psi_n$  получим ( $\lambda_n < 0$ )

$$\begin{aligned} \psi_n(x, t) &\sim c_n(t) \exp(-k_n x) & (x \rightarrow +\infty), \\ \psi_n(x, t) &\sim d_n(t) \exp(k_n x) & (x \rightarrow -\infty), \end{aligned} \quad (18.8)$$

где

$$k_n = \sqrt{-\lambda_n/6} > 0. \quad (18.9)$$

Подставляя (18.8) в (18.7), будем иметь

$$\begin{aligned} c_n(t) &= c_n(0) \exp(4k_n^3 t), \\ d_n(t) &= d_n(0) \exp(-4k_n^3 t). \end{aligned} \quad (18.10)$$

Если  $\psi$  принадлежит к непрерывному спектру, т. е.  $\lambda > 0$ , то соответствующую ему собственную функцию мы выберем таким образом, чтобы она описывала волну, падающую из области  $x = +\infty$ . Тогда асимптотика  $\psi$  имеет вид

$$\begin{aligned} \psi &\sim \exp(-ikx) + b(k, t) \exp(ikx) & (x \rightarrow +\infty), \\ \psi &\sim a(k, t) \exp(-ikx) & (x \rightarrow -\infty). \end{aligned} \quad (18.11)$$

Подставляя это в уравнение (18.6), получим  $B=0$ ,  $A=4ik^3$  и

$$\begin{aligned} a(k, t) &= a(k, 0), \\ b(k, t) &= b(k, 0) \exp(8ik^3 t). \end{aligned} \quad (18.12)$$

На языке теории рассеяния величины  $a(k, t)$  и  $b(k, t)$  имеют смысл коэффициентов прохождения и отражения соответственно. При этом они должны удовлетворять соотношению

$$|a|^2 + |b|^2 = 1. \quad (18.13)$$

Поскольку собственные значения дискретного спектра  $\lambda_n$  не зависят от времени, то  $\lambda_n$ , а также  $c_n$ ,  $d_n$  и коэффициенты отражения и прохождения  $a(k)$ ,  $b(k)$  можно в принципе вычислить, решив уравнение Шре-

дингера (18.1) при  $t=0$ , т. е. при потенциале, равном начальному условию для уравнения КдВ (18.2). С другой стороны, из общей теории рассеяния известно, что величины  $\lambda_n$ ,  $c_n$  и  $b$  однозначно определяют потенциал в уравнении Шредингера (обратная задача теории рассеяния — ОЗТР). Для того чтобы восстановить потенциал  $v$  по этим данным, надо составить интегральное уравнение ОЗТР для одномерного случая [69—71]

$$K(x, y) + B(x+y) + \int_x^\infty K(x, z) B(y+z) dz = 0, \quad (18.14)$$

где

$$B(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k, t) \exp(ikx) dk + \sum c_n^2(t) \exp(-k_n x); \quad (18.15)$$

$$k_n = (-\lambda_n/6)^{1/2}, \quad k = (\lambda/6)^{1/2},$$

и решить его относительно  $K(x, y)$  при  $y \geq x$ . Тогда потенциал определится соотношением

$$v(x, t) = -12 \frac{d}{dx} K(x, x; t). \quad (18.16)$$

Эта процедура позволяет в принципе построить решение уравнения КдВ (18.2) по начальному условию  $v(x, 0)$ . В частности, из (18.14) — (18.16) можно получить информацию относительно солитонов, образующихся из начального возмущения  $v(x, 0)$ . Рассмотрим для этого асимптотику решения при  $t \rightarrow \infty$  и  $x \sim 8k_1^2 t$ , где  $k_1$  — максимальное из чисел  $k_n$ . Из соотношений (18.9) — (18.12) следует, что в этом случае в правой части (18.15) можно пренебречь интегралом, а в сумме — удержать только главный член с  $n=1$ , т. е. положить

$$B(x, t) \doteq c_1^2(0) \exp(8k_1^3 t - k_1 x). \quad (18.17)$$

Тогда асимптотическое решение уравнения (18.14) принимает вид [71]

$$\begin{aligned} K(x, y; t) &= -c_1^2(0) \exp[-k_1(x+y) + 8k_1^3 t] \times \\ &\times \left\{ 1 + \frac{c_1^2(0)}{2k_1} \exp[-2k_1 x + 8k_1^3 t] \right\}^{-1}. \end{aligned}$$

Подставляя это в (18.16), будем иметь

$$v(x, t) = -12k_1^2 \operatorname{sech}^2[k_1(x - x_0) - 4k_1^2 t], \quad (18.18)$$

где

$$c_1^2(0) = 2k_1 \exp(2k_1 x_0). \quad (18.19)$$

Выражение (18.18) описывает солитон с амплитудой  $a = 12k_1^2$  и скоростью  $W = a/3$ , т. е. представляет собой стационарное решение уравнения КдВ (ср. с формулой (16.9)).

Аналогичным образом можно получить асимптотический вид решения в области  $t \rightarrow \infty$ ,  $x \sim 8k_n^2 t$ . В этом случае, очевидно, в качестве  $B(x, t)$  можно принять выражение (18.17), где вместо  $c_1$ ,  $k_1$  стоят  $c_n$ ,  $k_n$ . Соответственно решение уравнения (18.2) будет опять иметь вид солитона, параметры которого определяются числами  $k_n$ ,  $c_n$ . Таким образом, при  $t \rightarrow \infty$  и достаточно больших положительных  $x$  решение будет иметь вид совокупности солитонов, движущихся в положительном направлении со скоростями, пропорциональными их амплитудам

$$v(x, t) = - \sum_n 2|\lambda_n| \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{|\lambda_n|}{6}} (x - x_0 - W_n t) \right\},$$

$$W_n = \frac{2}{3} |\lambda_n|, \quad (18.20)$$

где  $\lambda_n$  — собственные значения дискретного спектра уравнения Шредингера (18.1) при  $t=0$ .

Если теперь вернуться к уравнению КдВ в форме (15.9), а начальное условие писать в виде (17.1), то амплитуды образующихся солитонов  $a_n$  связаны с собственными значениями уравнения Шредингера

$$\psi''(\xi) + \frac{\sigma^2}{6} [\varphi(\xi) + E_n] \psi(\xi) = 0 \quad (18.21)$$

соотношениями

$$a_n = -2u_0 E_n, \quad (18.22)$$

где  $\sigma$  — параметр подобия (17.5), а  $u_0$  — амплитуда начального возмущения (17.1).

Отсюда, в частности, следует, что если  $\varphi(\xi) < 0$ , то солитоны не могут возникнуть, каково бы ни было  $\sigma$ .

Если  $\varphi(\xi)$  удовлетворяет условию  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi = 0$ , то солитоны появляются только при достаточно большом  $\sigma$ . Этот случай рассматривается в § 21.

Наконец, если

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi > 0, \quad (18.23)$$

то уравнение Шредингера всегда имеет дискретный спектр; при малых  $\sigma$  он состоит всего из одного собственного значения, которое может быть найдено по

теории возмущений  $E = -\frac{\sigma^2}{24} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \right]^2$  (см. [72], § 45).

Соответственно при условии (18.23) всегда образуется по крайней мере один солитон, амплитуда которого при малых  $\sigma$  приближенно равна

$$a = \frac{u_0 \sigma^2}{12} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi \right]^2. \quad (18.24)$$

Условие применимости теории возмущений имеет при этом вид

$$\sigma^2 \ll 12 = \sigma_s^2, \quad (18.25)$$

где  $\sigma_s$  — значение параметра подобия для солитона (см. (17.6)).

Можно также получить достаточно простые выражения, определяющие амплитуду солитонов в другом предельном случае — при больших  $\sigma$ . Этот вопрос мы рассмотрим в § 19.

Перейдем теперь к области малых и отрицательных значений  $x$ . Асимптотический вид решения в этой области при достаточно больших  $t$  определяется первым членом в правой части формулы (18.15). Из общего вида этого члена и характера зависимости коэффициентов  $b$  от времени видно, что он описывает осциллирующий «хвост», имеющий вид волнового пакета, о котором говорилось в начале этого параграфа. Детальное его исследование с помощью приведенных выше формул затруднительно.

Хотя этот пакет и расплывается, его вклад в инварианты, в частности в «энергию»  $I_2$  и «импульс»  $I_1$  остается постоянным, так что возникает вопрос об относительной величине этих вкладов. Для исследования этого вопроса будем исходить из законов сохранения  $I_m(t) = I_m(0)$ .

Пусть начальное возмущение распалось на  $N$  солитонов с амплитудами  $a_r$  ( $r=1, 2, \dots, N$ ) и волнового пакет. После того как солитоны разойдутся и сместятся на достаточно большое расстояние от волнового пакета, можно будет считать, что значение инварианта  $I_m(0)$  равно сумме соответствующих инвариантов для отдельных солитонов и волнового пакета.

Обозначая значение инварианта  $I_m$  для волнового пакета через  $I'_m$  и учитывая формулу (16.10), получим законы сохранения в виде

$$\sqrt{12\beta} \cdot 2^m \frac{[(m-1)!]^2}{(2m-1)!} \sum_{r=1}^N a_r^{(2m-1)/2} + I'_m = I_m(0), \quad (18.26)$$

где

$$\bar{I}_m(0) = \int_{-\infty}^{\infty} Q_m[u(x, 0)] dx \equiv u_0^{m-1/2} \beta^{1/2} \sigma \int_{-\infty}^{\infty} \bar{Q}_m[\varphi(\xi)] d\xi. \quad (18.27)$$

Введенная здесь величина  $\bar{Q}_m[\varphi(\xi)]$  есть плотность инварианта  $m$ -го порядка, в которую вместо  $u$  подставлено  $\varphi(\xi)$ , а вместо  $\beta$  — величина  $1/\sigma^2$ :

$$\bar{Q}_m[\varphi(\xi)] = Q_m[u]|_{u=\varphi(\xi)}; \quad \beta = 1/\sigma^2.$$

В частности, из формулы (16.8) вытекает соотношение [73]

$$\bar{Q}_m[\varphi(\xi)] = \frac{\varphi^m(\xi)}{m} - \frac{1}{\sigma^2} \frac{(m-1)(m-2)}{2} \varphi_{\xi}^2 \varphi^{m-3} + O(\sigma^{-4}), \quad (18.28)$$

которое является асимптотическим выражением для  $\bar{Q}_m(\xi)$  при больших  $\sigma$  (но не обязательно малых  $\beta$ ) \*).

\*) При  $m=2, 3$  формула (18.28) является точной.

Не останавливаясь на случаях, когда  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) d\xi = 0$

и заведомо ясно, что вклад волновых пакетов в  $I_m$  превышает или сравним с вкладом от солитонов, будем предполагать, что выполняется условие (18.23). Если при этом  $\sigma^2/12$  достаточно мало, то образуется всего один солитон, амплитуда которого определяется формулой (18.24). Подставляя ее в уравнение (18.26) при  $m=2$ , получим, что энергия солитона является величиной второго порядка малости относительно  $\sigma^2/\sigma_0^2$ , так что основная часть энергии начального возмущения остается в «хвосте». Что касается импульса (или площади контура), то нетрудно убедиться, что импульс солитона вдвое превышает импульс начального возмущения, так что площадь контура «хвоста» отрицательна и равна по величине площади профиля начального возмущения.

С другой стороны, если начальное возмущение удовлетворяет условию

$$\varphi(\xi) \geq 0, \quad \varphi(\pm\infty) = 0, \quad (18.29)$$

а величина параметра подобия  $\sigma$  достаточно велика, то, как показывает анализ, проведенный в работах [73, 74], вкладом волнового пакета в инварианты  $I_m$  можно пренебречь.

Рассмотрим, например, начальное возмущение с профилем

$$\varphi(\xi) = \operatorname{sech}^2 \xi. \quad (18.30)$$

В этом случае уравнение Шредингера (18.21) имеет простое аналитическое решение (см., например, [72], §§ 23, 25) и для амплитуд солитонов получается выражение

$$\frac{a_r}{u_0} = \frac{3}{\sigma^2} [1 + \sqrt{1 + 2\sigma^2/3} - 2r]^2; \quad (18.31)$$

$$r = 1, 2, \dots, N < \frac{1}{2} (1 + \sqrt{1 + 2\sigma^2/3}).$$

Подставляя (18.30) и (18.31) в формулы (18.26), (18.27), мы можем определить величины  $I'_m/I_m(0)$ , характеризующие относительные вклады волнового пакета в инварианты различных порядков. Результаты иллюстри-

руются следующей ниже таблицей, где приведены значения величины  $I'_m/I_m(0)$  (в процентах) для первых пяти инвариантов при различных значениях параметра  $\sigma$ . Через  $N$  обозначено число солитонов, образующихся при данном  $\sigma$ .

$\sigma^2$	$N$	$I'_m/I_m(0)$ (в процентах)				
		$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
15	2	-5,33	0,28	-0,09	0,07	-0,09
20	2	-7,16	0,51	-0,13	0,07	-0,07
25	2	-5,75	0,33	-0,07	0,03	-0,02
30	2	-3,30	0,11	-0,02	$5 \cdot 10^{-3}$	$-3 \cdot 10^{-3}$
50	3	-2,94	0,09	$-8 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$-5 \cdot 10^{-4}$
60	3	-2,09	0,04	$-3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-4}$	$-1 \cdot 10^{-4}$
90	4	-1,61	0,03	$-1 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$-2 \cdot 10^{-5}$
105	4	-1,17	0,01	$-6 \cdot 10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$-7 \cdot 10^{-6}$
140	5	-0,98	0,01	$-3 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$-2 \cdot 10^{-6}$
160	5	-0,80	$2 \cdot 10^{-3}$	$-2 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-5}$	$-8 \cdot 10^{-7}$

Из приведенных данных видно, что относительные значения инвариантов для волнового пакета убывают при увеличении  $\sigma$  и  $m$ ; при этом даже для  $N=2$  вклад волнового пакета невелик. Эти выводы справедливы и для других типов начальных возмущений, например для  $\varphi(\xi) = \exp(-\xi^2)$ .

### § 19. Асимптотические выражения для амплитуд солитонов и «хвостов» при больших $\sigma$

При больших значениях параметра  $\sigma$  число образующихся солитонов, вообще говоря, также велико, так что их можно характеризовать функцией распределения  $F(a)$ , определяющей число солитонов  $dN$  с амплитудами в интервале  $(a, a+da)$  [65]

$$dN = F(a) da. \quad (19.1)$$

С другой стороны, плотность числа уровней уравнения Шредингера (18.21) при больших  $\sigma$  определяется квазиклассической формулой (см., например, [72], § 48)

$$\frac{dN}{dE} = \left(\frac{\sigma^2}{6}\right)^{1/2} (2\pi)^{-1} \int [\varphi(\xi) - E]^{-1/2} d\xi; \quad \varphi(\xi) > E. \quad (19.2)$$

Учитывая (18.22), получаем следующее выражение для плотности числа солитонов при больших  $\sigma$  \*):

$$F(a) = \frac{\sigma}{4\pi} \left(\frac{1}{3u_0}\right)^{1/2} \int_M \frac{d\xi}{\sqrt{2u_0\varphi(\xi) - a}}, \quad (19.3)$$

где область интегрирования  $M$  определяется условием  $2u_0\varphi(\xi) > a$ .

$$(19.4)$$

Из (19.3), в частности, следует, что амплитуды солитонов не превышают удвоенного максимума начального возмущения (17.1)

$$F(a) = 0 \quad \text{при} \quad a > 2u_0 \max \varphi(\xi). \quad (19.5)$$

Интегрируя (19.3), получаем асимптотическое выражение для полного числа солитонов [65, 75]

$$N = \int_0^\infty F(a) da = \left(\frac{\sigma}{\pi\sqrt{6}}\right) \int_{\varphi(\xi) > 0} d\xi \sqrt{\varphi(\xi)}. \quad (19.6)$$

Таким образом, при больших  $\sigma$  число солитонов определяется вкладом только тех областей, где начальное возмущение положительно:  $\varphi(\xi) > 0$ .

Оценим теперь величину «хвоста» (волнового пакета), которая определяется значением инвариантов  $I'_m$ . При больших  $\sigma$  уравнения (18.26), (18.27), выражающие законы сохранения, принимают вид

$$(12\beta)^{1/2} \frac{2^m [(m-1)!]^2}{(2m-1)!} \int_0^\infty a^{(2m-1)/2} F(a) da + I'_m = \\ = l \frac{u_0^m}{m} \int_{-\infty}^\infty \varphi^m(\xi) d\xi \equiv \frac{1}{m} \int_{-\infty}^\infty u^m(x, 0) dx. \quad (19.7)$$

Подставляя сюда (19.3), получим [75]

$$I'_m = \frac{1}{m} \int_{u(x,0) < 0} dx u^m(x, 0), \quad m = 1, 2, \dots \quad (19.8)$$

\* Формула (19.3) была впервые получена в [65] другим методом и в несколько другой форме (вводя в (19.3) новую переменную интегрирования  $z = \varphi(\xi)$ , получим выражение (6) работы [65]).

Таким образом, величина  $I'_m$  при больших  $\sigma$  содержит вклады только тех областей, где начальное возмущение отрицательно. Если  $u(x, 0) \geq 0$  при всех  $x$ , то из (19.8) следует, что  $I'_m = 0$ , так что в этом случае можно говорить (с асимптотической точностью), что возмущение полностью распадается на солитоны. Результаты численных расчетов, приведенные в предыдущем параграфе, показывают, что этот результат, а также формула (19.6) имеют хорошую точность и при сравнительно небольших  $\sigma$  (см., например, таблицу на стр. 86).

Наконец, остановимся еще на одном аспекте изложенных в этом параграфе результатов [73]. Поскольку из определения числа  $\sigma$  (17.5) вытекает, что предельный

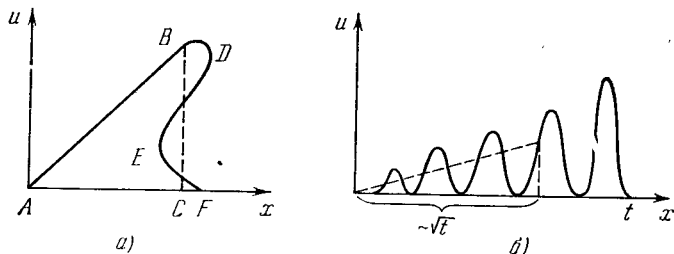


Рис. 19.1. Сравнение асимптотических решений уравнений  $u_t + uu_x = 0$  — кривая  $ABDEF$  (а),  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$  ( $\mu \rightarrow 0$ ) — кривая  $ABC$  (а),  $u_t + uu_x + \beta u_{xxx} = 0$  ( $\beta \rightarrow 0$ ) — сплошная кривая (б).

случай  $\sigma \gg 1$  может реализоваться при конечных  $u_0$ ,  $l$  и  $\beta \rightarrow 0$ , то полученные выше формулы определяют асимптотическое решение уравнения КдВ при малых значениях параметра  $\beta$ .

Рассмотрим это решение при условии  $\varphi(\xi) \geq 0$  и сравним его с решением уравнения для простой волны в гидродинамике (см. § 13)

$$u_t + uu_x = 0 \quad (19.9)$$

при тех же начальных условиях, а также с асимптотическим решением уравнения Бюргера (13.25) при  $\mu \rightarrow 0$  (это решение определяется формулами (14.9) и имеет треугольный профиль с ударной волной на фронте).

Решение уравнения (19.9) при достаточно больших  $t$  изображается кривой  $ABDEF$  на рис. 19.1, а; а решение уравнения Бюргера — кривой  $ABC$ . При одинаковых начальных условиях площади этих кривых равны, по-

скольку из уравнений (19.9) и (13.25) вытекает сохранение импульса  $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) dx$ .

Решение уравнения КдВ при  $\beta \rightarrow 0$  и  $\varphi(\xi) \geq 0$  состоит, согласно сказанному выше, из ряда солитонов, число которых растет как  $\beta^{-1/2}$ , а ширина убывает как  $\beta^{1/2}$ . Это решение изображено на рис. 19.1, б.

Заметим далее, что при  $\beta \rightarrow 0$  инварианты уравнения КдВ принимают, согласно (16.8), вид

$$I_m = \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} u^m(x, t) dx \quad (19.10)$$

и, следовательно, совпадают с инвариантами уравнения (19.9), которое имеет бесконечное число законов сохранения вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{u^m}{m} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^{m+1}}{m+1} \right) = 0. \quad (19.11)$$

Таким образом, при одних и тех же начальных условиях профиль  $ABDEF$  и профиль, изображенный на рис. 19.1, б, имеют в предельном случае  $\beta \rightarrow 0$  не только одинаковые площади, но и другие инварианты вида (19.10).

## § 20. Автомодельное решение уравнения Кортевега — де Вриза

Уравнение КдВ (15.9) инвариантно относительно преобразования

$$t \rightarrow \gamma t, \quad x \rightarrow \gamma^{1/2} x \quad \text{и} \quad u \rightarrow \gamma^{-2/3} u. \quad (20.1)$$

Поэтому ему удовлетворяет следующее автомодельное решение [20, 21]:

$$u(x, t) = \beta(3\beta t)^{-2/3} \psi((3\beta t)^{-1/2} x). \quad (20.2)$$

Подставляя (20.2) в уравнение КдВ, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции  $\psi(z)$ :

$$\psi''' - z\psi' + \psi\psi' - 2\psi = 0. \quad (20.3)$$

Мы ограничимся здесь исследованием решений этого уравнения, которые экспоненциально затухают при

$z \rightarrow \infty$  [21]. Таким образом, при  $z \rightarrow \infty$  мы можем пренебречь в (20.3) нелинейным членом. Полагая при этом

$$\psi(z) = f'(z), \quad (20.4)$$

получим для  $f(z)$  уравнение Эйри

$$f''(z) - zf(z) = 0, \quad (20.5)$$

решение которого, экспоненциально затухающее при  $z \rightarrow \infty$ , имеет вид (3.4).

Таким образом, асимптотика рассматриваемых решений уравнения (20.3) определяется выражением

$$\psi(z) \approx c \frac{d\text{Ai}(z)}{dz} \approx -\frac{c}{2} z^{1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \quad (z \rightarrow +\infty). \quad (20.6)$$

Поведение этих решений при небольших и отрицательных значениях  $z$  можно выяснить с помощью численного интегрирования. Соответствующие результаты

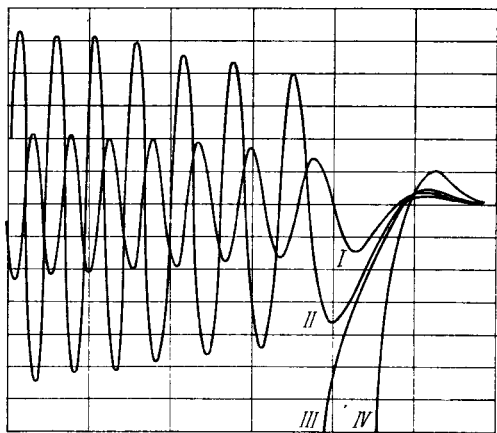


Рис. 20.1. Вид функций  $\psi_0(z)$ , определяющих автомодельное решение (20.2) уравнения КдВ при различных значениях постоянной  $c$ :

$$0 < c_I < c_{II} < c_{III} < c_{IV}.$$

изображены на рис. 20.1. Если постоянная  $c$  в (20.6) по модулю меньше некоторого критического значения

$$c_{кр}^{(-)} < c < c_{кр}^{(+)}, \quad c_{кр}^{(+)} \sim 3, \quad c_{кр}^{(-)} \sim -3, \quad (20.7)$$

то функции  $\psi(z)$  при отрицательных  $z$  осциллируют с медленно растущей амплитудой. При  $c > c_{кр}^{\pm}$  решения

$\psi(z)$  имеют особенность; можно показать, что эта особенность есть полюс вида  $(z-a)^2$ , где  $a$  — некоторое отрицательное число. Такие функции мы также рассматривать не будем.

Дальнейшие свойства решений при  $z \rightarrow -\infty$  можно установить следующим образом. Предположим, что постоянная  $c$  в (20.6) достаточно мала. Тогда решение уравнения (20.3) будет мало отличаться от производной функции Эйри и при отрицательных  $z$ . Исходя из этого, будем искать асимптотику  $\psi(z)$  при  $z \rightarrow -\infty$  в следующем виде:

$$\psi(z) \approx c_1(z) \cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + c_2(z) \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (z \rightarrow -\infty), \quad (20.8)$$

где  $c_1(z)$ ,  $c_2(z)$  — медленно меняющиеся функции. Подстановка выражения (20.8) в уравнение (20.3) приводит к следующему результату:

$$\psi(z) \approx z^{1/4} \left[ \alpha \cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + \beta \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] + O(z^{-1/2}), \quad (z \rightarrow -\infty) \quad (20.9)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — некоторые постоянные. Это соотношение хорошо согласуется с численными решениями.

Итак, рассмотренные нами автомодельные решения уравнения КдВ экспоненциально затухают при  $z \rightarrow \infty$ , а при  $z \rightarrow -\infty$  либо осциллируют с медленно растущей амплитудой, либо имеют полюс при  $|c| > |c_{кр}|$ . По своему качественному поведению решения при  $|c| < |c_{кр}|$  весьма близки к соответствующим автомодельным решениям линеаризованного уравнения КдВ.

## § 21. Квазилинейные решения уравнения Кортевега — де Вриза

Аutomодельные решения, рассмотренные выше, представляют собой лишь один пример решений, качественно подобных решениям линеаризованного уравнения КдВ. В этом параграфе мы рассмотрим более общий класс таких решений [57].

Остановимся сначала на вопросе о нелинейных поправках к решениям линеаризованного уравнения КдВ (3.2). Последние представляют собой волновые пакеты, общий вид которых изображен, например, на рис. 3.1. В коротковолновой области этих пакетов осцилляции могут рассматриваться как квазистационарные синусоидальные волны с медленно меняющимся волновым числом  $k$  и амплитудой  $a$  (см. формулы (3.11) и (3.13)).

При учете нелинейного члена в уравнении КдВ соответствующие нелинейные поправки в первом приближении будут описываться членами порядка  $s^2$  в формуле (10.15), где  $s^2$  определяется уравнением (10.16). Отсюда следует, что условие малости нелинейных членов имеет вид

$$s^2 \approx 2a/3\beta k^2 \ll 1. \quad (21.1)$$

Подставляя выражения для  $a$  и  $k$  из (3.11), (3.13) в (21.1), получаем

$$s^2 \sim |\beta^{-1} x^{-5} t^3|^{1/2} \chi(|x/3\beta t|^{1/2}), \quad (21.2)$$

где  $\chi(k)$  — фурье-образ начального возмущения (см. формулу (3.10)). Рассмотрим теперь движение точки с постоянной фазой колебаний, например, гребня волны в пакете. Уравнения движения этой точки имеют, согласно (3.11), следующий вид:

$$z = (3\beta t)^{-1/2} x = \text{const.}$$

Определяя отсюда  $x$  и подставляя в (21.2), получим зависимость величины  $s^2$  от времени  $t$  для точки с фиксированной фазой

$$s^2(t) \sim \beta^{-1} (\beta t)^{1/2} |\chi(k)|, \quad k = \text{const} \cdot (\beta t)^{-1/2}.$$

Учитывая (3.10), получаем, что при больших  $t$

$$s^2(t) \sim p_r \beta^{-1} (\beta t)^{(1-r)/2}, \quad (21.3)$$

где  $p_r$  — первый отличный от нуля момент начального возмущения:

$$p_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n u(x, 0) dx, \quad (21.4)$$

$p_n = 0$  при  $n < r$ ,  $p_r \neq 0$ . В частности, если

$$p_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx \neq 0, \quad (21.5)$$

то  $s \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ , т. е. нелинейные эффекты станут существенными при достаточно больших  $t$ , каким бы ни было малым начальное возмущение  $u$ .

Если  $p_0 = 0$ , а  $p_1 \neq 0$ , то из (21.3) следует, что при  $t \rightarrow \infty$  величина  $s^2 \sim \beta^{-1} p_1 = \text{const}$ . Таким образом, в этом случае величина  $s^2$  и вместе с ней нелинейные эффекты будут малыми при всех  $t$ , если они были малыми при малых  $t$ .

Исходя из этого, можно искать решение уравнения КдВ при

$$p_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) dx = 0 \quad (21.6)$$

в виде, аналогичном (3.7), а именно

$$u(x, t) = \beta (3\beta t)^{-2/3} \sum_{k=0}^{\infty} (3\beta t)^{-k/3} \psi_k(z), \quad (21.7)$$

где

$$z = (3\beta t)^{-1/2} x, \quad (21.8)$$

а  $\psi_k(z)$  — некоторые функции, которые по аналогии с (3.7) мы будем предполагать затухающими при  $z \rightarrow \infty$ :

$$\psi_k(\infty) = 0. \quad (21.9)$$

Подставляя (21.7) в уравнение КдВ, получим рекуррентную систему уравнений для  $\psi_k(z)$

$$\psi_k''' - z\psi_k'' - (k+2)\psi_k' + \sum_{p=0}^k \psi_p \psi_{k-p} = 0, \quad (21.10)$$

которая определяет любую из функций  $\psi_k(z)$  через первые  $k-1$  функций. При  $k=0$  из (21.10) получается уравнение (20.3), т. е. первый член разложения (21.7) представляет собой автомодельное решение уравнения КдВ.

Исследуем теперь асимптотическое поведение решений системы (21.10). Благодаря условиям (21.9), при  $z \rightarrow \infty$  можно пренебречь нелинейными членами в системе



(21.10), т. е. заменить ее линейными уравнениями

$$\psi_k''' - z\psi_k' - (k+2)\psi_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Общие решения этих уравнений имеют вид  $\psi_k = \frac{d^{k+1}f}{dz^{k+1}}$ ,

где  $f(z)$  удовлетворяет уравнению

$$f''(z) - zf(z) = \text{const.}$$

Ограничиваясь, как и в § 20, решениями, экспоненциально затухающими при  $z \rightarrow \infty$ , мы должны положить  $\text{const} = 0$ , так что асимптотика функций  $\psi_k(z)$  при  $z \rightarrow \infty$  имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_k(z) &\approx c_k \frac{d^{k+1} \text{Ai}(z)}{dz^{k+1}} \approx \\ &\approx -\frac{(-1)^k}{2} c_k z^{k/2+1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} z^{3/2}\right) \quad (z \rightarrow \infty), \end{aligned} \quad (21.11)$$

где  $c_k$  — постоянные. При  $k=0$  мы возвращаемся к соотношению (20.6). Рассуждая далее, как и в предыдущем параграфе, можно заключить, что при  $z \rightarrow -\infty$  асимптотика функций  $\psi_k(z)$  имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_k(z) &\approx |z|^{k/2+1/4} \left[ \alpha_k \cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \beta_k \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \right] + \\ &+ |z|^{(k-1)/2} \left[ a_k \sin\left(\frac{4}{3}|z|^{3/2}\right) + b_k \cos\left(\frac{4}{3}|z|^{3/2}\right) + d_k \right] \\ &\quad (z \rightarrow -\infty), \end{aligned} \quad (21.12)$$

где мы выписали наряду с главными членами следующего порядка по  $z$ . Коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  в (21.12) определяются начальными условиями; постоянные слагаемые в фазах добавлены из соображений удобства, а величины

$a_k$ ,  $b_k$  и  $d_k$  выражаются через  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  следующим образом

$$\begin{aligned} a_k &= -\frac{1}{16} \sum_{p=0}^k (\alpha_{k-p} \alpha_p - \beta_{k-p} \beta_p); \\ b_k &= \frac{1}{8} \sum_{p=0}^k \alpha_{k-p} \beta_p; \\ d_k &= -\frac{1}{12} \sum_{p=0}^k (\alpha_{k-p} \alpha_p + \beta_{k-p} \beta_p). \end{aligned} \quad (21.13)$$

При  $k=0$  формулы (21.12) и (21.13) дают, естественно выражение (20.9).

Из соображений, изложенных в начале этого параграфа, следует, что при условии (21.6) и  $\sigma \rightarrow 0$  разложение (21.7) должно переходить в (3.7). Это позволяет написать приближенные выражения для коэффициентов  $c_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  через моменты начального возмущения, справедливые при малых  $\sigma$ :

$$c_k = \frac{(-1)^k}{\beta \sqrt{\pi}} \frac{p_{k+1}}{(k+1)!} + o(\sigma^2) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (21.14)$$

$$\alpha_{2m} = \frac{(-1)^m}{\beta \sqrt{\pi}} \frac{p_{2m+1}}{(2m+1)!} + o(\sigma^2); \quad \alpha_{2m+1} = o(\sigma^2);$$

$$\beta_{2m} = o(\sigma^2); \quad \beta_{2m+1} = \frac{(-1)^m}{\beta \sqrt{\pi}} \frac{p_{2m+2}}{(2m+2)!} + o(\sigma^2) \quad (21.15)$$

$$(m = 0, 1, 2, \dots).$$

Что касается общего разложения (21.7) и асимптотических выражений для  $\psi_k(z)$ , то они справедливы и при  $\sigma \sim 1$ . Хотя определить коэффициенты  $c_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_k$  в этом случае, вообще говоря, нельзя, из формул (21.7), (21.11), (21.12) можно извлечь полезную информацию относительно общего вида асимптотики решения при больших  $x$ .

Подставляя, например, соотношения (21.12) в (21.7), получаем следующее асимптотическое выражение для

решения при больших отрицательных  $z$ :

$$u = \left(\frac{k}{3\beta t}\right)^{1/2} \left\{ \Psi_1(k) \cos\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ \left. + \Psi_2(k) \sin\left(\frac{2}{3}|z|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \right\} + \\ + \frac{1}{12\beta^2 kt} \left\{ \frac{1}{2} \Psi_1(k) \Psi_2(k) \cos\left(\frac{4}{3}|z|^{3/2}\right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} [\Psi_1^2(k) - \Psi_2^2(k)] \sin\left(\frac{4}{3}|z|^{3/2}\right) - \frac{1}{3} [\Psi_1^2(k) + \Psi_2^2(k)] \right\}, \quad (21.16)$$

где

$$k = |x/3\beta t|^{1/2}, \quad z = (3\beta t)^{-1/3} x; \quad (21.17)$$

$$\Psi_1(k) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n k^n, \quad \Psi_2(k) = \beta \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n k^n. \quad (21.18)$$

В предельном случае  $\sigma \ll 1$ , когда имеют место соотношения (21.14), (21.15), выражения (21.18) принимают в соответствии с (3.10), (3.11) вид

$$\Psi_1 \approx (k\sqrt{\pi})^{-1} \text{Im } \chi(k), \quad \Psi_2 \approx (k\sqrt{\pi})^{-1} \text{Re } \chi(k), \quad (21.19)$$

где  $\chi(k)$  — фурье-образ начального возмущения  $u(x, 0)$ . При  $\sigma \sim 1$  соотношения (21.19) уже не имеют места. Тем не менее формула (21.16) полезна и в этом случае, так как она содержит важную информацию относительно общего характера решения. Из нее следует, что решение при  $x < 0$ ,  $|z| \gg 1$  имеет вид синусоидальных волн, фаза которых зависит от  $x$ ,  $t$ , как  $|z|^{3/2}$ , а амплитудные коэффициенты главной гармоники  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  зависят от  $x$ ,  $t$  только через локальное волновое число  $k$ , определяемое формулой (21.17)\*. При этом общая зависимость фаз и амплитуд главной гармоники от  $x$  и  $t$  — такая же, как и в решении линеаризованного уравнения КдВ. В связи

\*) Фаза выражается через локальное волновое число так же, как и в плоской волне с законом дисперсии  $\omega = -\beta k^3$ :  
 $\frac{2}{3}|z|^{3/2} - kx - \omega t$ .

с этим мы будем называть решения вида (21.7) квазилинейными решениями\*).

Оказывается, что квазилинейные решения существуют только при  $\sigma < \sigma_0$ , где  $\sigma_0$  — некоторое критическое значение числа  $\sigma$ . Это вытекает из того, что все функции

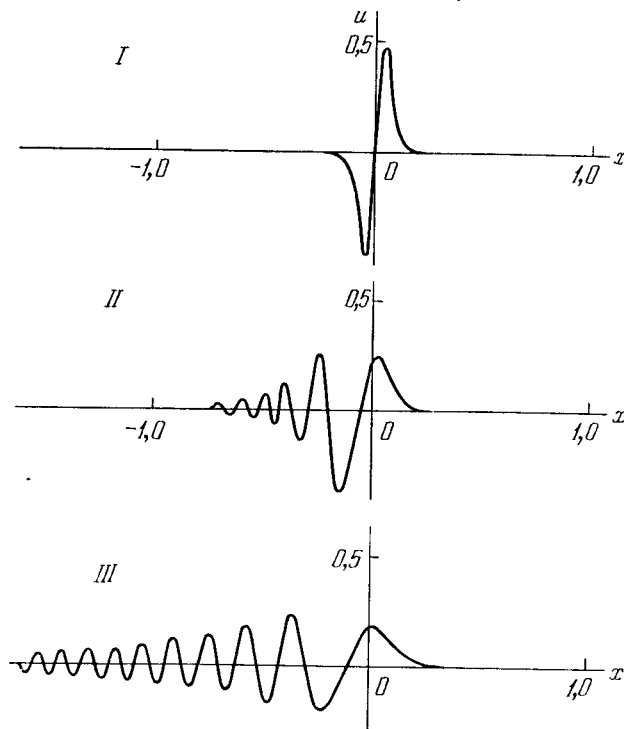


Рис. 21.1. Эволюция возмущений, описываемых уравнением КдВ при начальном условии (21.21) и  $\sigma = 2$ . Кривые I, II, III отвечают моментам времени  $\tau_1 = 0$ ,  $\tau_2 > 0$  и  $\tau_3 > \tau_2$ .

$\Psi_k(z)$  определяются уравнениями (21.10) через функцию  $\Psi_0(z)$ , входящую в автомодельное решение. Последнее же, как следует из результатов § 20, является регулярным лишь при условии (20.7). Используя для грубой оценки формулу (21.14) при  $k=0$ , получаем, что из (20.7),

\*) Как и в линейном приближении, асимптотические выражения (21.16) — (21.18) описывают достаточно большую часть волнового пакета при  $\beta t \gg 1$ .

(21.14) следует  $p_1/\beta < 7$ . Поскольку  $p_1 = \text{const} \cdot l^2 u_0$  ( $u_0$  и  $l$  — характерные амплитуда и длина начального возмущения), то

$$\sigma_0 \ll (7/\text{const})^{1/2}, \quad (21.20)$$

где  $\text{const} \sim 1$ .

Численные расчеты показывают, что при значениях  $\sigma$ , превышающих критическую величину  $\sigma_0$ , в головной

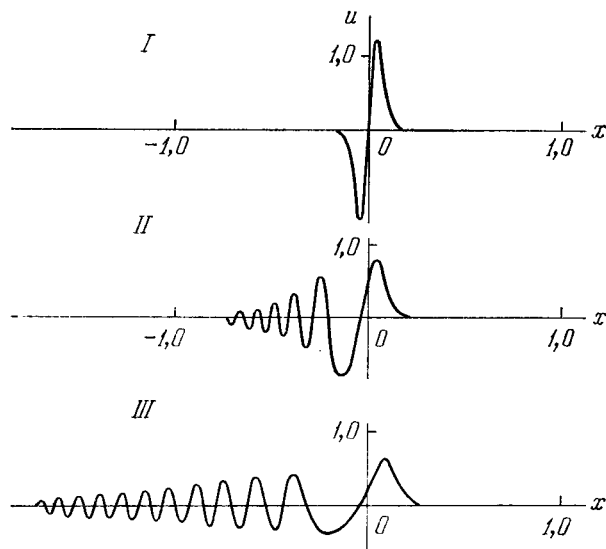


Рис. 21.2. То же, что на рис. 21.1, но при  $\sigma=6$ .

части решения возникает солитон (что естественно ожидать с точки зрения результатов § 18 \*). Такие решения, разумеется, уже не могут иметь вида (21.7).

В качестве иллюстрации приведем результаты численных решений уравнения КдВ (полученных в работе [76]) при начальном условии вида

$$u(x, 0) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{u_0}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/l^2}, \quad (21.21)$$

удовлетворяющем (21.6). Параметр подобия  $\sigma$  определен здесь как  $(u_0/\beta)^{1/2} l$ . Соответствующие численные решения

\*) Любопытно отметить, что формула (19.6), справедливая формально при больших  $\sigma$ , приводит к оценке для  $\sigma_0$ , примерно совпадающей с (21.20).

изображены на рис. 21.1—21.3. На первых двух рисунках представлены решения при  $\sigma=2$  и  $\sigma=6$  для трех моментов времени  $\tau_1=0$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$  ( $\tau_3 > \tau_2 > 0$ ). Мы видим, что при  $\sigma=2$  (рис. 21.1) самый правый максимум неподвижен, а остальные движутся влево. При этом амплитуды

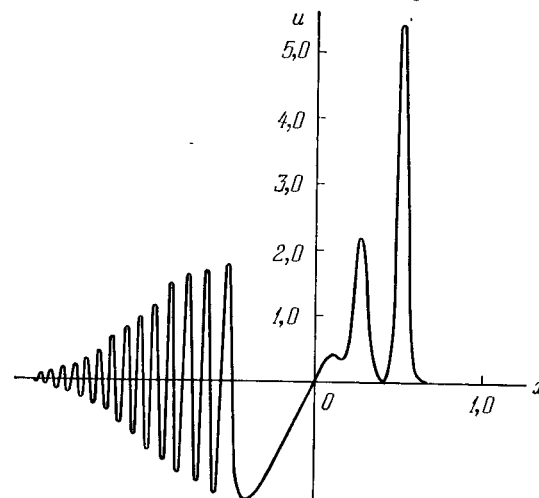


Рис. 21.3. Вид решения уравнения КдВ при начальном условии (21.21) и  $\sigma=40$ .

всех максимумов убывают с ростом  $\tau$ . На рис. 21.2 ( $\sigma=6$ ) видно, что головная волна движется вправо и при  $\tau \rightarrow \infty$  отрывается от «хвоста», расплывающегося влево. При этом амплитуда этой волны при больших  $\tau$  перестает изменяться. Скорость движения максимума, определенная экспериментально, приближается к скорости солитона той же амплитуды, а профиль ее довольно точно совпадает с профилем солитона.

На рис. 21.3 изображен профиль численного решения при  $\sigma=40$ . Как видно из этого рисунка, здесь образуется не менее двух солитонов.

## § 22. Обтекание тонкого тела в диспергирующей среде

Результаты предыдущего параграфа оказываются полезными при изучении обтекания тел в слабо диспергирующих средах, где течение можно описывать квазигидродинамическими уравнениями Буссинеска (10.1) [57].

Ограничимся для простоты случаем плоскопараллельного потока, т. е. будем предполагать, что обтекаемое тело имеет вид цилиндра с сечением, изображенным на рис. 22.1, и образующими, параллельными оси  $z$ . При

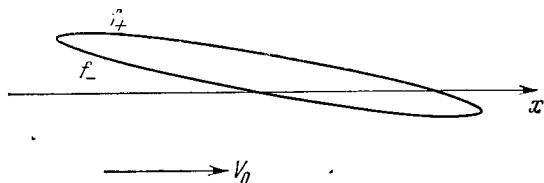


Рис. 22.1. Поперечный разрез тела, обтекаемого потоком под некоторым углом атаки.

этом  $v_z \equiv 0$ . Будем также считать, что движение стационарно и тело в нашей системе отсчета неподвижно. Тогда можно положить

$$\mathbf{v} = \mathbf{V}_0 + \nabla\varphi(x, y), \quad (22.1)$$

где  $\varphi$  — потенциал скорости, а  $\mathbf{V}_0$  — скорость потока вдали от тела, которую мы направим вдоль оси  $x$ . Для достаточно тонкого тела величину  $\varphi$  можно считать малой.

Ограничиваясь нелинейными членами второго порядка и полагая, как и в § 10, дисперсионный член малым, приходим к следующему уравнению для потенциала:

$$\varphi_{yy} - (M^2 - 1)\varphi_{xx} - \frac{M}{c_0} \{ [2 + M^2(\gamma - 1)] \varphi_x \varphi_{xx} + 2\varphi_y \varphi_{xy} \} + \frac{2M^4}{c_0} \beta \varphi_{xxxx} = 0, \quad (22.2)$$

где

$$M = V_0/c_0$$

есть число Маха,  $c_0$  — фазовая скорость волн в линейном приближении при  $k \rightarrow 0$ ,  $\beta$  — параметр дисперсии, а  $\gamma$  — показатель «адиабаты» соответствующей гидродинамики (см. §§ 5—7). Уравнение (22.2) при  $\beta = 0$  совпадает с точностью до нелинейных членов второго порядка включительно с уравнением для потенциала скорости при двумерном стационарном обтекании (см. [1]), урав-

нение (106,3)). Здесь мы будем рассматривать только сверхзвуковое обтекание, когда  $M > 1$ . Для того чтобы можно было пренебрегать нелинейными членами третьего и более высокого порядка малости, необходимо потребовать, чтобы обтекаемое тело было достаточно тонким, а именно

$$l/b \gg M, \quad (22.3)$$

где  $b$  — эффективная толщина, а  $l$  — длина тела. Кроме того, длина дисперсии  $\delta = (\beta/c_0)^{1/2}$  также должна быть малой по сравнению с  $l$ . Малым должен быть и угол атаки  $\alpha$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать уравнение (22.2) при граничном условии, состоящем в равенстве нулю нормальной составляющей скорости на поверхности обтекаемого тела, т. е.

$$[(\varphi_x + V_0)(b/l)f_{\pm}(x/l) - \varphi_y]_{y=bf_{\pm}(x/l)} = 0, \quad (22.4)$$

где  $y = bf_{\pm}(x/l)$  — уравнения верхней и нижней линий профиля тела соответственно (рис. 22.1).

Если бы дисперсии не было, т. е.  $\beta = 0$ , то для достаточно тонкого тела течения в областях  $y > 0$  и  $y < 0$  имели бы вид простых волн (с точностью до членов третьего порядка по  $\varphi$  [1]), т. е. было бы  $\varphi_y = F_{\pm}(u)$ , где

$$u = \varphi_x, \quad (22.5)$$

а  $F_{\pm}(u)$  — некоторые функции, имеющие разный вид в верхней и нижней полуплоскостях. Эти функции удовлетворяют одной и той же системе уравнений

$$[(M^2 - 1) + au] \frac{\partial u}{\partial x} - \left[ F'(u) - 2 \frac{M}{c_0} F(u) \right] \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (22.6a)$$

$$a = \frac{M}{c_0} [2 + M^2(\gamma - 1)];$$

$$F'(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (22.6b)$$

первое из которых следует из соотношения  $\varphi_{yy} = F'(u) \frac{\partial u}{\partial y}$  и уравнения (22.2), где положено  $\beta = 0$ , а второе получается из  $\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$  и (22.5). Чтобы эта система имела нетривиальные решения для  $du/dx$  и  $du/dy$ ,

её определитель должен равняться нулю. Отсюда получается следующее уравнение для  $F(u)$ :

$$F'^2 - 2(M/c_0)F'F - (au + M^2 - 1) = 0.$$

Решение этого уравнения с точностью до членов второго порядка по  $u$  включительно имеет вид

$$F_{\pm}(u) = \pm \sqrt{M^2 - 1} u \pm \frac{M^3(\gamma + 1)}{4\sqrt{M^2 - 1}c_0} u^2, \quad (22.7)$$

где верхний знак берется для полуплоскости  $y > 0$ , а нижний — для  $y < 0$ . Подстановка (22.7) в (22.6б) приводит к уравнению

$$u_y \pm \sqrt{M^2 - 1} u_x \pm \frac{M^3(\gamma + 1)}{2\sqrt{M^2 - 1}c_0} uu_x = 0, \quad (22.8)$$

решение которого описывает упомянутые выше простые волны.

Пусть теперь  $\beta \neq 0$ . Тогда течения в верхней и нижней полуплоскостях будут иметь характер квазипростых волн (при условии (22.3) и, разумеется, при малых  $\beta$ ). Для вывода соответствующих уравнений можно использовать подход, описанный в §§ 13 и 15.

Ищем решение в виде

$$\varphi_y = F(u) + \varepsilon g(x, y), \quad (22.9)$$

где  $\varepsilon = \beta/c_0 b^2 \ll 1$ ,  $g(x, y)$  — некоторая функция порядка единицы; а  $F(u)$  по-прежнему определяется формулой (22.7). Как и в аналогичных случаях в §§ 13, 15 мы можем считать, что  $g(x, y)$  удовлетворяет уравнению

$$\pm \sqrt{M^2 - 1} g_x + g_y = 0 \quad (22.10)$$

(ср. с соотношениями (13.17) и (15.6а)).

Еще одно уравнение для  $g(x, y)$  можно получить, если подставить (22.9) в (22.2) и воспользоваться соотношениями  $\varphi_{yx} = u_y$  и (22.7). После элементарных вычислений получаем

$$\varepsilon (\pm \sqrt{M^2 - 1} g_x - g_y) = \frac{2M^4}{c_0} \beta u_{xxx}, \quad (22.11)$$

$$F'_{\pm}(u) u_x - u_y = -\varepsilon g_x. \quad (22.12)$$

Исключая  $g_x$  и  $g_y$  из (22.10) — (22.12), получаем с точностью до членов второго порядка по  $u$  и первого порядка по  $\varepsilon$  включительно

$$u_y \pm \sqrt{M^2 - 1} u_x \pm \frac{(\gamma + 1)M^3}{2\sqrt{M^2 - 1}c_0} uu_x \mp \frac{\beta M^4}{c_0 \sqrt{M^2 - 1}} u_{xxx} = 0, \quad (22.13)$$

где знак при корне совпадает со знаком  $y$ . Что касается граничного условия для этого уравнения, то в качестве такого следует взять (22.4), где вместо  $\varphi_y$  подставлено (22.9), а  $F(u)$  и  $g$  определяются выражениями (22.7) и (22.12) соответственно, т. е.

$$\left[ \frac{b}{l} (u + V_0) f'_{\pm} \left( \frac{x}{l} \right) \pm \sqrt{M^2 - 1} u \pm \frac{M^3(\gamma + 1)}{4c_0 \sqrt{M^2 - 1}} u^2 \mp \frac{2M^4 \beta}{c_0 \sqrt{M^2 - 1}} u_{xx} \right]_{y=f_{\pm}(x/l)} = 0. \quad (22.14)$$

Поскольку нас в дальнейшем будут интересовать лишь эффекты, обусловленные нелинейными членами в уравнениях, мы заменим (22.14) приближенным граничным условием

$$u \rightarrow \mp \frac{V_0 b}{\sqrt{M^2 - 1}} l f'_{\pm} \left( \frac{x}{l} \right) \quad (y \rightarrow \pm 0), \quad (22.15)$$

которое получится, если в (22.14) опустить члены второго и более высокого порядка малости относительно величины  $f'_{\pm}(\xi)$ , являющейся малой для достаточно тонкого тела \*).

\* Поправки к (22.15) можно получить, решая (22.14) последовательными приближениями и рассматривая (22.15) как первое приближение. При этом добавку к решению, связанную со вторым приближением в граничном условии, достаточно вычислять уже в линейном приближении.

Перейдем к новым (безразмерным) переменным:

$$\xi = \pm \frac{\sqrt{M^2 - 1} y - x}{l},$$

$$\tau = \frac{y(\gamma + 1) M^4 b}{2(M^2 - 1) l^2}, \quad \eta = \mp \frac{u\sqrt{M^2 - 1} l}{bMc_0}. \quad (22.16)$$

Тогда уравнение (22.13) примет вид уравнения КдВ

$$\eta_\tau + \eta \eta_\xi + B \eta_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (22.17)$$

где

$$B = \pm \frac{2\beta\sqrt{M^2 - 1}}{c_0 b l (\gamma + 1)}. \quad (22.18)$$

Уравнение (22.17) должно решаться при условиях

$$\eta(\tau = 0, \xi) = f'_\pm(-\xi), \quad (22.19)$$

$$\eta(\tau, \xi = \infty) = 0. \quad (22.20)$$

Одновременно мы получили следующий закон подобия: все течения, возникающие при обтекании подобных друг другу контуров (т. е. определяемых одинаковыми безразмерными функциями  $f_\pm(\xi)$ ), и с одинаковыми числами  $B$  подобны. Число  $B$  играет роль, аналогичную величине

$$1/\sigma^2, \quad (22.21)$$

где  $\sigma$  — параметр подобия, определенный в § 16. Таким образом, чем меньше величина  $B$ , тем больше степень нелинейности.

Для определения общего качественного характера течения за телом важно знание первых моментов начального условия (22.19):

$$p_n = \int \xi^n f'_\pm(-\xi) d\xi \quad (n = 0, 1).$$

В частности, нетрудно убедиться, что если угол атаки отличен от нуля, то  $p_0 \neq 0$ .

Рассмотрим подробнее более простой случай, когда угол атаки равен нулю. В этом случае

$$p_0 = 0, \quad p_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \xi f'_\pm(-\xi) d\xi = \int_{A_1}^{A_2} f_\pm(\xi) d\xi \neq 0, \quad (22.22)$$

где  $A_1, A_2$  — крайние точки тела. Таким образом, при обтекании тела под нулевым углом атаки течение опре-

деляется решениями уравнения КдВ, рассмотренными в предыдущем параграфе (см. формулы (21.7) и далее, где нужно сделать замены  $x \rightarrow \xi, t \rightarrow \tau, \beta \rightarrow B, B \rightarrow \sigma^{-2}$ ). Из этих результатов вытекает, что структура потока будет различной при малых и больших  $z = (3B\tau)^{-1/3} \xi$ .

Рассмотрим эти области подробнее. При этом будем предполагать, что  $B > 0$  (переход к отрицательным  $B$  осуществляется заменой  $\eta \rightarrow -\eta, \xi \rightarrow -\xi, \tau \rightarrow \tau$ ).

а)  $z < 0, |z| \gg 1$ . Согласно формулам (22.16) это область, находящаяся внутри угла Маха и не слишком

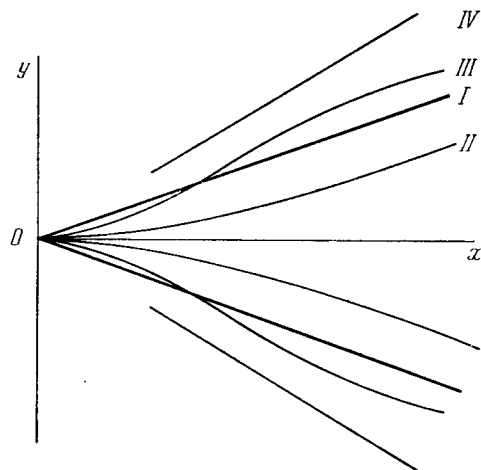


Рис. 22.2. Линии равной фазы  $z = \text{const}$  при обтекании тонкого тела с углом атаки, равным нулю. I — линии Маха ( $z=0$ ), II —  $z < 0$ , III —  $z < 0$ , IV — солитоны.

близко примыкающая к линиям Маха (обозначенным цифрой I на рис. 22.2). Если  $B > B_0 = \sigma_0^{-2}$ , где величина  $\sigma_0$  определена формулой (21.20), то течение описывается квазилинейным решением уравнения Кортевега — де Вриза. В рассматриваемой области это решение дается формулами (21.16) — (21.18). Если пренебречь кратными гармониками, то линии равной фазы определяются уравнением  $z = \text{const}$ , или, в координатах  $x, y$ ,

$$x = \pm \sqrt{M^2 - 1} y \pm c \left( \frac{3\delta^2 M^4}{\sqrt{M^2 - 1}} \right)^{1/3} y^{1/3}, \quad (22.23)$$

где  $c = -z$  (знаки  $\pm$  берутся для верхней и нижней полуплоскостей). На рис. 22.2 кривые этого семейства

обозначены цифрой *II*. Касательные к линиям (22.23) имеют угловой коэффициент, асимптотически приближающийся при  $y \rightarrow \infty$  к  $(M^2 - 1)^{1/2}$ ; значение параметра  $c$  возрастает в направлении от линии Маха ( $z=0$ ) к оси  $x$  ( $z=\infty$ ).

Уравнение линий постоянного волнового числа  $k = \text{const}$  имеет в координатах  $x, y$  вид  $y = \text{const} \cdot x$ , причем  $k$  возрастает от линии Маха к оси  $x$  (где  $k = \infty$ ). Таким образом, коротковолновая область находится вдали от линий Маха, в то время как около последних волны, исходящие от обтекаемого тела, являются длинными.

б) Перейдем теперь к области длинных волн. Качественное представление о ней можно получить, рассматривая точки с фиксированным  $z \leq 1$  и достаточно большими  $\tau$ :  $(3B\tau)^{1/2} \gg 1$ . Тогда в формуле (21.7) можно ограничиться первым членом, который представляет собой автомодельное решение (20.2). Вид функции  $\psi_0(z)$  изображен на рис. 20.1.

Обозначим через  $z_0$  значение  $z$ , при котором  $\psi_0(z)$  имеет крайний правый максимум (будем называть его в дальнейшем первым). Из рис. 20.1 видно, что  $z_0 > 0$ . При уменьшении параметра подобия  $\sigma$  (здесь  $\sigma^{-2} = B$ ) функция  $\psi_0(z)$  стремится к соответствующему решению линеаризованного уравнения, т. е. к  $\frac{dAi(z)}{dz}$ , последнее же имеет первый экстремум при  $z=0$ . Таким образом,  $z_0 \rightarrow 0$  при уменьшении  $\sigma$ . Как показывают численные расчеты (см. рис. 20.1),  $z_0$  все еще очень мало даже при  $\sigma \rightarrow \sigma_0 \sim 3$ , когда перестают существовать квазилинейные течения. Уравнение линии первого максимума  $(3B\tau)^{-1/2} \xi = z = c$  в координатах  $x, y$  имеет вид (22.23), где  $c$  является отрицательной величиной, малой по модулю. Эта кривая изображена на рис. 22.2 под номером *III*; она выходит за пределы угла Маха, а ее наклон при  $y \rightarrow \infty$  уменьшается, приближаясь к наклону линии Маха.

в) При  $\sigma > \sigma_0$  (т. е.  $B < \sigma_0^{-2}$ ), в профилях решения  $\eta(\xi, \tau)$  появляются солитоны. Вершины последних «движутся» вдоль линий  $\xi = \eta_0 \tau / 3 + \text{const}$ , где  $\eta_0$  — амплитуда солитона. В координатах  $x, y$  уравнения этих линий имеют вид

$$x = \pm y \sqrt{M^2 - 1} \left[ 1 \mp \frac{\eta_0 (\gamma + 1) M^4 b}{6 (M^2 - 1)^{3/2} l} \right] + \text{const}, \quad (22.24)$$

т. е. представляют собой прямые, лежащие вне угла Маха (кривая *IV*, рис. 22.2). Их угловой коэффициент увеличивается с амплитудой  $\eta_0$ ; эти амплитуды не должны меняться после того как солитон сформировался.

Наконец, уточним область применимости всех наших асимптотических выражений.

Соответствующее условие проще всего получить из уравнения (22.23), потребовав, чтобы второй член в правой части был значительно меньше первого. Тогда, принимая во внимание, что  $c = -z$ , получим

$$|x - \sqrt{M^2 - 1} y| \ll \sqrt{M^2 - 1} |y|. \quad (22.25)$$

Кроме того, условие  $B\tau \gg 1$  (см. примечание \*) на стр. 97) означает, что

$$y/l \gg (l/\delta)^2 M^{-4} (M^2 - 1)^{1/2}, \quad (22.26)$$

где  $\delta = (\beta/c_0)^{1/2}$  — длина дисперсии.

### § 23. Ударные волны в диспергирующих средах

Как мы видели в § 14, ударные волны небольшой интенсивности в газодинамике могут быть описаны с помощью уравнения Бюргера. Чтобы выяснить влияние дисперсии на структуру ударной волны, можно исходить из уравнения Кортевега — де Вриза — Бюргера (15.14).

Рассмотрим стационарные решения этого уравнения. Подставляя

$$u = u(x - Wt) \quad (23.1)$$

в (15.14), получим для функции  $u(x)$  обыкновенное дифференциальное уравнение \*)

$$\beta u''' - \mu u'' + u'(u - W) = 0. \quad (23.2)$$

Интегрируя уравнение (23.2) один раз при условии \*\*)

$$u = u' = u'' = 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow \infty, \quad (23.3)$$

\*) Напомним, что уравнение (23.2), как и (15.14), написано в системе отсчета, движущейся со скоростью  $c_0$  относительно среды.

\*\*\*) Условие  $u(\infty) = 0$  не нарушает общности. В соответствии с инвариантностью уравнения (23.2) относительно преобразования (10.6) оно означает фиксацию системы отсчета.

получим

$$\beta u'' - \mu u' + \frac{1}{2} u^2 - Wu = 0. \quad (23.4)$$

При исследовании этого уравнения можно воспользоваться простой механической аналогией, основанной на том, что оно имеет вид уравнения движения частицы с массой  $\beta$  \*)

$$P(u) = \frac{u^3}{6} - \frac{Wu^2}{2} \quad (23.5)$$

и силой трения с коэффициентом  $\mu$ , причем роль времени  $\tau$  играет  $-x$ . Вид  $P(u)$  изображен на рис. 23.1. Если принять, что при  $\tau = -\infty$  (т. е.  $x = \infty$ ) наша «частица» находилась в начале координат ( $u=0$ ), то при

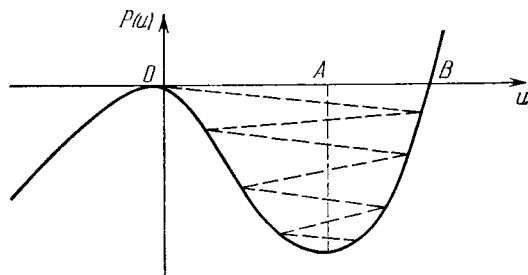


Рис. 23.1. График эффективного потенциала (23.5):  $OA=2W$ ,  $OB=3W$ .

$\tau = \infty$  ( $x = -\infty$ ) она окажется в точке  $A$  ( $u(-\infty) = 2W$ ), соответствующей минимальной энергии.

Таким образом, решение уравнения (23.4) описывает ударную волну, скорость которой  $W$  (в рассматриваемой системе отсчета) связана с предельными значениями  $u(\infty) = 0$  и  $u(-\infty) = u_1$  соотношением

$$W = \frac{u_1}{2} = \frac{\Delta u}{2}, \quad \Delta u = u(-\infty) - u(\infty). \quad (23.6)$$

В системе отсчета, где среда покоится, скорость ударной волны есть  $\Delta u/2 + c_0$ , а соответствующее число Маха

\*) Пока предполагаем, что  $\beta > 0$ .

равно

$$M = 1 + \Delta u/2c_0. \quad (23.7)$$

Это выражение не зависит от дисперсии и совпадает с известной зависимостью между числом Маха и величиной скачка для слабых ударных волн.

Характер структуры ударной волны зависит от соотношения между дисперсионным и диссипативным параметрами  $\beta$  и  $\mu$ . Если величина  $\mu$  достаточно мала, то «частица» будет падать на дно «ям», совершая колебания между ее стенками. В этом случае мы получаем волну с осциллирующей структурой (рис. 23.2) [77, 78].

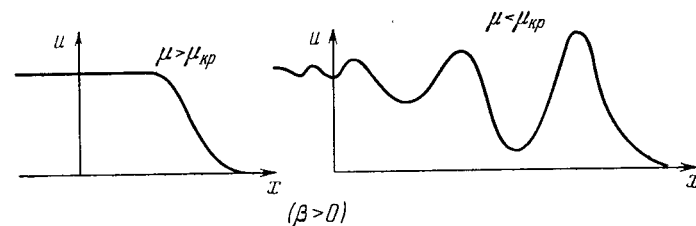


Рис. 23.2. Структура ударной волны в диспергирующей среде при  $\beta > 0$ .

При очень малых значениях  $\mu$  энергия частицы будет убывать достаточно медленно и первые несколько осцилляций на фронте волны будут близки к солитонам, движущимся со скоростью  $W$ :

$$u \approx 3W \operatorname{sech}^2 \left[ \sqrt{\frac{W}{4\beta}} (x - x_0 - Wt) \right] \quad (23.8)$$

(можно показать, что расстояния между этими солитонами логарифмически растут при  $\mu \rightarrow 0$  [77]). Если величина «коэффициента трения»  $\mu$  больше некоторого критического значения  $\mu_{кр}$ , то движение «частицы» будет аperiodическим и мы получим ударную волну с монотонной структурой, как и в обычной газодинамике.

Для определения значений диссипативного коэффициента  $\mu$ , отвечающих монотонному и осциллирующему профилям ударной волны, исследуем асимптотическое поведение решений уравнения (23.4) при  $x \rightarrow -\infty$ . Полагая в этом уравнении

$$u(x) = u_1 + f(x) \equiv \Delta u + f(x), \quad (23.9)$$



где  $f(x)$  — малая величина, и линеаризуя его относительно  $f(x)$ , получим для функции  $f(x)$  уравнение:

$$\beta f''' - \mu f' + Wf = 0. \quad (23.10)$$

Решения этого уравнения пропорциональны  $\exp(\rho x)$ , причем

$$\rho = \frac{\mu}{2\beta} \pm \left( \frac{\mu^2}{4\beta^2} - \frac{W}{\beta} \right)^{1/2}. \quad (23.11)$$

Отсюда следует, что ударная волна имеет монотонный профиль при  $\mu > \mu_{кр}$  и осцилляторный при  $\mu < \mu_{кр}$ , где

$$\mu_{кр} = \sqrt{4\beta W} = \sqrt{2\beta \Delta u}. \quad (23.12)$$

Если  $\mu \ll \mu_{кр}$ , то асимптотический вид решения при  $x \rightarrow -\infty$  следующий:

$$u = u_1 + \text{const} \cdot \exp\left(\frac{\mu x}{2\beta}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\Delta u}{2\beta}} x\right). \quad (23.13)$$

Выше предполагалось, что  $\beta > 0$ . При  $\beta < 0$ , как мы знаем, солитоны «отрицательны» и всегда находятся

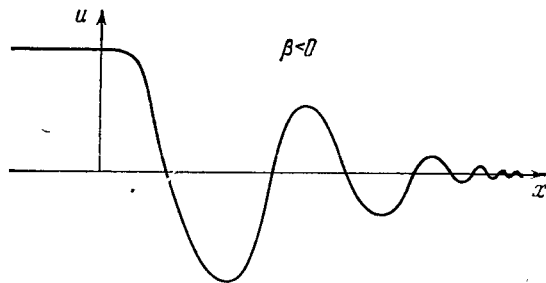


Рис. 23.3. Осциллирующая структура ударной волны при  $\beta < 0$

сзади «хвоста». В этом случае нетрудно убедиться, что осциллирующий фронт ударной волны будет иметь вид, изображенный на рис. 23.3. Такой структурой обладают, например, «косые» ударные волны в замагниченной плазме, где параметр дисперсии  $\beta$  определяется формулой (7.20) (при условии  $\text{ctg}^2 \alpha > m_e/m_i$ ) [38, 40]\*).

\*) Оба типа осциллирующих ударных волн наблюдались экспериментально в плазме (см., например, [79]) и в нелинейных линиях передачи (электромагнитные ударные волны) [5].

§ 24. Нелинейная геометрическая оптика

Методы исследования нелинейных волн, изложенные в предыдущей главе, основывались на предположениях о слабой дисперсии и одномерности колебаний. В этой главе мы изложим основы другого подхода, также связанного с рядом ограничений, но, тем не менее, имеющего большую общность и существенным образом дополняющего рассмотренную выше теорию. Основной идеей такого подхода (сформулированного в наиболее общем виде в работах Уитэма [15, 16] \*) является перенесение на нелинейную теорию методов геометрической оптики.

Как и в последней, мы будем предполагать, что параметры, характеризующие волну (амплитуда, частота, волновое число и т. д.), изменяются достаточно медленно на расстояниях порядка длины волны и за время порядка периода колебаний. Иными словами, мы будем считать, что волны мало отличаются от нелинейных стационарных волн, рассмотренных в третьей главе. Общий метод Уитэма, позволяющий получать уравнения для медленно изменяющихся параметров таких волн в первом (адиабатическом) приближении излагается в Приложении А. Здесь мы ограничимся более частным, но более простым методом, применимым для волн достаточно малой амплитуды, когда нелинейные члены можно учитывать в первом исчезающем приближении.

В этом случае стационарные периодические волны мало отличаются от синусоидальных, т. е., пренебрегая кратными гармониками, их можно представить в виде

$$\Phi = a \cos \theta, \quad (24.1)$$

\*) См. также обзоры [8, 9] и приведенную там библиографию.

где  $\theta$  — фаза колебаний, имеющая в случае стационарной волны вид

$$\theta = kx - \omega t. \quad (24.2)$$

Частота стационарной волны в нелинейной теории зависит не только от  $k$ , но и от амплитуды, а также, вообще говоря, других параметров, которыми в линейном приближении пренебрегают. Такую зависимость мы условились в § 12 называть нелинейным дисперсионным уравнением. Рассмотрим для простоты случай, когда частота зависит, кроме волнового числа, только от амплитуды  $a$ , так что нелинейное дисперсионное уравнение имеет вид \*)

$$\omega = \omega(k^2, a^2) \quad (24.3)$$

(среда предполагается изотропной). Считая амплитуду волны достаточно малой, мы можем написать уравнение (24.3) в виде

$$\omega = \omega^{(0)}(k^2) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial (a^2)}\right)_0 a^2, \quad \left(\frac{\partial \omega}{\partial (a^2)}\right)_0 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial (a^2)}\right)_{a=0}, \quad (24.4)$$

где функция  $\omega^{(0)}(k^2)$  определяет закон дисперсии в линейном приближении.

Пусть теперь волна слабо отличается от стационарной, т. е. ее можно представить в виде (24.1), где  $a = a(\mathbf{r}, t)$  и

$$\theta(\mathbf{r}, t) = k_0 x - \omega_0 t + \varphi(\mathbf{r}, t), \quad (24.5)$$

$$\omega_0 = \omega^{(0)}(k_0^2). \quad (24.6)$$

Здесь  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — малая добавка к фазе, обусловленная ее нелинейностью и нестационарностью, и все величины мало изменяются на расстояниях порядка  $2\pi/k_0$ .

Положим теперь, как и в геометрической оптике,

$$\omega(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \theta}{\partial t} \equiv \omega_0 - \varphi_t, \quad (24.7)$$

$$\mathbf{k}(\mathbf{r}, t) = \nabla \theta(\mathbf{r}, t) \equiv \mathbf{k}_0 + \nabla \varphi(\mathbf{r}, t). \quad (24.8)$$

Подставляя это в уравнение (24.4) и ограничиваясь

\*) Более общий случай см. в Приложении А.

членами второго порядка по  $a$ ,  $\nabla \varphi/k_0$ , получим

$$\varphi_t + u_0 \varphi_x + \frac{1}{2} u'_0 \varphi_x^2 + \frac{u_0}{2k_0} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial (a^2)}\right)_0 a_2 = 0, \quad (24.9)$$

где

$$u_0 = \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{k=k_0, a=0}, \quad (24.10)$$

$$u'_0 = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2}\right)_{k=k_0, a=0}.$$

В качестве второго уравнения мы возьмем уравнение переноса энергии, которое можно написать в виде

$$\frac{\partial (a_2)}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{u}_E a^2) = 0.$$

В нашем приближении для скорости переноса энергии  $\mathbf{u}_E$  можно принять

$$\mathbf{u}_E(\mathbf{k}, a^2) = \mathbf{u}_E(\mathbf{k}, 0) = u_0 \frac{\mathbf{k}}{k},$$

т. е. считать  $\mathbf{u}_E$  равной групповой скорости в линейном приближении. При этом нужно учесть, что  $\mathbf{k}$  определяется выражением (24.8). В результате с принятой степенью точности получаем

$$u_{E\parallel} = u_0 + u'_0 \varphi_x, \quad (24.11)$$

$$\mathbf{u}_{E\perp} = \frac{u_0}{k} \nabla_{\perp} \varphi,$$

$$\frac{\partial (a^2)}{\partial t} + u_0 \frac{\partial (a^2)}{\partial x} + u'_0 \frac{\partial (a^2 \varphi_x)}{\partial x} + \frac{u_0}{k_0} \nabla_{\perp} (a^2 \nabla_{\perp} \varphi) = 0, \quad (24.12)$$

где  $u_0$  и  $u'_0$  определены в (24.10).

Система уравнений (24.9) и (24.12) полностью определяет эволюцию огибающей волны, характеризуемой величинами  $a(\mathbf{r}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . Она, естественно, следует также из общей теории Уитэма в предельном случае волн малой, но конечной амплитуды (см. Приложение А).

## § 25. Критерий неустойчивости стационарных волн

Применим уравнения (24.9), (24.12) к исследованию устойчивости нелинейных стационарных волн. При этом удобно несколько переопределить нелинейную добавку к фазе, положив

$$\varphi(\mathbf{r}, t) \rightarrow \varphi(\mathbf{r}, t) - \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 a_0^2 t, \quad (25.1)$$

где  $a_0$  — амплитуда стационарной волны. Тогда вместо уравнения (24.9) будем иметь

$$\varphi_t + u_0 \varphi_x + \frac{1}{2} u_0' \varphi_x^2 + \frac{u_0}{2k_0} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 (a^2 - a_0^2) = 0. \quad (25.2)$$

Замена (25.1) связана с тем, что в нелинейной стационарной волне частота, отвечающая данному значению  $k$ , отличается от соответствующей частоты в линейном приближении на величину  $\left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 a_0^2$  (см. (24.4)).

Решение уравнений (24.12), (25.2), описывающее стационарную волну, имеет вид

$$\varphi = 0, \quad a = a_0. \quad (25.3)$$

Рассмотрим подробнее уравнения (24.12) и (25.2) в одномерном случае. Тогда все величины зависят только от  $x$ ,  $t$  и удобно перейти к новым переменным

$$\xi = x - u_0 t, \quad \tau = u_0' t \quad (25.4)$$

( $\xi$  — координата в системе отсчета, движущейся с групповой скоростью линейного приближения  $u_0$ ). Уравнения (25.2), (24.12) принимают вид

$$\varphi_{\tau} + \frac{1}{2} \varphi_{\xi}^2 + \frac{1}{u_0'} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 (a^2 - a_0^2) = 0, \quad (25.5)$$

$$(a^2)_{\tau} + (a^2 \varphi_{\xi})_{\xi} = 0, \quad (25.6)$$

совпадающий по форме с уравнениями гидродинамики с показателем адиабаты  $\gamma = 2$ . При этом  $\varphi(\xi, \tau)$  играет роль потенциала скоростей,  $a^2$  — роль плотности.

Соответственно квадрат скорости «звука» равен

$$c_0^2 = \frac{a_0^2}{u_0'} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0. \quad (25.7)$$

Отсюда следует, что если  $c_0^2 < 0$ , т. е.

$$\frac{1}{u_0'} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 < 0, \quad (25.8)$$

то рассматриваемая стационарная волна будет неустойчивой. Этот результат был получен впервые Лайтхиллом [80].

Условие (25.8) определяет критерий неустойчивости по отношению к возмущениям, распространяющимся вдоль направления движения волны. Неустойчивость по отношению к поперечным возмущениям имеет место при

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 < 0, \quad (25.9)$$

в чем легко убедиться, рассматривая решения линеаризованных относительно  $\varphi$  и  $\delta a = a - a_0$  уравнений (24.12), (25.2).

Замечательно, что для применения этих критериев достаточно знать только нелинейное дисперсионное уравнение.

Рассмотрим несколько примеров, о которых шла речь в § 12.

**Гравитационные волны в глубокой воде.** Нелинейное дисперсионное уравнение имеет в этом случае вид (12.7). Из него следует, что

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 > 0, \quad u_0' = \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial k^2} \right)_0 < 0,$$

т. е. такие волны неустойчивы относительно продольных возмущений [80] и устойчивы по отношению к поперечным возмущениям.

**Электромагнитные волны в нелинейной диэлектрике.** Если нелинейная часть вектора поляризации определяется выражением (8.5), то дисперсионное уравнение имеет вид (8.10). Показатель преломления  $n = kc/\omega$  в этом случае можно написать в виде

$$n^2(\omega, a^2) = n_0^2(\omega) (1 + \alpha a^2), \quad (25.10)$$

где  $a^2 = |E|^2$ ,  $\alpha = A + B$ , а  $n_0(\omega)$  — показатель преломления в линейном приближении. Используя соотношения

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial (a^2)}\right)_k = -\frac{u_0}{2k} \left(\frac{\partial (k^2)}{\partial (a^2)}\right)_\omega = -\frac{u_0 \omega^2}{2kc^2} \left(\frac{\partial (n^2)}{\partial (a^2)}\right)_\omega, \quad (25.11)$$

$$u_0' = -\frac{u_0^3}{c} \frac{d^2 [\omega n_0(\omega)]}{d\omega^2}, \quad (25.12)$$

получаем, что стационарные волны неустойчивы относительно поперечных возмущений, если  $\alpha > 0$ , и неустойчивы относительно продольных возмущений, если  $\alpha \frac{d^2 (\omega n_0)}{d\omega^2} < 0$ . Таким образом, условие устойчивости имеет вид

$$\alpha < 0, \quad \frac{d^2}{d\omega^2} [\omega n_0(\omega)] > 0. \quad (25.13)$$

Аналогичным образом, исходя из уравнения (12.22), можно получить условия неустойчивости волн в модели нелинейной диэлектрика, где связь между полем и поляризацией определяется соотношением (12.8).

Остановимся на физическом смысле рассматриваемых неустойчивостей. При условии (25.9) фазовая скорость волн убывает с ростом амплитуды. Это приводит к тому, что небольшое усиление интенсивности в какой-нибудь области фронта волны приводит к его искривлению так, что он принимает вогнутую форму. Таким образом, рассматриваемое возмущение приводит к самофокусировке волн. Этот эффект для электромагнитных волн был предсказан Аскарьяном [81] и в настоящее время наблюдается экспериментально при прохождении лазерных пучков через ряд сред (см., например, обзоры [8, 9]).

Что касается неустойчивости по отношению к продольным возмущениям, то ее можно толковать как самомодуляцию волны. В принципе она аналогична самофокусировке в пространстве  $(x, t)$ .

Следует отметить, что эффекты самофокусировки могут иметь место не только для почти периодических волн, но, например, и в случае солитонов [82]. Пусть солитон движется вдоль оси  $x$ , а его амплитуда изменяется в направлении  $y$ . Если параметр дисперсии  $\beta$  отрицателен, то участок с большей амплитудой движется медленнее и солитон принимает вогнутую форму.

При этом его амплитуда еще более увеличивается в области максимального искривления и мы получаем неустойчивость. При  $\beta > 0$ , наоборот, участок с большей амплитудой движется быстрее, амплитуда на этом участке начинает убывать, так что в этом случае вместо аperiodического искривления формы солитона мы получаем малые гармонические колебания последней. Таким образом, солитон устойчив по отношению к поперечным возмущениям при  $\beta > 0$ .

## § 26. Эволюция волн огибающих в гидродинамическом приближении

Результаты, изложенные в предыдущем параграфе, описывают только начальную стадию эволюции очень малых возмущений плоской волны. В общем случае, когда мы имеем дело с волнами произвольной формы, надо исходить из полных уравнений (24.9), (24.12).

Оказывается, что в одномерном случае эти уравнения (которые сводятся к (25.5), (25.6)) в принципе могут быть решены аналитически [80, 83]. Мы рассмотрим здесь эти решения и вытекающие из них эффекты.

Предположим сначала, что волна устойчива относительно самомодуляции, т. е.

$$\frac{1}{u_0} \left(\frac{\partial \omega}{\partial (a^2)}\right)_0 > 0 \quad (26.1)$$

и соответственно скорость «звука» (25.7) есть вещественная величина.

Простейшие точные решения системы (25.5), (25.6) в этом случае — это простые волны огибающих, для которых расстройка волнового числа

$$\kappa \equiv k - k_0 \equiv \varphi, \quad (26.2)$$

есть некоторая функция амплитуды  $\kappa = f(a)$ . Подставляя это в уравнения (25.5) и (25.6) (предварительно проинтегрировав первое по  $\xi$ ), получаем после простых вычислений

$$f'(a) = \pm 2 \frac{c_0}{a_0}.$$

Отсюда следует, что

$$\kappa = \pm 2c_0 \left( \frac{a}{a_0} - 1 \right), \quad (26.3)$$

$$\frac{\partial a}{\partial \tau} \pm c_0 \left( 1 + 3 \frac{a - a_0}{a_0} \right) \frac{\partial a}{\partial \xi} = 0, \quad (26.4)$$

где величина  $c_0$  определена формулой (25.7). Знаки  $\pm$  отвечают двум типам простых волн, распространяющихся в противоположных направлениях. Общее решение уравнения (26.4) имеет вид

$$a = F \left( \xi \mp c_0 \left( 1 + 3 \frac{a - a_0}{a_0} \right) \tau \right), \quad (26.5)$$

где  $F(x)$  определяется профилем волны огибающей в начальный момент  $\tau = 0$ .

Как и в газодинамике, возмущение, распространяющееся в невозмущенную область (и граничащее с последней) есть всегда простая волна (см., например, [1]). Поэтому, если, например, на границе среды, занимающей полупространство, имеется источник монохроматической волны с амплитудой  $a_0$  и если в какой-то момент времени амплитуда на границе изменилась, то она будет распространяться в среде, как простая волна. Профиль последней, как видно из (26.5), деформируется так, что точка, где амплитуда имеет заданное значение  $a$ , перемещается со скоростью

$$\left( \frac{dx}{dt} \right)_a = u_0 + u_0' c_0 \left( 1 + 3 \frac{a - a_0}{a_0} \right) \quad (26.6)$$

(мы перешли к системе, где среда покоится, см. формулы (25.4), и взяли знак плюс перед  $c_0$ , что соответствует волне, распространяющейся в положительном направлении). Из (26.6) видно, что чем больше значение  $a$ , тем больше скорость точки профиля, отвечающей этому значению амплитуды. В результате профиль возмущения будет укрущаться до тех пор, пока не образуется разрыв амплитуды и соответственно волнового числа. Разумеется, здесь приближение нелинейной геометрической оптики теряет силу, так как градиенты амплитуды и волнового числа становятся большими вблизи точки опрокидывания. Поэтому дальнейший анализ эволюции возмущения может быть проведен на основе более точной те-

рии, выходящей за пределы геометрической оптики. Эти вопросы рассматриваются в последующих параграфах.

Чтобы получить более общее решение уравнений (25.5), (25.6), описывающее не только возмущения на фоне плоской волны, но и эволюцию огибающей волнового пакета, преобразуем эти уравнения в линейные с помощью операции, аналогичной преобразованию годографа в гидродинамике.

Для этого будем считать, что величины  $a$ ,  $\kappa \equiv \varphi_\xi$  являются независимыми переменными; таким образом, задача сводится к определению функций

$$\xi = \xi(a, \kappa), \quad \tau = \tau(a, \kappa) \quad (26.7)$$

из основных уравнений (25.5), (25.6), преобразованных к новым переменным.

Удобно ввести «потенциал»  $\Phi$ :

$$\Phi = \xi \varphi_\xi + \tau \varphi_\tau - \varphi(\xi, \tau) + \frac{1}{u_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 a_0^2. \quad (26.8)$$

Предположим, что решение нам известно и потенциал  $\Phi$  выражен с помощью (26.7) через  $a$ ,  $\kappa$ . Нетрудно убедиться, что

$$\left( \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \right)_a = \xi - \kappa \tau, \quad \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a} \right)_\kappa = -2\alpha a \tau, \quad (26.9)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{u_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_{a=0}. \quad (26.10)$$

Из (26.9) получаем

$$\tau = -\frac{1}{2\alpha a} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial a} \right)_\kappa, \quad (26.11)$$

$$\xi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \kappa} \right)_a - \frac{\kappa}{2\alpha a} \frac{\partial \Phi}{\partial a}. \quad (26.12)$$

Эти соотношения определяют зависимости  $\tau = \tau(a, \kappa)$ ,  $\xi = \xi(a, \kappa)$ , если известна функция  $\Phi(\kappa, a)$ . Чтобы получить уравнение для  $\Phi(\kappa, a)$ , воспользуемся уравнением

непрерывности (25.6). Учитывая формулы

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)_{\xi} &= \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \tau}\right)_{\xi} \left(\frac{\partial}{\partial \kappa}\right)_a + \left(\frac{\partial a}{\partial \tau}\right)_{\xi} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)_\kappa, \\ \left(\frac{\partial}{\partial \xi}\right)_{\tau} &= \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \xi}\right)_{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial \kappa}\right)_a + \left(\frac{\partial a}{\partial \xi}\right)_{\tau} \left(\frac{\partial}{\partial a}\right)_\kappa, \\ \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \tau}\right)_{\xi} &= D \left(\frac{\partial \xi}{\partial a}\right)_\kappa, \quad \left(\frac{\partial a}{\partial \tau}\right)_{\xi} = -D \left(\frac{\partial \xi}{\partial \kappa}\right)_a, \\ \left(\frac{\partial \kappa}{\partial \xi}\right)_{\tau} &= -D \left(\frac{\partial \tau}{\partial a}\right)_\kappa, \quad \left(\frac{\partial a}{\partial \xi}\right)_{\tau} = D \left(\frac{\partial \tau}{\partial \kappa}\right)_a, \end{aligned} \quad (26.13)$$

где

$$D = \frac{\partial(\kappa, a)}{\partial(t, \xi)}$$

— якобиан преобразования, получаем из (25.6) линейное дифференциальное уравнение для функции  $\Phi(\kappa, a)$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial a^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial(a^2)} - 4\alpha \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \kappa^2} = 0, \quad (26.14)$$

которое вместе с соотношениями (26.11), (26.12) и начальными условиями определяет решение.

При  $\alpha > 0$  (т. е. для устойчивых волн) уравнение (26.14) имеет вид волнового уравнения в цилиндрических координатах с радиальной симметрией. Положив

$$r = 2\sqrt{\alpha} a, \quad (26.15)$$

приводим его к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \kappa^2} = 0. \quad (26.16)$$

Пусть при  $\tau=0$  задан профиль амплитуды, а расстройка волнового числа равна нулю, т. е.

$$r = f(\xi) \equiv f(x), \quad \kappa = 0 \quad (t = \tau = 0) \quad (26.17)$$

(напомним, что переменные  $\xi, \tau$  связаны с координатой  $x$  в лабораторной системе отсчета и временем  $t$  соотношениями (25.4)). Тогда из (26.11), (26.12) следует, что уравнение (26.16) надо решать при следующих начальных

условиях:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \kappa}\right)_{\kappa=0} = \xi(r), \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{\kappa=0} = 0, \quad (26.18)$$

где  $\xi(r)$  — функция, обратная  $f(\xi)$  в (26.17). Соответствующее решение можно получить, например, с помощью общего метода Римана (см., например, [85], § 3.4). Оно имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\kappa, r) &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{r-\kappa}^{r+\kappa} \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; \frac{\kappa^2 - (\rho - r)^2}{4\rho r}\right) \xi(\rho) d\rho, \end{aligned} \quad (26.19)$$

где  $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; z\right)$  — гипергеометрическая функция.

Соотношения (26.19), (26.11), (26.12) и (26.15) позволяют в принципе определить эволюцию огибающей и момент образования «ударной волны» \*) (когда рассматриваемая теория теряет силу). Качественно вся картина выглядит аналогично тому, как это было в простой волне огибающей, рассматривавшейся выше.

Иные результаты получаются для неустойчивых волн, когда  $\alpha < 0$ . В этом случае вместо (26.15) полагаем

$$r = 2\sqrt{-\alpha} a \quad (26.20)$$

и получаем из (26.14) осесимметрическое уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \kappa^2} = 0. \quad (26.21)$$

Решение этого уравнения может быть получено из (26.19), если сделать формальную замену  $\kappa \rightarrow -i\kappa$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \Phi(\kappa, r) &= \\ &= -\frac{i}{2} \int_{r-i\kappa}^{r+i\kappa} d\rho \xi(\rho) \left(\frac{\rho}{r}\right)^{1/2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; -\frac{\kappa^2 + (\rho - r)^2}{4\rho r}\right). \end{aligned} \quad (26.22)$$

\*) Подробности соответствующих расчетов см. в [80, 83].

При этом, однако, необходимо потребовать, чтобы функция  $\xi(\rho)$  была аналитической в некоторой области, содержащей положительную полуось  $\rho > 0$ , и путь интегрирования должен находиться в этой области. Поэтому формула (26.22) определяет решение лишь при достаточно гладких начальных условиях.

В качестве достаточно простого интересного примера рассмотрим случай, когда при  $\tau = 0$  имеется симметричный волновой пакет вида

$$\begin{aligned} r &= r_0 f(\xi^2/L^2), & \kappa &= 0, & (26.23) \\ f(0) &= 1, & f(z) &\rightarrow 0 & (z \rightarrow \pm \infty), \end{aligned}$$

где  $f(z)$  — аналитическая функция в окрестности действительной оси,  $r_0$  — максимальная амплитуда,  $L$  — длина пакета. Тогда функция  $\xi(r)$  имеет вид \*)

$$\begin{aligned} \xi(r) &= LX^{1/2}(r/r_0) & (\xi > 0), & (26.24) \\ \xi(r) &= -LX^{1/2}(r/r_0) & (\xi < 0), \end{aligned}$$

где  $X(z)$  — функция, обратная  $f(z)$  в (26.23). Подставляя это в (26.22) и переходя к безразмерным переменным

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_0}, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\kappa}{r_0}, \quad \tilde{\Phi} = \frac{\Phi}{r_0 L}, \quad (26.25)$$

получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\tilde{\kappa}, \tilde{r}) &= -\frac{i}{2} \int_{\tilde{r}-i\tilde{\kappa}}^{\tilde{r}+i\tilde{\kappa}} d\rho X^{1/2}(\rho) \left(\frac{\rho}{\tilde{r}}\right)^{1/2} \times \\ &\times F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; -\frac{\tilde{\kappa}^2 + (\rho - \tilde{r})^2}{4\rho\tilde{r}}\right). \end{aligned} \quad (26.26)$$

Из (26.11), (26.20) имеем

$$\tau = \frac{2L}{r_0} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}}, \quad \frac{\xi}{L} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\kappa}} + \frac{2\tilde{\kappa}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}}. \quad (26.27)$$

Контур интегрирования в (26.26) должен проходить в области аналитичности функции  $X^{1/2}(\rho)$ , не пересекая

\*) Для конкретности можно, например, рассматривать профиль (26.34), для которого  $\xi(r) = \pm L(r_0/r - 1)^{1/2}$ .

разрезов. Ясно, что функция  $X^{1/2}(\rho)$  имеет точку ветвления при  $\rho = 1$  ( $r = r_0$ ). Беря в качестве разреза часть действительной оси, идущей от точки  $\rho = 1$  до  $\infty$ , мы можем вычислить искомое решение как при  $\tilde{r} < 1$  ( $r < r_0$ ), так и при  $\tilde{r} > 1$  ( $r > r_0$ ) (рис. 26.1)\*.

Нетрудно теперь убедиться, что формулы (26.26) и (26.27) определяют при достаточно малых  $\tau$  непрерывные функции

$$\frac{r}{r_0} = F_1\left(\frac{\xi}{L}, \frac{\tau r_0}{L}\right), \quad (26.28)$$

$$\frac{\kappa}{r_0} = F_2\left(\frac{\xi}{L}, \frac{\tau r_0}{L}\right), \quad (26.29)$$

описывающие амплитудную и частотную модуляции волнового пакета, причем амплитуда  $r$  является четной

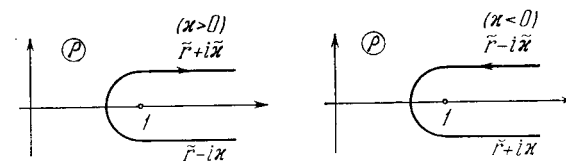


Рис. 26.1. Путь интегрирования в выражении (26.26).

функцией  $\xi$ , а добавка к волновому числу  $\kappa$  — нечетной. Оказывается, однако, что при некотором критическом значении времени  $\tau = \tau_{кр}$  производная  $\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)_{\tau = \tau_{кр}}$  обращается в бесконечность при  $\xi = 0$  (сама же функция  $r(\xi, \tau_{кр})$  остается, вообще говоря, всюду конечной) (рис. 26.2).

Чтобы определить значение  $\tau_{кр}$ , достаточно заметить, что

$$\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)_{\tau} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\partial \tau}{\partial \kappa}\right)_{r}, \quad (26.30)$$

где  $\Delta$  — якобиан преобразования от переменных  $\xi, \tau$

\*) Нетрудно убедиться, что именно при таком выборе разреза удовлетворяются начальные условия (26.18).

к  $r$ ,  $\kappa$ :

$$\Delta \equiv \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \tau}{\partial \kappa} - \frac{\partial \xi}{\partial \kappa} \frac{\partial \tau}{\partial r} = \frac{2L^2}{r_0^3} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r} \partial \tilde{\kappa}} - \left( \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\kappa}^2} + \frac{2}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}} \right) \right]. \quad (26.31)$$

Из (26.30) видно, что особенность появляется при  $\Delta=0$ . Для значений  $\tilde{\kappa}=\tilde{\kappa}_{кр}$  и  $\tilde{r}=\tilde{r}_{кр}$ , отвечающих этой особенности, имеем уравнения

$$\Delta = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{\kappa}} + \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{r}} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \tilde{r}} = 0 \quad (26.32)$$

(второе из этих уравнений получается из (26.27), если положить там  $\xi=0$ ).

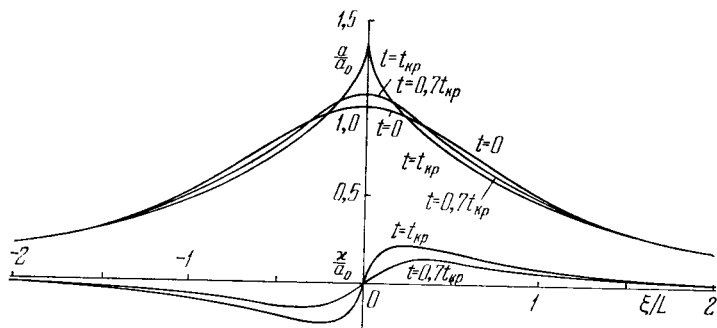


Рис. 26.2. Эволюция огибающей волнового пакета при разных  $t$  в приближении геометрической оптики (семейство верхних кривых изображает амплитуду  $a$ , нижних — расстройку волнового числа  $\kappa$ , приведенных к  $a_0$ ) [80, 83].

Тогда из первого уравнения (26.27) получаем\*)

$$t_{кр} = - \frac{\tau_{кр}}{u_{кр}} = \frac{\text{const} \cdot L}{r_0 |u_0|}, \quad (26.33)$$

где безразмерная величина  $\text{const}$  зависит только от формы профиля. Например, в случае, когда начальный вид

\*) При переходе от  $\tau$  к  $t$  (по второй из формул (25.4) важен знак величины  $u_0$ ). Рассматривая волны, устойчивые относительно самофокусировки, мы имеем  $\left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 > 0$ , соответственно условие  $\alpha < 0$  влечет за собой  $u_0' < 0$  (см. (26.10)).

амплитуды определяется выражением

$$r = \frac{r_0}{1 + (\xi/L)^2}, \quad (26.34)$$

Лайтхилл получил [80, 83]

$$\text{const} = 0,69. \quad (26.35)$$

На рис. 26.2 приведены численные результаты Лайтхилла, характеризующие эволюцию волнового пакета при возрастании  $t$ .

Укажем еще, что в случае  $\alpha < 0$ , когда основные уравнения эллиптические, задача Коши, которая решалась выше, некорректна: малые изменения начальных условий приводят (вообще говоря, довольно быстро) к существенному изменению решения (что и выражается эффектом неустойчивости, о котором шла речь в § 25).

## § 27. Нелинейное параболическое уравнение

Как мы видели в предыдущем параграфе, приближение нелинейной геометрической оптики теряет силу (часто довольно быстро) из-за появления больших градиентов амплитуды и волнового числа. В этом случае основные уравнения необходимо дополнить членами со старшими производными, учитывающими отклонения от адиабатичности. Это проще всего сделать следующим образом.

Рассмотрим величину

$$\Phi = \Psi(\mathbf{r}, t) \exp[i(k_0 x - \omega_0 t)],$$

где

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = a(\mathbf{r}, t) \exp[i\varphi(\mathbf{r}, t)]. \quad (27.1)$$

Действительная часть  $\Phi$  описывает рассматриваемые волны в случае достаточно малых амплитуд. В линейном приближении величина  $\Phi$  удовлетворяет уравнению

$$[\hat{k}^2 - F_0(\hat{\omega})]\Phi = 0, \quad (27.2)$$

где  $\hat{k} = -i\nabla$ ,  $\hat{\omega} = i\partial/\partial t$ , а  $k^2 = F_0(\omega)$  — закон дисперсии в линейном приближении (т. е. функция  $F_0(\omega)$  обратна  $\omega^{(0)}(k^2)$  в уравнении (24.4)). Если комплексная амплитуда (27.1) изменяется достаточно медленно, то можно



написать

$$F_0(\hat{\omega})\Phi = \left[ F_0(\omega_0)\Psi + iF_0'(\omega_0)\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{1}{2}F_0''(\omega_0)\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} + \dots \right] \exp[i(k_0x - \omega_0t)], \quad (27.3)$$

где точками обозначены члены с производными третьего и более высокого порядка. Подставляя (27.3) в (27.2) и учитывая, что

$$k_0^2 = F_0(\omega_0),$$

а также

$$F_0'(\omega_0) = \frac{2k_0}{u_0}, \quad F_0''(\omega_0) = \frac{2(u_0 - ku_0')}{u_0^3}, \quad (27.4)$$

получаем с точностью до членов, содержащих вторые производные по  $t$  и  $x$  включительно \*)

$$2ik_0(\Psi_t + u_0\Psi_x) + k_0u_0'\Psi_{xx} + u_0\Delta_{\perp}\Phi = 0. \quad (27.5)$$

Подставляя сюда выражение (27.1) и беря действительную часть, получим

$$\Phi_t + u_0\Phi_x + \frac{1}{2}\left[u_0'\Phi_x^2 + \frac{u_0}{k_0}(\nabla_{\perp}\Phi)^2\right] - \frac{u_0'}{2a}a_{xx} - \frac{u_0}{2k_0a}\Delta_{\perp}a = 0. \quad (27.6)$$

Мнимая часть (27.5) в точности совпадает с (24.12).

Уравнение (27.6) отличается от (24.9) в двух отношениях. Во-первых, оно не содержит члена, пропорционального  $a^2$ . Это связано с тем, что уравнение (27.6) получено из линейного уравнения (27.2). Во-вторых, оно содержит вторые производные  $a$  по координатам, которые отсутствуют в (24.9). Если бы мы исходили, как и выше, из метода геометрической оптики, подставляя выражения (24.7), (24.8) в линейное дисперсионное уравнение, то получилось бы уравнение (27.6) без вторых производных. Таким образом, из сопоставления уравнений (27.6)

\*) В этом приближении можно заменить  $\Psi_{tt}$  на  $u_0^2\Psi_{xx}$ .

и (24.9) следует, что уравнение для  $\Phi$  с учетом нелинейных членов порядка  $a^2$  и членов с производными до второго порядка включительно должно иметь вид

$$\Phi_t + u_0\Phi_x + \frac{1}{2}\left[u_0'\Phi_x^2 + \frac{u_0}{k_0}(\nabla_{\perp}\Phi)^2\right] + \left(\frac{\partial\omega}{\partial(a^2)}\right)_0 a^2 - \frac{u_0'}{2a}a_{xx} - \frac{u_0}{2k_0a}\Delta_{\perp}a = 0. \quad (27.7)$$

Что касается второго уравнения, то оно, как мы видели, не отличается в рассматриваемом приближении от (24.12). Таким образом, второе уравнение имеет вид

$$\frac{\partial(a^2)}{\partial t} + u_0\frac{\partial(a^2)}{\partial x} + u_0'\frac{\partial(a^2\Phi_x)}{\partial x} + \frac{u_0}{k_0}\nabla_{\perp}(a^2\nabla_{\perp}\Phi) = 0. \quad (27.8)$$

Уравнения (27.7) и (27.8) составляют полную систему для величин  $a(\mathbf{r}, t)$  и  $\Phi(\mathbf{r}, t)$ , отличающуюся от соответствующих уравнений в приближении геометрической оптики (или в адиабатическом приближении Уитэма) наличием членов со вторыми производными \*).

Систему (27.7) и (27.8) можно записать в форме одного уравнения для комплексной амплитуды, определенной соотношением (27.1), а именно

$$i\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t} + u_0\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + \frac{u_0'}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{u_0}{2k_0}\Delta_{\perp}\Psi - \left(\frac{\partial\omega}{\partial(a^2)}\right)_0|\Psi|^2\Psi = 0. \quad (27.9)$$

Существенно, что коэффициенты системы (27.7), (27.8) или уравнения (27.9) полностью определяются нелинейным дисперсионным уравнением (24.3). Поэтому волны различной природы можно рассматривать с

\*) Разумеется, уравнения (26.7), (26.8) можно было бы получить методом усреднения, рассмотрев приближение, следующее за адиабатическим (как это делается, например, в [86, 84]), но мы предпочли привести здесь более наглядный вывод, позволяющий более ясно представить физический смысл отдельных членов.

единой точки зрения, как это делается в §§ 25, 26. В частности, для электромагнитного поля в нелинейной среде с показателем преломления вида (25.10) уравнение для комплексной амплитуды электрического поля  $E$  принимает вид

$$2i(E_t + u_0 E_x) - \frac{\partial^2 k_0}{\partial \omega_0^2} u_0^3 E_{xx} + \frac{u_0}{k_0} \Delta_{\perp} E + u_0 k_0 \alpha |E|^2 E = 0, \quad (27.10)$$

где  $\alpha$  — коэффициент при нелинейном члене в (25.10). При  $E_t = 0$  это уравнение описывает дифракцию стационарного светового пучка с учетом нелинейных эффектов. Если пренебречь нелинейным членом и членом с  $E_{xx}$  (который имеет порядок отношения длины волны к ширине пучка), то получится так называемое параболическое уравнение приближенной теории дифракции [91]. В связи с этим мы будем называть (27.9) нелинейным параболическим уравнением. Уравнение (27.10) исследовалось в ряде работ в связи с явлением нелинейного самовоздействия света (см., например, обзоры [8, 9]). Полученные при этом результаты, как видно из сказанного выше, можно распространить и на другие типы волн, которые описываются более общим уравнением (27.9). Ниже будут изложены важнейшие из этих результатов.

Рассмотрим прежде всего вопрос об устойчивости стационарной волны с точки зрения уравнения (27.9) или эквивалентной ему системы уравнений (27.7), (27.8) [92]. Решение этой системы, отвечающее плоской волне, имеет вид

$$a(\mathbf{r}, t) = a_0, \quad \varphi = - \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 a_0^2 t.$$

Подставляя теперь в (27.7), (27.8) выражения

$$a = a_0 + \delta a, \quad \varphi = - \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 a_0^2 t + \varphi_1, \quad (27.11)$$

где  $\delta a$ ,  $\varphi_1$  — малые возмущения, и линеаризуя получающиеся для них уравнения, придем к следующему

дифференциальному уравнению для  $\delta a$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u_0 \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \delta a - u_0' a_0^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 (\delta a)_{xx} - \frac{u_0 a_0^2}{k_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 \Delta_{\perp} \delta a + \frac{1}{4} \left( u_0' \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{u_0}{k_0} \Delta_{\perp} \right)^2 \delta a = 0. \quad (27.12)$$

Рассматривая решения этого уравнения, пропорциональные  $\exp[i(\mathbf{x}\mathbf{r} - \Omega t)]$ , получим

$$(\Omega - \kappa_{\parallel} u_0)^2 = \left( \kappa_{\parallel}^2 u_0' + \kappa_{\perp}^2 \frac{u_0}{k_0} \right) a_0^2 \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 + \frac{1}{4} \left( u_0' \kappa_{\parallel}^2 + \frac{u_0}{k_0} \kappa_{\perp}^2 \right)^2. \quad (27.13)$$

Из (27.13) следует, что стационарная волна неустойчива, если имеет место хотя бы одно из соотношений (25.8), (25.9). Таким образом, учет старших производных медленно меняющихся величин не меняет условий неустойчивости, полученных в приближении геометрической оптики. Изменяются лишь области значений  $\kappa$ , отвечающие неустойчивым возмущениям (раньше неустойчивыми были возмущения при всех  $\kappa$ , в то время как теперь — лишь при достаточно малых  $\kappa$ ).

Если при этом

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 > 0, \quad u_0' < 0, \quad (27.14)$$

то максимальный инкремент нарастания неустойчивости достигается при

$$\kappa_{\parallel}^2 = -2 \frac{a_0^2}{u_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0, \quad \kappa_{\perp} = 0. \quad (27.15)$$

Возмущения будут неустойчивыми в этом случае лишь при достаточно малых  $\kappa_{\perp}$ .

Если

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 < 0, \quad u_0' < 0, \quad (27.16)$$

то максимальный инкремент достигается при

$$\kappa_{\perp}^2 = -2 \frac{k_0}{u_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 a_0^2, \quad \kappa_{\parallel} = 0 \quad (27.17)$$

и возмущения будут неустойчивыми лишь при достаточно малых  $\kappa_{\parallel}$ .

Наконец, при

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 < 0, \quad u_0' > 0 \quad (27.18)$$

неустойчивыми могут быть возмущения, распространяющиеся под любым углом к направлению распространения волны.

При больших  $t$  линеаризованное уравнение (27.12) становится непригодным, и для исследования эволюции возмущений в этой стадии необходимо рассматривать нелинейные уравнения.

Рассмотрим, например, случай, когда

$$\left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 > 0, \quad u_0' > 0, \quad (27.19)$$

т. е. стационарная волна устойчива. Переходя к переменным (25.4) и вводя новые поперечные координаты

$$\eta = y \sqrt{\frac{u_0 k}{u_0}}, \quad \xi = z \sqrt{\frac{u_0 k}{u_0}},$$

получим основные уравнения в виде

$$\rho_t + \nabla(\rho \nabla \varphi) = 0, \quad (27.20)$$

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + c^2(\rho) - \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \Delta(\rho^{1/2}) = 0, \quad (27.21)$$

где  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial \xi}, \frac{\partial}{\partial \eta}, \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)$  и

$$\rho = a^2, \quad c^2(\rho) = \frac{1}{u_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 \rho. \quad (27.22)$$

Если пренебречь последним членом в (27.21), то уравнения (27.20), (27.21), как уже отмечалось выше, совпадают с уравнениями гидродинамики, где роль скорости играет  $\nabla \varphi$ , плотности — величина  $\rho = a^2$ , а  $c^2(\rho)$  — квадрат

скорости «звука» (соответствующий показатель «адибаты»  $\gamma=2$ ).

Нелинейные эффекты приводят к укрупнению профиля огибающей волны; когда последний станет достаточно крутым, начнет играть существенную роль последний член в уравнении (27.21). Для выяснения эффектов, определяемых этим членом, рассмотрим сначала достаточно простой случай — эволюцию возмущения на фоне плоской волны с амплитудой  $a_0$ . Если в начальном возмущении величина  $\rho - \rho_0$  невелика по сравнению с  $\rho_0 = a_0^2$ , то благодаря устойчивости волны эта величина не будет возрастать и в дальнейшем, так что в первом приближении уравнение (27.21) можно написать в виде

$$\varphi_t + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + c^2(\rho) - \frac{1}{4\rho_0} \Delta \rho = 0, \quad (27.23)$$

Уравнения (27.23) и (27.20) имеют вид уравнений Буссинеска (10.1), так что мы можем использовать здесь результаты, полученные в предыдущих главах.

Например, одномерные волны огибающей, распространяющиеся в невозмущенную область исходной стационарной волны, можно считать квазипростыми и описывать уравнением Кортевега — де Вриза, которое в этом случае принимает вид (для возмущений, распространяющихся вправо)

$$v_t + \left( c_0 + \frac{3}{2} v \right) v_{\xi} + \beta v_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (27.24)$$

где

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \beta = -\frac{1}{8c_0}, \quad c_0^2 = \frac{a_0^2}{u_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0. \quad (27.25)$$

Поскольку параметр дисперсии  $\beta$  в этом случае отрицателен, возмущение распадается на ряд отрицательных солитонов и расплывающийся вправо волновой пакет. Соотношение между пакетом и солитонами определяется начальным возмущением в соответствии с результатами предыдущей главы.

Общая качественная картина эволюции, намеченная выше, сохранится, разумеется, и в том случае, когда  $\rho - \rho_0 \sim \rho_0$ .

В частности, при любых  $\rho - \rho_0$  уравнениям (27.20), (27.21) удовлетворяют решения, описывающие стационарные

нарные волны огибающей (уединенные и периодические). Такие решения нетрудно получить, подставляя в уравнения (27.20), (27.21) выражения вида

$$\rho = \rho(\xi - V\tau), \quad \varphi = -c_0^2\tau + \varphi_1(\xi - V\tau). \quad (27.26)$$

В частности, выражения, описывающие солитон, имеют вид

$$\rho = \rho_0 - (\rho_0 - \rho_{\min}) \operatorname{sech}^2 \frac{\xi - V\tau}{l}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{V(\rho - \rho_0)}{\rho},$$

$$l = \frac{1}{c_0} \left( \frac{\rho_0}{\rho_0 - \rho_{\min}} \right)^{1/2}, \quad V = c_0 \sqrt{\frac{\rho_{\min}}{\rho_0}}, \quad (27.27)$$

где  $\rho_{\min}$  — минимальное значение величины  $a^2$  в солитоне. Мы видим, что в соответствии со сказанным выше солитон огибающей здесь представляют собой «яму», перемещающуюся со скоростью  $V$  на фоне стационарной волны с амплитудой  $a_0 = \rho_0^{1/2}$ . Разность фаз между точками, находящимися по обе стороны от солитона (формально между  $\xi = \infty$  и  $\xi = -\infty$ ), есть

$$\Delta\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(\xi) d\xi = -2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\rho_0 - \rho_{\min}}{\rho_0}}. \quad (27.28)$$

Особый случай представляет солитон с  $\rho_{\min} = 0$ . В этом случае

$$\rho = \rho_0 [1 - \operatorname{sech}^2(\xi/l_0)], \quad V = 0, \quad (27.29)$$

$$l_0 = \frac{1}{c_0} = \left[ \frac{\rho_0}{u_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 \right]^{-1/2}, \quad (27.30)$$

$$\Delta\varphi = -\pi. \quad (27.31)$$

Отметим, наконец, что все вышеизложенное непосредственно переносится на задачу о нелинейной дифракции плоской волны на бесконечно длинной щели, перпендикулярной вектору  $k_0$ . Действительно, полагая в уравнении (27.9)  $\partial\Psi/\partial t = 0$  и считая, что отношение длины волны к ширине щели достаточно мало, мы можем пренебречь членом с  $\partial^2\Psi/\partial x^2$ . Тогда из (27.9) получится

$$i \frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{1}{2k_0} \Delta_{\perp}\Psi - \frac{1}{u_0} \left( \frac{\partial\omega}{\partial(a^2)} \right)_0 |\Psi|^2\Psi = 0. \quad (27.32)$$

Это уравнение совершенно аналогично нестационарному параболическому уравнению; роль времени при этом играет координата  $x$ . Соответственно уравнения для  $a$  и  $\varphi$ , получающиеся из (27.32) при подстановке в него (27.1) и замене  $\nabla_{\perp}$  на  $\partial/\partial y$ , совпадают с одномерными уравнениями (27.20), (27.21).

## § 28. Самомодуляция волн

Перейдем теперь к исследованию процессов нелинейного самовоздействия волн в том случае, когда стационарные волны неустойчивы.

Рассмотрим сначала волны, неустойчивые относительно продольных возмущений, т. е. будем предполагать, что имеют место условия (27.14). Опуская в основных уравнениях (27.7) и (27.8) производные по поперечным координатам и вводя новые переменные

$$\xi = x - u_0 t, \quad \tau = -u_0' t, \quad (28.1)$$

получим

$$\varphi_{\tau} - \frac{1}{2} \varphi_{\xi}^2 + va^2 + \frac{a_{\xi\xi}}{2a} = 0, \quad (a^2)_{\tau} - (\varphi_{\xi} a^2)_{\xi} = 0, \quad (28.2)$$

где

$$v = -\frac{1}{u_0} \left( \frac{\partial\omega}{\partial(a^2)} \right)_0. \quad (28.3)$$

Рассмотрим прежде всего решения этих уравнений, описывающие стационарные волны огибающей [88, 89, 45]. Такие решения должны иметь вид

$$\varphi = f(\xi - W\tau) - a_0^2 v \tau, \quad a = a(\xi - W\tau), \quad (28.4)$$

где  $a_0$  — произвольная постоянная, а  $f(\xi)$  и  $a(\xi)$  — некоторые ограниченные функции. Подставляя (28.4) во второе из уравнений (28.2), получим

$$f'(\xi) = -\frac{W}{a^2} (a^2 - a_0^2 - a_1^2), \quad (28.5)$$

где  $a_1$  — постоянная интегрирования, которую мы будем в дальнейшем полагать равной нулю. Подставляя (28.5) в (28.2), получим для  $a(\xi)$  следующее уравнение:

$$a''(\xi) + 2va(a^2 - a_0^2) + \frac{W^2}{a^3} (a^4 - a_0^4) = 0. \quad (28.6)$$

Тривиальное решение этих уравнений

$$a^2 = a_0^2, \quad f'(\xi) = 0 \quad (28.7)$$

описывает стационарную волну постоянной амплитудой  $a_0$ . Фазовые характеристики уравнения (28.6) при  $W \neq 0$  имеют вид, изображенный на рис. 28.1. Они отвечают

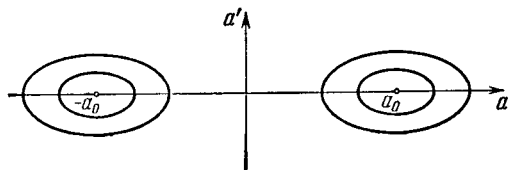


Рис. 28.1. Фазовые кривые уравнения (28.6) при  $W \neq 0$ .

осциллирующим волнам огибающей. Если амплитуда этих осцилляций достаточно мала, то уравнение (28.6) можно аппроксимировать следующим линейным уравнением для величины  $\delta a = a - a_0$ :

$$(\delta a)'' + 4(a_0^2 v + W^2) \delta a = 0. \quad (28.8)$$

Решения этого уравнения пропорциональны  $\exp(\pm i\kappa \xi)$ , где

$$\kappa^2 = 4(v a_0^2 + W^2). \quad (28.9)$$

Это соотношение отличается лишь формой записи от дисперсионного уравнения (27.13), если положить в последнем  $\kappa_{\perp} = 0$ ,  $\kappa_{\parallel} = \kappa$ ,  $\Omega^2 = \kappa^2 u_0^2 W^2$ . Из (28.9) следует, что волновые числа  $\kappa$  всегда превышают по модулю величину

$$\kappa_0 = 2a_0 \sqrt{v}, \quad (28.10)$$

которая, как нетрудно видеть из (27.13), имеет смысл границы области устойчивости: при  $|\kappa| < \kappa_0$  (и  $\kappa_{\perp} = 0$ ) возмущения должны экспоненциально нарастать. Если  $\kappa$  стремится к предельному значению  $\kappa_0$  сверху, то  $W \rightarrow 0$ .

Рассмотрим теперь стационарные решения уравнений (28.2) при  $W = 0$ . В этом случае

$$\varphi = -a_0^2 v t + c \int \frac{d\xi}{a^2(\xi)}, \quad (28.11)$$

$$a''(\xi) + 2va(a^2 - a_0^2) - \frac{c^2}{a^3} = 0,$$

где  $a_0$  и  $c$  — постоянные интегрирования. Фазовые кривые этого уравнения при  $c=0$  изображены на рис. 28.2. Сепаратриса отвечает решению солитонного типа, которое имеет вид

$$a = A \operatorname{sech}[A\sqrt{v}(\xi - \xi_0)], \quad (28.12)$$

$$\varphi = -\frac{A^2 v t}{2} + \text{const}$$

( $A^2 = 2a_0^2$ ). Фазовые траектории, расположенные внутри сепаратрисы, отвечают периодическим решениям вида

$$a = A \operatorname{dn}[A\sqrt{v}(\xi - \xi_0), s], \quad s^2 = \frac{A^2 - B^2}{A^2}, \quad (28.13)$$

где  $\operatorname{dn}(z, s)$  — эллиптическая функция Якоби с модулем  $s$ ,  $A$  и  $B$  — постоянные, связанные между собой соотношением  $A^2 + B^2 = 2a_0^2$  и имеющие смысл предельных значений величины  $a(\xi)$

$$A = \max a, \quad B = \min a. \quad (28.14)$$

Если  $B \rightarrow A$ , то рассматриваемая волна огибающей превращается в малое возмущение синусоидальной формы,

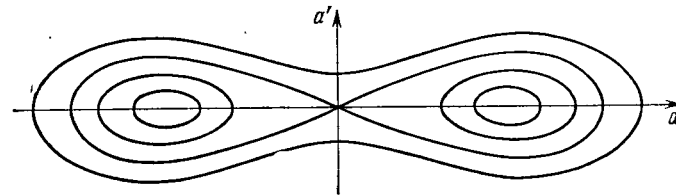


Рис. 28.2. Фазовые кривые уравнения (28.11) при  $c=0$ ,  $W=0$ .

модулирующее стационарную волну постоянной амплитуды  $a=A$ . При этом волновое число этого возмущения имеет величину  $\kappa_0$ , лежащую на границе области устойчивости. При  $B \rightarrow 0$  волна (28.13) превращается в последовательность солитонов, расстояние между которыми растет как  $\ln(1/B)$ .

Наконец, периодические решения, лежащие вне сепаратрисы, имеют вид ( $A^2 - B^2 = 2a_0^2$ )

$$a = A \operatorname{cn}[V(A^2 + B^2)v(\xi - \xi_0), s]; \quad (28.15)$$

$$s = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad A^2 - B^2 = 2a_0^2.$$

Они отвечают волнам огибающей, где величина  $a(\xi)$  проходит через нуль.

Перейдем теперь к исследованию нестационарных модуляционных процессов, развивающихся в случае (27.14) при возмущении стационарной волны с постоянной амплитудой  $a_0$ . Для этого рассмотрим решения уравнений (28.2), имеющие вид

$$\begin{aligned} \varphi &= -va_0^2\tau + \varphi_1(\xi, \tau), \\ a &= a_0 + a_1(\xi, \tau), \end{aligned} \quad (28.16)$$

где  $\varphi_1$  и  $a_1$  описывают рассматриваемые возмущения и удовлетворяют начальным условиям

$$a_1(\xi, 0) = a_0 f(\xi), \quad \varphi_1(\xi, 0) = 0. \quad (28.17)$$

При этом  $f(\xi) \rightarrow 0$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Предположим, что функция  $f(\xi)$  достаточно мала, так что начальную эволюцию возмущения можно проследить, исходя из уравнений (28.2), линеаризованных относительно  $a_1$  и  $\varphi_1$ . Соответствующее решение имеет вид

$$a(\xi, \tau) = a_0 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\kappa A(\kappa) \cos[\kappa\xi - \Omega(\kappa)\tau], \quad (28.18)$$

где

$$\Omega(\kappa) = \frac{\kappa}{2} \sqrt{\kappa^2 - \kappa_0^2}, \quad (28.19)$$

$$A(\kappa) = 2a_0 \int_0^{\infty} f(\xi) \cos(\kappa\xi) d\xi, \quad (28.20)$$

а величина  $\kappa_0$  определена в (28.10) (при этом функция  $f(\xi)$  в (28.17) для простоты считается четной). Рассмотрим асимптотическое поведение интеграла (28.18) при больших  $\tau$ . Мы не будем здесь выписывать громоздкое общее выражение, а ограничимся двумя предельными случаями малых и больших  $\xi$  ( $\xi \ll \kappa_0\tau$ ,  $\xi \gg \kappa_0\tau$ ). В первом случае, применяя метод перевала, получим

$$\begin{aligned} a(\xi, \tau) &\approx a_0 + \text{const} \cdot \exp(va_0^2\tau) \cos\left(\frac{\kappa_0\xi}{\sqrt{2}} + \delta\right), \\ \xi &\ll \kappa_0\tau, \end{aligned} \quad (28.21)$$

где величины  $\text{const}$  и  $\delta$  определяются начальными условиями. Таким образом, в рассматриваемой области

возмущения экспоненциально растут с максимальным инкрементом  $\Gamma$

$$\Gamma = va_0^2 \quad (28.22)$$

(волновое число в (28.21) совпадает с (27.15) \*).

При больших  $\xi/\kappa_0\tau$  асимптотику выражения (28.18) можно получить, применяя метод стационарной фазы (как это делалось в гл. I). Основной вклад в интеграл в этом случае вносят области, лежащие в окрестности значений  $\kappa$ , удовлетворяющих условию

$$\frac{d\Omega}{d\kappa} = \frac{2\kappa^2 - \kappa_0^2}{2\sqrt{\kappa^2 - \kappa_0^2}} = \left| \frac{\xi}{\tau} \right|. \quad (28.23)$$

Решения уравнения (28.23) при  $\xi/\kappa_0\tau \gg 1$  имеют вид

$$\kappa = \left| \frac{\xi}{\tau} \right|, \quad \kappa = \kappa_0 \left( 1 + \frac{\kappa_0^2 \tau^2}{8\xi^2} \right). \quad (28.24)$$

В результате получаем асимптотическое выражение

$$\begin{aligned} a(\xi, \tau) &= a_0 + \text{Re} \left\{ \left( \frac{2}{\pi\tau} \right)^{1/2} A \left( \frac{\xi}{\tau} \right) \exp \left[ i \left( \frac{\xi^2}{2\tau} - \frac{\pi}{4} \right) \right] + \right. \\ &\left. + \left( \frac{\kappa_0^3 \tau^3}{2\pi|\xi|^3} \right)^{1/2} A(\kappa_0) \exp \left[ i \left( \kappa_0\xi - \frac{\kappa_0^3 \tau^2}{4|\xi|} + \frac{\pi}{4} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (28.25)$$

Добавка к  $a_0$  описывает модуляционные волны, распространяющиеся от центра с групповой скоростью, равной, согласно (28.23),  $\xi/\tau$ .

Итак, общая картина эволюции возмущения (28.17) в начальной стадии процесса выглядит следующим образом [94]. В центральной области ( $|\xi| \ll \kappa_0\tau$ ) образуются крупномасштабные модуляции амплитуды с волновыми числами  $\kappa \sim \kappa_0$ , качественно подобные стационарным волнам (28.13). С увеличением  $\tau$  линейное приближение теряет силу и экспоненциальный рост амплитуд прекращается. Однако глубина модуляций в этой области с течением времени увеличивается и волна распадается

\* Область применимости выражения (28.21) ограничивается величиной  $\tau$ , однако всегда можно выбрать настолько малое возмущение  $f(\xi)$ , определяющее величину  $\text{const}$  в (28.21), чтобы второй член оставался достаточно малым даже при  $va_0^2 \sim 1$ , так что в области  $\xi$ , где применимо выражение (28.21), будет укладываться несколько осцилляций с длинами волн порядка  $2\pi/\kappa_0$ .

на волновые пакеты, очень медленно движущиеся в рассматриваемой системе отсчета. Кроме того, от границ глубоко промодулировавшейся области распространяются модуляционные волны со скоростями, растущими

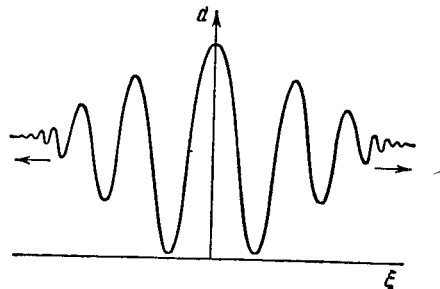


Рис. 28.3. Распад плоской волны на волновые пакеты.

с увеличением  $|\xi|$ . При достаточно больших  $\xi$ , где справедлива асимптотика (28.25), волновые числа (28.24) становятся больше величины  $\kappa_0$ . Поэтому они лежат в устойчивой области. Модуляционные волны в промежуточной области имеют фурье-компоненты с  $\kappa < \kappa_0$  и поэтому неустойчивы; они дают начало новым волновым сгусткам. Таким образом, ширина области, распавшейся на пакеты, увеличивается с ростом  $\tau$  \*).

Общий вид профиля при не очень больших  $\tau$ , когда ширина глубоко промодулировавшейся области еще не велика, выглядит примерно так, как это изображено на рис. 28.3.

При больших  $\tau$  процесс самомодуляции плоской волны исследовался в работе [96] с помощью численного интегрирования (см. также [97]). Для начального возмущения  $f(\xi)$  было принято выражение

$$f(\xi) = \gamma \exp(-\xi^2/l^2). \quad (28.26)$$

Вид решения при  $\tau=0,4$  изображен на рис. 28.4. Он соответствует следующим значениям параметров:  $a_0=1$ ,  $\gamma=1$ ,  $2\sqrt{\nu} a_0 l = \kappa_0 l = 2$ ,  $\nu=36$  \*\*). При увеличении  $\tau$  ширина промодулировавшейся области растет.

\*) Описываемый здесь процесс, по-видимому, наблюдался для гравитационных волн на поверхности глубокой воды [95], которые удовлетворяют условиям (27.14) (см. рис. 28.4).

\*\*\*) Все решения с одинаковыми значениями параметров  $\kappa_0 l$  и  $\gamma$  являются подобными (при одном и том же виде  $f(\xi)$ ).

Амплитуды пакетов стремятся к стационарным значениям (кроме центрального, имеющего вершину при  $\xi=0$ , который заметно пульсирует). Минимумы с течением времени уменьшаются. Расстояния между пакетами очень медленно (по сравнению со скоростью расширения

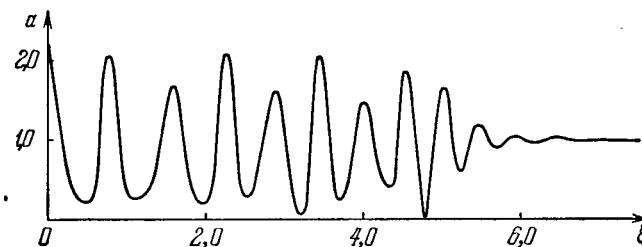


Рис. 28.4. Вид численного решения  $a(\xi, \tau)$  нелинейного параболического уравнения при начальном условии (28.26) и  $\tau=0,4$  (при  $\xi < 0$  решение выглядит симметрично) [96].

области модуляции) увеличиваются. Наиболее интересным фактом является то, что профили пакетов с достаточно установившимися амплитудами  $A$  довольно хорошо описываются выражением (28.12). Таким образом, можно заключить, что в том случае, когда исходная плоская волна неустойчива относительно продольных модуляций, малые возмущения приводят к ее распаду на солитоны. Хотя расстояния между отдельными пакетами, изображенными на рисунке, увеличиваются весьма медленно, солитоноподобная форма отдельных пакетов устанавливается достаточно быстро (разумеется, в окрестности минимумов отклонения от формулы (28.12) становятся значительными \*).

Далее интересно отметить довольно четкое разделение солитонов на большие и меньшие, что видно на рис. 28.4. Амплитуды больших солитонов у нас имеют величину  $A=2,1$ , у меньших  $A=1,7$ . Численное интегрирование проводилось до  $\tau=1$ . При этом амплитуды сформировавшихся солитонов остаются примерно постоянными во времени, а их число быстро возрастает за счет расширения возмущенной области.

\*) Более подробное сопоставление численного решения с формулой (28.12) см. в [96].

Фаза  $\varphi$  в пределах протяженности отдельных солитонов оказывается примерно постоянной (при данном  $\tau$ ), как и должно быть согласно формуле (27.12). Однако на границе между двумя солитонами фаза довольно резко изменяется. Таким образом, при фиксированном  $\tau$  фазу в общем можно представить как ступенчатую функцию  $\xi$ .

Примечательно, что при начальном возмущении вида

$$f(\xi) = \gamma \operatorname{sech}(\xi/l) \quad (28.27)$$

амплитуды солитонов получаются примерно такими же, как и для (28.26). Таким образом, структура квазистационарной области, где солитоны уже в основном сформировались, по-видимому, не зависит от детального вида начального возмущения.

### § 29. Самофокусировка и самоканализация волн

Перейдем теперь к исследованию волн, неустойчивых относительно поперечных возмущений, предполагая, что имеют место условия (27.16).

Рассмотрим вопрос о нелинейной дифракции волн в этом случае. Опуская в уравнениях (27.7), (27.8) производные по времени и предполагая, что отношение длины волны  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$  к характерным размерам поперечных возмущений достаточно мало, получим уравнения для этого случая в виде

$$k_0 \varphi_x + \frac{1}{2} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 - \nu a^2 - \frac{1}{2a} \Delta_{\perp} a = 0, \quad (29.1)$$

$$k_0 (a^2)_x + \nabla_{\perp} (a^2 \nabla_{\perp} \varphi) = 0,$$

где

$$\nu = -\frac{k_0}{u_0} \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 > 0. \quad (29.2)$$

Эти уравнения эквивалентны нелинейному параболическому уравнению для комплексной волновой функции (27.1)

$$-2ik_0 \Psi_x + \Delta_{\perp} \Psi + 2\nu |\Psi|^2 \Psi = 0. \quad (29.3)$$

В случае, когда  $\Psi$  изменяется только вдоль одного из поперечных направлений, скажем, вдоль оси  $y$  ( $\nabla_{\perp} = \frac{\partial}{\partial y}$ ), уравнения (29.1) становятся совершенно аналогичными

нестационарным одномерным уравнениям (28.2) (с соответствующим переопределением коэффициента  $\nu$  согласно (29.2) и заменой  $\varphi$  на  $-\varphi$ , что эквивалентно комплексному сопряжению параболического уравнения).

Прежде всего здесь следует указать на однородное по отношению к  $x$  решение уравнения (29.3) [88, 89]

$$\Psi = A \operatorname{sech} [A \sqrt{\nu} |y - y_0| \exp \left[ \frac{i\nu A^2 (x - x_0)}{2k_0} \right]], \quad (29.4)$$

описывающее волну с солитонным профилем интенсивности  $|\Psi|^2$ , не зависящей от  $x$ . Это решение аналогично (28.12) и описывает плоский волновой пучок, где дифракционное расплывание, определяемое членом  $\Delta_{\perp} \Psi$  в (29.3) полностью компенсируется нелинейной самофокусировкой.

Поток энергии в такой волне определяется величиной

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dy = 2A\nu^{-1/2}, \quad (29.5)$$

т. е. мощность однородного плоскопараллельного пучка обратно пропорциональна его ширине

$$l = (A\sqrt{\nu})^{-1}. \quad (29.6)$$

Пусть форма волны при  $x=0$  определяется выражением

$$\Psi(0, y) = a_0 f(y/L), \quad (29.7)$$

где  $f(\eta)$  — безразмерная функция, исчезающая при  $\eta \gg 1$  (величина  $a_0$  выбрана так, чтобы  $\max f = 1$ ). Если ширина  $L$  этой волны значительно превышает размеры солитона (29.4) с амплитудой  $A \sim a_0$ , т. е.

$$a_0 \sqrt{\nu} \gg 1/L, \quad (29.8)$$

то волна, очевидно, должна распасться при возрастании  $x$  на ряд плоскопараллельных каналов, близких по форме к солитонам (29.4), с амплитудами порядка  $2a_0$ . Этот процесс, аналогичный рассмотренной выше одномерной самомодуляции, можно называть самоканализацией.

Естественно предположить, что аналогичные, в принципе, процессы должны были бы иметь место и для цилиндрических волновых пучков. Однако в этом случае



ситуация осложняется из-за эффектов, обусловленных двумерной геометрией сечения пучка.

Прежде всего отметим, что здесь, как и выше, существуют стационарные по  $x$  решения волнового уравнения (29.3) вида [88, 89]

$$\Psi = a(r_{\perp}) \exp[i\gamma(x-x_0)], \quad (29.9)$$

где функция  $a(r_{\perp})$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta_{\perp} a - 2\gamma k_0 a + 2\nu a^3 = 0. \quad (29.10)$$

Выражение (29.9) описывает пучок с интенсивностью, не зависящей от  $x$ . Переходя к безразмерным переменным

$$\rho = (2\gamma k_0)^{1/2} r_{\perp}, \quad \Phi = (\nu/\gamma k_0)^{1/2} a, \quad (29.11)$$

приводим уравнение (29.10) к виду

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} - \Phi + \Phi^3 = 0. \quad (29.12)$$

Нас интересуют ограниченные решения этого уравнения, исчезающие при  $\rho \rightarrow \infty$ . Если пренебречь членом  $\Phi^3$ , то (29.12) превращается в уравнение Бесселя. Таким образом, асимптотика решения, описывающего однородный пучок при  $\rho \rightarrow \infty$ , должна иметь вид

$$\Phi(\rho) \approx \text{const} \cdot K_0(\rho) \approx \text{const} \cdot \sqrt{\pi/2\rho} e^{-\rho} \quad (\rho \gg 1). \quad (29.13)$$

Решения уравнения (29.12) при условии (29.13), вообще говоря, имеют особенность при  $\rho=0$ . Конечные в начале координат решения получаются лишь при дискретных значениях  $\text{const}$  в (29.13); их можно также характеризовать значениями  $\Phi(0)$ , которые мы будем нумеровать в порядке возрастания этих величин.

Таким образом, получаем дискретное семейство ограниченных решений уравнения (29.12)  $\Phi_n(\rho)$ , где  $\Phi_{n+1}(0) > \Phi_n(0)$ ,  $n=0, 1, 2, \dots$ . Оказывается при этом, что число корней функции  $\Phi_n(\rho)$  совпадает с номером  $n$ . Решение при  $n=0$  было получено путем численного интегрирования [89]. Высшие моды с  $n > 0$  были исследованы в [98, 99]. При этом было найдено, что

$$\Phi_0(0)=2, 2, \quad \Phi_1(0)=3, 3, \quad \Phi_2(0)=4, 1, \quad \Phi_3(0)=4, 6. \quad (29.14)$$

Соответственно амплитуды однородных пучков по порядку величины определяются выражениями

$$a_n^{(\nu)}(0) \sim \left(\frac{\gamma k_0}{\nu}\right)^{1/2} \Phi_n(0). \quad (29.15)$$

Радиусы пучков  $R_n^{(\nu)}$ , согласно (29.11), пропорциональны величине  $(1/2\gamma k_0)^{1/2}$ , т. е. обратно пропорциональны амплитудам; в частности,

$$R_0^{(\nu)} \sim (2\gamma k_0)^{-1/2}. \quad (29.16)$$

Из этих соотношений следует, что полная мощность однородного пучка, определенная как

$$P = \int_0^{\infty} |a(r_{\perp})|^2 r_{\perp} dr_{\perp} = \frac{P}{2\nu}, \quad (29.17)$$

где

$$p = \int_0^{\infty} |\Phi(\rho)|^2 \rho d\rho,$$

не зависит от его ширины. Она определяется только номером соответствующей моды  $i$ , следовательно, принимает дискретный ряд значений  $p_n$ . В частности, согласно [89, 98, 99]

$$p_0=1, 9; \quad p_1=12, 2; \quad p_2=31, 3; \quad p_3=58, 6. \quad (29.18)$$

Однородные волновые пучки можно рассматривать как самоподдерживающиеся волноводы, где фазовая скорость  $\omega/k$  меньше, чем вне пучка из-за зависимости последней от интенсивности волнового поля. Если схематично предположить, что интенсивность волны резко падает до нуля у границы пучка, то относительный показатель преломления двух областей — внутренней и внешней — равен

$$N = \frac{k(\omega, \tilde{a}^2)}{k(\omega, 0)} \approx 1 + \frac{1}{k_0} \left( \frac{\partial k}{\partial (a^2)} \right)_{a=0} \tilde{a}^2, \quad (29.19)$$

$$k_0 = k(\omega, 0),$$

где  $\tilde{a}$  — некоторое эффективное значение амплитуды поля в пучке. Учитывая (25.10) и (29.2), получаем

$$N = 1 + \frac{\nu}{k_0^2} \tilde{a}^2. \quad (29.20)$$

Лучи в таком волноводе, попадая на его границу, должны испытывать полное внутреннее отражение. Если  $\theta$  — угол между направлением луча и осью волновода, то полное внутреннее отражение имеет место при  $\sin \theta < \sin \theta_0 = \sqrt{(N^2 - 1)/N^2}$ . Поскольку предполагается, что  $N - 1 \ll 1$ , то можно написать условие полного внутреннего отражения в виде

$$\theta < \theta_0 = (N^2 - 1)^{1/2}. \quad (29.21)$$

С другой стороны, лучи отклоняются от оси волновода из-за дифракции. Для полного отражения этих лучей от границы необходимо, чтобы эффективный угол дифракции  $\theta_D \sim (kR)^{-1}$  не превышал максимальный угол полного внутреннего отражения:  $\theta_D < \theta_0$ . Подставляя сюда выражения для этих углов, получаем

$$kR > \text{const} \cdot (N^2 - 1)^{-1/2}, \quad (29.22)$$

где const — некоторая безразмерная постоянная порядка единицы \*). Подставляя сюда (29.20), будем иметь

$$\tilde{a}R > \frac{\text{const}}{\sqrt{2\nu}}. \quad (29.23)$$

Величина  $\tilde{a}^2 R^2$  определяет, согласно (29.17), мощность пучка. Таким образом, неравенство (29.23) означает, что наименьшая возможная мощность однородного волнового пучка должна иметь значение порядка  $1/\nu$ , что согласуется с величиной  $P_0$ , следующей из (29.17), (29.18).

Из изложенного ясно, что если в среду попадает пучок с мощностью  $P < P_0$ , то он должен дефокусироваться. Если же

$$P > P_0, \quad (29.24)$$

то в принципе возможно образование однородных волновых пучков.

Общая картина, однако, существенно осложняется тем, что цилиндрические стационарные решения уравнения (29.3) неустойчивы относительно самосжатия [101—103]. Это связано с тем, что если  $P$  несколько превышает величину  $P_0$ , то нелинейный член в (29.3),

\*) Строгое решение задачи о цилиндрическом волноводе с резкой границей дает (см., например, [100], § 23)

$$kR > 2,40 (N^2 - 1)^{-1/2}.$$

определяющий сжатие пучка из-за самофокусировки, больше, чем дифракционный член  $\Lambda_{\perp} \Psi$ , так что пучок должен неограниченно сжиматься.

Здесь следует, однако, учесть, что при малых  $R$  и соответственно больших  $a$  приближенное выражение (29.19), представляющее собой только первые два члена разложения в ряд величины  $N$  по степеням  $a$ , теряет силу. Если при достаточно больших  $a$  величина  $k(\omega, a^2)$  перестает расти (т. е. наступает ее «насыщение»), то процесс самосжатия пучка прекращается \*).

Итак, общая картина эволюции пучка, попадающего в среду, где имеют место условия (27.16), должна выглядеть следующим образом. Если мощность пучка меньше критического значения  $P_0$ , то он расплывается. При  $P > P_0$  исходная волна может распасться на ряд пучков, сужающихся вплоть до наступления насыщения или других явлений, при которых уже несправедливо приближенное уравнение (29.3).

Все эти эффекты наблюдаются в оптике при прохождении интенсивных лазерных пучков через среды, дисперсионные характеристики которых удовлетворяют указанным выше условиям [8, 9].

### § 30. Электроакустические волны в плазме

Изложенная выше общая картина нелинейных модуляционных эффектов может измениться, когда существенны эффекты электрострикции, т. е. изменение плотности среды под действием силы давления высокочастотного электромагнитного поля. В этом случае, как уже отмечалось в § 8, модуляционные процессы в электромагнитных волнах сопровождаются связанными с ними звуковыми колебаниями, так что можно говорить о распространении электроакустических волн. Такого рода эффекты становятся особенно заметными, когда групповая скорость волны близка к скорости звука  $c_s$ . Поскольку обычно  $c_s \ll c$  ( $c$  — скорость света), то групповая скорость при этом должна быть также мала по сравнению со скоростью света. Такая ситуация бывает в средах с достаточно малой диэлектрической проницаемостью и особенно характерна для плазмы.

\*) Более подробно об эффектах насыщения см., например, в [8, 9, 90, 101, 103—105].

В простейшем случае изотропной плазмы, когда диэлектрическая проницаемость определяется формулой (8.15), плотность силы давления высокочастотного электромагнитного поля имеет вид (8.23), т. е.

$$\mathbf{f}_E = -\frac{Ne^2}{4m_e\omega^2} \nabla |\vec{\mathcal{E}}|^2, \quad (30.1)$$

где  $\vec{\mathcal{E}}$  — напряженность электрического поля, а  $N$  — плотность частиц.

Из (30.1) видно, что сила  $\mathbf{f}_E$  направлена в сторону уменьшения плотности энергии поля, т. е. плотность частиц плазмы меньше там, где поле больше, и наоборот. В результате оказывается, что достаточно сильное электромагнитное поле может довольно глубоко проникать в плазму даже в том случае, когда равновесное значение диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_0 = \epsilon(N_0) = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{4\pi N_0 e^2}{m_e} \quad (30.2)$$

трицательно. Остановимся на этом подробнее \*).

Пусть электрическое поле волны имеет вид

$$\mathcal{E} = E(x, t)e^{-i\omega t}, \quad (30.3)$$

где  $E(x, t)$  — комплексная амплитуда, причем  $\omega < \omega_0$ , поле поперечно, т. е.  $E$  перпендикулярно оси  $x$  и

$$\frac{1}{\omega} \frac{\partial E}{\partial t} \ll 1. \quad (30.4)$$

Общее уравнение для  $E(x, t)$  с учетом стрикционных эффектов (8.32) в нашем случае принимает вид

$$2i \frac{\omega}{\omega_0^2} \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{c^2}{\omega_0^2} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - [v(x, t) + \gamma^2] E = 0, \quad (30.5)$$

где

$$\gamma^2 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}, \quad (30.6)$$

\*) Об электроакустических волнах в плазме с положительной диэлектрической проницаемостью см., например, в работах [106—110].

а

$$v(x, t) = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (30.7)$$

— относительное изменение плотности.

Нелинейный член  $vE$  в уравнении (30.5) обусловлен электрострикцией. Если им пренебречь и считать, что амплитуда  $E$  постоянна во времени, то решение получающегося уравнения имеет вид

$$E(x) = E_0 \exp(-\mu x), \quad (30.8)$$

где

$$\mu^2 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{c^2}. \quad (30.9)$$

Выражение (30.8) описывает структуру скин-слоя в плазме при падении на последнюю волны с частотой  $\omega$ , меньшей, чем плазменная частота  $\omega_0$ . Величина  $E_0 = E(0)$  — поле на границе плазмы, а  $\mu^{-1}$  — ширина скин-слоя.

Чтобы учесть нелинейные эффекты, мы должны рассмотреть уравнение (30.5) совместно с уравнениями движения плазмы. Будем считать, что последняя является бесстолкновительной и неизотермической, т. е.  $T_e \gg T_i$ . Тогда в качестве уравнений движения плазмы можно взять уравнения гидродинамики с учетом силы (30.1), т. е. уравнения (8.19), (8.20). Предполагая, что изменения плотности  $\rho - \rho_0$  невелики, мы можем линеаризовать (8.19) и (8.20) относительно величин  $\rho - \rho_0$  и  $v$  и после этого исключить скорость  $v$ . В результате получим для одномерных волн \*)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{c_s^2}{E_c^2} \frac{\partial^2 (|E|^2)}{\partial x^2}, \quad (30.10)$$

где величина  $v(x, t)$  определена в (30.7),  $c_s$  — скорость ионного «звука»

$$c_s^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{T_e}{m_i} \quad (30.11)$$

\*) Из дальнейшего будет видно, что условием законности такой линеаризации является малость величины  $\gamma^2$  в (30.6), т. е. достаточная близость частоты  $\omega$  к порогу прозрачности  $\omega_0$ , что и будет предполагаться ниже.

и

$$E_c^2 = \frac{16\pi c_s^2}{|\partial \epsilon / \partial \rho_0|} = 16\pi \rho_0 c_s^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}. \quad (30.12)$$

Рассмотрим далее структуру стационарного скин-слоя, учитывая изменение плотности, обусловленное радиационным давлением. Полагая,  $\partial E / \partial t = 0$ ,  $\partial v / \partial t = 0$ , а также  $E \rightarrow 0$ ,  $v \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ , получим из (30.5), (30.10) [111]

$$E(x) = 2\gamma^2 E_c \operatorname{sech}[\mu(x-x_0)], \quad (30.13)$$

$$v = -2\gamma^2 \operatorname{sech}^2[\mu(x-x_0)], \quad (30.14)$$

где  $x_0$  — постоянная интегрирования, а  $\mu$  — обратная ширина скин-слоя в линейном приближении. Считая, что поле на границе плазмы  $x=0$  равно  $E_0$ , мы получаем для  $x_0$  уравнение

$$E_0 = 2\gamma^2 E_c \operatorname{sech} \mu x_0, \quad (30.15)$$

которое имеет вещественное решение только при  $E_0 < 2\gamma^2 E_c$ . Таким образом, при  $E_0 > 2\gamma^2 E_c$  плазма «не выдерживает» давления поля волны, и стационарное состояние невозможно.

Рассмотрим теперь решения уравнений (30.5) и (30.10), зависящие от времени. Простейшие из них имеют вид уединенных электровзвучных волн, распространяющихся с постоянной скоростью. Полагая в упомянутых уравнениях

$$E = a(x-Wt) \exp[i\varphi(x-Wt)], \quad (30.16)$$

$$v = v(x-Wt),$$

где  $a$  и  $W$  — вещественные величины, получим (при условиях  $a(\pm\infty) = 0$ ,  $v(\pm\infty) = 0$ ) [109, 112]

$$a = a_0 \operatorname{sech}[\mu(1-W/\gamma^2 c^2)^{1/2}(x-Wt)], \quad (30.17)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{W}{\gamma c} \mu, \quad (30.18)$$

$$v = -2\gamma^2(1-W/\gamma^2 c^2) \operatorname{sech}^2[\mu(1-W/\gamma^2 c^2)^{1/2}(x-Wt)], \quad (30.19)$$

где скорость  $W$  и соответствующее электровзвучное число Маха

$$M = \frac{W}{c_s} \quad (30.20)$$

связаны с амплитудой солитона  $a_0$  соотношением

$$a_0^2 = 2\gamma^2 E_c^2 (1-M^2)(1-M^2 c_s^2 / \gamma^2 c^2). \quad (30.21)$$

Из этих формул вытекает, что

$$M < 1, \quad (30.22)$$

т. е. скорость электровзвучного солитона не превышает скорости звука  $c_s$  и тем ближе к последней, чем меньше амплитуда солитона \*). Если при этом выполняется условие

$$\frac{c_s}{c} \ll \gamma, \quad (30.23)$$

то размеры солитонов не зависят от амплитуды и имеют величину

$$L = \mu^{-1},$$

которая совпадает с шириной скин-слоя в линейном приближении. Характерное время  $\tau$  изменения амплитуды поля и плотности при прохождении электровзвучного солитона через данную точку пространства определяется выражением

$$\tau = (\mu c_s)^{-1}. \quad (30.24)$$

В работе [113] было показано, что солитоны (30.17) — (30.19) устойчивы относительно малых возмущений. Оказывается, далее [112, 114], что если на границу плазмы падает поперечная электромагнитная волна с переменной амплитудой  $E_0(t)$ , то при определенных условиях от скин-слоя «отщепляются» электровзвучные волны, которые по мере распространения внутрь плазмы трансформируются в солитоны, описываемые приведенными выше формулами. При этом генерация электровзвучных волн происходит наиболее эффективно, если характерное время изменения амплитуды поля имеет порядок величины  $\tau$  в (30.24), т. е. времени прохождения звуком длины скин-слоя. Более подробное обсуждение этого круга вопросов приводится в Приложении Б.

\*) При  $M \rightarrow 0$  мы получаем из (30.17) — (30.19) соотношения (30.13) и (30.14), описывающие структуру стационарного скин-слоя с учетом электрострикции.

Приложение А

**НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ  
С МЕДЛЕННО ИЗМЕНЯЮЩИМИСЯ ПАРАМЕТРАМИ  
(АДИАБАТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ УИТЭМА [16])**

**А1. Вариационный принцип**

Предположим, что общие уравнения для рассматриваемых волн могут быть получены из вариационного принципа

$$\delta \int L(\Psi, \Psi_t, \Psi_x) dx dt = 0, \quad (A.1)$$

где через  $\Psi$  обозначена совокупность величин, определяющих колебания

$$\Psi = \{\Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \dots, \Psi^{(n)}\}, \quad (A.2)$$

$t$  — время,  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$  — совокупность пространственных координат, а под  $dx$  здесь и в дальнейшем понимается произведение  $dx = dx_1 dx_2 dx_3$ .

Тогда уравнения движения для рассматриваемых волн имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \Psi_t^{(i)}} \right) + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{\partial L}{\partial \Psi_x^{(i)}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Psi^{(i)}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (A.3)$$

(по повторяющимся индексам подразумевается суммирование). Чтобы избежать громоздких выражений, мы будем писать в дальнейшем соотношения (А.3) и аналогичные им без явного выписывания индексов (если это не влечет за собой недоразумений). Например,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \Psi_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \Psi_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial \Psi} = 0 \quad (A.4)$$

вместо (А.3),  $kx$  вместо  $k_\alpha x_\alpha$  и т. п.

Плотность функции Лагранжа  $L$ , как правило, находится без особого труда для всех более или менее интересных случаев.

Рассмотрим, например, обобщенные уравнения Буссинеска в форме (10.1). Предполагая, как мы это делали всюду, что движение потенциальное, т. е.

$$\mathbf{v} = \nabla \varphi,$$

мы можем привести эти уравнения к виду

$$\varphi_t + \frac{11}{2} (\nabla \varphi)^2 + \omega(\rho) + \frac{2c_0 \beta}{\rho_0} \Delta \rho = 0, \quad \rho_t + \nabla(\rho \nabla \varphi) = 0, \quad (A.5)$$

где

$$\omega(\rho) = \int \frac{c^2(\rho)}{\rho} d\rho. \quad (A.6)$$

Роль компонент «волнового вектора»  $\Psi$  играют здесь две величины:  $\rho$  и  $\varphi$ , т. е.

$$\Psi = \{\rho, \varphi\}. \quad (A.7)$$

Нетрудно убедиться, что уравнения (А.5) могут быть записаны в форме (А.4), если

$$L = \rho \left( \varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_x^2 \right) + \int \omega(\rho) d\rho - \frac{c_0 \beta}{\rho_0} \rho_x^2. \quad (A.8)$$

Чтобы написать в лагранжевой форме уравнение Кортвега — де Вриза (КдВ), преобразуем его сначала к двум уравнениям второго порядка. Для этого, следуя [16], определяем две функции  $\varphi(x, t)$  и  $\psi(x, t)$  соотношениями

$$\varphi_x = u, \quad \psi = \varphi_{xx}, \quad (A.9)$$

так что уравнение КдВ сводится к системе \*)

$$\begin{aligned} \varphi_{xt} + \varphi_{xx} \varphi_x + \beta \psi_{xx} &= 0, \\ \varphi_{xx} - \psi &= 0. \end{aligned} \quad (A.10)$$

Плотность функции Лагранжа в этом случае имеет вид

$$L = \varphi_t \varphi_x + \frac{1}{6} \varphi_x^3 + \beta \left( \varphi_x \psi_x + \frac{1}{2} \psi^2 \right), \quad (A.11)$$

а волновой вектор  $\Psi$  имеет две компоненты:  $\Psi(\psi, \varphi)$ .

Частными решениями уравнений (А.4) являются, как мы знаем, стационарные периодические волны  $\Psi = \Psi_s$ , которые можно написать в виде

$$\Psi_s(x, t) = \Psi(\theta), \quad \theta = kx - \omega t, \quad (A.12)$$

где  $\theta$  — фаза волны,  $k$  — ее волновой вектор, а  $\omega$  — частота. По определению фазы функция  $\Psi(\theta)$  является периодической:

$$\Psi(\theta) = \Psi(\theta + 2\pi). \quad (A.13)$$

Это соотношение определяет длину волны  $\lambda$ , ее временной период  $T$  и скорость  $V$ :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad V = \frac{\omega}{|k|}. \quad (A.14)$$

Компоненты волнового вектора  $\Psi$  в общем случае следует разделить на две группы. К первой мы отнесем те компоненты, которые входят в  $L$  только через свои производные. Будем обозначать их через  $\varphi(x, t)$ . Остальные компоненты обозначаются через  $\psi(x, t)$ .

\*) В отличие от (А.8), где  $x = \{x_1, x_2, x_3\}$ , в уравнениях (А.10)  $x$  обозначает только одну пространственную координату.

Таким образом,

$$L = L(\psi, \psi_x, \psi_t; \varphi_x, \varphi_t). \quad (\text{A.15})$$

Уравнения Лагранжа при этом можно разбить на две группы

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi_x} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} = 0, \quad (\text{A.16})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi_x} \right) = 0. \quad (\text{A.17})$$

Существенная особенность уравнений (A.17) состоит в том, что они имеют дивергентную форму (т. е. вид уравнений непрерывности). Поскольку функция Лагранжа не меняется при замене  $\varphi(x, t) \rightarrow \varphi(x, t) + \text{const}$ , то величины  $\varphi(x, t)$  играют роль потенциалов (т. е. физический смысл имеют лишь производные  $\varphi_t, \varphi_x$ )\*. Отсюда, в свою очередь, следует, что наиболее общий вид решений, описывающих стационарные периодические волны\*\*, следующий:

$$\psi_s(x, t) = \psi(\theta), \quad \varphi_s(x, t) = \alpha x - \gamma t + \varphi(\theta), \quad (\text{A.18})$$

где  $\psi(\theta)$  и  $\varphi(\theta)$  — периодические функции фазы  $\theta = kx - \omega t$ , а  $\alpha$  и  $\gamma$  — произвольные постоянные. Подставляя (A.18) в (A.16) и (A.17), получаем уравнения для стационарных волн в виде

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \psi'(\theta)} \right) - \frac{\partial L_s}{\partial \psi(\theta)} = 0, \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\partial L_s}{\partial \varphi'(\theta)} \right) = 0, \quad (\text{A.20})$$

$$L_s(\psi(\theta), \psi'(\theta), \varphi'(\theta)) = L(\psi, -\omega\psi', k\psi'; -\gamma - \omega\varphi', \alpha + k\varphi'). \quad (\text{A.21})$$

Решения уравнений (A.19), (A.20) имеют вид

$$\begin{aligned} \psi &= \psi(\theta, \omega, k, \gamma, \alpha; b_1, b_2, \dots, b_m), \\ \varphi &= \varphi(\theta, \omega, k, \gamma, \alpha; b_1, b_2, \dots, b_m), \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

где  $b_1, b_2, \dots, b_m$  — постоянные интегрирования.

Условие периодичности решений (A.22) накладывает определенные ограничения на эти постоянные. Чтобы их получить, заметим, что уравнения (A.19), (A.20) могут быть получены из следующего вариационного принципа:

$$\delta \int_0^{2\pi} L_s(\psi(\theta), \psi'(\theta), \varphi'(\theta)) d\theta = 0, \quad (\text{A.23})$$

где в качестве пробных функций берутся периодические функции в окрестности периодического решения (A.22) ( $\omega, k, \gamma, \alpha$  считаются при этом постоянными). Отсюда следует, что параметры  $b_i$

\*) В примерах, рассмотренных выше, т. е. для уравнений Буссинеска и КдВ, величина  $\varphi$  есть потенциал скорости.

\*\*) Уединенные стационарные волны (как указывалось в § 10), являются предельным случаем периодических (когда длина волны стремится к бесконечности).

в решении (A.22) должны удовлетворять экстремальным соотношениям

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (\text{A.24})$$

где

$$\mathcal{L}(\omega, k, \alpha, \gamma; b_1, \dots, b_m) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L_s(\theta) d\theta, \quad (\text{A.25})$$

а  $L_s(\theta)$  — функция, определенная соотношением (A.21), в которую подставлены решения (A.22). Уравнения (A.24) позволяют, в принципе, выразить постоянные  $b_i$  через  $\omega, k, \alpha, \gamma$  для периодических постоянных волн.

Рассмотрим теперь нелинейную квазистационарную волну с медленно меняющимися параметрами (на расстояниях порядка длины волны и за время порядка периода колебаний). Тогда ее можно приближенно описывать выражениями (A.22), справедливыми для идеально периодических волн; величины  $\omega, k, \alpha, \gamma$  и  $b_1, b_2, \dots, b_m$  будут теперь медленно меняться в пространстве и во времени. Фаза  $\theta(x, t)$  уже не является линейной функцией  $x$  и  $t$ , однако, как и в геометрической оптике, будем считать, что соотношения

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad k = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{A.26})$$

остаются в силе. Из (A.26), в частности, вытекает следующая связь между функциями  $\omega(t, x)$  и  $k(t, x)$ :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.27})$$

(уравнение непрерывности для волнового числа).

Точно так же вместо комбинации  $\alpha x - \gamma t$  следует ввести функцию  $\chi(t, x)$  такую, что

$$\gamma = -\frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad \alpha = \frac{\partial \chi}{\partial x}. \quad (\text{A.28})$$

Для чисто стационарных волн  $\chi(t, x)$  является линейной функцией своих переменных. Из (A.28) вытекает, что

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.29})$$

Наконец, можно считать, что медленно меняющиеся функции  $b_i(t, x)$  в «адиабатическом» приближении по-прежнему выражаются через величины  $\omega, k, \gamma, \alpha$  теми же соотношениями, что и для идеально периодических волн, т. е. формулами (A.24).

Таким образом, нам остается получить уравнения для функций  $\theta(x, t)$  и  $\chi(x, t)$ . Для этого, следуя Уитэму, мы будем исходить из «усредненного» вариационного принципа, а именно, потребуем, чтобы величина

$$\iint \mathcal{L} dx dt, \quad (\text{A.30})$$

где  $\mathcal{L}$  — средняя функция Лагранжа, определенная так же, как и для идеально периодической волны, соотношением (A.25), приняла на искомым функциях стационарное значение, т. е.

$$\delta \iint \mathcal{L} dx dt = \iint \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \delta \omega + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \delta k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} \delta \gamma \right] dx dt = \\ = \iint \left[ -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \frac{\partial \delta \theta}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \frac{\partial \delta \theta}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} \frac{\partial \delta \chi}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \frac{\partial \delta \chi}{\partial x} \right] dx dt = 0.$$

Интегрируя по частям и предполагая, что на границах области интегрирования вариации  $\delta \theta(x, t)$ ,  $\delta \chi(x, t)$  обращаются в нуль, получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right) = 0, \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \gamma} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} \right) = 0. \quad (\text{A.32})$$

При этом в  $\mathcal{L}$  следует подставить величины  $b_i(\omega, k, \alpha, \gamma)$ , определив их из уравнений (A.24). Уравнения (A.31), (A.32) совместно с (A.26), (A.28), (A.24) полностью определяют эволюцию нелинейных волн с медленно меняющимися параметрами в адиабатическом приближении.

## A2. Адиабатические инварианты

Для того чтобы лучше понять сущность изложенного выше метода, а также его связь с теорией адиабатических инвариантов в механике систем с конечным числом степеней свободы, приведем другой вывод уравнений (A.31), (A.32).

Для этого прежде всего напомним, что из уравнений (A.16), (A.17) следует закон сохранения энергии

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} = 0, \quad (\text{A.33})$$

где плотность энергии  $W(x, t)$  и ее поток  $\mathcal{P}(x, t)$  определяются известными соотношениями

$$W = \psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_t} + \varphi_t \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} - L, \quad (\text{A.34})$$

$$\mathcal{P} = \psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_x} + \varphi_t \frac{\partial L}{\partial \varphi_x}. \quad (\text{A.35})$$

Введем теперь средние значения этих величин для квазистационарных волн

$$\bar{W} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} W(\theta) d\theta = \overline{\psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_t} + \varphi_t \frac{\partial L}{\partial \varphi_t}} - \mathcal{L}, \quad (\text{A.36})$$

$$\bar{\mathcal{P}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathcal{P}(\theta) d\theta = \overline{\psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_x} + \varphi_t \frac{\partial L}{\partial \varphi_x}}. \quad (\text{A.37})$$

Учитывая (A.21), мы можем написать (имея в виду, что  $\psi_t = -\omega \psi'(\theta)$ )

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ -\psi'(\theta) \frac{\partial L}{\partial \psi_t} - \varphi'(\theta) \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} + \frac{\partial L}{\partial \psi'(\theta)} \frac{\partial \psi'(\theta)}{\partial \omega} + \right. \\ \left. + \frac{\partial L}{\partial \psi} \frac{\partial \psi}{\partial \omega} + \frac{\partial L}{\partial \varphi'(\theta)} \frac{\partial \varphi'(\theta)}{\partial \omega} \right] d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{\omega} \left[ \psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_t} + \varphi_t \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} \right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial \psi}{\partial \omega} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial L}{\partial \psi'} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi} \right] - \frac{\partial \varphi}{\partial \omega} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial L}{\partial \varphi'} \right) \right\} d\theta. \quad (\text{A.38})$$

Используя уравнения (A.19), (A.20), получаем из (A.38) соотношение

$$\omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \overline{\psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_t} + \varphi_t \frac{\partial L}{\partial \varphi_t}}. \quad (\text{A.39})$$

Точно так же можно убедиться, что

$$\omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} = - \overline{\psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_x} - \varphi_t \frac{\partial L}{\partial \varphi_x}}. \quad (\text{A.40})$$

Сравнивая (A.36), (A.37) с (A.39), (A.40), получаем

$$\bar{W} = \omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} - \mathcal{L}, \quad (\text{A.41})$$

$$\bar{\mathcal{P}} = -\omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k}. \quad (\text{A.42})$$

Если теперь усреднить (A.33), то получим следующий закон сохранения энергии для квазипериодических волн:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\mathcal{P}}}{\partial x} = 0. \quad (\text{A.43})$$

Подставляя сюда (A.41), (A.42), будем иметь

$$\omega \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \right) \right] + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0.$$

Последние три члена здесь обращаются в нуль, так как

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial t} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k} \frac{\partial \omega}{\partial x}.$$

Отсюда и следует уравнение (A.31), которое, таким образом, является непосредственным следствием усредненного закона сохранения энергии (A.43).

Если усреднить по периоду волны уравнение (A.17), также имеющее вид закона сохранения, и заметить, что в силу

(A.21), (A.25)

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \varphi_t} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\gamma}}, \quad \frac{\partial \bar{L}}{\partial \varphi_x} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha},$$

то получится уравнение (A.32).

Метод усреднения, использованный выше, совершенно аналогичен используемому в теории адиабатических инвариантов. Как известно, адиабатический инвариант  $I$ , отвечающий периодическому движению с частотой  $\omega$  системы с конечным числом степеней свободы, имеет вид [115]

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \left( \sum_i p_i dq_i \right) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} d\theta \left( \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right). \quad (\text{A.44})$$

При этом

$$I = \frac{E + \mathcal{L}}{\omega}, \quad \mathcal{L} = \int_0^{2\pi} d\theta L(\theta), \quad (\text{A.45})$$

где  $E$  — энергия системы.

Непосредственное обобщение соотношений (A.44) на случай колебаний сплошной среды имеет вид

$$J = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{2\pi} d\theta \left[ \psi_t \frac{\partial L}{\partial \psi_t} + \varphi_t \frac{\partial L}{\partial \varphi_t} \right], \quad (\text{A.46})$$

где  $J$  — плотность адиабатического инварианта ( $I = \int J dx$ ); величины  $\psi$ ,  $\varphi$  играют при этом роль обобщенных координат. Сравнивая (A.46) и (A.39), видим, что плотность адиабатического инварианта в нашем случае равна [16]

$$J = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}. \quad (\text{A.47})$$

Уравнение (A.31) имеет смысл уравнения непрерывности для плотности адиабатического инварианта, из которого следует закон сохранения полного адиабатического инварианта  $I = \int J dx$ . При этом величина  $\partial \mathcal{L} / \partial k$  является потоком адиабатического инварианта. Заметим еще, что соотношение (A.41) можно переписать в виде \*)

$$J = \frac{\bar{W} + \mathcal{L}}{\omega}, \quad (\text{A.48})$$

аналогичном (A.45).

\*) Если волновое поле линейное, то в силу теоремы вириала  $\mathcal{L} = 0$  (так как средние значения кинетической и потенциальной энергий для гармонических колебаний равны). Тогда из (A.48) следует известное соотношение  $J = \bar{W} / \omega$ .

### A3. Нелинейная геометрическая оптика

Применим изложенную выше теорию к простейшему случаю, когда усредненная функция Лагранжа (A.25) зависит, кроме  $\omega$  и  $k$ , еще только от одного параметра. В качестве последнего всегда можно выбрать амплитуду волны  $a$ . Таким образом, будем считать, что

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\omega, k, a^2). \quad (\text{A.49})$$

Уравнения (A.24) принимают при этом вид

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (a^2)} = 0. \quad (\text{A.50})$$

Зависимость между величинами  $\omega$ ,  $k$  и  $a^2$ , которая следует из (A.50), должна совпадать с нелинейным дисперсионным уравнением

$$\omega = \omega(k, a^2) \quad (\text{A.51})$$

для стационарных волн в рассматриваемом случае.

Предположим теперь, что амплитуда  $a$  мала. Тогда усредненную функцию Лагранжа можно разложить по степеням  $a^2$ . Поскольку в линейном приближении функция Лагранжа должна быть квадратичной относительно величин  $\Psi$ , описывающих волну, то это разложение начинается с члена, пропорционального  $a^2$ , т. е.

$$\mathcal{L} = F(\omega, k) a^2 + \frac{1}{2} G(\omega, k) a^4 + \dots \quad (\text{A.52})$$

Из (A.50), (A.52) тогда следует, что уравнение  $F(\omega, k) = 0$  определяет закон дисперсии в линейном приближении  $\omega = \omega^{(0)}(k)$ . В следующем приближении получаем

$$F(\omega, k) = -G(\omega, k) a^2. \quad (\text{A.53})$$

Решив это уравнение относительно  $\omega$  (с точностью до членов порядка  $a^2$ ), мы, очевидно, получим нелинейный закон дисперсии (24.4). Подставляя (A.26) в (24.4), приходим к уравнению Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \omega^{(0)} \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 \right) + \left( \frac{\partial \omega}{\partial (a^2)} \right)_0 a^2(x, t). \quad (\text{A.54})$$

В случае слабо модулированной волны, фаза которой может быть представлена в виде (24.5), из (A.54) следует уравнение (24.9) для величин  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  и  $a^2(\mathbf{r}, t)$ . Второе уравнение, как мы сейчас увидим, вытекает из (A.31). Чтобы его получить, подставляем (A.53) в (A.52); при этом с принятой степенью точности можно считать, что  $G(\omega, k) \approx G(\omega_0, k_0)$ , где  $\omega_0$  и  $k_0$  — «несущие» частота и волновое число, фигурирующие в (24.5). Тогда

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} G(\omega_0, k_0) a^4. \quad (\text{A.55})$$

Выразим теперь  $a^2$  через  $\varphi_t$ ,  $\varphi_x$ ,  $\nabla_1 \varphi$  из (24.9) и подставим это в (A.55), а последнее — в (A.31). Выполняя дифференцирование в (A.31) с учетом (24.7), (24.8), приходим к уравнению (24.12), которое вместе с (24.9) составляет полную систему уравнений нелинейной геометрической оптики в рассматриваемом приближении.



Приложение Б

ЭВОЛЮЦИЯ ЭЛЕКТРОАКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЛАЗМЕ  
С ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТЬЮ [112]

Б1. Граничные условия

Будем предполагать, что плазма заполняет полупространство  $x > 0$  и на границу плазмы  $x=0$  падает волна с переменной амплитудой  $E_i(t)$

$$\mathcal{E}_i = E_i(t) \cos \omega \left( t - \frac{x}{c} \right). \quad (\text{Б.1})$$

Уравнения для отраженной и прошедшей в плазму волн запишем в виде

$$\mathcal{E}_r = E_r(t) \cos \left[ \omega \left( t + \frac{x}{c} \right) - \psi(t) \right], \quad (\text{Б.2})$$

$$\mathcal{E} = a(x, t) \cos [\omega t - \varphi(x, t)].$$

Векторы напряженности электрического и магнитного полей для всех трех волн параллельны граничной плоскости  $x=0$ . Из условий непрерывности напряженностей электрического и магнитного полей с учетом уравнений (Б.1), (Б.2) и

$$\frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \vec{\mathcal{E}} \quad (\text{Б.3})$$

получим

$$E_i \left[ 1 + \frac{E_r}{E_i} \cos \psi(t) \right] = a_0(t) \cos \varphi_0(t),$$

$$E_r \sin \psi = a_0 \sin \varphi_0, \quad (\text{Б.4})$$

$$\frac{\omega}{c} E_r \sin \psi = a_{0x} \cos \varphi_0 - a_0 \varphi_{0x} \sin \varphi_0,$$

$$\frac{\omega}{c} E_i \left( 1 - \frac{E_r}{E_i} \cos \psi \right) = a_{0x} \sin \varphi_0 + a_0 \varphi_{0x} \cos \varphi_0.$$

Здесь

$$E_i \equiv E_i(t), \quad E_r \equiv E_r(t),$$

$$a_0 = a(0, t), \quad \varphi_0 = \varphi(0, t),$$

$$a_{0x} = \left. \frac{\partial a(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \varphi_{0x} = \left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0}. \quad (\text{Б.5})$$

Вводя коэффициент отражения

$$R(t) = \frac{E_r^2(t)}{E_i^2(t)} \quad (\text{Б.6})$$

и используя уравнения (Б.4), получим

$$R(t) = 1 - \frac{c \varphi_{0x} a_0^2(t)}{\omega E_i^2(t)}, \quad (\text{Б.7})$$

$$\frac{a_0^2}{E_i^2} = 4 \left( 1 - \frac{c^2 a_{0x}^2}{4 \omega^2 E_i^2} \right) \left( 1 + \frac{c}{\omega} \varphi_{0x} \right)^2, \quad (\text{Б.8})$$

$$\sin \varphi_0 = \frac{c a_{0x}}{2 \omega E_i}, \quad \sin \psi = \frac{c a_0 a_{0x}}{2 \omega E_i^2} R^{-1/2}. \quad (\text{Б.9})$$

Эти соотношения совместно с условиями

$$a(x, t) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty),$$

$$\int_0^{\infty} a^2(x, t) dx < \infty \quad (\text{Б.10})$$

образуют полную систему граничных условий для основных уравнений (30.5) и (30.10), определяющих поле в плазме.

Вычислим теперь коэффициент отражения  $R(t)$ . Для этого нужно найти величину  $\varphi_{0x}$ . Умножив уравнение (30.5) на  $E^*$  и вычитая из последнего комплексно сопряженное уравнение, получим \*

$$2i \frac{\partial |E|^2}{\partial t} + \frac{c^2}{\omega_0} \frac{\partial}{\partial x} (E^* E_x - E_x^* E). \quad (\text{Б.11})$$

Подставляя сюда соотношения

$$E(x, t) = a(x, t) \exp [i\varphi(x, t)], \quad (\text{Б.12})$$

$$|E|^2 = a^2, \quad E^* E_x - E_x^* E = 2i\varphi_x a^2 \quad (\text{Б.13})$$

и интегрируя по  $x$  от  $x=0$  до  $x=\infty$ , будем иметь

$$\varphi_{0x}(t) = \frac{\omega}{c^2} \left( \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} |E(x, t)|^2 dx \right) / |E(0, t)|^2. \quad (\text{Б.14})$$

Таким образом, коэффициент отражения при  $\omega_0 - \omega \ll \omega_0$  принимает вид

$$R(t) = 1 - \frac{1}{c E_i^2(t)} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} |E(x, t)|^2 dx. \quad (\text{Б.15})$$

\*) Здесь и всюду в дальнейшем предполагается, что  $\gamma = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \ll 1$  (см. соотношение (Б.19)).

В частности, если амплитуда падающей волны не зависит от времени, то  $R=1$ , т. е. в этом случае волна полностью отражается от плазмы, проникая в нее лишь на глубину скин-слоя, определенного в § 30. Если же амплитуда падающей волны изменяется во времени, то, как будет показано ниже, отражается лишь часть падающей на плазму электромагнитной энергии.

Физическая картина проникновения излучения проста: давление электромагнитного поля создает разрежение плотности в некоторой области плазмы; в этой области концентрируется излучение в виде стоячей волны, которое распространяется вместе с областью разрежения внутрь плазмы в виде электроакустических волн.

Приближенные решения основных уравнений (30.5) и (30.10), описывающие возникновение и эволюцию электроакустических волн, рассматриваются в следующих разделах этого Приложения.

## Б2. Возбуждение и эволюция электроакустических волн

Очевидно, что характерные размеры электроакустических волн имеют порядок

$$L \sim \mu^{-1}, \quad (\text{Б.16})$$

где величина  $\mu$ , определенная в (30.10), является обратной длиной электроакустических солитонов. Соответственно этому характерное время электровзвучивания процессов по порядку величины равно

$$T \sim (\mu c_s)^{-1}. \quad (\text{Б.17})$$

Далее, при условии (30.23) величину  $d\varphi/dx$  можно считать достаточно малой, поскольку

$$\varphi_x L \sim c_s / c \gamma \ll 1.$$

Таким образом, мы можем считать, что

$$\exp(i\varphi) \approx 1. \quad (\text{Б.18})$$

Из (30.19) также видно, что условие  $v \ll 1$ , предполагавшееся выполненным при выводе уравнения (30.11) из уравнений гидродинамики, имеет вид

$$\gamma^2 = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2} \ll 1. \quad (\text{Б.19})$$

Все эти оценки позволяют получить простые выражения, описывающие проникновение электромагнитного излучения в плазму.

Предположим теперь, что амплитуда падающей электромагнитной волны отлична от нуля лишь в течение ограниченного промежутка времени

$$\begin{aligned} E_i(t) &\neq 0 & (t_1 < t < t_2), \\ E_i(t) &= 0 & (t < t_1, t > t_2). \end{aligned} \quad (\text{Б.20})$$

Считая, что  $t_2 - t_1 \sim (\mu c_s)^{-1}$  и учитывая формулы (30.23), (Б.16) — (Б.19), мы можем написать следующие оценки для величин, фигурирующих в формуле (Б.8):

$$\frac{c^2 \alpha_{0x}^2}{\omega^2 E_i^2} \sim \frac{c^2 \mu^2}{\omega^2} = \gamma^2, \quad (\text{Б.21})$$

и

$$\frac{c \varphi_{0x}}{\omega} \sim \frac{c}{\omega_0} \frac{\omega_0 \mu c_s}{c^2 \mu} = \frac{c_s}{c} \quad (\text{Б.22})$$

(последнее соотношение написано на основании формулы (Б.14)).

Из (Б.8), (Б.21) получаем

$$\alpha_0^2(t) = |E(0, t)|^2 \approx 4E_i^2(t), \quad (\text{Б.23})$$

т. е. амплитуда волны внутри плазмы на ее границе равна удвоенной амплитуде поля падающей волны.

Подсчитаем теперь полную энергию, проникшую в плазму. Эта величина определяется формулой

$$W(t) = \frac{c}{8\pi} \int_{t_1}^t dt' E_i^2(t') [1 - R(t')], \quad (\text{Б.24})$$

где  $t$  — произвольный момент времени, а  $t_1$  — момент включения поля на границе плазмы. Подставляя сюда выражение коэффициента отражения (Б.15) и учитывая, что при  $t = t_1$  поле внутри плазмы еще равно нулю, получим

$$W(t) = \frac{1}{8\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \frac{d}{dt} \int_0^\infty |E(x, t)|^2 dx \right\} = \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty dx |E(x, t)|^2. \quad (\text{Б.25})$$

При  $t > t_2$  внешнее поле равно нулю, и мы получаем

$$\frac{1}{8\pi} \int_0^\infty dx |E(x, t)|^2 = W(t_2) = \text{const} \quad (t > t_2). \quad (\text{Б.26})$$

Эти результаты, разумеется, являются простыми следствиями сохранения энергии. В самом деле, плотность энергии электровзвучивающей волны в плазме равна (109)

$$\begin{aligned} \frac{1}{16\pi} \left[ \frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} |\mathcal{E}|^2 + |\mathcal{H}|^2 \right] + \frac{\rho v^2}{2} + \frac{\rho c_s^2 v^2}{2} &\approx \\ \approx \frac{1}{16\pi} \frac{\partial(\omega\varepsilon)}{\partial\omega} |E|^2 \approx \frac{|E|^2}{8\pi}. \end{aligned} \quad (\text{Б.27})$$

(Малость опущенных членов следует из условия (30.23).) Таким образом, полная энергия электровзвучивающей волны, образовавшейся в плазме, определяется выражением (Б.25). Заметим далее, что из соотношения (Б.22) следует, что поток энергии в плазму имеет следующий порядок величины:

$$(1 - R) \frac{c}{8\pi} |E_i(0, t)|^2 \sim \frac{c_s}{2\pi} |E(0, t)|^2, \quad (\text{Б.28})$$

т. е. количество энергии, проникающее в плазму в единицу времени, равно по порядку величины плотности энергии на границе плазмы, умноженной на скорость звука, в соответствии с тем, что электро-

магнитное излучение, заполняющее электрозвуковую волну, распространяется вместе с плазмой со скоростью порядка скорости звука.

Более того, если амплитуда поля достаточно мала, а именно

$$\frac{|E|^2}{2\gamma^2 E_c^2} \ll 1 \quad (\text{Б.29})$$

(это соотношение всюду в дальнейшем будет предполагаться выполненным), то, как будет показано ниже, скорость электрозвуковых волн мало отличается от скорости звука, и соотношение (Б.28) приобретает смысл приближенного равенства \*). Если учесть теперь соотношение (Б.23), то для полной энергии электрозвуковой волны получится следующее приближенное выражение через внешнее поле \*\*)

$$W(t) \approx \frac{c_s}{8\pi} \int_{t_1}^t E^2(0, t) dt = \frac{c_s}{2\pi} \int_{t_1}^t E_i^2(t) dt. \quad (\text{Б.30})$$

Предположим теперь, что электрозвуковая волна, сформировавшаяся в плазме, отошла на достаточно большое расстояние от границы. Дальнейшая эволюция этой волны определяется решением основных уравнений при начальном условии

$$E(x, 0) = E_0(x), \quad (\text{Б.31})$$

где  $E_0(x)$  — функция, достаточно быстро затухающая при  $x = \pm \infty$  (начиная с этого момента, мы будем считать, что граница плазмы находится при  $x = -\infty$  и интервал в (Б.20) лежит в отрицательной области:  $t_1 < t_0 < 0$ ). Из изложенного выше следует, что функция  $E_0(x)$  удовлетворяет соотношениям

$$\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E_0(x)|^2 dx = \frac{c_s}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} E_i^2(t) dt. \quad (\text{Б.32})$$

Перейдем к безразмерным переменным

$$\xi = \mu(x - c_s t), \quad \tau = \mu c_s t, \quad (\text{Б.33})$$

$$F = \frac{E(x, t)}{\sqrt{2}\gamma E_c}, \quad g = \frac{v(x, t)}{\gamma^2}. \quad (\text{Б.34})$$

Тогда уравнения (30.5) и (30.11) примут вид

$$i \frac{2c_s}{\gamma c} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right) F + \frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - (1+g)F = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial}{\partial \tau} - 2 \frac{\partial}{\partial \xi} \right) g = 2 \frac{\partial^2 (F^2)}{\partial \xi^2}. \quad (\text{Б.35})$$

\*) Для солитонов это сразу следует из выражения (30.21).  
\*\*) Строгий вывод формулы (Б.30) будет дан в разделе Б3.

Если считать здесь, в соответствии со сказанным выше, что

$$g(\xi, \tau) \sim 1, \quad F^2(\xi, \tau) \ll 1, \quad (\text{Б.36})$$

то эти уравнения, как легко можно усмотреть из их структуры, имеют решения, для которых

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \sim \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \sim F^2 \psi \ll \psi, \quad (\text{Б.37})$$

где  $\psi$  — любая из неизвестных функций, фигурирующих в системе (Б.35). Нетрудно убедиться, что соотношения (Б.37) отвечают решениям, описывающим волны, распространяющиеся в положительном направлении оси  $x$  со скоростью, близкой к скорости звука \*).

Если искать только такие решения и ограничиться главными членами в уравнениях (Б.35), то основные уравнения примут вид \*\*)

$$\frac{\partial^2 F(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} - [1 + g(\xi, \tau)] F(\xi, \tau) = 0, \quad (\text{Б.38})$$

$$\frac{\partial g(\xi, \tau)}{\partial \tau} = - \frac{\partial F^2(\xi, \tau)}{\partial \xi}. \quad (\text{Б.39})$$

Рассмотрим прежде всего стационарные решения этой системы, описывающие уединенные волны. Полагая

$$F = F(\xi - V\tau), \quad g = g(\xi - V\tau),$$

получим после перехода к исходным величинам согласно (Б.33), (Б.34)

$$E = E_m \operatorname{sech} \mu(x - c_s M t), \\ g = -2\gamma^2 \operatorname{sech}^2 \mu(x - c_s M t), \quad (\text{Б.40})$$

причем амплитуда волны  $E_m$  связана с числом Маха  $M$  соотношением

$$E_m = 2\gamma E_c \sqrt{1 - M}. \quad (\text{Б.41})$$

Эти решения справедливы при  $1 - M \ll 1$  и с принятой степенью точности совпадают с выражениями (30.17) — (30.19).

Рассмотрим теперь общее решение уравнений (Б.38), (Б.39) при произвольном начальном возмущении

$$F(\xi, 0) = f(\xi), \quad (\text{Б.42})$$

исчезающем достаточно быстро вместе со своими производными при  $|\xi| \rightarrow \infty$ . При этом начальные значения функции  $g$  определяются

\*) Решения такого типа аналогичны квазипростым волнам, рассматривавшимся в гл. IV.

\*\*) Поскольку членом, содержащим  $i\partial E/\partial t$ , мы пренебрегли, то функцию  $F(\xi, \tau)$  мы можем считать, не нарушая общности, вещественной ( $\varphi_x \ll \mu c_s / c\gamma$ ). Разумеется, это несправедливо, если рассматриваются длины порядка  $1/\varphi_x \sim c\gamma / c_s \mu$ ; эти длины, однако, значительно больше характерной длины (Б.16). Заметим также, что фазой  $\varphi$  (точнее ее производной  $\varphi_x$ ) нельзя пренебрегать в некоторых случаях, несмотря на условие (Б.19). Например, коэффициент отражения (Б.7) отличен от единицы лишь благодаря тому, что  $\varphi_x \neq 0$ .

однозначно из уравнения (Б.38)

$$g(\xi, 0) = \frac{F_{\xi\xi}(\xi, 0)}{F(\xi, 0)} - 1. \quad (\text{Б.43})$$

Здесь необходимо заметить, что если функция  $g(\xi, \tau)$  исчезает достаточно быстро при  $|\xi| \rightarrow \infty$ , то функция  $F(\xi, \tau)$ , удовлетворяющая уравнению (Б.38), должна иметь следующую асимптотику при больших значениях  $|\xi|$ :

$$F(\xi, \tau) \sim c(\tau) e^{-|\xi|}. \quad (\text{Б.44})$$

Эти соотношения должны выполняться при любом значении  $\tau$ , в том числе и при  $\tau=0$ . Таким образом, функция  $f(\xi)$  в (Б.42) должна иметь асимптотику

$$f(\xi) = \text{const} \cdot e^{-|\xi|}, \quad |\xi| \rightarrow \infty. \quad (\text{Б.45})$$

В переменных  $x$  и  $t$  это означает, что амплитуда электрического поля в электрозвуковом импульсе должна иметь асимптотику вида

$$E(x, t) \sim c(t) e^{-\mu|x|}, \quad x \rightarrow \pm \infty. \quad (\text{Б.46})$$

Это выражение, естественно, совпадает с асимптотикой обычного скин-слоя в линейной теории.

В связи с изложенным возникает вопрос, может ли вообще существовать искомое решение уравнений (Б.38), (Б.39), т. е. может ли уравнение Шредингера

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} - [\lambda + g(\xi, \tau)] F = 0 \quad (\text{Б.47})$$

иметь не зависящее от времени  $\tau$  собственное значение, если его «потенциал»  $g(\xi, \tau)$  изменяется во времени согласно уравнению (Б.39).

Чтобы ответить на этот вопрос, вычислим  $d\lambda/d\tau$  из уравнений (Б.47)

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = -\frac{\partial g}{\partial \tau} + \frac{1}{F^2} \frac{\partial}{\partial \xi} (F_{\xi\tau} F - F_{\xi} F_{\tau}).$$

Подставляя сюда  $\partial g/\partial \tau$  из (Б.39), а затем умножая обе части на  $F^2(\xi, \tau)$  и интегрируя по  $\xi$  от  $-\infty$  до  $\infty$ , получим

$$\frac{d\lambda}{d\tau} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\xi, \tau) d\xi = 0. \quad (\text{Б.48})$$

Предполагая, что стоящий здесь интеграл сходится, получим

$$\frac{d\lambda}{d\tau} = 0.$$

Учитывая теперь соотношение (Б.43), находим

$$\lambda(\tau) = -1. \quad (\text{Б.49})$$

Отсюда вытекает, что обсуждавшиеся выше условия, которым должно удовлетворять искомое решение, не противоречивы.

Приступим теперь к нахождению решения. Определяя функцию  $g(\xi, \tau)$  из уравнения (Б.38) и подставляя ее в (Б.39), получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[ F^2 \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{F_{\tau}}{F} \right) \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (F^4).$$

Интегрируя и учитывая условия при  $|\xi| \rightarrow \infty$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{F_{\tau}}{F} \right) = -\frac{1}{2} F^2. \quad (\text{Б.50})$$

Введем новую функцию

$$v(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{\xi} F^2(\eta, \tau) d\eta. \quad (\text{Б.51})$$

Тогда уравнение (Б.50) после двух интегрирований примет вид уравнения Риккати

$$\frac{\partial v(\xi, \tau)}{\partial \tau} = -\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{2} c_1(\tau) v + c_2(\tau), \quad (\text{Б.52})$$

где  $c_1(\tau)$  и  $c_2(\tau)$  — произвольные функции, появившиеся при интегрировании.

Поскольку, как видно из (Б.51),

$$v(\tau, -\infty) = v_{\tau}(\tau, -\infty) = 0,$$

то

$$c_2(\tau) = 0. \quad (\text{Б.53})$$

Чтобы определить функцию  $c_1(\tau)$ , заметим, что, согласно соотношению (Б.26) (и с учетом того, что границу плазмы теперь следует считать находящейся при  $x = -\infty$ ), функция  $F(\xi, \tau)$  должна удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\xi, \tau) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\xi) d\xi = J, \quad (\text{Б.54})$$

где  $J$  — постоянная, которую, согласно соотношениям (Б.27), (Б.30), (Б.54), следует считать равной

$$J = \frac{2c_s \omega_0}{\gamma c E_c^2} \int_{t_1}^{t_2} E_i^2(t) dt. \quad (\text{Б.55})$$

Полагая теперь в уравнении (Б.52)  $\xi = \infty$  и учитывая (Б.51), (Б.54), получим

$$c_1(\tau) = J. \quad (\text{Б.56})$$

Решение уравнения (Б.52) при условиях (Б.53), (Б.56) имеет вид

$$v(\xi, \tau) = \frac{J}{2} \left\{ 1 + \operatorname{th} \left( \frac{J}{4} [\tau + \tau_0(\xi)] \right) \right\}, \quad (\text{Б.57})$$

где  $\tau_0(\xi)$  — произвольная функция, появившаяся при интегрировании. Ее можно выразить через функцию  $v(\xi, 0)$ . Учитывая, что

$$v(\xi, 0) = \int_{-\infty}^{\xi} f^2(\eta) d\eta, \quad (\text{Б.58})$$

получим

$$\tau_0(\xi) = \frac{2}{J} \operatorname{th}^{-1} \frac{J \int_{-\infty}^{\xi} f^2(\eta) d\eta}{\int_{-\infty}^{\xi} f^2(\eta) d\eta}. \quad (\text{Б.59})$$

Дифференцируя выражение (Б.57) по  $\xi$ , находим

$$F^2(\xi, \tau) = \frac{J^2}{8} \frac{d\tau_0(\xi)}{d\xi} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{4} J [\tau + \tau_0(\xi)] \right\}. \quad (\text{Б.60})$$

Формулы (Б.60) и (Б.59) дают решение уравнений (Б.38), (Б.39) при начальном условии (Б.42). Функция  $g(\xi, \tau)$  при этом однозначно определяется условием (Б.38).

Перейдем теперь к анализу полученного решения. Прежде всего рассмотрим общие свойства функции  $\tau_0(\xi)$ . Эта величина монотонно возрастает с ростом координаты  $\xi$ , причем

$$\tau_0(-\infty) = -\infty, \quad \tau_0(\infty) = \infty. \quad (\text{Б.61})$$

Таким образом, координата  $\xi$  однозначно определяется величиной  $\tau_0$  и наоборот. Согласно формулам (Б.59) и (Б.45) асимптотика функций  $\tau_0(\xi)$  имеет вид

$$\tau_0(\xi) \approx 4\xi/J \quad (\xi \rightarrow \pm\infty), \quad (\text{Б.62})$$

Рассмотрим теперь асимптотический вид решения (Б.60) при больших значениях  $\tau$ . В этом случае функция  $F(\xi, \tau)$  заметно отлична от нуля только при достаточно больших отрицательных значениях величины  $\tau_0(\xi)$ . Поскольку в этом случае можно пользоваться асимптотическим выражением (Б.62), то мы получаем

$$\begin{aligned} F(\xi, \tau) &\rightarrow (J/2)^{1/2} \operatorname{sech}(J\tau/4 + \xi), \\ g(\xi, \tau) &\rightarrow -2 \operatorname{sech}^2(J\tau/4 + \xi) \quad (\tau \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (\text{Б.63})$$

Возвращаясь к исходным переменным согласно формулам (Б.33), (Б.34), получим

$$\begin{aligned} E(x, t) &\rightarrow \sqrt{J} \gamma E_c \operatorname{sech} \left\{ \mu [x - c_s(1 - J/4)t] \right\}, \\ v(x, t) &\rightarrow -2\gamma^2 \operatorname{sech}^2 \left\{ \mu [x - c_s t(1 - J/4)] \right\} \quad (t \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (\text{Б.64})$$

Правые части этих соотношений описывают стационарную уединенную волну с амплитудой

$$E_m = \sqrt{J} \gamma E_c \quad (\text{Б.65})$$

и числом Маха

$$M = 1 - J/4. \quad (\text{Б.66})$$

Исключая отсюда  $J$ , получаем, что число Маха связано с амплитудой  $E_m$  соотношением (Б.41), а правые части соотношений (Б.64) в точности совпадают с выражениями (Б.40).

Подставляя в (Б.65) выражения (Б.54) и (Б.55), получаем

$$E_m^2 = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(x, 0) dx = 2c_s \mu \int_{t_1}^{t_2} E_t^2(t) dt. \quad (\text{Б.67})$$

Таким образом, электрозвуковая волна, образовавшаяся в плазме под действием внешней электромагнитной волны с амплитудой  $E_t(t)$ , в конечном итоге превращается в солитон с амплитудой, определяемой формулой (Б.67).

### Б3. Решение граничной задачи

Метод, изложенный в предыдущем разделе, после небольшого видоизменения может быть использован и для непосредственного решения граничной задачи. Получающиеся при этом выражения имеют несколько меньшую точность, чем полученное выше решение задачи с начальными условиями, но зато такой подход позволяет получить прямым способом такие соотношения, как, например, (Б.30), которые были получены ранее из косвенных соображений.

Безразмерные переменные, удобные для задачи с граничными условиями, имеют вид

$$\begin{aligned} \zeta &= \mu x, & \eta &= c_s \mu \left( t - \frac{x}{c_s} \right), \\ F &= \frac{E(x, t)}{\sqrt{2} \gamma E_c}, & g &= \frac{v(x, t)}{\gamma^2}. \end{aligned} \quad (\text{Б.68})$$

Тогда уравнения (30.5) и (30.11) принимают вид

$$\frac{2ic_s}{c\gamma} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \left( \frac{\partial}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 F - (1 + g) F = 0, \quad (\text{Б.69})$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( 2 \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) g(\eta, \zeta) = 2 \left( \frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)^2 F^2(\zeta, \eta). \quad (\text{Б.70})$$

Мы опять можем заключить, что эти уравнения имеют решения, удовлетворяющие условиям (Б.36), (Б.37) (с очевидной заменой  $\xi \rightarrow -\eta$ ,  $\tau \rightarrow \zeta$ ) и описывающие волны, распространяющиеся в положительном направлении оси  $x$  со скоростью, близкой к скорости звука. Если ограничиться главными членами, то уравнения (Б.69),

(Б.70) принимают вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - (1 + g(\eta, \zeta)) F(\eta, \zeta) = 0, \quad (\text{Б.71})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \zeta} = \frac{\partial (F^2)}{\partial \eta}. \quad (\text{Б.72})$$

Рассмотрим решение этих уравнений при граничном условии

$$F(\eta, 0) = f(\eta) = \frac{E_0(t)}{\sqrt{2\gamma E_c}}, \quad (\text{Б.73})$$

имеющем вид одиночного импульса, т. е. будем предполагать, что функция  $f(\eta)$  и ее производные исчезают достаточно быстро при  $|\eta| \rightarrow \infty$  \*). Функция  $F(\eta, \zeta)$  в рассматриваемом приближении опять удовлетворяет уравнению шредингеровского типа; поэтому, если  $g(\eta, \zeta)$  исчезает при  $|\eta| \rightarrow \infty$ , то  $F(\eta, \zeta)$  должна иметь следующую асимптотику при больших  $|\eta|$ :

$$F(\eta, \zeta) \approx c(\zeta) e^{-|\eta|} \quad (|\eta| \rightarrow \infty). \quad (\text{Б.74})$$

Это соотношение должно выполняться, в частности, при  $\zeta = 0$ . Поэтому функция  $f(\eta)$  также должна иметь асимптотику вида

$$f(\eta) \approx \text{const} \cdot e^{-|\eta|} \quad (|\eta| \rightarrow \infty). \quad (\text{Б.75})$$

Эти асимптотические условия имеют простой смысл. Они означают, что поле, распространяясь вместе с веществом со скоростью, близкой к скорости звука, имеет пространственную асимптотику типа (Б.46). Дальнейший ход решения системы (Б.71), (Б.72) является почти дословным повторением вычислений, приведенных выше при решении системы (Б.38), (Б.39).

Если потребовать выполнения добавочного условия

$$j = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\eta, \zeta) d\eta = \text{const}, \quad (\text{Б.76})$$

то решение, как нетрудно проверить, имеет вид

$$F^2(\eta, \zeta) = \frac{1}{8} j^2 \frac{d\zeta_0(\eta)}{d\eta} \text{sech}^2 \left\{ \frac{1}{4} j [\zeta - \zeta_0(\eta)] \right\}, \quad (\text{Б.77})$$

$$g(\eta, \zeta) = \frac{F_{\eta\eta}(\eta, \zeta)}{F(\eta, \zeta)} - 1. \quad (\text{Б.78})$$

При этом функция  $\zeta_0(\eta)$  определена соотношением

$$\zeta_0(\eta) = \frac{2}{j} \ln \frac{\int_{-\infty}^{\eta} f^2(\eta') d\eta'}{j - \int_{-\infty}^{\eta} f^2(\eta') d\eta'}. \quad (\text{Б.79})$$

\* ) Иными словами, мы считаем теперь, что  $t_1 = -\infty$ ,  $t_2 = +\infty$ .

В разделе Б4 найдено более общее решение системы (Б.71), (Б.72), не ограниченное условием постоянства интеграла (Б.76), и показано, что, вообще говоря, этот интеграл изменяется настолько медленно, что учет его переменности является превышением точности.

Рассмотрим теперь асимптотический вид функции (Б.77) при больших значениях  $\zeta$  (т. е. координаты  $x$ ). В этом случае функция  $F(\eta, \zeta)$  заметно отлична от нуля только при достаточно больших значениях величины  $\zeta_0(\eta)$ . Из формул (Б.79) и (Б.75) вытекает, что асимптотика этой функции имеет вид

$$\zeta_0 = \frac{4}{j} \eta \quad (\eta \rightarrow \pm \infty). \quad (\text{Б.80})$$

Таким образом, мы получаем

$$F(\eta, \zeta) = (j/2)^{1/2} \text{sech}(j\zeta/4 - \eta), \\ g(\eta, \zeta) = -2 \text{sech}^2(j\zeta/4 - \eta) \quad (\zeta \rightarrow \infty). \quad (\text{Б.81})$$

Возвращаясь к исходным переменным согласно формулам (Б.68), получаем

$$E(x, t) \rightarrow E_m \text{sech} \left[ \frac{\mu}{M} (x - c_s M t) \right], \\ v(x, t) \rightarrow -2v^2 \text{sech}^2 \left[ \frac{\mu}{M} (x - c_s M t) \right] \quad (\mu x \rightarrow \infty), \quad (\text{Б.82})$$

где

$$M = \frac{4}{4+j}, \quad (\text{Б.83})$$

$$E_m = \sqrt{j} \gamma E_c = 2\gamma E_c \sqrt{\frac{1-M}{M}}. \quad (\text{Б.84})$$

Учитывая, что согласно формуле (Б.70) величина  $j$  имеет второй порядок малости, мы получаем  $1-M \ll 1$ . Таким образом, формулы (Б.82) и (Б.84) с принятой степенью точности совпадают с формулами (Б.40) и (Б.41), описывающими солитон малой амплитуды.

Величина  $j$ , согласно (Б.76), (Б.73) и (Б.23), равна

$$j = \frac{2c_s \mu}{\gamma^2 E_c^2} \int_{-\infty}^{\infty} E_i^2(t) dt. \quad (\text{Б.85})$$

Подставляя это в формулу (Б.84), получим

$$E_m^2 = \frac{c_s \mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E^2(0, t) dt = 2c_s \mu \int_{-\infty}^{\infty} E_i^2(t) dt. \quad (\text{Б.86})$$

Эта формула имеет тот же смысл, что и соотношение (Б.67). Полная энергия образовавшегося солитона, вычисленная согласно формуле (Б.27), равна

$$W = \frac{E_m^2}{8\pi\mu} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2 \xi d\xi = \frac{E_m^2}{4\pi\mu} = c_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E^2(0, t)}{8\pi} dt. \quad (\text{Б.87})$$

Таким образом, количество энергии, проникающее в плазму в единицу времени, равно плотности энергии на границе плазмы, умноженной на скорость звука (ср. с формулой (Б.30)).

#### Б4. Общее решение основных уравнений

Рассмотрим общее решение уравнений (Б.71), (Б.72) при  $dj/d\zeta \neq 0$ . Положим

$$\tilde{F}(\eta, \zeta) = \left[ \frac{j_0}{j(\zeta)} \right]^{1/2} F(\eta, \zeta), \quad (\text{Б.88})$$

$$\tilde{\zeta} = \frac{1}{j_0} \int_0^{\zeta} f(\zeta') d\zeta', \quad (\text{Б.89})$$

где

$$j_0 = j(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(\eta) d\eta. \quad (\text{Б.90})$$

Подставляя (Б.88), (Б.89) в (Б.71), (Б.72), (Б.73), получим

$$\frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \eta^2} - (1 + g) \tilde{F} = 0, \quad (\text{Б.91})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \tilde{\zeta}} = \frac{\partial (\tilde{F}^2)}{\partial \eta}, \quad (\text{Б.92})$$

$$\tilde{F}(0, \eta) = f(\eta), \quad (\text{Б.93})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{F}^2(\eta, \tilde{\zeta}) d\eta = \text{const} = j_0. \quad (\text{Б.94})$$

Таким образом, уравнения для функций  $\tilde{F}$  и  $g$  в переменных  $\tilde{\zeta}$ ,  $\eta$  сохраняют форму уравнений (Б.71), (Б.72). Начальное условие и условие нормировки имеют тот же вид, что и (Б.73), (Б.76). Поэтому соответствующее решение выражается формулой (Б.77) с заменой  $F \rightarrow \tilde{F}$ ,  $\zeta \rightarrow \tilde{\zeta}$ . Возвращаясь к функции  $F$ , получаем общее решение в следующем виде:

$$F^2(\zeta, \eta) = \frac{j(\zeta) j_0}{8} \frac{d\tilde{\zeta}_0(\eta)}{d\eta} \operatorname{sech}^2 \left\{ \frac{1}{4} j_0 [\tilde{\zeta}(\zeta) - \tilde{\zeta}_0(\eta)] \right\}. \quad (\text{Б.95})$$

Поскольку уравнения (Б.71), (Б.72) справедливы лишь для функций, удовлетворяющих условиям (Б.36), (Б.37) (где нужно заменить

$\xi \rightarrow -\eta$ ,  $\tau \rightarrow \zeta$ ), то можно написать

$$\frac{dj(\zeta)}{d\zeta} = \frac{d}{d\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\eta, \zeta) d\eta = O(F^4) \quad (\text{Б.96})$$

и, следовательно,

$$j(\zeta) = j_0 + O(\zeta F^4), \quad (\text{Б.97})$$

$$\tilde{\zeta}(\zeta) = \zeta + O(\zeta^2 F^4). \quad (\text{Б.98})$$

Таким образом, можно считать, что  $\tilde{\zeta} \approx \zeta$ , если  $\zeta \ll F^{-2}$ . Но исходные уравнения (Б.71), (Б.72) также справедливы только при этом ограничении. Поэтому учитывать различие между  $\tilde{\zeta}$  и  $\zeta$  было бы превышением точности. Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что решение уравнений (Б.71), (Б.72) при граничном условии (Б.73) имеет вид (Б.77) — (Б.79).

### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
2. Дж. Дж. Стокер, Волны на воде, ИЛ, 1959.
3. Р. З. Сагдеев, Вопросы теории плазмы 4, 20, Атомиздат (1964).
4. R. Z. Sagdeev, A. A. Galeev, Lectures on the nonlinear theory of plasma, Trieste, 1966.
5. А. В. Гапонов, Л. А. Островский, Г. И. Фрейдман, Радиофизика 10, 1376 (1967); А. В. Гапонов, Л. А. Островский, М. И. Рабинович, Радиофизика 13, 163 (1970).
6. C. S. Gardner, J. M. Greene, M. D. Kruskal, R. M. Miura, Phys. Rev. Lett. 19, 1095 (1967).
7. A Discussion on Nonlinear Theory of Wave Propagation in Dispersive Systems (Organized by M. J. Lighthill), Proc. Roy. Soc. A299, p. 1—145 (1967). Русск. перевод в сб. «Нелинейная теория распространения волн», «Мир», 1970.
8. С. А. Ахманов, А. П. Сухоруков, Р. В. Хохлов, УФН 93, 19 (1967).
9. В. И. Беспалов, А. Г. Литвак, В. И. Таланов, в сб. «Нелинейная оптика» (Труды 2-го Всесоюзного симпозиума по нелинейной оптике), стр. 428, «Наука», Сибирское отделение, Новосибирск, 1968.
10. С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов, Проблемы нелинейной оптики, ВНИИТИ, 1964.
11. Н. Бломберген, Нелинейная оптика, «Мир», 1966.
12. А. К. Зарембо, В. А. Красильников, Введение в нелинейную акустику, «Наука», 1966.
13. Э. Копсон, Асимптотические разложения, «Мир», 1966.
14. G. V. Whitham, Comm. Pure Appl. Math. 14, 675 (1961).
15. G. V. Whitham, Proc. Roy. Soc. A283 (1965).
16. G. V. Whitham, J. Fluid Mech. 22, 273 (1965); Proc. Roy. Soc. A229, 6 (1967).
17. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, «Наука», 1967.
18. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 16, 574 (1946).
19. Р. З. Сагдеев, Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы, Рига, 1960, стр. 275.
20. C. S. Gardner and G. K. Morikawa, Similarity in the Asumptotic behavior of Collision-Free Hydromagnetic Waves and Water Waves, Courant Inst. of Math. Sci., Rept. NJO 9082 (1960).
21. Ю. А. Березин, В. И. Карпман, ЖЭТФ 46, 1880 (1964).
22. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Письма ЖЭТФ 3, 137 (1966).
23. Y. R. Shen, Phys. Lett. 20, 378 (1966).
24. А. В. Гапонов, М. А. Миллер, ЖЭТФ 34, 242 (1958).
25. H. Boot, S. Self, R. Shersby-Harvie, J. El. and Control 4, 434 (1958).
26. В. Л. Гинзбург, А. В. Гуревич, УФН 70, 201, 393 (1960).
27. Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 39, 1450 (1960).
28. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
29. Ю. А. Кравцов, Н. С. Степанов, ЖЭТФ 57, 1730 (1969).
30. Л. И. Мандельштам, М. А. Леонтович, ЖЭТФ 7, 438 (1937).
31. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, «Наука», 1966.
32. В. Л. Гинзбург, Акустический журнал 1, 31 (1955).
33. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, Специальные функции, «Наука», 1964.
34. J. Adlam, J. Allen, Phil. Mag. 3, 448 (1958).
35. L. Davis, R. Lüst, A. Schlüter, Zs. Naturforsch. 13a, 916 (1958).
36. C. S. Gardner, H. Goertzel, H. Grad, C. S. Morawetz, M. H. Rose, H. Rubin, Proc. 2d U. N. Conf. on Atomic Energy, Geneva 31, 230 (1958).
37. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез 1, 82 (1961).
38. R. Z. Sagdeev, Proc. Symp. on Electr. a. Fluid Dynamics of Gaseous Plasma, N. Y., 1961, p. 443.
39. А. П. Казанцев, ЖЭТФ 44, 1283 (1963).
40. В. И. Карпман, ЖЭТФ 33, 959 (1963).
41. P. G. Saffman, J. Fluid Mech. 11, 16, 552 (1961).
42. Б. А. Тверской, ЖЭТФ 42, 833 (1962).
43. А. Д. Патарая, ЖЭТФ 32, 139, 584 (1962).
44. Г. Ламб, Гидродинамика, Гостехиздат, 1947.
45. Л. А. Островский, ЖЭТФ 51, 1189 (1966).
46. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, «Наука», 1964.
47. J. M. Burgers, Proc. Acad. Sci. Amsterdam 43, 2 (1940).
48. E. Norf, Comm. Pure Appl. Math. 3, 201 (1950).
49. К. А. Наугольных, С. И. Солюян, Р. В. Хохлов, Акустический журнал 9, 54 (1963).
50. D. J. Korteweg and G. de Vries, Phil. Mag. 39, 442 (1895).
51. K. W. Morton, Phys. Fluids 7, 1801 (1964).
52. В. Е. Захаров, ПМТФ, № 3, 167 (1964).
53. C. S. Gardner, G. K. Morikawa, Comm. Pure Appl. Math. 18, 35 (1965).
54. Ю. А. Березин, ПМТФ, № 6, 26 (1965).
55. N. J. Zabusky, Proc. Symposium of Nonlinear Partial Differential Equations, Academic Press, N. Y., 1967, p. 223.



56. H. Washimi and T. Taniuti, Phys. Rev. Lett. 17, 996 (1966).
57. В. И. Карпман, ЖЭТФ 52, 1657 (1967).
58. T. Taniuti, C. C. Wei, J. Phys. Soc. Japan 24, 941 (1968); T. Kakutani, H. Ono, T. Taniuti, C. C. Wei, J. Phys. Soc. Japan 24, 1159 (1968).
59. C. H. Su, C. S. Gardner, J. Math. Phys. 10, 536 (1969).
60. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред, Атомиздат, 1961.
61. E. Ott, R. N. Sudan, Phys. Fluids 12, 2388 (1969).
62. E. Ott, R. N. Sudan, «Damping of Solitary Waves», Preprint, Cornell University, N. Y., 1969.
63. R. M. Miura, C. S. Gardner, M. D. Kruskal, J. Math. Phys. 9, 1204 (1968).
64. M. D. Kruskal, R. M. Miura, C. S. Gardner, N. J. Zabusky, J. Math. Phys. 11, 952 (1970).
65. V. I. Karman, Phys. Lett. 25A, 708 (1967).
66. N. J. Zabusky and M. D. Kruskal, Phys. Rev. Lett. 15, 240 (1965).
67. Ю. А. Березин, В. И. Карпман, ЖЭТФ 51, 1557 (1966).
68. P. D. Lax, Comm. Pure Appl. Math. 21, 467 (1968).
69. И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем. 15, 309 (1951).
70. В. А. Марченко, ДАН СССР 104, 695 (1955).
71. I. Kau, H. E. Moses, Nuovo Cimento 3, 276 (1956); J. Appl. Phys. 27, 1503 (1956).
72. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Квантовая механика, Физматгиз, 1963.
73. В. И. Карпман, В. П. Соколов, ЖЭТФ 54, 1568 (1968).
74. N. J. Zabusky, Phys. Rev. 168, 124 (1968).
75. V. I. Karman, Phys. Lett. 26A, 619 (1968).
76. Ю. А. Березин, ЖТФ 38, 24 (1968).
77. Р. З. Сагдеев, ЖТФ 31, 1955 (1961).
78. А. М. Белянцев, А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, ЖТФ 35, 677 (1965).
79. Р. Х. Куртмуллаев, Ю. Н. Нестерихин, В. И. Пильский, Р. З. Сагдеев, Proc. Culham Conf., Vol. II, 367 (1965); В. Г. Еселевич, Р. Х. Куртмуллаев, В. И. Пильский, Письма ЖЭТФ 5, 311 (1967).
80. M. J. Lighthill, J. Inst. Math. Appl. 1, 269 (1965).
81. Г. А. Аскарьян, ЖЭТФ 42, 1567 (1962).
82. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ДАН СССР 192, 753 (1970).
83. M. J. Lighthill, Proc. Roy. Soc. A299, 28 (1967).
84. T. Taniuti, N. Yajima, J. Math. Phys. 10, 1369 (1969).
85. Ф. Трикоми, Лекции по уравнениям в частных производных, ИЛ, 1957.
86. В. Е. Захаров, ПМТФ, № 2, 86 (1968).
87. T. Taniuti, H. Washimi, Phys. Rev. Lett. 21, 209 (1968).
88. В. И. Таланов, Радиофизика 7, 264 (1964).
89. R. Y. Chiao, E. Gardner, C. H. Townes, Phys. Rev. Lett. 13, 479 (1964).
90. А. Г. Литвак, В. И. Таланов, Радиофизика 10, 539 (1967).
91. М. А. Леонтович, Изв. АН СССР, сер. физ. 8, 16 (1944).
92. В. И. Беспалов, В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ 3, 471 (1966).
93. В. Е. Захаров, ЖЭТФ 53, 1935 (1967).
94. В. И. Карпман, Письма ЖЭТФ 6, 829 (1967).
95. T. V. Venjatin, Proc. Roy. Soc. A299, 59 (1967); J. E. Feig, Proc. Roy. Soc. A299, 54 (1967); T. V. Venjatin, J. E. Feig, J. Fluid Mech. 27, 417 (1967).
96. В. И. Карпман, Е. М. Крушкаль, ЖЭТФ 55, 530 (1968).
97. F. D. Tappert, W. J. Cole, R. H. Hardin and N. J. Zabusky, Wave kinetic equation emulation by numerical particle-in-cell simulation methods. Preprint PCP-70-29, Comp. Phys. Res. Dep. Bell Tel. Lab., 1970.
98. З. К. Янкаускас, Радиофизика 9, 410 (1966).
99. H. A. Haus, Appl. Phys. Lett. 8, 128 (1966).
100. А. Зоммерфельд, Электродинамика, ИЛ, 1958.
101. В. И. Таланов, Письма ЖЭТФ 2, 222 (1965).
102. P. L. Kelley, Phys. Rev. Lett. 15, 1005 (1965).
103. С. А. Ахманов, А. Н. Сухоруков, Р. В. Хохлов, ЖЭТФ 50, 1537 (1966).
104. A. Pieka, IEEE, J. Quantum Electronics QE-2, 249 (1966).
105. K. Gorb, M. Wagner, Phys. Rev. Lett. 17, 819 (1966).
106. Т. В. Волков, в сб. «Физика плазмы и управляемых термоядерных реакций», Изд-во АН СССР, 1958, т. IV, стр. 98.
107. Л. Г. Литвак, Радиофизика 9, 675 (1966).
108. Л. М. Горбунов, ЖЭТФ 54, 205 (1968).
109. В. Ц. Гурович, В. И. Карпман, ЖЭТФ 56, 1952 (1969).
110. Л. М. Горбунов, Гидродинамика плазмы в сильном высокочастотном поле, Препринт ФИАН № 174 (1969).
111. В. П. Силин, ЖЭТФ 53, 1662 (1967).
112. V. I. Karman, Plasma Physics 13, 477 (1971).
113. В. Ц. Гурович, В. И. Карпман, Р. Н. Кауфман, ЖЭТФ 56, 1979 (1970).
114. В. И. Карпман, Письма ЖЭТФ 9, 480 (1969).
115. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, «Наука», 1964.
116. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН 103, 193 (1971).

*Владимир Иосифович Карпман*

**Нелинейные волны в диспергирующих средах**

М., 1973 г., 176 стр. с илл.

Редактор *Л. А. Русаков*

Техн. ред. *И. Ш. Аксельрод*

Корректор *Т. С. Вайсберг*

---

Сдано в набор 18/X 1972 г. Подписано к печати 19/III 1973 г. Бумага  $84 \times 108^{1/32}$ . Физ. печ. л. 5,5. Условн. печ. л. 9,24. Уч.-изд. л. 8,76. Тираж 4000 экз. Т-00796.  
Цена книги 75 коп. Заказ № 1994.

---

Издательство «Наука»

Главная редакция

физико-математической литературы

117071, Москва В-71, Ленинский проспект, 15

---

Ордена Трудового Красного Знамени

Первая Образцовая типография

имени А. А. Жданова

Главполиграфпрома Государственного

комитета Совета Министров СССР

по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

Москва М-54, Валовая, 28