Э. КАРТАН

ГЕОМЕТРИЯ ГРУПП ЛИ И СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

(СБОРНИК СТАТЕЙ)

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
Б. А. РОЗЕНФЕЛЬДА

ПОД РЕДАКЦИЕЙ И С ПРИМЕЧАНИЯМИ
П. К. РАШЕВСКОГО

1949
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва

ПРЕДИСЛОВИЕ
К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Предлагаемый сборник статей содержит в себе работы Картана, объединенные общей тематикой, а именно, посвященные вопросам, промежуточным между теорией групп Ли и многомерной дифференциальной геометрией С одной стороны, группа Ли геометризируется и предстает перед нами как риманово пространство или по крайней мере как пространство аффинной связности; с другой стороны, замечательный класс римановых пространств и пространств аффинной связности, так называемые симметрические пространства, получает истолкование в рамках теории групп Ли.

При изучении этих вопросов возможны две точки зрения: локальная, когда группа Ли и симметрические пространства рассматриваются лишь в малом, и более исчерпывающая точка зрения, рассматривающая их в целом. Первая точка зрения преобладает в первой и второй статьях, вторая — в третьей, четвертой и пятой статьях Картана. Впрочем, читатель без особого труда сможет истолковать в целом и результаты первых двух статей в тех случаях, когда это возможно. В начале пятой статьи дано обоснование понятия о группе Ли в целом.

Две ветви математики, объединяемые в этих исследованиях, предполагаются в основном известными читателю. Так, в теории групп Ли предполагаются известными основные определения, основные теоремы Ли и теория структуры группы Ли (см., например, Н. Г. Чеботарев, Теория групп Ли, М.—Л., 1940, главным образом § 7, 8, 10—13, 21—24).

Далее необходимо знакомство с римановой геометрией, желательно в изложении Картана (см., например, Картан, Геометрия римановых пространств, М. — Л., 1936, главным образом гл. III, IV, VII). Из области дифференциальных уравнений понадобится теория вполне интегрируемых пфаффовых систем (см. С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М. — Л., 1948, или П. К. Рашевский, Геометрическая теория уравнений в частных производных, М. — Л., 1947).

Успешное развитие математики в нашей стране, поставившее многие ее разделы на первое место в мире, коснулось и тех вопросов, которые затронуты в этом сборнике. Характерные для творчества советских математиков широту и глубину охвата исследуемых проблем можно проследить на дальнейшей разработке рассматриваемых в нем вопросов. Интересно в этом отношении отметить, что ряд специальных проблем, в том числе и отмеченных Картаном как недоступные, был успешно разрешен советскими математиками Л. С. Понтрягиным, И. Д. Адо, А. И. Мальцевым, Ф. Р. Гантмахером. Соответствующие литературные указания даны в подстрочных примечаниях переводчика, а также в библиографии. Обзор советских работ имеется в книге „Математика в СССР за 30 лет“, М.—Л., 1948.

Чтобы облегчить чтение местами слишком сжатого текста, редактором составлены подробные примечания, помещенные в конце книги.

Иной характер носит последнее большое примечание стр. 331—368), принадлежащее переводчику. В нем для советского читателя изложено дальнейшее развитие теории симметрических пространств и ее приложения к конкретным геометрическим исследованиям, главным образом в работах советских математиков. Наличие такого примечания освобождает советского читателя от необходимости обращаться за справками к статьям, разбросанным по различным математическим журналам.

ГЕОМЕТРИЯ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ*)

ВВЕДЕНИЕ

В заметке, недавно представленной Амстердамской академии наук¹), мы — Я. А. Схоутен и я — показали, каким образом в многообразие конечной непрерывной группы преобразований (представляя каждое преобразование группы точкой многообразия) можно ввести три замечательные аффинные связности: две связности без кривизны (обозначенные в заметке знаками — и +) и одну связность без кручения (обозначенную в заметке знаком 0). Эти три связности обладают одной и той же системой геодезических линий, связанных с 1-параметрическими подгруппами данной группы. Кручения первых двух связностей, равные по величине и противоположные по знаку, определяются структурными константами группы; кривизна третьей связности определяется некоторой комбинацией этих констант. Кроме того, две первые связности обладают глубокой внутренней связью с предложенной мной теорией структуры групп, основанной на рассмотрении их уравнений, а не на рассмотрении бесконечно малых преобразований, как в теории С. Ли.

Цель настоящего мемуара состоит в развитии и дополнении всего того, что было кратко намечено в указанной заметке. Дифференциальной геометрии трех аффинных связностей я предпослал главу, посвященную изучению двух видов равенства векторов, которые можно определить в группе. Среди вопросов, не затронутых в вышеуказанной заметке или обрисованных в ней недостаточно отчетливо, я укажу определение вполне

---

*) E. Cartan, La géométrie des groupes de transformations *Journal de mathématiques pures et appliquées,* 9-я серия, т. 6 (1927), стр. 1—119. *(Прим. перев.)*

[1] Картан и Схоутен [1], см. также [2]. [Цифры в квадратных скобках здесь и в дальнейшем означают номер работы указанного автора в библиографическом указателе, помещенном в конце книги (стр. 369—376). — *Прим. перев.*]

геодезических многообразий в групповом пространстве, определение группы изоморфии группового пространства без кручения, возвращающее нас к ранее изучавшимся пространствам аффинной связности, в которых кривизна площадки сохраняется при параллельном переносе. И, наконец, в последней главе я ввел и рассмотрел четвертую связность — нормальную проективную связность, определяемую геодезическими линиями пространства.

Одним из наиболее интересных результатов, к которым приводит излагаемая ниже теория, является существование в теории конечных непрерывных групп наряду с классическим изоморфизмом двух других изоморфизмов, которые можно назвать *аффинным изоморфизмом* и *проективным изоморфизмом;* эти определения вытекают из рассмотрения пространства аффинной связности без кручения и пространства нормальной проективной связности, связанных с группой. В частности, две группы одного и того же порядка аффинно изоморфны, если можно выбрать базис их бесконечно малых преобразований таким образом, что константы $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot s}$, входящие в соотношения

$$(X_i (X_j X_k)) = \sum_s c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot s} X_s ,$$

являются одними и теми же для обеих групп; в известном смысле можно сказать, что константы $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot s}$ определяют *аффинную структуру* группы. *Проективная структура* аналогично определяется с помощью некоторых имеющих более сложное строение функций структурных констант Ли. Мною определены все группы с нулевыми константами аффинной или проективной структуры *).

Некоторые из общих, приводимых здесь результатов становятся особенно замечательными для простых или полупростых групп, но излагаемая здесь теория развертывается для общих групп **).

---

*) Пятая глава настоящей работы, посвященная проективной связности в групповом пространстве, в настоящем сборнике не приводится, так как она выпадает из общей тематики сборника, посвященного римановым пространствам и пространствам аффинной связности. *(Прим. ред.)*

**) Эти результаты изложены в трех последующих работах Картана, помещенных в настоящем сборнике. *(Прим. перев.)*

ГЛАВА I

ГРУППОВОЕ ПРОСТРАНСТВО НЕПРЕРЫВНОЙ ГРУППЫ И ДВА ПАРАЛЛЕЛИЗМА В ЭТОМ ПРОСТРАНСТВЕ

1. ГРУППОВОЕ ПРОСТРАНСТВО И ДВА РОДА РАВЕНСТВА В НЕМ

1. Рассмотрим конечную непрерывную группу преобразований G, зависящую от r параметров $a_1, \ldots, a_r$. Переменные, преобразуемые группой, будут в дальнейшем играть совершенно побочную роль. Будем обозначать через T_a преобразование группы, соответствующее параметрам $a_1, a_2, \ldots, a_r$, через $T_b T_a$ — преобразование, полученное последовательным осуществлением преобразований T_a и T_b, и, наконец, через T_a^{-1} — преобразование, обратное к T_a. Как известно, преобразованием, обратным к $T_b T_a$, является $T_a^{-1} T_b^{-1}$.

Мы можем рассматривать параметры $a_1, \ldots, a_r$ как координаты точки (a) в r-мерном пространстве, которое мы будем называть *групповым пространством*. Пока что это пространство является простым континуумом, но групповые свойства позволяют нам ввести в нем геометрические понятия [1]*).

Условимся называть точку, соответствующую тождественному преобразованию группы, начальной точкой пространства. Как мы увидим впоследствии, эта точка не обладает никакими специальными геометрическими свойствами.

Назовем *вектором* группового пространства и будем обозначать $\overrightarrow{ab}$ совокупность двух точек (a) (начальная точка) и (b) (конечная точка) [1]). Вектор является нулевым, если его конец совпадает с началом.

---

*) Малые цифры в квадратных скобках здесь и в дальнейшем обозначают номера примечаний редактора, помещенных в конце книги, стр. 293—331. (*Прим. ред.*)

[1]) В дифференциальной геометрии, в особенности в теории пространств аффинной связности (пространства Римана, Вейля и т. д.), слово „вектор“ употребляется в другом смысле, именно под вектором там имеется в виду геометрическая величина, поставленная в соответствие точке (начальной точке) и определяемая аналитически r компонентами (r — число измерений пространства). Но, как будет видно из дальнейшего, это двойное значение слова „вектор“ не может привести к недоразумению, так как мы введем в групповое про-

2. Определение. *Будем говорить, что два вектора* $\overrightarrow{ab}$ *и* $\overrightarrow{a'b'}$ *равны в первом смысле, если*

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}, \tag{1}$$

и будем говорить, что они равны во втором смысле, если

$$T_a^{-1} T_b = T_{a'}^{-1} T_{b'}. \tag{2}$$

Находя обратные величины к обеим частям каждого из равенств (1) и (2), мы замечаем, что эти равенства можно записать в виде

$$T_a T_b^{-1} = T_{a'} T_{b'}^{-1},$$
$$T_b^{-1} T_a = T_{b'}^{-1} T_{a'}.$$

Из этого определения [2] для каждого рода равенства непосредственно вытекают следующие свойства:

1°. *Каждый вектор, равный нулевому, сам является нулевым.*

2°. *Каждый вектор равен самому себе.*

3° *Если вектор равен второму вектору, то второй вектор равен первому.*

4°. *Если два вектора равны, обратные к ним векторы также равны.*

5°. *Каждая точка пространства служит началом единственного вектора, равного данному вектору.*

6°. *Два вектора, равные третьему вектору, равны между собой.*

7°. *Если вектор* $\overrightarrow{ab}$ *равен вектору* $\overrightarrow{a'b'}$, а $\overrightarrow{bc}$ *равен* $\overrightarrow{b'c'}$, *то вектор* $\overrightarrow{ac}$ *равен вектору* $\overrightarrow{a'c'}$.

Это последнее свойство следует из равенств

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}, \qquad T_c T_b^{-1} = T_{c'} T_{b'}^{-1},$$

вследствие чего

$$(T_c T_b^{-1})(T_b T_a^{-1}) = (T_{c'} T_{b'}^{-1})(T_{b'} T_{a'}^{-1}),$$

странство такую аффинную связность, что вектор $\overrightarrow{ab}$ (в смысле нашего текста) при условии, что точка (b) находится в достаточно малой окрестности точки (a), может быть отождествлен с вектором (во втором смысле), имеющим начало в (a) и касательным к геодезической линии, соединяющей (a) с (b), причем величина этого вектора определяется длиной дуги ab этой геодезической линии. Эти два смысла тождественны, когда точки (a) и (b) бесконечно близки.

т. е.

$$T_c T_a^{-1} = T_{c'} T_{a'}^{-1}.$$

Эти свойства приближают каждый из этих двух родов равенства к обычному равенству векторов.

3. Существует замечательное геометрическое соотношение между двумя родами равенства в групповом пространстве. Равенство (1)

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}$$

можно переписать, умножив его слева на $T_{b'}^{-1}$, а справа на $T_{a'}$, т. е. в виде

$$T_a^{-1} T_{a'} = T_b^{-1} T_{b'}.$$

совпадающем с (2). Отсюда следует

Теорема. *Если вектор $\overrightarrow{ab}$ равен в первом смысле вектору $\overrightarrow{a'b'}$, то вектор $\overrightarrow{aa'}$ равен во втором смысле вектору $\overrightarrow{bb'}$, и обратно.*

Поэтому равенство в одном смысле можно определить с помощью равенства в другом смысле.

Предположим, что вообще в r-мерном пространстве каким-нибудь образом определено равенство, удовлетворяющее требованиям 1°—6°. Тогда можно определить второй род равенства, условившись, что вектор $\overrightarrow{aa'}$ равен во втором смысле вектору $\overrightarrow{bb'}$, если вектор $\overrightarrow{ab}$ равен в первом смысле вектору $\overrightarrow{a'b'}$. Легко убедиться, что для этого второго равенства выполняются требования 1°—5°; свойство же 6° может не иметь места. Если мы предположим, что векторы $\overrightarrow{aa'}$ и $\overrightarrow{bb'}$ равны во втором смысле вектору $\overrightarrow{cc'}$, то означает, что вектор $\overrightarrow{ac}$ равен в первом смысле вектору $\overrightarrow{a'c'}$, а вектор $\overrightarrow{bc}$ — вектору $\overrightarrow{b'c'}$. Для того чтобы векторы $\overrightarrow{aa'}$ и $\overrightarrow{bb'}$ были бы равны между собой во втором смысле, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overrightarrow{ab}$ был бы равен в первом смысле вектору $\overrightarrow{a'b'}$; иными словами, равенство во втором смысле обладает свойством 6°, если равенство в первом смысле обладает свойством 7°, и обратно.

Таким образом, существование свойств 1°—6° для каждого из двух родов равенств, связанных с пространством, влечет существование свойства 7° для каждого из них.

4. Вернемся к пространству группы G. Два рода равенства векторов в нем находятся в тесной связи с двумя *параметрическими группами* G.

В самом деле, рассмотрим геометрическую операцию, состоящую в проведении из переменной точки (ξ) вектора $\overrightarrow{\xi\xi'}$, равного в первом смысле некоторому данному вектору. Пусть (a) — конец того из этих векторов, который проведен через начало координат (O). Рассматриваемая операция аналитически выражается в виде

$$T_{\xi'}T_{\xi}^{-1}=T_a$$

или

$$T_{\xi'}=T_aT_{\xi}\,, \tag{3}$$

т. е. аналитически она совпадает с одним из преобразований первой параметрической группы (см. Ли и Шефферс [1], стр. 449).

Такая же операция, состоящая в проведении из переменной точки (ξ) вектора $\overrightarrow{\xi\xi'}$, равного во втором смысле данному вектору $\overrightarrow{Oa}$, аналитически выражается в виде

$$T_{\xi'}=T_{\xi}T_a, \tag{4}$$

т. е. аналитически она совпадает с одним из преобразований второй параметрической группы (см. Ли и Шефферс [1], стр. 633).

Свойство, выражаемое теоремой n° 3, является переводом на геометрический язык того алгебраического факта, что преобразования обеих параметрических групп перестановочны между собой.

Как видно из формул (3) и (4), два рода равенства в групповом пространстве вообще различны. Они совпадают только в том случае, когда все преобразования группы перестановочны между собой.

5. Свойства, перечисленные в n°2, характеризуют равенство векторов в пространстве группы. Сейчас мы докажем, что *если в некотором пространстве определено равенство векторов, обладающее семью рассматриваемыми свойствами, то это пространство можно рассматривать как групповое пространство некоторой группы, а равенство векторов в этом пространстве — как равенство в первом смысле в пространстве группы.*

В самом деле, выберем в нашем пространстве произвольную точку (O) в качестве начальной. Пусть (a) — какая-нибудь другая точка этого пространства. Рассмотрим операцию S_a, переводящую переменную точку (ξ) в конец (ξ') вектора $\overrightarrow{\xi\xi'}$, равного $\overrightarrow{Oa}$ (этот вектор существует в силу 5°). Я утверждаю, что эти операции порождают группу.

Эти операции, очевидно, содержат в своем числе тождественную операцию (в силу 1°). Рассмотрим теперь две операции S_a и S_b и пусть (c) — результат применения к (a) операции S_b. Осуществляя последовательно операции S_a и S_b, мы перейдем от точки (ξ) к точке (ξ'), а затем к точке (ξ''), причем

$$\overrightarrow{\xi\xi'} = \overrightarrow{Oa}, \qquad (S_a)$$

$$\overrightarrow{\xi'\xi''} = \overrightarrow{Ob}. \qquad (S_b)$$

Но по предположению вектор $\overrightarrow{ac}$ равен $\overrightarrow{Ob}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{\xi'\xi''}$ равен $\overrightarrow{ac}$ (свойство 6°). Равенства

$$\overrightarrow{\xi\xi'} = \overrightarrow{Oa}, \quad \overrightarrow{\xi'\xi''} = \overrightarrow{ac}$$

влекут за собой (свойство 7°)

$$\overrightarrow{\xi\xi''} = \overrightarrow{Oc},$$

откуда следует

$$S_b S_a = S_c,$$

что и требовалось доказать.

Назовем полученную нами группу операций S_a группой G. Эта группа *просто транзитивна*, т. е. для каждой данной пары точек (ξ) и (ξ') существует одно, и только одно, преобразование, переводящее первую точку во вторую, и это преобразование является тем преобразованием S_a, которое соответствует концу вектора $\overrightarrow{Oa}$, равного вектору $\overrightarrow{\xi\xi'}$. Рассмотрим теперь два любых, равных между собой вектора $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{a'b'}$. Вектор $\overrightarrow{Oc}$, равный вектору $\overrightarrow{ab}$, равен и вектору $\overrightarrow{a'b'}$ (свойство 6°). Поэтому преобразование S_c переводит (a) в (b), а (a') в (b'). Так как преобразование $S_b S_a^{-1}$ также переводит (a) в (b) (через начальную точку (O)), а преобразование $S_{b'} S_{a'}^{-1}$ также переводит (a') в (b'), мы получаем

$$S_c = S_b S_a^{-1} = S_{b'} S_{a'}^{-1},$$

что доказывает совпадение равенства векторов, определенного в нашем пространстве, с равенством в первом смысле в групповом пространстве группы G.

6. Из этой теоремы следует, что равенство во втором смысле в групповом пространстве также можно рассматривать как равенство в первом смысле, связанное с некоторой другой группой, обладающей тем же групповым пространством. Легко видеть, что *вторая параметрическая группа* допускает в качестве своего равенства в первом смысле равенство во втором смысле группы G.

Сделаем еще одно существенное замечание. Рассмотрим совокупность преобразований T_a, зависящую от r параметров и *не образующих группу*, но обладающих тем свойством, что *преобразования* $T_b T_a^{-1}$ *зависят только от* r *параметров* (когда a и b принимают все свои возможные значения) [3]. Мы можем определить в пространстве этой совокупности преобразований равенство векторов с помощью равенства (1)

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1},$$

и эти равенства, как легко проверить, обладают всеми семью свойствами, приведенными в n°**2**. Выберем произвольное *начальное преобразование* T_0. Преобразование S_a, определенное как в n°**5**, выражается аналитически в виде

$$T_{\xi'} T_{\xi}^{-1} = T_a T_0^{-1}$$

или

$$T_{\xi'} = T_a T_0^{-1} T_{\xi}.$$

Осуществим последовательно S_a и S_b и пусть

$$S_b S_a = S_c.$$

Тогда мы получим для S_a и S_b

$$T_{\xi'} = T_a T_0^{-1} T_{\xi},$$

$$T_{\xi''} = T_b T_0^{-1} T_{\xi'} = T_b T_0^{-1} T_a T_0^{-1} T_{\xi} = T_c T_0^{-1} T_{\xi}.$$

Отсюда вытекает равенство

$$(T_b T_0^{-1})(T_a T_0^{-1}) = T_c T_0^{-1}.$$

Следовательно, преобразования $T_a T_0^{-1}$ *образуют группу.*

Эта теорема, совершенно аналитическая по существу, может быть, впрочем, доказана и непосредственно. Рассмотрим совокупность преобразований $T_bT_a^{-1}$, зависящих от r параметров, и составим произведение двух таких преобразований

$$(T_{b'}T_{a'}^{-1})\,(T_bT_a^{-1}).$$

Тогда существует такое преобразование T_c, что

$$T_{a'}^{-1}T_b = T_{b'}^{-1}T_c. \qquad (5)$$

В самом деле, преобразования $T_bT_\xi^{-1}$ с переменными параметрами ξ должны давать все преобразования совокупности $T_\xi T_\eta^{-1}$ и, следовательно, в частности, преобразование $T_{a'}T_{b'}^{-1}$. Поэтому существует такая точка (c), что

$$T_bT_c^{-1} = T_{a'}T_{b'}^{-1},$$

что равносильно (5). Из (5) следует

$$(T_{b'}T_{a'}^{-1})(T_bT_a^{-1}) = T_{b'}T_{b'}^{-1}T_cT_a^{-1} = T_cT_a^{-1},$$

что показывает, что преобразования $T_bT_a^{-1}$ порождают группу. Впрочем, все преобразования этой группы можно получить также, зафиксировав (a) и изменяя (b).

7. Говорят, что две группы G и G' одинакового порядка *изоморфны*, если между их преобразованиями можно установить такое соответствие, что произведение двух каких-нибудь преобразований первой группы соответствует произведению двух соответствующих преобразований второй группы. В соответствии, устанавливающем изоморфизм, тождественные преобразования соответствуют друг другу, а обратному преобразованию первой группы соответствует обратное преобразование второй группы.

Пусть G и G' — две изоморфные группы, а $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ — их групповые пространства. *Всякое изоморфное соответствие этих групп выражается таким точечным соответствием пространств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$, что двум векторам пространства $\mathcal{E}$, равным в первом (втором) смысле, соответствуют два вектора пространства $\mathcal{E}'$, также равные в первом (втором) смысле.*

В самом деле, мы можем выбрать параметры обеих групп таким образом, что при рассматриваемом изоморфном соответствии параметры двух соответственных преобразований в точности совпадают. Обозначим преобразования этих двух групп символами T и Θ.

Тогда равенство

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}$$

означает, что существует такое преобразование T_c, что

$$T_b = T_c T_a, \quad T_{b'} = T_c T_{a'},$$

что дает нам

$$\Theta_b = \Theta_c \Theta_a, \quad \Theta_{b'} = \Theta_c \Theta_{a'},$$

откуда

$$\Theta_b \Theta_a^{-1} = \Theta_{b'} \Theta_{a'}^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Точно так же проводится доказательство для равенства во втором смысле.

8. Обратно, *если между групповыми пространствами* $\mathcal{E}$ *и* $\mathcal{E}'$ *двух групп* G *и* G' *одного и того же порядка можно установить такое точечное соответствие, что двум векторам пространства* $\mathcal{E}$, *равным в первом смысле, соответствуют два вектора пространства* $\mathcal{E}'$, *равные в первом смысле, то группы* G *и* G' *изоморфны.*

В самом деле, пусть (ω) — точка пространства $\mathcal{E}'$, соответствующая начальной точке (O) пространства $\mathcal{E}$. Пусть, далее, (a), (b), (c) — три какие-нибудь точки пространства $\mathcal{E}$, а (α), (β), (γ) — три соответственные точки пространства $\mathcal{E}'$. Тогда равенство

$$T_b T_a^{-1} = T_c = T_c T_0^{-1}$$

по предположению влечет за собой

$$\Theta_\beta \Theta_\alpha^{-1} = \Theta_\gamma \Theta_\omega^{-1},$$

или, иными словами, равенство

$$T_b = T_c T_a$$

влечет за собой

$$\Theta_\beta \Theta_\omega^{-1} = (\Theta_\gamma \Theta_\omega^{-1})(\Theta_\alpha \Theta_\omega^{-1}).$$

Поставим теперь в соответствие преобразованию T_a группы G преобразование $\Theta_\alpha \Theta_\omega^{-1}$ группы G'. Это соответствие в силу последнего равенства, очевидно, устанавливает изоморфизм этих двух групп.

Следует заметить, что внутри данной группы весьма легко установить соответствие, меняющее между собой два рода равенства в групповом пространстве. Для этого *достаточно поставить в соответствие преобразованию T_a обратное преобразование $T_\alpha = T_a^{-1}$*. Соотношение

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1},$$

устанавливающее равенство в первом смысле, при этом заменяется соотношением

$$T_\beta^{-1} T_\alpha = T_{\beta'}^{-1} T_{\alpha'},$$

устанавливающим равенство во втором смысле.

Из этого замечания следует, что *для того, чтобы две группы одного и того же порядка были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы между групповыми пространствами этих групп можно было установить точечное соответствие, переводящее равенство в одном смысле в первом пространстве в равенство в любом из двух смыслов во втором пространстве.*

9. Предыдущие рассуждения приводят к вопросу об определении всех точечных преобразований группового пространства в себя, обладающих свойством сохранять оба рода равенства.

С самого начала очевидно, что точечное преобразование, сохраняющее равенство в первом смысле, сохраняет и равенство во втором смысле, и обратно. В самом деле, обозначим через (α), (β) и т. д. точки, в которые переходят (a), (b) и т. д. По предположению равенство в первом смысле векторов $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{a'b'}$ влечет за собой равенство в том же смысле векторов $\overrightarrow{\alpha\beta}$ и $\overrightarrow{\alpha'\beta'}$, откуда следует (n°3), что равенство во втором смысле векторов $\overrightarrow{aa'}$ и $\overrightarrow{bb'}$ влечет за собой равенство в том же смысле векторов $\overrightarrow{\alpha\alpha'}$ и $\overrightarrow{\beta\beta'}$.

Начнем с определения тех точечных преобразований, которые сохраняют равенство в первом смысле и *оставляют* неподвижной начальную точку. Равенство

$$T_c = T_b T_a$$

выражает равенство в первом смысле векторов $\overrightarrow{Ob}$ и $\overrightarrow{ac}$, что влечет за собой равенство векторов $\overrightarrow{O\beta}$ и $\overrightarrow{\alpha\gamma}$ и, следовательно, равенство

$$T_\gamma = T_\beta T_\alpha.$$

Искомые преобразования поэтому являются *автоморфизмами группы G*. Среди этих автоморфизмов, в частности, имеются преобразования *присоединенной группы*

$$T_{\xi'} = T_a^{-1} T_\xi T_a, \tag{6}$$

где (a) — фиксированная точка. Если группа G — полупростая группа, то присоединенная группа является максимальной связной группой автоморфизмов группы G (см. Картан [13], стр. 363—364) *).

Для того чтобы найти все точечные преобразования, сохраняющие равенство первого рода, достаточно комбинировать найденные выше преобразования с преобразованиями

$$T_{\xi'} = T_\xi T_a \text{ или } T_{\xi'} = T_a T_\xi$$

или с более общими преобразованиями

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi T_b, \tag{7}$$

где (a) и (b) — две фиксированные точки. В самом деле, точечные преобразования (7) переводят равенство

$$T_\eta T_\xi^{-1} = T_{\bar\eta} T_{\bar\xi}^{-1}$$

в равенство

$$T_{\eta'} T_{\xi'}^{-1} = T_{\bar\eta'} T_{\bar\xi'}^{-1}.$$

Преобразования (7), очевидно, образуют группу Γ_0, являющуюся подгруппой полной группы Γ всех преобразований, сохраняющих равенство первого рода. Легко видеть, что Γ_0 *является нормальным делителем группы* Γ. Для этого достаточно доказать, что каждое преобразование группы Γ_0 переходит в некоторое другое преобразование группы Γ_0 при любом автоморфизме группы G. В самом деле, если точки (a'), (b'), (ξ'), (η') соответствуют при этом автоморфизме точкам (a), (b), (ξ), (η), то соотношение

$$T_\eta = T_a T_\xi T_b$$

перейдет в

$$T_{\eta'} = T_{a'} T_{\xi'} T_{b'},$$

и преобразование группы Γ_0, определенное точками (a) и (b),

---

*) См. также Гантмахер [1]. *(Прим. перев.)*

переходит в некоторое другое преобразование группы Γ_0, определяемое точками (a') и (b').

Будем группу Г называть *группой изоморфии* группового пространства.

Группа точечных преобразований группового пространства, сохраняющая два рода равенства, может быть легко получена из группы Г комбинацией преобразований этой группы с преобразованием

$$T_{\xi'} = T_{\xi}^{-1}.$$

Заметим, что число параметров группы Γ_0, определенной уравнениями (7), равно самое большее $2r$. Более точно, это число равно $2r - \rho$, где ρ — порядок подгруппы, образованной теми преобразованиями группы G, которые перестановочны со всеми другими преобразованиями группы G. Группа Γ_0, очевидно, содержит присоединенную группу (6), число параметров которой равно $r - \rho$.

II. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ. ДВА ПАРАЛЛЕЛИЗМА. СДВИГИ

10. При обычном равенстве двух векторов прямые линии обладают следующим характеристическим свойством:

Для любых трех точек (a), (b), (c), взятых на одной прямой, конец (d) вектора $\overrightarrow{cd}$, равного вектору $\overrightarrow{ab}$, находится на этой же прямой.

Обобщим это понятие для любого группового пространства.

Определение. *Линия (c) в групповом пространстве является геодезической линией первого рода, если для любых трех точек (a), (b), (c) на этой линии конец (d) вектора $\overrightarrow{cd}$, равного в первом смысле вектору $\overrightarrow{ab}$, находится на этой же линии.*

Точно так же определяются геодезические линии второго рода. Однако мы сейчас же замечаем, что *всякая геодезическая линия первого рода является геодезической линией второго рода, и обратно.* В самом деле, если вектор $\overrightarrow{cd}$ равен в первом смысле вектору $\overrightarrow{ab}$, то отсюда следует, что вектор $\overrightarrow{bd}$ равен во втором смысле вектору $\overrightarrow{ac}$, и обратно. Таким образом, в действительности имеется только один вид геодезических линий.

11. Первым вопросом, возникающим здесь, является вопрос о существовании геодезических линий. Однако в групповом пространстве легко совершенно *a priori* найти бесконечное количество геодезических линий. Пусть, в самом деле, (a) — фиксированная точка. Рассмотрим 1-параметрическую подгруппу g группы G. Обозначим общее преобразование этой подгруппы через θ_u. Тогда точка (ξ), определенная с помощью соотношения

$$T_\xi = \theta_u T_a, \tag{8}$$

опишет геодезическую линию. Пусть, в самом деле, u_1, u_2, u_3 — три произвольных значения параметра u, а (ξ_1), (ξ_2), (ξ_3) — три соответственные точки. Пусть, наконец, точка (ξ_4) — конец вектора $\overrightarrow{\xi_3\xi_4}$, равного в первом смысле вектору $\overrightarrow{\xi_1\xi_2}$. Тогда имеем

$$T_{\xi_4} T_{\xi_3}^{-1} = T_{\xi_2} T_{\xi_1}^{-1}$$

или

$$T_{\xi_4} = T_{\xi_2} T_{\xi_1}^{-1} T_{\xi_3} = \theta_{u_2} \theta_{u_1}^{-1} \theta_{u_3} T_a = \theta_{u_4} T_a,$$

что и требовалось доказать.

Обратно, таким образом мы получаем все геодезические линии. В самом деле, обозначим через (ξ), (η) две переменные точки и через (a) — фиксированную точку некоторой геодезической линии. На этой геодезической линии существует такая точка (ζ), что

$$T_\eta T_\xi^{-1} = T_\zeta T_a^{-1}.$$

Следовательно, преобразование $T_\eta T_\xi^{-1}$ зависит только от одного параметра. Отсюда следует (n°6), что все эти преобразования и, в частности, преобразования $T_\zeta T_a^{-1}$ порождают 1-параметрическую подгруппу g группы G. Если обозначить общее преобразование этой подгруппы через θ_u, мы получим

$$T_\xi = \theta_u T_a,$$

что и требовалось доказать.

Можно заметить, что всякая геодезическая линия может быть определена также соотношением

$$T_\xi = T_a \theta_u, \tag{9}$$

где преобразование θ_u порождает 1-параметрическую подгруппу, или более общим соотношением

$$T_\xi = T_a \theta_u T_b. \tag{10}$$

Впрочем, равенство (10) можно переписать в виде

$$T_\xi = (T_a \theta_u T_a^{-1})(T_a T_b),$$

и преобразование $T_a \theta_u T_a^{-1}$ порождает группу, именно ту группу, которая получается из подгруппы g преобразованием с помощью T_a. Мы возвращаемся таким образом к выражению (8).

12. До сих пор мы рассматривали вектор $\overrightarrow{ab}$ только как совокупность его начала (a) и конца (b). Если координаты точки (b) достаточно мало отличаются от координат точки (a), то преобразование $T_b T_a^{-1}$, согласно теории непрерывных групп С. Ли, принадлежит к одной, и только одной, 1-параметрической подгруппе. Следовательно, точки (a) и (b) принадлежат к одной, и только одной, геодезической линии, представляющей собой геометрическое место точек, определяемых соотношением

$$T_\xi = \theta_u T_a,$$

где θ_u — общее преобразование подгруппы g. Поэтому сейчас нам ничто не мешает отождествить вектор с отрезком геодезической линии, ограниченным точками (a) и (b).

Мы можем теперь сказать, что *всякий вектор, находящийся на геодезической линии, равен одновременно в первом и втором смысле определенному вектору, находящемуся на той же геодезической линии и имеющему в качестве начала заданную точку этой геодезической линии.*

Если мы определим на геодезической линии равенство двух отрезков по равенству соответственных векторов, то мы можем *измерять* отрезки одной и той же геодезической линии, поскольку на ней выбран единичный отрезок. В частности, если в качестве параметра u общего преобразования подгруппы g взят канонический параметр Ли, так что

$$\theta_u \theta_{u'} = \theta_{u+u'},$$

то мерой отрезка $\overrightarrow{\xi_1 \xi_2}$, для которого

$$T_{\xi_1} = \theta_{u_1} T_a, \qquad T_{\xi_2} = \theta_{u_2} T_a,$$

будет $|u_2 - u_1|$. Изменение параметра u на ku приводит к изменению единицы длины. Алгебраическое *отношение* двух векторов $\overrightarrow{\xi_1\xi_2}$, $\overrightarrow{\xi_3\xi_4}$, находящихся на одной и той же геодезической линии, имеет вполне определенное значение

$$\frac{u_4 - u_3}{u_2 - u_1}.$$

13. Если через точку (b), не лежащую на геодезической линии (C), проходящей через (a), провести векторы, равные в первом смысле различным векторам, находящимся на (C), мы получим векторы $\overrightarrow{b\eta}$, равные в первом смысле векторам $\overrightarrow{a\xi}$, концы (ξ) которых описывают (C). Точка (η) описывает поэтому кривую (C'), и эта кривая является геодезической линией. Если

$$T_\xi = \theta_u T_a,$$

то мы получим

$$T_\eta = \theta_u T_b.$$

Мы будем говорить, что кривая (C') *параллельна в первом смысле* кривой (C): всякий вектор, находящийся на (C'), равен в первом смысле некоторому вектору, находящемуся на (C).

Две геодезические линии, параллельные в первом смысле третьей геодезической линии, параллельны между собой.

Точно так же определяются геодезические линии, *параллельные во втором смысле* данной геодезической линии. Если данная геодезическая линия определяется соотношением

$$T_\xi = T_a\theta_u,$$

то мы получим геодезические линии, определенные соотношениями

$$T_\eta = T_b\theta_u,$$

где (b) — произвольная фиксированная точка.

Мы определили, таким образом, два рода параллелизма для геодезических линий, и для каждого из них имеют место следующие свойства:

1°. *Всякая геодезическая линия параллельна самой себе.*

2°. *Две геодезические линии, параллельные третьей, параллельны между собой.*

3°. *Через каждую точку, не лежащую на геодезической линии, проходит одна, и только одна, параллельная геодезическая линия.*

Заметим, что два наших параллелизма позволяют легко построить вектор $\overrightarrow{\xi\eta}$, равный в первом (втором) смысле данному вектору $\overrightarrow{ab}$ и имеющий данное начало ξ: достаточно провести через (ξ) геодезическую линию, параллельную в первом (втором) смысле геодезической линии ab, а через (b) провести геодезическую линию, параллельную во втором (первом) смысле геодезической линии $a\xi$. Эти две геодезические линии пересекутся в искомой точке (η).

14. Условимся говорить, что две геодезические линии, параллельные в первом смысле, имеют *то же самое направление первого рода,* а две геодезические линии, параллельные во втором смысле, имеют *то же самое направление второго рода.* Если провести через начальную точку параллель в первом смысле к данной геодезической линии, то различные точки этой параллели представляют преобразования 1-параметрической подгруппы g. Поэтому можно сказать, что *каждое направление первого рода определяется некоторой 1-параметрической подгруппой группы G.* То же самое имеет место и для всякого направления второго рода. Поэтому если заданы 1-параметрическая подгруппа g группы G и точка (a) пространства, то из точки (a) можно двигаться как в направлении первого рода, определенном подгруппой g, так и в направлении второго рода, определенном этой подгруппой, и, в общем случае, мы получаем две различные геодезические линии, выходящие из (a).

15. Равенства в первом и во втором смысле позволяют, подобно тому, как это было сделано в n° **12**, определить равенство и, следовательно, *отношение* двух отрезков, находящихся на двух геодезических линиях, параллельных в первом или втором смысле. Если мы выберем единицу длины на данной геодезической линии, то мы сможем измерять отрезки на всех геодезических линиях, параллельных данной в первом смысле, а затем на всех геодезических линиях, параллельных одной из последних во втором смысле, и т. д. Предположим, что данная геодезическая линия выходит из начальной точки и определяется подгруппой g преобразований θ_u, где u — канонический параметр. Геодезические линии, которые могут быть получены указанным способом, представляют собой геометрические места точек (ξ), задающиеся соотношениями

$$T_\xi = T_a \theta_u T_b,$$

где (a) и (b) — произвольные фиксированные точки. В частности, те из этих геодезических линий, которые проходят через начало, задаются соотношениями

$$T_\xi = T_a \theta_u T_a^{-1}.$$

Направления этих геодезических линий определяются теми подгруппами, которые сопряжены [homologues, gleichberechtigt[1])] *подгруппе* g *в полной группе* G. Только в множестве этих направлений наше пространство допускает, следовательно, внутренним образом определенную метрику.

16. Всякое точечное преобразование группы изоморфич группового пространства, очевидно, заменяет одну геодезическую другой, сохраняя при этом отношение отрезков. Это преобразование сохраняет также параллелизм геодезических линий. Рассмотрим, в частности, преобразование

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi.$$

При этом преобразовании различные точки пространства сдвигаются на векторы, равные (в первом смысле) между собой. Кроме того, каждый вектор переходит в вектор, равный ему во втором смысле, и всякая геодезическая линия переходит в геодезическую линию, параллельную первой во втором смысле. Дадим этому преобразованию название *сдвиг первого рода*. Эти сдвиги совпадают с преобразованиями параметрической группы (n° 2).

Уравнение

$$T_{\xi'} = T_\xi T_a$$

точно так же определит *сдвиг второго рода*.

Непрерывный сдвиг первого рода

$$T_{\xi'} = \theta_u T_\xi,$$

---

[1]) Ли и Шефферс [1], стр. 474.

где θ_u обозначает произвольное преобразование некоторой 1-параметрической подгруппы (u играет роль времени), обладает тем свойством, что различные точки пространства описывают геодезические линии, параллельные друг другу в первом смысле, в то время как различные геодезические линии движутся, оставаясь параллельными друг другу во втором смысле. Будем называть этот непрерывный сдвиг *геодезическим сдвигом первого рода.* Точно так же мы определим *геодезические сдвиги второго рода.*

III. ПОДГРУППЫ И ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

17. В обычном пространстве плоскость можно определить: или как такую поверхность, что каждый вектор, имеющий начало на этой поверхности и равный какому-нибудь вектору, имеющему начало и конец на ней, имеет конец на этой поверхности,

или как такую поверхность, что каждая прямая (геодезическая линия), имеющая на ней две точки, принадлежит ей целиком.

В групповом пространстве мы можем исходить как из той, так и из другой точки зрения. Но *они в общем случае уже не эквивалентны, как в обычном пространстве.*

Мы будем называть вполне геодезическим многообразием такое многообразие, что всякая геодезическая линия, имеющая на ней две точки, принадлежит ей целиком.

Пусть теперь V_p — такое p-мерное многообразие, что каждый вектор $\overrightarrow{a\zeta}$, имеющий начало (a) на V_p и равный в первом смысле какому-нибудь вектору $\overrightarrow{\xi\eta}$, имеющему и начало и конец на V_p, имеет конец (ζ) также на V_p. Если мы оставляем неподвижной точку (a) и изменяем положение точек (ξ) и (η), то мы видим, что преобразование $T_\eta T_\xi^{-1}$ всегда может быть приведено к виду $T_\zeta T_a^{-1}$, где (ζ) — точка многообразия V_p. Следовательно, p-параметрическое множество преобразований T_ξ в том случае, когда (ξ) описывает многообразие V_p, обладает тем свойством, что преобразования $T_\eta T_\xi^{-1}$ зависят только от p параметров. Поэтому (n° 6) преобразования $T_\eta T^{-1}$ и, в частности, преобразования $T_\xi T_a^{-1}$ образуют

p-параметрическую группу. Пусть θ_u — общее преобразование этой группы. Мы видим, что

$$T_\xi = \theta_u T_a. \qquad (11)$$

Таким образом, для многообразия V_p мы нашли совершенно такой же способ образования, что и для геодезических линий. Обратное также легко доказать.

Многообразие V_p, *полученное таким образом, является вполне геодезическим многообразием.* В самом деле, если мы выберем на многообразии V_p две достаточно близкие точки (ξ) и (η), представляющие два преобразования

$$T_\xi = \theta_u T_a \text{ и } T_\eta = \theta_v T_a,$$

то преобразование $T_\eta T_\xi^{-1} = \theta_v \theta_u^{-1}$ имеет вид θ_w, 1-параметрическая подгруппа, которой оно принадлежит, входит в группу g. Следовательно, все точки геодезической линии, соединяющей точки (ξ) и (η), находятся на многообразии V_p, что и требовалось доказать.

Определение. *Будем говорить, что вполне геодезическое многообразие является вполне геодезическим многообразием к первой категории, если геодезическая линия, проведенная через произвольную точку этого многообразия параллельно (в первом или втором смысле) любой другой геодезической линии этого многообразия, сама принадлежит этому многообразию.*

Впрочем, совершенно безразлично, рассматривать ли параллелизм в первом или во втором смысле. В первом случае мы получаем формулу

$$T_\xi = \theta_u T_a,$$

а во втором случае формулу

$$T_\xi = T_a \theta_u,$$

но второй случай приводится к первому, так как

$$T_a \theta_u = (T_a \theta_u T_a^{-1}) T_a = \bar{\theta}_u T_a,$$

где преобразования $\bar{\theta}_u$ образуют p-параметрическую группу.

В более общем виде точка (ξ) определяется соотношением

$$T_\xi = T_a \theta_u T_b,$$

где θ_u образуют p-параметрическую группу.

Ниже мы увидим, что существуют вполне геодезические многообразия, не являющиеся вполне геодезическими многообразиями первой категории. Будем говорить, что эти многообразия являются вполне геодезическими многообразиями второй категории.

18. Если через точку (b), находящуюся вне вполне геодезического многообразия V_p первой категории, мы проведем геодезические линии, параллельные в первом смысле различным геодезическим линиям, проведенным на V_p, мы получим другое p-мерное вполне геодезическое многообразие первой категории, которое мы будем называть параллельным в первом смысле многообразию V_p. Если первое многообразие является геометрическим местом точек (ξ), задающимся соотношением

$$T_\xi = \theta_u T_a,$$

то второе является геометрическим местом точек (η), задающимся соотношением

$$T_\eta = \theta_u T_b.$$

Два p-мерных вполне геодезических многообразия (первой категории), параллельных в первом смысле третьему многообразию, параллельны между собой.

Точно так же определяются вполне геодезические многообразия первой категории, параллельные во втором смысле.

Можно сказать, что подгруппа g определяет *р-мерное направление первого рода* многообразия V_p, определенного соотношением

$$T_\xi = \theta_u T_a,$$

и что она определяет *р-мерное направление второго рода* многообразия V_p, определяемого соотношением

$$T_\eta = T_a \theta_u.$$

1-параметрические подгруппы, определяющие направления первого (второго) рода геодезических линий некоторого вполне геодезического многообразия первой категории, принадлежат подгруппе, определяющей p-мерное направление первого (второго) рода этого многообразия.

19. Два вполне геодезических многообразия первой категории, проведенных через некоторую точку (b) параллельно в первом и втором смысле многообразию

$$T_\xi = \theta_u T_a,$$

определяются соответственно с помощью соотношений

$$T_\eta = \theta_u T_b,$$

$$T_\zeta = T_b (T_a^{-1} \theta_u T_a).$$

Они совпадают только в том случае, если каждому преобразованию θ_u подгруппы g можно поставить в соответствие такое ее преобразование θ_v, что

$$T_b T_a^{-1} \theta_u T_a = \theta_v T_b$$

или

$$(T_a T_b^{-1})^{-1} \theta_u (T_a T_b^{-1}) = \theta_v.$$

Это уравнение выражает то, что группа g, определяющая p-мерное направление первого рода данного многообразия, перестановочна с преобразованием $T_a T_b^{-1}$ или, что то же, с 1-параметрической группой, определяющей направление первого рода геодезической линии ab. Точно так же можно показать, что p-параметрическая группа, определяющая p-мерное направление второго рода данного многообразия, перестановочна с 1-параметрической группой, определяющей направление второго рода той же самой геодезической линии.

Если мы хотим, чтобы параллельные многообразия, проведенные через точку (b), совпадали для любой точки (b), необходимо и достаточно, чтобы группа g была перестановочна со всеми элементами группы G, т. е. чтобы она была нормальным делителем группы G. В этом случае, впрочем, оба p-мерных направления многообразия определяются одним и тем же нормальным делителем g.

В общем случае следует заметить, что вполне геодезическое многообразие первой категории V_p, определяемое соотношением

$$T_\xi = T_a \theta_u T_b,$$

где преобразования θ_u образуют p-параметрическую группу g, является групповым пространством группы g. Два рода равенства, определенные в этом многообразии, исходя из группы g, совпадают с теми равенствами, которые определены в объемлющем пространстве, исходя из группы G.

20. Предыдущие рассуждения можно несколько обобщить. Рассмотрим два вполне геодезических многообразия первой категории — p-мерное многообразие V_p и q-мерное многообразие V'_q. Пусть g — группа, определяющая направление первого рода первого многообразия, g' — группа, определяющая направление второго рода второго многообразия. Пусть, наконец, θ_u и θ'_v — преобразования этих групп. Многообразие W, определяемое соотношением

$$T_\xi = \theta_u T_a \theta'_v,$$

где (a) — произвольная фиксированная точка, обладает тем свойством, что если через произвольную точку этого многообразия провести вполне геодезическое многообразие, параллельное в первом смысле V_p, и вполне геодезическое многообразие, параллельное во втором смысле V'_q, то эти два многообразия целиком содержатся в W. В самом деле, если выбрать точку (ξ_0), определяемую соотношением

$$T_{\xi_0} = \theta_{u_0} T_a \theta'_{v_0},$$

то проходящее через нее вполне геодезическое многообразие, параллельное в первом смысле многообразию V_p, является геометрическим местом точек (η), определяемых соотношением

$$T_\eta = \theta_u T_{\xi_0} = \theta_u \theta_{u_0} T_a \theta'_{v_0},$$

а все эти точки, очевидно, принадлежат многообразию W. Доказательство второй части теоремы производится совершенно так же.

Отсюда следует, что многообразие W может быть образовано p-мерными вполне геодезическими многообразиями первой категории, параллельными друг другу в первом смысле, а также q-мерными вполне геодезическими многообразиями второй категории, параллельными друг другу во втором смысле. Это многообразие в общем случае $(p+q)$-мерно, но это число измерений может и не достигаться.

IV. КИНЕМАТИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

21. Можно представить все вышеизложенное и в более конкретном, „кинематическом“ виде[1]. Возьмем в качестве

---

[1] См. Картан [3], а также [9].

примера частную группу — группу эвклидовых движений в обычном трехмерном пространстве.

Рассмотрим ∞^6 положений, которые может занимать определенное твердое тело Σ. Можно считать, что каждое из этих положений определяет точку в некотором 6-мерном пространстве $\mathcal{E}$. Выберем произвольным образом одно из положений Σ_0 твердого тела и будем называть это положение „начальным положением“. Поставим в соответствие каждому положению Σ движение T, переводящее Σ_0 в совпадение с Σ. Поэтому можно рассматривать пространство $\mathcal{E}$ как групповое пространство группы G движений. Начальная точка этого пространства соответствует положению Σ_0 и тождественному преобразованию группы G.

Пусть Σ_a и Σ_b — два положения твердого тела Σ, (a) и (b) — представляющие их точки, T_a и T_b — движения, переводящие Σ_0 в Σ_a и в Σ_b. Движение $T_b T_a^{-1}$ переводит Σ_a в Σ_b. Следовательно, *два вектора* $\overrightarrow{ab}$ *и* $\overrightarrow{a'b'}$ *пространства* $\mathcal{E}$ *равны в первом смысле, если существует движение, переводящее одновременно* Σ_a в Σ_b и $\Sigma_{a'}$ в $\Sigma_{b'}$. Это движение в общем случае является винтовым движением, определяемым осью Δ, углом вращения α и длиной прямолинейного сдвига l.

Пусть теперь два вектора $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{a'b'}$ равны во втором смысле. Мы знаем, что $\overrightarrow{aa'}$, $\overrightarrow{bb'}$ равны в первом смысле. Следовательно, существует движение, переводящее одновременно Σ_a в $\Sigma_{a'}$, а Σ_b в $\Sigma_{b'}$. Можно также сказать, что фигура (Σ_a, Σ_b) равна фигуре $(\Sigma_{a'}, \Sigma_{b'})$ или, что то же, что $\Sigma_{a'}$ расположена по отношению к $\Sigma_{b'}$ точно таким же образом, как Σ_a по отношению к Σ_b. В конечном счете это означает, что *два винтовых движения, переводящих соответственно* Σ_a *в* Σ_b *и* $\Sigma_{a'}$ *в* $\Sigma_{b'}$, *имеют один и тот же угол вращения и длину прямолинейного сдвига и ось* Δ *расположена по отношению к* Σ_b *точно так же, как* Δ' *по отношению к* $\Sigma_{b'}$. Для двух наблюдателей, расположенных совершенно одинаковым образом, один по отношению к Σ_b (и Σ_a), а другой по отношению к $\Sigma_{b'}$ (и $\Sigma_{a'}$), движения, которые переводят соответственно Σ_a в Σ_b, а $\Sigma_{a'}$ в $\Sigma_{b'}$, совершенно одинаковы.

22. На основании определения параллелизма в первом смысле непосредственно видно, что геодезическую линию пространства $\mathcal{E}$ мы получим, если возьмем все положения Σ, получающиеся одно из другого с помощью одного и того же *непрерывного* винтового движения (или с помощью одного и того же *непрерывного* прямолинейного сдвига, или с помощью одного и того же *непрерывного* вращения).

Две геодезические линии параллельны в первом смысле, если шаги двух соответственных винтовых движений одинаковы и если, кроме того, оси этих движений занимают одинаковое положение в *пространстве*. Две геодезические линии параллельны во втором смысле, если шаги двух соответственных винтовых движений одинаковы и если оси этих движений занимают одинаковое положение в *твердом теле*.

Мы получим вполне геодезическое многообразие первой категории, если возьмем, например, все положения твердого тела, получающиеся из одного из них с помощью какого-нибудь вращения вокруг неподвижной точки. Два многообразия такого типа параллельны в первом смысле, если центры соответственных вращений занимают одинаковое положение в *пространстве*, они параллельны во втором смысле, если эти два центра занимают одинаковое положение в *твердом теле*.

Другой пример дают нам положения твердого тела, получающиеся одно из другого с помощью какого-нибудь прямолинейного сдвига. Два таких многообразия всегда параллельны одновременно и в первом и во втором смысле. Это происходит оттого, что подгруппа прямолинейных сдвигов, определяющая соответственное трехмерное направление, является нормальным делителем в полной группе движений.

23. На этом же примере можно показать существование вполне геодезических многообразий второй категории. В самом деле, рассмотрим фиксированную плоскость Π и различные положения твердого тела, которые можно получить, производя над данным положением Σ_0 вращение на какой-нибудь угол вокруг какой-нибудь прямой, лежащей в плоскости Π. Таким образом, мы получим в пространстве $\mathcal{E}$ трехмерное многообразие V_3. Пусть Σ_1 и Σ_2 — два положения твердого тела, соответствующие двум каким-нибудь точкам этого многообразия. Пусть, далее, Δ_1 — ось вращения, переводящего Σ_0 в Σ_1, а α_1 — угол этого вращения. Обозначим через Δ_2 и α_2 соответственные элементы для Σ_2. Пусть Π_1 — плоскость, полученная поворотом плоскости Π вокруг Δ_1 на угол $\frac{\alpha_1}{2}$, а Π_2 — плоскость, полученная поворотом плоскости Π вокруг Δ_2 на угол $\frac{\alpha_2}{2}$. Можно перейти от Σ_1 к Σ_0 с помощью двух последовательных отражений в плоскостях Π_1 и Π. Можно также перейти от Σ_0 к Σ_2 с помощью двух последовательных отражений в плоскостях Π и Π_2. Следовательно, мы перейдем от Σ_1 к Σ_2 с помощью двух последовательных отражений в плоскостях $_1$ и Π_2, *т. е. с помощью некоторого вращения вокруг прямой* Δ *пересечения плоскостей* Π_1 *и* Π_2.

Геодезическую линию, соединяющую точку, представляющую Σ_1, с точкой, представляющей Σ_2, мы получим, проводя над Σ_1 вращение вокруг Δ с *переменным углом.* Такое вращение можно рассматривать как результат двух последовательных отражений в двух плоскостях, проходящих через Δ, причем известно, что первую из этих плоскостей можно выбирать произвольно. Поэтому в качестве этих плоскостей можно взять лоскость Π_1 и произвольную плоскость Π_8, проходящую через Δ и пересекающуюся с плоскостью Π по некоторой прямой Δ_8. Поэтому рассматриваемое вращение можно привести к четырем отражениям в плоскостях Π_1, Π, Π, Π_8.

Первые два отражения переводят Σ_1 в Σ_0, а *последние два — производят над* Σ_0 *вращение вокруг* Δ_8. Поэтому они приводят к такому положению Σ, что точка, представляющая это положение, принадлежит к V_8. Таким образом, многообразие V_8 обладает тем свойством, что оно содержит целиком всякую геодезическую линию, имеющую на ней две точки, т. е. является *вполне геодезическим многообразием.*

Однако *оно не является вполне геодезическим многообразием первой категории,* так как *вращения, которые надо производить над* Σ_0, *чтобы определить это многообразие, не составляют группы.*

24. При определении двух параллелизмов в 6-мерном пространстве $\mathcal{E}$ положений твердого тела мы могли бы освободить себя от выбора начальной точки, условившись *a priori* говорить, что два вектора $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{a'b'}$ равны в первом смысле, если два движения, переводящие соответственно Σ_a в Σ_b и $\Sigma_{a'}$ в $\Sigma_{b'}$, совпадают между собой. Этот прием имеет то преимущество, что он показывает, что все точки пространства играют совершенно одинаковую роль и что ни одна точка пространства не является привилегированной.

Мы могли бы и обратно, предполагая, что твердое тело Σ является ортогональным триэдром, определить каждое его положение Σ_a преобразованием T_a координат, полученным при переходе от фиксированного *косоугольного* репера к ортогональному реперу Σ. В этом случае преобразования T_a уже не составляют группы, но это не имеет никакого значения: *суть дела состоит в тех движениях, которые переводят ортогональные реперы друг в друга*, т. е. в преобразованиях $T_b T_a^{-1}$ (см. n° 6).

ГЛАВА II

ДВЕ АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРИВИЗНЫ В ГРУППОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

I. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ. КАНОНИЧЕСКИЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

25. Если нам дано групповое пространство, то всякая точка, бесконечно близкая к начальной точке, аналитически определяется бесконечно малым преобразованием этой группы.

Известно, что все бесконечно малые преобразования некоторой r-параметрической группы G линейно выражаются через r этих преобразований, которые мы будем обозначать, следуя С. Ли, символами $X_1, \ldots, X_r$. Всякое бесконечно малое преобразование имеет результатом действия на некоторую функцию f преобразуемых переменных бесконечно малое приращение этой функции, главная часть которого имеет вид

$$\delta t \sum_{i} e^i X_i f = \delta t \sum_{i,k} e^i \xi_{ik}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k}, \qquad (1)$$

где коэффициенты e^i — константы, а индекс k суммирования в правой части изменяется от 1 до n — числа преобразуемых переменных*).

Всякое бесконечно малое преобразование порождает 1-параметрическую группу, которую можно получить, интегрируя дифференциальные уравнения

$$\frac{dx'_k}{dt} = \sum_{i=1}^{r} e^i \xi_{ik}(x'_1, \ldots, x'_n) \quad (k = 1, \ldots, n) \qquad (2)$$

---

*) Бесконечно малые преобразования $X_i = \sum \xi_{ik} \frac{\partial}{\partial x_k}$ часто обозначают $X_i f$. В оригинале настоящего мемуара Картан непоследовательно применяет оба обозначения; в переводе мы всюду пользуемся только тем из них, которое Картан предпочел в своей более поздней обзорной работе [27] (стр. 240—292 настоящего сборника).

Заметим, что, подставляя в (1) вместо функции f сами преобразуемые переменные x_k, мы получим главные части бесконечно малых приращений самих этих переменных, т. е. бесконечно малые преобразования рассматриваемой группы в собственном смысле этого слова. (*Прим. перев.*)

и находя такое решение, для которого при $t=0$ x_i' принимают значение x_i. В формулах, определяющих полученные преобразования

$$x_k' = F_k(x_1, \ldots, x_n; t), \tag{3}$$

параметром является t. Если мы обозначим общее преобразование этой подгруппы через θ_t, то мы будем иметь

$$\theta_t \theta_{t'} = \theta_{t+t'}.$$

Точка, представляющая преобразование θ_t, описывает геодезическую линию, проходящую через начальную точку (при $t=0$), при этом отношение двух отрезков, один из которых ограничен точками (t_1) и (t_2), а второй — точками (t_1') и (t_2'), равно

$$\frac{t_2 - t_1}{t_2' - t_1'}.$$

Функции F_k в формулах (3) зависят от коэффициентов e_i образующего бесконечно малого преобразования, однако эти коэффициенты встречаются, очевидно, только в виде r произведений $e^1 t$, $e^2 t$, $\ldots$, $e^r t$. Поэтому всякое конечное преобразование этой группы (достаточно близкое к тождественному преобразованию) определяется r величинами $e^i t$. Так как коэффициенты e^i определены только с точностью до множителя, то ничто не мешает нам для данного конечного преобразования положить $t=1$. Формулы

$$x_k' = F_k(x_1, \ldots, x_n; e^1, e^2, \ldots, e^r), \tag{4}$$

получающиеся таким образом, являются *каноническими уравнениями* группы; $e^1, \ldots, e^r$ представляют собой *канонические параметры* С. Ли (см. Ли и Шефферс [1], стр. 454).

Канонические переменные играют здесь роль, аналогичную роли римановых *нормальных координат* в теории римановых пространств [1]). Всякая геодезическая линия, выходящая из начальной точки, аналитически представляется линейными уравнениями

$$\frac{e^1}{m^1} = \frac{e^2}{m^2} = \ldots = \frac{e^r}{m^r},$$

---

[1]) См. Картан [11], стр. 26. [См. также Картан [23], стр. 201 русского перевода. — *Прим. перев.*]

где коэффициенты m^i — постоянные. Если мы рассмотрим e^i как декартовы координаты точки в обычном эвклидовом пространстве, то всякая геодезическая линия, выходящая из начальной точки, представится прямой линией, выходящей из начала координат, а два равных вектора, находящихся на такой геодезической линии, представятся двумя равными векторами.

Точно так же вполне геодезическое многообразие, проходящее через начальную точку, представится плоским многообразием.

26. С помощью канонических параметров С. Ли мы можем представить конечное преобразование группы тем же самым символом $\sum_i e^i X_i$, что и порождающее его бесконечно малое преобразование. Это позволяет нам говорить, что *точки группового пространства могут быть отнесены к декартовому реперу, имеющему начало в начальной точке, а вектор, соединяющий начало с какой-нибудь точкой этого пространства, совпадает с вектором $\sum_i e^i X_i$, если считать, что символы $X_1, \ldots, X_r$ представляют базисные векторы рассматриваемого декартова репера.*

При этом условии вектор, соединяющий начало с некоторой точкой пространства, представляется бесконечно малым преобразованием, порождающим 1-параметрическую подгруппу, соответствующую той геодезической линии, на которой находится этот вектор.

II. АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ БЕЗ КРИВИЗНЫ, СВЯЗАННАЯ С РАВЕНСТВОМ В ПЕРВОМ СМЫСЛЕ

27. Рассмотрим равенство в первом смысле в групповом пространстве. Свяжем с каждой точкой пространства декартов репер, равный (в первом смысле) тому реперу, который мы связывали с начальной точкой. Будем называть этот репер „декартовым репером первого рода“. Вектор $\overrightarrow{aa'}$, соединяющий точку (a) с бесконечно близкой точкой (a'), параллелен в первом смысле вектору, соединяющему начальную точку с точкой, представляющей преобразование

$$T_{a'} T_a^{-1} = T_{a+da} T_a^{-1}.$$

Вектор $\overrightarrow{aa'}$, отнесенный к реперу, связанному с точкой (a), имеет поэтому точно такое же аналитическое выражение, что и бесконечно малое преобразование

$$T_{a+da}T_a^{-1}.$$

Пусть

$$\breve{\omega}^1 X_1 + \breve{\omega}^2 X_2 + \cdots + \breve{\omega}^r X_r$$

символ, обозначающий это бесконечно малое преобразование Выражения $\breve{\omega}^i$ представляют собой линейные комбинации дифференциалов $da_1, \ldots, da_r$, коэффициенты которых — функции от a_i. Таким образом, *r пфаффовых форм $\breve{\omega}^i$ являются координатами точки (a'), отнесенной к декартову реперу, связанному с точкой (a).*

Вычисление выражений $\breve{\omega}^i$ легко произвести с помощью конечных уравнений группы

$$x_i' = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n;\ a_1, \ldots, a_r).$$

Если мы обозначим через $x_i + dx_i$ то значение, которое приобретает переменное x_i при преобразовании $T_{a+da}T_a^{-1}$, то мы получим dx_i, исключая $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ из двух систем уравнений:

$$x_i = \Phi_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n;\ a_1, \ldots, a_r), \tag{5}$$

$$x_i + dx_i = \Phi_i(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n;\ a_1 + da_1, \ldots, a_r + da_r). \tag{6}$$

В самом деле, преобразование T_a^{-1} переводит x_i в $\bar{x}_i$, а затем преобразование T_{a+da} переводит $\bar{x}_i$ в $x_i + dx_i$. Мы получим формулы вида [1]

$$dx_i = \sum_{k=1}^{r} \breve{\omega}^k \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n), \tag{7}$$

где

$$\breve{\omega}^k = \sum_{h=1}^{r} \psi^{kh} da_h.$$

---

[1] Эти формулы составляют *первую основную теорему Ли*. См., например, Ли и Шефферс [1], стр. 371, уравнение (9). [См. также Чеботарев [1], стр. 90. — *Прим. перев.*]

Если мы обозначим через f произвольную функцию переменных x_i, мы будем иметь

$$df = \sum_{k=1}^{r} \breve{\omega}^k X_k f. \tag{8}$$

Это уравнение символически записывает в сжатом виде n уравнений (7).

28. Задание r пфаффовых форм $\breve{\omega}^1, \ldots, \breve{\omega}^r$ позволяет определить в пространстве *аффинную связность*. Как известно, пространство, каждой точке которого отнесен декартов репер, снабжено аффинной связностью, если задан закон, позволяющий определять положение двух бесконечно близких реперов — один относительно другого. (См. Картан [8] *).) Аналитически этот закон определяется:

1°. Заданием относительно первого репера координат ω начала бесконечно близкого репера.

2°. Заданием относительно первого репера направляющих параметров координатных векторов второго репера или, что равносильно этому, заданием величин $\omega_j^{\cdot i}$, позволяющих выразить геометрические приращения $d\mathbf{e}_i$ базисных координатных векторов относительно первого репера [4]

$$d\mathbf{e}_i = \sum_k \omega_i^{\cdot k} \mathbf{e}_k$$

Так как у нас эти реперы, отнесенные к различным точкам, связаны равенством векторов, то все компоненты $\omega_i^{\cdot j}$ аффинной связности равны нулю. Не равны нулю здесь только компоненты $\breve{\omega}^i$ вектора, соединяющего начало первого репера с началом бесконечно близкого репера.

Задание аффинной связности позволяет развернуть всю кривую AB данного пространства на аффинное пространство, касательное к точке A. Если эта кривая является замкнутой (циклом), то репер, связанный с точкой A, претерпевает *аффинное движение*. Дополнительное движение, которое возвратило бы его в исходное положение, определяет *кривизну* и *кручение* этого пространства. Кручение определяется *сдвигом*, который возвратил бы начало репера в исходное положение. Кривизна

---

*) Об аффинной связности („линейном перенесении") см. также Схоутен и Стройк [1], стр. 75 и сл. русского перевода. (*Прим. перев.*)

определяется ***аффинным вращением***, которое перевело бы репер в его конечном положении в такое положение, чтобы его векторы были равны векторам репера в исходном положении [5].

В том случае, которым мы занимаемся, *кривизна равна нулю*, так как вследствие того, что равенство векторов здесь имеет абсолютное значение, векторы реперов, отнесенные к различным точкам пространства, при развертывании остаются равными между собой. Это пространство обладает только одним *кручением*.

29. В общем случае пространства, аффинная связность которого имеет произвольные компоненты ω^i, $\omega_i^{\cdot j}$, кручение, соответствующее элементарному циклу, аналитически определяется выражениями *)

$$\Omega^i = (\omega^i)' - \sum_k [\omega^k \omega_k^{\cdot i}]. \qquad (9)$$

Соответственный сдвиг определяется вектором

$$-\sum_i \Omega^i \mathbf{e}_i.$$

Кривизна аналитически выражается с помощью форм

$$\Omega_i^{\cdot j} = (\omega_i^{\cdot j})' - \sum_k [\omega_i^{\cdot k} \omega_k^{\cdot j}]. \qquad (10)$$

В нашем случае формы $\omega_i^{\cdot j}$ тождественно равны нулю, вследствие чего кривизна, очевидно, равна нулю, а кручеиие определяется сдвигом, представляемым вектором

$$-\sum_i (\breve{\omega}^i)' X_i.$$

30. Вычисление кручения этого пространства сводится к вычислению билинейных ковариантов $(\breve{\omega}^i)'$. Можно заметить, что уравнения (5), *если рассматривать* $\overline{x}_i$ *как постоянные*, дают нам общее решение системы уравнений в полных дифференциалах (7), где x^i рассматриваются как неизвестные

---

*) Определение выражения $(\omega^i)'$ (билинейный ковариант, внешняя производная дифференциальной формы) см. Картан [7], стр. 76 русского перевода, нли Рашевский [2], стр. 52. Определеиие действия $[\omega^k \omega_k^{\cdot i}]$ (внешиее произведение дифференциальных форм) см. Картан [7], стр. 62 русского перевода, или Рашевский [2], стр. 18. *(Прим. перев.)*

функции переменных $a_1, \ldots, a_r$. Отсюда следует, что система (7) *вполне интегрируема*. Следовательно, согласно классической теореме, билинейные коварианты правых частей обращаются в нуль в силу самих уравнений (7). Это вычисление можно произвести для сокращенной формы (8) этих уравнений. Мы получаем

$$\sum_s X_s f (\breve{\omega}^s)' + \sum_k [dX_k f \breve{\omega}^k] = 0.$$

Заменяя $dX_k f$ значениями, полученными с помощью (8),

$$dX_k f = \sum_j \breve{\omega}^j X_j (X_k f),$$

мы получим

$$\sum_s X_s f (\breve{\omega}^s)' + \sum_{(jk)} [X_j (X_k f) - X_k (X_j f)] [\breve{\omega}^j \breve{\omega}^k] = 0.$$

Это уравнение должно быть *тождеством*. Отсюда следует, что, полагая вместе с Якоби и С. Ли

$$X_j (X_k) - X_k (X_j) = (X_j X_k) \text{ *)},$$

мы должны иметь уравнения вида[1]

$$(X_j X_k) = \sum_s c_{jk}^{\cdot\cdot s} X_s \tag{11}$$

и

$$(\breve{\omega}^s)' = - \sum_{(jk)} c_{jk}^{\cdot\cdot s} [\breve{\omega}^j \breve{\omega}^k] \tag{12}$$

Коэффициенты $c_{ij}^{\cdot\cdot s}$, в силу (11), зависят только от $x_1, \ldots, x_n$. Поэтому это — константы, которые С. Ли называет *структурными константами* группы.

Формулы (12) дают, таким образом, кручение пространства. Соответственный сдвиг для элемента ориентированной поверхности в этом пространстве имеет вид

$$- \sum_s (\breve{\omega}^s)' X_s = \sum_{(jk), s} [\breve{\omega}^j \breve{\omega}^k] c_{jk}^{\cdot\cdot s} X_s.$$

---

*) Бесконечно малое преобразование, отвечающее символу $(X_j X_k)$, называется коммутатором бесконечно малых преобразований, отвечающих символам X_j и X_k. (*Прим. перев.*)

[1] Уравнения (11) аналитически выражают *вторую основную теорему Ли* (см. Ли и Шефферс [1], стр. 380). [См. также Чеботарев [1], стр. 98. — *Прим. перев.*]

Если мы возьмем, например, элементарный параллелограмм, первой стороной которого является вектор

$$U=\sum_i \alpha^i X_i,$$

а второй — вектор

$$V=\sum_i \beta^i X_i,$$

то сдвиг, соответствующий этому параллелограмму, имеет вид

$$\sum_{(jk),s}(\alpha^j\beta^k-\alpha^k\beta^j)\,c_{jk}^{\cdot\cdot s}X_s=(\sum_i \alpha^i X_i, \sum_i \beta^i X_i)=(UV).$$

Следовательно, *если рассмотреть элементарный цикл, образованный параллелограммом, две стороны которого равны в первом смысле бесконечно малым векторам U и V, то сдвиг, соответствующий этому циклу, происходит по направлению вектора, равного в первом смысле вектору (UV).*

31. Этот важный результат можно доказать и непосредственно, причем одновременно мы получим и новое доказательство формул (12). Рассмотрим точку (a), соответствующую преобразованию T_a, и цнкл, образованный следующими четырьмя геодезическими отрезками:

$$\begin{gathered}T_a-\theta_1 T_a,\\ \theta_1 T_a-\theta_1\theta_2 T_a,\\ \theta_1\theta_2 T_a-\theta_2 T_a,\\ \theta_2 T_a-T_a.\end{gathered}$$

Здесь через θ_1 и θ_2 обозначены два бесконечно малых преобразования, соответствующих символам U и V. Полученный таким образом цикл является *истинным* параллелограммом, векторы первой и третьей сторон которого равны в первом смысле, а векторы второй и четвертой сторон равны во втором смысле.

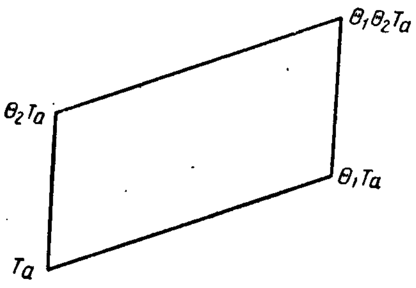
Если развернуть этот цикл на касательное аффинное пространство точки (a), то первый геодезический отрезок развернется в виде отрезка прямой, образованного вектором U, второй — в виде вектора, представляемого символом бесконечно малого преобразования

$$(\theta_1\theta_2 T_a)(\theta_1 T_a)^{-1}=\theta_1\theta_2\theta_1^{-1},$$

третий отрезок дает вектор — U, а четвертый — вектор — V (см. черт. 1). В конечном счете геометрическая сумма четырех векторов, полученных при развертывании цикла, равна разности между символом преобразования $\theta_1\theta_2\theta_1^{-1}$ и V. Поэтому кручение представляется полученным сдвигом с обратным знаком.

Для того чтобы найти символ преобразования $\theta_1\theta_2\theta_1^{-1}$, обозначим через x первоначальные переменные, через x' — переменные, образованные с помощью θ_1^{-1}, через x'' — переменные, преобразованные из x' с помощью θ_2, и через x''' — переменные, преобразованные из x'' с помощью θ_1. Мы хотим выразить функцию $f(x_1''', \dots, x_n''')$ через функцию $f(x_1, \dots, x_n)$. Для этого сначала выразим x''' в функции x''. Эта новая функция переменных x'' может быть получена из $f(x_1'', \dots, x_n'')$ посредством преобразования θ_1. Поэтому она имеет вид

$$f + Uf + \dots .$$



Черт. 1.

Для того чтобы выразить эту функцию через $f(x_1' \dots x_n')$, преобразуем ее с помощью θ_2, что даст нам

$$f + Uf + Vf + V(Uf) + \dots .$$

И, наконец, для того чтобы выразить ее через $f(x_1, \dots, x_n)$, преобразуем ее с помощью θ_1^{-1}, что даст

$$f + Uf + Vf + V(Uf) - Uf - U(Vf) \dots = f + Vf - (UV)f + \dots$$

Поэтому в конечном счете символ преобразования $\theta_1\theta_2\theta_1^{-1}$ имеет вид

$$V - (UV).$$

Таким образом, *сдвиг, представляющий кручение рассматриваемого цикла, определяется символом* (UV).

Если предполагать цикл конечным и если символы U и V представляют два *конечных* преобразования θ_1 и θ_2, можно доказать, что сдвиг точно представляется вектором

$$(UV)-\frac{1}{2}(U(UV))+\frac{1}{3!}(U(U(UV)))-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n!}(U^nV)+\ldots,$$

где

$$(U^nV)=(U(U^{n-1}V)).$$

32. Во всяком пространстве аффинной связности имеет место общая теорема о сохранении кривизны и кручения, переводящая на геометрический язык тождества Бианки [1]. В нашем случае кривизна равна нулю, и теорема принимает следующий вид:

Если рассмотреть бесконечно малую трехмерную область пространства и двумерную поверхность, являющуюся ее границей, то геометрическая сумма векторов, представляющих сдвиги, соответствующие элементам этой поверхности, равна нулю.

Аналитически эта теорема выражается в равенстве нулю внешних производных [2] правых частей уравнения (12), причем это равенство имеет место в силу самих этих уравнений (фундаментальное тождество). Простое вычисление дает *алгебраические соотношения, которым должны удовлетворять константы $c_{jk}^{\cdot\cdot s}$ для того, чтобы они были структурными константами некоторой группы* [3]

$$\sum_s \left(c_{ij}^{\cdot\cdot s}c_{sk}^{\cdot\cdot h}+c_{jk}^{\cdot\cdot s}c_{si}^{\cdot\cdot h}+c_{ki}^{\cdot\cdot s}c_{sj}^{\cdot\cdot h}\right)=0.$$

Эти же соотношения можно получить и из *тождества Якоби*

$$((X_iX_j)X_k)+((X_jX_k)X_i)+((X_kX_i)X_j)=0,$$

которое приобретает таким образом геометрический смысл. В этом можно, впрочем, убедиться и непосредственно, если взять подходящий параллелепипед и применить к нему теорему о сохранении кручения.

---

[1] См. Картан [8], стр. 373—375. [См. также Схоутен и Стройк [1], стр. 128—129 русского перевода („теорема о равновесии"). — *Прим. перев.*]

[2] См. Картан [7], стр. 66—73. [См. также Картан, стр. 77—85 русского перевода. — *Прим. перев.*]

[3] Эти соотношения составляют *третью основную теорему Ли* [См. Ли и Шефферс [1], стр. 395, см. также Чеботарев [1], стр. 102. — *Прим. перев.*]

Здесь следует заметить, что так как рассматриваемое пространство допускает *абсолютный* параллелизм, теорема о сохранении кручения справедлива для любой *конечной* трехмерной области.

33. В любом пространстве аффинной связности существует *группа голономии*, порожденная аффинными движениями, соответствующая различным циклам, выходящим из некоторой точки этого пространства[1]). Если все эти движения являются сдвигами, эта группа порождена бесконечно малыми сдвигами, соответствующими элементарным циклам. Все такие циклы представляются символами вида (UV). Как известно, коммутаторы различных бесконечно малых преобразований некоторой группы также порождают группу — *производную группу* *). *Если производная группа имеет порядок $\rho \leqslant r$, то группа голономии является ρ-параметрической группой сдвигов, осуществляющихся в направлениях преобразований производной группы.*

III. АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ БЕЗ КРИВИЗНЫ, СВЯЗАННАЯ С РАВЕНСТВОМ ВО ВТОРОМ СМЫСЛЕ

34. Свяжем теперь с каждой точкой пространства декартов репер, равный *во втором смысле* декартову реперу в начальной точке. Декартовы координаты некоторой точки (a'), бесконечно близкой к точке (a), по отношению к реперу, связанному с точкой (a), будут представлять собой коэффициенты ω^i символа

$$\omega^1 X_1 + \ldots + \omega^r X_r,$$

бесконечно малого преобразования $T_a^{-1} T_{a+da}$.

Таким образом мы определим в пространстве вторую аффинную связность, рассматривая как равные векторы те векторы, которые равны во втором смысле.

Для того чтобы вычислить пфаффовы формы ω^i, заметим, что преобразование $T_a^{-1} T_{a+da}$ равно преобразованию $T_{a-da}^{-1} T_a$, а символ этого бесконечно малого преобразования равен по величине и противоположен по знаку символу преобразования

---

[1]) Картан [8]. См. также Картан [15].

*) См. Чеботарев [1], стр. 33. *(Прим. перев.)*

$T_{a+da}^{-1}T_a$, получающегося из него изменением знаков дифференциалов da_i.

Вычисление $T_{a+da}^{-1}T_a$ производится без труда. Если нам известны конечные уравнения группы

$$x_i' = \Phi_i(x_1, \dots, x_n;\ a_1, \dots, a_r)$$

и если мы обозначим через $x_i + dx_i$ переменные, преобразованные из x_i посредством преобразования $T_{a+da}^{-1}T_a$, то мы получим дифференциалы dx_i, исключая $\bar{x}$ из двух систем уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_i &= \Phi_i(x_1, \dots, x_n;\ a_1, \dots, a_r); \\ \bar{x}_i &= \Phi_i(x_1 + dx_1, \dots, x_n + dx_n; \\ &\qquad a_1 + da_1, \dots, a_r + da_r). \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Исключение здесь производится полностью и приводит нас к простому соотношению

$$\sum_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_\lambda \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_\lambda} da_\lambda = 0 \qquad (i = 1, \dots, n). \tag{14}$$

Пусть теперь f — произвольная функция от x_i. Уравнения в полных дифференциалах (14) эквивалентны уравнению

$$df = -\omega^1 X_1 f - \omega^2 X_2 f - \dots - \omega^r X_r f, \tag{15}$$

и это уравнение вполне интегрируемо, так как интеграл уравнений (14) дается первыми формулами (13), где $\bar{x}_i$ — произвольные постоянные интегрирования [6].

Выражая полную интегрируемость уравнения (15), мы получим, так же, как в n°**30**, сначала соотношения (11), а затем аналогичные (12) соотношения

$$(\omega^s)' = \sum_{(jk)} c_{jk}^{\cdot\cdot s} [\omega^j \omega^k]. \tag{16}$$

35. Нелишне произвести вычисление форм $\breve{\omega}^i$ и ω^i на частном примере. Рассмотрим 2-параметрическую группу

$$x' = ax + b.$$

Выберем в качестве базисных бесконечно малых преобразований

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

причем

$$(X_1X_2) = -X_2.$$

Для нахождения форм $\breve{\omega}^1$ и $\breve{\omega}^2$ надо исключить $\bar{x}$ из двух уравнений

$$x = a\bar{x} + b,$$

$$x + dx = (a + da)\bar{x} + b + db,$$

что дает

$$dx = \frac{da}{a} x + db - b\frac{da}{a} = \frac{da}{a} X_1x + \left(db - b\frac{da}{a}\right) X_2x.$$

Таким образом,

$$\breve{\omega}^1 = \frac{da}{a}, \quad \breve{\omega}^2 = db - b\frac{da}{a}.$$

Для нахождения форм ω^1 и ω^2 достаточно приравнять нулю дифференциал от $ax + b$, что дает

$$dx + \frac{da}{a} x + \frac{db}{a} = 0$$

или

$$dx + \frac{da}{a} X_1x + \frac{db}{a} X_2x = 0.$$

Таким образом,

$$\omega^1 = \frac{da}{a}, \quad \omega^2 = \frac{db}{a}.$$

Легко проверить соотношения:

$$(\breve{\omega}^1)' = 0, \quad (\breve{\omega}^2)' = [\breve{\omega}^1\breve{\omega}^2],$$

$$(\omega^1)' = 0, \quad (\omega^2)' = -[\omega^1\omega^2].$$

36. Кручение пространства со второй аффинной связностью для элементарного цикла дается вектором $-(\omega^i)'$. Отсюда непосредственно вытекает следующая теорема:

Если рассмотреть элементарный цикл, образованный параллелограммом, две стороны которого равны во втором смысле бесконечно малым векторам U и V, то сдвиг, соответствующий этому циклу, равен во втором смысле вектору $-(UV)$.

Мы получаем, таким образом, сдвиг, равный по величине и противоположный по направлению сдвигу, определяемому первой аффинной связностью. Этот результат, однако, не так очевиден, как это может показаться с первого взгляда, так как *здесь мы имеем дело не с тем же самым параллелограммом,* что в первом случае. Для того чтобы иметь возможность сравнивать эти результаты с полной строгостью, следует заметить, что вектор, выходящий из точки (a) и равный *во втором смысле* вектору U, выходящему из начальной точки, имеет своим концом точку $T_a\theta_1$, если обозначить через θ_1 бесконечно малое преобразование, отвечающее символу U. Но

$$T_a\theta_1 = (T_a\theta_1 T_a^{-1})\,T_a.$$

Поэтому рассматриваемый вектор равен в первом смысле вектору $\overline{U}$, если обозначить через $\overline{U}$ преобразование, полученное из U с помощью T_a. Как известно, если положить

$$(UV) = W$$

и если преобразовать U, V, W в $\overline{U}$, $\overline{V}$, $\overline{W}$ с помощью одного и того же преобразования группы, то имеет место

$$(\overline{U}\,\overline{V}) = \overline{W}.$$

Так как сдвиг, соответствующий элементарному циклу, в первой аффинной связности n°**30**, равен в первом смысле вектору $\overline{W}$, то, следовательно, он равен во втором смысле вектору W, т. е. этот сдвиг действительно равен по величине и противоположен по направлению соответствующему сдвигу во второй аффинной связности.

Таким образом, *две аффинные связности без кручения нашего пространства сообщают ему кручение, равное по величине и противоположное по знаку.*

37. Результат, полученный в n°**36**, можно, конечно, получить и непосредственно, рассматривая четыре точки

$$T_a,\quad T_a\theta_1,\quad T_a\theta_2\theta_1,\quad T_a\theta_2$$

и четыре геодезических отрезка, соединяющих их друг с другом. Развертывание этого цикла на аффинное пространство, касательное в (a), дает нам:

для первой стороны вектор U,

для второй — вектор $V + (UV)$ (бесконечно малое преобразование $\theta_1^{-1}\theta_2\theta_1$),

для третьей — вектор — U,
для четвертой — вектор — V.

Так как сдвиг, соответствующий циклу, равен по величине и противоположен по знаку геометрической сумме этих четырех векторов, то он действительно равен — (UV).

Теорема о сохранении кручения здесь дает тот же результат, что и в первом случае, и группа голономии для второй связности также совпадает с группой голономии для первой связности.

38. Доказанное в n°**10** свойство, заключающееся в том, что всякая геодезическая линия первого рода является также геодезической линией второго рода, приводит к интересным аналитическим результатам. В самом деле, можно определить геодезическую линию первого рода как кривую, сохраняющую направление в первой аффинной связности. Так как все выбранные нами декартовы реперы равны между собой, то мы получим все геодезические линии первого рода, интегрируя дифференциальные уравнения первого порядка

$$\frac{\breve{\omega}^1}{m^1}=\frac{\breve{\omega}^2}{m^2}=\ldots=\frac{\breve{\omega}^r}{m^r}, \tag{17}$$

где m^i — произвольные постоянные.

С другой стороны, геодезические линии второго рода точно так же получаются интегрированием уравнений

$$\frac{\omega^1}{n^1}=\frac{\omega^2}{n^2}=\ldots=\frac{\omega^r}{n^r}, \tag{18}$$

где n^i — произвольные постоянные.

Поэтому общий интеграл уравнений (17) совпадает с общим интегралом уравнений (18).

В примере n°**35** эти две системы могут быть написаны соответственно в виде

$$db-b\frac{da}{a}=m\frac{da}{a},$$
$$\frac{db}{a}=n\frac{da}{a},$$

и легко проверить, что для каждого из этих уравнений общее решение имеет вид $b=Ca+C'$. Впрочем, здесь можно избежать всякого интегрирования, используя то обстоятельство, что второе уравнение дает нам $db = nda$: подставляя это значение db в первое уравнение, мы получаем

$$b = na - m.$$

Совершенно аналогичные рассуждения можно произвести и в общем случае.

Добавим, что *элемент дуги* геодезической линии с точностью до постоянного множителя равен общему значению отношений (17) или (18).

IV. ПЕРЕХОД ОТ ОДНОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРИВИЗНЫ К ДРУГОЙ

39. Предположим, что нам заданы формы $\breve{\omega}^i$, определяющие первую аффинную связность без кривизны нашего пространства, которое мы предполагаем отнесенным к декартовым реперам первого рода. Если мы хотим определить вторую аффинную связность без кривизны, то нам необходимо определить взаимные ориентации этих реперов во второй связности.

Мы можем это сделать, если воспользуемся сдвигами первого рода в пространстве (n°16). Рассмотрим бесконечно малый сдвиг, при котором каждая точка смещается на бесконечно малый вектор, равный в первом смысле фиксированному вектору $(e^1, e^2, \ldots, e^r)$. При этом сдвиге каждая геодезическая линия смещается таким образом, что она остается параллельной самой себе во втором смысле. Обозначим символом δ смещение, соответствующее этому сдвигу, а символом d — произвольное смещение. Имеем

$$\breve{\omega}^i(\delta) = e^i.$$

Уравнение

$$(\breve{\omega}^s)' = -\sum_{(jk)} c_{jk}{}^s \, [\breve{\omega}^j \breve{\omega}^k]$$

является сокращенной формой уравнений

$$\delta\breve{\omega}^s(d) - d\breve{\omega}^s(\delta) = -\sum_{j,k} c_{jk}{}^s \breve{\omega}^j(\delta)\, \breve{\omega}^k(d).$$

При наших условиях, если мы положим

$$\breve{\omega}^s(d) = u^s,$$

мы получим, замечая, что e^i — константы,

$$\delta u^s = -\sum_{j,k} c_{jk}^{\cdot\cdot s} e^j u^k. \qquad (19)$$

Это уравнение дает нам приращение, испытываемое компонентами вектора (u^i), если он переносится, оставаясь равным во втором смысле самому себе при бесконечно малом смещении (e^i) его начала.

Отсюда следует, что компонентами второй аффинной связности без кривизны в пространстве, отнесенном к декартовым реперам, равным между собой в первом смысле, являются формы $\breve{\omega}_i^j$, где

$$\breve{\omega}_i^j = \sum_k c_{ki}^{\cdot\cdot j} \breve{\omega}^k. \qquad (20)$$

В самом деле, общая формула, выражающая то, что вектор переносится параллельно самому себе в произвольной аффинной связности, имеет вид

$$\delta u^s + \sum_k u^k \omega_k^{\cdot s} = 0.$$

40. Теперь мы можем вычислить кручение, сообщаемое пространству второй аффинной связностью, другим способом, чем в п°**36**. Это кручение дается формой

$$-\Pi^s = -(\breve{\omega}^s)' + \sum_k [\breve{\omega}^k \breve{\omega}_k^s] = -\sum_{(jk)} c_{jk}^{\cdot\cdot s} [\breve{\omega}^j \breve{\omega}^k].$$

Таким образом, эта форма действительно равна по величине и противоположна по знаку кручению первой аффинной связности, как мы это видели, применяя менее прямой способ в п°**36**.

Точно так же легко проверить, что вторая аффинная связность, определяемая компонентами (20), имеет нулевую кривизну. В самом деле,

$$\Pi_i^j = (\breve{\omega}_i^{\cdot k})' - \sum_k (\breve{\omega}_i^{\cdot k} \breve{\omega}_k^{\cdot j}) =$$

$$= -\sum_{(\alpha\beta)} \Big[\sum_k c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k} c_{ki}^{\cdot\cdot j} + c_{i\alpha}^{\cdot\cdot k} c_{k\beta}^{\cdot\cdot j} + c_{\beta i}^{\cdot\cdot k} c_{k\alpha}^{\cdot\cdot j}\Big] (\breve{\omega}^\alpha \breve{\omega}^\beta).$$

Коэффициент при $[\breve{\omega}^\alpha \breve{\omega}^\beta]$ в правой части равен нулю в силу тождества Якоби.

41. Наконец, зная формы $\breve{\omega}^i$, можно вычислить формы ω^i. Пусть

$$\omega^i = \sum_k u^i_k \breve{\omega}^k.$$

Тогда ковариантный вектор с компонентами $u^i_1, u^i_2 \ldots u^i_k$ является фиксированным во второй аффинной связности [7] Его компоненты v_s поэтому удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$dv_s - \sum_k v_k \breve{\omega}_s^{\cdot k} = 0$$

или

$$dv_s + \sum_{k,h} c_{sh}^{\cdot\cdot k} v_k \breve{\omega}^h = 0. \qquad (21)$$

Если мы найдем r независимых решений этой вполне интегрируемой системы уравнений в полных дифференциалах, то каждое из них будет соответствовать форме $\omega = \sum v_k \breve{\omega}^k$.

В частности, в примере п°35

$$\breve{\omega}^1 = \frac{da}{a}, \quad \breve{\omega}^2 = db - b\frac{da}{a}, \quad c_{12}^{\cdot\cdot 2} = -1, \quad c_{12}^{\cdot\cdot 1} = 0.$$

Система (21) здесь принимает вид

$$dv_1 - v_2\left(db - b\frac{dn}{a}\right) = 0,$$

$$dv_2 + v_2\frac{da}{a} = 0.$$

Она интегрируется непосредственно и дает нам

$$v_1 = C\frac{b}{a} + C', \quad v_2 = \frac{C}{a},$$

что соответствует общей форме

$$\omega = C\frac{db}{a} + C'\frac{da}{a}.$$

Можно специализировать формы ω^i, определенные до сих пор с точностью до линейной подстановки с постоянными коэффициентами, с помощью того условия, чтобы в начальной точке коэффициенты ω^i имели бы те же самые численные значения, что и коэффициенты $\breve{\omega}^i$. Тогда в рассматриваемом примере мы получим

$$\omega_1 = \frac{da}{a}, \quad \omega_2 = \frac{db}{b}.$$

42. Уравнения (21) приводят нас еще к одному интересному заключению. С первой аффинной связностью без кривизны связан элемент объема пространства, определенный с точностью до постоянного множителя и равный, например,

$$d\tau_1 = [\breve{\omega}^1 \breve{\omega}^2 \ldots \breve{\omega}^r].$$

Точно так же со второй аффинной связностью без кривизны связан элемент объема

$$d\tau_2 = [\omega^1 \omega^2 \ldots \omega^r].$$

При нашем выборе постоянных множителей элемент объема имеет одинаковое значение в начальной точке.

Можно задать себе вопрос, не являются ли эти два внутренних определения объема в групповом пространстве совпадающими.

В обозначениях n°41 мы имеем

$$d\tau_2 = |u_i^j|\, d\tau_1 = \Delta\, d\tau_1,$$

где Δ обозначает детерминант r независимых решений уравнения (21).

Как известно, этот детерминант удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Delta}{\Delta} + \sum_{h,i} c_{ih}^{\cdot\cdot i} \breve{\omega}^h = 0 \text{ или } \frac{d\Delta}{\Delta} = \sum_{h,} c_{hi}^{\cdot\cdot i} \breve{\omega}^h.$$

Отсюда следует прежде всего, что форма в правой части уравнения является полным дифференциалом, что нетрудно проверить вычислением, вследствие чего мы имеем

$$\Delta = e^{\int \sum\limits_{h,i} c_{hi}^{\cdot\cdot i} \breve{\omega}^h},$$

где интегрирование производится от начальной точки. *Таким образом, в общем случае оба элемента* $d\tau_1$ и $d\tau_2$ *различны*. Уравнение

$$\sum_{h,i} c_{hi}^{\cdot\cdot i} e^h = 0$$

выражает, что бесконечно малое преобразование $\sum_h e^h X_h$ порождает нормальный делитель, зависящий от $r-1$ параметра[1]) (левая часть этого уравнения — не что иное, как сумма корней характеристического уравнения группы). Этому нормальному делителю соответствует ∞^1 вполне геодезических многообразий V_{r-1}, принадлежащих к первой категории. Детерминант Δ остается инвариантным при смещении по каждому из этих многообразий.

Если каждая из сумм $\sum_i c_{hi}^{\cdot\cdot i}$ равна нулю, оба элемента объема $d\tau_1$ и $d\tau_2$ совпадают, что имеет место, в частности, для полупростых групп.

43. Рассмотрим r-мерную область нашего пространства и произведем над различными точками (ξ) сдвиг второго рода

$$T_{\xi}' = T_{\xi} T_a. \tag{22}$$

При этом сдвиге всякий вектор заменяется вектором, равным ему в первом смысле. Следовательно,

$$\breve{\omega}^i(\xi, d\xi) = \breve{\omega}^i(\xi'; d\xi') \quad (i = 1, \ldots, r). \tag{23}$$

Таким образом, всякий сдвиг второго рода сохраняет объем первого рода $\int d\tau_1$, *и точно так же всякий сдвиг первого рода сохраняет объем второго рода* $\int d\tau_2$.

А. Гурвиц указал метод, позволяющий образовывать инварианты группы в том случае, когда объем группового пространства конечен (см. Гурвиц [1]*). Пусть $F(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная функция n преобразуемых переменных. Поставим в соответствие каждой точке (ξ) пространства функцию F_{ξ}, полученную в результате осуществления над переменными x преобразования T_{ξ}. Функция

$$\Phi = \int F_{\xi} (d\tau_1)_{\xi},$$

где интегрирование производится по всему групповому пространству, является, как легко видеть, инвариантом группы.

---

[1]) См. Картан [1], стр. 27, примечание.

*) См. также Нейман [4] и Понтрягин [2], стр. 106—115. *(Прим. перев.)*

44. Уравнения (22) представляют собой общий интеграл уравнений (23), в которых ξ'_i рассматриваются как неизвестные функции от ξ_i. Уравнения (23) поэтому вполне интегрируемы. Это нетрудно доказать и непосредственно: в самом деле, билинейные коварианты обеих частей этих уравнений тождественно обращаются в нуль в силу самих этих уравнений, а также в силу уравнений (12) и того, что $c_{ik}^{\cdot\cdot s}$ — *константы*. Уравнения (23) можно рассматривать как *определяющие уравнения* конечных преобразований второй параметрической группы (22). Точно так же уравнения

$$\omega^i(\xi;\ d\xi) = \omega^i(\xi';\ d\xi')$$

являются определяющими уравнениями первой параметрической группы.

Определение каждой из этих групп как множества преобразований, оставляющих инвариантным некоторое число пфаффовых форм, может быть, как известно, распространено на все непрерывные группы, как конечные, так и бесконечные.

Можно заметить, что задание форм $\breve{\omega}^i$, т. е. определяющих уравнений второй параметрической группы, влечет за собой без интегрирования задание бесконечно малых преобразований первой параметрической группы. В самом деле, всякое бесконечно малое преобразование этой группы является бесконечно малым сдвигом первого рода. Следовательно, координаты $(a_1, \ldots, a_r)$ произвольной точки пространства получают такие приращения $(\delta a_1, \ldots, \delta a_r)$, что

$$\breve{\omega}^i(a;\ \delta a) = e^i,$$

где e^i — постоянные. Эти уравнения, если решить их по отношению к δa_i, дают искомые бесконечно малые преобразования в виде

$$e^1A_1 + e^2A_2 + \ldots + e^rA_r.$$

Легко видеть, что в символической записи мы имеем

$$df \equiv \breve{\omega}^1 A_1 f + \breve{\omega}^2 A_2 f + \ldots + \breve{\omega}^r A_r f.$$

Отсюда следует, что интегрирование уравнений (21) решает каждую из следующих проблем:

По заданным определяющим уравнениям второй параметрической группы найти ее бесконечно малые преобразования.

По заданным бесконечно малым преобразованиям первой параметрической группы найти ее определяющие уравнения.

По заданным определяющим уравнениям второй группы параметров найти определяющие уравнения первой группы.

По заданным бесконечно малым преобразованиям первой группы найти бесконечно малые преобразования второй группы.

Все эти проблемы эквивалентны между собой.

V. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРИВИЗНЫ, СВЯЗАННОЙ С ГРУППОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ

45. Рассмотрим пространство аффинной связности без кривизны, т. е. обладающее абсолютным параллелизмом в целом. Если мы свяжем с различными точками этого пространства декартовы реперы, равные между собой (в смысле аффинной связности пространства), то аффинная связность вполне определится r пфаффовыми формами $\breve{\omega}^i$, дающими по отношению к реперу, соответствующему некоторой точке пространства, координаты всякой бесконечно близкой точки. Эти r форм не связаны *a priori* никаким ограничительным условием, так что *наиболее общее пространство аффинной связности без кривизны аналитически определяется r произвольными линейно независимыми пфаффовыми формами.*

Билинейные коварианты $(\breve{\omega}^s)'$ всегда могут быть представлены в виде

$$(\breve{\omega}^s)' = -\sum_{(jh)} c_{jh}^{\cdot\cdot s}\,[\breve{\omega}^j \breve{\omega}^h] \qquad (s = 1, \ldots, r),$$

так что коэффициенты $c_{jk}^{\cdot\cdot s}$ аналитически определяют кручение пространства.

Легко видеть, что в пространстве аффинной связности без кривизны можно определить равенство векторов, удовлетворяющее условиям 1°—6° n°**2.** Определим сначала *геодезические линии* как кривые, имеющие всюду одно и то же направление, т. е. как решения дифференциальных уравнений (17)

$$\frac{\breve{\omega}^1}{m^1} = \ldots = \frac{\breve{\omega}^r}{m^r},$$

где m^i — константы. Если мы дадим величинам m^i *фиксированные* значения, уравнения (17) определят конгруэнцию геодезических линий, так что через каждую точку пространства проходит одна, и только одна, геодезическая линия. Мы можем условиться говорить, что все эти геодезические линии параллельны между собой, так как два бесконечно малых вектора, взятых один на одной геодезической линии, а другой — на другой, параллельны в смысле аффинной связности пространства. Наконец, мы условимся говорить, что два вектора, взятые на двух геодезических линиях этой конгруэнции, *равны*, если интеграл

$$\int \frac{\breve{\omega}^1}{m^1} = \int \frac{\breve{\omega}^2}{m^2} = \ldots = \int \frac{\breve{\omega}^r}{m^r},$$

взятый по двум геодезическим отрезкам, определяемый этими векторами, имеет одно и то же численное значение.

Без труда доказывается, что определенное таким образом равенство векторов удовлетворяет условиям 1°—6° п°**2**.

Заметим, что *не всякое равенство векторов, удовлетворяющее этим шести условиям, может быть получено изложенным инфинитезимальным методом*, так как существование геодезических линий, определенных нами в п°**10**, не вытекает с необходимостью из этих шести условий, что можно легко показать на примере.

46. Сейчас мы хотим охарактеризовать с различных точек зрения *такие пространства аффинной связности без кривизны, которые можно рассматривать как групповые пространства.*

Первым характеристическим свойством является постоянство компонент $c_{jk}^{\cdot\cdot s}$ кручения. Геометрически *это означает, что сдвиги, соответствующие двум равным элементарным циклам, сами равны между собой.* Докажем, что это свойство характеризует *аффинные связности без кривизны в случае группового пространства.*

В самом деле, если коэффициенты $c_{jk}^{\cdot\cdot s}$ — константы, то уравнения Пфаффа

$$\breve{\omega}^s(a'; da') = \breve{\omega}^s(a; da), \tag{24}$$

где a' — неизвестные функции от a, является вполне интегрируемыми, так как билинейные коварианты обеих частей

$$-\sum_{(jk)} c_{jk}^{\cdot\cdot s}(a')\,[\breve{\omega}^j(a'; da')\,\breve{\omega}^k(a'; da')]$$

и

$$-\sum_{(jk)} c_{jk}^{\cdot\cdot s}(a)\,[\breve{\omega}^j(a;da)\,\breve{\omega}^k(a;da)]$$

равны в силу уравнений (24). Таким образом, общее решение

$$a'_i = f_i(a_1, \dots a_r;\quad C_1, \dots C_r)$$

уравнений (24) с r постоянными интегрирования $C_1, \dots C_r$ определяет просто транзитивную r-параметрическую группу G преобразований, оставляющую инвариантными формы $\breve{\omega}^s$. Зададимся произвольной точкой (a_0) в пространстве и поставим в соответствие каждой точке (a) преобразование T_a группы G, переводящее точку (a_0) в совпадение с точкой (a). Поэтому уравнения (24), выражающие равенство двух бесконечно малых векторов $\overrightarrow{a, a+da}$ и $\overrightarrow{a', a'+da'}$, означают, что преобразование группы G, переводящее (a) в (a'), переводит также $(a+da)$ в $(a'+da')$ или, иначе говоря, что

$$T_{a'}T_a^{-1} = T_{a'+da'}T_{a+da}^{-1}$$

или

$$T_a^{-1}T_{a+da} = T_{a'}^{-1}T_{a'+da'}.$$

Это равенство векторов в пространстве поэтому является равенством во втором смысле, связанным с группой G.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Для того чтобы аффинная связность без кривизны была бы связностью группового пространства, необходимо и достаточно, чтобы кручение элементарного цикла сохранялось бы при параллельном переносе этого цикла [1].

47. Рассмотрим в пространстве аффинной связности без кривизны бесконечно малое точечное преобразование (сдвиг), при котором различные точки описывают равные векторы. В групповом пространстве такое точечное преобразование оставляет инвариантной аффинную связность пространства, т. е. заменяет

---

[1] Групповое пространство, рассматриваемое как пространство аффинной связности без кривизны, принадлежит к весьма важному классу пространств, кривизна и кручение цикла в которых сохраняются при параллельном переносе этого цикла. Ниже мы будем рассматривать те из этих пространств, кручение которых равно нулю.

два равных вектора двумя равными векторами. Докажем сейчас обратную теорему.

Пусть $e^1, \ldots, e^r$ — компоненты бесконечно малого вектора, описываемого каждой точкой пространства. Вычисление, произведенное в n°39, показывает нам, что каждый вектор $u^1, \ldots, u^r$ переходит при сдвиге в новый вектор с компонентами

$$u^s - \sum_{j,k} c_{jk}^{\cdot\cdot s} e^j u^k.$$

Если при этом два равных вектора, выходящих из двух различных точек, остаются равными, то в рассматриваемых двух точках величины $\sum_{j,k} c_{jk}^{\cdot\cdot s} e^j u^k$ имеют одинаковые численные значения, каковы бы ни были e^j и u^k. *Отсюда следует, что коэффициенты* $c_{jk}^{\cdot\cdot s}$ *являются константами.*

Условимся говорить, что точечное преобразование является *аффинным изоморфизмом*, если оно сохраняет аффинную связность пространства. Мы получим, таким образом, следующую теорему:

Для того чтобы аффинная связность без кривизны была связностью группового пространства, необходимо и достаточно, чтобы сдвиги (при которых различные точки пространства описывают равные векторы) *являлись изоморфизмами.*

48. В пространстве аффинной связности без кривизны существование сдвигов позволяет определить вторую аффинную связность пространства в том смысле, что два вектора, выходящие из двух бесконечно близких точек, будут рассматриваться как параллельно перенесенные, если один из них переводится в другой тем сдвигом, который переводит первую точку во вторую. В групповом пространстве эта вторая аффинная связность тоже является связностью без кривизны. Докажем сейчас обращение этой теоремы.

В самом деле, если вторая аффинная связность является связностью без кривизны, мы имеем в нашем пространстве две системы равенства, обладающие свойствами 1°—6°n°2. С другой стороны, всякая геодезическая линия в первой аффинной связности является геодезической линией и во второй аффинной связности, так как если мы подвергнем вектор $\overrightarrow{aa'}$, соединяющий две бесконечно близкие точки одной геодезической линии, сдвигу, переводящему (a) в (a'), этот вектор останется равным самому себе во втором смысле в силу определения этого равенства, а с другой стороны, останется равным самому себе в первом смысле в силу определения геодезической линии. Затем, если мы возьмем бесконечно малый геодезический отрезок $\overrightarrow{aa'}$ и подвергнем его сдвигу, переводящему (a) в (b), этот отрезок перейдет в отрезок $\overrightarrow{bb'}$, равный во втором смысле отрезку $\overrightarrow{aa'}$. Отрезок $\overrightarrow{a'a''}$, равный отрезку $\overrightarrow{aa'}$, перейдет при этом сдвиге в отрезок $\overrightarrow{b'b''}$, равный во втором смысле отрезку $\overrightarrow{a'a''}$ и, следовательно, отрезкам $\overrightarrow{aa'}$ и $\overrightarrow{bb'}$, и т. д. Отсюда следует, что при рассматриваемом сдвиге геодезическая линия $aa'a''$ заменяется другой геодезической линией $bb'b''$. Мы видим далее, что если отрезки $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{a''b''}$ равны в первом смысле, то отрезки $\overrightarrow{aa''}$ и $\overrightarrow{bb''}$ равны во втором смысле. *Поэтому наши два вида равенства являются сопряженными в смысле гл. I.*

Отсюда следует (n°2), что первый вид равенства обладает свойством 7° и, следовательно (n°5), этот вид равенства связан с некоторой группой.

Мы получили, таким образом, следующую теорему:

Для того чтобы аффинная связность без кривизны была связностью группового пространства, необходимо и достаточно, чтобы вторая аффинная связность, определенная сдвигами этого пространства, сама была бы связностью без кривизны.

49. Интересно привести аналитическое доказательство этой теоремы. В силу вычисления n°39 вторая аффинная связность этого пространства имеет своими компонентами формы (20)

$$\breve{\omega}_i^{\cdot j} = \sum_k c_{ki}^{\cdot\cdot j}\, \breve{\omega}^k.$$

Вычислим кривизну этой аффинной связности, полагая

$$dc_{ki}^{\cdot\cdot j} = \sum_h c_{ki\,|\,h}^{\cdot\cdot j}\, \breve{\omega}^h.$$

В силу вычисления, произведенного в n°40, мы имеем

$$\Pi_i^{\cdot j} = (\breve{\omega})'^{\cdot j}_i - \sum_k [\breve{\omega}_k^{\cdot j} \breve{\omega}_i^{\cdot k}] = \sum_{(\alpha\beta)} (c_{\beta i\,|\,\alpha}^{\cdot\cdot j} - c_{\alpha i\,|\,\beta}^{\cdot\cdot j} - g_{\alpha\beta i}^{\cdot\cdot\cdot j})\, [\breve{\omega}^\alpha\, \breve{\omega}^\beta],$$

где

$$g_{\alpha\beta i}^{\cdot\cdot\cdot j} = \sum_k (c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k}\, c_{ki}^{\cdot\cdot j} + c_{\beta i}^{\cdot\cdot k}\, c_{k\alpha}^{\cdot\cdot j} + c_{i\alpha}^{\cdot\cdot k}\, c_{k\beta}^{\cdot\cdot j}).$$

Равенство кривизны нулю поэтому дает нам

$$c_{\beta i}{}^{\cdot\cdot j}{}_{|\alpha} - c_{\alpha i}{}^{\cdot\cdot j}{}_{|\beta} = g_{\alpha\beta i}{}^{\cdot\cdot\cdot j}. \tag{25}$$

С другой стороны, уравнения

$$(\breve{\omega}^{s})' = -\sum_{(jh)} c_{jh}{}^{\cdot\cdot s}\,[\breve{\omega}^{j}\,\breve{\omega}^{h}],$$

продифференцированные внешним образом, дают нам

$$c_{\alpha\beta}{}^{\cdot\cdot j}{}_{|i} + c_{\beta i}{}^{\cdot\cdot j}{}_{|\alpha} + c_{i\alpha}{}^{\cdot\cdot j}{}_{|\beta} = g_{\alpha\beta i}{}^{\cdot\cdot\cdot j}. \tag{26}$$

Отсюда непосредственно следует

$$c_{\alpha\beta}{}^{\cdot\cdot j}{}_{|i} = 0.$$

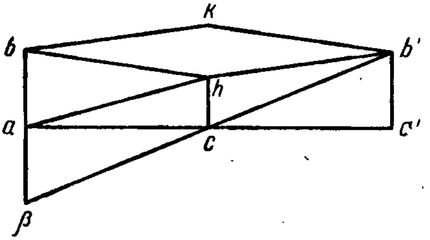
Иными словами, коэффициенты $c_{\alpha\beta}{}^{\cdot\cdot j}$ являются константами.

ГЛАВА III

АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ БЕЗ КРУЧЕНИЯ В ГРУППОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

50. В предшествующих главах мы рассматривали в геометрической форме только классические свойства конечных непрерывных групп. Введение третьей аффинной связности, внутренним образом связанной с группой, приводит нас к новым точкам зрения.



Черт. 2.

Рассмотрим два геодезических отрезка aa' и ab, выходящие из одной и той же точки (a). Если мы построим в точке (b) вектор $\overrightarrow{bb_1}$, равный в первом смысле вектору $\overrightarrow{aa'}$, то вектор $\overrightarrow{a'b_1}$ равен во втором смысле вектору $\overrightarrow{ab}$. Если, наоборот, мы построим в точке (b) вектор $\overrightarrow{bb_2}$, равный во втором смысле вектору $\overrightarrow{aa}$, то вектор $\overrightarrow{a'b_2}$ равен в первом смысле вектору $\overrightarrow{ab}$.

Два вектора $\overrightarrow{a'b_1}$ и $\overrightarrow{a'b_2}$ получаются, таким образом, из одного и того же вектора $\overrightarrow{ab}$ с помощью различных параллельных переносов, соответствующих аффинным связностям без кривизны второго и первого рода.

51. Существует третий способ параллельного переноса, промежуточный между двумя предшествующими способами. Пусть (c) середина отрезка aa', т. е. такая точка геодезического отрезка aa', что векторы $\overrightarrow{ac}$ и $\overrightarrow{ca'}$ равны (см. черт. 2).

Построим вектор $\overrightarrow{bh}$, равный в первом смысле вектору $\overrightarrow{ac}$, и вектор $\overrightarrow{hb'}$, равный во втором смысле вектору $\overrightarrow{ca'}$. Мы получим таким образом вектор $\overrightarrow{a'b'}$. Этот же вектор мы получили бы, если бы сначала построили вектор bk, равный во втором смысле вектору $\overrightarrow{ac}$, а затем вектор $\overrightarrow{kb'}$, который необходимо (n°3) должен быть равен в первом смысле вектору $\overrightarrow{ca'}$, так как равенство во втором смысле векторов $\overrightarrow{bk}$ и $\overrightarrow{hb'}$ влечет за собой равенство в первом смысле векторов $\overrightarrow{bh}$ и $\overrightarrow{kb'}$.

Мы получили таким образом конструкцию, позволяющую нам переходить от вектора $\overrightarrow{ab}$ к вполне определенному вектору $\overrightarrow{a'b'}$ *при переносе начала из (a) в (a') вдоль геодезической линии, соединяющей эти точки.*

Можно так же сказать, что вектор $\overrightarrow{a'b'}$ получается путем построения вектора $\overrightarrow{ch}$, равного во втором смысле вектору $\overrightarrow{ab}$, и построения вектора с началом (a'), равного в первом смысле вектору $\overrightarrow{ch}$.

52. Эта конструкция может быть представлена в более изящной форме. Рассмотрим точку (β), симметричную для точки (b) по отношению к точке (a), т. е. такую точку (β), что вектор $\overrightarrow{\beta a}$ равен вектору $\overrightarrow{ab}$. *Точка (b') представляет собой не что иное, как точку, симметричную для точки* (β) *по отношению к середине (c) отрезка aa'.*

В самом деле, обозначим символом $\overset{(1)}{=}$ или $\overset{(2)}{=}$ равенство в первом или во втором смысле. Из равенства

$$\overrightarrow{ch} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{ab} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{\beta a}$$

следует

$$\overrightarrow{\beta c} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{ah},$$

из равенства

$$ac \overset{(2)}{=} ca' \overset{(2)}{=} hb'$$

следует

$$\overrightarrow{ah} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{cb'}.$$

Таким образом, мы имеем

$$\overrightarrow{\beta c} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{cb'},$$

что и требовалось доказать.

Из этой конструкции, в частности, следует теорема о том, что *если точка* (b) *описывает геодезическую линию, выходящую* *из* (a), *то точка* (b') *описывает геодезическую линию, выходящую из* (a'). Более того, *точки* (b) *и* (b') *описывают на своих траекториях равные деления* (n°**15**) [8].

53. Нетрудно вычислить $T_{b'}$, зная T_a, $T_{a'}$ и T_b. Мы имеем

$$T_h T_b^{-1} = T_c T_a^{-1}, \quad \text{откуда} \quad T_h = T_c T_a^{-1} T_b,$$

и далее,

$$T_{b'} T_{a'}^{-1} = T_h T_c^{-1}, \quad \text{откуда} \quad T_{b'} = T_c T_a^{-1} T_b T_c^{-1} T_{a'}.$$

При этом преобразование $T_c T_a^{-1}$ является квадратным корнем из преобразования $T_{a'} T_a^{-1}$, и точно так же преобразование $T_c^{-1} T_{a'}$ является квадратным корнем из $T_a^{-1} T_{a'}$. Поэтому мы получаем

$$T_{b'} = \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, T_b \sqrt{T_a^{-1} T_{a'}}\,. \tag{1}$$

Тот же результат мы получаем, рассматривая точку (b') как симметричную для точки (β) по отношению к точке (c). Мы имеем

$$T_\beta T_a^{-1} = T_a T_b^{-1}, \quad \text{откуда} \quad T_\beta = T_a T_b^{-1} T_a,$$

и далее,

$$T_{b'} T_c^{-1} = T_c T_\beta^{-1}, \quad \text{откуда} \quad T_{b'} = T_c T_a^{-1} T_b T_a^{-1} T_c,$$

что снова приводит к выражению (1) для $T_{b'}$.

54. Формула (1) позволяет доказать, что если мы рассматриваем на одной и той же геодезической линии три точки (a), (a') и (a'') и если мы переносим вектор $\overrightarrow{ab}$ из (a) в (a'), а затем переносим полученный вектор $\overrightarrow{a'b'}$ из (a') в (a''), то полученный в результате вектор $\overrightarrow{a''b''}$ может быть получен непосредственным переносом вектора $\overrightarrow{ab}$ из (a) в (a''). В самом деле, мы имеем

$$T_{b'} = \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, T_b \sqrt{T_a^{-1} T_{a'}}\,,$$

$$T_{b''} = \sqrt{T_{a''} T_{a'}^{-1}}\, T_{b'} \sqrt{T_{a'}^{-1} T_{a''}} =$$

$$= \sqrt{T_{a''} T_{a'}^{-1}} \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, T_b \sqrt{T_a^{-1} T_{a'}} \sqrt{T_{a'}^{-1} T_{a''}}\,.$$

Но два преобразования

$$\sqrt{T_{a''} T_{a'}^{-1}} \quad \text{и} \quad \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}$$

принадлежат к одной и той же 1-параметрической подгруппе (определяющей направление первого рода этой геодезической линии). Поэтому они перестановочны между собой, и квадрат их произведения может быть получен умножением квадрата первого преобразования на квадрат второго, что дает нам

$$T_{a''}T_{a'}^{-1}T_{a'}T_{a}^{-1} = T_{a''}T_{a}^{-1}.$$

Поэтому окончательно мы имеем

$$T_{b''} = \sqrt{T_{a''}T_{a}^{-1}}\,T_{b}\,\sqrt{T_{a}^{-1}T_{a''}},$$

что и требовалось доказать.

55. Рассмотрим вектор $\overrightarrow{ab}$ и *произвольный* путь (C), начинающийся в точке (a) и кончающийся в точке (a'). Тогда параллельный перенос вектора $\overrightarrow{ab}$ вдоль пути (C) является вполне определенным; для того чтобы получить его, разделим путь (C) на большое число частичных дуг с помощью точек деления (a_1), (a_2), ..., (a_n). Перенесем вектор $\overrightarrow{ab}$ в положение $\overrightarrow{a_1b_1}$ вдоль геодезической дуги aa_1, как это производилось выше, затем перенесем вектор $\overrightarrow{a_1b_1}$ в положение $\overrightarrow{a_2b_2}$ вдоль геодезической дуги a_1a_2 и т. д. Когда число частичных дуг бесконечно возрастает таким образом, что каждая из них стремится к нулю, конечный вектор будет стремиться к предельному положению $\overrightarrow{a'b'}$. Из n°54 следует, что *если кривая* (C) *является геодезической линией*, конечный вектор $\overrightarrow{a'b'}$ может быть получен одним непосредственным переносом. Сверх того, мы видим, что какова бы ни была кривая (C), точка (b') опишет геодезическую линию, проходящую через (a'), если точка (b) описывает геодезическую линию, проходящую через (a), и что точки (b) и (b') на этих двух геодезических линиях будут описывать равные деления. Однако здесь уже неверно, что вектор $\overrightarrow{a'b'}$ не зависит от пути (C), по которому он переносился из (a) в (a'); мы увидим, что, наоборот, *в общем случае вектор зависит от пути своего переноса.*

Вычислим компоненты вектора $\overrightarrow{a'b'}$ по отношению к декартову реперу первого рода, связанному с точкой (a'), предполагая, что точка (a') бесконечно близка к точке (a). Пусть

$$\sum_i u^i X_i = U$$

— символ преобразования $T_b T_a^{-1}$, т. е. символ первого рода вектора $\overrightarrow{ab}$, а

$$\sum_j v^i X_i = V$$

— такой же символ вектора $\overrightarrow{a'b'}$. Пусть, наконец, θ и θ' — преобразования, отвечающие символам U и V.

Тогда в силу (1)

$$\theta' = T_{b'} T_{a'}^{-1} = \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, T_b \sqrt{T_a^{-1} T_{a'}}\, T_{a'}^{-1} =$$
$$= \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, T_b T_c^{-1} = \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\; \theta T_a T_c^{-1} =$$
$$= \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\; \theta \sqrt{T_a T_{a'}^{-1}}.$$

Пусть $\sum\limits_i \breve{\omega}^i X_i$ — символ вектора первого рода aa'. Преобразование $\sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}$ отвечает символу $\frac{1}{2} \sum\limits_i \breve{\omega}^i X_i$. Отсюда следует (n°31), что символом θ' является

$$U - \frac{1}{2} \sum_i \breve{\omega}^i (X_i U) = \sum_i \Big(u^i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{jk}^{\cdot\cdot i}\, \breve{\omega}^j u^k\Big) X_i.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$v^i = u^i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{jk}^{\cdot\cdot i}\, \breve{\omega}^j u^k. \tag{2}$$

Формула (2) определяет третью аффинную связность группового пространства, для которой параллельный перенос вектора (u^i) задается уравнениями

$$du^i + \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{jk}^{\cdot\cdot i}\, \breve{\omega}^j u^k = 0. \tag{3}$$

Компонентами этой третьей аффинной связности являются:

1°. Формы $\breve{\omega}^i$.

2°. Формы $\omega_{i\cdot}^{\cdot j} = \frac{1}{2} \sum c_{ki}^{\cdot\cdot j}\, \breve{\omega}^k$.

Если мы сравним эти компоненты с компонентами второй аффинной связности без кривизны, определенной формулой (20) n°39, мы получим следующий результат:

Если мы параллельно перенесем вдоль бесконечно малого пути $\overrightarrow{aa'}$ *вектор* $\overrightarrow{ab}$, *выходящий из* (*a*), *согласно двум аффинным связностям без кривизны и согласно третьей аффинной связности, вектор* $\overrightarrow{a'b'}$, *полученный согласно этой третьей связности, является геометрической полусуммой векторов* $\overrightarrow{a'b_1}$ *и* $\overrightarrow{a'b_2}$, *полученных согласно двум первым связностям.*

Этот последний результат, впрочем, почти очевиден в силу конструкции n°51.

56. Аффинная связность, определенная с помощью формул (3), допускает те же геодезические линии, что и аффинные связности без кривизны. В самом деле, при любой из указанных нами геометрических конструкций очевидно, что если точка (*b*) находится на геодезической линии (*aa'*), то точка (*b'*) также будет находиться на этой геодезической линии, и, следовательно, всякий вектор, находящийся на некоторой геодезической линии, останется на этой геодезической линии при третьем параллельном переносе вдоль этой геодезической линии.

Компоненты третьей аффинной связности, если воспользоваться декартовыми реперами первого рода, в силу (3) имеют вид

$$\omega_i^{\cdot j} = \frac{1}{2} \sum_k c_{ki}^{\cdot\cdot j} \breve{\omega}^k = \frac{1}{2} \breve{\omega}_i^{\cdot j},$$

где $\breve{\omega}_i^{\cdot j}$ — формы (20 гл. II), определяющие вторую аффинную связность без кривизны. Так как формы, определяющие первую связность, тождественно равны нулю *), то мы получаем следующую теорему:

Если отнести пространство к произвольным декартовым реперам, компоненты $\omega_i^{\cdot j}$ *третьей аффинной связности являются средними арифметическими компонент двух аффинных связностей без кривизны.*

---

*) Если пользоваться декартовыми реперами первого рода. (*Прим. перев.*)

Эта теорема позволяет нам доказать важное свойство третьей аффинной связности: то, что эта связность является ***связностью без кручения.*** В самом деле, в пространстве аффинной связности, определенной аналитически с помощью форм ω^i и ω_i^j, кручение определяется формами

$$\Omega^i = (\omega^i)' - \sum_k [\omega^k \omega_k^{\cdot i}],$$

в которые формы $\omega_k^{\cdot i}$ входят *линейно*. Отсюда следует, что ***кручение третьей аффинной связности является средним арифметическим кручений двух первых связностей.*** Так как эти два кручения равны по величине и противоположны по знаку, то теорема доказана.

57. Этот результат можно доказать и непосредственно. Вернемся снова к рассмотренной выше конструкции и предположим, что точки (b) и (a') бесконечно близки к точке (a). Пусть вектор $\overrightarrow{a'b'}$ получается из вектора $\overrightarrow{ab}$ при параллельном переносе в третьей аффинной связности из (a) в (a'). Пусть далее вектор $\overrightarrow{bb''}$ получается из вектора $\overrightarrow{aa'}$ при параллельном переносе из (a) в (b). Рассмотрим отклонение точки (b'') от точки (b').

Пусть (c) — середина вектора $\overrightarrow{aa'}$, а (d) — середина вектора $\overrightarrow{ab}$. Положим

$$T_c = \theta_1 T_a; \qquad T_d = \theta_2 T_a.$$

Несложное вычисление дает:

$$T_{b'} = \theta_1 \theta_2^2 \theta_1 T_a,$$

$$T_{b''} = \theta_2 \theta_1^2 \theta_2 T_a,$$

откуда

$$T_{b''} T_b^{-1} = \theta_2 \theta_1^2 \theta_2 \theta_1^{-1} \theta_2^{-2} \theta_1^{-1}.$$

Если мы обозначим через αU символ преобразования θ_1, а через βV — символ преобразования θ_2, где α и β — два бесконечно малых параметра, то несколько утомительное вычисление показывает, что правая часть этого выражения равна тождественному преобразованию, если пренебречь величинами, бесконечно малыми по отношению к произведению $\alpha\beta$, т. е. по отношению к площади четырехугольника $abb'a'$.

Развернем теперь четырехугольник $b'a'ab$ на касательное аффинное пространство в точке b', причем будем производить это развертывание согласно третьей аффинной связности. Стороны четырехугольника при этом развернутся на отрезки прямых, причем сторона ab будет равна *в обычном смысле* стороне $a'b'$. При этом можно будет заменить развертывание четвертой стороны bb' развертыванием отрезка bb'', *пренебрегая бесконечно малыми по отношению к развертываемому циклу*. Но тогда мы получим вектор, равный вектору $\overrightarrow{aa'}$. Таким образом, при этом развертывании мы получим замкнутый контур; это означает, что кручение равно нулю.

II. АФФИННАЯ СВЯЗНОСТЬ БЕЗ КРУЧЕНИЯ И ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ ГРУППОВОГО ПРОСТРАНСТВА

58. К аффинной связности без кручения, определенной в предыдущем параграфе, можно притти, рассматривая вопрос с другой точки зрения. В двух первых главах мы определили геодезические линии группы и на каждой геодезической линии с точностью до постоянного множителя — длину переменного отрезка. Если на каждой геодезической линии мы выберем произвольное начало и произвольную единицу длины, положение каждой точки этой линии определится ее криволинейной абсциссой s. Тогда координаты $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^r$ точек этой линии определятся в функции s системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d^2\xi^i}{ds^2}+\sum_{k,h}\Gamma^i_{kh}\frac{d\xi^k}{ds}\frac{\xi^h}{ds}=0 \quad (\Gamma^i_{kh}=\Gamma^i_{hk}). \tag{4}$$

Чтобы обосновать этот результат, достаточно заметить (n° 38), что вдоль геодезической линии

$$\frac{\breve{\omega}^1}{m^1}=\frac{\breve{\omega}^2}{m^2}=\ldots=\frac{\breve{\omega}^r}{m^r}=ds,$$

откуда

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\breve{\omega}^i}{ds}\right)=0 \quad (i=1, \ldots, r),$$

что при замене форм $\breve{\omega}^i$ их выражениями и при развертывании дает формулы вида (4).

Уравнения (4) показывают, что рассматриваемые геодезические линии определяются аффинной связностью без кручения, задаваемой компонентами Γ^i_{kh}. Значит, существует аффинная связность без кручения, дающая в групповом пространстве геодезические линии, определенные в двух первых главах, с той же самой метрикой на каждой геодезической линии*). Легко видеть, что эта аффинная связность без кручения — единственная, так как уравнения (4) для каждой геодезической линии не изменяются при умножении s на постоянный множитель.

59. В произвольном пространстве аффинной связности без кручения можно тоже задать параллельный перенос с помощью конструкции, обобщающей конструкцию n° 52. Рассмотрим две бесконечно близкие точки (a) и (a'), и пусть (c) — середина геодезической дуги, соединяющей эти две точки. Рассмотрим далее точечное преобразование (симметрию), ставящее в соответствие каждой точке (m) (достаточно близкой к (a)) точку (m'), расположенную на той же геодезической линии, что и точки (c) и (m), причем дуга cm' равна дуге mc. При этой симметрии всякому направлению, выходящему из (a), соответствует направление, выходящее из (a'), и всякому бесконечно малому вектору $\overrightarrow{ab}$, выходящему из (a), соответствует бесконечно малый вектор, выходящий из (a'): *вектор, симметричный для этого последнего вектора по отношению к (a'), — не что иное, как вектор, полученный при параллельном переносе вектора $\overrightarrow{ab}$ вдоль дуги aa'.*

Чтобы доказать это свойство, воспользуемся в (c) нормальными римановыми координатами. Если общие координаты точки равны $x^1, \ldots, x^n$, то нормальные координаты $y^1, \ldots, y^n$ этой точки задаются соотношениями

$$y^i = (x^i)'_0 s,$$

где $(x^i)'_0$ означают начальные значения в (c) производных $\frac{dx^i}{ds}$ на геодезической линии, соединяющей точку (c) с рассматриваемой точкой. При таком выборе нормальных координат все компоненты аффинной связности Γ^i_{hk} равны нулю в (c). Без ограничения общности можно предположить, что геодезическая

---

*) Ср. Схоутен и Стройк [1], стр. 98—99 русского перевода. Параметр s, определенный с точностью до преобразования $s' = cs + c'$, называют *аффинным параметром* геодезической линии. (*Прим. перев.*)

линия aa' определяется уравнением

$$y^2 = y^3 = \ldots = y^n = 0.$$

Формулы, определяющие параллельный перенос вектора с компонентами u^i вдоль этой геодезической линии, имеют вид

$$\frac{du^i}{dy^1} + \sum_k \Gamma^i_{k1} u^k = 0. \qquad (5)$$

Пусть $y^1 = a$ — абсцисса точки (a'), а $y^1 = -a$ — абсцисса точки (a). Уравнение (5) дает нам

$$u^i = (u^i)_0 - \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{d\Gamma^i_{k1}}{dy^1}\right)_0 (u^k)_0 (y^1)^2 + \ldots$$

Отсюда следует, что *с точностью до бесконечно малых третьего порядка* компоненты переносимого вектора в точках (a) и (a') одинаковы; *направление* вектора в (a) и *направление*, обратное направлению вектора в (a'), являются симметричными друг для друга по отношению к точке (c).

Если, кроме того, эти два вектора бесконечно малы, то вектор, обратный одному из них, симметричен с другим относительно (c), и это имеет место с точностью до бесконечно малых третьего порядка [9].

Заметим, что конструкция параллельного переноса в римановом пространстве, принадлежащая Ф. Севери ([1], стр. 254) *), дает результат с точностью до бесконечно малых *второго порядка*.

Мы видим, что в групповом пространстве указанная конструкция является совершенно точной при параллельном переносе вдоль конечной дуги геодезической линии.

III. КРИВИЗНА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

60. Если мы будем продолжать пользоваться реперами первого рода, то компонентами аффинной связности без кручения являются (n° 55):

1°. Формы $\overset{\smile}{\omega}^i$.

2°. Формы $\omega_i^{\cdot j} = \frac{1}{2} \overset{\smile}{\omega}_i^{\cdot j} = \frac{1}{2} \sum_k c_{ki}^{\cdot\cdot j} \overset{\smile}{\omega}^k$.

---

*) О теореме Севери см. также Картан [23], стр. 110 русского перевода. (*Прим. перев.*)

Кривизна этого пространства определяется формами

$$\Omega_i^{\cdot j}=(\omega_i^{\cdot j})'-\sum_k[\omega_i^{\cdot k}\omega_k^{\cdot j}]=\frac{1}{2}(\breve{\omega}_i^{\cdot j})'-\frac{1}{4}\sum_k[\breve{\omega}_i^{\cdot k}\breve{\omega}_k^{\cdot j}].$$

Но так как вторая аффинная связность без кривизны имеет компоненты $\breve{\omega}_i^{\cdot j}$, для нее имеет место

$$(\breve{\omega}_i^{\cdot j})'=\sum_k[\breve{\omega}_i^{\cdot k}\breve{\omega}_k^{\cdot j}],$$

откуда следует

$$\Omega_i^{\cdot j}=\frac{1}{4}(\breve{\omega}_i^{\cdot j})'=-\frac{1}{4}\sum_{k,\,(\alpha\beta)}c_{ki}^{\cdot\cdot j}c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k}[\breve{\omega}^{\alpha}\breve{\omega}^{\beta}]. \qquad (6)$$

Обобщенные символы Римана — Кристоффеля поэтому здесь имеют вид

$$R_{i\cdot\alpha\beta}^{\cdot j}=\frac{1}{4}\sum_k c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k}c_{ki}^{\cdot\cdot j}. \qquad (7)$$

Этот результат геометрически интерпретируется следующим образом:

Рассмотрим элементарный параллелограмм, две стороны которого равны в первом смысле векторам X_α и X_β. Аффинное вращение, соответствующее этому циклу, дает вектору X_i геометрическое приращение

$$\sum R_{i\cdot\alpha\beta}^{\cdot j}X_j=\frac{1}{4}((X_\alpha X_\beta)X_i).$$

Более общим образом, *параллелограмму с бесконечно малыми сторонами U и V соответствует аффинное вращение, дающее вектору X_i бесконечно малое геометрическое приращение:*

$$\Delta X_i=\frac{1}{4}((UV)X_i).$$

61. Предыдущий результат был доказан в предположении, что каждый вектор, выходящий из начальной точки (a), характеризуется элементарным циклом, построенным на векторах, равных в *первом* смысле векторам, выходящим из начальной точки пространства. Но тот же самый результат мы получили бы, если представили бы эти векторы векторами, выходящими из начала и равными им во *втором* смысле. В самом деле, в этом случае нам пришлось бы заменить символ U любого вектора, выходящего из точки (a), на символ $\overline{U}$ бесконечно малого преобразования, полученного преобразованием U с помощью T_a. Поэтому, если $\overline{X}_i$, $\overline{U}$, $\overline{V}$ получены преобразованием X_i, U, V, и если мы обозначим через Y_i преобразование $\frac{1}{4}((UV)X_i)$, а через $\overline{Y}_i$ — результат его преобразования, то мы всегда будем иметь формулу

$$\overline{Y}_i = \frac{1}{4}((\overline{U}\overline{V})\,\overline{X}_i),$$

выражающую приращение $\overline{Y}_i$ вектора $\overline{X}_i$ при вращении, соответствующем данному циклу.

Это рассуждение является общим и не предполагает, что базисные векторы декартова репера в точке (a) равны в первом или во втором смысле базисным векторам X_i, выходящим из начальной точки: *достаточно, чтобы они получались, например, из базисных векторов декартова репера первого рода с помощью некоторого преобразования присоединенной группы*, т. е. чтобы базисные векторы нового декартова репера, отнесенные к декартову реперу первого рода, представляли собой результат преобразования бесконечно малых преобразований X_1, X_2, ..., X_r с помощью произвольного преобразования T_α данной группы G. *При таком наиболее общем выборе реперов компоненты $R_{i\cdot\alpha\beta}^{j}$ обобщенного тензора Римана—Кристоффеля будут сохранять вид* (7)

$$R_{i\cdot\alpha\beta}^{\,j} = \frac{1}{4}\sum_k c_{\alpha\beta}^{k\cdot\cdot}\, c_{ki}^{\cdot\cdot j}.$$

Будем называть репер, удовлетворяющий этим условиям, *нормальным репером.*

62. Изложенный результат приводит к крайне важному следствию. Будем исходить из элементарного цикла с началом (a) и перенесем его параллельно, согласно аффинной связности без кручения, вдоль какого-нибудь пути в какую-нибудь точку (a'). Одновременно перенесем параллельно декартов репер (*например*, репер первого рода), отнесенный к точке (a). В точке (a'), бесконечно близкой к (a), полученный декартов репер уже не будет репером первого рода, его i-й базисный вектор по отношению к реперу первого рода в точке (a')

определяется выражением

$$X_i - \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{ji}^{\cdot\cdot k}\breve{\omega}^j X_k,$$

что следует из уравнений (2). Но

$$X_i - \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{ji}^{\cdot\cdot k}\breve{\omega}^j X_k = X_i - \frac{1}{2}\,(\sum_j \breve{\omega}^j X_j,\ X_i).$$

Поэтому полученный декартов репер в (a) может быть получен из декартова репера первого рода в (a') с помощью некоторого преобразования присоединенной группы, причем *вектор* X_i *этого репера заменяется результатом его преобразования с помощью бесконечно малого преобразования* $\frac{1}{2}\sum \breve{\omega}^j X_j$.

Таким образом, мы убеждаемся шаг за шагом, что декартов репер, построенный в точке (a) при параллельном переносе при помощи аффинной связности без кручения, постоянно остается *нормальным* репером и, следовательно, *кривизна элементарного цикла параллельно переносится вместе с циклом*, так как компоненты $R_{i\cdot\alpha\beta}^{\ j}$ постоянно сохраняют те же самые численные значения.

Таким образом, *аффинная связность без кручения в групповом пространстве обладает тем свойством, что кривизна элементарного цикла сохраняется, если цикл переносится параллельно*[1].

63. Аналитически это свойство выражается в том, что ковариантная производная тензора Римана — Кристоффеля тождественно равна нулю. Интересно проверить это путем вычисления. Поскольку компоненты $R_{i\cdot\alpha\beta}^{\ j}$ — постоянные, то нам надо проверить тождество

$$\sum_k (R_{k\cdot\alpha\beta}^{\ j}\omega_i^{\cdot k} - R_{i\cdot\alpha\beta}^{\ k}\omega_k^{\cdot j} + R_{i\cdot k\beta}^{\ j}\omega_\alpha^{\cdot k} + R_{i\cdot\alpha k}^{\ j}\omega_\beta^k = 0,$$

или, выражая все члены через $\breve{\omega}^\gamma$,

$$\sum_k (R_{k\cdot\alpha\beta}^{\ j}\, c_{\gamma i}^{\cdot\cdot k} - R_{i\cdot\alpha\beta}^{\ k}\, c_{\gamma k}^{\cdot\cdot j} + R_{i\cdot k\beta}^{\ j}\, c_{\gamma\alpha}^{k} + R_{i\cdot\alpha k}^{\ j}\, c_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot k}) = 0.$$

---

[1] Ср. n° 46, сноска (стр. 57 настоящего сборника).

Но левая часть, умноженная на —4, является коэффициентом при X_j в разложении выражения

$$((X_\gamma X_l)(X_\alpha X_\beta)) - (X_\gamma(X_i(X_\alpha X_\beta))) + ((X_l(X_\beta(X_\alpha X_\gamma))) + \\ + (X_l(X_\alpha(X_\gamma X_\beta))).$$

Используя тождество Якоби, без труда докажем, что это выражение равно нулю.

Пространства аффинной связности без кручения, кривизна которого сохраняется при параллельном переносе, составляют весьма замечательный класс пространств, о котором будет итти речь в следующей главе.

IV. ЭЛЕМЕНТ ОБЪЕМА ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

64. Пространство аффинной связности без кручения, построенное в группе, допускает *абсолютную* единицу объема. В самом деле, при бесконечно малом преобразовании

$$\delta X_i = (X_i(X_\alpha X_\beta)) = \sum_{k,j} c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k} c_{ik}^{\cdot\cdot j} X_j,$$

соответствующем элементарному циклу, объем, построенный на единичных векторах $X_1, \ldots, X_r$, претерпевает относительное приращение, равное

$$\sum_{k,i} c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k} c_{ik}^{\cdot\cdot i}.$$

Но это выражение равно нулю, так как из тождества Якоби

$$((X_\alpha X_\beta) X_i) + ((X_\beta X_i) X_\alpha) + ((X_i X_\alpha) X_\beta) = 0$$

следует, в частности,

$$\sum_{i,k} (c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k} c_{ik}^{\cdot\cdot i} + c_{\beta i}^{\cdot\cdot k} c_{\alpha k}^{\cdot\cdot i} + c_{i\alpha}^{\cdot\cdot k} c_{\beta k}^{\cdot\cdot i}) = 0.$$

Здесь вторая и третья суммы взаимно уничтожаются, что становится очевидным, если поменять в одной из них индексы i и k[1]).

Существование абсолютной единицы объема можно было бы предвидеть и *a priori*. При параллельном переносе элемен-

---

[1]) Для утверждения существования единицы абсолютного объ-

тарного объема из точки (a) в бесконечно близкую точку (a') две меры $d\tau_1$ и $d\tau_2$ первого и второго рода этого объема претерпевают относительные приращения, *равные по величине и противоположные по знаку*. Следовательно, число $\sqrt{d\tau_1 d\tau_2}$ остается при этом постоянным. Таким образом, абсолютная мера объема действительно существует.

В примере n° 35 мы имеем

$$d\tau_1 = \frac{dadb}{a}, \quad d\tau_2 = \frac{dadb}{a^2},$$

$$d\tau = \sqrt{d\tau_1 d\tau_2} = \frac{dadb}{a^{3/2}}.$$

Можно доказать, что при пользовании каноническими переменными С. Ли коэффициент при $da_1 da_2 \ldots da_r$ в выражеиии для $d\tau$ является целой функцией переменных.

Если r сумм $\sum_k c_{i\,k}^{\cdot\,k}$ равны нулю, мы имеем $d\tau = d\tau_1 = d\tau_2$.

V. СВЕРНУТЫЙ ТЕНЗОР КРИВИЗНЫ

65. В пространстве аффинной связности без кручения свернутый тензор кривизны имеет вид

$$R_{ij} = \sum_k R_{i\cdot jk}^{\cdot k}.$$

В данном случае мы имеем

$$R_{ij} = -\frac{1}{4} \sum_{k,h} c_{jk}^{\cdot\cdot h} c_{i\,h}^{\cdot\,k} = -\frac{1}{4} g_{ij}.$$

Тензор R_{ij} *симметричен* вследствие существования абсолютной единицы объема. Впрочем, это следует непосредственно из аналитического выражения этого тензора.

Так как кривизна пространства сохраняется при параллельном переносе, присоединенная группа оставляет инвариантной квадратичную форму с коэффициентами g_{ij}. Пользуясь вместе с С. Ли буквами e^i для обозначения переменных, преобразуемых

ема можно также сослаться на свойство симметрии свернутого тензора

$$R_{ij} = \sum R_{i\cdot jk}^{\cdot k},$$

как это следует из одной классической теоремы. См., например, Схоутен [1], стр. 90 [(см. также Схоутен и Стройк [1], стр. 112 и 114 русского перевода). (*Прим. перев.*)]

с помощью присоединенной группы, мы получим форму, играющую крайне важную роль в теории групп, именно форму

$$\varphi(e) = \sum_{i,j} g_{ij} e^i e^j = \sum_{i,j,k,h} c_{jk}^{\cdot\cdot h} c_{ih}^{\cdot\cdot k} e^i e^j.$$

Эта форма дает сумму квадратов корней характеристического уравнения группы[1]. Как известно, эта форма является инвариантом присоединенной группы. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы группа была полупростой, является отличие от нуля дискриминанта этой формы[2].

Параллельный перенос оставляет инвариантной кривизну, а следовательно, и форму $\varphi(e)$. *Поэтому, если группа полупроста, пространство аффинной связности без кручения, связанное с этой группой, является пространством метрической связности с абсолютной единицей объема, т. е. римановым пространством*. Можно добавить, что так как тензор R_{ij} пропорционален фундаментальному тензору g_{ij}, *это пространство является пространством постоянной кривизны второго рода*[3].

66. Можно было бы и более общим образом рассмотреть некоторую невырожденную квадратичную форму $\psi(e)$, инвариантную относительно присоединенной группы, и взять ее в качестве фундаментальной формы (считая, что репер, связанный с каждой точкой, является нормальным репером). Мы определили бы таким образом риманово пространство, обладающее аффинной связностью без кручения группового пространства. В этом римановом пространстве два геодезических отрезка, имеющих одинаковую длину в смысле n°15, также имеют одинаковую длину. Если группа G проста, то всякая такая

---

[1] Картан [1], стр. 24—25. В обозначениях этой работы

$$\varphi(e) = \psi_1^2(e) - 2\psi_2(e).$$

[См. также Чеботарев [1], стр. 248—249. (*Прим. перев.*)]

[2] Картан [1], стр. 51—52. На самом деле здесь эта теорема доказана для формы $\psi_2(e)$, но она применима также к форме $\varphi(e)$. [См. также Чеботарев [1], стр. 257—258 (теорема 69), где теорема доказана для самой формы $\varphi(e)$. (*Прим. перев.*)]

[3] См. Картан [11], n° 36, стр. 37—38. [Этим римановым пространствам посвящены три последующие работы Картана, помещенные в настоящем сборнике. (*Прим. перев.*)]

форма $\psi(e)$ с точностью до постоянного множителя совпадает с формой $\varphi(e)$, определенной свернутым тензором кривизны. Если группа G разлагается на h простых подгрупп, то наиболее общая квадратичная форма $\psi(e)$ зависит от h произвольных постоянных и имеет вид

$$\psi(e) = C_1\varphi_1(e) + C_2\varphi_2(e) + \ldots + C_h\varphi_h(e),$$

где формы $\varphi_i(e)$ относятся к h простым подгруппам. Соответственные римановы пространства в общем случае не являются пространствами постоянной кривизны второго рода. Поэтому вполне естественно сохранить за римановым пространством фундаментальной формы $\varphi(e)$ название риманова пространства, связанного с этой группой.

Если группа G не является полупростой, то присоединенная группа не обязательно допускает инвариантную невырожденную квадратичную форму, и в этом случае группа может не иметь связанного с ней риманова пространства.

VI. ВПОЛНЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ В ГРУППОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

67. Пусть V_p — p-мерное вполне геодезическое многообразие в пространстве, связанном с группой G. Известно, что такое многообразие характеризуется тем свойством, что всякий вектор, касательный к нему, остается касательным к нему при параллельном переносе (без кручения), если его начало остается на этом многообразии[1]) Свяжем с некоторой точкой (a) этого многообразия нормальный декартов репер (n° **61**). Всегда можно выбрать базисные бесконечно малые преобразования группы таким образом, чтобы p первых координатных векторов были касательными к многообразию. Если мы будем переносить этот репер параллельно вдоль пути, расположенного в этом многообразии, *он останется нормальным* *) и первые p из его векторов останутся касательными к V_p. Выберем в переменной точке (ξ) этого многообразия такой нормальный репер,

---

[1]) Картан [11], стр. 39. Доказательство для пространств аффинной связности без кручения в точности совпадает с доказательством для римановых пространств. [См. также Картан [23], стр. 111 русского перевода. (*Прим. перев.*)]

*) См. примечание [10]. (*Прим. ред.*)

который получается из нормального репера, связанного с точкой (a), с помощью параллельного переноса вдоль определенного пути, проведенного в этом многообразии, начинающегося в (a) и кончающегося в (ξ).

Тогда при произвольном смещении по многообразию мы будем иметь уравнения

$$\omega^{p+1}=\omega^{p+2}=\ldots=\omega^{r}=0. \tag{8}$$

Условие того, что первые p из координатных векторов остаются касательными к V_p, дает нам, кроме того,

$$\omega_i^{\cdot\alpha}=0 \quad (i=1, \ldots, p; \quad a=p+1, \ldots, r). \tag{9}$$

Внешнее дифференцирование уравнений (9) дает

$$\Omega_i^{\cdot\alpha}=0,$$

или, принимая во внимание (8),

$$R_{i\cdot jk}^{\cdot\alpha}=0 \quad (i, j, k=1, \ldots, p; \quad a=p+1, \ldots, r). \tag{10}$$

Уравнения (10) можно переписать в силу (7) в виде

$$\sum_{\rho} c_{jk}^{\cdot\cdot\rho} c_{\rho i}^{\cdot\cdot\alpha}=0. \tag{11}$$

Они выражают, что *бесконечно малые преобразования*

$$((X_j X_k) X_i) \quad (i, j, k=1, 2, \ldots, p)$$

линейно зависят только от $X_1, X_2, \ldots, X_p$ [20].

Так как для каждой точки многообразия V_p направлениям (первого рода) этого многообразия отвечают бесконечно малые преобразования, получающиеся с помощью некоторого преобразования группы G из $X_1, \ldots, X_p$, мы получаем следующую теорему:

Во всякой точке вполне геодезического многообразия V_p *бесконечно малые преобразования* $U_1, \ldots, U_p$, *отвечающие независимым направлениям этого многообразия, обладают тем свойством, что бесконечно малые преобразования*

$$((U_j U_k) U_i)$$

линейно зависят от $U_1, \ldots, U_p$ [11].

68. Обратно, рассмотрим p линейно независимых бесконечно малых преобразований $U_1, \ldots, U_p$, таких, что преобразования

$((U_j U_k) U_l)$ зависят только от U_k. Возьмем произвольную точку этого пространства и проведем через нее те геодезические линии, направления первого рода которых отвечают бесконечно малым преобразованиям $\lambda^1 U_1 + \ldots + \lambda^p U_p$. Я утверждаю, что эти геодезические линии порождают вполне геодезическое многообразие.

В самом деле, без ограничения общности мы можем предположить, что рассматриваемые p бесконечно малых преобразований имеют вид

$$X_1, X_2, \ldots, X_p.$$

Свяжем теперь с каждой точкой пространства *наиболее общий* нормальный репер (он зависит от такого же числа параметров, что и преобразования присоединенной группы). Компоненты $\omega_i^{\cdot j}$ нашей аффинной связности имеют вид

$$\omega_i^{\cdot j} = \sum_k c_{ki}^{\cdot\cdot j} \theta^k,$$

где выражения $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ являются линейными формами относительно дифференциалов этих параметров. Рассмотрим теперь уравнения Пфаффа

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^{\cdot\alpha} = 0 \quad (i = 1, \ldots, p; \ a = p + 1, \ldots, r). \quad (12)$$

Они образуют *вполне интегрируемую систему*, так как билинейные коварианты левых частей уравнений (12) обращаются в нуль в силу соотношений (11), которые выполнены вследствие наших предположений. Кроме того, эта система для дифференциалов самих переменных $\xi^1, \ldots, \xi^r$, определяющих точку в пространстве, имеет следствием только $r - p$ независимых соотношений $\omega^\alpha = 0$.

Система (12) определяет, таким образом, бесконечное множество p-мерных вполне геодезических многообразий. При этом наша система всегда допускает такое решение, что соответственное многообразие проходит через любую данную точку и что нормальным репером в этой точке является любой *данный* нормальный репер, например, декартов репер первого рода. Этим теорема полностью доказана.

Мы видим, что вполне геодезическое многообразие, существование которого мы хотели доказать, входит в непрерывное семейство, зависящее от такого количества параметров, сколько линейно независимых уравнений в системе (12).

Количество этих параметров равно числу $2r-p$, уменьшенному на число линейно независимых бесконечно малых преобразований данной группы, оставляющих инвариантным пучок

$$\lambda^1 X_1 + \lambda^2 X_2 + \ldots + \lambda^p X_p.$$

Полученные вполне геодезические многообразия являются вполне геодезическими многообразиями к первой категории (n° 17), если преобразования $X_1, \ldots, X_p$ порождают группу. В противном случае эти многообразия являются вполне геодезическими многообразиями ко второй категории.

69. Рассмотрим, например, 3-параметрическую группу G вращений вокруг начала, для которой

$$(X_1X_2)=X_3, \quad (X_2X_3)=X_1, \quad (X_3X_1)=X_2.$$

Групповое пространство здесь не что иное, как 3-мерное эллиптическое пространство. Через всякую точку этого пространства проходит вполне геодезическая поверхность, касающаяся в этой точке произвольного данного плоского элемента. В самом деле, проверим, что если мы возьмем два любых преобразования этой группы:

$$U=a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3,$$
$$V=b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3,$$

то преобразования

$$((UV)\,U) \quad \text{и} \quad ((UV)\,V)$$

линейно зависят от U и V; эти преобразования имеют вид *)

$$((UV)\,U)=-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\,U+(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\,V,$$
$$((UV)\,V)=-(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\,U+(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\,V.$$

---

*) Так как коммутирование символов $U, V, \ldots$ в этом случае в точности совпадает с векторным произведением векторов в обычном пространстве, то эти формулы являются частными случаями известной формулы „двойного векторного произведения“

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\mathbf{b}\cdot\mathbf{ac}-\mathbf{c}\cdot\mathbf{ab}.$$

(*Прим. перев.*)

Все вещественные вполне геодезические поверхности здесь принадлежат ко второй категории.

Вообще можно доказать, что если нам дано групповое пространство произвольной 3-параметрической группы, то или это пространство удовлетворяет аксиоме плоскости (т. е. оно допускает ∞^3 вполне геодезических поверхностей), или все вполне геодезические поверхности являются вполне геодезическими поверхностями первой категории. К этому последнему случаю относятся структуры, приводимые к виду

$$(X_1X_2)=aX_2, \quad (X_1X_3)=\beta X_3, \quad (X_2X_3)=0, \quad (a+\beta\neq 0)$$

или

$$(X_1X_2)=X_2, \quad (X_1X_3)=X_2+X_3, \quad (X_2X_3)=0.$$

70. Рассмотрим также группу эвклидовых движений в трехмерном пространстве, которая порождается шестью бесконечно малыми преобразованиями:

$$X_1=\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2=\frac{\partial}{\partial y}; \quad X_3=\frac{\partial}{\partial z},$$

$$X_4=z\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial z}, \quad X_5=x\frac{\partial}{\partial z}-z\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_6=y\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}.$$

Мы получим вполне геодезические многообразия *второй категории* в шестимерном пространстве этой группы, если положим

для $p=2$

$$U_1=X_4, \quad U_2=X_5$$

или

$$U_1=X_2, \quad U_2=X_4+mX_1,$$

для $p=3$

$$U_1=X_3, \quad U_2=X_4, \quad U_3=X_5,$$

для $p=4$

$$U_1=X_1, \quad U_2=X_2, \quad U_3=X_4, \quad U_4=X_5,$$

для $p=5$

$$U_1=X_1, \quad U_2=X_2, \quad U_3=X_3, \quad U_4=X_4, \quad U_5=X_5.$$

Трехмерные вполне геодезические многообразия этого пространства рассматривались нами в n° 23.

71. Можно высказать и более общее утверждение, что если группа G не является разрешимой, ее групповое пространство допускает бесконечное количество двумерных вполне геодезических многообразий второй категории, полученных, исходя из любых двух бесконечно малых преобразований простой 3-параметрической подгруппы, существование которой было доказано Энгелем[1]).

В заключение этой главы заметим, что всякое вполне геодезическое многообразие пространства аффинной связности без кручения можно также рассматривать как некоторое пространство аффинной связности, причем параллельный перенос вектора, касательного к этому многообразию, производится согласно аффинной связности объемлющего пространства. Если это объемлющее пространство является групповым пространством, то параллельный перенос сохраняет его кривизну и, следовательно, *вполне геодезические многообразия группового пространства без кручения сами являются пространствами аффинной связности без кручения, кривизна которых сохраняется при параллельном переносе.*

Ниже (n° 82) мы докажем обращение этой теоремы.

---

[1]) См. Картан [1], стр. 103. [См. также Чеботарев [1], стр. 257. — *Прим. перев.*]

ГЛАВА IV

ГРУППА ГОЛОНОМИИ, ГРУППА ИЗОМОРФИИ И ГРУППА ИЗОТРОПИИ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ, СВЯЗАННОМ С ГРУППОЙ

I. ГРУППА ГОЛОНОМИИ

72. Мы уже говорили (n° **33**), что различные аффинные движения, соответствующие циклам, выходящим из данной точки пространства аффинной связности, порождают группу, *группу голономии* пространства. Линейная группа γ, показывающая, как группа голономии g преобразует между собой векторы, выходящие из этой точки, порождается аффинными вращениями, соответствующими циклам, выходящим из этой точки; эту группу можно также рассматривать как группу вращений, которым подвергаются векторы, выходящие из точки (a) при их параллельном переносе вдоль произвольного цикла с началом ( ).

В случае пространства аффинной связности без кручения, связанного с группой G, группа γ определяется очень просто. В самом деле, свяжем с каждой точкой пространства *нормальный* декартов репер (n° **61**). В процессе обхода цикла с началом (a) декартов репер, первоначально связанный с (a), не будет приходить в совпадение с реперами, связанными с промежуточными точками, но может быть получен в каждой точке (ξ) цикла из нормального репера, связанного с (ξ), с помощью преобразования присоединенной группы. Поэтому после обхода цикла аффинное вращение, которому подвергся репер, также будет преобразованием присоединенной группы [12]. Следовательно, *группа γ является присоединенной группой или одной из ее подгрупп.*

Поэтому наше пространство можно рассматривать как неголономное пространство, фундаментальной группой которого является присоединенная группа [1], и с этой точки зрения натуральные реперы, связанные с некоторой точкой, являются тем, что мы назвали нормальными реперами. Применяя эти нормальные реперы, мы находим, что геометрическое приращение

---

[1] По поводу введенных здесь понятий см. начало моего мемуара [15]. [См. также примечание *) на стр. 126. *(Прим. перев.)*]

вектора X_i при его бесконечно малом вращении, соответствующем элементарному циклу, имеет вид

$$\delta X_i = -\frac{1}{4}(X_i(UV)).$$

Все такие преобразования принадлежат к *производной группе* присоединенной группы. В самом деле, коммутатор двух бесконечно малых преобразований присоединенной группы

$$\delta_1 X_i = (X_i U)$$

$$\delta_2 X_i = (X_i V)$$

является преобразованием

$$\delta X_i = \delta_1\delta_2 X_i - \delta_2\delta_1 X_i = ((X_i V)\, U) - ((X_i U)\, V) = (X_i\,(VU)).$$

Так как производная группа присоединенной группы является ее *нормальным делителем*, группа γ совпадает с этим нормальным делителем или с одной из его подгрупп (см. Картан [15] стр. 5). Но этот последний случай невозможен, так как бесконечно малые преобразования

$$\delta X_i = -\frac{1}{4}(X_i\,(UV))$$

порождают всю производную группу [13].

Таким образом, *группа голономии пространства преобразует векторы, как производная группа присоединенной группы.*

73. Из этого результата следует, что с различными точками пространства можно связать такие декартовы реперы, что при параллельном переносе из (a) в (b) репера (R_a), связанного с точкой (a), репер, полученный в результате переноса, может быть получен из репера (R_b), связанного с (b), с помощью преобразования производной группы присоединенной группы. Если порядок производной группы ниже порядка всей присоединенной группы, то реперы первого (или второго) рода могут не удовлетворять этому условию.

74. Полное определение группы голономии может быть произведено с помощью общего метода, указанного в моем мемуаре „О многообразиях аффинной связности“ (Картан [8]).

Если мы возьмем в качестве примера группу G с конечными уравнениями

$$x' = ax + b,$$

то ее бесконечно малые преобразования имеют вид

$$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$

причем

$$(X_1X_2) = -X_2.$$

Здесь группа γ порождена преобразованием присоединенной группы, соответствующим X_2, а именно

$$\delta X_1 = (X_2X_1) = X_2; \quad \delta X_2 = (X_2X_2) = 0.$$

Если u, v — компоненты некоторого вектора, то это бесконечно малое преобразование имеет вид

$$u\frac{\partial}{\partial v}.$$

Если считать u, v декартовыми координатами точки, группой голономии здесь является группа

$$u\frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u}, \quad \frac{\partial}{\partial v}$$

или одна из ее подгрупп. Можно легко доказать, что это — группа

$$u\frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial v},$$

конечные уравнения которой имеют вид

$$u' = u, \quad v' = v + Au + B.$$

II. ГРУППА ИЗОМОРФИИ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ

75. Будем называть *группой изоморфии* пространства аффинной связности группу всех его точечных преобразований, сохраняющих его аффинную связность, т. е. переводящих любые два параллельные бесконечно близкие вектора в параллельные *).

---

*) Таким образом, группа изоморфии пространства аффинной связности — группа его аффинных изоморфизмов (n° 47). (*Прим. ред.*)

Если пространство аффинной связности — без кручения, то для того чтобы точечное преобразование пространства было изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы оно сохраняло геодезические линии и отношения отрезков на каждой геодезической линии (n° 58).

Если рассматриваемое пространство является пространством аффинной связности без кручения группы G, то все точечные преобразования, которые сохраняют равенство в первом и втором смысле, являются изоморфизмами. Но могут быть, и наверное имеются, и другие такие преобразования. В частности, преобразование

$$T_{\xi'} = T_{\xi}^{-1}$$

(симметрия относительно начала) или в более общем случае преобразование

$$T_{\xi'} = T_a T_{\xi}^{-1} T_a$$

(симметрия относительно точки (a)) являются изоморфизмами: они меняют между собой оба рода равенства.

Определение всех изоморфизмов пространства сводится к определению всех изоморфизмов, оставляющих инвариантной начальную точку; в самом деле, для получения общей группы изоморфии достаточно комбинировать эти изоморфизмы с преобразованиями

$$T_{\xi'} = T_{\xi} T_a.$$

76. Всякий изоморфизм должен сохранять кривизну; если X_i, X_j, X_k — три произвольных бесконечно малых преобразования группы G и если

$$(X_i(X_j X_k)) = \sum_h c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h} X_h, \tag{1}$$

то для преобразований $\overline{X}_i$, полученных из X_i с помощью изоморфизма, оставляющего инвариантной начальную точку, мы должны иметь также

$$(\overline{X}_i(\overline{X}_j \overline{X}_k)) = \sum_h c_{ijl}^{\cdot\cdot\cdot h} \overline{X}_h.$$

В этих формулах $\overline{X}_i$ являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами преобразований $X_1, \ldots, X_r$. Определение этих комбинаций влечет за собой полное определение изоморфизма, так как при этом каждая геодезическая линия, выходящая из начала, заменяется определенной геодезической линией, и каждый отрезок первой линии заменяется определенным отрезком второй линии.

Мы докажем, что инвариантность соотношений (1) является *достаточным* условием для того, чтобы рассматриваемое точечное преобразование было изоморфизмом.

Мы включим этот случай в более общий случай пространства аффинной связности без кручения, обладающего свойством сохранения кривизны при параллельном переносе, т. е. такого пространства, для которого ковариантная производная тензора Римана — Кристоффеля равна нулю.

III. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ПРОСТРАНСТВАХ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ, ДЛЯ КОТОРЫХ КОВАРИАНТНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ $R_{ikh|l}^{\cdot j}$ РАВНА НУЛЮ

77. Выберем в одной из точек (a_0) пространства, в котором ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, произвольный декартов репер (R_0). Свяжем с каждой точкой (a) пространства репер (R), получающийся из (R_0) с помощью параллельного переноса из (a_0) в (a) вдоль произвольного пути, выбранного, однако по определенному закону*). При таком выборе реперов компоненты $R_{i\cdot kh}^{\cdot j}$ тензора кривизны являются *постоянными* и имеют те же численные значения, что и в (a_0).

Определим теперь наиболее общие линейные подстановки, которые, преобразуя компоненты u^i вектора, оставляют инвариантными компоненты тензора кривизны. Все такие подстановки образуют группу, которая может состоять из нескольких связных семейств, одно из которых, h, является связной группой. Пусть s — порядок группы h и

$$U_\rho = \sum_{i,j} a_{\rho i}^{\cdot\cdot j} u^i \frac{\partial}{\partial u^j} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots s) \tag{2}$$

— s независимых бесконечно малых преобразований этой группы.

Свяжем с каждой точкой (a) пространства репер, получающийся из репера (R) наиболее общим преобразованием связной группы h. При таком выборе реперов, зависящем теперь, помимо начала координат, от s произвольных параметров (вто-

---

*) Например, вдоль геодезической линии, соединяющей (a) и (a_0). *(Прим. перев.)*

ричные параметры), тензор кривизны опять имеет одни и те же компоненты.

Если мы параллельно перенесем один из реперов (R), связанных с точкой (a), в бесконечно близкую точку (a'), то полученный репер может быть также получен из любого из реперов (R'), связанных с точкой (a') с помощью одного из преобразований группы h. Поэтому мы получим для компонент аффинной связности соотношение вида

$$\omega_i^{\cdot j} = \sum_{\rho} a_{\rho i}^{\cdot\cdot j} \theta^{\rho}, \tag{3}$$

где θ^{ρ} представляет собой s линейных пфаффовых форм, как по отношению к $\omega^1, \ldots, \omega^r$, так и по отношению к s вторичным параметрам; кроме того, $r+s$ форм $\omega^1, \ldots, \omega^r, \theta^1, \ldots, \theta^s$ являются линейно независимыми. Уравнения структуры пространства аффинной связности без кручения

$$(\omega^i)' = \sum_{k} [\omega^k \omega_k^{\cdot i}],$$

$$(\omega_i^{\cdot j})' = \sum_{k} [\omega_i^{\cdot k} \omega_k^{\cdot j}] - \sum_{(hl)} R_{i \cdot hl}^{\cdot j} [\omega^h \omega^l]$$

здесь принимают вид

$$(\omega^i)' = \sum_{k,\, \rho} a_{\rho k}^{\cdot\cdot i} [\omega^k \theta^{\rho}]$$

и

$$\sum_{\rho} a_{\rho i}^{\cdot\cdot j} (\theta^{\rho})' = \sum_{(\lambda\mu)} (a_{\lambda i}^{\cdot\cdot k} a_{\mu k}^{\cdot\cdot j} - a_{\mu i}^{\cdot\cdot k} a_{\lambda k}^{\cdot\cdot j}) [\theta^{\lambda} \theta^{\mu}] - \sum_{(hl)} R_{ihl}^{\cdot j} [\omega^h \omega^l]. \tag{4}$$

Обозначая структурные константы группы h через $C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\gamma}$, мы будем иметь

$$(U_{\lambda} U_{\mu}) = \sum_{i,\, j,\, k} (a_{\lambda i}^{\cdot\cdot k} a_{\mu k}^{\cdot\cdot j} - a_{\mu i}^{\cdot\cdot k} a_{\lambda k}^{\cdot\cdot j}) u^i \frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_{\rho,\, i,\, j} C_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} a_{\rho i}^{\cdot\cdot j} u^i \frac{\partial}{\partial u^j},$$

откуда

$$\sum_{k} (a_{\lambda i}^{\cdot\cdot k} a_{\mu k}^{\cdot\cdot j} - a_{\mu i}^{\cdot\cdot k} a_{\lambda k}^{\cdot\cdot j}) = \sum_{\rho} C_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} a_{\rho i}^{\cdot\cdot j}.$$

Поэтому уравнения (4) принимают вид

$$\sum_{\rho} a_{\rho i}^{\cdot\cdot j} \Big\{ (\theta^{\rho})' - \sum_{(\lambda\mu)} C_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} [\theta^{\lambda} \theta^{\mu}] \Big\} + \sum_{(hl)} R_{i \cdot hl}^{\cdot j} [\omega^h \omega'] = 0. \tag{5}$$

Эти уравнения показывают, что всякое бесконечно малое преобразование

$$\sum_{i,j} R_{i\cdot hl}^{\;j} u^i \frac{\partial}{\partial u^j}$$

принадлежит к группе h, что можно было предвидеть и *a priori*, так как это преобразование представляет собой аффинное вращение, соответствующее элементарному циклу.

Если мы положим

$$\sum_{i,\,j} R_{i\cdot hl}^{\;j} u^i \frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_{\rho} B_{hl}^{\cdot\cdot\rho}\, a_{\rho i}^{\cdot\cdot j} u^i \frac{\partial}{\partial u^j},$$

уравнения (5) дают нам

$$(\theta^\rho)' = \sum_{(\lambda\mu)} c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho} [\theta^\lambda\theta^\mu] - \sum_{(hl)} B_{hl}^{\cdot\cdot\rho} [\omega^h\omega^l].$$

Итак, мы нашли, что *формы* ω^i *и* θ^α *удовлетворяют уравнениям*

$$(\omega^i)' = \sum_{k,\rho} a_{\rho k}^{\cdot\cdot i} [\omega^k\theta^\rho],$$

$$(\theta^\alpha)' = \sum_{(\lambda\mu)} C_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha} [\theta^\lambda\theta^\mu] - \sum_{(hl)} B_{hl}^{\cdot\cdot\alpha} [\omega^h\omega^l], \tag{6}$$

где все коэффициенты $a_{\rho k}^{\cdot\cdot i}$, $C_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha}$, $B_{hl}^{\cdot\cdot\rho}$ *являются постоянными.*

78. Полученные результаты показывают, что *рассматриваемое пространство допускает группу изоморфии, зависящую от* $r+s$ *параметров*, уравнениями структуры которой являются в точности уравнения (6).

В самом деле, пусть a_i — координаты произвольной точки пространства, а b_i — вторичные параметры, определяющие выбор репера. Система уравнений

$$\omega^i(a', b';\, da') = \omega^i(a, b;\, da),$$

$$\theta^\alpha(a', b';\, da', db') = \theta^\alpha(a, b;\, da, db), \tag{7}$$

где a' и b' — неизвестные функции переменных a и b, является вполне интегрируемой, так как билинейные коварианты обеих частей каждого уравнения, как видно из (6), тождественно равны между собой в силу самих уравнений (7). Общее решение системы (7) зависит от $r+s$ произвольных постоянных; для всякого решения da'_i являются линейными комбинациями da_i, вследствие чего a'_i являются функциями только одних переменных a_i (и постоянных интегрирования). Поэтому всякое решение системы (7) дает нам точечное преобразование пространства, сопровождаемое отображением реперов, и это точечное преобразование, очевидно, является изоморфизмом, так как оно сохраняет вид уравнений (6).

Следует заметить, что сами точечные преобразования a_i в a'_i *фактически зависят от* $r+s$ *произвольных постоянных*. В самом деле, всякое решение системы (7), которое оставляло бы инвариантными все переменные a_i, являющиеся первыми интегралами уравнений $\omega^i=0$, оставляло бы также инвариантными первые интегралы уравнений

$$\sum_\rho a_{\rho k}^{\cdot\cdot i}\theta^\rho=0 \quad (i, k=1, \ldots, r),$$

получаемых приравниванием нулю частных производных от $(\omega^i)'$ по ω^i. Но эти уравнения влекут за собой $\theta^1=\theta^2=\ldots\theta^s=0$, т. е. величины b_j также должны быть инвариантными, что является абсурдом [14].

79. Полученные нами точечные преобразования образуют группу H. Связная группа изоморфизмов не может быть шире, чем H. В самом деле, если мы рассмотрим все изоморфизмы, оставляющие инвариантной точку пространства, они преобразуют векторы, выходящие из этой точки с помощью группы линейных подстановок, оставляющих инвариантными тензор кривизны, и поэтому входят в группу h. Поэтому порядок максимальной связной группы изоморфизмов не может превзойти $r+s$. Справедливость этого соображения основывается на сделанном нами выше (n°76) замечании о том, что определение линейной подстановки, которой подвергаются векторы, выходящие из некоторой точки, влечет за собой полное определение соответственного изоморфизма.

80. Дадим другое доказательство этой теоремы, имеющее то преимущество, что здесь будет показано, что всегда существует изоморфизм, оставляющий инвариантной произвольную точку и преобразующий векторы, выходящие из этой точки, с помощью произвольной линейной подстановки, которая оставляет инвариантными компоненты тензора кривизны, *независимо от того, входит ли эта линейная подстановка в связную группу* h *или нет.*

Пусть

$$\overline{u}^i = \sum_k a_k^{\cdot i} u^k \tag{8}$$

— подстановка (с постоянными коэффициентами), оставляющая инвариантными компоненты тензора кривизны. Она оставляет также инвариантной связную группу h, связанную инвариантным способом с этими компонентами. Предположим, что бесконечно малое преобразование U_α группы h заменяется при этом на $\sum\limits_\rho b_\alpha^{\cdot\rho} U_\rho$. Тогда

$$\sum_{i,j} a_{\alpha i}^{\cdot\cdot j} u^i \frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_{\rho, i, j} b_\alpha^{\cdot\rho} a_{\rho i}^{\cdot\cdot j} \overline{u}^i \frac{\partial}{\partial \overline{u}^j}.$$

Но так как

$$\frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_k a_j^{\cdot k} \frac{\partial}{\partial \overline{u}^k},$$

мы будем иметь

$$\sum a_k^{\cdot j} a_{\rho i}^{\cdot\cdot k} = \sum_{\sigma, k} b_\rho^{\cdot\sigma} a_i^{\cdot k} a_{\sigma k}^{\cdot\cdot j}. \tag{9}$$

Положим

$$\overline{\omega}^i = \sum_k a_k^{\cdot i} \omega^k, \quad \overline{\varpi}^\alpha = \sum_\rho b_\rho^{\cdot\alpha} \varpi^\rho, \tag{10}$$

$$\overline{\omega}_i^{\cdot j} = \sum_\rho a_{\rho_i}^{\cdot\cdot j} \overline{\varpi}^\rho. \tag{11}$$

Тогда, в силу (9), получим

$$\sum_k a_i^{\cdot k} \overline{\omega}_k^{\cdot j} = \sum_k a_k^{\cdot j} \omega_i^{\cdot k}. \tag{12}$$

Из (10) и (12) непосредственно следует

$$(\overline{\omega}^i)' = \sum_k [\overline{\omega}^k \overline{\omega}_k^{\cdot i}] \tag{13}$$

и далее из (12) следует

$$\sum_l a_i^{\cdot k} \left\{ (\overline{\omega}_k^{\cdot j})' - \sum_h [\overline{\omega}_k^{\cdot h} \overline{\omega}_k^{\cdot j}] \right\} = \sum_k a_k^{\cdot i} \left\{ (\omega_l^{\cdot k})' - \right.$$
$$\left. - \sum_h [\omega_i^{\cdot h} \omega_h^{\cdot k}] \right\} = - \sum_{k, (hl)} a_k^{\cdot j} R_{i\cdot hl}^{\cdot k} [\omega^h \omega^l]. \tag{14}$$

С другой стороны, так как подстановка (8) оставляет инвариантными компоненты тензора кривизны, мы имеем

$$\sum_k a_k^{\cdot j} R_{i\cdot hl}^{\cdot k} = \sum_{\lambda, \mu, \nu} a_i^{\cdot\lambda} a_h^{\cdot\mu} a_i^{\cdot\nu} R_{\lambda\cdot\mu\nu}^{\cdot j}$$

или

$$\sum_{k,(hl)} a_k^{\cdot j} R_{i\cdot hl}^{\ k}[\omega^h\omega^l] = \sum_{k,(hl)} a_i^{\cdot k} R_{khl}^{\cdot j}\,[\overline{\omega}^h\,\overline{\omega}^l].$$

Отсюда, сравнивая с (14), получаем

$$(\overline{\omega}_i^{\cdot j})' - \sum_k [\overline{\omega}_i^{\cdot k}\overline{\omega}_k^{\cdot j}] = -\sum_{(hl)} R_{i\cdot hl}^{\ j}\,[\overline{\omega}^h\overline{\omega}^l]. \tag{15}$$

Таким образом, формы $\overline{\omega}^i$ и $\overline{\omega}_i^{\cdot j}$, заданные с помощью (10) и (11), удовлетворяют тем же самым соотношениям, что и формы ω^i и $\omega_i^{\cdot j}$, а именно

$$\left.\begin{aligned} (\overline{\omega}^i)' &= \sum_h [\overline{\omega}^h\overline{\omega}_h^{\cdot i}], \\ (\overline{\omega}_i^{\cdot j})' &= \sum_k [\overline{\omega}_i^{\cdot k}\overline{\omega}_k^{\cdot j}] - \sum_{(hl)} R_{i\cdot hl}^{\ j}\,[\overline{\omega}^h\overline{\omega}^l]. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Положим теперь

$$\begin{aligned} \overline{\omega}^i &= \omega^i(a',\ b';\ da'), \\ \overline{\theta}^\alpha &= \theta^\alpha(a',\ b';\ da',\ db'), \\ \overline{\omega}_i^{\cdot j} &= \sum_\rho a_{\rho i}^{\cdot\cdot j}\theta^\rho(a',\ b',\ da',\ db'). \end{aligned}$$

Тогда уравнения в полных дифференциалах

$$\overline{\omega}^i = \sum_k a_k^{\cdot i}\omega^k, \quad \sum_k a_i^{\cdot k}\overline{\omega}_k^{\cdot j} = \sum a_k^{\cdot j}\omega_i^{\cdot k}, \tag{17}$$

которые, вследствие (3) *и* (11), *фактически сводятся к* $r+s$ *уравнениям*

$$\overline{\omega}^i = \sum_k a_k^{\cdot i}\omega^k, \quad \overline{\theta}^\alpha = \sum_\rho b_\rho^{\cdot\alpha}\theta^\rho \tag{18}$$

являются вполне интегрируемыми, так как выражения $\overline{\omega}^i$ и $\overline{\omega}_i^{\cdot j}$, построенные с помощью a', b', da' и db', с одной стороны, и линейные комбинации форм ω^i и $\omega_i^{\cdot j}$, с помощью которых они выражаются, с другой стороны, удовлетворяют одним и тем же соотношениям (16).

Интегрирование системы (17) или эквивалентной ей системы (18) дает общее решение, зависящее от $r+s$ произвольных постоянных. Каждое из этих решений, очевидно, дает изоморфизм пространства в силу (16). Мы можем выбрать постоянные интегрирования таким образом, чтобы данная точка пространства осталась при этом изоморфизме неподвижной (при этом остается еще s произвольных постоянных). Формулы (17) показывают, что при этих ∞^s изоморфизмах векторы, выходящие из точки (a), подвергаются заданной линейной подстановке [15].

81. Среди уравнений вида (8) всегда имеются уравнения частного вида

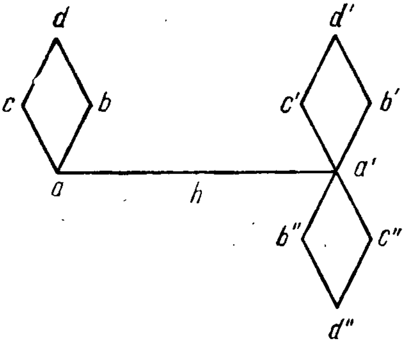
$$\overline{u^i} = -u^i \text{ или } \overline{\omega^i} = -\omega^i,$$

откуда следует

$$\overline{\theta^\alpha} = \theta^\alpha.$$

Непосредственно видно, что эти соотношения сохраняют уравнения структуры (6). Они дают в виде частного случая изоморфизма симметрию относительно произвольной точки пространства. Мы получим, таким образом, следующую важную теорему:

Если пространство аффинной связности без кручения обладает тем свойством, что параллельный перенос сохраняет его кривизну, то симметрия относительно произвольной точки этого пространства является изоморфизмом.



Черт. 3.

Симметрия относительно точки (a) является точечным преобразованием, которое ставит в соответствие произвольной точке (ξ) такую точку (ξ'), которая расположена на той же геодезической линии, что и (a) и (ξ), и отрезки геодезической линии $\xi'a$ и $a\xi$ равны.

Эта теорема допускает обращение. В самом деле, предположим, что симметрии относительно различных точек пространства являются изоморфизмами. Перенесем параллельно элементарный параллелограмм $abdc$ из точки (a) в бесконечно близкую точку (a') и рассмотрим образ полученного параллелограмма при симметрии относительно (a') — параллелограмм $a'b''d''c''$ (см. черт. 3). В силу конструкции n°59, параллелограмм $a'b''d''c''$ может быть получен с точностью до бесконечно малых третьего порядка из параллелограмма $abdc$ с помощью симметрии относительно середины (k) дуги геодезической линии aa'. Но симметрия является изоморфизмом, вследствие чего кривизна площадки $abdc$ равна кривизне площадки $a'b''d''c''$, а эта последняя равна кривизне площадки $a'b'd'c'$, что и требовалось доказать.

*Таким образом, пространства аффинной связности без кручения, у которых ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, характеризуются тем свойством, что симметрия относительно произвольной точки пространства оставляет инвариантной аффинную связность**).

82. Укажем другое замечательное свойство этих пространств. Уравнения (6) являются уравнениями структуры группы H. Они играют по отношению к этой группе роль уравнений (12) или (16) главы II: это определяющие уравнения группы H, рассматриваемой, например, как ее первая параметрическая группа [16]. Постоянные коэффициенты, фигурирующие в правой части уравнений (6), являются структурными константами этой группы. Если положить для симметричности обозначений

$$\theta^{\alpha} = \omega^{r+\alpha} \qquad (a = 1, 2, \ldots, s)$$

и обозначить через X_i и $X_{r+\alpha}$ бесконечно малые преобразования второй параметрической группы группы H, то мы получим

$$\left.\begin{aligned} (X_i X_j) &= -\sum_{\rho} B_{ij}^{\cdot\cdot\rho} \quad {}_{r+\rho}, \\ (X_i X_{r+\alpha}) &= \sum a^{\cdot}_{\alpha l}\ X_k, \\ (X_{r+\alpha} X_{r+\beta}) &= \sum_{\rho} C_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\rho} X_{r+\rho}. \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Рассмотрим теперь пространство аффинной связности без кручения группы H. Так как бесконечно малые преобразова-

---

*) Это характеристическое свойство рассматриваемых пространств аффинной связности является причиной того, что в литературе на эти пространства переносится то название, которое Картан дал частному типу этих пространств — римановым пространствам, обладающим этим свойством, и рассматриваемые пространства аффинной связности в настоящее время часто называют *симметрическими пространствами аффинной связности. (Прим. перев.)*

ния $X_1, \ldots, X_r$ удовлетворяют тому условию, что преобразования

$$((X_i X_j) X_k) \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, r)$$

зависят только от $X_1, \ldots, X_r$, то из результатов n°68 следует существование в этом $(r+s)$-мерном пространстве вполне геодезических r-мерных многообразий V_r. Эти многообразия также обладают аффинной связностью без кручения. Докажем, что эти многообразия совпадают с нашим исходным r-мерным пространством.

В самом деле, для того чтобы получить многообразие V_r, отнесем каждой точке пространства группы H нормальный репер наиболее общего вида, для чего достаточно положить

$$\omega_i^{\cdot j} = \sum_\rho a_{\rho i}^{\cdot\cdot j} \chi^{r+\rho},$$

$$\omega_i^{\cdot r+\alpha} = -\sum_k B_{ik}^{\cdot\cdot\alpha} \chi^k,$$

$$\omega_{r+\alpha}^{\cdot\ i} = -\sum_k a_{\alpha k}^{\cdot\cdot i} \chi^k,$$

$$\omega_{r+\alpha}^{\cdot\ r+\beta} = \sum_\rho C_{\alpha\rho}^{\cdot\cdot\beta} \chi^{r+\rho}.$$

Здесь χ представляет собой $r+s$ пфаффовых форм, линейно независимых между собой и независимых от ω^i [17]. Каждое из рассматриваемых многообразий V_r может быть получено, если мы положим

$$\omega^{r+\alpha} = 0, \ \omega_i^{\cdot r+\alpha} = 0 \qquad (i = 1, \ldots r; \ a = 1, \ldots s).$$

Тогда для определения аффинной связности в многообразии V_r у нас останутся:

1°. Формы $\omega^1, \omega^2, \ldots \omega^r$, которые мы, во избежание недоразумений, будем записывать в виде $\overline{\omega}^i$,

2°. Формы $\overline{\omega}_i^{\cdot j} = \sum\limits_\rho a_{\rho i}^{\cdot\cdot j} \chi^{r+\rho}$.

С другой стороны, тензор кривизны здесь будет иметь вид (n°60, формула (7))

$$\overline{R}_{i\cdot kh}^{\cdot j} = \frac{1}{4} \sum_\rho \overline{C}_{kh}^{\cdot\cdot\rho} \overline{C}_{\rho i}^{\cdot\cdot j} = \frac{1}{4} \sum_\rho B_{kh}^{\cdot\cdot\rho} a_{\rho i}^{\cdot\cdot j}.$$

Следовательно, мы получим [18]

$$\sum_{\rho} a_{\rho i}^{\cdot\cdot j}\left\{(\chi^{r+\rho})' - \sum_{(\lambda\mu)} C_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}\,[\chi^{r+\lambda}\chi^{r+\mu}]\right\} = \\ = -\frac{1}{4}\sum_{\rho} a_{\rho i}^{\cdot\cdot j}\sum_{(kh)} B_{kh}^{\cdot\cdot\rho}[\bar{\omega}^k\bar{\omega}^h]$$

или

$$(\chi^{r+\rho})' = \sum_{(\lambda\mu)} C_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\rho}\,[\chi^{r+\lambda}\chi^{r+\mu}] - \frac{1}{4}\sum_{(kh)} B_{kh}^{\cdot\cdot\rho}[\bar{\omega}^k\bar{\omega}^h].$$

Поэтому в конечном счете уравнения структуры каждого из вполне геодезических многообразий V_r имеют вид

$$(\bar{\omega}^i)' = \sum_{\rho,k} a_{\rho k}^{\cdot\cdot i}[\bar{\omega}^k\chi^{k+\rho}],$$

$$(\chi^{r+\alpha})' = \sum_{(\lambda\mu)} C_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha}\,[\chi^{r+\lambda}\chi^{r+\mu}] - \frac{1}{4}\sum_{(kh)} B_{kh}^{\cdot\cdot\alpha}\,[\bar{\omega}^k\bar{\omega}^h]. \qquad (20)$$

Если мы сравним эти уравнения с уравнениями структуры (6) нашего исходного r-мерного пространства, мы увидим, что они имеют совершенно одинаковый вид и разница между ними состоит только в том, что перед коэффициентами $B_{kh}^{\cdot\cdot\alpha}$ здесь появился численный множитель $\frac{1}{4}$. Но если мы заменим в многообразии V_r каждый репер репером из удвоенных векторов, то получим уже в точности уравнения (6). Поэтому многообразие V_r и рассматриваемое пространство *изоморфны* (между ними можно установить точечное соответствие, сохраняющее аффинную связность). Для того чтобы фактически осуществить этот изоморфизм, надо проинтегрировать вполне интегрируемые уравнения Пфаффа

$$\bar{\omega}^i = 2\omega^i; \qquad \chi^{r+\alpha} = \theta^\alpha.$$

Мы пришли к следующему выводу, являющемуся обращением теоремы n°71:

Всякое пространство аффинной связности без кручения, у которого ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, может быть осуществлено в виде вполне геодезической поверхности в пространстве без кручения своей группы изоморфии.

83. Рассуждения n°80 показывают, что максимальная подгруппа группы изоморфии H, оставляющая инвариантной данную точку пространства, преобразует векторы, выходящие из этой точки с помощью группы h или с помощью некоторой группы, в общем случае несвязной, для которой группа h является связной частью и которая образована из всех линейных подстановок, оставляющих инвариантными компоненты тензора кривизны.

Эту линейную группу следует назвать группой *изотропии пространства;* в самом деле, эта группа указывает степень изотропности пространства вокруг рассматриваемой точки при всех возможных преобразованиях, которым можно подвергать направления, выходящие из этой точки, без изменения структуры пространства.

IV. ГРУППА ИЗОМОРФИИ И ГРУППА ИЗОТРОПИИ ГРУППОВОГО ПРОСТРАНСТВА

84. В случае, когда рассматриваемое пространство аффинной связности без кручения является групповым пространством группы G, его группа изотропии, как мы видели (n° 76), определяется совокупностью линейных подстановок, оставляющих инвариантными соотношения вида

$$(X_i\,(X_j X_k)) = \sum_h c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h} X_h\,. \tag{21}$$

Отсюда, как мы видели в разделе III, может быть непосредственно получена и группа изоморфии.

Таким образом, структура пространства без кручения группы G по существу характеризуется константами $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h}$ в том смысле, что *если для двух групп G и G' одного и того же порядка можно выбрать базисные бесконечно малые преобразования так, чтобы их константы $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h}$ совпадали, то групповые пространства без кручения этих групп изоморфны.* Это непосредственно следует из того, что уравнения структуры (6) этих двух пространств можно будет сделать совпадающими, так как структурные константы групп h, $a_{\rho i}^{\cdot\cdot j}$ и $c_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha}$ здесь в точности совпадают, так же как и $B_{kh}^{\cdot\cdot\alpha}$, получающиеся одинаковым способом из $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h}$ [19].

Мы получим, таким образом, новый вид изоморфизма, который можно назвать *аффинным изоморфизмом* и который не следует смешивать с классическим изоморфизмом. Для того чтобы показать это, достаточно привести один простой пример. Константы $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h}$ все равны нулю, если равны нулю константы $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$, но это условие не является необходимым: для группы G порядка 3, определяемой соотношениями

$$(X_1X_2)=X_3, \quad (X_2X_3)=0, \quad (X_3X_1)=0,$$

константы $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h}$, очевидно, также равны нулю. Пространство без кручения этой группы является также пространством без кривизны.

В общем случае аффинный изоморфизм двух групп G и G' имеет место в том случае, если их *группы изоморфии* H и H' изоморфны в обычном смысле слова.

85. Разберем несколько примеров. Рассматривавшаяся нами ранее группа G

$$x'=ax+b$$

определяется двумя бесконечно малыми преобразованиями

$$X_1=x\frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2=\frac{\partial}{\partial x}, \quad (X_1X_2)=-X_2.$$

Соотношения (21) здесь имеют вид

$$(X_1(X_1X_2))=X_2, \quad (X_2(X_1X_2))=0.$$

Положим

$$X_1=\alpha\overline{X}_1+\beta\overline{X}_2,$$
$$X_2=\alpha'\overline{X}_1+\beta'\overline{X}_2,$$

откуда найдем

$$\alpha'=0, \quad (\alpha)^2=1,$$

т. е. группа изотропии несвязна и состоит из двух связных семейств. То из них, которое соответствует случаю $\alpha=1$, дает нам связную группу изотропии

$$\bar{u}^1=u^1, \quad \bar{u}^2=\beta u^1+\beta' u^2,$$

порождаемую бесконечно малыми преобразованиями

$$U_1=u^1\frac{\partial}{\partial u^2}, \quad U_2=u^2\frac{\partial}{\partial u^2}.$$

Эта группа совпадает с присоединенной группой группы G. Поэтому групповое пространство группы G допускает связную группу H изоморфии, зависящую от 4 параметров, к которой следует прибавить изоморфизмы, полученные комбинацией преобразований группы H с симметрией.

86. Пусть группа G определяется уравнениями

$$(X_1X_2)=0, \quad (X_1X_3)=\alpha X_1, \quad (X_2X_3)=\beta X_2 \quad (\alpha\beta\neq 0).$$

Здесь единственные уравнения (21), правые части которых не равны нулю, имеют вид

$$(X_3(X_1X_3))=-\alpha^2X_1,$$
$$(X_3(X_2X_3))=-\beta^2X_2.$$

Для группы изотропии мы получаем линейные подстановки

$$X_1=A\overline{X}_1, \quad X_2=B\overline{X}_2, \quad X_3=C\overline{X}_1+D\overline{X}_2\pm\overline{X}_3.$$

Кроме того, при $\alpha^2=\beta^2$ мы находим

$$X_1=A\overline{X}_1+A'\overline{X}_2,$$
$$X_2=B'\overline{X}_1+B\overline{X}_2,$$
$$X_3=C\overline{X}_1+D\overline{X}_2\pm\overline{X}_3.$$

И, наконец, если $\alpha^2=-\beta^2$ (переходя здесь в комплексную область), мы получаем четыре связных семейства, из которых два семейства те же, что и в общем случае, и, кроме того,

$$X_1=A\overline{X}_2, \quad X_2=B\overline{X}_2, \quad X_3=C\overline{X}_1+D\overline{X}_2\pm i\overline{X}_3.$$

Таким образом, в общем случае группа изотропии здесь имеет порядок 4 (и следовательно, она шире, чем присоединенная группа), а в случае $\alpha^2=\beta^2$ группа изотропии имеет порядок 6: в этом последнем случае группа изоморфии зависит от 9 параметров.

Точно так же обстоит дело для группы эвклидовых движений плоскости.

87. Вернемся к общему случаю. Группа изотропии, очевидно, оставляет инвариантной квадратичную форму $\varphi(e)$ (n° 65) — сумму квадратов корней характеристического уравнения группы, определяемую свернутым тензором кривизны. Поэтому в том случае, когда группа G полупроста, группа изотропии является ортогональной*), что можно видеть и *a priori*, так как групповое пространство здесь является римановым пространством.

Можно заметить, что группа изотропии оставляет инвариантными и сами квадраты корней характеристического уравнения группы G. В самом деле, пусть Y — произвольное бесконечно малое преобразование группы G и X — такое преобразование, что

$$(YX) = \lambda X.$$

Отсюда следует, что

$$(Y(YX)) = \lambda^2 X.$$

Но это уравнение является одним из уравнений (21), и, следовательно, λ^2 будет квадратом корня характеристического уравнения преобразования $\overline{Y}$ полученного из Y с помощью одного из преобразований группы изотропии.

Если группа G полупроста, можно доказать с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые я применял в одной из моих недавних работ[1]), что связная группа изотропии в этом случае совпадает с присоединенной группой. Что же касается несвязной группы изотропии, то она может быть получена комбинацией преобразований

$$\overline{X}_i = -X_i$$

(симметрия относительно рассматриваемой точки) с наиболее общей линейной группой, оставляющей инвариантными соотношения структуры

$$(X_i X_j) = \sum_k c_{ij}^{\cdot\cdot k} X_k.$$

Поэтому эта группа может состоять в случае, когда группа G проста, из 2, 4 или 12 связных семейств. Группа изоморфии здесь зависит от $2r$ параметров и также состоит, если группа G проста, из 2, 4 или 12 связных семейств преобразований.

---

*) Ортогональной группой Картан называет любую группу, состоящую из матриц, оставляющих инвариантной невырожденную квадратичную форму. Эти матрицы являются ортогональными в обычном смысле этого слова, если эта форма является знакоопределенной и приведена к сумме квадратов. *(Прим. перев.)*

[1]) Картан [13].

Связная группа изоморфии H здесь разлагается на два нормальных делителя, изоморфных самой группе G. Эти нормальные делители являются группами сдвигов первого и второго рода.

88. Таким образом, мы связали с пространством аффинной связности без кручения группы G три различные группы:

1°. Группу изоморфии H,

2°. Группу изотропии h,

3°. Группу голономии g.

Группа изотропии является линейной и содержит присоединенную группу в качестве подгруппы (в случае, когда она не совпадает с ней). Группа голономии, или, вернее, та линейная группа γ, которая показывает, как эта группа преобразует векторы, является, вообще говоря, подгруппой присоединенной группы (и именно ее производной группой). И, наконец, как легко видеть, группа γ является нормальным делителем группы h.

В том случае, когда данная группа G полупроста, связная группа изотропии и связная группа голономии (рассматриваемой как группа преобразования векторов) совпадают с присоединенной группой Ли.

Отсюда непосредственно следует, что пространство аффинной связности без кручения группы G может быть изоморфно аналогичному пространству полупростой группы G' только тогда, когда сами группы G и G' изоморфны.

V. ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ТОГО, ЧТО ПРОСТРАНСТВО АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ ЯВЛЯЕТСЯ ГРУППОВЫМ ПРОСТРАНСТВОМ, СДВИГИ И АБСОЛЮТНОЕ РАВЕНСТВО

Для того чтобы пространство аффинной связности без кручения было групповым пространством, необходимо, чтобы ковариантная производная тензора кривизны была равна нулю, но это условие не является достаточным.

89. Перейдем к несколько другой точке зрения. Условимся называть *бесконечно малым сдвигом* в пространстве аффинной связности без кручения такое изоморфное точечное преобразование, траекториями которого являются геодезические линии пространства[1]). В групповом пространстве преобразования

$$T_{\xi'} = T_\xi T_a$$

или

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi ,$$

где T_a обозначает некоторое бесконечно малое преобразование группы, очевидно, являются такими бесконечно малыми сдвигами (мы рассматривали эти преобразования под названием *сдвигов* в n°16). Бесконечно малые сдвиги, например первого рода образуют просто транзитивную подгруппу группы изоморфии пространства. Мы пришли, таким образом, к следующей теореме:

Для того чтобы пространство аффинной связности без кручения было групповым пространством, необходимо, чтобы его группа изоморфии допускала просто-транзитивную подгруппу сдвигов.

Верно и обратное.

В самом деле пусть группа G является такой группой сдвигов. Выберем в пространстве начальную точку (O), совершенно произвольную, и будем считать за координаты любой точки параметры того преобразования группы G, которое переводит точку (O) в данную точку. Рассмотрим 1-параметрическую подгруппу группы G. Эта подгруппа порождается некоторым бесконечно малым преобразованием. Если подвижная точка (u) получена из (O) с помощью преобразований этой подгруппы, то точка (ξ), полученная из (a) с помощью тех же преобразований, задается с помощью соотношения

$$T_\xi = T_u T_a,$$

и так как геометрическое место (ξ) является траекторией бесконечно малого сдвига, оно является геодезической линией данного пространства. Таким образом, геодезические линии пространства совпадают с геодезическими линиями группового пространства группы G, и, кроме того, легко видеть, что отношения двух отрезков геодезической линии здесь также

---

[1] Таким образом, выражение *бесконечно малый сдвиг* здесь имеет более широкое значение, чем в n°47. В случае риманова пространства мы получаем, таким образом, бесконечно малые сдвиги в обычном смысле, т. е. движения, при которых различные точки пространства описывают равные бесконечно малые пути.

совпадают, рассматриваем ли мы данное пространство как групповое пространство группы G или мы рассматриваем его как заданное *a priori* пространство аффинной связности без кручения. В самом деле, в обоих случаях одно и то же бесконечно малое преобразование, осуществленное два раза подряд, приводит к тому, что точка описывает последовательно два равных отрезка одной и той же геодезической линии [20].

Это доказательство показывает, кроме того, что разыскание групп G, для которых некоторое пространство аффинной связности без кручения может служить групповым пространством, сводится к разысканию просто-транзитивных подгрупп сдвигов группы изоморфии этого пространства.

90. Рассмотрим в качестве примера обычное r-мерное аффинное пространство. Если обозначать декартовы координаты точек через $x^1, x^2, \ldots, x^r$, то всякое бесконечно малое преобразование группы изоморфии этого пространства (являющейся здесь полной аффинной группой) имеет вид

$$\frac{\delta x^i}{\delta t} = \sum_k a_k^{\cdot i} x^k + a^i.$$

Для того чтобы это преобразование было бесконечно малым сдвигом в смысле n°89, необходимо, чтобы подвижная точка, скорость которой равна $\frac{\delta x^i}{\delta t}$, сохраняла бы значение этой скорости постоянным, т. е. чтобы имело место

$$\sum_k a_k^{\cdot i}\left(\sum_h a_h^{\cdot k} x^h + a^k\right) = 0,$$

откуда

$$\sum_k a_h^{\cdot k} a_k^{\cdot i} = 0, \qquad \sum_k a^k a_k^{\cdot i} = 0.$$

Таким образом, произведение двух матриц

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \ldots & a^r \\ a_1^{\cdot 1} & a_1^{\cdot 2} & \ldots & a_1^{\cdot r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_r^{\cdot 1} & a_r^{\cdot 2} & & a_r^{\cdot r} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1^{\cdot 1} & a_1^{\cdot 2} & \ldots & a_1^{\cdot r} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_r^{\cdot 1} & a_r^{\cdot 2} & & a_r^{\cdot r} \end{pmatrix}$$

должно быть равно нулю. Мы получим обычный сдвиг в элементарном смысле этого слова в том случае, когда вторая из этих матриц сама равна нулю.

Для того чтобы получить просто-транзитивную группу сдвигов в обобщенном смысле этого слова, следует исходить от r-параметрической группы G, для которой все коэффициенты $c_{ijk}^{\cdot\cdot l}$ равны нулю. Если $X_1, \ldots, X_h$ — преобразования производной группы такой группы, то коммутаторы

$$(X_i X_j) \quad (i=1, 2, \ldots, h;\ j=1, 2, \ldots, r)$$

все равны нулю, а коммутаторы

$$(X_{h+i} X_{h+j}) \quad (i, j=1, \ldots, r-h)$$

являются произвольными независимыми линейными комбинациями преобразований $X_1, \ldots, X_h$:

$$(X_{h+i} X_{h+j}) = \sum_k c_{h+i,\, h+j}^{\cdot\ \cdot\ k} X_k.$$

В качестве примера можно взять

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad X_{h+i} = \frac{\partial}{\partial x^{h+i}} - \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{h+i,\, h+j}^{\cdot\ \cdot\ k} x^{h+j} \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

Эти преобразования порождают группу сдвигов r-мерного аффинного пространства, и эта группа с точностью до замены переменных является наиболее общей такого вида.

91. Разыскание просто-транзитивной группы изоморфных сдвигов пространства аффинной связности без кручения по существу сводится к разысканию абсолютного равенства, которое в этом пространстве можно определить следующим образом:

1°. Для этого равенства справедливы свойства 1° — 7° n°2.

2°. Два равных отрезка одной и той же геодезической линии пространства равны и в смысле этого равенства.

Будем считать два бесконечно малых вектора равными, если их можно рассматривать как пути, описанные двумя точками при одном и том же бесконечно малом сдвиге группы.

Если данное пространство является пространством аффинной связности без кручения простой группы G, то мы покажем, что не существует других видов абсолютного равенства, удовлетворяющего поставленным условиям, кроме тех двух видов равенства — в первом и во втором смысле, которые мы определили в группе в гл. I.

В самом деле, в этом случае связная группа изоморфии пространства определяется соотношением

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi T_b^{-1}, \tag{22}$$

так как подгруппа группы H, оставляющей инвариантной начальную точку, является присоединенной группой и вся группа H может быть получена комбинацией этой подгруппы со сдвигами первого (или второго) рода.

Предположим теперь, что соотношения (22) определяют просто-транзитивную группу G' сдвигов пространства. Мы знаем, (n° 88), что поскольку наше пространство может быть рассмотрено как групповое пространство G', то группы G и G' изоморфны. Но преобразования T_a, входящие в формулы (22), очевидно, образуют группу, изоморфную или гомоморфную группе G'. Так как группа G' проста, T_a может быть произвольным преобразованием группы G, если только T_a не является всегда тождественным преобразованием.

Если T_a — тождественное преобразование, G' является группой сдвига первого рода, и мы получаем один из двух классических видов равенства. То же имеет место и в случае, если T_b постоянно сводится к тождественному преобразованию. Нам остается рассмотреть случай, когда T_a может быть произвольным преобразованием группы G, и то же самое имеет место и для T_b. Но если группа G' зависит только от r параметров, необходимо, чтобы каждое преобразование T_a соответствовало определенному преобразованию T_b. Более того, последовательное выполнение двух преобразований (22)

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi T_b^{-1}, \quad T_{\xi'} = T_{a'} T_\xi T_{b'}^{-1}$$

должно дать нам преобразование вида

$$T_{\xi'} = T_{a''} T_\xi T_{b''}^{-1},$$

откуда следует, что соотношение

$$T_{a'} T_a = T_{a''}$$

влечет за собой соотношение

$$T_{b'} T_b = T_{b''}.$$

Иначе говоря, соотношение, которое следует установить между преобразованиями T_a и T_b, должно быть ***автоморфизмом*** группы G. А так как тождественному преобразованию соответствует, очевидно, тождественное же преобразование, то нам будет достаточно определить это соответствие между бесконечно малыми преобразованиями.

Воспользуемся каноническими параметрами С. Ли и предположим, что T_a порождает 1-параметрическую подгруппу, определенную с помощью соотношений

$$a^i = t\alpha^i \quad (\alpha^i = \text{const}),$$

что T_b порождает другую 1-параметрическую подгруппу, определенную с помощью соотношений

$$b^i = t\beta^i \quad (\beta^i = \text{const}),$$

и что имеется 1-параметрическая группа сдвигов

$$T_{\xi'} = T_{t\alpha} T_{\xi} T_{-t\beta}.$$

В частности, всякая точка (ξ_0) будет описывать геодезическую линию, и поэтому мы будем иметь

$$T_{t\alpha} T_{\xi_0} T_{-t\beta} = T_{t\gamma} T_{\xi_0},$$

где γ^i — надлежащим образом выбранные константы. Это равенство может быть записано в виде

$$T_{t\alpha} (T_{\xi_0} T_{-t\beta} T_{\xi_0}^{-1}) = T_{t\gamma}.$$

Но преобразование $T_{\xi_0} T_{-t\beta} T_{\xi_0}^{-1}$ может быть записано в виде $T_{-t\overline{\beta}}$, если обозначить через $\sum_i \overline{\beta}^i X_i$ бесконечно малое преобразование, полученное из $\sum_i \beta^i X_i$ с помощью преобразования T_{ξ_0}. Таким образом,

$$T_{t\alpha} T_{-t\overline{\beta}} = T_{t\gamma},$$

откуда

$$\gamma^i = \alpha^i - \overline{\beta}^i.$$

Будем теперь исходить из точки $T_{t_0\gamma} T_{\xi_0}$. То же преобразование даст нам

$$T_{t\alpha} T_{t_0\gamma} T_{\xi_0} T_{-t\beta} = T_{(t+t_0)\gamma} T_{\xi_0},$$

откуда, умножая справа на $T_{\xi_0}^{-1}$, получим

$$T_{t\alpha}T_{t_0\gamma}T_{-i\bar{\beta}}=T_{(t+t_0)\gamma}=T_{t_0\gamma}T_{t\gamma}=T_{t_0\gamma}T_{t\alpha}T_{-t\bar{\beta}}$$

и, в конечном счете,

$$T_{t\alpha}T_{t_0\gamma}=T_{t_0\gamma}T_{t\alpha}.$$

Это последнее соотношение показывает, что оба бесконечно малых преобразования с параметрами α^i и γ^i перестановочны между собой. *Поэтому то же имеет место и для бесконечно малых преобразований с параметрами α^i и $\bar{\beta}^i$.*

Иначе говоря, *всякое бесконечно малое преобразование группы перестановочно как с соответствующим ему бесконечно малым преобразованием, так и со всеми преобразованиями, преобразованными из него с помощью преобразований присоединенной группы.*

Отсюда уже легко извлечь окончательный вывод. Будем исходить от *общего* бесконечно малого преобразования Y группы. Пусть $\bar{Y}$ будет соответствующим ему преобразованием. Так как оно перестановочно с первым, оно входит в коммутативную подгруппу порядка l (l — ранг группы), к которой принадлежит и Y[1]. Пусть теперь U — произвольнсе преобразование группы. Тогда преобразование $\bar{Y}$ должно быть перестановочно с преобразованием, преобразованным из Y с помощью U, т. е. должно иметь место

$$((UY)\bar{Y})=0.$$

Возьмем в качестве U все преобразования U_i, принадлежащие различным корням λ_i характеристического уравнения преобразования Y. Тогда должно быть

$$\lambda_i(U_i\bar{Y})=0 \quad \text{или} \quad (U_i\bar{Y})=0.$$

Так как благодаря этому преобразование $\bar{Y}$ является перестановочным со *всеми* преобразованиями группы, оно должно быть тождественным, что является абсурдом. Мы пришли, таким образом, к невозможности рассматриваемого случая, что и требовалось доказать.

---

[1] Картан [1], стр. 55 (теорема V). [См. также Чеботарев [1], стр. 244. (*Прим. перев.*)]

92. Если группа G — полупроста и состоит, например, из двух простых групп с преобразованиями S_a и Σ_α, аналогичным образом доказывается существование четырех видов равенства, соответствующих четырем просто-транзитивным группам сдвигов, а именно:

$$T_{\xi'} = T_\xi S_a \Sigma_\alpha,$$
$$T_{\xi'} = S_a T_\xi \Sigma_\alpha,$$
$$T_{\xi'} = \Sigma_\alpha T_\xi S_a,$$
$$T_{\xi'} = S_a \Sigma_\alpha T_\xi.$$

Первый и последний виды равенства являются классическими.

Точно так же пространство полупростой группы, разлагающейся на k простых групп, допускает 2^k видов абсолютного равенства, удовлетворяющих поставленным выше условиям.

93. Можно поставить и другой вопрос. Представим себе, что в пространстве аффинной связности без кручения существует совокупность r независимых бесконечно малых сдвигов, не порождающих группы. Тогда можно рассмотреть некоторое абсолютное равенство, такое что

1°. Для этого равенства справедливы свойства 1° — 6° n° **2.**

2°. Два равных отрезка произвольной геодезической линии пространства равны и в смысле этого равенства.

Для этого достаточно считать два бесконечно малых вектора равными, если их можно рассматривать как пути, описанные двумя точками при одном и том же бесконечно малом сдвиге выделенной совокупности.

Верно и обратное. Бесконечно малое точечное преобразование, при котором различные точки пространства описывают бесконечно малые векторы, равные между собой, очевидно, является бесконечно малым сдвигом, так как траектории этого преобразования — геодезические линии, и бесконечно малые сегменты, описанные на одной и той же геодезической линии, равны между собой в обычном смысле этого слова.

Определение всех римановых пространств, допускающих абсолютные равенства, удовлетворяющее поставленным выше условиям, было произведено Я. А. Схоутеном и мной[1].

---

[1] Картан и Схоутен [2]. Если ограничиться *неприводимыми* решениями задачи, то это — только пространства простых групп и 7-мерное эллиптическое пространство. Это последнее пространство допускает бесконечное количество видов абсолютного равенства.

Ограничусь здесь несколькими указаниями по поводу той же проблемы для произвольных пространств аффинной связности без кручения.

Свяжем с различными точками пространства декартов репер, r базисных векторов которого представляют собой скорости рассматриваемой точки при r независимых сдвигах данной совокупности. Мы получим произвольный бесконечно малый сдвиг этой совокупности, если каждая точка пространства опишет вектор с *фиксированными* компонентами e^i в репере, связанном с данной точкой. Если ω^i — координаты точки, бесконечно близкой к рассматриваемой точке, мы получим соотношения вида

$$(\omega^i)' = \sum_{(jk)} S_{jk}^{\cdot\cdot i} [\omega^j \omega^k], \tag{23}$$

где $S_{jk}^{\cdot\cdot i}$ — надлежащим образом выбранные функции.

Всякая геодезическая линия определяется уравнениями вида

$$\frac{\omega^1}{m^1} = \frac{\omega^2}{m^2} = \ldots = \frac{\omega^r}{m^r} = ds,$$

где m^i — произвольные постоянные, а ds — длина элемента дуги.

Уравнения (23) выражают в сокращенной форме соотношения

$$\delta\omega^i(d) - d\omega^i(\delta) = \sum_{j,k} S_{jk}^{\cdot\cdot i} \omega^j(\delta)\, \omega^k(d),$$

где введены два символа дифференцирования, перестановочные между собой. Пусть символ δ соответствует смещению, произведенному бесконечно малым сдвигом (e^i), а символ d соответствует некоторому произвольному смещению пространства. Тогда

$$\omega^i(\delta) = e^i, \quad d\omega^i(\delta) = 0$$

и, следовательно,

$$\omega^i(d) = \sum_{j,k} S_{jk}^{\cdot\cdot i} e^j \omega^k(d).$$

Это уравнение показывает, что при рассматриваемом сдвиге вектор u^i испытывает элементарное приращение

$$\delta u^i = \sum_{j,k} S_{jk}^{\cdot\cdot i} e^j u^k.$$

Рассмотрим теперь произвольную геодезическую линию и касательный к ней вектор, постоянно равный самому себе,

$$u^i = m^i.$$

После сдвига этот вектор должен снова иметь постоянные компоненты *), поэтому при смещении в направлении этой геодезической линии дифференциал суммы

$$\sum_{j,k} S_{jk}^{\cdot\cdot i} e^j m^k$$

должен быть равен нулю. Если мы положим

$$dS_{jk}^{\cdot\cdot i} = \sum_h S_{jk|h}^{\cdot\cdot i} \omega^h, \qquad (24)$$

то получим

$$\sum_{j,h,k} S_{jk|h}^{\cdot\cdot i} e^j m^k m^h = 0,$$

откуда следует

$$S_{jk|h}^{\cdot\cdot i} + S_{jh|k}^{\cdot\cdot i} = 0.$$

Но так как

$$S_{jk}^{\cdot\cdot i} + S_{kj}^{\cdot\cdot i} = 0,$$

мы находим, что при фиксированном индексе i величины

$$S_{jk|h}^{\cdot\cdot i} = S_{jkh}^{\cdot\cdot\cdot i} \qquad (25)$$

составляют систему компонент тривектора. При перестановке индексов эти величины не изменяются, если эта перестановка четная, и меняют знак, если эта перестановка нечетная.

Если все величины $S_{jkh}^{\cdot\cdot\cdot i}$ равны нулю, все коэффициенты $S_{jk}^{\cdot\cdot i}$ постоянны, и мы получаем абсолютное равенство в групповом пространстве (n° 46).

Внешнее дифференцирование уравнений (23) даст нам, если приравнять нулю коэффициент при $[\omega^j \omega^k \omega^h]$,

$$S_{jkh}^{\cdot\cdot\cdot i} = -\frac{1}{3}\sum (S_{jk}^{\cdot\cdot\rho} S_{\rho h}^{\cdot\cdot} + S_{kh}^{\cdot\cdot\rho} S_{\rho j}^{\cdot\cdot} + S_{hj}^{\cdot\cdot\rho} S_{\rho k}^{\cdot\cdot i}). \qquad (26)$$

Внешнее дифференцирование уравнений (24) дало бы некоторые соотношения между коэффициентами S_{jk}^{i}.

---

*) Так как сдвиг есть изоморфизм, то геодезическая перейдет в геодезическую, и вектор u^i остается параллельно переносимым вдоль нее, а значит u^i снова имеют постоянные (хотя и другие) значения. (*Прим. ред.*)

Несложное вычисление дает нам выражение тензора кривизны

$$R_{i\cdot kh}^{\,j} = \frac{1}{12} \sum_{\rho} \left(2 S_{kh}^{\cdot\cdot\,\rho} S_{\rho i}^{\cdot\cdot\,j} - S_{ik}^{\cdot\cdot\,\rho} S_{\rho h}^{\cdot\cdot\,j} + S_{ih}^{\cdot\cdot\,\rho} S_{\rho k}^{\cdot\cdot\,j}\right).$$

Было бы интересно продолжить исследование тех пространств, для которых все полученные уравнения оказываются совместными. Во всяком случае при $r=2$ мы получаем здесь только групповые пространства, так как тривектор $S_{jkh}^{\cdot\cdot\cdot\,i}$ здесь всегда равен нулю. Так же обстоит дело и при $r=3$, так как, полагая в этом случае $S_{123}^{\cdot\cdot\cdot\,i} = a^i$, мы получаем

$$dS_{12}^{\cdot\cdot\,i} = a^i \omega^3.$$

Поэтому уравнение $\omega^3 = 0$ здесь вполне интегрируемо. Следовательно, $S_{12}^{\cdot\cdot\,3} = 0$, откуда $a^3 = 0$, и точно так же $a^1 = a^2 = 0$. Таким образом, и здесь все величины $S_{ij}^{\cdot\cdot\,k}$ постоянны.

ОБ ОДНОМ ЗАМЕЧАТЕЛЬНОМ КЛАССЕ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ*)

ВВЕДЕНИЕ

Римановы пространства, которым посвящен этот мемуар, характеризуются тем свойством, что риманова кривизна их любой площадки сохраняется при параллельном переносе, или, выражаясь более абстрактно, тем, что ковариантная производная тензора Римана-Кристоффеля в них тождественно равна нулю. Мы будем называть их *симметрическими пространствами* **). Пространства постоянной кривизны, очевидно, являются симметрическими пространствами, так же как пространства, у которых линейный элемент ds^2 является суммой нескольких ds^2 с постоянной кривизной, причем переменные, которые входят в эти различные ds^2, независимы друг от друга. При первоначальном изучении можно ограничиться *неприводимыми* симметрическими пространствами, в которых ds^2 нельзя рассматривать как сумму двух ds^2 с независимыми переменными, являющихся линейными элементами двух симметрических пространств. Предмет настоящего мемуара состоит в полном определении всех действительных неприводимых симметрических пространств с положительно определенным ds^2. Эта проблема возникла при изучении другой проблемы, которой я занимался вместе с Я. А. Схоутеном и решение которой опубликовано в виде заметки в Докладах Амстердамской Академии наук [1]).

---

*) E. Cartan, Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann, *Bulletin de la Société mathématique de France,* т. 54 (1926), стр. 214—264, т. 55 (1927), стр. 114—134. *(Прим. перев.)*

**) Термин *симметрическое пространство* был введен Картаном для рассматриваемого класса римановых пространств в более поздних работах. В оригинале этой работы Картан называет симметрическое пространство „espace E" („пространством $\mathcal{E}$"). Однако для сохранения единства терминологии во всех работах, входящих в настоящий сборник, в переводе мы заменили этот первоначальный термин установившимся термином. *(Прим. перев.)*

[1]) Картан и Схоутен [2] (ср. также стр. 108 настоящего сборника).

Задача состояла в отыскании всех возможных обобщений хорошо известного параллелизма Клифорда в трехмерном эллиптическом пространстве, или, точнее говоря, требовалось найти все римановы пространства, в которых существует *абсолютный* параллелизм, удовлетворяющий тому условию, что угол, под которым пересекаются две геодезические линии, сохраняется, если заменить их параллелями, проходящими через произвольную точку. Все такие пространства являются симметрическими пространствами, но они составляют только небольшую часть симметрических пространств; если ограничиться неприводимыми пространствами, это, помимо групповых пространств простых групп [1], только семимерное эллиптическое пространство.

В упомянутой заметке применялись некоторые приемы доказательства, которые читатель найдет и в настоящей работе, однако здесь эти приемы связаны с более общим методом.

Я уже имел полное решение задачи, когда узнал о заметке Гарри Леви [2], который поставил, со своей стороны, проблему определения симметрических пространств и отметил как неприводимые пространства этого рода пространства постоянной кривизны, но, однако, не получил других решений этой проблемы *). В одной недавно вышедшей заметке [3] я дал общие указания о методе, применявшемся мной для решения задачи и о полученных результатах.

В этом методе или, вернее, в этих двух методах существенную роль играет теория групп и в особенности теория простых групп. В самом деле, с одной стороны, благодаря тому свойству, с помощью которого мы определили симметрическое пространство, группа голономии, т. е. группа тех вращений, которым подвергаются векторы, выходящие из точки A, когда их параллельно переносят вдоль произвольного цикла, сохраняет риманову кривизну пространства в A и, следовательно,

---

[1] О групповых пространствах групп см. Картан и Схоутен [1] (см. также Картан [17], стр. 7—111 настоящего сборника).

[2] Леви [1]. См. также заметку [2] того же автора.

*) Впервые задача исследования римановых пространств, для которых ковариантная производная тензора кривизны тождественно равна нулю, была поставлена в 1925 г. советским геометром П. А. Широковым (см. Широков [1]). *(Прим. перев.)*

[3] Картан [16].

сохраняет инвариантной форму Римана

$$\sum_{i, j, k, h} R_{ijkh} x^i y^j x^k y^h,$$

аналитически определяющую риманову кривизну. Первый метод будет состоять в разыскании всех ортогональных групп *), могущих быть группами голономии для симметрического пространства, т. е. оставляющих инвариантной форму типа формы Римана. С другой стороны, пространство допускает транзитивную группу G движений, причем подгруппа этой группы, оставляющей инвариантной данную точку A, является в точности группой голономии. Поэтому, отправляясь от всех возможных структур этих групп движений (такими структурами являются все структуры простых групп), можно попытаться вывести из каждой из них соответственную группу голономии.

Этот последний метод приводит к самым неожиданным проблемам. В частности, разыскание неприводимых симметрических пространств приводит к разысканию всех *вещественных* простых структур, соответствующих одной и той же *комплексной* простой структуре. Эта проблема, решенная мной в мемуаре, опубликованном перед войной [1]), позволяет произвести определение неприводимых симметрических пространств наиболее простым способом.

Первый метод, состоящий в определении возможных групп голономии, основан на общих свойствах вещественных ортогональных групп. Проблеме определения ортогональных групп посвящены многие очень важные мемуары [2]), но ни в одном из них не дается исчерпывающего решения вопроса. В действительности это определение сводится к определению некоторых простых линейных групп и может быть произведено путем применения результатов, полученных мною в двух моих мемуарах о линейных группах, не оставляющих инвариантными ни одного плоского многообразия [3]). В настоящем мемуаре я даю некоторые указания, нуждающиеся, впрочем, в более полном обосновании, относительно этой общей проблемы. Дело в том, что определение групп голономии неприводимых симметрических

---

*) См. примечание *) на стр. 100. (*Прим. перев.*)

[1]) Картан [6].

[2]) См., например, Медичи [1].

[3]) Картан [4] и [5].

пространств является гораздо более узкой проблемой, так как здесь добавляется то условие, что ортогональная группа оставляет инвариантной форму

$$\sum_{i,\,j,\,k,\,h} R_{ijkh} x^i y^j x^k y^h,$$

коэффициенты которой удовлетворяют классическим соотношениям, весьма, впрочем, простым. Это ограничение проблемы позволяет довести решение до конца с помощью результатов, полученных в моей диссертации и в упомянутых мемуарах. Поэтому я излагаю только принципы этого метода, приводящего к достаточно утомительным выкладкам, которые можно обойти, если применить второй метод.

В неприводимых симметрических пространствах, отличных от эвклидова пространства, понятие *группы голономии* совпадает с понятием *группы изотропии*, состоящей из всех вращений вокруг точки, сохраняющих все геометрические свойства пространства в окрестности этой точки.

Полученные результаты открывают возможности для большого числа новых исследований, посвященных индивидуальному изучению новых пространств, которые, повидимому, должны играть почти такую же роль, как пространства постоянной кривизны. Эти новые пространства допускают и непосредственно геометрическое определение. Эти пространства могут быть представлены геометрическими образами (êtres géométriques), допускающими простое определение в обычном пространстве (трех или большего числа измерений) *). Можно также рассмотреть проблему, отказавшись от условия знакоопределенности для ds^2 или переходя к комплексной области. В этих более общих случаях группа движений пространства может уже не быть простой и даже полупростой. Что здесь получаются новые решения, доказывается примером ds^2 от трех переменных вида

$$ds^2 = dz^2 + z^2\,dx^2 + 2dx\,dy.$$

---

*) Здесь Картан имеет в виду так называемые „*образы симметрии*“, к которым относятся точки, прямые, плоскости (для случая группы движений), сферы (для случая группы конформных преобразований), пары плоскостей и квадрики (для случая группы проективных преобразований). Более подробному изложению этого вопроса посвящено специальное примечание [75] переводчика, помещенное в конце книги (стр. 331—368). (*Прим. перев.*)

Действительно, в вещественной области трехмерные неприводимые симметрические пространства со знакоопределенным ds^2 — это только эллиптические и гиперболические пространства. С другой стороны, ds^2 указанного вида не имеет постоянной кривизны, хотя ковариантная производная его тензора кривизны равна нулю.

Оставаясь в вещественной области, укажем еще одну интересную проблему — определение симметрических пространств, допускающих бесконечно малые *сдвиги* во всех направлениях. Пространства постоянной положительной кривизны обладают этим свойством, вопрос о том, существуют ли другие пространства, обладающие этим свойством, остается открытым. Не менее интересен вопрос, существуют ли римановы пространства, обладающие этим свойством и не являющиеся симметрическими пространствами.

Римановы пространства, рассматривающиеся в этом мемуаре, входят в более общий класс пространств аффинной связности без кручения, кривизна которых сохраняется при параллельном переносе. В мемуаре о геометрии групп преобразований, который должен вскоре появиться в *Journal de Mathématiques* [1], я излагаю основные принципы теории этих пространств. Частным случаем этих пространств являются групповые пространства.

Настоящий мемуар состоит из трех глав. Первая глава посвящена основной теореме, сводящей проблему к теории групп, вторая глава посвящена методу решения, основанному на определении групп голономии, третья — второму методу, основанному на рассмотрении групп движений.

---

[1] „Геометрия групп преобразований“. См. стр. 7—111 настоящего сборника.

ГЛАВА I

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

I. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. НЕПРИВОДИМЫЕ ПРОСТРАНСТВА

1. Мы ставим себе задачу определения всех вещественных римановых пространств с положительно определенным ds^2, обладающих тем свойством, что параллельный перенос любой площадки сохраняет ее риманову кривизну (симметрических пространств). Аналитически это свойство состоит в том, что ковариантная производная тензора Римана-Кристоффеля равна нулю

$$R_{ijkhl\,l} = 0.$$

Эта задача может быть упрощена. Предположим, что ds^2 n-мерного риманова симметрического пространства можно рассматривать как сумму двух линейных элементов от соответственно n_1 и n_2 переменных, независимых друг от друга $(n_1 + n_2 = n)$:

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2.$$

Римановы пространства с линейными элементами ds_1^2 и ds_2^2 также принадлежат к рассматриваемому классу. В самом деле, отнесем n_1 первых индексов к переменным, входящим в ds_1^2, и n_2 последних индексов — к переменным, входящим в ds_2^2. Тогда единственными компонентами $R_{ijkhl\,l}$, которые могли бы быть отличными от нуля, являются такие компоненты, у которых все пять индексов i, j, k, h, l принадлежат одной и той же группе n_1 первых или n_2 последних индексов. Поэтому, если для симметрического пространства ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, это имеет место для каждого из пространств с линейными элементами ds_1^2 и ds_2^2, и обратно.

II. ГРУППА ГОЛОНОМИИ И ФОРМА РИМАНА

2. Рассмотрим n-мерное вещественное риманово пространство. Свяжем с каждой точкой A_0 этого пространства ортогональный репер (T_0), образованный n единичными векторами

перпендикулярными друг к другу. Риманова кривизна пространства в точке A_0 аналитически определяется с помощью формы Римана [1])

$$R = \sum_{(ij),(kh)} R_{ij,kh} p_{ij} p_{kh}, \tag{1}$$

где суммирование производится по всем сочетаниям (ij) и по всем сочетаниям (kh) индексов $1, 2, \ldots, n$ по два и где p_{ij} являются компонентами бивектора, образованными двумя произвольными векторами (x_i) и (y_i), выходящими из A_0:

$$p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i.$$

Римановой кривизной в плоском направлении, определенном векторами (x_i) и (y_i), называют частное от деления формы R на квадрат $\sum_{(ij)} p_{ij}^2$ меры *) соответственного бивектора.

Всякому циклу, выходящему из A_0 и возвращающемуся в эту точку, можно поставить в соответствие вращение, которому подвергаются векторы, выходящие из A_0, параллельно перенесенные вдоль этого цикла. Вращения, соответствующие различным циклам, выходящим из A_0, порождают группу, *группу голономии* [2]) пространства. Рассматривая циклы, выходящие из другой точки A, мы также получим группу движений, но аналитическое выражение этой группы может быть сделано совершенно одинаковым для различных точек пространства, если мы поставим в соответствие его точкам надлежащим образом выбранные системы отнесения. Мы будем обозначать связную группу голономии через Γ, а ее порядок — через r. Переменными, преобразуемыми группой Γ, являются компоненты x_i произвольного вектора.

3. Свяжем с точкой A_0 вместе с репером (T_0) все те реперы, которые получаются из него с помощью вращений

---

[1]) См., например, Картан [11], стр. 25. [См. также Картан [23], стр. 177 русского перевода. *(Прим. перев.)*]

*) Мера бивектора — площадь параллелограмма, характеризующего данный бивектор. *(Прим. перев.)*

[2]) Картан [11], стр. 54—55. В действительности, выражение „группа голономии“ употребляется в настоящей статье в более узком смысле. Собственно говоря, мы ограничиваемся рассмотрением операций группы голономии в собственном смысле слова в применении лишь к векторам. Однако в дальнейшем мы не будем иметь повода к недоразумениям.

группы Г. Свяжем также с точкой A все реперы, которые получаются из (T_0) с помощью параллельного переноса репера (T_0) из A_0 в A вдоль произвольного пути. Эти реперы (T) для данной точки A зависят от r параметров.

Так как параллельный перенос сохраняет, по предположению, риманову кривизну, форма Римана в A, отнесенная к одному из реперов (T) в этой точке, имеет в точности те же самые численные коэффициенты, что и в A_0. Кроме того, группа голономии имеет одинаковую аналитическую форму во всех рассматриваемых системах отнесения. Наконец, если мы рассмотрим две бесконечно близкие точки A и A' и перенесем параллельно из A в A' один из реперов (T), связанных с точкой A, мы получим репер (T_1) с началом в A', получающийся из какого-нибудь репера (T'), связанного с A' с помощью бесконечно малого преобразования группы голономии. Все реперы (T), связанные с A, также получаются один из другого с помощью вращений группы голономии.

4. Попытаемся определить форму Римана R в предположении, что группа голономии Г известна.

Напомним[1]), что поскольку в каждой точке риманова пространства выбрано семейство реперов (эти реперы зависят от r произвольных параметров), то в пространстве можно определить аффинную связность с помощью

1°. n форм $\omega_1, \ldots, \omega_n$, линейных по отношению к дифференциалам n координат и выражающих прямоугольные координаты точки A', бесконечно близкой к A по отношению к реперу (T), связанному с A.

2°. $\frac{n(n-1)}{2}$ форм $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, линейных по отношению к дифференциалам n координат и к дифференциалам r параметров реперов и выражающих бесконечно малое вращение, которому надо подвергнуть репер T, параллельно переносимый из A в A' для того, чтобы совместить его с (T').

---

[1]) По поводу обозначений см. мой мемуар [8], в частности, гл. II и III. См. также [11], пп° 10 и 11, стр. 12—14. [См. Картан [23] стр. 162—167 русского перевода, а также стр. 38 и сл. настоящего сборника. *(Прим. перев.)*]

Напомним *формулы структуры* этой связности[1]):

$$\left.\begin{aligned} \omega'_i &= \sum_k [\omega_k \omega_{ki}], \\ \omega'_{ij} &= \sum_k [\omega_{ik}\omega_{kj}] - \sum_{(kh)} R_{ij,kh}[\omega_k\omega_h]. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

5. Предположим, что группа Г порождается r независимыми бесконечно малыми преобразованиями

$$U_\alpha = \sum_{(ij)} a_{\alpha ij}\left(x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right), \qquad (3)$$

где

$$a_{\alpha ij} = - a_{\alpha ji}.$$

Так как бесконечно малое вращение с компонентами ω_{ij} входит в группу голономии (n° **3**), то имеют место отношения вида

$$\omega_{ij} = \sum_\rho a_{\rho ij}\theta_\rho, \qquad (4)$$

где $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$—надлежащим образом выбранные пфаффовы формы. При этом $n+r$ форм

$$\omega_1, \ldots, \omega_n;\ \theta_1, \ldots, \theta_r$$

линейно независимы, так как если мы даем дифференциалам n координат и r параметров такие значения, что все эти $n+r$ форм одновременно обращаются в нуль, то ни точка A, ни репер (T) не меняются, следовательно, линейные уравнения между $n+r$ рассматриваемыми дифференциалами независимы.

Уравнения (2), если в них заменить ω_{ij} их значениями (4), принимают вид

$$\omega'_i = \sum_{\rho, k} a_{\rho ki}[\omega_k\theta_\rho],$$

$$\sum_\rho a_{\rho ij}\theta'_\rho = \sum_{(\lambda\mu),\,k} (a_{\lambda ik}a_{\mu kj} - a_{\mu ik}a_{\lambda kj})[\theta_\lambda\theta_\mu] - \sum_{(kh)} R_{ij,kh}[\omega_k\omega_h].$$

Полученные уравнения можно преобразовать с помощью структурных констант $c_{\alpha\beta\gamma}$ группы Г. Уравнения

$$(U_\lambda U_\mu) = U_\lambda U_\mu - U_\mu U_\lambda = \sum_\rho c_{\lambda\mu\rho}U_\rho$$

---

[1]) Эти обозначения несколько отличаются от обозначений мемуара [11]: здесь у величин $R_{ij,kh}$ изменен знак для того, чтобы в случае пространства постоянной кривизны единственная остающаяся в этом случае компонента имела бы знак кривизны.

можно переписать в развернутом виде:

$$\sum_k (a_{\lambda ik}a_{\mu kj} - a_{\mu ik}a_{\lambda kj}) = \sum_\rho c_{\lambda\mu\rho}a_{\rho ij}. \tag{5}$$

Поэтому последние уравнения (2) принимают вид

$$\sum_\rho a_{\rho ij}\{\theta'_\rho - \sum_{(\lambda\mu)} c_{\lambda\mu\rho}[\theta_\lambda\theta_\mu]\} = -\sum_{(kh)} R_{ij,\,kh}[\omega_k\omega_h]. \tag{6}$$

6. Мы можем рассматривать уравнения (6) как линейные уравнения по отношению к r неизвестным

$$\theta'_\rho - \sum_{(\lambda\mu)} c_{\lambda\mu\rho}[\theta_\lambda\theta_\mu];$$

очевидно, что r из этих уравнений являются независимыми, так как в противном случае r преобразований U_ρ не были бы линейно независимыми. Поэтому имеют место соотношения вида

$$\theta'_\alpha - \sum_{(\lambda\mu)} c_{\lambda\mu\alpha}[\theta_\lambda\theta_\mu] = -\sum_{(kh)} b_{\alpha kh}[\omega_k\omega_h], \tag{7}$$

где $b_{\alpha kh} = -b_{\alpha hk}$ — константы. При этом, как видно из сравнения (7) с (6),

$$R_{ij,\,kh} = \sum_\rho a_{\rho ij}b_{\rho kh},$$

и, согласно (1),

$$R = \sum_{(ij)(kh)} R_{ij,\,kh}p_{ij}p_{kh},$$

откуда

$$\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial p_{kh}} = \sum_{(ij)} R_{ij,\,kh}p_{ij} = \sum_\rho b_{\rho kh}\Big(\sum_{(ij)} a_{\rho ij}p_{ij}\Big). \tag{8}$$

Поставим в соответствие бесконечно малому преобразованию U_α форму, линейную по отношению к p_{ij}:

$$\xi_\alpha = \sum_{(ij)} a_{\alpha ij}p_{ij}.$$

Тогда все частные производные формы R линейно выражаются через r форм ξ_α. Следовательно, *форма Римана является квадратичной формой по отношению к r формам ξ_α, соответствующим r бесконечно малым преобразованиям, порождающим группу голономии.*

Если мы теперь положим

$$R = \sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta \qquad (A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}),$$

то мы получим

$$\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial p_{kh}}=\sum_{\rho}\frac{\partial\xi_\rho}{\partial p_{kh}}\Big(\sum_{\sigma}A_{\rho\sigma}\xi_\sigma\Big)=\sum_{\rho,\sigma}A_{\rho\sigma}a_{\rho kh}\xi_\sigma,$$

и, следовательно,

$$b_{\alpha kh}=\sum_{\rho}A_{\alpha\rho}a_{\rho kh},$$

$$R_{ij,\,kh}=\sum_{\rho,\sigma}A_{\rho\sigma}a_{\sigma ij}a_{\rho kh}.$$

Таким образом, в конечном счете, формы ω_i и θ_α удовлетворяют соотношениям

$$\omega'_i=\sum_{\rho,k}a_{\rho ki}[\omega_k\theta_\rho],$$

$$\theta'_\alpha=\sum_{(\lambda\mu)}c_{\lambda\mu\alpha}[\theta_\lambda\theta_\mu]-\sum_{\rho,(kh)}A_{\alpha\rho}a_{\rho kh}[\omega_k\omega_h]. \qquad (9)$$

III. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА

7. В формулах (9) коэффициенты $a_{\rho ki}$, $c_{\lambda\mu\alpha}$, $A_{\alpha\beta}$ являются константами, которые должны удовлетворять некоторым условиям, одно из которых непосредственно следует из сделанных выше предположений, а другие мы сейчас определим.

Коэффициенты $a_{\rho ki}$ являются коэффициентами бесконечно малых преобразований U_α группы Г, структурными константами которой являются $c_{\alpha\beta\gamma}$. Поэтому мы должны найти выражение того, что

1°. Форма Римана $\sum_{\alpha\beta}A_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta$ инвариантна по отношению к группе Г.

2°. Эта форма удовлетворяет классическим тождествам[1]

$$R_{ij,\,kh}+R_{jk,\,ih}+R_{ki,\,jh}=0.$$

Для того чтобы найти выражение первого условия, заметим, что, для того чтобы вычислить $U_\alpha(\xi_\beta)$, нужно предположить, что в ξ_β величины p_{ij} заменены на $x_iy_j-x_jy_i$ и что U_α преобразует оба вектора (x_i) и (y_i) одновременно. Простое вычисление дает [21]

$$U_\alpha(\xi_\beta)=-\sum_{\rho}c_{\alpha\beta\rho}\xi_\rho,$$

---

[1] Картан [11], стр. 23, формула (33). [См. также Картан [23], стр. 167 русского перевода, формула (12). *(Прим. перев.)*]

что выражает тот факт, что форма $U_\alpha(\xi_\beta)$ соответствует преобразованию $(U_\alpha U_\beta)$.

Отсюда находим

$$\frac{1}{2}U_\alpha(R) = -\sum_{\lambda\mu} c_{\alpha\rho\lambda}A_{\mu\rho}\xi_\lambda\xi_\mu.$$

Поэтому мы должны иметь

$$\sum_\rho (c_{\alpha\rho\lambda}A_{\mu\rho} + c_{\alpha\rho\mu}A_{\lambda\rho}) = 0 \qquad (\alpha, \lambda, \mu = 1, \ldots, r). \tag{10}$$

Что касается последних условий, то они выражаются соотношениями

$$\sum_{\rho, \sigma} A_{\rho\sigma}(a_{\sigma ij}a_{\rho kh} + a_{\sigma jk}a_{\rho ih} + a_{\sigma ki}a_{\rho jh}) = 0. \tag{11}$$

8. Теперь мы можем доказать и обратное. Предположим, что система констант $a_{\alpha ij}$, $c_{\alpha\beta\gamma}$, $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$ *) удовлетворяет соотношениям (5), (10) и (11). *Я утверждаю, что в этом случае существует риманово пространство, имеющее группу* Г *в качестве группы голономии и форму R в качестве формы Римана, и, сверх того, это пространство обладает свойством сохранения кривизны при параллельном переносе.*

Сначала докажем существование $n + r$ линейно независимых пфаффовых форм от $n + r$ независимых переменных, тождественно удовлетворяющих уравнениям (9). Для этого заметим, что константы, входящие в эти уравнения, являются структурными константами некоторой группы [1]), порождаемой бесконечно малыми преобразованиями X_i и Y_α, коммутирование которых выражается соотношениями

$$\left.\begin{aligned}
(X_iX_j) &= -\sum_{\rho, \sigma} a_{\rho ij}A_{\rho\sigma}Y_\sigma, \\
(X_iY_\alpha) &= \sum_k a_{\alpha ik}X_k, \\
(Y_\alpha Y_\beta) &= \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho}Y_\rho.
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

---

*) Как и в предыдущем изложении, предполагается, что латинские индексы меняются от 1 до n, а греческие — от 1 до r. *(Прим. перев.)*

[1]) Здесь использовано то взаимное соответствие, которое имеет место между *формулами структуры* С. Ли и *уравнениями* структуры, введенными мной в теорию групп Ли и бесконечных непрерывных групп (см. стр. 40 и 45 настоящего сборника).

В самом деле, проверим выполнение тождеств Якоби. В данном случае имеется четыре категории этих тождеств, именно:

$$\left.\begin{aligned} &((Y_\alpha Y_\beta)\,Y_\gamma)+((Y_\beta Y_\gamma)\,Y_\alpha)+((Y_\gamma Y_\alpha)\,Y_\beta)=0,\\ &((Y_\alpha Y_\beta)\,X_i)+((Y_\beta X_i)\,Y_\alpha)+((X_i Y_\alpha)\,Y_\beta)=0,\\ &((X_i X_j)\,Y_\alpha)+((X_j Y_\alpha)X_i)+((Y_\alpha X_i)\,X_j)=0,\\ &((X_i X_j)\,X_k)+((X_j X_k)\,X_i)+((X_k X_i)\,X_j)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Соотношения первой категории следуют из соотношений (5), так как в силу этих соотношений коэффициенты $c_{\alpha\beta\gamma}$ являются структурными константами некоторой группы.

Соотношения второй категории также следуют из соотношения (5).

Соотношения третьей категории, которые можно переписать в виде

$$\sum_{\rho,k} A_{\rho\beta}\,(a_{\alpha ik}a_{\rho kj}-a_{\rho ik}a_{\alpha kj})=\sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma}c_{\sigma\alpha\beta}a_{\rho ij},$$

являются следствиями соотношений (5) и (10).

И, наконец, соотношения четвертой категории совпадают с соотношениями (11).

Таким образом, существует группа со структурой (12).

9. Согласно предшествующему, мы можем найти $n+r$ пфаффовых выражений ω_i, θ_α от $n+r$ независимых переменных, удовлетворяющих соотношениям (9).

Рассмотрим n уравнений Пфаффа

$$\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_n=0.$$

Эти уравнения вполне интегрируемы[1]), так как ω_i' в силу соотношений (9) и самих данных уравнений обращаются в нуль. Обозначим через

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n$$

систему независимых первых интегралов этих уравнений и через $v_1, v_2, \ldots, v_r$ — систему r других функций, независимых между собой и от u_i. Если мы примем u_i и v_α за независимые переменные, ω_i будут линейно выражаться через $du_1, \ldots, du_n$.

---

[1]) По всем вопросам, касающимся свойств систем Пфаффа, я позволю себе сослаться на мою книгу [7], а также на превосходную книгу Гурса [1]. [См. также Рашевский [2] и Фиников [2]. *(Прим. перев.)*]

Дифференциальную квадратичную форму

$$ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2 = \sum_{i, j} g_{ij}\, du_i\, du_j$$

можно рассматривать, как мы сейчас увидим, в качестве ds^2 n-мерного риманова пространства.

Для этого достаточно доказать, что коэффициенты g_{ij} не зависят от переменных v_α. Введем два символа дифференцирования d и δ, из которых первый соответствует, например, дифференцированию по одному из переменных u_i, а второй — по одному из переменных v_α. Первые уравнения (9) выражают в сокращенной форме условия

$$\delta\omega_i(d) - d\omega_i(\delta) = \sum_{\rho, k} a_{\rho ki}\,[\omega_k(\delta)\,\theta_\rho(d) - \omega_k(d)\,\theta_\rho(\delta)].$$

В силу того, что $\omega_i(\delta) = 0$, это условие имеет вид

$$\delta\omega_i(d) = -\sum_{\rho, k} a_{\rho ki}\theta_\rho(\delta)\,\omega_k(d),$$

откуда находим

$$\delta(ds^2) = 2\sum \omega_i(d)\,\delta\omega_i(d) = -2\sum_{\rho, i, k} a_{\rho ki}\,\theta_\rho(\delta)\,\omega_i(d)\,\omega_k(d).$$

Но последняя сумма равна нулю, так как $a_{\rho ki} = -a_{\rho ik}$. Поэтому

$$\delta\, ds^2 = \sum_{i, j} \delta g_{ij}\, du_i\, du_j = 0,$$

т. е.

$$\delta g_{ij} = 0.$$

10. Риманово пространство, определенное с помощью рассматриваемого ds^2, очевидно, отнесено к ортогональным реперам, зависящим в каждой точке от r параметров $v_1, v_2 \ldots v_r$. Компоненты $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ аффинной связности пространства определяются, как известно, однозначно с помощью условий

$$\omega_i' = \sum_k [\omega_k \omega_{ki}]$$

или, в явной форме,

$$\omega_{ij} = \sum_\rho a_{\rho ij}\theta_\rho.$$

Тензор Римана-Кристоффеля определяется последними уравнениями (2), которые после несложного вычисления дают

$$R_{ij,kh} = \sum_{\rho, \sigma} A_{\rho\sigma} a_{\rho ij} a_{\sigma kh},$$

откуда

$$R=\sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma}\xi_\rho\xi_\sigma.$$

Остается доказать, что группа Г является группой голономии этого пространства и что его риманова кривизна сохраняется при параллельном переносе.

Бесконечно малые преобразования группы голономии, соответствующие элементарному циклу, имеют вид

$$V_{kh}=\sum_{(ij)} R_{ij,kh}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right)=\sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma}a_{\sigma kh}U_\rho.$$

Поэтому все эти преобразования принадлежат к группе Г. Покажем, что они порождают подгруппу группы Г, являющуюся ее *нормальным делителем*, В самом деле, коммутируя V_{kh} с U_α, находим

$$(U_\alpha V_{kh})=\sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma}a_{\sigma kh}(U_\alpha U_\rho)=\sum_{\rho,\sigma,\tau} A_{\rho\sigma}a_{\sigma kh}c_{\alpha\rho\tau}U_\tau.$$

Но, в силу (10), имеем

$$\sum_\rho A_{\rho\sigma}c_{\alpha\rho\tau}+\sum_\rho A_{\rho\tau}c_{\alpha\rho\sigma}=0.$$

Поэтому

$$(U_\alpha V_{kh})=-\sum_{\rho,\sigma,\tau} A_{\rho\tau}c_{\alpha\rho\sigma}a_{\sigma kh}U_\tau$$

или, в силу (5),

$$(U_\alpha V_{kh})=\sum_{\rho,\sigma,\tau,i} A_{\rho\tau}(a_{\alpha ih}a_{\rho ki}-a_{\alpha ki}a_{\rho ih})U_\tau=\sum_i(a_{\alpha ik}V_{ih}-a_{\alpha ih}V_{ik}),$$

что и требовалось доказать.

Из самой записи, в которой у нас получены ω_{ij}, следует, что наше риманово пространство можно рассматривать как неголономное пространство с фундаментальной группой Г*). Поэтому, так как бесконечно малые преобразования, соответствующие элементарным циклам, порождают нормальный делитель Γ_1 группы Г, группа голономии в точности совпадает

---

*) Неголономным пространством с фундаментальной группой Г Картан называет такое многообразие, каждой точке которого отнесено однородное пространство, в котором группой преобразований является Г. При этом указан способ изоморфного отображения друг на друга пространств, отнесенных к двум бесконечно близким точкам, а следовательно можно установить такое отображение и вдоль

с группой Γ_1 (см. Картан [15]). Отсюда мы получаем дополнительное условие, которому должны удовлетворять данные константы: необходимо, чтобы среди форм

$$\sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma} a_{\sigma kh} \xi_\rho$$

было бы r независимых [22]. А так как эти формы являются не чем иным, как деленными на 2 частными производными $\frac{1}{2}\frac{\partial R}{\partial p_{hk}}$, то это приводит к тому, что дискриминант формы $\sum A_{\rho\sigma}\xi_\rho\xi_\sigma$ должен быть отличен от нуля¹).

11. Для завершения доказательства нужно показать, что кривизна пространства сохраняется при параллельном переносе. В самом деле, пусть (T) и (T') — два репера, связанные соответственно с точкой A и с бесконечно близкой точкой A'; форма Римана в этих двух точках, отнесенная к рассматриваемым двум реперам, имеет те же коэффициенты $R_{ij,kh}$. Пусть (T_1) — репер с началом в A', полученный параллельным переносом репера (T) из A в A'. Тогда можно перейти от (T_1) к (T) с помощью вращения с компонентами ω_{ij}, т. е. с помощью вращения группы Γ, оставляющей инвариантной форму R. Поэтому коэффициенты формы R не изменяются при замене репера (T') на репер (T_1). Следовательно, параллельный перенос сохраняет кривизну, что и требовалось доказать.

IV. ГРУППА ДВИЖЕНИЙ G

12. Абстрактная группа, структуру которой мы определили уравнениями (9) или (12), допускает важную конкретную интерпретацию. В самом деле, *пространство с линейным*

некоторого пути, так что в итоге пространство в начальной точке пути изоморфно отображается на пространство в конечной точке. Это отображение в общем случае зависит от пути (голономным же пространством Картан называет такое пространство, в котором это отображение не зависит от пути). *(Прим. перев.)*

¹) Очевидно без вычисления, что группа Γ, оставляющая инвариантной форму R, точно так же переводит систему уравнений $\frac{\partial R}{\partial \xi_\rho} = 0$ в эквивалентную систему. Следовательно, преобразования Γ, которым соответствуют формы $\frac{\partial R}{\partial \xi_\rho}$, образуют нормальный делитель группы Γ.

элементом (15) *допускает группу жестких движений, имеющую рассматриваемую структуру.*

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим снова $n+r$ форм ω_i и θ_α от переменных $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_r$ и уравнения

$$\left.\begin{aligned} \omega_i(u', v'; du') = \omega_i(u, v; du), \\ \theta_\alpha(u', v'; du', dv') = \theta_\alpha(u, v; du, dv). \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Эти уравнения образуют вполне интегрируемую систему уравнений в полных дифференциалах, если рассматривать переменные u'_i и v'_α как неизвестные функции от u_i и v_α. Действительно, билинейные коварианты двух членов каждого из уравнений (14) в явном виде в точности равны в силу уравнений системы *и постоянства* коэффициентов, входящих в соотношения (9).

Всякое решение системы (14) благодаря тому, что du'_i линейно выражаются только через du_i, очевидно, имеет вид:

$$u'_i = f_i(u),$$
$$v'_\alpha = \varphi_\alpha(u; v).$$

Поэтому оно представляет точечное преобразование пространства в себя и при этом преобразовании

$$\sum_i [\omega_i(u', v', du')]^2 = \sum_i [\omega_i(u, v; du)]^2.$$

Следовательно, при этих преобразованиях сохраняется ds^2. Таким образом, существует ∞^{r+n} изометрических преобразований или жестких движений пространства и эти движения образуют группу G с уравнениями (14). Уравнения (9) являются определяющими уравнениями этой группы, а уравнения (12) являются уравнениями ее структуры.

Всегда существует такое движение группы G, что данная точка A переходит в заданную точку A' и одновременно один из реперов (T), связанных с A, совмещается с одним из реперов (T'), связанных с A'. В частности, существует бесконечное число движений, оставляющих данную точку A неподвижной. Векторы, выходящие из A, при этом преобразуются с помощью преобразований группы голономии Γ, переводящей друг в друга различные реперы (T).

13. Группа G, существование которой мы определяем, является связной [28]. Но могут существовать и другие изометрические преобразования пространства в себе. Покажем, в частности, что *пространство всегда допускает симметрию по отношению к любой из своих точек.*

Для доказательства достаточно рассмотреть систему Пфаффа:

$$\left.\begin{aligned}\omega_i(u', v', du') &= -\omega_i(u, v; du),\\ \theta_\alpha(u', v'; du', dv') &= \theta_\alpha(u, v; du, dv).\end{aligned}\right\}\qquad(15)$$

Вид уравнений (9) показывает, что и система (15) также является вполне интегрируемой. Мы получили, таким образом, второе семейство изометрических преобразований пространства. В частности, рассмотрим такое решение системы (15), при котором данные численные значения u_i и v_α соответствуют *тем же самым* численным значениям u'_i и v'_α. Изометрическое преобразование, определяемое этим решением, оставляет неподвижной точку A и репер (T), отнесенный к A, но компоненты векторов, выходящих из A, меняют знак. При этом всякая точка M преобразуется в точку M', расположенную на геодезической линии AM по другую сторону от A на расстоянии $AM' = AM$. Мы получим *симметрию* относительно точки A.

14. Полученное нами свойство является характеристическим для симметрических пространств. *Если риманово пространство таково, что симметрия по отношению к любой из его точек является изометрическим преобразованием, кривизна этого пространства сохраняется при параллельном переносе* *).

Для доказательства мы будем опираться на замечательную конструкцию параллельного переноса. Для того чтобы параллельно перенести направление, выходящее из точки A, в бесконечно близкую точку A', достаточно построить геодезическую линию и взять то направление, выходящее из A', которое симметрично данному направлению по отношению

---

*) Сказанное распространяется и на пространства аффинной связности без кручения, кривизна которых сохраняется при параллельном переносе (см. предыдущую статью, стр. 94). Именно это характеристическое свойство рассматриваемых римановых пространств дало основание Картану назвать их „симметрическими пространствами". *(Прим. перев.)*

к середине C отрезка AA' геодезической линии. Пусть теперь в точке A задан двумерный плоский элемент с помощью двух направлений. Параллельный перенос этого плоского элемента из A в A' даст то же двумерное направление, что и симметрия по отношению к C. Но эта симметрия, являющаяся изометрией, сохраняет риманову кривизну, что и доказывает теорему.

15. Все предшествующее, кроме n°1, относится ко всем симметрическим пространствам, неприводимым или приводимым, вещественным или комплексным. Теперь мы ограничимся вещественными неприводимыми пространствами с положительно определенным линейным элементом ds^2. Мы изложим основные положения двух методов, позволяющих провести полное определение всех таких пространств, один из которых основан на рассмотрении группы голономии Γ, другой — на рассмотрении группы движений G.

При этом мы исключим из рассмотрения эвклидово пространство, для которого группа Γ сводится к тождественному преобразованию, а форма R тождественно равна нулю.

V. ГРУППА ГОЛОНОМИИ НЕПРИВОДИМЫХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

16. Если вещественное симметрическое пространство приводимо, то его линейный элемент ds^2 имеет вид

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2.$$

Представим ds_1^2 и ds_2^2 в виде суммы квадратов

$$ds_1^2 = \sum_{i=1}^{n_1} \omega_i^2, \quad ds_2 = \sum_{j=1}^{n_2} \omega_{n_1+j}^2.$$

Это представление позволяет связать с каждой точкой пространства ортогональный репер (T), для которого

$$\omega_{i,\, n_1+j} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n_1;\ j = 1, \ldots, n_2).$$

Следовательно, компоненты $R_{ij,\,kh}$ отличны от нуля только в том случае, когда все их четыре индекса i, j, k, h принадлежат или к группе первых n_1 индексов, или к группе последних n_2 индексов. Поэтому бесконечно малые преобразования, отвечающие элементарным циклам *), оставляют инвариантным каждое из вещественных плоских многообразий

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_{n_1} = 0,$$
$$x_{n_1+1} = x_{n_1+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Таким образом, группа Г *оставляет инвариантным плоское многообразие.*

17. Обратно, предположим, что группа вращений Г оставляет инвариантным плоское многообразие; очевидно, что она оставляет инвариантным и вполне ортогональное многообразие. Можно выбрать реперы так, чтобы эти инвариантные многообразия имели бы соответственно вид

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_\nu = 0,$$
$$x_{\nu+1} = x_{\nu+2} = \ldots = x_n = 0.$$

Отсюда следует, что из коэффициентов $a_{\alpha ij}$ не равны нулю только те, у которых оба индекса i и j одновременно принадлежат или к группе ν первых индексов, или к группе $n-\nu$ последних индексов [24]. Вследствие этого из коэффициентов аффинной связности ω_{ij} не равны нулю только те, у которых оба индекса удовлетворяют тому же условию. Поэтому ν соотношений

$$\omega_i' = \sum_{k=1}^{\nu} [\omega_k \omega_{ki}] \qquad (i = 1, \ldots, \nu)$$

показывают, что уравнения

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_\nu = 0$$

образуют вполне интегрируемую систему, и такое же рассуждение, как в n°9, показывает, что дифференциальные квадратичные формы

$$ds_1^2 = \omega_1^2 + \ldots + \omega_\nu^2$$

---

*) Здесь имеются в виду бесконечно малые вращения группы голономии Г, испытываемые векторами в данной точке после их параллельного обнесения по бесконечно малому замкнутому пути („элементарному циклу"). (*Прим. ред.*)

выражаются только через ν переменных и их дифференциалы. Аналогичный результат имеет место для формы

$$ds_2^2 = \omega_{\nu+1}^2 + \ldots + \omega_n^2.$$

Таким образом, наше пространство приводимо.

Необходимое и достаточное условие неприводимости имметрического пространства состоит в том, что его группа голономии не оставляет инвариантным ни одного вещественного плоского многообразия.

ГЛАВА II

ПЕРВЫЙ МЕТОД: ГРУППА ГОЛОНОМИИ

I. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ВЕЩЕСТВЕННЫХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ГРУППАХ

18. Мы видели (в n°17), что неприводимые симметрические пространства характеризуются тем, что их группа голономии не оставляет инвариантным ни одного плоского многообразия. Укажем теперь, каким образом получить все вещественные ортогональные группы, не оставляющие инвариантным ни одного вещественного плоского многообразия.

Предположим сначала, что группа Г оставляет инвариантным мнимое плоское многообразие P. Тогда оно оставляет инвариантным и сопряженное ему мнимое плоское многообразие P_0. Эти два многообразия не могут иметь ни одного общего направления, так как такие общие направления определили бы вещественное плоское многообразие, инвариантное по отношению к данной группе. Кроме того, сумма размерностей P и P_0 должна быть равна n, так как в противном случае минимальное вещественное плоское многообразие, содержащее P и P_0, было бы инвариантным по отношению к Г. Поэтому n должно быть четным и P должно иметь размерность $\frac{n}{2}$.

Пусть

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_\nu = 0 \qquad \left(\nu = \frac{n}{2}\right)$$

— уравнения P, где y_i — линейные комбинации переменны $x_1, \ldots, x_n$ с комплексными коэффициентами. Обозначим сопряженные величины через

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_\nu.$$

Квадрат длины вектора является квадратичной формой от y_i, и $\bar{y}_i$ и поэтому он может быть представлен в виде

$$\Phi(y_i) + \bar{\Phi}(\bar{y}_i) + \Psi(y_i, \bar{y}_j).$$

Форма $\bar{\Phi}(\bar{y}_i)$ комплексно сопряжена с Φ, а форма Ψ является эрмитовой формой, принимающей только вещественные значения при любых комплексных значениях y_i.

Так как группа Г преобразует между собой переменные y_i, с одной стороны, и переменные $\bar{y}_i$, с другой стороны, она оставляет инвариантными две вещественные квадратичные формы от $x_1, \ldots, x_n$:

$$\Phi(y_i)+\overline{\Phi}(\bar{y}_i) \quad \text{и} \quad \Psi(y_i, \bar{y}_j)$$

Но это возможно только в том случае, когда эти две формы пропорциональны друг другу[1], поэтому здесь одна из этих форм должна быть тождественно равна нулю. Однако первая из этих форм не является положительно определенной, так как, если ее привести (что всегда возможно) к сумме квадратов, мы получим

$$\Phi(y_i)+\overline{\Phi}(\bar{y}_i)=\sum_i(y_i^2+\bar{y}_i^2),$$

т. е. сумму ν положительных и ν отрицательных вещественных квадратов.

Поэтому необходимо, чтобы основная форма, дающая квадрат вектора, была положительно определенной эрмитовой формой [25].

Этот же результат можно выразить и другим способом, говоря, что *мнимые плоские многообразия, могущие быть инвариантными по отношению к группе* Г, *необходимо являются вполне изотропными многообразиями* $\frac{n}{2}$ *измерений. Группу* Г *при этом можно рассматривать как вещественную группу над* $\frac{n}{2}$ *комплексными переменными, оставляющую инвариантной положительно определенную эрмитову форму.*

Заметим, что вполне может случиться, что существуют различные мнимые плоские многообразия, инвариантные по отношению к группе Г, и даже в бесконечном количестве[2].

---

[1] Всякая линейная группа, оставляющая инвариантными две различные квадратичные формы F и F_1, из которых F_1 определенная, оставляет инвариантным по меньшей мере одно вещественное плоское многообразие, и именно то, которое мы получим, приравнивая нулю частные производные одной из вырожденных вещественных форм пучка $F+\lambda F_1$.

[2] Пользуясь случаем, укажу на ошибку, вкравшуюся в мой мемуар [5]. Эта ошибка находится на стр. 155 и состоит в утверждении, что вещественная линейная группа, не оставляющая инвариант-

19. Теперь мы можем получить очень важные сведения о структуре вещественных ортогональных групп, приводя базис их бесконечно малых преобразований к нормальному виду. Воспользуемся снова вещественными прямоугольными координатами x_i. Всякое бесконечно малое ортогональное преобразование

$$U=\sum_{(ij)} a_{ij}\left(x_i\frac{\partial}{\partial x_j}-x_j\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

определяется системой компонент бивектора $a_{ij}=-a_{ji}$. Условимся говорить, что квадрат меры этого бивектора является скалярным квадратом бесконечно малого преобразования, и будем писать

$$U\,|\,U=\sum_{(ij)} a_{ij}^2.$$

Точно так же определим скалярное произведение двух преобразований U, V, соответствующих системам компонент бивекторов a_{ij} и b_{ij}, с помощью соотношения

$$U\,|\,V=\sum_{(ij)} a_{ij}b_{ij}.$$

Будем говорить, что вещественная ортогональная группа Г порядка r имеет нормальный базис, если r бесконечно малых преобразований $U_1, \ldots, U_r$ имеют скалярные квадраты, равные 1, а попарные скалярные произведения, равные нулю. В группу Г всегда можно ввести нормальный базис и притом с точностью до ортогональной подстановки над преобразованиями U_α. Поэтому мы можем предположить, что

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{(ij)} a_{\alpha ij}^2=1\\ &\sum_{(ij)} a_{\alpha ij}a_{\beta ij}=0\end{aligned}\right\}(\alpha\neq\beta). \tag{16}$$

Структурные константы группы Г обладают здесь замечательными свойствами. В самом деле, если мы умножим уравнения (5) (п° 5)

$$\sum_k (a_{\alpha ik}a_{\beta kj}-a_{\beta ik}a_{\alpha kj})=\sum_\rho c_{\alpha\beta\rho}a_{\rho ij}$$

ным ни одного плоского многообразия, оставляет инвариантными самое большее два мнимых плоских многообразия, сопряженных друг другу. Впрочем, эта ошибка не влияет на рассуждения и результаты этого мемуара.

на $a_{\gamma ij}$ и просуммируем то индексам i и j, то получим

$$2c_{\alpha\beta\gamma}=\sum_{i,j,k}a_{\alpha ik}a_{\beta kj}a_{\gamma ij}-\sum_{i,j,k}a_{\alpha kj}a_{\beta ik}a_{\gamma ij}=-2\sum_{i,j,k}a_{\alpha ij}a_{\beta jk}a_{\gamma ki},$$

откуда

$$c_{\alpha\beta\gamma}=-\sum_{i,j,k}a_{\alpha ij}a_{\beta jk}a_{\gamma ki}. \tag{17}$$

Из этой формулы непосредственно видно, что величины $c_{\alpha\beta\gamma}$ не изменяются при циклической перестановке индексов и меняют знак при перемене местами двух индексов

$$c_{\alpha\beta\gamma}=c_{\beta\gamma\alpha}=c_{\gamma\alpha\beta}=-c_{\beta\alpha\gamma}=-c_{\gamma\beta\alpha}=-c_{\alpha\gamma\beta}. \tag{18}$$

20. Рассмотрим теперь группу Γ', показывающую, как Γ преобразует между собой формы ξ_α, поставленные в соответствие преобразованиям U_α. Мы имеем

$$U_\alpha(\xi_\beta)=-\sum_\rho c_{\alpha\beta\rho}\xi_\rho,$$

откуда

$$U'_\alpha=-\sum_{(\lambda\mu)}c_{\alpha\lambda\mu}\left(\xi_\mu\frac{\partial}{\partial\xi_\lambda}-\xi_\lambda\frac{\partial}{\partial\xi_\mu}\right).$$

Мы видим, что группа Γ' также является вещественной ортогональной группой 1). Всякому плоскому многообразию, инвариантному для группы Γ', соответствует нормальный делитель группы Γ: в самом деле, если группа Γ' преобразует между собой некоторое число линейных форм от $\xi_1,\ldots,\xi_r$, например,

$$a_1\xi_1+\cdots+a_r\xi_r,$$
$$b_1\xi_1+\cdots+b_r\xi_r,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

то коммутирование произвольного преобразования группы Γ с различными преобразованиями

$$a_1U_1+\cdots+a_rU_r.$$
$$b_1U_1+\cdots+b_rU_r$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

снова дает линейные комбинации тех же преобразований [26].

---

1) В теории групп эту группу называют *присоединенной группой* данной группы. См. ниже п°22.

Поэтому разыскание нормальных делителей группы Г сводится к разысканию плоских многообразий, инвариантных для Г'. Если мы рассмотрим сначала те из этих многообразий, которые являются вещественными, то увидим, что с помощью вещественной ортогональной подстановки мы можем привести переменные ξ к такому виду, что их можно расположить в виде некоторого числа последовательностей

$$\begin{gathered}\xi_1, \ldots, \xi_s;\\ \xi_{s+1}, \ldots, \xi_t;\\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\end{gathered}$$

обладающих следующими свойствами:

1°. Переменные каждой последовательности преобразуются группой Г' между собой.

2°. Эти последовательности нельзя разложить на частичные последовательности, переменные которых преобразуются между собой.

Вследствие этого коэффициенты $c_{\alpha ij}$ отличны от нуля только в том случае, когда оба их индекса i, j принадлежат к одной и той же последовательности. Поэтому в силу соотношений (18) *только такие структурные константы могут быть отличны от нуля, у которых все три индекса принадлежат к одной и той же последовательности.* Иначе говоря, *группа* Г *разлагается на некоторое число вещественных нормальных делителей, коммутативных между собой, ни один из которых уже не допускает вещественного нормального делителя.*

21. Покажем теперь, что если *вещественная ортогональная группа не допускает ни одного вещественного нормального делителя, она не допускает также и ни одного мнимого нормального делителя.*

В самом деле, рассмотрим группу Г', ортогональную и не оставляющую инвариантным ни одного вещественного плоского многообразия. Единственными мнимыми плоскими многообразиями, которые эта группа может оставить инвариантными, являются вполне изотропные многообразия $\frac{r}{2}$ измерений (n°18).

Можно предположить, что это многообразие определяется соотношением

$$\xi_1 + i\xi_2 = \cdots = \xi_{r-1} + i\xi_r = 0. \qquad (r \text{ четно}).$$

Выразим тот факт, что U'_α оставляет это многообразие инвариантным. Для этого положим:

$$\begin{aligned} \alpha' &= 2i-1, \text{ если } \alpha = 2i, \\ \alpha' &= 2i \quad\;\;\;\, , \text{ если } \alpha = 2i-1. \end{aligned}$$

Тогда будем иметь соотношения

$$c_{\alpha\beta\gamma} = (-1)^{\beta+\gamma} c_{\alpha\beta'\gamma'}.$$

Из соотношений (18) и этих соотношений мы получаем

$$\begin{aligned} c_{\alpha\beta\gamma} = (-1)^{\beta+\gamma} c_{\alpha\beta'\gamma'} = (-1)^{\beta+\gamma+\alpha+\gamma'} c_{\alpha'\beta'\gamma} = \\ = (-1)^{\beta+\gamma+\alpha+\gamma'+\alpha'+\beta'} c_{\alpha\beta\gamma} = -c_{\alpha\beta\gamma} \end{aligned}$$

Таким образом, все коэффициенты $c_{\alpha\beta\gamma}$ равны нулю. Поэтому, если Γ имеет порядок $r > 1$, группа Γ оставляет инвариантными бесконечное количество вещественных плоских многообразий, что противоречит предположению. Впрочем, по смыслу доказываемого предложения и нужно считать $r > 1$. [27]

22. Итак, мы пришли к теореме:

Всякая вещественная ортогональная группа разлагается на некоторое число вещественных нормальных делителей, простых и перестановочных между собой.

Мы можем добавить некоторые важные сведения о структуре каждого из этих нормальных делителей. Как известно, в теории простых групп важную роль играет квадратичная форма $\varphi(e)$ ¹⁾, выражающая сумму квадратов корней характеристического уравнения для произвольного бесконечно малого преобразования $\sum_i e_i U_i$ этой группы:

$$\varphi(e) = \sum_{i,j,\rho,\sigma} e_i e_j c_{i\rho\sigma} c_{j\sigma\rho}.$$

Здесь можно заменить переменные e_i на ξ_i, и форма $\varphi(\xi)$, полученная таким образом, инвариантна для группы Γ′, которая является не чем иным, как *присоединенной группой* для Γ [28]. Если группа Γ проста, единственной инвариантной квадратичной формой для ортогональной группы Γ′ является, с точно-

---

¹⁾ См. Картан [1], стр. 25. Форма $\varphi(e)$ представляет собой комбинацию $\psi_1^2(e) - 2\psi_2(e)$.

стью до постоянного множителя, форма $\sum_i \xi_i^2$ *). Поэтому *a priori* мы имеем здесь:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{(\rho\sigma)} c_{\alpha\rho\sigma} c_{\beta\rho\sigma} = 0, \quad (\alpha \neq \beta) \\ &\sum_{(\rho\sigma)} {c_{\alpha\rho\sigma}}^2 = H, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

и, следовательно,

$$\varphi(e) = -2H(e_1^2 + e_2^2 + \cdots + e_r^2).$$

Простые группы, на которые разлагается группа Г, обладают свойством, что их форма $\varphi(e)$ является отрицательно определенной[1]. Мы будем называть такие группы группами *унитарной* простой (вещественной) структуры[2]. **)

---

*) См. сноску n° 18, стр. 134. (*Прим. перев.*)

[1] Вещественные простые группы, обладающие этим свойством существуют для всех типов простых групп комплексной структуры (см. Картан [6]). Они характеризуются также тем свойством, что все корни их характеристического уравнения чисто мнимы. Это свойство хорошо известно для ортогональных групп.

[2] Я применяю это выражение, так как линейные преобразования эрмитовой формы в себя, порождающие группу как раз такого типа, иногда называют унитарными.

**) Мы опускаем остальную часть гл. II (n° 23 — n°46) как посвященную слишком специальным вопросам. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА III

ВТОРОЙ МЕТОД: ГРУППА ДВИЖЕНИЙ

I. СТРУКТУРА ГРУППЫ G ДВИЖЕНИЙ

47. Мы уже привлекали внимание читателя (n° 22) к форме $\varphi(e)$, связанной с любой группой и представляющей собой сумму квадратов корней характеристического уравнения для произвольного бесконечно малого преобразования $\sum_i e_i X_i$ этой группы. Эта форма имеет вид

$$\varphi(e) = \sum_{i,\, j,\, \rho,\, \sigma} e_i e_j c_{i\rho\sigma} c_{j\sigma\rho}. \tag{24}$$

Необходимое и достаточное условие того, чтобы группа была простой или полупростой, состоит в том, чтобы эта форма имела дискриминант, отличный от нуля[1].

Вычислим эту форму для группы G движений (гл. I, разд. IV). Для этого обозначим через

$$\sum_i e_i X_i + \sum_\alpha \eta_\alpha Y_\alpha$$

произвольное преобразование группы. Положим

$$-\frac{1}{2}\varphi(e, \eta) = \sum_{i,\, j} G_{ij} e_i e_j + 2\sum_{i,\, \alpha} G_{i\alpha} e_i \eta_\alpha + \sum_{\alpha,\, \beta} G_{\alpha\beta} \eta_\alpha \eta_\beta.$$

Применяя формулы (12) (n°8), которые мы здесь напишем снова,

$$(X_i X_j) = -\sum_{\rho,\, \sigma} a_{\rho ij} A_{\rho\sigma} Y_\sigma,$$

$$(X_i Y_\alpha) = \sum_k a_{\alpha ik} X_k,$$

$$(Y_\alpha Y_\beta) = \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho} Y_\rho,$$

---

[1] Картан [1], стр. 51—52. В действительности в этой работе теорема доказывалась для формы $\psi_2(e)$, но она совершенно так же справедлива и для формы $\varphi(e)$. [См. также Чеботарев [1], стр. 257—258 (теорема 69) — *Прим. перев.*]

мы находим

$$
\begin{aligned}
G_{ij} &= \sum_{\rho,\sigma,k} A_{\rho\sigma} a_{\rho ik} a_{\sigma jk},\\
G_{i\alpha} &= 0,\\
G_{\alpha} &= \sum_{(ij)} a_{\alpha ij} a_{\beta ij} - \frac{1}{2} \sum_{\rho,\sigma} c_{\alpha\rho\sigma} c_{\beta\sigma\rho}.
\end{aligned}
$$

Применим теперь соотношения n° 42 [29] и предположим, что группа Г разложена на ее простые нормальные делители и в каждом из них выбран нормальный базис. Тогда будем иметь

$$
\left.
\begin{aligned}
&G_{ii} = C, && G_{ij} = 0 \quad (i \neq j),\\
&G_{i\alpha} = 0, &&\\
&G_{\alpha\alpha} = 1 + \sum_{(\rho\sigma)} (c_{\alpha\rho\sigma})^2 = 1 + H_\alpha^2 && G_{\alpha\beta} = 0 \quad (\alpha \neq \beta).
\end{aligned}
\right\} \qquad (25)
$$

В конечном счете мы получаем

$$
-\frac{1}{2}\varphi(e,\eta) = C(e_1^2 + \ldots + e_n^2) + \sum_\alpha (1 + H_\alpha^2)\eta_\alpha^2 \qquad (26)
$$

48. Часть формы $-\frac{1}{2}\varphi(e,\eta)$, содержащая переменные η_α, является *положительно определенной*. Часть же, содержащая переменные e_i, также является знакоопределенной, но как положительной, так и отрицательной, если только C не равно нулю. Для того чтобы показать, что C никогда не равно нулю, мы могли бы воспользоваться результатами гл. II. *Покажем это непосредственно.*

В самом деле, соотношения (12) показывают, что группа G совпадает со своей производной группой. Поэтому уравнения

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial e_i} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta_\alpha} = 0
$$

определяют *максимальный разрешимый нормальный делитель группы* G[1]). Если бы C была равна нулю, эта подгруппа порождалась бы преобразованиями X_i, но в силу (12) эти преобразования не порождают группу [30].

---

[1]) Картан [1], стр. 109, теорема VI. [См. Чеботарев [1], стр. 257. Впрочем, нужный нам результат можно получить и без ссылок на эти теоремы — см. примечание [30]. — *Прим. ред.*]

Отсюда можно извлечь вывод, уже полученный нами другим способом в гл. II. Предположим, что для данной группы Г для коэффициентов $A_{\rho\tau}$ существуют две системы различных значений, т. е. таких значений, которые отличаются не только постоянным множителем. В таком случае можно было бы получить третью систему значений, придающую константе C значение нуль, что невозможно. Можно было бы возразить, что для этой третьей системы значений форма R была бы вырожденной, но уравнения (12) и в этом случае определяли бы группу, и преобразования X_i могли бы породить подгруппу только в том случае, когда все преобразования $\sum_\sigma A_{\rho\tau} Y_\sigma$ равны нулю, т. е. если равны нулю все коэффициенты A_ρ.

Мы нашли, таким образом, часть теоремы n° 41 *), согласно которой *всякой группе* Г *соответствует класс неприводимых пространств, кривизна которых зависит только от одного параметра.*

49. Установив, что группа G проста или полупроста **), найдем, в каком случае она не проста.

Заметим сначала, что, согласно (12), преобразования X_i преобразуются с помощью Y_α точно так же, как переменные x_i с помощью U_α.

Предположим, во-первых, что нормальный делитель g содержит все преобразования X_i. Тогда в силу вида $(X_i X_j)$ он содержит и все преобразования Y_α и, следовательно, совпадает со всей группой G.

Предположим, во-вторых, что нормальный делитель g содержит одну или несколько линейных комбинаций преобразований X_i. Тогда в g входят и коммутаторы этих комбинаций и Y_α, и легко видеть, что совокупность всех этих комбинаций X_i соответствует плоскому многообразию, инвариантному относительно группы Г. Мы уже видели, что единственным инвариантным плоским многообразием для Г могут быть только вполне изотропные многообразия размерности $\frac{n}{2}$. Поэтому можно предположить, что линейные комбинации X_i, содержащиеся в g, имеют вид

$$X_1 + iX_2, \quad X_3 + iX_4, \quad \ldots, \quad X_{n-1} + iX_n.$$

---

*) n° 41 предыдущей главы опущен. *(Прим. ред.)*

**) Так как форма $\varphi(e, \eta)$ имеет дискриминант, отличный от нуля (что видно из (26) и из $C \neq 0$). *(Прим. ред.)*

Так как

$$(X_{2i-1}+iX_{2i},\ Y_\alpha)=\sum_k (a_{\alpha,\,2i-1,\,k}+ia_{\alpha,\,2i,\,k})\,X_k,$$

то

$$a_{\alpha,\,2i-1,\,2\ -1}=a_{\alpha,\,2i,\,2k},\quad a_{k,\,2i-1,\,2k}=-a_{\alpha,\,2i,\,2k-1}.$$

Обозначим через i и i' два последовательных индекса, из которых больший является четным и может обозначаться как i, так и i'. Тогда имеем

$$a_{\alpha ij}=(-1)^{i+j}\,a_{\alpha i'j'},$$

откуда получаем

$$(X_{2i-1}+iX_{2i},\ X_{2j-1}-iX_{2j})=-2\sum_{\rho,\,\sigma}(a_{\rho,\,2i-1,\,2j-1}+$$

$$+ia_{\rho,\,2i,\,2j-1})\,A_{\rho\sigma}Y_\sigma.$$

Отсюда следует *), что нормальный делитель g содержит все преобразования $\sum\limits_\sigma A_{\rho\sigma}Y_\sigma$, т. е. все преобразования Y_ρ, откуда находим, что он содержит также все преобразования (X_iY_α), т. е. также все преобразования X_i. Группа g, следовательно, снова совпадает с G.

Предположим, в-третьих, что нормальный делитель g содержит хоть одно преобразование Y_α. Тогда он содержит преобразования (X_iY_α), и мы вновь приходим к предыдущим случаям.

50. Остается только один случай, когда нормальный делитель g порождается некоторым числом s преобразований вида

$$X_1+Z_1,\ X_2+Z_2,\ \ldots,\ X_s+Z_s,$$

где Z_i — линейно независимые комбинации Y_α **). Отсюда следует, что $2s$ преобразований

$$X_1,\ \ldots,\ X_s;\ Z_1,\ \ldots,\ Z_s$$

---

*) Полученную формулу нужно переписать для этого еще раз с перестановкой в ней индексов i и j; тогда обнаружится, что вещественная и мнимая части в полученном выражении по отдельности входят в g. (*Прим. ред.*)

**) И, конечно, $X_1, X_2, \ldots, X_s$ линейно независимые комбинации X_i, принятые за первые s базисных бесконечно малых преобразований. (*Прим. ред.*)

также образуют нормальный делитель. Это возможно только в том случае, когда [81]

$$s = n = r.$$

Преобразования Z_i не обязательно являются вещественными комбинациями преобразований Y_i. Но во всяком случае мы имеем соотношения вида

$$(X_i + Z_i, X_j) = \sum_k A_{ijk}(X_k + Z_k),$$
$$(X_i + Z_i, Z_j) = \sum_k B_{ijk}(X_k + Z_k),$$

откуда в силу вида уравнений (12)

$$\begin{aligned} (X_i X_j) &= \sum_k A_{ijk} Z_k, & (Z_i X_j) &= \sum_k A_{ijk} X_k, \\ (X_i Z_j) &= \sum_k B_{ijk} X_k, & (Z_i Z_j) &= \sum_k B_{ijk} Z_k, \end{aligned} \tag{27}$$

откуда находим

$$A_{ijk} = -A_{jik}, \quad B_{ijk} = A_{ijk}. \tag{28}$$

Преобразования $X_i - Z_i$ также образуют нормальный делитель, так как

$$(X_i - Z_i, X_i) = -\sum_k A_{ijk}(X_k - Z_k),$$
$$(X_i - Z_i, Z_j) = \sum_k A_{ijk}(X_k - Z_k).$$

Следовательно, полупростая группа G разлагается на два простых нормальных делителя. Пусть теперь

$$-\frac{1}{2}\varphi(e, \zeta) = C(e_1^2 + \ldots + e_n^2) + \sum_{\alpha;\beta} H_{\alpha\beta}\zeta_\alpha\zeta_\beta$$

— форма, равная полусумме квадратов характеристических корней преобразования

$$\sum (e_i X_i + \zeta_\alpha Z_\alpha)$$

с обратным знаком. Первый нормальный делитель определяется соотношением

$$e_i = \zeta_i,$$

второй нормальный делитель определится с помощью соотношения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial e_i}+\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_i}=0\,^{*)}$$

или

$$Ce_i+\sum_k H_{ik}\zeta_k=0.$$

Но эти уравнения сводятся к $e_i+\zeta_i=0$, откуда получаем

$$H_{ij}=0,\quad H_{ii}=C,$$

$$-\frac{1}{2}\varphi(e,\ \zeta)=C(e_1^2+\ldots+e_n^2+\zeta_1^2+\ldots+\zeta_n^2). \qquad (29)$$

Полученный вид формы $\varphi(e)$ показывает, что преобразования Z_i можно рассматривать как пропорциональные преобразованиям Y_i, причем множитель пропорциональности является вещественным, если $C>0$, и чисто мнимым, если $C<0$. Поэтому если положить

$$Z_i=mY_i,$$

из (27) и (28) непосредственно найдем

$$A_{ijk}=m^2c_{ijk},$$
$$(X_iY_\alpha)=m\sum_k c_{i\alpha k}X_k,$$

откуда

$$a_{\alpha ij}=-mc_{\alpha ij}.$$

Поэтому группа Γ *является присоединенной группой простой унитарной группы.*

Мы пришли, таким образом, к следующему выводу:

Группа G движений неприводимого симметрического пространства является простой группой, за исключением класса пространств с простой группой голономии, для которых группа G разлагается на два простых нормальных делителя, изоморфных между собой (вещественных, если пространство имеет положительную кривизну, и мнимых, сопряженных между собой, если пространство имеет отрицательную кривизну).

---

*) Это означает построение в пространстве $(e,\ \zeta)$ n-мерной плоскости, ортогональной к плоскости $e_i=\zeta_i$ в смысле метрики, определяемой квадратичной формой $\varphi(e,\ \zeta)$. (*Прим. ред.*)

II. СВЕДЕНИЕ ЗАДАЧИ К ТЕОРИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

51. Предположим теперь, что группа G проста. Задачу разыскания всех неприводимых симметрических пространств, для которых группа G проста, можно сформулировать несколькими способами. Выше мы видели, что n бесконечно малых преобразований X_i обладают тем свойством, что преобразования

$$(X_i(X_jX_k))$$

являются линейными комбинациями преобразований X_k, и в то же время эти преобразования X_i не порождают подгруппы группы G.

Теперь предположим, что, обратно, в некоторой простой $(n+r)$-параметрической группе имеются n независимых преобразований $X_1, \ldots, X_n$ таких, что комбинации

$$(X_i(X_jX_k)) \qquad (i, j, k=1, 2, \ldots, n)$$

линейно выражаются только через X_i и в то же время X_i не порождают подгруппы группы G. Тогда коммутаторы (X_iX_j) должны содержать r новых независимых бесконечно малых преобразований, так как в противном случае преобразования X_i и (X_iX_j) породили бы подгруппу G.

Докажем, что среди коммутаторов (X_iX_j) именно r независимых.

В самом деле, пусть среди этих коммутаторов не r, а $r+s$ независимых линейных комбинаций преобразований

$$X_1, \ldots, X_s, \quad X_{n+1}, \ldots, X_{n+r}.$$

Покажем, что тогда преобразования $X_1, \ldots, X_s$ порождают нормальный делитель группы G. В самом деле, для $i \leqslant s$, $j \leqslant n$ имеет место

$$(X_iX_j)=\sum_{\substack{k, h=1 \\ (kh)}}^{n} A_{kh}((X_kX_h)X_j)=\sum_{l=1}^{n} B_lX_l,$$

но, с другой стороны, преобразование (X_iX_j) должно быть линейной комбинацией преобразований $X_1, \ldots, X_s, X_{n+1}, \ldots, X_{n+r}$. Поэтому (X_iX_j) зависит только от $X_1, \ldots, X_s$. Точно так же (X_iX_{n+j}) для $i \leqslant s$ имеет вид

$$\left(X_i, \sum_{\substack{k, h=1 \\ (kh)}}^{n} A_{kh}(X_kX_h)\right)=\sum_{l=1}^{n} B_lX_l,$$

но, с другой стороны, (X_iX_{n+j}) является линейной комбинацией выражений вида

$$((X_jX_k)(X_hX_l)) \quad (j,\ k,\ h,\ l \leqslant n),$$

которые приводятся к линейным комбинациям простых коммутаторов, т. е. к линейным комбинациям преобразований $X_1, \dots, X_s;\ X_{n+1}, \dots, X_{n+r}$.

Поэтому преобразования $X_1, \dots, X_s$ действительно порождают нормальный делитель. Однако, так как группа G проста, это невозможно.

Вследствие этого мы имеем соотношения вида

$$(X_iX_j) = \sum_{\alpha} A_{ij\alpha}X_{n+\alpha} \quad (i \leqslant n,\ j \leqslant n),$$

а коммутаторы $(X_iX_{n+\alpha})$, являющиеся линейными комбинациями коммутаторов $(X_i(X_jX_h))$, имеют вид

$$(X_iX_{n+\alpha}) = \sum_{k} B_{\alpha ik}X_k,$$

и, наконец, в силу аналогичных соображений

$$(X_{n+\alpha}X_{n+\beta}) = \sum_{\rho} c_{\alpha\beta\rho}X_{n+\rho}.$$

Таким образом, мы снова получим уравнения того же вида, что и уравнения (12). Структура группы Γ при этом совпадает со структурой подгруппы, порожденной преобразованиями $X_{n+\alpha}$. При этом, конечно, на группу Γ накладывается то дополнительное условие, что она разлагается на унитарные группы *).

52. Я уже доказал в другом мемуаре [1], что разыскание совокупности преобразований X_i, удовлетворяющих указанным условиям, приводит к разысканию таких вполне геодезических многообразий в римановом пространстве, являющемся групповым пространством группы G, которые не являются групповыми пространствами подгруппы этой группы и не содержатся ни в каком групповом пространстве такой подгруппы. Более того, *эти вполне геодезические многообразия сами являются римановыми пространствами, наложимыми на искомое симметрическое пространство.*

---

*) В смысле конца n° 22. (*Прим. ред.*)

[1] Картан [17].[См. стр. 96 настоящего сборника. (*Прим. перев.*)]

Таким образом, предлагаемая задача сводится к разысканию вполне геодезических многообразий римановых пространств, являющихся групповыми пространствами простых групп (см. пп° 45—46).

53. Наша задача может быть рассмотрена и с совсем другой точки зрения, менее связанной с геометрической интуицией, но приводящей к уже решенной задаче теории групп.

Рассмотрим неприводимое симметрическое пространство $\mathscr{E}$ с простой группой движений G.

Если при той же группе голономии Γ мы изменим знаки коэффициентов $A_{\alpha\beta}$ формы Римана

$$R=\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta,$$

то получим другое неприводимое симметрическое пространство $\mathscr{E}'$, соответствующее другой группе движений G'. Непосредственно видно, что мы перейдем от группы G к G', положив

$$X'_k=iX_k \quad (k=1,\ \ldots,\ n)$$
$$Y'_\alpha=Y_\alpha \quad (a=1,\ \ldots,\ r),$$

но, с другой стороны, эти группы нельзя перевести одну в другую с помощью вещественного изоморфизма, так как форма $\varphi(e)$ одной группы отрицательно определенная, а другой — неопределенная с r отрицательными корнями и n положительными.

Всякому неприводимому симметрическому пространству соответствуют две различные вещественные структуры, принадлежащие к одному и тому же комплексному типу. Эти две вещественные структуры переводятся друг в друга с помощью мнимого преобразования, при котором r вещественных бесконечно малых преобразований одной группы соответствуют r вещественным преобразованиям другой группы, а n вещественных преобразований одной группы соответствуют n чисто мнимым преобразованиям другой группы. При этом форма $\varphi(e)$, соответствующая одной из вещественных структур, является отрицательно определенной.

54. Обратно, рассмотрим две вещественные простые структуры, принадлежащие к одному комплексному типу, причем одна из этих структур унитарна. Пусть G и G' — две вещественные группы, имеющие рассматриваемые структуры. Если рассмотреть мнимый переход от бесконечно малых преобразований группы G к таким же преобразованиям группы G', то *в общем случае* нельзя выбрать вещественные базисные бесконечно малые преобразования группы G таким образом, чтобы каждое из них соответствовало вещественному или чисто мнимому бесконечно малому преобразованию группы G'. Если такое соответствие существует, будем называть его нормальным. Оно определится соотношением вида

$$X'_k = iX_k \qquad (k = 1, \ldots, n),$$
$$Y'_\alpha = Y_\alpha \qquad (\alpha = 1, \ldots, r).$$

При этом, если форма $\varphi(e)$ группы G' отрицательно определенная, форма $\varphi(e)$ группы G разлагается на сумму n положительных и r отрицательных квадратов. Сверх того, коммутаторы $(X'_i X'_j)$ и $(Y'_\alpha Y'_\beta)$ зависят только от Y'_α, а коммутаторы $(X'_i Y'_\alpha)$ — только от X'_i. Тогда существует класс неприводимых симметрических пространств, соответствующих этим двум группам G и G'. Для того чтобы кривизна пространства была положительной, его группа движений должна иметь унитарную структуру.

Теперь перед нами возникают два существенных вопроса:

1°. *Можно ли установить нормальное соответствие между двумя различными вещественными простыми структурами, соответствующими одному и тому же комплексному типу, в случаях, когда одна из этих структур унитарна?*

2°. *Приводят ли различные нормальные соответствия, которые можно установить между двумя структурами всегда к одной и той же группе голономии* Г? *)

---

*) Мы опускаем конец этого мемуара, так как в следующей статье содержится усовершенствованное изложение той же теории. Ответы на оба поставленных вопроса являются положительными. *(Прим. ред.)*

КОМПАКТНЫЕ И НЕКОМПАКТНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ И РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ*)

В предыдущих мемуарах¹) я ввел в рассмотрение новые замечательные классы римановых пространств (симметрические пространства**), изучение которых теснейшим образом связано с теорией простых непрерывных групп и помогает осветить важные вопросы этой теории. Мои исследования имели двойной исток: с одной стороны, они представляли собой интересное приложение теорий, относящихся к геометрии групп преобразований²), с другой стороны, меня привело к этим исследованиям решение одной частной задачи римановой геометрии, где важную роль играли римановы пространства, в которых риманова кривизна сохраняется при параллельном переносе³). Именно при определении всех этих пространств и обнаружилось важное геометрическое значение простых непрерывных групп. В частности, я показал, что это определение сводится к определению всех различных *вещественных* форм, которые может иметь простая группа с данной *комплексной* структурой. С другой стороны, мне удалось начать изучение топологии симметрических пространств и, в частности, определить группу связности***) различных *некомпактных* простых групп: эта за-

---

*) E. Cartan, Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne, *Journal de mathématiques pures et appliqués,* т. 8 (1929), стр. 1—33. *(Прим. перев.)*

¹) Картан [18], [19], [20] [первые два мемуара помещены в настоящем сборнике (*Прим. перев.*)].

**) В соответствии с термином, введенным Картаном впоследствии [27], мы переводим здесь первоначальный термин Картана „espaces $\mathcal{E}$“ общепринятым в настоящее время термином „симметрические пространства“. *(Прим. перев.)*

²) См. Картан и Схоутен [1] и Картан [17] [последний мемуар помещен в настоящем сборнике (*Прим. перев.*)].

³) Картан и Схоутен [2]

***) „Группой связности“ Картан называет то, что в топологии называют „фундаментальной группой“ пространства. Термин „фундадача до сих пор еще не рассматривалась. И, наконец, симметрические пространства имеют большое значение еще с одной точки зрения: так как они дают нам замечательные римановы формы различных геометрий, имеющих простую фундаментальную группу в смысле Клейна.

Все эти задачи, столь различные по своей природе, основываются на нескольких важных теоремах, которые я в своих прежних работах проверял для каждой простой структуры в отдельности, но мне не удавалось выявить их более глубокую основу. В этом мемуаре я хочу вернуться к этим основным теоремам и дать общее доказательство. Результатом этого будет не только то, что теория симметрических пространств получит более прочное логическое основание, но также и то, что теперь можно будет значительно сократить вычисления, часто весьма утомительные, которые мне приходилось производить. Так, например, большой мемуар, в котором я определил все вещественные формы простых групп [1], может быть теперь сокращен с 90 страниц до двух десятков.

Первая часть настоящего мемуара посвящена общему изучению *компактных* групп. Большое значение различия между *компактными* и *некомпактными группами* было указано Г. Вейлем. В первой части я использую только наиболее элементарные теоремы теории групп и ни в чем не опираюсь на теорию простых групп. Во второй части я даю два общих доказательства той теоремы, которую в прежних работах я проверял для каждого из больших классов простых групп и согласно которой полная присоединенная группа некомпактной простой группы совпадает с группой изометрических преобразований соответственного симметрического пространства. Второе доказательство идет значительно дальше первого, так как оно показывает, что все компактные подгруппы некомпактной простой группы содержатся (с точностью до преобразования связной присоединенной группы) в одной и той же подгруппе данной группы. Это доказательство используется для одной замечательной теоремы римановой геометрии. Это же доказательство дает мне возможность определить некоторые из чисел Бетти пространства некомпактной простой группы. В третьей части я

ментальная группа" Картан применяет в том смысле, в котором этот термин употреблял Ф. Клейн (см. стр. 225 настоящего сборника). *(Прим. перев.)*

[1] Картан [6].

a priori доказываю, что определение вещественных форм простых групп сводится к разысканию инволютивных автоморфизмов соответственной компактной формы и что, следовательно, определение вещественных форм и определение симметрических пространств — две эквивалентные проблемы. И, наконец, в четвертой части я применяю предыдущую теорему к эффективному определению вещественных форм четырех больших классов простых групп.

I. КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ

1. Если нам дана конечная непрерывная группа преобразований G, порожденная r независимыми бесконечно малыми преобразованиями $X_1, X_2, \ldots, X_r$, то окрестностью преобразования S этой группы мы будем называть совокупность преобразований, полученных умножением преобразования S на различные преобразования, порожденные бесконечно малым преобразованием

$$e_1X_1 + e_2X_2 + \ldots + e_rX_r,$$

где коэффициенты $e_1, e_2, \ldots, e_r$ принимают все значения, меньшие по абсолютной величине некоторого фиксированного числа.

Преобразование S группы G будет называться *предельным* для бесконечного множества преобразований этой группы, если во всякой окрестности преобразования S имеется бесконечное количество преобразований этого множества.

Группа G будет называться *компактной* [clos], если всякое бесконечное множество преобразований этой группы допускает хотя бы одно предельное преобразование, принадлежащее к этой группе. В противоположном случае группа называется *некомпактной* [ouvert].

На плоскости группа вращений вокруг неподвижной точки компактна, а группа параллельных сдвигов вдоль фиксированной прямой некомпактна. Этот пример весьма поучителен. В самом деле, эти группы имеют одну и ту же инфинитезимальную структуру, но они только локально изоморфны, а не изоморфны в целом. Таким образом, одних структурных констант группы недостаточно для того, чтобы определить, компактна она или нет.

2. Простой пример компактной группы дает нам (связная) группа всех вращений вокруг неподвижной точки в эвклидовом пространстве произвольного числа измерений. Пусть, в самом деле,

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

— уравнения ортогональной подстановки n переменных. Коэффициенты a_{ij} связаны уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \sum_k a_{ki}^2 &= 1, \\ \sum_k a_{ki} a_{kj} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (i \neq j) \tag{2}$$

В пространстве n^2 измерений с координатами a_{ij} уравнения (2) определяют алгебраическое многообразие, все точки которого лежат на конечном расстоянии (это многообразие целиком расположено на гиперсфере радиуса $\sqrt{n}$). Это алгебраическое многообразие может быть разложено (и действительно разлагается) на несколько связных многообразий, одно из которых образует пространство связной ортогональной группы. Оно, очевидно, компактно, так как всякое бесконечное множество точек имеет по меньшей мере одну предельную точку *в пространстве* и эта предельная точка принадлежит самому нашему многообразию в силу непрерывности левых частей уравнений (2). *Рассуждение здесь, таким образом, основывается на том, что рассматриваемое многообразие является алгебраическим и ограниченным.*

Тот факт, что полная ортогональная группа компактна, не означает, конечно, что всякая ортогональная группа компактна. Это видно из простого примера 1-параметрической ортогональной группы в четырехмерном пространстве, заданной уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos at - x_2 \sin at, \\ x'_2 &= x_1 \sin at + x_2 \cos at, \\ x'_3 &= x_3 \cos bt - x_4 \sin bt, \\ x'_4 &= x_3 \sin bt + x_4 \cos bt, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где a и b — константы, *несоизмеримые* между собой.

3. Существует простое *необходимое* условие для того, чтобы группа *линейных подстановок* была компактной: оно

состоит в том, что коэффициенты общей подстановки группы должны быть ограниченными. Отсюда вытекает важное следствие, относящееся к корням характеристического уравнения бесконечно малой подстановки

$$e_1A_1+e_2A_2+\ldots+e_rA_r$$

этой группы. Пусть, в самом деле, ω — один из этих корней[1]). Простой заменой переменных можно привести одно из уравнений подстановки 1-параметрической группы, порожденной рассматриваемой бесконечно малой подстановкой, к виду

$$x'_1=x_1e^{\omega t}.$$

Поэтому, если вещественная часть корня ω отлична от нуля, коэффициенты подстановки не могут остаться ограниченными. Таким образом, необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения были нулевыми или чисто мнимыми[2]). В частности, *необходимо, чтобы квадратичная форма переменных* $e_1, e_2, \ldots, e_r$, *дающая сумму квадратов корней характеристического уравнения, была бы отрицательно определенной или отрицательно полуопределенной.*

Это условие, очевидно, выполняется для полной вещественной ортогональной группы.

4. *Применение к присоединенной группе непрерывной группы.* Если нам дана непрерывная группа G с вещественными параметрами, то связная присоединенная группа Γ группы G определяется тем, как преобразуются преобразования S_x группы G с помощью преобразований S_a:

$$S'_x=S_a^{-1}S_xS_a.$$

Если мы ограничимся *бесконечно малыми* преобразованиями S_x, группа Γ становится линейной группой, операции которой применяются к коэффициентам x_i всех бесконечно малых преобразований $\sum x_iX_i$ группы G. Образующие бесконечно

---

[1]) Это значит, что существует линейная комбинация ξ этих переменных, бесконечно малое приращение которой равно $\omega\xi$.

[2]) Кроме того, если ω является кратным корнем порядка p, необходимо, чтобы этот корень обращал бы в нуль все миноры порядка $n-p+1$ левой части характеристического уравнения.

малые преобразования группы Г имеют вид

$$E_i = \sum_{k,\,h} c_{ikh} x_k \frac{\partial}{\partial x_h}, \tag{4}$$

где c_{ikh} — *структурные константы* группы G.

Рассмотрим теперь квадратичную форму $\varphi(e)$, дающую сумму квадратов корней характеристического уравнения бесконечно малой подстановки $\sum_i e_i E_i$:

$$\varphi(e) = \sum_{i,\,j,\,k,\,h} e_i e_j c_{ikh} c_{jhk}. \tag{5}$$

Для того чтобы присоединенная группа Г *была компактной, необходимо, чтобы эта форма была отрицательно определенной или отрицательно полуопределенной.*

5. *Если группа G компактна, ясно, что группа* Г *тоже компактна,* так как всякому преобразованию группы G соответствует одно, и только одно, преобразование группы Г*). Следовательно, если всякое бесконечное множество преобразований группы G допускает предельное преобразование, принадлежащее группе G, то тем более должна обладать этим свойством группа Г. Но обратное неверно, за исключением того случая, когда одному преобразованию группы Г соответствует только конечное число преобразований группы G. В этом последнем случае нетрудно доказать, что компактность группы Г влечет за собой компактность группы G.

Из всего этого следует, что *если форма $\varphi(e)$, относящаяся к группе G, является неопределенной, группа G некомпактна.*

6. *В случае, когда форма $\varphi(e)$ — знакоопределенная, группа G является компактной.* Эта важнейшая теорема, принадлежащая Г. Вейлю, является основой его теории линейных представлений полупростых групп[1]). Однако можно доказать непосредственно, не прибегая к теории полупростых групп,

---

*) В общем случае группа Г *гомоморфна* группе G и ядром этого гомоморфизма является *центр* группы G. Таким образом, группа Г изоморфна факторгруппе группы G по ее центру. *(Прим. перев.)*

[1]) Вейль [1].

что если не сама группа G, то по крайней мере ее присоединенная группа Γ является компактной[1]).

Заметим сначала, что если ω является корнем характеристического уравнения для бесконечно малого преобразования $\sum_i e_i X_i$, то это означает, что существует бесконечно малое преобразование Y, удовлетворяющее соотношению

$$\Big(\sum_i e_i X_i,\ Y\Big) = \omega Y.$$

Всякая линейная подстановка над бесконечно малыми преобразованиями группы G, сохраняющая ее структурные константы (автоморфизм группы), оставляет инвариантными корни ω, а следовательно, и форму $\varphi(e)$. В частности, это относится и к линейным подстановкам группы Γ[2]). Но знакоопределенную форму $\varphi(e)$ можно привести к сумме квадратов:

$$\varphi(e) = \pm (e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_r^2). \tag{6}$$

Отсюда следует, что группу Γ можно предположить ортогональной, что приводит к соотношению

$$c_{ikh} + c_{ihk} = 0$$

между структурными константами. Поэтому эти константы не изменяются при любой четной перестановке их индексов и изменяют только знак при любой нечетной перестановке их индексов. Вид (5) формы $\varphi(e)$ показывает, что в этой формуле коэффициенты при квадратах отрицательны и имеет место соотношение

$$\sum_{k,h} c_{ikh}^2 = 1, \quad \sum_{k,h} c_{ikh} c_{jkh} = 0 \quad (i \neq j). \tag{7}$$

Поэтому в формуле (6) следует оставить только знак минус.

7. Покажем теперь, что группа Γ является максимальной связной группой автоморфизмов группы G[3]).

---

[1]) Эта теорема, являющаяся отправной точкой Вейля, приведена им без доказательства. [Вейль [1], стр. 377; см. также русский перевод, стр. 242. *(Прим. ред.)*]

[2]) Проверка этого свойства с помощью вычислений имеется в моей диссертации: Картан [1], стр. 27 (теорема 2).

[3]) Эта теорема доказана в моей диссертации ([1], стр. 113) как следствие из общей теории полупростых групп. [В дальнейшем Картан называет группу всех автоморфизмов — присоединенной группой, а ее максимальную связную часть, содержащую единицу, т. е. группу Γ — связной присоединенной группой. (*Прим. ред.*)]

Сначала заметим, что из предыдущего следует, что всякий автоморфизм группы G представляется ортогональной подстановкой*). Если уравнения этой подстановки имеют вид

$$x'_i = \sum_k b_{ik} x_k,$$

то коэффициенты b_{ij} определяются соотношениями

$$\sum_{\lambda,\mu} b_{\lambda i} b_{\mu j} c_{\lambda \mu k} = \sum_\rho b_{k\rho} c_{ij\rho}, \qquad (i, j, k = 1, \ldots, r), \tag{8}$$

являющимися уравнениями *алгебраического* многообразия. Поэтому максимальная связная группа автоморфизмов порождается бесконечно малыми подстановками. Чтобы найти их, дадим величинам b_{ii} в уравнениях (8) значения $1 + \gamma_{ii}$, бесконечно близкие к 1, а величинам b_{ij} $(i \neq j)$ — бесконечно малые значения γ_{ij}. Так как, кроме того, $\gamma_{ii} = 0$, $\gamma_{ij} + \gamma_{ji} = 0$**), то мы получим

$$\sum_\lambda (c_{\lambda jk}\gamma_{\lambda i} + c_{i\lambda k}\gamma_{\lambda j} - c_{ij\lambda}\gamma_{k\lambda}) = 0$$

или в более симметричной форме

$$\sum_\lambda (c_{jk\lambda}\gamma_{i\lambda} + c_{ki\lambda}\gamma_{j\lambda} + c_{ij\lambda}\gamma_{k\lambda}) = 0. \tag{9}$$

Умножим это выражение на c_{jkh} и просуммируем по индексам j и k. В силу (7) после некоторого изменения индексов суммирования мы получим

$$\gamma_{ih} + \sum_{j,\,k,\,\lambda} (c_{i\lambda k} c_{hjk} - c_{ijk} c_{\lambda kh}) \gamma_{j\lambda} = 0.$$

Но в силу тождеств Якоби

$$\sum_k (c_{i\lambda k} c_{hjk} - c_{ijk} c_{h\lambda k}) = \sum_k c_{hik} c_{j\lambda k},$$

вследствие чего

$$\gamma_{ih} + \sum_{j,\,k,\,\lambda} c_{ikh} c_{kj\lambda} \gamma_{j\lambda} = 0.$$

Положим теперь

$$a_k = \sum_{j,\lambda} c_{kj\lambda} \gamma_{j\lambda}.$$

---

*) Так как он сохраняет инвариантной форму φ (*e*). (*Прим. ред.*)

**) Вследствие ортогонального характера подстановки. (*Прим. ред.*)

Тогда окончательно получим

$$\gamma_{ih} = \sum_k a_k c_{kih}\,.$$

Следовательно, рассматриваемое бесконечно малое преобразование является линейной комбинацией $\sum a_k E_k$ бесконечно малых преобразований присоединенной группы. Эта последняя, таким образом, и является максимальной связной группой автоморфизмов группы G.

Так как коэффициенты этих подстановок образуют ограниченное*) алгебраическое многообразие (8), группа Г является компактной.

Группы G, для которых форма $\varphi(e)$ является знакоопределенной, являются *унитарными полупростыми группами*[1]).

8. Исследуем, могут ли существовать другие компактные группы, кроме рассмотренных. Форма $\varphi(e)$ в этом случае должна быть отрицательно *полуопределенной*. Предположим, что

$$\varphi(e) = -(e_1^2 + \ldots + e_s^2) \qquad s < r.$$

В этом случае уравнения $e_1 = \ldots = e_s = 0$ определяют нормальный делитель, бесконечно малые преобразования которого имеют только нулевые характеристические корни и поэтому они перестановочны со всеми преобразованиями группы**). Обозначим через $i, j \ldots$ индексы $1, 2, \ldots, s$, через $\alpha, \beta, \ldots$ — остальные индексы. Отличная от нуля структурная константа может иметь только один греческий индекс и в этом случае имеет вид $c_{ij\alpha}$. Структурные константы без греческих индексов обладают такими свойствами симметрии, которые необходимы для инвариантности формы $\varphi(e)$ при преобразованиях присоединенной группы. В частности, имеют место соотношения (7).

Тождество Якоби

$$\sum_{t=1}^{s} (c_{ijt} c_{tk\alpha} + c_{jkt} c_{it\alpha} + c_{kit} c_{tj\alpha}) = 0$$

---

*) Вследствие ортогональности подстановок. *(Прим. ред.)*

[1]) Г. Вейль доказал компактность этих групп, показав, что односвязная накрывающая область присоединенной группы накрывает ее только конечное число раз (Вейль [1], стр. 380—381). [См. также русский перевод, стр. 245, теорема 2 — *Прим. перев.*] Конечная группа связности группы Г для каждого типа унитарных простых групп эффективно определена мною в мемуаре [19] (см. стр. 186—200 настоящего сборника).

**) Этот нормальный делитель называется *центром* группы. *(Прим. перев.)*

при фиксированном индексе α совпадает с тождеством (9) причем роль величин γ_{ij} здесь играют величины $c_{ij\alpha}$, откуда следует, что для данного индекса α имеют место соотношения вида

$$c_{ij\alpha}=\sum_k a_k c_{ijk},$$

и, следовательно, вообще

$$c_{ij\alpha}=\sum_k a_{k\alpha} c_{ijk}.$$

Поэтому имеем

$$(X_i X_j)=\sum_k c_{ijk}(X_k+\sum_\lambda a_{k\lambda}X_\lambda).$$

Полагая

$$\overline{X}_i=X_i+\sum_\lambda a_{i\lambda}X_\lambda,$$

мы видим, что бесконечно малые преобразования $\overline{X}_i$ порождают унитарную полупростую группу порядка s. Следовательно, *всякая компактная группа разлагается на унитарную полупростую подгруппу и на одну или несколько 1-параметрических групп* *).

9. *Компактные линейные группы.* Теперь мы можем, пользуясь только элементарными приемами доказательства, показать, что *если группа линейных подстановок — унитарная полупростая группа* **) *и если она, кроме того, неприводима или вполне приводима, то она компактна.* Группа G называется вполне приводимой, если преобразуемые ею переменные можно разделить на некоторое число последовательностей

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_p;\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_q;\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_s;\ \ldots$$

таким образом, что переменные каждой последовательности преобразуются только между собой и что в каждой последовательности, образованной, например, h переменными, нельзя найти независимые линейные комбинации в числе меньшем h,

---

*) В подлиннике в формулировке этой теоремы ошибка: вместо „полупростая“ написано „простая“. *(Прим. перев.)*

**) Здесь имеется в виду, что матрицы линейных подстановок могут быть и комплексные, но группа этих подстановок зависит от вещественных параметров и является полупростой и унитарной *(Прим. ред.)*

которые бы преобразовывались подстановками группы G между собой. Группа G неприводима, если имеется только одна такая последовательность переменных.

Каждая подстановка группы G приводится, таким образом, к последовательному осуществлению некоторого числа линейных подстановок, первая из которых преобразует только переменные $x_1, \ldots, x_p$, вторая — только переменные $y_1, \ldots, y_q$ и так далее. Докажем сначала, что *каждая из этих частичных подстановэк имеет детерминант, равный 1.*

В самом деле, ограничиваясь той частью, которая относится к переменным x, положим

$$X_i = \sum_{k,h} a_{ikh} x_k \frac{\partial}{\partial x_h}.$$

Тогда

$$(X_iX_j) = \sum_{\rho,k,h} (a_{ik\rho}a_{j\rho h} - a_{jk\rho}a_{i\rho h}) x_k \frac{\partial}{\partial x_h} = \sum_{\rho} c_{ij\rho} X_\rho,$$

откуда находим *)

$$\sum_{\rho,k} c_{ij\rho} a_{\rho kk} = \sum_{\rho,k} (a_{ik\rho}a_{j\rho k} - a_{jk\rho}a_{i\rho k}) = 0.$$

Умиожая на c_{ijh} и суммируя по индексам i и j, получим **)

$$\sum_{k} a_{hkk} = 0.$$

Поэтому каждая подстановка этой группы принадлежит к *специальной* однородной линейной группе и, следовательно, ее детерминант равен 1 [1]).

Пусть теперь Γ — присоединенная группа группы G. Обозначив через S_ξ произвольную подстановку группы G, мы можем определить операции T_a группы Γ с помощью уравнения

$$S_{\xi'} = S_a^{-1} S_\xi S_a.$$

---

*) Приравниваем коэффициенты при $x_k \dfrac{\partial}{\partial x_k}$ и затем суммируем по k. *(Прим. ред.)*

**) Пользуемся формулами (7), в которых индексы суммирования перенесены иа первые места, что возможно в силу косой симметрии c_{ijk} по всем индексам. *(Прим. ред.)*

[1]) В действительности, доказательство предполагает только то, что группа G совпадает со своей производной.

Одной операции S_a группы G соответствует только одна операция T_a группы Γ, но одной операции T_a группы Γ соответствует столько операций группы G, сколько подстановок группы G соответствуют тождественной подстановке группы Γ. Это приводит нас к вопросу о том, сколько подстановок S_a группы G перестановочно со всеми другими подстановками S_ξ.

Возьмем одну из подстановок S_a и рассмотрим, как она преобразует переменные x. Пусть ω — один из корней ее характеристического уравнения. Ему соответствует множество таких линейных комбинаций u переменных x, что каждая из них при рассматриваемом преобразовании только умножается на ω. Всякое преобразование S_ξ группы G заменяет линейную комбинацию u другой такой линейной комбинацией переменных x, которая так же при применении операции S_a только умножается на ω. Следовательно, группа G переводит линейные комбинации u, в себя. Но это возможно только в том случае, если число независимых из этих линейных комбинаций равно p: иными словами, ***операция** S_a **умножает все переменные** x **на один и тот же множитель*** ω. Но так как детерминант подстановки, осуществляемой таким образом над переменными x, равен 1, то ω — один из корней p-й степени из единицы. Такие же выводы могут быть сделаны и для остальных последовательностей переменных. Следовательно, в группе G может быть только конечное число подстановок, перестановочных со всеми другими. Поэтому группа G накрывает группу Γ только конечное число раз и, следовательно, группа G компактна.

10. Предыдущая теорема применяется, в частности, к одной важной категории ортогональных групп. В самом деле, я доказал элементарным способом[1]), что всегда можно выбрать базисные бесконечно малые преобразования ортогональной группы таким образом, чтобы при четной перестановке индексов структурные константы не изменялись бы, а при нечетной перестановке индексов — переменили бы только знак. Поэтому, если ортогональная группа не допускает ни одного бесконечно малого преобразования, перестановочного со всеми другими преобразованиями (особенное преобразование), то

---

[1]) Картан [18], стр. 235—237. [См. стр. 134—136 настоящего сборника.—*Прим. перев.*]

соответственная форма $\varphi(e)$ в силу (5) является отрицательно определенной [32]. Следовательно, *если ортогональная группа не допускает ни одного особенного бесконечно малого преобразования, она компактна.*

Имеется еще один класс компактных ортогональных групп — это те ортогональные группы, которые являются *неприводимыми*, по крайней мере с вещественной точки зрения, т. е. если n — число переменных, то для этих групп нельзя найти $p<n$ независимых линейных комбинаций с *вещественными коэффициентами*, преобразуемых этой группой в себя [33]. В самом деле, я показал[1], что в этом случае группа G не может допускать более одного особенного бесконечно малого преобразования. Если оно допускает одно такое преобразование, n четно и группа G разлагается на $(r-1)$-параметрический нормальный делитель и 1-параметрическую группу, определяемую уравнениями

$$x'_{2i-1}=x_{2i-1}\cos t-x_{2i}\sin t,$$
$$x'_{2i}=x_{2i-1}\sin t+x_{2i}\cos t \quad (t=1, 2, \ldots, n).$$

Первая подгруппа компактна, вторая, очевидно, также. Поэтому сама группа G также компактна. Она входит в категорию групп, рассмотренных в n°7.

11. Можно было бы попытаться доказать, что каждая унитарная полупростая линейная группа компактна, применяя тот же прием, который мы использовали в случае вполне приводимой группы. Но это, повидимому, не особенно просто. Впрочем, *посредством обратного хода рассуждений* (*по сравнению с доказательством того, что всякая унитарная полупростая группа является компактной*) *Вейль доказал полную приводимость линейных полупростых групп.*

II. КОМПАКТНЫЕ ПОДГРУППЫ НЕКОМПАКТНОЙ ПРОСТОЙ ГРУППЫ

12. В цитированном выше мемуаре [18] я указал, каким образом определение неприводимых пространств, риманова кривизна которых сохраняется при параллельном переносе

---

[1] Картан [18], стр. 240—241. [Это место в переводе опущено.— *Прим. ред.*]

(симметрических пространств), сводится, за одним исключением, к определению вещественных форм данной простой структуры. Здесь я хочу дать общее доказательство некоторых теорем, которые ранее я только проверял для каждой структуры в отдельности. Это приводит нас, впрочем, к новым интересным теоремам.

Каждое неприводимое симметрическое пространство допускает простую группу движений[1] (за только что упомянутым исключением), и за инфинитезимальный базис этой группы преобразований можно взять преобразования

$$X_1, \ldots, X_s; \quad X_{s+1}, \ldots, X_{s+n} \quad (s+n=r),$$

обладающие следующими свойствами:

1°. Форма $\varphi(e)$ равна

$$\varphi(e) = -(e_1^2 + \ldots + e_s^2) + \\ + \varepsilon(e_{s+1}^2 + \ldots + e_{s+n}^2) \quad (\varepsilon = \pm 1). \qquad (10)$$

2°. Коммутаторы любых двух из s первых преобразований и любых двух из n последних преобразований зависят только от s первых преобразований, коммутаторы одного из s первых и одного из n последних преобразований зависят только от n последних преобразований.

Я доказал в цитированном мемуаре и обратное, но с одним пробелом: именно, для того чтобы полученное симметрическое пространство было неприводимым, нужно потребовать, чтобы первые s преобразований $E_1, \ldots, E_s$ присоединенной группы, рассматриваемые как преобразования коэффициентов $x_{s+1}, \ldots, x_{s+n}$ n последних преобразований, порождали бы *неприводимую* линейную группу g*). Доказательство этого факта было мною пропущено.

Впрочем, это доказательство совсем простое. Предположим, что группа g, являющаяся ортогональной, приводима. Тогда можно разделить n последних преобразований на две последовательности, которые мы обозначим, соответственно, через $X_\alpha, X_\beta, \ldots,$ и $X_\lambda, X_\mu, \ldots,$ причем, если k обозначает один из

---

[1] Картан [18], стр. 119. [См. стр. 145 настоящего сборника.— *Прим. перев.*]

*) В дальнейшем это дополнительное условие предполагается выполненным. (*Прим. ред.*)

индексов 1, ..., s, мы будем иметь

$$c_{i\alpha\lambda}=0, \quad c_{i\lambda\alpha}=0. \tag{11}$$

Благодаря виду (10) формы $\varphi(e)$ структурные константы сохраняются по абсолютной величине при любой перестановке индексов. Поэтому соотношения (11) показывают, что все коммутаторы $(X_\alpha X_\lambda)$ равны нулю.

Рассмотрим совокупность преобразований X_i, перестановочных со всеми преобразованиями X_λ. Предположим, что эти преобразования выражаются линейно через $X_1, \ldots, X_k$; мы сохраним за ними индексы $i, j, \ldots$. Пусть k — любой из индексов 1, 2, ..., s. Тогда легко видеть, что преобразования X_i и X_α порождают нормальный делитель группы G. В самом деле, все коммутаторы $(X_i X_\lambda)$ и $(X_\alpha X_\lambda)$ равны нулю. Далее, коммутаторы $(X_k X_\alpha)$ зависят только от X_α, $(X_k X_\lambda)$ — только от X_λ, а коммутаторы $(X_k X_i)$ зависят только от X_i, так как в силу тождеств Якоби

$$((X_k X_i) X_\lambda)=0.$$

И, наконец, коммутаторы $(X_\alpha X_\beta)$ тоже зависят только от X_i, так как в силу тождества Якоби они перестановочны с X_λ.

Таким образом, группа G допускает нормальный делитель и мы пришли к противоречию.

13. Из всего этого следует, что если мы рассмотрим присоединенную группу Г группы G, то ее подгруппа g компактна (**n°10**), так как она является как раз такой ортогональной линейной группой, неприводимость которой мы только что доказали. Но мы могли бы впасть в ошибку, если бы стали утверждать то же самое для подгруппы g группы G, так как эта подгруппа g является накрывающей группой для одноименной подгруппы Г. Так было бы, например, если бы G была односвязной группой данной структуры и если бы подгруппа g допускала особенное бесконечно малое преобразование *). *Однако теорема остается верной, если G является линейной группой*, так как эта линейная группа в силу теоремы Вейля является *вполне приводимой* и накрывает группу Г конечное число раз. Следовательно, подгруппа g группы G накрывает конечное число раз одноименную подгруппу группы Г.

---

*) Таким образом, нельзя утверждать, что форма $\varphi(e)$, построенная для *самой* группы g, отрицательно определенная (а лишь полуопределенная). (*Прим. ред.*)

Если симметрическое пространство допускает группу Γ в качестве группы движений, то группа изометрических вращений вокруг его начала, являющаяся не чем иным, как группой g, наверное является компактной.

Все предыдущие рассмотрения приложимы и к простой группе G с *комплексными параметрами*. Их можно рассматривать как вещественные параметры, тогда базис группы образован $2r$ бесконечно малыми преобразованиями

$$X_1, X_2, \ldots, X_r; iX_1, \ldots, iX_r,$$

причем первые r преобразований порождают компактную группу, какой бы инфинитезимальной структуры ни была данная простая группа*).

14. Условимся называть подгруппу g *некомпактной* простой группы G с вещественными параметрами *характеристической*, если в группе G можно выбрать базис **)

$$X_1, X_2, \ldots, X_n; Y_1, Y_2, \ldots, Y_s,$$

удовлетворяющий следующим условиям:

1°. Форма $\varphi(e)$ для группы G имеет вид

$$\varphi(e) = -(e_1^2 + \ldots + e_s^2) + \eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2.$$

2°. Линейная подстановка

$$X_i' = -X_i, \quad Y_\alpha' = Y_\alpha$$

над базисными бесконечно малыми преобразованиями является автоморфизмом [34].

Оставим на время в стороне вопрос о том, всякая ли некомпактная простая группа допускает характеристическую подгруппу (см. разд. III). Сейчас мы докажем, что *все характеристические подгруппы образуют непрерывное семейство*, или, выражаясь точнее, что *все они сопряжены между собой в связной присоединенной группе*.

В самом деле, пусть две характеристические подгруппы соответствуют двум различным характеристическим базисам

---

*) Справедливость этого утверждения выяснится позже. (*Прим. ред.*)

**) Для единообразия мы изменили здесь обозначения автора на обозначения, употреблявшиеся автором в предыдущем мемуаре (стр. 123 настоящего сборника). (*Прим. ред.*)

(X_i, Y_α) и (X'_i, Y'_α). От одного из этих базисов можно перейти к другому с помощью линейной подстановки (с вещественными параметрами), оставляющей инвариантной квадратичную форму $\varphi(e)$. Группа линейных подстановок, оставляющих инвариантной эту форму, изоморфна группе изометрических преобразований симметрического риманова пространства отрицательной кривизны[1]), откуда следует[2]), что каждая из этих подстановок может быть получена одним, и только одним, способом, путем последовательного осуществления двух следующих подстановок. Первая подстановка R является ортогональной подстановкой над e_i, сопровождаемой ортогональной подстановкой над η_α. Она оставляет инвариантной характеристическую подгруппу g, изменяя в ней базис. Вторая подстановка T является *сдвигом*, всегда приводимым к виду

$$\begin{aligned}
&e'_i + \eta'_i = e^{a_i}(e_i + \eta_i), \\
&e'_i - \eta'_i = e^{-a_i}(e_i - \eta_i) && (i = 1, \ldots, h), \\
&e'_{h+j} = e_{h+j} && (j = 1, \ldots, s - h), \\
&\eta'_{h+k} = \eta_{h+k} && (k = 1, \ldots, n - h).
\end{aligned}$$

Показатели a_i — *вещественны* [35]. Эта подстановка T входит в 1-параметрическую группу, получающуюся при умножении показателей a_i на один и тот же вещественный множитель t.

Поэтому можно предположить, что над обоими базисами (X_i, Y_α) и (X'_i, Y'_α) произведена одна и та же линейная подстановка, в результате чего мы получили два новых базиса (U_i) и (U'_i), в которых операция T выражается формулами

$$U'_i = c_i U_i, \tag{12}$$

где c_i вещественны и положительны (равны $e^{\pm a_i}$ или 1). Если в базисе (X_i, Y_α) изменить знак у всех преобразований X_i *), то в новом базисе получится такая перестановка преобразований U_i, что каждый коэффициент c_i заменится на обратный.

---

[1]) Это пространство — типа BDI. См. Картан [20], стр. 400—405 (см. также примечание [75], стр. 340 и 342 настоящего сборника).

[2]) Картан [20], стр. 367—372.

*) И аналогично X'_i в базисе (X'_i, Y'_α). *(Прим. ред.)*

Если мы положим теперь

$$(U_iU_j)=\sum_k \gamma_{ijk}U_k,\quad (U'_iU'_j)=\sum_k \gamma'_{ijk}U'_k,$$

то из формул (12) видно, что

$$\gamma'_{ijk}=\frac{c_ic_j}{c_k}\gamma_{ijk}.$$

Перестановка индексов, соответствующая одновременному изменению знаков преобразований X_i и X'_i, по предположению является автоморфизмом для обоих базисов. Поэтому

$$\gamma'_{ijk}=\frac{c_k}{c_ic_j}\gamma_{ijk}.$$

Отсюда следует, что если константа γ_{ijk} не равна нулю, то

$$c_i^2c_j^2=c_k^2,$$

т. е.

$$c_ic_j=c_k \text{ и } \gamma'_{ijk}=\gamma_{ijk}.$$

Таким образом, оба базиса (U_i) и (U'_i) и, следовательно, оба базиса (X_i, Y_α) и (X'_i, Y'_α), получающиеся из них с помощью *одной и той же* линейной подстановки, имеют одинаковые структурные константы. *Уже отсюда видно, что две рассматриваемые характеристические подгруппы изоморфны.* Более того, равенство $\gamma'_{ijk}=\gamma_{ijk}$ сохраняется и при замене показателей a_i на ta_i. Поэтому *две наши характеристические подгруппы входят в непрерывное семейство характеристических подгрупп.* Так как все они изоморфны, а максимальной связной группой автоморфизмов простой группы является ее связная присоединенная группа, мы приходим к выводу, что *две характеристические подгруппы сопряжены между собой в связной присоединенной группе.*

В частном случае, когда группа G является некомпактной простой группой с комплексными параметрами, мы видим, что *все простые компактные группы порядка r данной (комплексной) структуры сопряжены между собой в связной присоединенной группе (с комплексными параметрами).*

15. Теорема, которую мы только что доказали, имеет большое значение. Так как всякая характеристическая подгруппа некомпактной простой группы порождает симметрическое пространство, т. е. риманову форму геометрии Клейна, допускающей группу G в качестве фундаментальной группы, мы видим, что такая геометрия может быть сделана римановой только при единственном выборе образующего элемента пространства[1]. В моем мемуаре [20] мне пришлось проверить это свойство для каждой простой структуры в отдельности (впрочем, я ограничивался только четырьмя большими классами простых групп).

16. Дадим теперь еще одно доказательство предыдущей теоремы, основанное на рассмотрении компактных групп. Мы докажем далее несколько более общее предположение, именно то, что *всякая компактная подгруппа некомпактной простой группы, допускающей характеристическую подгруппу g, сопряжена (в связной присоединенной группе) некоторой подгруппе группы g.*

Для этого мы используем симметрическое пространство отрицательной кривизны, соответствующее характеристической подгруппе g и допускающее G (или, вернее, Γ) в качестве группы движений. Подгруппа g группы Γ является группой изометрических вращений вокруг начальной точки O.

Пусть теперь γ — *компактная* подгруппа группы G. Соответственная подгруппа группы Γ также компактна. Будем применять к начальной точке O различные движения, определяемые преобразованиями группы γ. Так как группа γ компактна, мы получим при этом *замкнутое* многообразие V (которое может сводиться к точке). Но в римановом пространстве без особых точек на конечном расстоянии, являющемся односвязным пространством отрицательной или нулевой кривизны, для заданного конечного числа точек всегда можно найти такую точку, которая остается неподвижной при всех движениях, переставляющих между собой данные точки: это та точка, для которой сумма квадратов расстояний до данных точек мини-

---

[1] См. Картан [20], стр. 421. Эта теорема приводит к установлению совпадения полной (*несвязной*) присоединенной группы группы G и полной группы изометрических преобразований симметрического пространства, для которого группа Γ является связной группой движений (см. также стр. 372).

мальна[1]). Это свойство сохраняется и в том случае, если вместо конечного числа точек мы имеем бесконечное множество точек, образующее *замкнутое* многообразие. Таким образом, мы приходим к выводу, что группа γ, которая, очевидно, оставляет инвариантным многообразие V, оставляет неподвижной и некоторую точку пространства, поэтому эта группа является подгруппой группы (изометрических) вращений вокруг этой точки. Но эта последняя группа сопряжена группе g в связной присоединенной группе, что доказывает теорему *).

18. Из общей теоремы о компактных подгруппах некомпактной простой группы можно вывести интересные геометрические следствия. Рассмотрим риманово пространство (со *знакоопределенным* ds^2), допускающее некомпактную простую группу движений G. Нетрудно доказать, что если s — порядок характеристической подгруппы g группы G, *это пространство имеет по меньшей мере* $n = r - s$ *измерений*. Примером такого пространства является симметрическое пространство, связанное с группой G. Мы сейчас увидим, что *это пространство единственное, число измерений которого не превосходит этого минимального значения*.

Достаточно легко доказывается, что подгруппа g' изометрических вращений рассматриваемого пространства имеет порядок s и что в группе G существует базис

$$U_1, U_2, \ldots, U_n; \quad V_1, V_2, \ldots, V_s,$$

обладающий двумя следующими свойствами:

1°. Преобразования $V_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, s)$ порождают подгруппу g'.

2°. Форма $\varphi(e)$ для преобразования $\Sigma u_i U_i + v_\alpha V_\alpha$ имеет вид

$$-(v_1^2 + \ldots + v_s^2) + u_1^2 + \ldots + u_n^2.$$

Однако из этих предположений непосредственно не следует, что подгруппа g' *является характеристической*. Преобразования присоединенной группы Г, соответствующие

---

[1]) См. Картан [23], стр. 267. [См. также русский перевод, стр. 239—240.— *Прим. перев.*]

*) Мы опускаем n°17, посвященный слишком специальному вопросу. (*Прим. ред.*)

$V_1, \ldots, V_s$, рассматриваемым как линейные подстановки над переменными $u_1, u_2, \ldots, u_n$, порождают ортогональную группу, которая, как известно, разложима на компактную полупростую группу γ и несколько 1-параметрических подгрупп, перестановочных между собой и с группой γ. Так как подгруппа γ компактна, мы можем предположить, что она принадлежит к характеристической подгруппе g и, следовательно (в обозначениях n° 14):

$$V_1 = Y_1,\ V_2 = Y_2,\ \ldots,\ V_h = Y_h.$$

Предположим далее, что всегда возможно, что

$$\begin{gathered} V_{h+1} = \alpha_{h+1} X_{h+1} + \beta_1 Y_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ V_s = \alpha_s X_s + \beta_{s-h} Y_{s-h}, \end{gathered}$$

где коэффициенты α, β — вещественны, причем коэффициенты β отличны от нуля. Соотношения $(V_\alpha V_{h+1}) = 0$ показывают, что Y_{h+1} и $\beta_1 X_1$ перестановочны с $Y_1, \ldots, Y_h$. Но подгруппа g допускает самое большее одно особенное бесконечно малое преобразование. Поэтому, если подгруппа g' не совпадает с g, она образована компактной подгруппой порядка $s-1$ группы g и одним преобразованием $\alpha Y_s + \beta X_1$, перестановочным с $Y_1, \ldots, Y_{s-1}$. Коэффициент β не равен нулю, так как в противном случае подгруппа g' совпала бы с g. Поэтому существует преобразование X_1, перестановочное с $Y_1, \ldots, Y_{s-1}$. Предположим, не нарушая общности, что преобразования X, перестановочные с $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{s-1}$, являются линейными комбинациями преобразований $X_1, X_2, \ldots, X_p$. Соотношения

$$(Y_\alpha Y_s) = (Y_\alpha X_i) = 0 \quad (\alpha = 1, \ldots, s-1;\ i = 1, \ldots, p)$$

влекут за собой

$$(Y_\alpha (Y_s X_i)) = 0,$$

откуда следует, что $(Y_s X_1), \ldots, (Y_s X_p)$ также являются линейными комбинациями преобразований $X_1, \ldots, X_p$. В силу основного свойства подгруппы g это возможно только при $p = n$. Но в таком случае коммутаторы $(X_i X_j)$ зависели бы только от Y_s (в силу свойств симметрии структурных констант) и преобразования $Y_s, X_1, \ldots, X_n$ порождали бы нормальный делитель группы G, что является абсурдом.

Так как мы получили, что подгруппа g' сопряжена с подгруппой g, наша теорема доказана. Мы видим, таким образом, что *если риманово пространство, допускающее некомпактную простую группу движений, имеет минимальное число измерений, соответствующее свойствам этой группы, оно обладает тем свойством, что его риманова кривизна сохраняется при параллельном переносе.* Все такие пространства наложимы друг на друга [36].

III. ИНВОЛЮТИВНЫЕ АВТОМОРФИЗМЫ КОМПАКТНЫХ И НЕКОМПАКТНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

19. В предыдущем разделе мы предполагали, что в некомпактной полупростой группе G всегда существуют характеристические подгруппы. Если G — группа с комплексными параметрами, то доказательство существования такой подгруппы сводится к доказательству существования *унитарной* вещественной формы (для которой $\varphi(e)$ — отрицательно определенная форма) для всякой простой структуры. Мною эффективно найдена такая форма для каждого из типов простых групп[1]. Вейль[2] доказал существование такой формы, применяя сразу ко всем случаям некоторое общее рассуждение. Можно спросить себя, нельзя ли упростить вычисления, приводящие к этому результату, или, еще лучше, нельзя ли доказать теорему из каких-нибудь соображений *a priori*. Такое доказательство позволило бы значительно упростить изложение теории простых групп. Мне не удалось достичь в этом направлении желаемого результата. Укажу только идею, руководившую мной в моих поисках, оказавшихся бесплодными. Мы всегда можем выбрать базис простой группы таким образом, чтобы форма $\varphi(e)$ приобрела вид

$$\varphi(e) = -(e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_r^2).$$

Параметры e_i здесь комплексные. Каждому выбору базиса, соответствующему этому условию, соответствуют комплексные структурные константы c_{ijk}. Так как известно, что доказываемая теорема верна, сумма квадратов модулей величин c_{ijk}

---

[1] Картан [6], стр. 263—265.

[2] Вейль [1], стр. 371—375 (теорема 6 „теорема об унитарном ограничении"). [См. русский перевод, стр. 237—241. См. также Дынкин [1], стр. 107, теорема 13.—*Прим. перев.*]

безусловно допускает нижнюю грань, которая достигается точно, когда эти константы вещественны. Именно это и нужно было доказать *a priori* — сначала, что нижняя грань рассматриваемой суммы фактически достигается, а затем то, что когда эта грань достигается, структурные константы необходимо вещественны. Разумеется, такое доказательство должно было бы опираться только на элементарные теоремы о структуре групп.

20. Перейдем теперь к некомпактной простой группе G с вещественными параметрами. В своем мемуаре [18][1] я показал, как мне удалось для каждого типа некомпактных простых групп *проверить* существование характеристической подгруппы. Эта проверка была весьма утомительной. Теперь я могу *доказать* это существование одним общим методом.

Пусть G — некомпактная простая группа с вещественными параметрами и G_u — компактная группа той же комплексной структуры. Пусть

$$X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_r$$

какой-нибудь базис группы G_u и

$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_r$$

какой-нибудь базис группы G. От одного из этих базисов можно перейти к другому с помощью некоторой линейной подстановки S, коэффициенты которой обязательно являются комплексными [37]. Запишем этот переход в виде

$$(X) = S(Y) \tag{13}$$

или в развернутом виде

$$X_i = \sum_k a_{ik} Y_k \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

Если мы образуем *коммутаторы* $(X_i X_j)$, то получим соотношения

$$\sum_s c_{ijs} a_{sk} = \sum_{s,\,t} a_{is} a_{jt} \gamma_{stk}, \tag{14}$$

где c_{ijs} и γ_{stk} обозначают соответственно структурные константы групп G_u и G.

---

[1] Стр. 123—124. [Это место в переводе опущено.—*Прим. ред.*]

Так как все эти константы вещественны, то соотношения (14) останутся справедливыми, если заменить коэффициенты a_{ij} на мнимо сопряженные коэффициенты $\bar{a}_{ij}$. Отсюда следует, что подстановка $\bar{S}$, мнимо сопряженная к S, переводит базис группы G в базис

$$X'_1,\ X'_2,\ \ldots,\ X'_r \tag{15}$$

некоторой другой компактной группы G'_u, имеющей те же (вещественные) структурные константы, что и G_u. Запишем этот переход в виде

$$(X') = \bar{S}(Y).$$

21. Рассмотрим теперь r-мерное симметрическое пространство, группой движений которого служит группа данной структуры с комплексными параметрами. Двум группам G_u и G'_u соответствуют две точки A и A', которые они оставляют неподвижными [38]. Середину геодезического отрезка между этими точками мы обозначим через O. Тогда существует непрерывное движение *(сдвиг)*, переводящее A в A' вдоль геодезической линии и переносящее параллельно векторы, выходящие из A. Этот сдвиг, если рассматривать в качестве начала, например, точку O, порождается бесконечно малым преобразованием, полученным умножением на $\sqrt{-1}$ одного из бесконечно малых преобразований присоединенной группы компактной группы. Это бесконечно малое преобразование можно поэтому представить линейной подстановкой с мнимыми коэффициентами, произведенной над базисными бесконечно малыми преобразованиями групп G_u, соответствующих различным точкам геодезической линии AA'. Эта подстановка сохраняет структурные константы групп.

Пусть теперь θ — сдвиг, переводящий O в A. Можно предположить, что он переводит надлежащим образом выбранный базис (X'') компактной группы G''_u, отвечающий точке O, в базис (X) группы G_u:

$$(X) = \theta(X''). \tag{16}$$

Подстановка $\bar{\theta} = \theta^{-1}$, одновременно обратная и мнимо сопряженная для подстановки θ, переводит базис (X'') в некоторый базис группы G'_u. Поэтому, обозначая через R некоторую вещественную подстановку, находим

$$(X') = R\theta^{-1}(X''). \qquad (17)$$

Из равенств (13) — (17) следует

$$R\theta^{-2} = \bar{S}S^{-1}.$$

Заменяя каждую матрицу на ее мнимо сопряженную, получим

$$R\theta^{2} = S\bar{S}^{-1} = (\bar{S}S^{-1})^{-1} = \theta^2 R^{-1}.$$

Отсюда, умножая справа на R, а слева на R^{-1}, найдем

$$\theta^2 R = R^{-1}\theta^2, \qquad (18)$$

и, наконец,

$$\theta^4 R = \theta^2(\theta^2 R) = \theta^2 R^{-1}\theta^2 = (R\theta^2)\,\theta^2 = R\theta^4.$$

Подстановка R, *таким образом, перестановочна с* θ^4. Но характеристические корни подстановки θ вещественны и положительны. Следовательно, всякая матрица, перестановочная с θ^4, перестановочна с θ^2 и θ[1]). Поэтому, в силу (18),

$$R = R^{-1} \quad \text{или} \quad R^2 = 1.$$

22. Будем теперь отправляться не от группы G_u, а от группы G''_u. Мы имеем

$$(X'') = \theta^{-1}(X) = \theta^{-1}S(Y).$$

Применявшийся выше прием приводит нас к еще одному базису этой компактной группы:

$$\theta\bar{S}(Y) = \theta(X') = \theta R\theta^{-1}(X'') = R(X'').$$

Таким образом, мы получаем два основных соотношения, где комплексная матрица $\theta^{-1}S$ обозначена через Σ:

$$(X'') = \Sigma(Y),$$
$$R(X'') = \bar{\Sigma}(Y).$$

---

[1]) Матрица θ приводима к диагональному виду, причем все элементы r_i, полученной диагональной матрицы, положительны. Матрица θ^n в этом случае будет диагональной матрицей с элементами r_i^n. Поэтому, если матрица (a_{ij}) перестановочна с θ^n, то имеет место

$$(r_i^n - r_j^n)\,a_{ij} = 0,$$

откуда следует

$$(r_i - r_j)\,a_{ij} = 0,$$

т. е. эта матрица перестановочна с θ.

Так как матрица R является инволютивной, то с помощью некоторой линейной подстановки, произведенной над базисом (X''), всегда можно достичь того, чтобы все элементы матрицы R были равны нулю, за исключением элементов, стоящих на главной диагонали, первые s из которых равны 1, а последние n $(s+n=r)$ равны -1. Тогда становится очевидным, что все элементы s первых строк матрицы Σ вещественны, а все элементы n последних строк этой матрицы чисто мнимы. Подходящий выбор базиса (Y) группы G приводит, таким образом, к основным соотношениям

$$\left.\begin{array}{llll} X_1=Y_1, & X_2=Y_2, & \ldots, & X_s=Y_s, \\ X_{s+1}=iY_{s+1}, & X_{s+2}=iY_{s+2}, & \ldots, & X_r=iY_r \end{array}\right\} \quad (19)$$

Иными словами, *если нам дана некомпактная простая группа G, то всегда можно найти компактную группу G_u той же структуры и такие базисы в группах G и G_u, что бесконечно малые преобразования этих базисов с одинаковым порядковым номером равны или отличаются множителем i.*

23. Из формул (19) непосредственно следует, что преобразования Y_1, Y_2, ..., Y_s порождают характеристическую подгруппу группы G. Отсюда же видно, что инволютивная подстановка, примененная к базисным преобразованиям X_i компактной группы является *автоморфизмом.*

Обратно, рассмотрим инволютивный автоморфизм компактной группы G_u. Можно предположить, что этот автоморфизм имеет вид

$$X'_\alpha=X_\alpha, \quad X'_{s+j}=-X_{s+j} \quad (\alpha=1, 2, \ldots, s; j=1, \ldots, n)$$

Выражая тот факт, что структурные константы не изменяются при этой подстановке, мы непосредственно видим, что отличными от нуля могут быть только такие константы, которые или не содержат ни одного индекса, большего s, или содержат два таких индекса. Если мы теперь положим

$$Y_\alpha=X_\alpha, \quad Y_{s+j}=iX_{s+j},$$

то увидим, что структурные константы базиса (Y) остаются вещественными, что дает нам некомпактную группу той же структуры, что и G_u, но с формой $\varphi(e)$, содержащей n положительных и s отрицательных корней.

Разыскание некомпактных вещественных групп данной простой структуры сводится, таким образом, к разысканию инволютивных автоморфизмов в компактной группе данной структуры.

К этому можно добавить, что *имеется столько же некомпактных групп, не сопряженных между собой в связной присоединенной группе (с комплексными параметрами), сколько инволютивных автоморфизмов, не эквивалентных между собой, в компактной связной присоединенной группе (с вещественными параметрами)*.

24. Предыдущая теорема дает новый, гораздо более простой, чем предложенный мной в 1914 г. (Картан [6]), метод определения всех вещественных форм данной простой структуры. Он особенно прост для приложения в том случае, когда присоединенная группа компактной группы *связна*, так как в этом случае подстановка R порождается бесконечно малой подстановкой, принадлежащей к присоединенной группе, и каноническая форма, к которой можно привести эти подстановки, хорошо известны. Поэтому проблему можно считать решенной для простых структур типов B, C, E рангов 7 и 8, F и G[1])*). Но решение оказывается весьма простым и в том случае, когда R не принадлежит к связной присоединенной группе в случаях A и D. Это определение оказывается трудным только для некомпактной группы типа E ранга 6, в том случае, когда R не принадлежит к связной присоединенной группе. В этом последнем случае мой прежний метод дает только одну некомпактную группу, которую было бы затруднительно получить непосредственно[2]).

---

[1]) В самом деле, для этих типов присоединенная группа компактной группы является связной (Картан [13], стр. 361—366).

*) Обозначения типов простых групп см. Чеботарев [I], стр. 300. *(Прим. перев.)*

[2]) Эта группа соответствует 26-мерным симметрическим пространствам типа EIV (см. Картан [18]). [Это место в переводе опущено, стр. 131.— *Прим. ред.*]

IV. ЭФФЕКТИВНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕКОМПАКТНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЧЕТЫРЕХ БОЛЬШИХ КЛАССОВ

25. В качестве приложения изложенной теории укажем, каким образом можно эффективно получить все некомпактные вещественные формы четырех больших классов простых структур. Этот же прием, за указанным исключением, без всякого труда может быть применен и для исключительных типов. Мы будем исходить в каждом случае от некоторой компактной группы.

26. Тип А. В качестве компактной группы G_u типа А выберем унимодулярную линейную группу положительно определенной эрмитовой формы

$$x_1\overline{x}_1+x_2\overline{x}_2+\ldots+x_{l+1}\overline{x}_{l+1}.$$

Присоединенная группа в этом случае состоит из двух различных семейств. Первое семейство показывает, как преобразования группы G_u преобразуются с помощью некоторого преобразования самой группы G_u *(гомографии)*, второе семейство показывает, как эти преобразования преобразуются с помощью *антигомографии* (т. е. гомографии, сопровождаемой заменой x_i на $\overline{x}_i$).

Если инволютивная подстановка R *) принадлежит к связной присоединенной группе, то она порождается гомографией, которую всегда можно предположить приведенной к канонической форме

$$x'_k=e^{i\alpha_k}x_k \qquad (\alpha_1+\ldots+\alpha_{l+1}=0).$$

Для того чтобы подстановка присоединенной группы Γ_u была тождественной **), необходимо и достаточно — при *неприводимости* линейной группы G_u, — чтобы порождающая эту подстановку гомография умножала все переменные на один и тот же произвольный множитель m. Поэтому мы получим искомые операции R, полагая все величины $e^{2i\alpha_k}$ равными между собой [39]. Следовательно, операция R может быть определена уравнениями порождающей ее гомографии:

$$\begin{aligned} x'_i &= -x_i && (i=1,\ 2,\ \ldots,\ p),\\ x'_{p+j} &= x_{p+j} && (j=1,\ \ldots,\ l+1-p). \end{aligned}$$

---

*) Инволютивную гомографию часто называют *инволюцией*. *(Прим. перев.)*

**) В оригинале вместо „тождественной“ ошибочно написано „инволютивной“. Здесь речь идет не о самой подстановке R, а о подстановке $R^2=E$. *(Прим. перев.)*

Преобразования группы G_u, общие с соответствующей некомпактной группой,— это те преобразования, которые перестановочны с этой гомографией, и, следовательно, они преобразуют между собой первые p переменных, так же, как и последние $l+1-p$ переменных. Они порождают группу g изометрических вращений, общую для обоих соответственных симметрических пространств, компактного и некомпактного[1]). Некомпактной группой здесь является унимодулярная линейная группа неопределенной эрмитовой формы

$$x_1\overline{x}_1+\ldots+x_p\overline{x}_p-x_{p+1}\overline{x}_{p+1}-\ldots-x_{l+1}\overline{x}_{l+1}.$$

27. Если операция R не принадлежит к связной присоединенной группе, она может быть порождена инволютивной *антигомографией (антиинволюцией)*. Такие преобразования могут быть двух родов[2]).

Антиинволюция первого рода может быть приведена к виду

$$x'_i=\overline{x}_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ l+1).$$

Компактная подгруппа g, общая для групп G_u и G, образована подстановками с *вещественными коэффициентами* группы G_u, т. е. ортогональными подстановками переменных $x_1, \ldots, x_{l+1}$. Группа G здесь является группой произвольных унимодулярных вещественных подстановок. Она изоморфна вещественной проективной группе l переменных[3]).

Антиинволюция второго рода, существующая только при четном $l+1$, может быть приведена к виду

$$x'_1=-\overline{x}_2,\quad x'_2=\overline{x}_1,\quad x'_3=-\overline{x}_4,\quad x'_4=\overline{x}_3,$$
$$\ldots,\quad x'_l=-\overline{x}_{l+1},\quad x'_{l+1}=\overline{x}_l.$$

Некомпактная группа G здесь изоморфна кватернионной линейной группе $\frac{l+1}{2}$ переменных (кватернионных). Компактная подгруппа g здесь является той подгруппой, которая

---

[1]) Это — пространства типов A III и A IV (последний тип соответствует $p=1$ или l). См. Картан [20], стр. 395—400, 446—450. [См. также примечание [75], стр. 340 и 343 настоящего сборника. *(Прим. перев.)*]

[2]) Картан [20], стр. 436—440, 442—443.

[3]) Соответственные симметрические пространства — типа A I. [См. Картан [20], стр. 385—390, 437—442. См. также примечание [75], стр. 340 и 343 настоящего сборника. *(Прим. перев.)*]

оставляет инвариантной некоторую положительно определенную кватернионную эрмитову форму[1]).

28. Типы B и D. В качестве компактной группы G_u здесь можно взять вещественную линейную группу положительно определенной квадратичной формы *). Присоединенная группа здесь показывает, как преобразования группы G_u преобразуются с помощью некоторой ортогональной подстановки с детерминантом 1 или —1. Здесь также такая подстановка определяет тождественную операцию присоединенной группы, если она умножает все переменные на один и тот же множитель.

Каноническим видом ортогональной подстановки является:

$$x'_{2\alpha-1} = x_{2\alpha-1}\cos a_\alpha - x_{2\alpha}\sin a_\alpha,$$

$$x'_{2\alpha} = x_{2\alpha-1}\sin a_\alpha + x_{2\alpha}\cos a_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, p),$$

$$x'_{2p+k} = \mathcal{E}_k x_{2p+k} \quad (k = 1, \dots, n-2p;\ \mathcal{E}_k^2 = 1).$$

Квадрат такой подстановки может умножать все переменные на один и тот же множитель только в том случае, когда все углы $2a_\alpha$ кратны π. Если $n > 2p$, необходимо, чтобы все a_α были бы кратными π [40], и ортогональная подстановка тогда в измененных обозначениях имеет вид

$$x'_1 = -x_1, \dots, x'_p = -x_p, x'_{p+1} = x_{p+1}, \dots, x'_n = x_n.$$

Если $n = 2p$, мы приходим к тому же выводу, если только все углы $2a_\alpha$ не являются нечетными кратными π. В этом случае мы получим канонический вид

$$x'_1 = -x_2,\ x'_2 = x_1,\ x'_3 = -x_4,\ x'_4 = x_3,\ \dots,\ x'_{n-1} = -x_n,$$
$$x'_n = x_{n-1}.$$

В первом случае компактная подгруппа g, общая для групп G_u и G, образована подстановками, одновременно оставляющими инвариантными две формы

$$x_1^2 + \dots + x_p^2,\quad x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

---

[1] Соответственные симметрические пространства — типа AII. См. Картан [20], стр. 390—394, 442—446; [См. также примечание [75] (стр. 340 и 343 настоящего сборника); о линейных кватернионных группах и кватернионных эрмитовых формах см. там же стр. 338—339. *(Прим. перев.)*]

*) То есть по существу группу вещественных ортогональных матриц с детерминантом +1. *(Прим. перев.)*

Некомпактная группа G здесь является линейной группой неопределенной квадратичной формы

$$x_1^2+\ldots+x_p^2-x_{p+1}^2-\ldots-x_n^2\ ^{1)} \qquad (1)$$

Во втором случае компактной подгруппой g является та подгруппа, которая оставляет инвариантными два мнимо сопряженных плоских многообразия

$$x_1+ix_2=x_3+ix_4=\ldots=x_{n-1}+ix_n=0,$$
$$x_1-ix_2=x_3-ix_4=\ldots=x_{n-1}-ix_n=0,$$

целиком расположенные на квадрике

$$x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=0^{2)}.$$

29. Тип C. Компактной группой G_u здесь является, например, линейная группа, одновременно оставляющая инвариантными внешнюю форму

$$[x_1x_2]+\ldots+[x_{2l-1}x_{2l}]$$

и положительно определенную эрмитову форму

$$x_1\bar{x}_1+x_2\bar{x}_2+\ldots+x_{2l}\bar{x}_{2l} \quad [^{41}]$$

Присоединенная группа является связной. Всякая подстановка группы G_u может быть приведена к каноническому виду

$$x'_{2k-1}=e^{+i\alpha_k}x_{2k-1}, \qquad x'_{2k}=e^{-i\alpha_k}x_{2k}.$$

Для нашей цели необходимо и достаточно, чтобы все $2l$ величин $e^{2i\alpha_k}$ и $e^{-2i\alpha_k}$ были бы равны между собой. Их общее значение может быть равно только 1 или -1.

В первом случае подстановка может быть приведена к виду

$$x'_1=-x_1,\quad x'_2=-x_2,\quad \ldots,\quad x'_{2p-1}=-x_{2p-1},$$
$$x'_{2p}=-x_{2p},\quad x'_{2p+1}=x_{2p+1},\quad x'_{2p+2}=x_{2p+2},\quad \ldots,$$
$$x'_{2l}=x_{2l}.$$

---

[1] Мы получаем, таким образом, пространства типа BD I и в качестве частного случая $p=1$ или $n-1$ тип BD II. См. Картан [20], стр. 400—405, 450—454, [См. также примечание [75], стр. 340 и 342 настоящего сборника. (*Прим. перев.*)]

[2] Соответственные симметрические пространства типа D III. [См. Картан [20], стр. 405—409, 454—459. См. также примечание [75], стр. 340 и 342 настоящего сборника. (*Прим. перев.*)]

Подгруппа g оставляет инвариантными два плоских многообразия, одновременно являющихся полярными и относительно внешней квадратичной формы и относительно эрмитовой формы.

Во втором случае подстановка может быть приведена к виду

$$x'_{2k-1}=ix_{2k-1},\qquad x'_{2k}=-ix_{2k}.$$

Подгруппа g здесь оставляет инвариантными два плоских многообразия:

$$x_1=x_3=\ldots=x_{2l-1}=0,$$
$$x_2=x_4=\ldots=x_{2l}=0,$$

каждое из которых принадлежит к линейному комплексу, определяемому внешней квадратичной формой*), и которые полярны между собой относительно эрмитовой формы.

И в том и в другом случае симметрические пространства положительной кривизны могут быть представлены пространствами полученных пар плоских многообразий[1]).

30. В случае типа D ранга 4 должно быть приведено дополнительное исследование, так как, кроме автоморфизмов, имеющихся в общем случае и порождаемых линейными подстановками детерминанта ±1, — эти подстановки образуют два различных связных семейства J и J_1 — существует еще четыре других связных семейства автоморфизмов — J_2, J_3, J_4, J_5[2]). Полная группа автоморфизмов гомоморфна группе подстановок трех символов, причем каждая из этих подстановок соответствует одному из семейств автоморфизмов. Поэтому инволютивный автоморфизм R может принадлежать семейству J или к одному из семейств, соответствующих транспозиции двух символов. Но все такие семейства сопряжены между собой, поэтому, не нарушая общности, можно предположить, что R принадлежит к семейству J_1. Однако мы знаем, что инволютивные автоморфизмы R, порождаемые ортогональной

---

*) То есть каждое из этих многообразий инвариантно при корреляции, определяемой внешней квадратичной формой (каждое из них „полярно само себе“ относительно этой формы) (*Прим. перев.*)

[1]) Соответственные симметрические пространства в первом случае принадлежат к типу CII (Картан [20], стр. 416—420, 462—466). Во втором случае соответственные пространства принадлежат к типу CI (там же, стр. 412—416, 460—462) [См. также примечание [75], стр. 340 и 345 настоящего сборника. (*Прим. перев.*)]

[2]) Картан [13], стр 367—374.

подстановкой детерминанта —1, и автоморфизмы, эквивалентные им в *несвязной* присоединенной группе, определяют три некомпактные группы одной и той же (вещественной) структуры, но *не сопряженные* друг другу в присоединенной группе с комплексными параметрами[1]. Эти группы изоморфны линейной группе неопределенной квадратичной формы восьми переменных, имеющей нечетное число как положительных, так и отрицательных квадратов *).

---

[1] Это объясняет, почему геометрия Клейна с *компактной* простой фундаментальной группой может допускать несколько различных римановых форм с одной и той же римановой геометрией, но происходящих от существенно различного выбора, образующего элемента пространства. Напротив, это обстоятельство, как мы доказали выше, не имеет места в случае *некомпактной* группы.

*) Основная теорема гл. III этого мемуара (стр. 176) была доказана чисто алгебраически, без использования геометрических соображений, советским математиком Ф. Р. Гантмахером в его работе [2]. В этой же работе на основе общей теории проводится весьма изящное эффективное определение всех инволютивных автоморфизмов компактных простых групп Ли и соответственных некомпактных групп.

Эта теорема Картана, относящаяся к инфинитезимальной структуре групп Ли, обобщена на случай групп Ли, заданных в целом с помощью представления элементами той или иной алгебры (системы гиперкомплексных чисел) Б. А. Розенфельдом [1], которым даны условия, при которых инволютивный автоморфизм в группе может быть продолжен до инволютивного автоморфизма в алгебре (линейность обратной операции в группе), и в случае наличия такого автоморфизма указан метод (аналогичный методу Картана) построения новой алгебры, а в ней — новой группы, являющейся искомой некомпактной группой данной комплексной структуры в целом. (*Прим. перев.*)

ГЕОМЕТРИЯ ПРОСТЫХ ГРУПП *)

ВВЕДЕНИЕ

В моем недавнем мемуаре [1]), развивающем и дополняющем статью, опубликованную мною совместно с Я. А. Схоутеном [2]), я изучал пространства аффинной связности без кривизны или без кручения, представляющие групповые пространства групп непрерывных преобразований. Это изучение применялось к наиболее общим группам и было локальным. В случае простых групп их групповые пространства без кручения являются римановыми комплексными или вещественными (последние как со знакоопределенным, так и с неопределенным ds^2). Комплексные пространства представляют простые группы с комплексными параметрами, вещественные пространства представляют простые группы с вещественными параметрами, *унитарные* (со знакоопределенным ds^2) и *неунитарные* (с неопределенным ds^2). Два последних случая отличаются один от другого тем, что в одном случае групповое пространство *компактно*, а в другом — *некомпактно*.

Римановы пространства, представляющие унитарные вещественные простые группы, входят в более общую и весьма важную категорию римановых пространств, характеризующихся тем свойством, что их риманова кривизна сохраняется при параллельном переносе **). Изучение этих пространств сводится к изучению тех из них, которые я назвал *неприводимыми* и которые все соответствуют простым группам [3]). В каждом из

---

*) E. Cartan, La géométrie des groupes simples, *Annali di matematica pura ed applicata*, 4-я серия, т. 4 (61), (1927), стр. 209—256. *(Прим. перев.)*

[1]) Картан [17] [См. стр. 7—111 настоящего сборника. *(Прим. перев.)*]

[2]) Картан и Схоутен [1].

**) То есть эти пространства являются симметрическими пространствами Картана. *(Прим. перев.)*

[3]) Определение всех этих пространств произведено в мемуаре, первая часть которого только что вышла (Картан [18], см. также Картан [16]). [Соответствующее место в мемуаре [18] в пе-

этих неприводимых пространств риманова кривизна имеет всюду один и тот же знак. При этом в одном и том же классе имеются пространства как положительной, так и отрицательной кривизны. Если нам задана простая структура, то групповые пространства соответственных унитарных вещественных групп имеют положительную кривизну. Пространства отрицательной кривизны, принадлежащие тому же классу, не являются групповыми пространствами какой-либо группы, но их группа движений изоморфна группе с комплексными параметрами, имеющей данную структуру. Если речь идет о простой 3-параметрической структуре, оба пространства являются трехмерными пространствами постоянной кривизны. При этом первое является групповым пространством группы вращений обычного пространства, а группа движений второго изоморфна группе *комплексных* дробно-линейных преобразований одного переменного.

Более детальное изучение более общих неприводимых римановых пространств этого типа представляет очень большой интерес как с точки зрения теории групп, так и с точки зрения геометрии. Это изучение должно быть предметом позднейшего мемуара. В настоящем мемуаре я занимаюсь только двумя частными классами, указанными выше (групповыми пространствами унитарных вещественных простых групп и соответствующими им пространствами отрицательной кривизны). Изучение здесь будет уже не локальным, здесь мы имеем дело со свойствами пространства, относящимися к его топологии, к распределению геодезических линий, к полному определению несвязной группы изометрии пространства, к различным формам Клейна этого пространства и т. д. Ставящиеся вопросы, впрочем, имеют совершенно различный характер для пространств положительной и отрицательной кривизны.

Первая глава имеет вводный характер и посвящена топологии унитарных вещественных простых групп. Ее отправной точкой служат исследования Вейля, относящиеся к теории простых групп (Вейль [1]). Вопрос здесь также рассматривается в целом. Здесь же дополняются результаты Вейля и поставленные вопросы решаются до конца с помощью результатов одного из моих недавних мемуаров[1]).

реводе опущено; см. также позднейшую работу Картана [26], стр. 150—182 настоящего сборника. (*Прим. ред.*)]

[1]) Картан [12].

Глава вторая посвящена пространствам унитарных вещественных групп. Распределение геодезических линий здесь изучается с достаточной полнотой для односвязных форм этих пространств. Здесь обнаруживается, что с каждой точкой пространства связано некоторое число *антиподных многообразий* (которые могут сводиться к точкам), являющихся в некотором смысле *стрикционными многообразиями* для замкнутых геодезических линий, выходящих из данной точки. Число этих многообразий равно *рангу* группы.

Глава третья посвящена пространствам отрицательной кривизны, группа движений которых имеет *комплексную* простую структуру. Все они односвязны. Благодаря этим пространствам (их свойства переносятся на все другие неприводимые пространства отрицательной кривизны) оказывается возможным решить ряд важных проблем, относящихся к их группам движений. Укажу здесь только на следующий результат: комплексные простые группы с *топологической* точки зрения имеют те же самые свойства, что и соответственные унитарные вещественные группы, в частности, они всегда допускают односвязное линейное представление. Эта теорема вытекает из замечательного способа образования конечных преобразований комплексной группы, частным случаем которого является тот факт, что каждое комплексное вращение обычного пространства разлагается одним, и только одним, способом на вещественное вращение и вращение на чисто мнимый угол вокруг вещественной оси. Наконец, рассматриваемые пространства имеют значение и с чисто геометрической точки зрения; такое же значение будут иметь и все более общие неприводимые пространства рассматриваемого типа с отрицательной кривизной.

Я предполагаю известными основные принципы теории простых групп[1]).

---

[1]) По этому вопросу читатель может обратиться к моей диссертации (Картан [1]) или к цитированному выше мемуару Вейля. Чтение мемуара, цитированного в сноске [1]) на стр. 183, тем не менее также не будет бесполезным. [(См. также Понтрягин [2], Чеботарев [1] и Дынкин [1]. *(Прим. перев.)*]

ГЛАВА I

ТОПОЛОГИЯ УНИТАРНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

1. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПОЛИЭДР ПРИСОЕДИНЕННОЙ ГРУППЫ

1. Как известно[1]), каждому типу простых групп порядка r соответствует унитарная вещественная форма, зависящая от r вещественных параметров и характеризующаяся тем свойством, что сумма квадратов характеристических корней произвольного бесконечно малого преобразования является отрицательно определенной квадратичной формой $-\varphi(e)$ *). Унитарные группы для четырех больших классов простых групп соответственно изоморфны:

A. Линейной унимодулярной группе положительно определенной эрмитовой формы

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_{l+1}\bar{x}_{l+1},$$

B, D. Линейной группе положительно определенной квадратичной формы $n=2l+1$ переменных (тип B) или $n=2l$ переменных (тип D).

C. Линейной группе, оставляющей инвариантными положительно определенную эрмитову форму

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_{2l}\bar{x}_{2l}$$

и квадратичную внешнюю форму

$$[x_1x_2] + [x_3x_4] + \ldots + [x_{2l-1}x_{2l}].$$

Здесь везде l означает ранг группы, о котором будет итти речь ниже.

2. Пусть G — унитарная простая группа, а Γ — ее присоединенная группа. Γ является линейной группой над r вещественными переменными

$$e_1, e_2, \ldots, e_r,$$

---

[1]) Картан [12], стр. 135. [См. также Понтрягин [2], стр. 289 (теорема 81). *(Прим. перев.)*]

*) В этом мемуаре Картан обозначает через $-\varphi(e)$ форму, которую ранее обозначал $\varphi(e)$. *(Прим. ред.)*

оставляющей инвариантной положительно определенную квадратичную форму $\varphi(e)$. Каждое преобразование группы Γ представляется матрицей T порядка r с детерминантом, равным 1.

Всякая матрица T может, и притом бесконечным количеством способов, быть порождена бесконечно малым преобразованием Y группы Γ[1]). Среди характеристических корней преобразования Y l равны нулю[2]), а $r-l$ остальных попарно равны и противоположны по знаку. Эти корни являются линейными комбинациями с целочисленными коэффициентами l из них (называемых фундаментальными). Все эти корни чисто мнимы. Вместе с Вейлем будем обозначать их $2\pi i\varphi_\alpha$.

Величины φ_α являются *угловыми параметрами* преобразования Y. Матрица T, порожденная преобразованием Y, допускает l характеристических корней, равных 1, а остальные характеристические корни этой матрицы имеют вид $e^{2\pi i\varphi_\alpha}$.

3. Если бесконечно малое преобразование Y является *общим*, т. е. не допускает более чем l нулевых характеристических корней, имеется $l-1$ других бесконечно малых преобразований, независимых между собой и от Y, и перестановочных как между собой, так и с Y. Таким образом, мы получаем коммутативную группу γ порядка l.

Если

$$e_1Y_1+e_2Y_2+\ldots+e_lY_l$$

— общее бесконечно малое преобразование группы γ, то угловые параметры φ_α этого преобразования являются линейными формами от $e_1, e_2, \ldots, e_l$, причем l из этих форм линейно независимы.

Если теперь рассмотреть *сингулярное* бесконечно малое преобразование Y, т. е. такое преобразование, которое допускает более чем l нулевых характеристических корней, то существует более чем l независимых преобразований, перестановочных с Y. Докажем, что среди этих преобразований имеется по меньшей мере одно несингулярное.

---

[1]) См. по поводу этого и следующего параграфа мой мемуар [12], стр. 134—146.

[2]) Целое число l является рангом группы и равно числу независимых коэффициентов характеристического уравнения группы. См. Картан [1], стр. 29. [См. также Чеботарев [1], стр. 240. *(Прим. перев.)*]

Пусть Y_1 — некоторое преобразование, перестановочное с Y, и Y_2 — некоторое преобразование, перестановочное с Y и Y_1 (и линейно независимое от Y и Y_1), и так далее. Предположим, что мы нашли λ независимых преобразований

$$Y, Y_1, \ldots, Y_{\lambda-1},$$

перестановочных между собой и таких, что никакое преобразование группы не является перестановочным одновременно со всеми ними. Характеристические корни ω_α общего преобразования $eY+e_1Y_1+\ldots+e_{\lambda-1}Y_{\lambda-1}$ являются *линейными*[1]) формами от $e, e_1, \ldots, e_{\lambda-1}$. Среди этих линейных форм имеется по меньшей мере λ независимых, так как в противном случае существовало бы ненулевое преобразование $\Sigma e_i Y_i$, все характеристические корни которого были бы равны нулю, но это невозможно, так как сумма квадратов характеристических корней любого преобразования группы является *знакоопределенной* формой. Так как среди характеристических корней общего преобразования имеется по меньшей мере λ независимых, то из определения ранга следует, что λ не больше l. Но, с другой стороны, λ не может быть меньше l. В самом деле, l из корней ω_α равны нулю *), и каждой линейной форме ω_α соответствует (в зависимости от кратности) одно или несколько преобразований X, таких, что

$$(\Sigma e_i Y_i, X) = \omega_\alpha X,$$

каковы бы ни были коэффициенты $e, e_1, \ldots, e_{\lambda-1}$. Поэтому в случае $\lambda < l$ существовали бы $l-\lambda$ преобразований X, независимых от $Y, Y_1, \ldots, Y_{\lambda-1}$ и перестановочных с $Y, Y_1, \ldots, Y_{\lambda-1}$, что противоречит предположению.

Так как целое число λ равно l и число линейных форм ω_α, тождественно равных нулю, не превышает l, то для того, чтобы получить несингулярное преобразование, достаточно придать коэффициентам e_i такие численные значения, которые не обращают в нуль ни одну из форм ω_α, не равных нулю тождественно. Данное преобразование Y входит в подгруппу γ, определенную с помощью этого несингулярного преобразования.

---

[1]) Это происходит вследствие того, что преобразования перестановочны между собой.

*) Для любого бесконечно малого преобразования группы Г. *Прим. перев.)*

4. Таким образом, всякое бесконечно малое преобразование Y входит по меньшей мере в одну коммутативную подгруппу γ, содержащую бесконечное количество несингулярных преобразований. Впрочем, все эти подгруппы γ сопряжены между собой в связной присоединенной группе Γ[1]), так что всякое преобразование группы Γ эквивалентно одному из преобразований произвольной подгруппы γ.

Будем теперь рассматривать l фундаментальных угловых параметров $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ произвольного бесконечно малого преобразования как декартовы координаты точек в l-мерном пространстве. Выберем при этом базисные координатные векторы таким образом, чтобы положительно определенная квадратичная форма

$$\sum_{\alpha} \varphi_{\alpha}^2$$

представляла бы с точностью до постоянного множителя квадрат расстояния точки от начала [42].

Всякая точка $M(\varphi_i)$ представляет некоторое бесконечно малое преобразование каждой подгруппы γ и, следовательно, бесконечное количество бесконечно малых преобразований, эквивалентных друг другу. Если ни один из параметров φ_{α} не равен нулю, эти преобразования являются несингулярными и, следовательно, составляют множество ∞^{r-l} преобразований. Если h из параметров φ_{α} равны нулю (h четно), то каждое из преобразований, представляемых точкой M, перестановочно с преобразованиями $(l+h)$-параметрической подгруппы и поэтому допускает ∞^{r-l-h} эквивалентных преобразований.

Внутри одной определенной подгруппы γ одно бесконечно малое преобразование также допускает некоторое число эквивалентных преобразований. Их можно получить, осуществляя над $r-l$ параметрами φ_{α}*) конечную группу $\mathfrak{G}'$ подстановок. Эти подстановки сохраняют линейные соотношения с целочисленными коэффициентами, имеющие место между угловыми

---

[1]) Это происходит вследствие того, что *несингулярные* бесконечно малые преобразования Y, каждое из которых определяет некоторую подгруппу γ, образуют *связное* множество. В самом деле, как мы сейчас увидим, сингулярные преобразования заполняют в групповом пространстве одно или несколько многообразий на 3 измерения ниже, чем само это пространство.

*) Отличными от нуля. (*Прим. перев.*)

параметрами φ_α[1]). Геометрически группа $\mathfrak{G}'$, действующая над точками представления M, является группой вращений и отражений, порожденной $\frac{r-l}{2}$ отражениями относительно гиперплоскостей $\varphi_\alpha = 0$[2]).

Если мы проведем через начало $\frac{r-l}{2}$ гиперплоскостей $\varphi_\alpha = 0$, то они разделят пространство на некоторое число выпуклых многогранных областей. Каждое из них представляет *фундаментальную область* (D) группы $\mathfrak{G}'$, и каждое бесконечно малое преобразование группы γ эквивалентно одному, и только одному, преобразованию внутри этой области. Всякая выпуклая область, ограниченная некоторым числом гиперплоскостей $\varphi_\alpha = 0$, *и такая, что ни одна из этих гиперплоскостей ее не пересекает*, может быть взята в качестве фундаментальной области. Далее мы убедимся, что все такие области имеют в качестве граней в точности l гиперплоскостей.

Всякая внутренняя точка фундаментальной области (D) представляет ∞^{r-l} эквивалентных бесконечно малых преобразований. Всякая точка, расположенная на одной из ее граней или на одном из ее ребер и т. д., представляет не более ∞^{r-l-2} эквивалентных преобразований.

5. Перейдем теперь к *конечным* преобразованиям или к матрицам T группы Γ. Пусть Y — одно из бесконечно малых преобразований, порождающих такую матрицу и принадлежащих к некоторой подгруппе γ. Тогда можно представлять T и Y одной и той же точкой M [43]. Но внутри одной и той же подгруппы γ матрица T может быть порождена бесконечным количеством различных бесконечно малых преобразований Y: эти преобразования можно получить, прибавляя к фундаментальным угловым параметрам φ_i произвольные целые числа. Рассмотрим теперь сеть (R) точек с целыми координатами φ_i.

---

[1]) Существуют, однако, подстановки, которые обладают этим свойством и не принадлежат к $\mathfrak{G}'$. См. Картан [13], стр. 365—366.

[2]) Эта интерпретация группы $\mathfrak{G}'$ как группы вращений и отражений, так же как интерпретация порождающих ее операций, принадлежит Вейлю, см. Вейль [1], стр. 367—371 [стр. 234—237 русского перевода. (*Прим. перев.*)]. Группа $\mathfrak{G}'$ — это группа (S) Вейля.

Одна и та же матрица T представляется, таким образом, счетным множеством точек, эквивалентных между собой по отношению к сети (R).

Предположим, что $l+2k$ характеристических корней матрицы T равны 1. Отсюда следует, что, так как матрица T перестановочна с преобразованиями $(l+2k)$-параметрической подгруппы группы Г, существует ∞^{r-l-2k} матриц, эквивалентных матрице T. Сделанное нами предположение приводит к тому, что среди угловых параметров φ_α преобразования Y $2k$ параметров являются целыми числами*). Поэтому матрица T может быть перестановочна с преобразованиями более широкой группы, чем порождающее ее преобразование Y.

6. Множество операций группы $\mathfrak{G}'$ и сдвигов $\mathcal{T}$, оставляющих инвариантной сеть (R), порождают группу $\mathfrak{G}_1$ движений и отражений. Две точки M, эквивалентные по отношению к $\mathfrak{G}_1$, представляют матрицы T, эквивалентные по отношению к Г.

Рассмотрим теперь множество гиперплоскостей (П), полученных приравниванием одного из угловых параметров φ_α произвольному целому числу. Все эти гиперплоскости делят пространство на бесконечное число выпуклых полиэдров. Пусть (P) — один из них, причем можно предположить, что он находится внутри некоторой фундаментальной области (D). Докажем, что всякая матрица T может быть представлена по крайней мере одной точкой в (P).

Мы будем исходить из замечания, сделанного Вейлем[1]) о том, что матрицы T, представляемые данной точкой данной гиперплоскости (П) и, следовательно, допускающие по меньшей мере $l+2$ характеристических корней, равных 1, образуют в групповом пространстве многообразие не более чем $r-l-2$ измерений. Следовательно, матрицы, представляемые различными точками гиперплоскостей (П), образуют конечное число многообразий

$$(r-l-2)+(l-1)=r-3$$

измерений. Поэтому можно пройти от одной точки группового пространства к другой, т. е. непрерывно перейти от произвольной матрицы T к другой произвольной матрице T', не

---

*) Вообще говоря, отличными от нуля. (*Прим. перев.*)

[1]) Вейль [1], стр. 379 [стр. 244 русского перевода. (*Прим. перев.*)].

встречая сингулярных матриц. Пусть теперь M_0 — некоторая точка, внутренняя по отношению к (P), T_0 — матрица, представляемая точкой M_0, а T — произвольная матрица. Переходя от T_0 к T таким способом, чтобы не встречать сингулярных точек, мы тем самым оставляем соответственную точку представления внутри (P)[1], и, следовательно, в (P) имеется точка M, представляющая матрицу T. Так как, в частности, единичная матрица также должна быть представлена, то по меньшей мере одна из вершин (P) принадлежит к сети (R). Поэтому можно будет предполагать, сделав один из сдвигов $\mathcal{T}_1$, что полиэдр (P) имеет в качестве одной из своих вершин начало O [44].

7. Теперь мы в состоянии, став на общую точку зрения Вейля[2], изучать топологию группового пространства присоединенной группы Γ и, в частности, исследовать, существуют ли в этом пространстве замкнутые контуры, не стягиваемые в точку посредством непрерывной деформации.

Предположим теперь, что ни одна вершина полиэдра (P), кроме O, не принадлежит к сети (R). Рассмотрим замкнутый контур (C), проведенный в групповом пространстве. Мы всегда можем непрерывно деформировать его так, чтобы он проходил через начальную точку (соответствующую тождественному преобразованию), и притом так, чтобы он не встречался ни с одной сингулярной матрицей (кроме единичной матрицы, соответствующей его начальной и конечной точке). Контуру (C) в l-мерном пространстве φ_i будет соответствовать контур (C'), который можно считать выходящим из начала O и содержащимся в (P) и который при этом обязательно заканчивается в O [45]. Пусть M — некоторая точка (C'). Она представляет бесконечно малое преобразование Y, порождающее матрицу T, представляемую соответственной точкой контура (C). Матрицы tY, где t — вещественное число между 0 и 1, образуют внутри (P) переменный контур, получающийся посредством непрерывной деформации из (C') и стягиваемый в точку O при $t=0$. Соответственные конечные матрицы T образуют в групповом

---

[1] Можно доказать с полной строгостью, что когда матрица T непрерывно изменяется, никогда не становясь сингулярной, ее точка представления M движется также непрерывно, без какой бы то ни было неоднозначности.

[2] Вейль [I], стр. 380—381. [Стр. 245—246 русского перевода. (*Прим. перев.*)].

пространстве замкнутый контур, также получающийся из (C) посредством непрерывной деформации и стягиваемый в начальную точку при $t=0$. Именно это и требовалось нам доказать. *Таким образом, если полиэдр* (P) *имеет только одну вершину, принадлежащую к сети* (R), *пространство группы* Γ *является односвязным.*

Предположим теперь, что полиэдр (P) имеет $h-1$ вершин $O_1, O_2, \ldots, O_{h-1}$, отличных от O и принадлежащих к сети (R). Если контур (C), проведенный в групповом пространстве, может быть стянут в точку посредством непрерывной деформации, эта деформация всегда может быть произведена таким образом, чтобы избежать встречи с сингулярными матрицами, так как эти матрицы образуют многообразие на 3 измерения меньше, чем все групповое пространство. Точно так же, если два контура могут быть непрерывно переведены один в другой, эта деформация также может быть произведена таким образом, чтобы избежать встречи с сингулярными матрицами.

Поэтому всякий замкнутый контур (C) всегда может быть деформирован таким образом, чтобы он проходил через начальную точку и не встречался с сингулярными матрицами. В пространстве φ_i ему соответствует контур (C'), который также можно предполагать выходящим из O и целиком находящимся внутри (P). Он должен окончиться обязательно в одной из точек $O, O_1, \ldots, O_{h-1}$. Если он кончается в O, контур (C) может быть стянут в точку. Но если кончается, например, в O_1, контур (C) уже не может быть стянут в точку. В самом деле, в противном случае можно было бы произвести это стягивание таким образом, чтобы контур (C) все время продолжал бы проходить через начальную точку и не встречал бы сингулярных матриц. Но тогда контур (C') должен был бы постоянно начинаться в O и оканчиваться в O_1 и, следовательно, не стягивался бы в точку.

Мы видим более того, *что в групповом пространстве имеется в точности* h *различных классов замкнутых контуров, переводимых друг в друга и соответствующих* h *путям, соединяющим* O *с точками* $O, O_1, \ldots, O_{h-1}$, *внутри* (P). Будем называть h *индексом связности* группы.

8. Если пространство группы Γ неодносвязно, полиэдр (P) не является фундаментальной областью дискретной группы $\mathfrak{G}_1$,

так как в (P) имеется h точек, эквивалентных относительно $\mathfrak{G}_1$. В этом случае можно легко получить фундаментальную область (Q) группы $\mathfrak{G}_1$ путем соединения точки O лучами с теми точками (P), которые расположены ближе к O, чем к любой из точек $O_1, \ldots, O_{h-1}$. Этот полиэдр (Q) имеет в качестве граней гиперплоскости, ограничивающие фундаментальную область (D) группы $\mathfrak{G}'$, а также некоторое число других гиперплоскостей.

Для того чтобы получить полиэдр (P), достаточно построить любым способом полиэдр, ограниченный некоторым числом гиперплоскостей (II) и не пересекающийся ни с одной другой гиперплоскостью (II). Мы дадим сейчас обзор различных типов простых групп и проверим, что для каждой из них полиэдр (P) имеет в точности $l+1$ гиперплоскостей в качестве граней*). Одновременно мы определим все l вершин этого полиэдра, отличных от O, и, в частности, те из этих вершин, которые принадлежат сети (R). Число этих последних равно индексу связности h, уменьшенному на единицу.

9. Если мы рассмотрим сначала случай 3-параметрической группы, имеющей ранг 1 (группа вращений обычного пространства), то ясно, что полиэдр (P) здесь представляет собой отрезок $(0,1)$ одной из осей. Оба его конца принадлежат к сети (R). Поэтому индекс связности группы Γ равен 2. Область (Q) здесь представляет собой отрезок $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Групповое пространство группы вращений представляет собой трехмерное эллиптическое пространство, которое, как известно, неодносвязно.

10. Тип A[1]). Угловые параметры здесь имеют вид

$$\pm\varphi_i, \quad \pm(\varphi_i - \varphi_j) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, l).$$

Мы можем определить область (P) $l+1$ неравенствами

$$1 > \varphi_1 > \varphi_2 > \ldots > \varphi_l > 0.$$

Ясно, что область, определенная этими неравенствами, не пе-

---

*) То есть (P) является симплексом: треугольником на плоскости, тетраэдром в 3-мерном пространстве и т. д. (*Прим. перев.*)

[1]) Общие выражения угловых параметров, соответствующих различным простым типам, указаны в диссертации Картана [1], стр. 81—93. [См. также Чеботарев [1], стр. 277—301, и Дынкин [1], стр. 119—123. (*Прим. перев.*)]

ресекается ни с одной из гиперплоскостей (II). Вершины (*P*), отличные от *O*, имеют координаты

$$\begin{array}{l} 1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0, \\ 1,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0, \\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1. \end{array}$$

Все эти вершины принадлежат к сети (*R*), образованной всеми точками с целочисленными координатами. *Таким образом индекс связности группы* Γ *здесь равен* $l+1$.

11. Тип B. Угловые параметры здесь имеют вид

$$\pm\varphi_i, \quad \pm\varphi_i\pm\varphi_j \quad (i, j=1, 2, \ldots, l).$$

Определим область (*P*) $l+1$ неравенствами

$$\varphi_1>\varphi_2>\ldots>\varphi_l>0, \quad \varphi_1+\varphi_2<1.$$

Вершины полиэдра (*P*), отличные от *O*, имеют координаты

$$\begin{array}{l} 1,\ \ 0,\ \ 0, \ldots, 0, \\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0, \ldots, 0, \\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}, \ldots, 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}. \end{array}$$

Только первая из этих точек принадлежит к сети (*R*). *Таким образом, индекс связности группы* Γ *здесь равен* 2.

12. Тип C. Угловые параметры здесь имеют вид

$$\pm 2\varphi_i, \quad \pm\varphi_i\pm\varphi_j \quad (i, j=1, 2, \ldots, l).$$

Сеть (*R*) здесь образована точками, все координаты которых одновременно целые числа или одновременно половины нечетных чисел [46]. Полиэдр (*P*) здесь можно определить $l+1$ неравенствами

$$\frac{1}{2}>\varphi_1>\varphi_2>\ldots>\varphi_l>0.$$

Отличные от O вершины (P) здесь имеют координаты

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{2},\, 0,\; 0,\; \ldots,\, 0,\\
\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, 0,\ldots,\, 0,\\
\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\ldots,\, 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\ldots,\, \frac{1}{2}.
\end{array}$$

Только последняя из этих точек принадлежит к сети (R). *Таким образом, индекс связности группы* Γ *здесь равен* 2.

13. Тип D. Угловые параметры здесь имеют вид

$$\pm\varphi_i\pm\varphi_j \quad (i,\, j=1,\, 2,\ldots,\, l).$$

Сеть (R) здесь такая же, как в случае типа C. Полиэдр (P) здесь можно определить неравенствами

$$\varphi_1>\varphi_2>\ldots>\varphi_l, \quad \varphi_{l-1}+\varphi_l>0, \quad \varphi_1+\varphi_2<1.$$

Отличные от O вершины полиэдра (P) здесь имеют координаты

$$\begin{array}{l}
1,\; 0,\;\; 0,\;\; \ldots,\, 0,\, 0,\, 0,\\
\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, 0,\;\; \ldots,\, 0,\, 0,\, 0,\\
\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \ldots,\, 0,\, 0,\, 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \ldots,\, \frac{1}{2},\, 0,\, 0,\\
\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \ldots,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, -\frac{1}{2},\\
\frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \ldots,\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2}.
\end{array}$$

Первая и две последние точки принадлежат к сети (R). *Таким образом, индекс связности группы* Γ *здесь равен* 4.

14. Тип E_6. Угловые параметры здесь имеют вид

$$\varphi_i-\varphi_j, \quad \pm(\varphi_i+\varphi_j+\varphi_k), \quad \pm(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\ldots+\varphi_6).$$

Вершинами сети (R) здесь являются точки, все координаты которых — одновременно целые числа или одновременно являются третями целых чисел, сравнимых между собой по модулю 3.

Полиэдр (P) здесь можно определить 7 неравенствами:

$$\varphi_2 > \varphi_3 > \ldots > \varphi_6, \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_6 > 0,$$
$$\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 < 0, \quad \varphi_1 - \varphi_6 < 1.$$

Отличные от O вершины (P) имеют координаты:

$1,$	$0,$	$0,$	$0,$	$0,$	$0,$
$\frac{2}{3},$	$\frac{2}{3},$	$-\frac{1}{3},$	$-\frac{1}{3},$	$-\frac{1}{3},$	$-\frac{1}{3},$
$\frac{2}{3},$	$\frac{1}{6},$	$\frac{1}{6},$	$-\frac{1}{3},$	$-\frac{1}{3},$	$-\frac{1}{3},$
$\frac{2}{3},$	$0,$	$0,$	$0,$	$-\frac{1}{3},$	$-\frac{1}{3},$
$\frac{1}{2},$	$0,$	$0,$	$0,$	$0,$	$-\frac{1}{2},$
$\frac{5}{6},$	$-\frac{1}{6},$	$-\frac{1}{6},$	$-\frac{1}{6},$	$-\frac{1}{6},$	$-\frac{1}{6}.$

Две первые точки принадлежат к сети (R). *Таким образом, индекс связности группы* Γ *здесь равен 3.*

15. Тип E_7. Угловые параметры здесь имеют вид

$$\varphi_i - \varphi_j, \quad \varphi_i + \varphi_j + \varphi_k + \varphi_h \quad (i, j, k, h = 1, 2, \ldots, 8)$$

с условием

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_8 = 0.$$

Вершинами сети (R) здесь являются точки с 8 координатами, в сумме составляющими O и представляющими собой четверти целых чисел, сравнимых между собой по модулю 4.

Полиэдр (P) здесь можно определить 8 неравенствами. Отличные от O вершины (P) имеют координаты:

$\frac{3}{4},$	$\frac{3}{4},$	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{4},$
$\frac{3}{4},$	$\frac{1}{4},$	$\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{4},$	$-\frac{1}{4},$

$\frac{3}{4}$,	$\frac{1}{12}$,	$\frac{1}{12}$,	$\frac{1}{12}$,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{4}$,
$\frac{3}{4}$,	0,	0,	0,	0,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{4}$,
$\frac{2}{3}$,	0,	0,	0,	0,	0,	$-\frac{1}{3}$,	$-\frac{1}{3}$,
$\frac{1}{2}$,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	$-\frac{1}{2}$,
$\frac{7}{8}$,	$-\frac{1}{8}$,	$-\frac{1}{8}$,	$-\frac{1}{8}$,	$-\frac{1}{8}$,	$-\frac{1}{8}$,	$-\frac{1}{8}$,	$-\frac{1}{8}$.

Только первая из этих точек принадлежит к сети (R). *Таким образом, индекс связности группы* Γ *здесь равен* 2.

16. Тип E_8. Угловые параметры здесь имеют вид

$$\varphi_i-\varphi_j,\quad \pm(\varphi_i+\varphi_j+\varphi_k)\quad (i, j, k=1, 2, \dots, 9)$$

с условием

$$\varphi_1+\varphi_2+\dots+\varphi_9=0.$$

Точками сети (R) здесь являются такие точки, все координаты которых являются третями целых чисел, сравнимых между собой по модулю 3.

Полиэдр (P) здесь можно определить 9 неравенствами

$$\varphi_2>\varphi_3>\dots>\varphi_9,\quad {}_2+\varphi_3+\varphi_4<0,\quad \varphi_1-\varphi_9<1.$$

Отличные от O вершины полиэдра (P) имеют координаты:

$\frac{5}{6}$,	$\frac{1}{3}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,
$\frac{5}{6}$,	$\frac{1}{12}$,	$\frac{1}{12}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,
$\frac{5}{6}$,	0,	0,	0,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,	$-\frac{1}{6}$,
$\frac{4}{5}$,	0,	0,	0,	0,	$-\frac{1}{5}$,	$-\frac{1}{5}$,	$-\frac{1}{5}$,	$-\frac{1}{5}$,
$\frac{3}{4}$,	0,	0,	0,	0,	0,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{4}$,	$-\frac{1}{4}$,
$\frac{2}{3}$,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	$-\frac{1}{3}$,	$-\frac{1}{3}$,
$\frac{1}{2}$,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	0,	$-\frac{1}{2}$,
$\frac{8}{9}$,	$-\frac{1}{9}$,	$-\frac{1}{9}$,	$-\frac{1}{9}$,	$-\frac{1}{9}$,	$-\frac{1}{9}$,	$-\frac{1}{9}$,	$-\frac{1}{9}$,	$-\frac{1}{9}$.

Ни одна из этих точек не принадлежит к сети (R). *Таким образом, группа* Γ *здесь односвязна.*

17. Тип F_4. Угловые параметры здесь имеют вид

$$\pm\varphi_i, \quad \pm\varphi_i\pm\varphi_j, \quad \frac{\pm\varphi_1\pm\varphi_2\pm\varphi_3\pm\varphi_4}{2}.$$

Вершинами сети (R) здесь являются точки, координатами которых служат целые числа с четной суммой.

Полиэдр (P) здесь можно определить 5 неравенствами

$$\varphi_2>\varphi_3>\varphi_4>0, \quad \varphi_1>\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4, \quad \varphi_1+\varphi_2<1.$$

Его вершины, отличные от O, имеют координаты:

$$\begin{array}{l}\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \ 0, \\ \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ 0, \\ \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \\ 1, 0, 0, 0.\end{array}$$

Ни одна из этих точек не принадлежит к сети (R). *Таким образом, группа* Γ *здесь является односвязной.*

18. Тип G_2. Угловые параметры здесь имеют вид

$$\pm\varphi_i, \quad \pm(\varphi_i-\varphi_j) \quad (i, j=1, 2, 3)$$

с условием

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=0.$$

Можно определить область (P), являющуюся в данном случае треугольником, 3 неравенствами

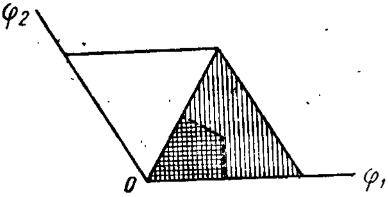
$$\varphi_1>\varphi_2>0, \qquad \varphi_1-\varphi_3<1.$$

Две вершины этого треугольника, отличные от O, имеют координаты:

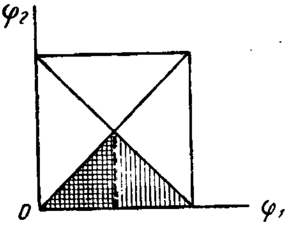
$$\begin{array}{l}\frac{1}{2}, \ 0, \ -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}.\end{array}$$

Ни одна из них не принадлежит к сети (R). *Таким образом, группа* Γ *здесь является односвязной.*

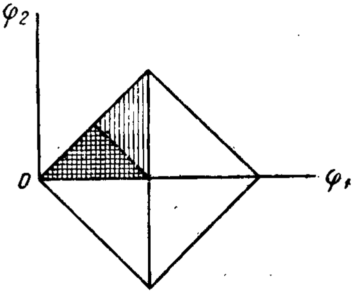
19. На черт. 4—7 мы представляем для каждого из типов ранга 2, а именно A, B, C и G, параллелограмм сети (R) и прямые (Π), которые его ограничивают или пересекают. Треугольная область (P) обозначена с помощью вертикальной штриховки, область (Q), если она существует, — с помощью двойной штриховки — вертикальной и горизонтальной. Группа D ранга 2 является полупростой, вследствие чего она здесь не представлена[1]. Заметим, что фигуры 5 и 6, относящиеся к типам B и C, подобны; это происходит вследствие того, что соответственные группы изоморфны*).



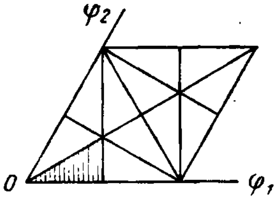
Черт. 4.



Черт. 5.



Черт. 6.



Черт. 7.

---

[1] Все вышеизложенное может быть распространено и на полупростые группы с той единственной разницей, что полиэдр (P) здесь ограничен более чем $l+1$ гиперплоскостями.

*) По поводу изоморфизма групп B_2 и C_2 ср. примечание [75], стр. 366. *(Прим. перев.)*

II. АБСТРАКТНАЯ ОДНОСВЯЗНАЯ ГРУППА И ЕЕ ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

20. Мы видели, что каждое конечное преобразование присоединенной группы Γ может быть представлено h различными точками внутри $(l+1)$-эдра (P). Сейчас мы построим абстрактную группу $\bar{\Gamma}$[1], каждая операция которой представляется одной, и только одной, точкой в (P).

Условимся называть *элементом* $\bar{T}$ совокупность матрицы T группы Γ и пути (C), соединяющего в групповом пространстве начальную точку с точкой T. Два элемента мы будем рассматривать как тождественные в том случае, если они соответствуют одной и той же матрице T и если определяющие их пути могут быть переведены один в другой с помощью непрерывной деформации. Каждой матрице T соответствует, таким образом, h элементов $\bar{T}$. Каждый элемент $\bar{T}$ представляется поэтому одной, и только одной, точкой внутри (P).

Теперь мы определим абстрактным образом произведение двух элементов $\bar{T}$ и $\bar{T}'$. Рассмотрим для этого один из путей, которые идут из начальной точки в точку T' и определяют элемент $\bar{T}'$. Каждой точке этого пути соответствует матрица θ, непрерывно изменяющаяся от единичной матрицы до T'. Поэтому матрица $T\theta$ описывает непрерывный путь, начинающийся в T и кончающийся в TT'. Поставим в соответствие каждой матрице $T\theta$ элемент, определяющим путем для которого будет служить путь, соответствующий элементу $\bar{T}$, к которому добавлен путь, описанный матрицей $T\theta$ при ее изменении от T до TT'. Таким образом, мы придем к элементу $\bar{T}''$ — одному из h элементов, соответствующих матрице $T'' = TT'$. Положим

$$\bar{T}'' = \bar{T}\bar{T}'.$$

Нетрудно доказать, что данное определение произведения $\bar{T}\bar{T}'$ является однозначным. Тогда, очевидно, все элементы $\bar{T}$ образуют абстрактную группу.

Группа $\bar{\Gamma}$ односвязна, так как, для того чтобы контур в групповом пространстве, выходящий из точки T, соответствую-

---

[1] Важность понятия этой абстрактной группы была показана Вейлем в его цитированном выше мемуаре.

щей элементу $\overline{T}$, при возвращении в T определил бы тот же самый элемент $\overline{T}$, необходимо и достаточно, чтобы этот контур можно было бы стянуть в точку посредством непрерывной деформации.

Группа $\overline{\Gamma}$ гомоморфна группе Γ. Следовательно, Γ есть факторгруппа Γ по нормальному делителю $\overline{\Gamma}/\Gamma$, который можно представить h элементами группы $\overline{\Gamma}$, соответствующими тождественному преобразованию группы Γ. В полиэдре (P) эти элементы представляются h вершинами O, $O_1, \ldots, O_{h-1}$. Так как нормальный делитель $\overline{\Gamma}/\Gamma$ остается инвариантным при каждом преобразовании с помощью элемента группы $\overline{\Gamma}$, то в силу непрерывности остаются инвариантными и отдельные элементы $\overline{\Gamma}/\Gamma$, т. е. группа $\overline{\Gamma}/\Gamma$ принадлежит центру $\overline{\Gamma}$ и, в частности, коммутативна. Будем называть эту группу *группой связности* группы Γ *).

Предположим теперь, что некоторая группа G имеет ту же инфинитезимальную структуру, что и ее присоединенная группа Γ. Одному преобразованию группы G соответствует, очевидно, только одно преобразование группы Γ, но обратное может быть неверно. Если в пространстве группы G непрерывно передвигаться вдоль определенного пути от тождественного преобразования к данному преобразованию, то в пространстве группы Γ ему будет соответствовать путь, определяющий некоторый элемент $\overline{T}$ группы $\overline{\Gamma}$. Два различных преобразования S и S' группы G никогда не могут привести этим способом к одному и тому же элементу группы $\overline{\Gamma}$. В самом деле, в противном случае в пространстве группы G существовал бы путь, идущий от S к S' и соответствующий в группе $\overline{\Gamma}$ замкнутому контуру, стягиваемому в точку. Стягивание этого пути в точку посредством непрерывной деформации, сохраняющей начальную и конечную точки, влечет за собой в пространстве группы G стягивание в точку некоторого пути, всегда начинающегося в S и всегда кончающегося в S', что является абсурдом.

---

*) [illegible] математической литературе группу $\overline{\Gamma}$ называют *универсальной накрывающей группой* для группы Γ, а нормальный делитель $\overline{\Gamma}/\Gamma$ — *фундаментальной группой* группы Γ (см. Понтрягин [2], стр. 240—249). *(Прим. перев.)*

Таким образом, если G — произвольная группа той же инфинитезимальной структуры, что и ее присоединенная группа Γ, группа G изоморфна или гомоморфна группе Γ, а группа $\overline{\Gamma}$ изоморфна или гомоморфна группе G. *Группа связности* группы G, т. е. нормальный делитель $\overline{\Gamma}/G$, является подгруппой группы связности $\overline{\Gamma}/\Gamma$ группы Γ. Эта подгруппа может, впрочем, состоять из одного тождественного преобразования или совпадать с $\overline{\Gamma}/\Gamma$.

Все эти рассуждения отнюдь не предполагают, что группа G проста: они справедливы для любой инфинитезимальной структуры с единственным условием, что Γ является соответствующей присоединенной группой и имеет ту же структуру.

21. До сих пор группа $\overline{\Gamma}$ рассматривалась нами только абстрактно. Однако можно поставить вопрос, можно ли эффективно построить в подходящем числовом поле группу линейных подстановок, в *точности* изоморфную группе $\overline{\Gamma}$. Ответ дается следующей теоремой.

Среди простых групп каждого типа существует односвязная [47] *линейная унитарная группа*[1].

Для доказательства этой теоремы достаточно проверить в каждом случае существование такой линейной группы, что преобразования этой группы, представляемые вершинами $O_1, O_2, \ldots, O_{n-1}$ области (P), не совпадают с тождественным преобразованием. Но именно это является непосредственным следствием результатов, полученных в моей статье „Неприводимые тензоры и простые и полупростые линейные группы"[2]. Для этого достаточно взять следующие линейные группы:

Тип A: группа g_1 положительно определенной эрмитовой формы $l+1$ переменных, пространство которой (группы) $h=l+1$ раз накрывает пространство присоединенной группы.

---

[1] Вейль доказал эту теорему для четырех больших типов простых групп. Для исключительных типов он только показал, что их группа связности конечна (Вейль [1], стр. 380—381) [см. стр. 245—246 русского перевода,—*прим. перев.*], не исключая предположения о несуществовании в этих случаях односвязной линейной группы.

[2] Картан [12], стр. 150.

Тип B: группа g_1 над 2^l переменными, пространство которой $h=2$ раза накрывает пространство присоединенной группы.

Тип C: группа g_1 линейного комплекса, пространство которой $h=2$ раза накрывает пространство присоединенной группы.

Тип D: l нечетно: группа g_1 над 2^{l-1} переменными, пространство которой $h=4$ раза накрывает пространство присоединенной группы.

l четно: *приводимая* группа $g_1\, g_2$ над 2^l переменными, пространство которой $h=4$ раза накрывает пространство присоединенной группы.

Тип E_6: группа g_1, пространство которой $h=3$ раза накрывает пространство присоединенной группы.

Тип E_7: группа g_2, пространство которой $h=2$ раза накрывает пространство присоединенной группы.

Для остальных типов сама присоединенная группа является односвязной.

Заметим, что в случае типа D четного ранга не существует *неприводимой* односвязной группы[1].

22. На основе полученных результатов легко получить структуру группы $\overline{\Gamma}/\Gamma$. Она является циклической во всех случаях, кроме типа D четного ранга l, когда она изоморфна группе, порожденной в плоскости отражениями относительно двух перпендикулярных прямых (которые в произведениях дают отражение относительно их точки пересечения и тождественное преобразование).

Вернемся теперь к представлению преобразования группы Γ в l-мерном пространстве φ_l. Операции $\overline{T}$ группы $\overline{\Gamma}$ также можно представить точками, представляющими их образующие бесконечно малые преобразования. При этом сеть $(\overline{R})$ точек, представляющих тождественное преобразование группы $\overline{\Gamma}$, будет содержать только часть вершин сети (R). Для того чтобы получить $(\overline{R})$, заметим, что группа $\mathfrak{G}_1$ движений и отражений, для которой (P) является фундаментальным полиэдром, образуется путем комбинации группы $\mathfrak{G}'$ вращений и отражений

---

[1] Здесь можно добавить, что всегда существует такая линейная группа, которая имеет в качестве своей группы связности произвольную подгруппу группы связности $\overline{\Gamma}/\Gamma$ присоединенной группы.

относительно начала с группой сдвигов $\overline{\mathcal{T}}$ сети $(\overline{R})$. Вершины сети $(\overline{R})$ являются различными положениями, принимаемыми точкой O при применении к ней преобразований группы $\overline{\mathfrak{G}}_1$, и самая группа $\overline{\mathfrak{G}}_1$ порождается $l+1$ отражениями, произведенными относительно $l+1$ граней полиэдра (P).

В качестве фундаментальной области группы $\overline{\mathcal{T}}$ сдвигов сети $(\overline{R})$, можно будет взять взамен одного из фундаментальных параллелепипедов этой сети область $(\mathcal{D})$, образованную (P) и всеми теми $(l+1)$-эдрами, которые образуются из (P) с помощью операций группы $\mathfrak{G}'$. Грани всех этих $(l+1)$-эдров, противоположные точке O, представляют собой геометрические места точек, равноудаленных от O и от всех точек сети $(\overline{R})$, ближайших к O. Поэтому они ограничивают фундаментальную область группы $\overline{\mathcal{T}}$ таким образом, что ее (область) можно было бы построить методом проведения лучей.

Черт. 8, 9 и 10 (стр. 215—217) показывают вид области $(\mathcal{D})$ для односвязных групп типов A, B и G ранга 2. Для получения фундаментального параллелограмма сети $(\overline{R})$ нужно взять отражения O_1 и O_2 точки O относительно двух последовательных сторон периметра $(\mathcal{D})$, не лежащих на одной прямой, и построить параллелограмм, имеющий точки O, O_1, O_2 в качестве вершин.

23. Области $(\mathcal{D})$, относящиеся к группам ранга 3 типов A, B и C, строятся весьма просто.

Типы A и B дают одинаковый полиэдр $(\mathcal{D})$: это додекаэдр, образованный 12 гранями в виде ромбов. Концы малых диагоналей этих ромбов являются 8 вершинами куба. Концы их больших диагоналей представляют собой отражения центра этого куба относительно его граней. В случае типа A каждый из ромбов разделен на два своими малыми диагоналями, что соответствует 24 тетраэдрам (P), входящим в состав полиэдра $(\mathcal{D})$. Вершины куба являются точками O_1 и O_3 тетраэдра (P), повторенными 4 раза, остальные вершины соответствуют точке O_2. В случае типа B ромбы разделены на 4 треугольника обеими своими диагоналями, что соответствует 48 тетраэдрам (P).

В случае типа C область $(\mathcal{D})$ является кубом, каждая грань которого разделена на 8 треугольников диагоналями и прямыми, соединяющими середины противоположных сторон, что соответствует 48 тетраэдрам (P). Группа $\mathfrak{G}^1$ здесь является группой всех отражений куба. Все вершины куба эквивалентны точке O_1.

24. Эффективное определение вершин области $(\mathscr{D})$ производится простым вычислением. Для этого достаточно определить отражение точки O относительно грани полиэдра (P), противоположной к O, и применить к нему различные операции группы $\mathfrak{G}'$. Исходя из l вершин, подходящим образом выбранных, мы получим l ребер, выходящих из O и порождающих фундаментальный параллелепипед сети $(\overline{R})$. Мы получим группу $\overline{\Gamma}/\Gamma$, рассматривая как одну операцию совокупность сдвигов, переводящих точку O в точки, эквивалентные каждой из вершин $O, O_1, \ldots, O_{h-1}$ [48].

Тип A. Сеть $(\overline{R})$ образована точками с целочисленными координатами, сумма которых делится на $l+1$. Точки, эквивалентные точкам O_α, — те точки, координаты которых — целые числа, сумма которых сравнима с α по модулю $l+1$.

Тип B. Сеть $(\overline{R})$ образована точками с целочисленными координатами, сумма которых четная. Точки, эквивалентные точке O_1, — те точки, координаты которых — целые числа, сумма которых нечетная.

Тип C. Сеть $(\overline{R})$ образована точками с целочисленными координатами. Точки, эквивалентные точке O_1, имеют в качестве координат половины нечетных чисел.

Тип D. Сеть $(\overline{R})$ образована точками с целочисленными координатами, сумма которых четная. Точки, эквивалентные точке O_1, имеют в качестве координат половины нечетных чисел с суммой, отличающейся на $\frac{l}{2}$ от нечетного числа. Точки, эквивалентные точке O_3, имеют в качестве координат половины нечетных чисел с суммой, отличающейся на $\frac{l}{2}$ от четного числа. Точки, эквивалентные точке O_2, имеют в качестве координат целые числа с нечетной суммой.

Если l нечетно, сдвиг $\overrightarrow{OO_1}$ является циклическим (по модулю $\mathscr{T}$), его квадрат — сдвиг $\overrightarrow{OO_2}$, а куб — сдвиг $\overrightarrow{OO_3}$.

Если l четно, каждый из сдвигов $\overrightarrow{OO_i}$ является циклическим порядка 2 и каждый из них является произведением двух остальных.

Тип E_6. Сеть $(\overline{R})$ образована точками, координаты которых имеют вид

$$\varphi_i = p_i + \frac{h}{3} \quad (p_i\text{ — целые числа, } h = 0,\ 1 \text{ или } -1),$$

сумма p_i делится на 3. Точки, эквивалентные точкам O_α $(\alpha = 1,2)$, имеют координаты того же вида, но сумма p_i здесь сравнима с α по модулю 3.

Тип E_7. Сеть $(\overline{R})$ образована точками, 8 координат φ_i которых с суммой, равной нулю, имеют вид

$$\varphi_i = p_i + \frac{h}{2} \quad (p_i\text{ — целые числа, } h = 0 \text{ или } 1).$$

Точки, эквивалентные точке O_1, имеют координаты также с суммой, равной нулю, вида

$$\varphi_i = p_i + \frac{h}{4} \quad (p_i\text{ — целые числа, } h = 1 \text{ или } -1).$$

Тип E_8, F_4, G_2. Сеть $(\overline{R})$ совпадает с (R).

ГЛАВА II

ПРОСТРАНСТВА УНИТАРНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

I. ГРУППОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

25. Групповое пространство унитарной простой группы G является римановым пространством, которое односвязно, если группа односвязна [1]. Его связная группа изометрии определяется уравнениями

$$S_{\xi'}=S_a S_\xi S_b,$$

где S_ξ представляет произвольное преобразование группы G, $S_{\xi'}$ — преобразование, соответствующее ему при изометрическом преобразовании группы, S_a и S_b — два фиксированных преобразования [2]. Связная группа изотропии (или группа вращений вокруг начальной точки) образована преобразованиями присоединенной группы

$$S_{\xi'}=S_a^{-1} S_\xi S_a.$$

26. Может существовать также *несвязная* группа изотропии. Она образована всеми линейными подстановками r переменных (компоненты вектора, выходящего из данной точки), оставляющими инвариантной форму Римана

$$R=\sum_{\rho,(ij),(kh)} c_{ij\rho} c_{k\rho h} p_{ij} p_{kh},$$

где p_{ij} обозначают компоненты произвольного бивектора, а c_{ijk} — структурные константы группы, которые всегда можно рассматривать, как компоненты тривектора. Несвязная присоединенная группа, т. е. совокупность всех линейных подстановок, сохраняющих структурные константы группы, является, очевидно, частью несвязной группы изотропии. Предположим теперь, что существует линейная подстановка Θ, входящая в группу изотропии и не принадлежащая к присоединенной группе. Если T —

---

[1] Речь идет о пространстве аффинной связности *без кручения* данной группы. См. Картан [17]. См. стр. 7—111 настоящего сборника). *(Прим. перев.)*]

[2] См. стр. 98 только что цитированного мемуара. [Стр. 105 настоящего сборника. *(Прим. перев.)*]

произвольная матрица *связной* присоединенной группы, то матрица

$$\theta^{-1}T\theta = T'$$

также принадлежит этой группе [49]. Матрица θ устанавливает, таким образом, соответствие между матрицами T и T' присоединенной группы, и это соответствие сохраняет, очевидно, структуру этой группы. Поэтому в несвязной присоединенной группе существует такая подстановка T_0, что для нее также

$$T_0^{-1}TT_0 = T' \ [^{50}].$$

Следовательно,

$$\theta^{-1}T\theta = T_0^{-1}TT_0,$$

откуда

$$T_0\theta^{-1}T = TT_0\theta^{-1}.$$

Таким образом, преобразование $T_0\theta^{-1}$ перестановочно со всеми матрицами связной присоединенной группы. Но *так как эта группа неприводима* [1], то из теорем И. Шура и Фробениуса следует, что матрица $T_0\theta^{-1}$ является произведением единичной матрицы на постоянный множитель m. Поэтому

$$\theta = \frac{1}{m}T_0.$$

Следовательно, группа изотропии должна содержать матрицу $\frac{1}{m}$, умножающую компоненты каждого вектора на $\frac{1}{m}$. Но это возможно, только если $\frac{1}{m} = -1$*).

Обратно, всякое отражение относительно точки, изменяющее знак всех r переменных, над которыми действует группа изотропии, очевидно, сохраняет форму Римана R. Оно не входит, однако, в *несвязную* присоединенную группу, так как, изменяя знаки у всех бесконечно малых преобразований простой группы, она изменяет знаки и у структурных констант этой группы.

Из этого следует, что если присоединенная группа группы G состоит из h различных связных семейств, то группа изотропии риманова пространства группы G состоит из $2h$ раз-

---

[1] Это означает, что она не оставляет инвариантным ни одного плоского многообразия.

*) Не считая, конечно, тривиального случая $\frac{1}{m} = 1$. (*Прим. перев.*)

личных связных семейств, которые можно получить, комбинируя смешанную присоединенную группу с отражением относительно рассматриваемой фиксированной точки пространства.

В силу тех результатов, которые я доказал о присоединенной группе простых групп[1]), мы видим, что *группа изотропии группового пространства состоит из двух связных семейств, за следующими исключениями*:

В случае типа A *и ранга* $l \geqslant 2$, *в случае типа* D *и ранга* $l \geqslant 5$ *и в случае типа* E *ранга* 6 *группа изотропии состоит из четырех связных семейств.*

В случае типа D *ранга 4 группа изотропии состоит из двенадцати связных семейств.*

27. Каждому связному семейству группы изотропии соответствует семейство изометрических преобразований. Полученные, таким образом, различные семейства изометрических преобразований *локально* различны вблизи преобразований, оставляющих неподвижной данную точку пространства. Мы сейчас покажем, что если групповое пространство односвязно, число различных семейств полной группы изометрии в точности равно числу различных семейств полной группы изотропии [[51]]. В самом деле, в противном случае можно было бы непрерывным образом перейти от тождественного преобразования к изометрическому преобразованию, оставляющему неподвижной точку A и не принадлежащему к связной группе изотропии, оставляющей неподвижной точку A.

Если мы применим различные полученные изометрические преобразования к точке A, мы получим в групповом пространстве замкнутый контур, выходящий из A и возвращающийся в ту же точку. Этот замкнутый контур посредством непрерывной деформации может быть стянут в точку A. Эта деформация может быть дополнена непрерывной деформацией последовательности рассматриваемых изометрических преобразований.

---

[1]) Картан [13]. Впрочем, эти результаты, хотя это и не высказано явно, относятся лишь к присоединенной группе простых групп *с комплексными параметрами*, а также к присоединенной группе *унитарных вещественных* групп. В остальных случаях нельзя утверждать, как это делается в конце n°2 (стр. 187) этого мемуара, что каждое преобразование несвязной присоединенной группы, оставляющее инвариантным каждое из преобразований Y некоторой коммутативной подгруппы γ, принадлежит к *связной* присоединенной группе.

В конечном счете мы получим связную последовательность преобразований несвязной группы изотропии группы A, начинающуюся в тождественном преобразовании и кончающуюся в преобразовании, *не принадлежащем к связной группе изотропии*, что является абсурдом.

Это рассуждение является общим и показывает, что во всяком односвязном римановом пространстве группа изометрии состоит из точно такого же числа различных связных семейств, что и группа изотропии.

Если число этих семейств равно 2, два семейства изометрических преобразований определяются уравнениями

$$S_{\xi'} = S_a S_\xi S_b,$$
$$S_{\xi'} = S_a S_\xi^{-1} S_b.$$

28. Можно было бы исходить и из другой унитарной простой группы G', локально изоморфной группе G, но не односвязной. Ее групповое пространство $\mathscr{E}'$ является римановым пространством, уже не односвязным и локально наложимым на групповое пространство $\mathscr{E}$ группы G. Это наложение ставит в соответствие каждой точке пространства $\mathscr{E}'$ некоторое число k точек пространства $\mathscr{E}$, если k обозначает индекс связности группы G'. Изометрические преобразования пространства $\mathscr{E}$, переводящие одну из этих точек в остальные $k-1$, составляют то, что можно назвать *группой голономии* пространства $\mathscr{E}'$ по отношению к $\mathscr{E}$. Все эти преобразования перестановочны со всеми различными преобразованиями связной группы изометрии пространства $\mathscr{E}$. Эти преобразования имеют вид

$$S_{\xi'} = S_a S_\xi,$$

где S_a обозначает различные преобразования группы G, соответствующие тождественному преобразованию группы G'. Преобразования группы голономии также входят в связную группу изометрии пространства $\mathscr{E}$. В частности, отсюда следует, что пространство $\mathscr{E}'$ *ориентируемо*. Группа голономии является не чем иным, как группой связности $\overline{\Gamma}|G'$ [52]. Она является подгруппой группы голономии пространства присоединенной группы. Если G' отлична от Γ, то группа голономии необходимо является циклической [53].

29. Предыдущие результаты позволяют уточнить, каковы все те римановы пространства $\mathscr{E}'$, которые соответствуют одной и той же структуре. Кроме односвязного пространства $\mathcal{E}$, существующего всегда, мы находим:

А. Столько же форм пространств, сколько делителей (отличных от 1 у числа $l+1$; каждая из этих форм имеет циклическую группу голономии;

В, С, E_6, E_7. Вторая форма пространства, и только она;

D. l нечетно: две другие формы пространства с циклическими группами голономии порядка 2 и 4.

l четно: четыре другие формы пространства, три из которых имеют циклическую группу голономии порядка 2, а последняя имеет нециклическую группу голономии порядка 4 [54].

30. Пространства $\mathcal{E}'$, которые мы только что рассматривали, можно назвать *формами Клейна* пространства $\mathcal{E}$. Каждое из них допускает связную группу изометрии, состоящую из всюду регулярных и однозначных преобразований и локально изоморфную связной группе изометрии пространства $\mathcal{E}$.

Как известно, существуют или могут существовать и другие формы пространств, которые мы будем называть *формами Клиффорда*[1]), с метрикой всюду регулярной, локально наложимые на данное пространство, допускающие локально (в достаточно малой области) те же изометрические преобразования, что и данное пространство, но *эти преобразования не все остаются однозначными, если их продолжить на все пространство*. Так, например, круглый цилиндр является формой Клиффорда эвклидовой плоскости: сдвиги плоскости могут быть продолжены и остаются однозначными из всей поверхности цилиндра, но на цилиндре нет аналога вращениям плоскости.

Каждой форме Клиффорда односвязного пространства $\mathcal{E}$ соответствует дискретная группа голономии, порожденная изометрическими преобразованиями пространства $\mathcal{E}$, переводящими каждую точку M этого пространства в другую точку, отвечающую в пространстве Клиффорда той же точке, что и M. Разыскание форм Клиффорда сводится, таким образом, к разысканию таких дискретных подгрупп (полной) группы изометрии пространства $\mathcal{E}$, чтобы ни одна операция такой подгруппы (кроме тождественной операции) не оставляла бы неподвижной ни одну точку пространства $\mathcal{E}$.

---

[1]) См. Энриквес [1], стр. 133—136. Мы различаем здесь формы Клейна и формы Клиффорда, вместо того чтобы, как это обычно делается, смешивать их под общим названием форм Клиффорда — Клейна.

В интересующем нас случае единственные формы Клейна $\mathcal{E}'$ пространства $\mathcal{E}$ даются нам различными унитарными простыми группами той же структуры [55]*).

Мы вновь получаем классические результаты в частном случае простой 3-параметрической группы. Присоединенная группа здесь изоморфна группе вращений вокруг начала в обычном пространстве. Пространство этой группы является не чем иным, как трехмерным *эллиптическим пространством*. Односвязное пространство $\mathcal{E}$ здесь — *сферическое пространство*, которое также можно рассматривать как пространство унимодулярной линейной группы положительно определенной эрмитовой формы от двух переменных. Это пространство допускает два связных семейства изометрических преобразований. Группа голономии эллиптического пространства (по отношению к сферическому пространству) состоит из тождественной операции и преобразования $x'_i = -x_i$, входящего в связную группу движений сферического пространства. Эллиптическое пространство ориентируемо. Это единственная форма Клейна сферического пространства.

II. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ

31. Так как группа изометрии односвязного пространства $\mathcal{E}$ группы G транзитивна, изучение геодезических линий, выходящих из произвольной точки, сводится к изучению геодезических линий, выходящих из начальной точки O, соответствующей тождественному преобразованию группы G. Эти геодезические линии соответствуют различным 1-параметрическим подгруппам группы G. Поэтому разыскание геодезической линии, связывающей O с данной точкой A, является разысканием бесконечно малого преобразования, порождающего конечное преобразование, представляемое точкой A. Отсюда непосредственно следует, что через две произвольные точки пространства $\mathcal{E}$ всегда проходит геодезическая линия (и даже бесконечное количество таких линий, если $l > 1$). Мы оставим в стороне случай $l = 1$, соответствующий сферическому и эллиптическому пространствам трех измерений.

Всякое направление, выходящее из O, представляет бесконечно малое преобразование группы G, принадлежащее по меньшей мере к одной коммутативной подгруппе γ (n°3).

---

*) В этом абзаце исправлена неточность у Картана. (*Прим. ред.*)

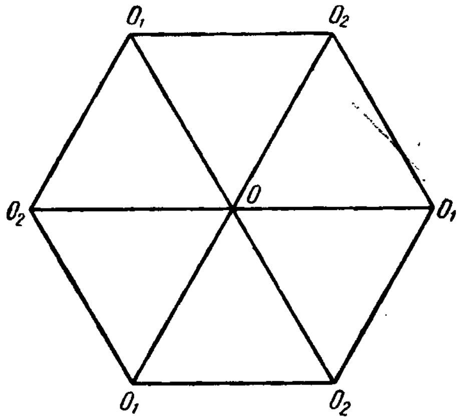
Преобразования подгруппы γ определяют в пространстве $\mathcal{E}$ l-мерное многообразие E_l, проходящее через точку O. Это многообразие имеет нулевую риманову кривизну, так как вращение, соответствующее элементарному параллелограмму, стороны которого представляют бесконечно малые преобразования U и V, дает каждому вектору X геометрическое приращение $\frac{1}{4}((UV)X)$, но это вращение всегда равно нулю, так как коммутатор (UV) двух любых преобразований группы γ равен нулю.

Многообразие E_l является поэтому локально эвклидовым. Оно является также вполне геодезическим, так как представляет подгруппу группы G. Точку A многообразия E_l можно аналитически определить с помощью l фундаментальных угловых параметров $\varphi_1, \ldots, \varphi_l$ бесконечно малого преобразования Y подгруппы γ, порождающего конечное преобразование, представляемое точкой A. *Расстояние OA, отсчитанное по соответственной геодезической линии с точностью до постоянного множителя, равно квадратному корню из суммы $\sum\varphi_\alpha^2$, распространенной на $r - l$ угловых параметров. Отсюда мы видим, что представление в l-мерном эвклидовом пространстве, применявшееся в гл. I, является не чем иным, как наложением на это эвклидово пространство локально эвклидова многообразия E_l.*

Между ними имеется, однако, существенная разница. Многообразие E_l не является бесконечным эвклидовым пространством, и если развернуть это многообразие на l-мерное эвклидово пространство, оно даст нам сеть $(\overline{R})$ параллелепипедов, *каждый из которых представляет многообразие E_l полностью.*

Отсюда видно, что *каждая точка многообразия E_l может быть связана с O счетным множеством геодезических линий, целиком расположенных в E_l* и изображающихся в эвклидовом пространстве прямыми, соединяющими начало O с различными точками, эквивалентными данной точке по отношению к группе $\mathfrak{G}$ сдвигов сети $(\overline{R})$. Если направляющие косинусы этих прямых являются рациональными числами, соответственные геодезические линии замкнуты. Все геодезические линии, расположенные в E_l и соединяющие O с A, являются *изолированными*, и ни одна геодезическая линия не пересекается сама с собой.

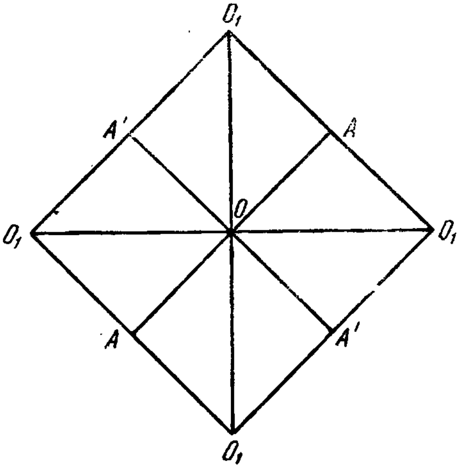
32. Вместо представления многообразия E_l фундаментальным параллелепипедом сети $(\overline{R})$ можно с успехом представлять его полиэдром $\mathcal{D}$, введенным в n°26. Операции группы $\mathcal{T}'$ соответствуют вращениям связной группы изотропии пространства $\mathcal{E}$, приводящим многообразие E_l в совпадение с самим собой (но так, чтобы не все точки многообразия E_l оставались неподвижными). При каждом из этих вращений различные $(l+1)$-эдры (P), на которые разлагается полиэдр $(\mathcal{D})$, переводятся друг в друга. Число этих $(l+1)$-эдров совпадает с числом операций группы $\mathcal{T}'$, и каждое из этих $(l+1)$-эдров является фундаментальной областью для дискретной группы $\mathcal{T}'$.



Черт. 8.

Черт. 8 представляет одно из плоских многообразий E_2 восьмимерного односвязного пространства унитарной простой группы типа А ранга 2. Противоположные стороны правильного шестиугольника должны рассматриваться как совпадающие, соответствие между их точками устанавливается сдвигом, совмещающим эти две стороны. Три сдвига, соответствующие трем парам противоположных сторон, порождают группу $\overline{\mathcal{T}}$ сдвигов сети $(\overline{R})$ (это, в сущности, группа голономии плоскости Клифforда E_2 по отношению к эвклидовой плоскости). Три вершины O_1 соответствуют одной точке E_2, так же как и три вершины O_2. На чертеже изображены три различные замкнутые геодезические, выходящие из O. Каждая из них последовательно проходит через точки O_1 и O_2, делящие ее на три равные части. Одна из этих геодезических линий, например, выходит из точки O в горизонтальном направлении к точке O_1, затем продолжается в виде горизонтальной стороны O_1O_2 и заканчивается в виде горизонтального радиуса O_2O, возвращаясь в свою исходную точку. Эти три геодезические линии, имеющие равную длину, пересекают друг друга в точке O под углом 120° (если рассматривать направления, ведущие к точке O_1). В E_2 имеется также бесконечное количество других замкнутых геодезических линий, но они имеют большую длину*).

Черт. 9 показывает область ($\mathscr{D}$), представляющую многообразие E_2 десятимерного односвязного пространства унитарной простой группы типа B ранга 2. Противоположные стороны этого квадрата приводятся в соответствие с помощью сдвига и должны рассматриваться как совпадающие. Четыре вершины квадрата представляют одну точку многообразия E_2. Середины сторон квадрата представляют две различные точки A и A'. На чертеже изображены четыре замкнутые геодезические линии, выходящие из O. Две из них, пересекающиеся в точке O под прямым углом, делятся пополам в точке O_1, две другие (короче предыдущих в отношении $\sqrt{2}$) делятся пополам — одна в точке A, а другая в точке A'. На чертеже изображены также две геодезические линии, выходящие из O_1 и делящиеся пополам — одна в A, а другая в A'.



Черт. 9.

Черт. 10 представляет многообразие E_2 14-мерного пространства простой группы типа G_2. Вершины правильного шестиугольника представляют две различные точки A и A' многообразия E_2. Середины его сторон представляют три другие различные точки B, B', B''. На чертеже представлены три замкнутые геодезические линии, выходящие из O и проходящие

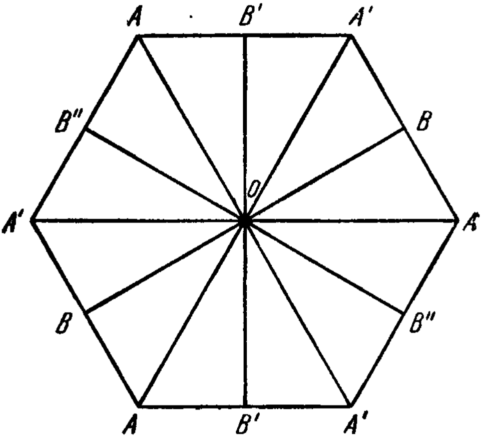
---

*) Картан здесь упустил не изображенные на чертеже геодезические линии, направленные по перпендикулярам, опущенным из O на внешние стороны шестиугольника черт. 8. Они короче указанных Картаном линий в $\sqrt{3}$ раз. (*Прим. перев.*)

последовательно через точки A и A', делящие их на три равные части, с другой стороны они делятся пополам в одной из трех точек B, B' или B''. Чертеж показывает также три другие замкнутые геодезические линии, также делящиеся пополам в одной из этих трех точек, но не проходящие ни через A, ни через A'. Длины этих двух видов геодезических линий относятся, как 3 и $\sqrt{3}$.

33. Вернемся к общему изучению геодезических линий. Если данная точка A, отличная от O, принадлежит единственному многообразию E_l, то все геодезические линии, соединяющие O с A, находятся в этом многообразии. Все они являются изолированными, и всего имеется счетное множество таких геодезических линий.

Если точка A принадлежит к бесконечному количеству многообразий E_l, то конечное преобразование группы G, представляемое точкой A, перестановочно с более чем l независимыми бесконечно малыми преобразованиями; пусть число этих преобразований равно $l+\lambda$. Мы найдем число λ, разыскивая, сколько среди $r-l$ угловых параметров φ_α точки A целых чисел. Точка A остается неподвижной при преобразованиях подгруппы $g_{l+\lambda}$ связной группы вращений вокруг O. Следовательно, эта точка принадлежит ∞^λ различным многообразиям E_l, и в каждом из них существует счетное множество линий, соединяющих O с A. Предположим теперь, что направление одной из этих геодезических линий в точке O инвариантно при преобразованиях некоторой подгруппы $g_{l+\mu}$ группы вращений вокруг O. Тогда соответственная геодезическая линия будет принадлежать ∞^μ различным многообразиям E_l. Если $\mu=\lambda$, эта геодезическая линия будет



Черт. 10.

изолированной в пространстве $\mathscr{E}$ (в множестве геодезических линий, связывающих O с A). Но если $\mu < \lambda$, эта геодезическая линия будет принадлежать к непрерывному $(\lambda - \mu)$-мерному семейству геодезических линий, соединяющих O с A, и это многообразие можно получить, применяя к данной геодезической линии все вращения группы $g_{l+\lambda}$, оставляющей неподвижными точки O и A.

Таким образом, *некоторые геодезические линии, соединяющие O с A, могут не быть изолированными*. Это имеет место в том случае, когда группа вращений, оставляющих неподвижной точку A, является более широкой, чем группа вращений, оставляющих инвариантным направление геодезической линии OA в точке O. Размерность соответственного связного множества геодезических линий равна увеличенной на 1 разности порядков этих двух групп.

34. В результате мы можем сказать, что точки M группового пространства делятся на три категории:

1°. Первая категория образована точками, которые могут быть соединены с O только изолированными геодезическими линиями.

2°. Вторая категория образована точками, которые могут быть соединены с O как изолированными, так и неизолированными геодезическими линиями.

3°. Третья категория образована точками, которые не могут быть соединены с O ни одной изолированной геодезической линией.

Ясно, что в l-мерном пространстве представления, применявшемся в гл. I, всякая точка A одной из двух последних категорий должна находиться на одной из гиперплоскостей (П), полученных приравниванием одного из угловых параметров целому числу. Следовательно, если предположить (что не нарушает общности), что эта точка принадлежит к $(l+1)$-эдру (P), она необходимо должна находиться на одной из граней или на одном из ребер и т. д.

Обратно, возьмем точку A на границе полиэдра (P). Если она эквивалентна (относительно сети $(\overline{R})$) точке A', у которой все целые угловые параметры равны нулю[1], то геодезическая

---

[1] Для этого необходимо и достаточно, чтобы грань (или ребро и т. д.) полиэдра (P) при достаточном продолжении проходила бы через одну из вершин сети $(\overline{R})$.

линия, представляемая прямой OA', допускает все вращения, оставляющие неподвижной точку A'. Поэтому эта геодезическая линия является изолированной.

В противоположном случае ни одна из геодезических линий, соединяющих O с A, не будет изолированной.

Именно такой случай имеет место, например, для всех вершин A (кроме O) полиэдра (P). В самом деле, если бы в этом случае существовала точка A', то все угловые параметры были бы равны нулю, и это была бы точка O, не эквивалентная A относительно сети $(\overline{R})$ [56].

Таким образом, в случае, если эвклидово многообразие E_l будет принимать все свои возможные положения, l отличных от O вершин A полиэдра (P) породят l различных многообразий, которые можно назвать *антиподными многообразиями* точки O. *Точку O нельзя связать изолированной геодезической линией ни с одной точкой такого антиподного многообразия.*

Полное определение точек третьей категории должно производиться в каждом случае в отдельности, и можно будет найти, что такие точки существуют и вне антиподных многообразий. Такое определение сводится к чисто арифметическим рассуждениям.

35. Если одна из вершин $(l+1)$-эдра (P) в представлении присоединенной группы Γ является одной из вершин сети (R), т. е. представляет тождественное преобразование группы Γ, то ясно, что эта точка остается неподвижной при всех вращениях вокруг O. Эта точка составляет тогда все антиподное многообразие. Будем называть такую точку *антиподом* точки O. Мы уже определили число $h-1$ таких точек в различных случаях.

Если же рассматриваемая вершина $(l+1)$-эдра (P) не является одной из вершин сети (R), она допускает только $(r-\rho)$-параметрическую подгруппу группы вращений вокруг O т. е. связной присоединенной группы). Следовательно, если вращать всеми способами многообразие E_l, эта точка порождает ρ-мерное антиподное многообразие (M_ρ). Число антиподных многообразий, не сводящихся к одной точке, равно $l-h+1$. В каждом случае размерности этих многообразий можно легко определить. Ясно, что всякое многообразие E_l

пересекает каждое антиподное многообразие по конечному числу точек. Если A — вершина полиэдра (P), принадлежащая к такому многообразию, и если применить к ней операции группы $\mathfrak{G}'$, то получим некоторое число точек, принадлежащих в E_l одному и тому же антиподному многообразию. При этом точки, эквивалентные по отношению к различным образующим сдвигам группы $\overline{\mathfrak{G}}$ сети $(\overline{R})$, не следует рассматривать как различные.

36. Произведем полное исследование трех типов простых групп ранга 2.

В случае A точка O допускает два антипода O_1 и O_2 (черт. 8, стр. 215). Точки, расположенные на боковых сторонах треугольников, составляющих шестиугольник $(\mathscr{L})$, имеют один нулевой угловой параметр (а значит и второй, отличающийся от этого лишь знаком). Поэтому здесь $\lambda = 2$, и точка эквивалентна $\infty^{r-4} = \infty^4$ точкам пространства. Геометрическое место аналогичных точек (точек второй категории) образует, следовательно, единственное пятимерное многообразие (M_5), пересекающееся с многообразием E_2 по трем замкнутым геодезическим линиям, выходящим из O.

Среди замкнутых геодезических линий имеются, следовательно, такие, которые целиком расположены в (M_5). Каждая из этих линий входит в связное многообразие замкнутых геодезических линий $(\lambda = 6,\ \mu = 2)$, совпадающее, впрочем, с (M_5). Эти линии проходят через обе точки-антиподы O_1 и O_2. Остальные замкнутые геодезические линии не лежат целиком в (M_5), их направление в O допускает только 2-параметрическую группу вращений $(\mu = 0)$. Каждая из них входит в связное многообразие V_7 замкнутых геодезических линий.

Рассмотрим теперь *ориентированную* замкнутую геодезическую линию, изображаемую в плоскости представления прямой, соединяющей O с некоторой точкой сети $(\overline{R})$. Координаты этой точки — целые числа p и q с суммой, кратной 3. Если p и q взаимно просты, геодезическая линия не встречает ни одной точки-антипода (такие точки соответствовали бы целочисленным координатам вида tp, tq, где $0 < t < 1$). Если p и q не взаимно просты, их наибольший общий делитель может быть равен только 3 [57]. В этом случае геодезическая линия пройдет сначала через точку $\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}\right)$, являющуюся антиподом, а затем эта линия пройдет через точку-антипод $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2q}{3}\right)$. Геодезическая линия делится этими двумя точками на три равные части. Эта линия встречает сначала O_1 или O_2, если число $\frac{p+q}{3}$ сравнимо по модулю 3 соответственно с 1 или 2.

Таким образом, существуют три категории ориентированных замкнутых геодезических линий:

1°. *Такие, которые содержат две точки-антипода в последовательности* OO_1O_2O.

2°. *Такие, которые содержат две точки-антипода в последовательности* OO_2O_1O.

3°. *Такие, которые не содержат ни одной точки-антипода.*

Ясно, что ориентированные замкнутые геодезические линии второй категории — не что иное, как линии первой категории, пробегаемые в обратном направлении.

Если теперь мы соединим точку O с какой-нибудь точкой A многообразия (M_5), мы получим, во-первых, изолированную геодезическую линию, целиком расположенную в (M_5), а затем бесконечное количество классов геодезических линий, образующих многообразие V_3.

Если, наконец, мы соединим O с точкой A, не расположенной в (M_5), мы получим бесконечное количество изолированных геодезических линий.

37. В случае типа B ранга 2 точка O допускает одну точку-антипод O_1 (черт. 9, стр. 216), и антиподное многообразие пересекает E_2 в двух точках A и A'. В обозначениях n° **15** точка A имеет координаты $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{2}$. Угловые параметры

$$\pm\varphi_1 \pm \varphi_2$$

в количестве $\lambda = 4$ являются целыми числами. Следовательно, так как здесь $r = 10$, $l = 2$, антиподное многообразие четырехмерно.

Таким образом, всякая точка O допускает одну точку-антипод O_1 *и антиподное многообразие* (M_4).

Геометрическое место точек второй категории здесь образовано двумя многообразиями (M_7) и (M'_7), каждое из которых пересекает многообразие E_2 по двум перпендикулярным прямым (черт. 9). Одно из этих многообразий содержит точку-антипод O_1, другое — антиподное многообразие (M_4).

Замкнутая геодезическая линия, выходящая из точки O, может быть представлена на эвклидовой плоскости прямой, выходящей из O и кончающейся в одной из точек сети $(\overline{R})$. Если (p, q) — первая из этих точек, то p и q — целые числа с четной суммой (n° **28**).

Если p и q нечетные, то точка $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$ принадлежит к антиподному многообразию (M_4), которое делит геодезическую линию на две равные части. Эта геодезическая линия не проходит через точку-антипод O_1.

Если p и q четные, то сумма их не должна делиться на 4. Если $p = 4p'$, $q = 4q' + 2$, то геодезическая линия встречает сначала точку-антипод $O_1\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$, а затем возвращается в O.

Таким образом, всякая замкнутая геодезическая линия здесь делится пополам или точкой-антиподом O_1, *или антиподным многообразием* (M_4).

Рассмотрение размерностей связных многообразий, порожденных геодезическими линиями, связывающими две данные точки, здесь производится точно таким же образом, как и в случае A.

38. В случае типа G точка O не имеет антипода. Здесь существует два антиподных многообразия, одно из которых пересекает всякое многообразие E_2 в двух точках A, A' (черт. 10, стр. 217), а другое — в трех точках B, B', B''. В обозначениях n° **22** одна из точек A имеет координаты $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{1}{3}$, а одна из точек B имеет координаты $\varphi_1 = \frac{1}{2}$, $\varphi_2 = 0$. Вводя избыточную координату $\varphi_3 = -\varphi_1 - \varphi_2$, мы находим, что угловые параметры точки A, являющиеся целыми числами, имеют вид

$$\pm(\varphi_1 - \varphi_2),\quad \pm(\varphi_1 - \varphi_3),\quad \pm(\varphi_2 - \varphi_3).$$

Поэтому здесь $\lambda = 6$, $r = 14$, $l = 2$. Первое антиподное многообразие здесь, таким образом, шестимерно. Угловые параметры точки B, также являющиеся целыми числами, имеют вид

$$\pm\varphi_2,\quad \pm(\varphi_1 - \varphi_3).$$

Поэтому здесь $\lambda = 4$. Второе антиподное многообразие здесь восьмимерно.

Таким образом, всякая точка O пространства допускает два антиподных многообразия (M_6) и (M_8).

Точки, эквивалентные точке O, имеют целочисленные координаты. Точки многообразия (M_6) имеют в качестве координат трети целых чисел, сравнимых между собой по модулю 3. Точки многообразия (M_8) имеют в качестве координат половины целых чисел, не являющихся одновременно четными.

Всякая замкнутая геодезическая линия, выходящая из O, кончается в точке (p, q) эвклидовой плоскости, причем p и q — два взаимно простых числа. Рассмотрим три точки $\left(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}\right)$, $\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right)$, $\left(\frac{2p}{3}, \frac{2q}{3}\right)$. Вторая точка принадлежит к (M_8). Первая точка принадлежит к (M_6), если $p - q$ делится на 3, то же относится и к третьей точке.

Таким образом, здесь существуют две категории замкнутых геодезических линий. Геодезические линии обеих этих категорий делятся пополам антиподным многообразием (M_8). *Геодезические линии второй категории сверх того делятся на три равные части антиподным многообразием* (M_6).

Черт. 10 дает примеры обеих этих категорий геодезических линий.

III. КЛАССИФИКАЦИЯ ЗАМКНУТЫХ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ

Сейчас мы определим для четырех больших классов простых групп антиподные многообразия и точки и проведем классификацию замкнутых геодезических линий, основанную на характере встречаемых ими антиподных многообразий.

39. *Односвязные пространства типа* A. Здесь имеются только точки-антиподы. Будем называть O_i те из них, у которых i первых координат равны 1, а остальные равны нулю (n° **10**).

Точками, эквивалентными точке O_i, здесь являются точки, координаты которых $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ — целые числа, удовлетворяющие сравнению

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_l \equiv i \pmod{l+1}.$$

Рассмотрим теперь замкнутую геодезическую линию, представляемую прямой, начинающейся вначале и кончающейся в точке с целыми координатами $(p_1, \ldots, p_l)$, такими, что

$$p_1+p_2+\ldots+p_l\equiv 0 \pmod{l+1}.$$

Пусть d — наибольший общий делитель целых чисел p_i. Число d необходимо является делителем числа $l+1$, так как в противном случае, деля все координаты p_i на $\frac{d}{\delta}$, где δ — наибольший общий делитель d и $l+1$, мы получили бы целые координаты q_i, сумма которых делилась бы на $l+1$, и геодезическая линия замкнулась бы раньше, чем мы предполагали.

Мы встретим одну из точек-антиподов, если найдутся целые числа, пропорциональные p_i, меньшие p_i, причем их сумма не делится на $l+1$. Это невозможно, если $d=1$. В противном случае мы возьмем кратные числам $\frac{p_i}{d}$. Таким образом, если

$$\frac{p_1}{d}+\frac{p_2}{d}+\ldots+\frac{p_l}{d}\equiv \alpha \pmod{l+1},$$

то геодезическая линия последовательно встретит антиподы

$$O_\alpha,\ O_{2\alpha},\ O_{3\alpha},\ \ldots$$

Каждый из этих индексов следует привести по модулю $l+1$ (вычитая наибольшее кратное $l+1$).

В результате мы находим, что существует $l+1$ различных категорий ориентированных замкнутых геодезических линий. Геодезические линии α-й категории встречают последовательно, выходя из O в положительном направлении, точки-антиподы O_α, $O_{2\alpha}$, $O_{3\alpha}, \ldots$ и т. д. Геодезические линии $(l+1)$-й категории не встречают ни одной точки-антипода.

40. *Односвязные пространства типа* B. Сохраняя обозначения n° **11**, мы запишем координаты l вершин $(l+1)$-эдра (P) в виде

$$(O_1)\ 1,\ 0,\ 0, \ldots, 0,$$

$$(A_2)\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0, \ldots, 0,$$

. . . .

$$(A_l)\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}.$$

Первая из этих точек — антипод точки O. Из угловых параметров точек A_i являются целочисленными

$$\begin{aligned} &\pm\varphi_{i+1}, \ldots, \pm\varphi_l, \\ &\pm\varphi_\alpha \pm \varphi_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, i), \\ &\pm\varphi_\lambda \pm \varphi_\mu \qquad (\lambda, \mu = i+1, \ldots, l). \end{aligned}$$

Их число равно

$$4i^2 - (4l+2)\,i + 2l^2.$$

Следовательно, точка A_i порождает антиподное многообразие (M^i)

$$2i\,(2l - 2i + 1) \qquad (i = 2, 3, \ldots, l)$$

измерений.

Точки, эквивалентные точке O, имеют целочисленные координаты с четной суммой, точки, эквивалентные точке O_1, имеют целочисленные координаты с нечетной суммой. Точки, принадлежащие к антиподным многообразиям (M^i), имеют i координат, являющихся половинами нечетных чисел, а остальные их координаты — целые числа.

Если замкнутая геодезическая линия выходит из точки O, то она обязательно придет в некоторую точку с целочисленными координатами p_i, причем их сумма $\sum\limits_i p_i$ четная. Если при этом все целые числа p_i четные, они являются удвоенными взаимно простыми целыми числами с нечетной суммой. Если же целые числа p_i не все четные, то они являются взаимно простыми.

Предположим сначала, что числа p_i взаимно-просты и имеют четную сумму. Тогда точка $\left(\frac{p_i}{2}\right)$ принадлежит одному из антиподных многообразий, и так как число нечетных целых чисел p_i должно быть четным, это антиподное многообразие будет (M^2) или (M^4) и т. д.

Предположим теперь, что $p_i = 2q_i$, причем q_i взаимно просты и имеют нечетную сумму. Здесь следует рассмотреть точки $\left(\frac{q_i}{2}\right)$, (q_i) и $\left(\frac{3q_i}{2}\right)$. Если только одно из целых чисел q_i нечетно, точки $\left(\frac{q_i}{2}\right)$ и $\left(\frac{3q_i}{2}\right)$ не находятся ни на одном антиподном многообразии, и точка (q_i) является точкой-антиподом O_1. Если $2h + 1 \geqslant 3$ целых чисел q_i нечетны, геодезическая линия последовательно встречает (M^{2h+1}), O_1 и опять (M^{2h+1}) и делится при этом на четыре равных отрезка.

В результате мы находим, что *замкнутые геодезические линии делятся на l различных категорий, в зависимости от первого встречаемого ими антиподного многообразия.*

Если это многообразие является точкой-антиподом O_1 или одним из многообразий (M^{2i}), геодезическая линия не встречает другого многообразия и делится данным многообразием на два равных отрезка.

Если это многообразие является одним из многообразий (M^{2i+1}), геодезическая линия встречает затем O_1, затем снова (M^{2i+1}) и делится при этом на четыре равных отрезка.

41. *Односвязные пространства типа C.* Здесь имеется (n° 12) l вершин $A_1, \ldots, A_{l-1}, A_l$. При этом у вершины A_i i первых координат равны $\frac{1}{2}$, а остальные — нулю. Точка A_l является точкой O_1 — единственной точкой-антиподом для O.

Из угловых параметров точки A_i являются целочисленными

$$\begin{array}{cl} \pm 2\varphi_\alpha & (\alpha = 1, 2, \ldots, l), \\ \pm \varphi_\alpha \pm \varphi_\beta & (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, i), \\ \pm \varphi_\lambda \pm \varphi_\mu & (\lambda, \mu = i+1, \ldots, l). \end{array}$$

Их число равно $4i^2 - 4li + 2l^2$. Поэтому точка A_i порождает антиподное многообразие (M^i) $4i(l-i)$ измерений.

Точки, эквивалентные точке O, являются точками с целочисленными координатами точки, эквивалентные точке O_1, являются точками, координаты которых — половины нечетных целых чисел. У точек, принадлежащих к (M^i), i координат являются половинами нечетных целых чисел, остальные являются целыми числами.

Если замкнутая геодезическая линия выходит из точки O, то она кончается в точке с целочисленными координатами, причем числа p_i взаимно просты. Точка $\left(\frac{p_i}{2}\right)$, очевидно, является точкой-антиподом или точкой одного из антиподных многообразий.

Существует l категорий замкнутых геодезических линий. Каждая замкнутая геодезическая линия встречает

одно, и только одно, антиподное многообразие, делящее ее на две равные части.

42. *Односвязные пространства типа* D. Вершина A_1 $(l+1)$-эдра (p) имеет в качестве первой координаты 1, вершины $A_i\,(2\leqslant i\leqslant l-2)$ имеют в качестве i первых координат $\frac{1}{2}$, а остальные координаты этих точек равны нулю. Вершины A_{l-1} и A_l имеют в качестве $l-1$ первых координат $\frac{1}{2}$, а последние координаты этих точек равны $-\frac{1}{2}$ и $+\frac{1}{2}$.

Точки A_1, A_{l-1} и A_l являются тремя точками-антиподами O_2, O_1 и O_3 точки O.

Из угловых параметров точки A_i являются целочисленными

$$\begin{aligned}&\pm\varphi_\alpha\pm\varphi_\beta \quad (\alpha,\ \beta=1,2,\ldots,i),\\ &\pm\varphi_\lambda\pm\varphi_\mu \quad (\lambda,\ \mu=i+1,\ldots,l).\end{aligned}$$

Их число равно $4i^2-4li+2l\,(l-1)$. Следовательно, точка A^i порождает антиподное многообразие (M^i) $4i\,(l-i)$ измерений.

Здесь следует различать случаи четного и нечетного l.

1°. *l нечетно.* Если ориентированная замкнутая геодезическая линия выходит из O, то ее направляющие косинусы пропорциональны целым числам $p_1, p_2, \ldots, p_l$, являющимся взаимно простыми между собой.

Если только одно из этих целых чисел, нечетно, геодезическая линия делится пополам точкой $O_2\,(p_1, p_2, \ldots p_l)$ и не встречает ни одного другого антиподного многообразия.

Если количество нечетных целых чисел p_i равно $2\alpha\leqslant l-3$, геодезическая линия встретит антиподное многообразие $(M^{2\alpha})$ в точке с координатами $\frac{p_i}{2}$, а затем возвратится в O.

Если количество нечетных целых чисел p_i равно $2\alpha+1\left(1\leqslant\alpha\leqslant\frac{l-3}{2}\right)$, замкнутая геодезическая линия встретит сначала антиподное многообразие $(M^{2\alpha+1})$, затем точку-антипод O_2, затем снова антиподное многообразие $(M^{2\alpha+1})$ и только после этого встретится в O. При этом она делится на четыре равных отрезка.

Если количество нечетных целых чисел p_i равно $l-1$, геодезическая линия не встретит ни одного антиподного многообразия.

Если, наконец, все целые числа p_i нечетны, геодезическая линия встретит три точки-антипода в последовательности $OO_1O_2O_3O$ или $OO_3O_2O_1O$.

Таким образом, здесь существует $l+1$ категорий ориентированных замкнутых геодезических линий.

2°. *l четно.* Рассуждение аналогично предыдущему. Единственная разница имеет место только в том случае, когда количество нечетных чисел p_i равно $l-1$ или l.

Если $l-1$ целых чисел p_i нечетны, геодезическая линия делится пополам точкой-антиподом O_3.

Если все целые числа p_i нечетны, геодезическая линия делится пополам одной из двух точек-антиподов O_1 и O_3.

Таким образом, в этом случае существует l категорий ориентированных замкнутых геодезических линий. Все геодезические линии встречают 1 или 3 антиподических многообразия.

ГЛАВА III

КОМПЛЕКСНЫЕ ПРОСТЫЕ ГРУППЫ И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

I. РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КОМПЛЕКСНЫМ ПРОСТЫМ ГРУППАМ

43. В предыдущей главе мы изучили римановы пространства, являющиеся групповыми пространствами унитарных простых групп (с вещественными параметрами). Кривизна этих пространств всюду положительная или равна нулю.

Каждому из этих пространств соответствует также некоторое другое риманово пространство с тем же числом измерений r, но с *отрицательной* (или нулевой) римановой кривизной. Группа изотропии этих новых пространств совпадает с группой изотропии первых пространств, но их связная группа изометрии уже не разлагается на две простые группы, зависящие от r вещественных параметров, а является простой группой, зависящей от r комплексных параметров (т. е. зависит от $2r$ вещественных параметров).

44. Будем исходить от данной простой структуры и выберем r базисных бесконечно малых преобразований $X_1, \ldots, X_r$, порождающих *унитарную* группу (с вещественными коэффициентами структуры). Тогда бесконечно малые преобразования $\sum e_i X_i$, где e_i—произвольные комплексные коэффициенты порождают комплексную группу. Будем называть два преобразования комплексно сопряженными, если их коэффициенты e_i комплексно сопряжены. Преобразование будет чисто мнимым, если все коэффициенты e_i чисто мнимы.

Так как характеристические корни вещественного бесконечно малого преобразования чисто мнимы, то характеристические корни чисто мнимых бесконечно малых преобразований вещественны. Поэтому матрица T (комплексной) присоединенной группы, порожденная таким преобразованием, имеет все вещественные и положительные характеристические корни, а матрица S, представляющая это бесконечно малое преобразование, однозначно задается формулой

$$S = \ln T,$$

где логарифмам характеристических корней матрицы T приданы их вещественные значения[1]). Отсюда непосредственно видно, что матрица T допускает только одно образующее бесконечно малое преобразование. Будем называть рассматриваемые матрицы связной присоединенной группы *чисто мнимыми*. Они характеризуются тем свойством, что матрица $\overline{T}$, мнимо сопряженная матрице T, равна T^{-1}.

Всякая чисто мнимая матрица T взаимно однозначно определяется r вещественными числами $\frac{e_a}{i}$, полученными делением на i чисто мнимых коэффициентов e_α порождающего ее бесконечно малого преобразования. *Поэтому пространство $\mathcal{E}$ матриц T является односвязным*, так как она допускает взаимно однозначное отображение на r-мерное эвклидово пространство. Оно не является групповым пространством, так как *матрицы T не образуют группы*.

45. Рассмотрим $2r$-мерное пространство аффинной связности без кручения, связанное с комплексной присоединенной группой. Геометрическое место $\mathcal{E}$ точек, представляющих матрицы T, является вполне геодезическим многообразием в этом пространстве[2]). В самом деле, r образующих бесконечно малых преобразований матриц T

$$U_1 = iX_1, \quad U_2 = iX_2, \quad \ldots, \quad U_r = iX_r$$

обладают тем свойством, что преобразования

$$((U_i U_j) U_k)$$

являются линейными комбинациями (с вещественными коэффициентами) преобразований U_i. Так как, с другой стороны, изоморфные преобразования пространства комплексной присоединенной группы оставляют инвариантной квадратичную форму $\varphi(e)$, где e_i рассматриваются как комплексные величины, и так как эта квадратичная форма при смещении вдоль $\mathcal{E}$ является *положительно определенной*, вполне геодезическое многообразие $\mathcal{E}$ является римановым пространством. Изометрические преобразования этого пространства образованы изоморфизмами

---

[1]) См. Штуди и Картан [1], стр. 438—440.

[2]) Картан [17], стр. 71—75. [См. стр. 77—82 настоящего сборника. (*Прим. перев.*)]

полного пространства, оставляющими инвариантным многообразие $\mathcal{E}$. В частности, все изометрические преобразования, оставляющие неподвижной начальную точку, могут быть получены преобразованием матрицы T с помощью преобразования унитарной присоединенной группы с возможным добавлением симметрии относительно начала:

$$T' = R^{-1}TR,$$
$$T' = R^{-1}T^{-1}R,$$

где R — произвольная (вещественная) матрица унитарной (несвязной) присоединенной группы.

Чтобы получить другие изометрические преобразования, рассмотрим сначала симметрию по отношению к точке T_0 пространства. Аналитически она выражается соотношением

$$T' = T_0 T^{-1} T_0.$$

Поэтому изометрические преобразования, переводящие начало в T_0, могут быть получены последовательным осуществлением вращения вокруг начала и симметрии относительно точки $T_0^{\frac{1}{2}}$. Мы получаем, таким образом, два семейства

$$T' = T_0^{\frac{1}{2}} R_0^{-1} T R_0 T_0^{\frac{1}{2}},$$
$$T' = T_0^{\frac{1}{2}} R_0^{-1} T^{-1} R_0 T_0^{\frac{1}{2}}.$$

Каждое из этих семейств, если оно не связно, может разлагаться на два или шесть связных семейств.

Всякое изометрическое преобразование можно рассматривать как преобразование комплексной несвязной присоединенной группы, отнесенной к $2r$ вещественным параметрам. Она содержит вдвое больше различных семейств, чем несвязная присоединенная группа той же группы, отнесенной к нераздельным комплексным параметрам. Это происходит вследствие того, что в первом случае допускается рассмотрение преобразования комплексного параметра в комплексно сопряженный ему параметр или, что сводится к этому, переход от преобразования RT к комплексно сопряженному преобразованию RT^{-1} (что соответствует симметрии по отношению к началу).

46. Конечное движение вида

$$T' = T_0^{\frac{1}{2}} T T_0^{\frac{1}{2}},$$

являющееся результатом двух последовательных симметрий относительно начальной точки и относительно точки $T_0^{\frac{1}{2}}$, очевидно, входит в связную группу движений. Если взять в качестве T_0 конечные матрицы, порожденные одной и той же чисто мнимой бесконечно малой матрицей, мы получим непрерывное движение, при котором геодезическая линия (C), соединяющая начало с точкой T_0, скользит сама по себе таким образом, что всякий вектор, выходящий из точки этой геодезической линии, смещается параллельно самому себе в смысле Леви — Чивита. Такое движение можно назвать *сдвигом вдоль* (C).

Отсюда следует, что *всякое движение пространства* $\mathcal{E}$ *может быть разложено одним, и только одним, способом на (изометрическое) вращение вокруг О и на сдвиг вдоль одной из геодезических линий, выходящих из О.* В самом деле, если для любого T имеет место равенство

$$T_0^{\frac{1}{2}} R_0^{-1} T R_0 T_0^{\frac{1}{2}} = T_0'^{\frac{1}{2}} R_0'^{-1} T R_0' T_0'^{\frac{1}{2}};$$

при $T = 1$ оно дает

$$T_0 = T_0',$$

откуда находим

$$R_0' R_0^{-1} T = T R_0' R_0^{-1},$$

т. е. матрица $R_0' R_0^{-1}$ перестановочна со всеми матрицами T, т. е. со всеми бесконечно малыми преобразованиями присоединенной группы. Поэтому это — единичная матрица, и $R_0' = R_0$.

47. Связная группа движений пространства $\mathcal{E}$ изоморфна группе, порожденной преобразованиями $R_0 T_0^{\frac{1}{2}}$ комплексной присоединенной группы, являющимися произведениями вещественной и чисто мнимой матриц. Если положить

$$\Theta = R_0 T_0^{\frac{1}{2}}$$

и обозначить через $\overline{\Theta}$ матрицу, мнимо сопряженную к Θ, то получим

$$\overline{\Theta}=R_0T_0^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, изометрические преобразования пространства $\mathcal{E}$ имеют одну из двух форм

$$T'=\overline{\Theta}^{-1}T\Theta,$$
$$T'=\overline{\Theta}^{-1}T^{-1}\Theta,$$

где Θ — произвольная матрица (несвязной) присоединенной группы. Так как преобразования Θ необходимо образуют группу, эта группа может быть только комплексной присоединенной группой, *все преобразования которой приводимы, таким образом, к форме* $\Theta=R_0T_0^{\frac{1}{2}}$.

II. ТОПОЛОГИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП

48. Предыдущие результаты позволяют нам изучить топологию комплексной связной присоединенной группы. В самом деле, так как каждое преобразование этой группы разлагается одним, и только одним, способом на преобразование унитарной присоединенной группы и на преобразование T, то всякий замкнутый контур, проведенный в области этой группы, может быть разложен одним, и только одним, способом на замкнутый контур, проведенный в пространстве унитарной присоединенной группы, и на замкнутый контур, проведенный в пространстве $\mathcal{E}$ и образованный из точек, полученных из точки O с помощью различных преобразований T.

Но так как пространство $\mathcal{E}$ односвязно, второй замкнутый контур всегда может быть стянут в точку. Следовательно, *группа связности комплексной присоединенной группы совпадает с группой связности унитарной присоединенной группы*.

Таким образом, всякая линейная группа, зависящая от r комплексных параметров и имеющая данную структуру, допускает ту же группу связности, что и соответственная унитарная линейная группа. *Поэтому всегда существует односвязная комплексная линейная группа, допускающая данную простую инфинитезимальную структуру.*

III. ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ЛИНИИ И ТРИГОНОМЕТРИЯ ПРОСТРАНСТВ $\mathcal{E}$

49. Распределение геодезических линий пространства $\mathcal{E}$ чрезвычайно просто. В самом деле, через две произвольные точки пространства $\mathcal{E}$ проходит одна, и только одна, геодезическая линия. Достаточно доказать, что для точки O и произвольной точки A, соответствующей матрице T, точка T^t, если t изменяется от 0 до 1, описывает геодезическую линию, являющуюся единственной геодезической линией, проходящей через точки O и A, так как T порождается только одним бесконечно малым преобразованием.

Можно также поставить вопрос, нет ли какой-нибудь необходимой связи между этими двумя свойствами пространства $\mathcal{E}$ и двумя другими его свойствами — тем, что оно односвязно и имеет отрицательную или нулевую риманову кривизну.

Важным следствием из всего этого является *несуществование для пространства $\mathcal{E}$ других форм Клейна*. В самом деле, в противном случае существовало бы по меньшей мере одно изометрическое преобразование пространства $\mathcal{E}$, перестановочное со всеми движениями пространства $\mathcal{E}$ и не оставляющее ни одной его точки неподвижной. Пусть A — та точка, в которую это преобразование переводит точку O. Всякое изометрическое вращение должно оставить неподвижной точку A, а значит и геодезическую линию OA. Но не существует ни одного такого направления, которое было бы инвариантным для всех преобразований группы изотропии: в противном случае в группе существовало бы (чисто мнимое) бесконечно малое преобразование, перестановочное со всеми другими, что невозможно.

50. Нетрудно указать соотношение, дающее все формулы тригонометрии пространства $\mathcal{E}$ и позволяющее связать пять из шести элементов геодезического треугольника OAB. Пусть в самом деле T_A и T_B являются матрицами, представляемыми точками A и B, а a и b — их модули (длины сторон OA и OB). Их скалярное произведение $T_A | T_B$ (т. е. выражение $-\sum_{\alpha} e_\alpha e'_\alpha$, составленное с помощью их образующих бесконечно малых преобразований) равно $ab \cos \hat{O}$. Перенесем параллельно геодезическую сторону AB из A в 0 вдоль геодезической линии AO. Тогда мы получим равный геодезический отрезок

OB', где

$$T_{B'} = T_A^{-\frac{1}{2}} T_B T_A^{-\frac{1}{2}}.$$

Применяя эту формулу, получаем

$$|T_A| = OA = a, \quad |T_B| = OB = b, \quad |T_{B'}| = AB = c,$$
$$T_A | T_B = ab \cos \hat{O}, \quad T_A | T_{B'} = -ac \cos \hat{A}.$$

Если, в частности, матрицы T_A и T_B перестановочны между собой, что соответствует тому, что точки A и B принадлежат одному и тому же многообразию E_l, проходящему через O, мы имеем

$$T_{B'} = T_B T_A^{-1}$$

и наши формулы тригонометрии в точности совпадают с тригонометрическими формулами эвклидовой плоскости. Поэтому здесь многообразие E_l является настоящим неограниченным односвязным эвклидовым пространством.

IV. ЧЕТЫРЕ БОЛЬШИЕ КЛАССА ПРОСТРАНСТВ $\mathcal{E}$

51. После этих общих рассуждений будет не лишним произвести обзор четырех общих классов простых групп и дать конкретные геометрические интерпретации соответственных пространств $\mathcal{E}$. Однако сначала следует сделать одно общее замечание.

Рассмотрим какую-нибудь линейную группу над n переменными (вещественной) унитарной простой структуры. Мы знаем, что эта группа оставляет инвариантной положительно определенную эрмитову форму F_0 [1]. Если при применении подстановок этой линейной группы мы будем придавать ее r вещественным параметрам произвольные комплексные значения, эрмитова форма F_0 будет заменяться другой положительно определенной эрмитовой формой F, существенно зависящей от r вещественных параметров [58]. Пространство этих эрмитовых форм совпадает с пространством $\mathcal{E}$. Дадим более или менее

---

[1] Эта теорема доказана Вейлем, который показал в цитированных выше мемуарах большую важность этой теоремы для теории представления полупростых групп линейными группами. См. также другое доказательство этой теоремы в моем также уже цитированном мемуаре [12].

простые конкретные представления пространств $\mathcal{E}$ для некоторых унитарных линейных групп.

52. Наиболее простым случаем, который можно себе представить, является простая группа, зависящая от трех комплексных параметров, например, группа дробно-линейных преобразований одного комплексного переменного. Если мы приняли здесь за унитарную группу группу вращений вокруг неподвижной точки в обычном пространстве, *то матрицы T представляют вращения вокруг вещественных осей на чисто мнимые углы.* Применяя параметры Эйлера — Олинда Родрига, мы можем определить каждую матрицу T четырьмя вещественными параметрами ρ, λ, μ, ν, удовлетворяющими условиям

$$\rho^2 - \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 = 1 \quad (\rho > 0).$$

Мы получаем трехмерное гиперболическое пространство, связная группа движений которого изоморфна группе комплексных дробно-линейных преобразований одного комплексного переменного (с индексом связности, равным 2).

53. Общий случай типа A приводит к пространству $\mathcal{E}$ эрмитовых положительно определенных форм $l+1$ переменных с дискриминантом, равным 1. Это пространство имеет $(l+1)^2 - 1 = l(l+2)$ измерений. Всякое унимодулярное бесконечно малое преобразование, оставляющее инвариантной эрмитову форму

$$x\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots x_{l+1}\bar{x}_{l+1}$$

эквивалентно преобразованию вида

$$i\left(a_1x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + a_2x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + a_{l+1}x_{l+1}\frac{\partial}{\partial x_{l+1}}\right)\left(\sum_i a_i = 0\right),$$

где коэффициенты a_i вещественны. Следовательно, всякая матрица T приводима к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \ldots & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ddots & & \\ \cdot & \cdot & & \ddots & \\ \cdot & \cdot & & & \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & e^{a_{l+1}} \end{pmatrix}$$

Всякую геодезическую линию пространства $\mathcal{E}$ можно надлежащим движением привести к геометрическому месту эрмитовых форм

$$e^{a_1 s}x_1\bar{x}_1 + e^{a_2 s}x_2\bar{x}_2 + \ldots + e^{a_{l+1} s}x_{l+1}\bar{x}_{l+1}.$$

Если предположить, как это имеет место в общем случае, что

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_l > a_{l+1},$$

то точкой геодезической линии при $s = -\infty$ является точка, представляющая вырожденную эрмитову форму $x_{l+1}\bar{x}_{l+1}$, а точка при $s = \infty$ представляет вырожденную эрмитову форму $x_1\bar{x}_1$.

В проективном пространстве всех эрмитовых форм $l+1$ переменных пространство $\mathcal{E}$ ограничено многообразиями, представляющими неотрицательные вырожденные эрмитовы формы. Эти многообразия составляют абсолют, и все геодезические линии имеют по две точки в бесконечности на абсолюте.

54. В случае типов B и D в качестве унитарной группы можно взять вещественную группу положительно определенной вещественной квадратичной формы или группу вращений вокруг начала в n-мерном эвклидовом пространстве. Пространством $\mathcal{E}$ тогда будет, например, пространство положительно определенных эрмитовых форм, полученных применением к форме

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n$$

вращений вокруг вещественных плоских элементов, но на чисто мнимый угол. Всякая геодезическая линия может быть получена с точностью до движения применением к рассматриваемой эрмитовой форме вращения

$$\begin{aligned}
x'_1 &= x_1 \operatorname{ch}(a_{12}s) - ix_2 \operatorname{sh}(a_{12}s),\\
x'_2 &= ix_1 \operatorname{sh}(a_{12}s) + x_2 \operatorname{ch}(a_{12}s),\\
x'_3 &= x_3 \operatorname{ch}(a_{34}s) - ix_4 \operatorname{sh}(a_{34}s),\\
x'_4 &= ix_3 \operatorname{sh}(a_{34}s) + x_4 \operatorname{ch}(a_{34}s),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

с вещественными коэффициентами a_{12}, a_{34}, ..., сумма квадратов которых равна 1. Мы получим при этом эрмитовы формы

$$\operatorname{ch}(2a_{12}s)(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2) + i\operatorname{sh}(2a_{12}s)(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1) + \ldots$$

Если предположить, например, что

$$a_{12} > a_{34} > 0, \quad a_{56} = \ldots = 0,$$

то геодезическая линия начинается (при $s = -\infty$) вырожденной эрмитовой формой

$$x_3\bar{x}_3 + x_4\bar{x}_4 - i(x_3\bar{x}_4 - x_4\bar{x}_3) = (x_3 + ix_4)(\bar{x}_3 - i\bar{x}_4),$$

а кончается (при $s = +\infty$) вырожденной эрмитовой формой

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + i(x_1\bar{x}_2 - x_2\bar{x}_1) = (x_1 - ix_2)(\bar{x}_1 + i\bar{x}_2).$$

55. В случае типа C можно исходить от унитарной группы, оставляющей инвариантными внешнюю квадратичную форму

$$[x_1x_2] + [x_3x_4] + \ldots + [x_{2l-1}x_{2l}]$$

и положительно определенную эрмитову форму

$$x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots x_{2l}\bar{x}_{2l}.$$

Пространством $\mathcal{E}$ будет, например, пространство положительно определенных эрмитовых форм, в которые предыдущая эрмитова форма переведена с помощью произвольной комплексной линейной подстановки, оставляющей инвариантной внешнюю квадратичную форму.

Всякое бесконечно малое преобразование нашей унитарной группы приводится к виду

$$ia_{12}\left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1} - x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right) + ia_{34}\left(x_3\frac{\partial}{\partial x_3} - x_4\frac{\partial}{\partial x_4}\right) + \\ + \ldots + ia_{2l-1,\,2l}\left(x_{2l-1}\frac{\partial}{\partial x_{2l-1}} - x_{2l}\frac{\partial}{\partial x_{2l}}\right).$$

Отсюда следует, что всякая геодезическая линия с точностью до движения может быть представлена как геометрическое место эрмитовых форм

$$e^{2a_{12}s}x_1\bar{x}_1 + e^{-2a_{12}s}x_2\bar{x}_2 + \ldots + e^{2a_{2l-1,2l}}x_{2l-1}\bar{x}_{2l-1} + \\ + e^{-2a_{2l-1\,2l}s}x_{2l}\bar{x}_{2l},$$

причем

$$a_{12}^2 + a_{34}^2 + \ldots + a_{2l-1,\,2l}^2 = 1.$$

Величина s представляет собой криволинейную абсциссу. Если

$$a_{12} > a_{34} > \ldots > a_{2l-1, 2l} > 0,$$

то при $s = -\infty$ точкой геодезической линии является вырожденная эрмитова форма $x_2\bar{x}_2$, а при $s = +\infty$ — форма $x_1\bar{x}_1$.

Заметим, что в этих примерах *в общем случае существует бесконечное количество геодезических линий, пересекающихся в бесконечности в одних и тех же двух точках.*

ТЕОРИЯ КОНЕЧНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУПП И ТОПОЛОГИЯ*)

ВВЕДЕНИЕ

Идея приложения топологии к теории конечных непрерывных групп восходит к **Гурвицу** [1], применившему в 1897 г. при разыскании инвариантов интегрирование по всей области некоторых компактных групп (линейная группа положительно определенной эрмитовой формы, ортогональная группа). Этот метод был использован в 1925 г. Г. **Вейлем** [1], который благодаря применению топологических соображений к компактным полупростым группам получил важные результаты в теории линейных представлений полупростых групп. Основа этой теории была положена в 1912 г. Э. **Картаном**, ставшим на инфинитезимальную точку зрения Софуса Ли, однако в теории Картана был существенный пробел, который не удавалось заполнить на чисто алгебраическом пути. Исходя из совершенно других соображений А. **Пуанкаре** [1, 2, 3] в своих трех весьма глубоких мемуарах, опубликованных в 1900, 1901 и 1908 гг., показал важность той роли, которую играют сингулярные преобразования группы в теории структуры этой группы, роли, аналогичной роли особых точек аналитической функции. Укажем, наконец, на два мемуара О. **Шрейера** [1, 2], вышедшие в 1926 и 1927 гг. и рассматривающие абстрактные непрерывные группы с весьма общей точки зрения.

Во всех этих работах, за исключением недавно вышедших мемуаров Вейля и Шрейера, оставшихся изолированными, конечные непрерывные группы изучались во всей их области существования, а не только, как это делал сам Ли, в окрестности тождественного преобразования, — это изучение проводилось „в целом", а не „в малом". В настоящей статье я ставлю целью дать с точки зрения изучения „в целом" обзор некоторого

---

*) E. Cartan, La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs. *Mémorial des sciences mathématiques*, вып. 42. Paris, Gauthier-Villars (1930), 60 стр. (*Прим. перев.*)

числа фундаментальных проблем теории групп, рассматривая конечную непрерывную группу как многообразие, внутри которого определен закон умножения или композиции, обладающий ассоциативностью и удовлетворяющий минимальному числу условий непрерывности (в гл. I), или вводя для получения группы Ли дополнительные предположения об аналитических свойствах закона композиции группы (в гл. II). Мы не знаем ни одной конечной непрерывной группы, которая не была бы группой Ли*). Основная теорема (n° 26) показывает, что если такая группа существует, она не может быть изоморфна ни одной линейной группе. В самой теории групп Ли мы укажем на недостаточность обычных доказательств третьей основной теоремы, доказывающих при заданной системе структурных констант c_{iks} существование только *куска группы* и не доказывающих, что этот кусок группы можно продолжить так, чтобы получить полную группу. Строгое доказательство этой теоремы вкратце изложено в гл. II. Мы укажем также на исследование необходимых и достаточных условий, которым должна удовлетворять связная или несвязная подгруппа g группы Ли G для того, чтобы g была максимальной подгруппой, оставляющей неподвижной точку многообразия, в котором группа G является транзитивной группой преобразований. Эти условия не являются, в сущности говоря, только локальными. Многообразия, допускающие группу Ли в качестве транзитивной группы преобразований, не являются, впрочем, произвольными с топологической точки зрения.

Гл. III посвящена изучению компактных групп, играющих важную роль в приложениях. Гл. IV излагает с точки зрения теории групп принципы теории симметрических римановых пространств Картана, имеющей весьма богатые приложения как к геометрии, так и к самой теории групп.

Теория линейных представлений компактных групп вместе с ее приложениями к теории полных ортогональных систем функций на компактном многообразии, допускающем в качестве транзитивной группы преобразований компактную группу, в настоящей статье полностью оставляется в стороне, так как здесь было бы слишком легко выйти за рамки охватываемого нами материала, рамки и так, быть может, слишком широкие.

---

*) См. примечание **) на стр. 256. (*Прим. перев.*)

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МНОГООБРАЗИЯХ И ОБ АБСТРАКТНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ ГРУППАХ

I. МНОГООБРАЗИЯ. КОМПАКТНЫЕ И НЕКОМПАКТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ

1. Понятие многообразия является обобщением понятий линии и поверхности в нашем обычном пространстве. Мы уточним это понятие с помощью некоторого числа постулатов, аналогичных постулатам Ф. Хаусдорфа [1]*).

Будем называть *n-мерным многообразием* множество элементов или точек, такое, что в нем можно определить систему подмножеств, называемых *окрестностями*, удовлетворяющих следующим условиям:

А. *Для каждой окрестности* $\mathcal{V}^\sigma$ *существует определенное взаимно однозначное соответствие между точками окрестности* $\mathcal{V}^\sigma$ *и точками некоторой гиперсферы* Σ *в n-мерном эвклидовом пространстве.* Точки окрестности $\mathcal{V}^\sigma$, соответствующие внутренним точкам гиперсферы Σ, называются внутренними точками окрестности, остальные точки составляют границу окрестности $\mathcal{V}^\sigma$.

В. *Каждая точка многообразия является внутренней точкой хотя бы одной окрестности.*

С. *Если* $\mathcal{V}^\sigma$ *— произвольная окрестность,* Σ *— соответствующая ей гиперсфера, М — внутренняя точка окрестности* $\mathcal{V}^\sigma$, m *— соответствующая ей точка гиперсферы* Σ, σ *— гиперсфера с центром в* m, *находящаяся внутри* Σ, *то существует окрестность* $\mathcal{V}^{\sigma'}$, *находящаяся внутри* $\mathcal{V}^\sigma$, *и такая, что все точки гиперсферы* Σ, *соответствующие точкам окрестности* $\mathcal{V}^{\sigma'}$, *принадлежат гиперсфере* σ.

D. *Если точка М находится внутри или на границе окрестности* $\mathcal{V}^\sigma$, m *— соответствующая ей точка гиперсферы* Σ, $\mathcal{V}^{\sigma'}$ *— окрестность, для которой точка М является внутренней точкой, то существует гиперсфера* σ *с*

---

*) Приведенные Картаном аксиомы включают в себя: 1) аксиомы произвольного топологического пространства в „окрестностной“ форме Хаусдорфа, 2) аксиому отделимости „хаусдорфова топологического пространства“ (*E*), 3) требование гомеоморфности окрестностей гиперсфере *n*-мерного эвклидова пространства, выделяющее многообразие из более общих топологических пространств. (*Прим. перев.*)

центром m, такая, что все точки окрестности $\mathcal{V}^{\rho}$, соответствующие точкам гиперсферы Σ, принадлежащим к σ, являются внутренними точками окрестности $\mathcal{V}^{\rho'}$.

E. *Для всяких двух различных точек M и N можно найти две окрестности, содержащие соответственно точки M и N в качестве внутренних точек и не имеющих ни одной общей точки.*

2. Точка A многообразия называется *предельной точкой* для бесконечного множества различных точек этого многообразия, если всякая окрестность, содержащая A в качестве внутренней точки, содержит хотя бы одну точку множества, отличную от A. Всякое бесконечное множество различных точек, принадлежащих к одной и той же окрестности $\mathcal{V}^{\rho}$, допускает по меньшей мере одну предельную точку, принадлежащую к $\mathcal{V}^{\rho}$ (в силу постулатов A, D и теоремы Больцано-Вейерштрасса).

Говорят, что последовательность точек $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ сходится к предельной точке A, если, какова бы ни была окрестность $\mathcal{V}^{\rho}$, содержащая A в качестве внутренней точки, все точки этой последовательности, начиная с некоторого номера, находятся внутри $\mathcal{V}^{\rho}$. Эта бесконечная последовательность не может сходиться к другой предельной точке B (в силу постулата E).

Из всякого бесконечного множества, допускающего предельную точку A, можно выделить бесконечную последовательность различных точек, сходящуюся к A.

Из постулатов A, C и D следует, что взаимно однозначное соответствие между внутренностью окрестности V и внутренностью гиперсферы Σ является также взаимно непрерывным. Поэтому внутренние точки всякой окрестности в n-мерном многообразии можно однозначным образом аналитически определить с помощью n координат, так чтобы при этом две бесконечно близкие точки имели бесконечно близкие координаты.

3. *Непрерывным путем* называется множество точек, которое можно поставить во взаимно однозначное соответствие с числовыми значениями вещественного переменного t, удовлетворяющими условию $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем сходимость числовых значений $t_n \longrightarrow t_0$ влечет за собой сходимость точек, соответствующих значению t_n, к точке, соответствующей значению t_0.

Многообразие называется *связным* (connexe), если две любые его точки могут быть связаны с помощью непрерывного пути. Мы будем здесь рассматривать только связные многообразия или такие многообразия, которые состоят из конечного или счетного множества связных многообразий.

4. Примем теперь следующее дополнительное предположение:

F. *Можно найти такое конечное или счетное множество окрестностей, что всякая точка многообразия является внутренней хотя бы для одной из этих окрестностей**).

Для краткости условимся говорить, что многообразие *покрыто* рассматриваемыми окрестностями.

Расположим рассматриваемые окрестности в определенном порядке

$$\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_n, \ldots$$

Выбросим из этой последовательности первую окрестность $\mathcal{V}_\alpha$, всякая внутренняя точка которой находится внутри хотя бы одной из предыдущих окрестностей. Повторим эту операцию для вновь полученной последовательности и т. д. *В результате мы получим такую последовательность окрестностей, в которой для всякой окрестности* $\mathcal{V}_i$ *существует по меньшей мере одна внутренняя точка, не находящаяся внутри окрестностей* $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \ldots, \mathcal{V}_{i-1}$. Такую последовательность окрестностей будем называть *нормальной*.

5. Многообразия, которые могут быть покрыты *конечной* нормальной последовательностью окрестностей, отличаются от других многообразий рядом особых свойств. В самом деле, рассмотрим в таком пространстве бесконечное множество точек. Тогда существует по меньшей мере одна окрестность $\mathcal{V}_\alpha$ из нашей последовательности, содержащая бесконечное количество точек множества, откуда следует (n° 2), что данное множество имеет по меньшей мере одну предельную точку.

Предположим, что, наоборот, многообразие покрыто счетной нормальной последовательностью окрестностей. Выберем в каждой окрестности $\mathcal{V}_i$ по точке M_i, внутренней для $\mathcal{V}_i$, но не являющейся внутренней точкой ни для одной из пред-

---

*) Этот постулат называют „второй аксиомой счетности“ топологического пространства. *(Прим. перев.)*

шествующих окрестностей. Полученное таким образом бесконечное множество не имеет ни одной предельной точки. В самом деле, такая точка A должна быть внутренней для некоторой окрестности $\mathcal{V}_k$ и не быть внутренней точкой для предшествующих окрестностей. Пусть $\mathcal{V}'_k$ является окрестностью (не принадлежащей к нормальной последовательности), находящейся внутри $\mathcal{V}_k$ и содержащей A в качестве внутренней точки. Тогда ни одна из точек M_{k+1}, M_{k+2} нашего множества не принадлежит к $\mathcal{V}'_k$, и, следовательно, $\mathcal{V}'_k$ может содержать только конечное число точек множества, что противоречит предположению.

Будем говорить, что многообразие является компактным (clos) *или некомпактным* (ouvert), *в зависимости от того, нельзя или можно найти в нем бесконечные множества точек, не имеющие предельных точек.*

Мы видим, что *если компактное многообразие покрыто счетным множеством окрестностей, то оно может быть также покрыто конечным множеством окрестностей* (обобщение теоремы Гейне — Бореля).

Многообразие, состоящее из счетного множества связных многообразий, не может быть компактным.

II. АБСТРАКТНЫЕ КОНЕЧНЫЕ НЕПРЕРЫВНЫЕ ГРУППЫ

6. *Абстрактной группой* называется множество *элементов*, на котором определена некоторая операция, называемая умножением, ставящая в соответствие всяким двум элементам A, B, расположенным в определенном порядке, некоторый третий элемент, обозначаемый AB, причем эта операция удовлетворяет следующим условиям:

a) существует элемент I (единица группы), такой, что для всякого элемента A имеет место $IA = AI = A$;

b) всякому элементу A соответствует A^{-1}, такой, что $AA^{-1} = I$;

c) имеет место

$$(AB)C = A(BC).$$

Из этих предположений следует, что также $A^{-1}A = I$. В самом деле, равенство $BA = CA$ влечет за собой $B = C$. Следовательно, произведение $A^{-1}A = J$ совпадает с I в силу равенств $JA^{-1} = A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}I = IA^{-1}$. Поэтому равенство $AB = AC$ также влечет за собой $B = C$.

7. Каждому элементу A абстрактной группы можно поставить в соответствие *операцию* или *преобразование* $\mathcal{T}_A$, переводящее элемент M группы в элемент $M' = AM$. Множество этих преобразований содержит *тождественное преобразование* $\mathcal{T}_I$. Каждому преобразованию $\mathcal{T}_A$ соответствует обратное преобразование $\mathcal{T}_{A^{-1}}$. Результатом последовательного выполнения преобразований $\mathcal{T}_A$ и $\mathcal{T}_B$ является преобразование

$$M' = B(AM) = (BA)M,$$

соответствующее элементу BA. Мы будем говорить, что преобразования $\mathcal{T}_A$ *осуществляют* абстрактную группу в виде группы преобразований. Эти преобразования составляют *параметрическую группу* абстрактной группы. Преобразования $M' = MA$ определяют *вторую параметрическую группу*.

8. Абстрактная группа называется конечной непрерывной группой порядка r *), если ее элементы составляют r-мерное многообразие, если, сверх того, для всяких двух бесконечных последовательностей элементов A_n и B_n, сходящихся соответственно к A и B, бесконечная последовательность элементов A_nB_n сходится к AB и, если, наконец, из того, что A_n сходится к I, следует, что A_n^{-1} также сходится к I. Если $\mathscr{V}_0$ — окрестность единицы группы **), то множество элементов $A\mathscr{V}_0$, полученное при умножении элемента A на элементы окрестности $\mathscr{V}_0$, можно рассматривать как некоторую другую окрестность-окрестность элемента A. То же самое относится и к множеству элементов $\mathscr{V}_0A$.

Конечная непрерывная группа называется *связной* (connexe, continu) или *несвязной* (mixte), в зависимости от того, является ли ее многообразие связным или состоит из конечного или счетного множества связных многообразий. В последнем случае одно из связных семейств элементов, на которое разлагается группа, а именно то, которое содержит элемент I, само является группой ***).

---

*) Картан называет группы порядка r также r-параметрическими группами. Другие авторы называют эти группы также r-членными или r-мерными группами. *(Прим. перев.)*

**) Окрестностью данной точки называют любую такую окрестность, для которой данная точка является внутренней точкой. *(Прим. перев.)*

***) Эту группу называют *компонентой единицы* данной группы. *(Прим. перев.)*

9. Многообразие конечной непрерывной группы всегда удовлетворяет предположению F: *оно может быть покрыто счетным множеством окрестностей $A_k\mathcal{V}_0$, где $\mathcal{V}_0$—произвольная окрестность единицы группы.*

Сначала покажем, что всякий элемент группы, которую можно предположить связной, может быть получен в виде произведения конечного числа внутренних элементов окрестности $\mathcal{V}_0$. В самом деле, соединим единицу группы I с данным элементом A непрерывным путем и пусть переменный элемент этого пути зависит от параметра t, изменяющегося от 0 до 1. Пусть t_0 — нижняя грань множества тех значений t, которые соответствуют элементам пути, не могущим быть полученными указанным способом, а A_0 — соответственный элемент. Элемент A_0 сам не может быть произведением конечного числа q внутренних элементов окрестности $\mathcal{V}_0$, так как в этом случае при всех значениях t, больших t_0 и достаточно близких к t_0, мы имели бы элемент, являющийся произведением $q+1$ внутренних элементов окрестности $\mathcal{V}_0$. Рассмотрим теперь окрестность $A_0\mathcal{V}_0$. Она содержит элементы кривой, соответствующие значениям t, меньшим t_0 и сколь угодно близким к t_0, например, элемент $A'_0 = A_0 s$, где s — элемент, настолько близкий к I, что s^{-1} принадлежит к $\mathcal{V}_0$. Поэтому элемент $A_0 = A'_0 s^{-1}$ является произведением конечного числа внутренних элементов окрестности $\mathcal{V}_0$, что противоречит предположению.

Зададимся теперь целым числом p. Согласно предположению, можно поставить элементы $\mathcal{V}_0$ во взаимно однозначно непрерывное соответствие с точками гиперсферы Σ радиуса R в обычном r-мерном пространстве. Тогда можно найти число ρ, обладающее следующим свойством: если $A_1, A_2, \ldots, A_p$ — внутренние точки гиперсферы Σ, а $M_1, M_2, \ldots, M_p$ — тоже внутренние точки гиперсферы Σ и, сверх того соответственно внутренние точки гиперсфер радиуса ρ с центрами $A_1, A_2, \ldots, A_p$, то произведение $M_1M_2, \ldots, M_p$ принадлежит окрестности $A_1A_2, \ldots, A_p\mathcal{V}_0$. Если число ρ определено таким образом, мы можем внутри Σ найти конечную последовательность точек $C_1, C_2, \ldots, C_{N_p}$, такую, что всякая внутренняя точка гиперсферы Σ является внутренней точкой по крайней мере одной из гиперсфер радиуса ρ с центрами в $C_1, C_2, \ldots, C_{N_p}$. Отсюда следует, что каждый элемент, который может быть получен в виде произведения p внутренних элементов окрестности $\mathcal{V}_0$, является внутренним элементом по меньшей мере одной из $(N_p)^p$ окрестностей $C_{\alpha_1}C_{\alpha_2}, \ldots, C_{\alpha_p}\mathcal{V}_0$. Так как это свойство имеет место при любом p, мы получаем счетную последовательность окрестностей $A_k\mathcal{V}_0$, такую, что всякий элемент группы является внутренним элементом по меньшей мере одной из этих окрестностей [ср. n° **24**, стр. 262].

Всякая компактная конечная непрерывная группа может быть покрыта конечным числом окрестностей $A_i\mathcal{V}_0$, в то время как некомпактная конечная непрерывная группа может быть покрыта только счетным множеством таких окрестностей. В частности, несвязная компактная группа может состоять только из конечного числа связных семейств элементов.

III. ПОДГРУППЫ

10. Подгруппа абстрактной группы G — это группа, все элементы которой принадлежат группе G. Подгруппа может состоять из конечного числа элементов. Если же она содержит бесконечное множество элементов, то она может быть непрерывной группой или не быть ею. В этом последнем случае следует выделить два вида таких подгрупп. Подгруппа g называется *собственно дискретной* (proprement discontinu) в G, если в G можно найти окрестность единицы группы, не содержащую ни одного элемента подгруппы g, отличного от единицы. В противном случае подгруппа является *несобственно дискретной* (improprement discontinu) в G: каждый элемент подгруппы g является в G предельной точкой для множества элементов подгруппы g.

Подгруппа g называется *замкнутой* (fermé) в G, если всякая предельная точка в G множества элементов подгруппы g снова принадлежит к g. Всякая собственная дискретная подгруппа замкнута в G. В противном случае подгруппа называется *открытой* (ouvert) в G.

Множество элементов подгруппы g, открытой в G, вместе с ее предельными элементами образуют новую подгруппу $\bar{g}$, являющуюся замкнутой в G.

Если группа G компактна, подгруппы g, замкнутые в G, являются компактными подгруппами.

11. Если A и M — элементы группы G, то элементы AMA^{-1} называют преобразованными из элемента M с помощью элемента A. Подгруппа g называется *нормальным делителем* (sous-groupe invariant) в G, если все элементы, преобразованные из элементов подгруппы g с помощью различных элементов группы G, снова принадлежат подгруппе g. В этом случае множество Ag, полученное умножением данного элемента A группы G на различные элементы подгруппы g, совпадает с множеством элементов gA *). Если рассматривать эти множества как некоторые новые элементы, для них можно определить ассоциативное произведение, полагая произведение Ag на Bg равным ABg. Эти новые элементы определяют абстрактную группу, единицей которой является g. Эту группу обозначают символом G/g **).

Центром группы называют множество тех ее элементов, которые перестановочны со всеми элементами группы. Эти элементы образуют коммутативный нормальный делитель в G. Центр группы G совпадает с G, если группа G коммутативна***).

IV. АБСТРАКТНЫЕ ГРУППЫ ПОРЯДКА 1

12. Легко определить все связные конечные непрерывные группы порядка 1. Пусть $\mathcal{V}_0$ — окрестность единицы группы. Можно представить эту окрестность отрезком прямой, на которой за начало можно взять точку, соответствующую единице группы. Абсциссы x точек отрезка будут изменяться, например, от $-a$ до $+a$. Если x и x' — абсциссы двух точек, достаточно близких к началу, например, находящихся между $-b$ и $+b$, то произведение этих точек будет принадлежать окрестности $\mathcal{V}_0$. Если x'' — абсцисса точки, представляющей это произведение, то мы получим соотношение

$$x''=\varphi(x, x'),$$

где φ — непрерывная функция. Нетрудно доказать, что φ является возрастающей функцией обоих своих аргументов.

---

*) Множества Ag и gA называют *классами смежности* группы G по ее подгруппе g. Множество Ag называют *левым* классом смежности, а множество gA — *правым*. *(Прим. перев.)*

**) Группу G/g называют *факторгруппой* (у Картана groupe quotient) группы G по ее нормальному делителю g. *(Прим. перев.)*

***) Коммутативные группы часто называют *абелевыми группами*. *(Прим. перев.)*

Теперь можно найти в интервале (a, b) единственный корень последовательных уравнений

$$\begin{gathered}\varphi(a_1, a_1) = a,\\ \varphi(a_2, a_2) = a_1,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \varphi(a_n, a_n) = a_{n-1}\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\end{gathered}$$

Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ убывают и все время остаются положительными. Поэтому они стремятся к пределу $\alpha \geqslant 0$. Но так как

$$\varphi(\alpha, \alpha) < \varphi(\alpha, a_n) < \varphi(a_n, a_n) = a_{n-1},$$

то в пределе получаем

$$\varphi(\alpha, \alpha) \leqslant \alpha = \varphi(0, \alpha),$$

что возможно только при $\alpha = 0$.

Пусть S_n — элемент, соответствующий значению параметра a_n. Поставим в соответствие элементу $S_n^{p_n}$ новый параметр $\frac{p_n}{2^n}$. Для элементов этого вида новые параметры следуют один за другим в том же порядке, что и старые, и умножение двух элементов с новыми параметрами t и t' дает элемент с новым параметром $t + t'$. Установление нового параметра может быть распространено по непрерывности на все элементы, для которых старый параметр x содержится между 0 и a, и формула умножения принимает вид

$$t'' = t + t' \quad (0 \leqslant t, t', t'' \leqslant 1).$$

Если мы положим $S_x = \Sigma_t$, то сможем сначала определить Σ_n для всякого положительного целого числа n, как $(\Sigma_1)^n$, затем для t, содержащегося между 0 и 1, определить Σ_{n+1} как произведение $\Sigma_n\Sigma_t$. Закон умножения остается верным для этих новых элементов группы [59]. Наконец, мы определим Σ_{-t} для положительного t, как $(\Sigma_t)^{-1}$, причем закон умножения снова остается верным.

Этим методом мы наверняка получим все элементы группы (n° 9), но каждый из них при этом может быть получен несколько раз. Если это так и если c — минимальное положительное значение t, для которого Σ_c совпадает с единицей группы, то элемент Σ_{t+c} совпадает с элементом Σ_t. Полученная таким образом группа является *компактной*. В то же время в противоположном случае, ввиду того что t может изменяться от $-\infty$ до $+\infty$, причем ни один из элементов группы не может быть получен дважды, группа является *некомпактной*.

Связные группы порядка 1, таким образом, все коммутативны и могут быть как компактными, так и некомпактными.

Можно добавить, что все такие компактные группы по существу, совпадают между собой так же, как и некомпактные; в самом деле, например, в случае компактных групп мы всегда можем выбрать новый параметр t, для которого период будет 1 вместо c.

V. ИЗОМОРФИЗМ И ГОМОМОРФИЗМ

13. Пусть каждому элементу некоторой группы G' можно поставить в соответствие определенный элемент некоторой другой группы G, причем, если A', B', C' — три элемента группы G', удовлетворяющие условию $A'B'=C'$, то три соответственных элемента A, B, C группы G удовлетворяют условию $AB=C$. При этом единице I' группы G' необходимо соответствует единица I группы G.

Это соответствие называется *изоморфизмом* (isomorphisme holoédrique), если каждый элемент группы G соответствует одному, и только одному, элементу группы G', и *гоморфизмом* (isomorphisme hémiédrique, mériédrique) в противоположном случае: здесь элементы группы G', соответствующие единице группы G, образуют нормальный делитель группы G'.

Две конечные непрерывные группы G и G' одного и того же порядка называются *локально изоморфными*, если можно установить взаимно однозначное непрерывное соответствие между окрестностью $\mathcal{V}_0$ единицы группы G и окрестностью $\mathcal{V}_0'$ единицы группы G', удовлетворяющее тому условию, что если A, B, C — три элемента окрестности $\mathcal{V}_0$, такие, что $AB=C$, то соответствующие элементы окрестности $\mathcal{V}_0'$ удовлетворяют условию $A'B'=C'$.

Предположим, что многообразие одной из групп, например, G, *односвязно* (simplement connexe). Это означает, что всякий непрерывный замкнутый контур в нем может быть путем непрерывной деформации стянут в точку. Пусть теперь S — произвольный элемент группы G, не принадлежащий к $\mathcal{V}_0$. Свяжем единицу I с элементом S непрерывным путем ($\mathcal{C}$) и выберем на этом пути промежуточные точки $S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$ так, чтобы элементы $S_1, S_1^{-1}S_2, \ldots, S_{p-1}^{-1}S$ принадлежали бы к $\mathcal{V}_0$. Обозначим их через $s_1, s_2, \ldots, s_p$. Пусть $s_1', s_2', \ldots, s_p'$ — соответственные элементы окрестности $\mathcal{V}_0'$ и рассмотрим элемент $S'=s_1', s_2', \ldots, s_p'$ группы G'. Легко видеть, что если бы мы выбрали на пути ($\mathcal{C}$) другую последовательность промежуточных точек, мы всегда получили бы тот же самый элемент S' [60]. И, наконец, мы опять получили бы тот же самый элемент, подвергая путь ($\mathcal{C}$), соединяющий I и S достаточно малой деформации.

Так как многообразие группы G односвязно, можно таким образом поставить в соответствие всякому элементу S группы G вполне определенный элемент S' группы G'.

Аналогичное рассуждение показывает, что всякий элемент S' группы G' может быть получен таким образом по крайней мере из одного элемента S группы G. Поэтому между группами G и G' имеет место изоморфное или гомоморфное соответствие.

14. Если это соответствие является не изоморфизмом, а гомоморфизмом, то единице I' группы G' соответствует конечное или бесконечное множество элементов группы G, представляющее собой *собственно дискретную* [61] подгруппу группы G. Пусть $T, T_1, T_2, \ldots$ — элементы этой подгруппы. Если элемент S группы G соответствует элементу S' группы G', то все остальные элементы группы G, обладающие тем же свойством, имеют вид T_iS, а также ST_j. Но равенство $T_iS=ST_j$ при S, достаточно близком к I, требует, чтобы T_j равнялось T_i, откуда, двигаясь непрерывным образом по групповому многообразию, мы находим, что индекс j должен всегда оставаться равным индексу i. Таким образом, все элементы T_i принадлежат к центру (n° 11) группы G. Следовательно, *если группа G' локально изоморфна односвязной группе G, единице группы G' соответствует дискретная подгруппа центра группы G.*

15. Эта теорема допускает обращение. Пусть g — собственно дискретная подгруппа центра группы G. Возьмем в качестве новых элементов множества $Sg = gS$, где S — фиксированный элемент, а g означает, что рассматриваются последовательно все элементы этой подгруппы. Определим умножение новых элементов с помощью соответствия

$$Sg \cdot S'g = SS'g.$$

Отсюда непосредственно видно, что новые элементы Sg образуют конечную непрерывную группу G', локально изоморфную группе G, причем единица группы G' (т. е. g) соответствует самой данной подгруппе g.

Разыскание групп, локально изоморфных группе G, сводится, таким образом, к разысканию всех собственно дискретных подгрупп центра G.

Например, если G — группа сдвигов на прямой, то она совпадает со своим центром, и всякая ее собственно дискретная подгруппа образована степенями некоторого сдвига с целыми показателями. В качестве локально изоморфной группы мы получаем компактную группу порядка 1.

Группа G подобных преобразований на прямой односвязна, а ее центр состоит из одной единицы. Поэтому всякая группа, локально изоморфная ей, изоморфна ей и в целом.

16. Если нам дана абстрактная связная конечная непрерывная группа G, то задача разыскания всех локально изоморфных ей групп, таким образом, решена в том случае, когда группа G односвязна. Если же группа G не односвязна, то всегда можно построить односвязную группу $\bar{G}$, локально изоморфную группе G. Введем для этого (Картан [19]*); Шрейер [2]) новые элементы, каждый из которых является совокупностью $[S, (\mathscr{C})]$ элемента S и пути $(\mathscr{C})$, соединяющего I с S. При этом мы будем считать два элемента $[S, (\mathscr{C})]$ и $[S', (\mathscr{C}')]$ совпадающими, если $S = S'$ и путь $(\mathscr{C})$ может быть с помощью непрерывной деформации переведен в $(\mathscr{C}')$. Мы определим произведение двух элементов $[S, (\mathscr{C})]$ и $[S', (\mathscr{C}')]$, рассматривая подвижной элемент P пути $(\mathscr{C}')$ и составляя произведение SP, которое опишет некоторый путь $(\mathscr{C}'')$, начиная с S и кончая некоторым S''.

---

*) Эта работа имеется в настоящем сборнике, см. стр. 201. (См. также Понтрягин [2], стр. 232 и след.) (*Прим. перев.*)

Искомое произведение будет иметь вид $[S'', (\mathscr{C}) + (\mathscr{C}'')]$. Нетрудно проверить, что это определение удовлетворяет всем условиям того, что новые элементы $[S, (\mathscr{C})]$ составляют абстрактную группу $\overline{G}$. Эта группа, очевидно, односвязна и, с другой стороны, локально изоморфна группе G. Единице группы G при этом соответствует столько элементов группы $\overline{G}$, сколько в многообразии группы G имеется замкнутых контуров, непереводимых друг в друга с помощью непрерывной деформации. Собственно дискретная коммутативная подгруппа центра группы $\overline{G}$, соответствующая единице группы G, является *фундаментальной группой* многообразия группы G в топологическом смысле этого слова*). Мы, однако, будем называть эту группу *группой связности* (groupe de connexion), так как термин фундаментальная группа, как мы сейчас увидим (n° 17), будет у нас иметь совершенно другое значение.

VI. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

17. Будем называть n-мерным *однородным пространством* (espace homogène)**) n-мерное многообразие, в котором действует транзитивная конечная непрерывная группа G. Это значит, что в этом многообразии задана конечная непрерывная группа точечных преобразований, удовлетворяющих следующим условиям:

1°. *Всякое преобразование группы G ставит в соответствие какой-либо точке M многообразия определенную точку M'.*

2°. *Если даны две произвольные точки M и M' многообразия, то существует по меньшей мере одно преобразование группы, переводящее M в M'.*

3°. *Если последовательность точек $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ многообразия сходится к предельной точке M и последовательность преобразований $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ группы сходится к преобразованию S, то точка M'_n, полученная из M_n с помощью преобразования S_n, стремится к точке M', полученной из M с помощью преобразования S.*

---

*) Эту группу называют также *группой Пуанкаре* топологического пространства. *(Прим. перев.)*

**) Однородные пространства часто называют также *клейновыми пространствами* или *клейновыми многообразиями*. *(Прим. перев.)*

Это последнее условие выражает, что непрерывность в многообразии группы (рассматриваемой как абстрактная группа) обеспечивает непрерывность результатов преобразования точек пространства.

Таким образом, однородное пространство следует рассматривать как совокупность связного многообразия и транзитивной группы G преобразований этого пространства. Мы будем называть группу G *фундаментальной группой* (groupe fondamental) этого пространства.

Окрестность в однородном пространстве можно определить как множество точек, полученных из одной фиксированной точки O с помощью преобразований какой-нибудь окрестности фундаментальной группы. *Поэтому однородное пространство может быть покрыто счетным множеством окрестностей.* Однородное пространство, фундаментальная группа которого компактна, очевидно, само является компактным, однако обратная теорема неверна. Например, проективная прямая — компактное 1-мерное пространство, а являющаяся на ней транзитивной группой группа дробно-линейных преобразований одного переменного — некомпактна.

18. Множество преобразований группы G, оставляющих неподвижной данную точку O пространства, образуют подгруппу g группы G, являющуюся, очевидно, *замкнутой* в G, так как если бесконечная последовательность преобразований группы g сходится к преобразованию S группы G, то это преобразование также оставляет точку O неподвижной. Позже (n° 29) мы вернемся к этому важному свойству *).

Может случиться, что в группе G имеются преобразования, оставляющие неподвижными все точки пространства. Все эти преобразования необходимо принадлежат к подгруппе g и составляют *нормальный делитель* γ группы G. Поэтому группой преобразований пространства фактически является группа G/γ. Если мы хотим исключить эту возможность, то достаточно потребовать, чтобы подгруппа g не содержала ни одного нормального делителя полной группы **).

---

*) Эту подгруппу называют *стационарной подгруппой* данного однородного пространства. (*Прим. перев.*)

**) Кроме, конечно, единицы этой полной группы. (*Прим. перев.*)

ГЛАВА II

ГРУППЫ ЛИ

I. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЗОР ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ

19. Будем говорить, что конечная непрерывная группа является *группой Ли*, если в достаточно малой окрестности $\mathcal{V}_0$ единицы этой группы можно найти такую систему координат или параметров (вещественных) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что параметры c_i элемента $C = AB$, получающегося при умножении элемента A с параметрами a_i на элемент B с параметрами b_i, выражаются с помощью функций

$$c_i = \varphi_i(a, b),$$

допускающих непрерывные частные производные двух первых порядков *).

Проблема, состоящая в том, существуют ли конечные непрерывные группы порядка больше 1, которые не были бы группами Ли, до сих пор по существу является неприступной **). Несколько далее (n° **26**) мы познакомимся с единственным точным результатом, известным по этому поводу.

В группе Ли всегда можно выбрать параметры таким образом, чтобы функции φ_i были *аналитическими* функциями своих переменных (Шур [1]). Операции каждой из групп параметров (n° 7) могут быть порождены *бесконечно малыми преобразо-*

---

*) Таким образом, здесь и всюду в дальнейшем Картан рассматривает только конечные группы Ли и не касается так называемых *бесконечных* групп Ли. (*Прим. перев.*)

**) Эта проблема, известная под названием „пятой проблемы Гильберта" (Гильберт [1]), положительно решена в 1933 г. для случая компактных групп Нейманом [3], [см. также Понтрягин [2], стр. 231 (теорема 57)] и в 1934 г. для случая коммутативных групп Л. С. Понтрягиным [1] [см. также Понтрягин [2], стр. 185 (теорема 44)].

Для произвольных непрерывных групп порядка 3 эта проблема была положительно решена в 1947 г. Монтгомери [1]. (*Прим. перев.*)

ваниями (transformations infinitesimales) $X_1, X_2, \ldots, X_r$ *), которые можно выбрать линейно независимыми.

Коммутаторы (crochets) двух бесконечно малых преобразований удовлетворяют соотношениям вида

$$X_i(X_j) - X_j(X_i) \equiv (X_i X_j) = \sum_s c_{ijs} X_s. \qquad (1)$$

Константы *(вещественные)* c_{ijs} удовлетворяют алгебраическим соотношениям

$$\sum_\rho (c_{ij\rho} c_{\rho kh} + c_{jk\rho} c_{\rho ih} + c_{ki\rho} c_{\rho jh}) = 0 \quad (i, j, k, h = 1, 2, \ldots, r), \qquad (2)$$

которые сводятся к *тождеству Якоби*

$$((X_i X_j) X_k) + ((X_j X_k) X_i) + ((X_k X_i) X_j) = 0.$$

Если группа преобразований является *осуществлением* абстрактной группы, хотя бы будучи и отличной от ее параметрических групп, и если эта группа допускает бесконечно малые преобразования, они также удовлетворяют соотношениям (1) с теми же константами c_{ijs}.

20. К изложенным свойствам, составляющим две первые основные теоремы С. Ли, можно добавить также следующие свойства (Картан [17] **). Если в некоторой окрестности группового пространства выбрана система координат $a_1, \ldots, a_n$, то бесконечно малый элемент $S_a^{-1} S_{a+da}$ может быть представлен в виде $\sum \omega_k X_k$, где пфаффовы формы ω_i удовлетворяют соотношениям *(уравнения Маурера-Картана)*

$$d\omega_s(\delta) - \delta\omega_s(d) = \sum_{i,j} c_{ijs} \omega_i(d)\, \omega_j(\delta). \qquad (3)$$

Точно так же бесконечно малое преобразование $S_{a+da} S_a^{-1}$ может быть представлено в виде $\sum \breve{\omega}_k X_k$, где формы $\breve{\omega}_i$ удовлетворяют соотношениям

$$d\breve{\omega}_s(\delta) - \delta\breve{\omega}_s(d) = -\sum_{i,j} c_{ijs} \breve{\omega}_i(d)\, \breve{\omega}_j(\delta). \qquad (4)$$

---

*) Бесконечно малые преобразования группы Ли называются в русской математической литературе также *инфинитезимальными операторами* (см. Чеботарев [1], стр. 29, 82), а полная система всех бесконечно малых преобразований называется *инфинитезимальной группой* или *алгеброй Ли* данной группы Ли (*Прим. перев.*)

**) Эта работа имеется в настоящем сборнике, см. стр. 40 и 45. (*Прим. перев.*)

Форма ω_i инвариантна относительно первой параметрической группы, форма ω_i — относительно второй параметрической группы.

Наконец, группа может быть определена в достаточно малой окрестности $\mathcal{V}_0$ единицы своими *каноническими параметрами*, причем каждая операция характеризуется параметрами a_i того бесконечно малого преобразования $\sum a_i X_i$, которое ее порождает. Формы ω_s в этом случае можно получить (Картан [14]), интегрируя дифференциальные уравнения

$$\frac{d\omega_s}{dt} = da_s + \sum_{i,j} c_{ijs} a_i \omega_j, \tag{5}$$

выбирая то решение, которое обращается в нуль при $t=0$ и полагая затем $t=1$. В этих уравнениях аргументы a_i и da_i следует рассматривать как постоянные параметры, а ω_s — как неизвестные функции независимого переменного t.

Формы $\breve{\omega}_s$ совершенно так же могут быть получены интегрированием уравнений

$$\frac{d\breve{\omega}_s}{dt} = da_s - \sum_{i,j} c_{ijs} a_i \breve{\omega}_j. \tag{6}$$

Все эти результаты можно рассматривать как классические.

21. *Третья основная теорема С. Ли* выражает, что для системы констант c_{ijk}, удовлетворяющих условиям (2), существует конечная непрерывная группа порядка r, независимые бесконечно малые преобразования которой удовлетворяют соотношениям (1). Для доказательства этой теоремы можно, например, проинтегрировать уравнение (5), как было сказано выше: уравнения Пфаффа

$$\omega_s(u'; du') = \omega_s(u; du) \tag{7}$$

в силу соотношений (2) *вполне интегрируемы* и дают u'_i как функции u_i и r параметров a_i, определяющие r-мерную группу, удовлетворяющую требуемым условиям. В качестве параметров a_i можно, например, взять значения u'_i при $u_1 \ldots = u_r = 0$.

На самом деле это доказательство, как, впрочем, и все остальные известные доказательства, за исключением первого принадлежащего самому Ли, о котором мы будем вскоре говорить, совершенно недостаточно. Формы ω_s являются линейными формами от $du_1, du_2, \ldots, du_r$, все коэффициенты которых являются *целыми аналитическими* функциями переменных u_i, но детерминант, составленный из коэффициентов при du_i, отличен от нуля только в некоторой окрестности начала $u_i = 0$. Более того, если бы этот детерминант был бы всюду отличен от нуля, этого также не было бы достаточно для того, чтобы обеспечить существование конечных преобразований нужной нам группы во всем пространстве u_i. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть простое уравнение

$$\frac{du'}{1+u'^2} = \frac{du}{1+u^2},$$

не дающее *ни одного* нужного нам конечного преобразования во всей области вещественного переменного u.

Поэтому, в конечном счете, мы доказали существование множества определенных преобразований для достаточно малых значений параметров, в достаточно малой области эвклидова пространства u_i и произведение двух преобразований из этого множества, *в случае, когда это произведение определено в рассматриваемой области,* снова принадлежит рассматриваемому множеству. Мы получим, таким образом, *кусок группы,* определенной в *куске пространства.* Поэтому необходимо доказать, что этот кусок пространства и этот кусок группы можно продолжить таким образом, чтобы получить многообразие, в котором определена группа.

22. Первое доказательство Ли в тех случаях, когда оно законно с *локальной* точки зрения, дает нам основу для совершенно строгого доказательства. В этом доказательстве мы должны исходить от r бесконечно малых преобразований

$$E_s \equiv \sum_{i,j} c_{isj} e_i \frac{\partial}{\partial e_j}, \tag{8}$$

удовлетворяющих соотношениям (1). Эти преобразования порождают, при достаточно малых значениях параметров, кусок группы, *все операции которого определены во всем пространстве переменных* e_i. Перемножая преобразования этого куска группы в конечном числе, но всеми возможными способами, мы получим группу линейных преобразований, определенную во всем эвклидовом пространстве переменных u_i. Это рассуждение действительно только в том случае, когда все r преобразований (8) линейно независимы, что требует того, чтобы инфинитезимальная группа не допускала ни одного *особенного* бесконечно малого преобразования, т. е. преобразования, перестановочного со всеми другими. Это условие выполнено, например, если форма

$$\varphi(e) = \sum_{i,\,j,\,k,\,h} e_i e_j c_{ikh} c_{jhk},$$

дающая сумму квадратов корней *уравнения Киллинга*

$$\left|\sum_s e_s c_{isj} - \delta_{ij}\lambda\right| = 0 \quad \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}\right),$$

имеет отличный от нуля дискриминант. Группы, удовлетворяющие этому условию, являются *простыми* или *полупростыми группами* (Картан [1]).

В общем случае можно доказать теорему непосредственно, начиная со случая *разрешимых групп* (groupes intégrables). В разрешимой группе можно выбрать базис бесконечно малых преобразований и параметры $u_1, \ldots, u_r$ таким образом, чтобы таблица коэффициентов при $du_1, \ldots, du_r$ в формах $\omega_1, \ldots, \omega_r$ имела бы вид

$$\begin{array}{lllllll}
1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0, \\
* & e^{U_1} & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0, \\
* & * & e^{U_2} & \ldots & \ldots & \ldots & 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
* & * & * & \ldots & \ldots & \ldots & e^{U_r},
\end{array}$$

где U_i — линейные формы от переменных $u_1, \ldots, u_{i-1}$, а члены, обозначенные звездочками, представляют собой для i-й строки целые аналитические функции переменных $u_1, \ldots, u_{i-1}$[1]). Тогда, интегрируя уравнения (7), мы получим u'_i как целые аналитические функции переменных u_i и параметров a_i — начальных значений u'_i. Мы получаем, таким образом, непосред-

---

[1]) Другим выбором базиса можно привести эту таблицу к такому виду, что для двух последовательных строк, например, i-й и $(i+1)$-й, имеет место

$$a_{ii} = e^{U_i} \cos U_{i+1}, \quad a_{i,\,i+1} = -e^{U_i} \sin U_{i+1},$$
$$a_{i+1,\,i} = e^{U_i} \sin U_{i+1}, \; a_{i+1,\,i+1} = e^{U_i} \cos U_{i+1},$$

а элементы a_{ij} и $a_{i+1,\,j}$ $(j < i)$ являются целыми функциями $u_1, \ldots, u_{i-1}$.

ственно некоторую группу, многообразие которой гомеоморфно эвклидову пространству и которая определена в пространстве, гомеоморфном эвклидову пространству. Эта группа является односвязной.

В случае неразрешимой инфинитезимальной группы G, имеющей максимальный разрешимый нормальный делитель g, можно свести задачу получения конечной группы данной инфинитезимальной структуры к интегрированию системы Пфаффа

$$\omega_s(u'; du') = a_{s1}(a)\,\omega_1(u; du) + \ldots + a_{sr}(a)\,\omega_r(u, du),$$

где ω_s — формы рассмотренного типа для разрешимых групп, а $a_{ij}(a)$ — коэффициенты полупростой *линейной* группы известной инфинитезимальной структуры. Рассуждением, аналогичным предыдущему, получаем, что многообразие полученной группы образовано точками (a, u), каждая из которых является совокупностью точки многообразия линейной полупростой группы с точки эвклидова пространства переменных u_i.

II. ПРИСОЕДИНЕННАЯ ГРУППА. ПОРОЖДЕНИЕ ГРУППЫ ПРИ ПОМОЩИ ЕЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

23. Если S_a — некоторая определенная операция группы G, а S_u — некоторая переменная операция, то уравнение

$$S_{u'} = S_a S_u S_a^{-1}$$

определяет операцию T_a, заключающуюся в переходе от S_u к результату *преобразования* S_u с помощью S_a. Эти операции T_a являются *автоморфизмами* данной группы в том смысле, что если S_u и S_v преобразуются в $S_{u'}$ и $S_{v'}$, то произведение $S_v S_u$ преобразуется в $S_{v'} S_{u'}$. Более того, эти операции образуют группу, называемую *присоединенной группой Ли*. Операции этой группы оставляют неподвижным тождественное преобразование и *линейно* преобразуют бесконечно малые преобразования. С этой точки зрения они составляют *линейную присоединенную группу* Γ группы G. Бесконечно малые преобразования самой группы Γ даются в точности формулами (8): в самом деле, преобразование $\sum e_i X_i$, преобразованное с помощью εX_s, принимает вид

$$\sum_i e_i X_i + \varepsilon\left(\sum_i e_i X_i,\ X_s\right) = \sum_j e_j X_j + \varepsilon \sum_{ij} c_{isj} e_i X_j.$$

Бесконечно малое преобразование $\sum\limits_s a_s E_s$ [62] имеет в качестве коэффициентов элементы матрицы

$$H_a=\begin{pmatrix} \sum a_s c_{s11} & \sum a_s c_{s21} & \ldots, & \sum a_s c_{sr1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum a_s c_{s1r} & \sum a_s c_{s2r} & \ldots, & \sum a_s c_{srr} \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Эта матрица играет основную роль в вопросе порождения группы с помощью ее бесконечно малых преобразований.

24. В достаточно малой окрестности $\mathcal{V}_0$ тождественной операции всякая операция группы допускает систему определенных канонических параметров $(a_1, \ldots, a_r)$, равных параметрам порождающих их бесконечно малых преобразований. Проведем теперь в групповом многообразии непрерывный путь, начинающийся в тождественном преобразовании. Если предположить, что точки этого пути зависят от параметра t, то пусть $S(t)$ — операция, соответствующая некоторой точке этого пути. Можно постепенно продолжать канонические параметры для операций $S(t)$. В самом деле, если a_i — параметры операции $S(t)$, можно вычислить параметры a_i+da_i операции $S(t+dt)$ в том случае, когда параметры ω_i операции $[S(t)]^{-1}S(t+dt)$ являются независимыми линейными формами от $da_1, \ldots, da_r$. Интегрирование же уравнений (5) показывает, что формы ω_s могут быть получены из da_s применением линейной подстановки, представленной матрицей

$$1+\frac{1}{2!}H_a+\frac{1}{3!}H_a^2+\ldots+\frac{1}{n!}H_a^{n-1}+\ldots=\frac{e^{H_a}-1}{H_a},$$

детерминант которой обращается в нуль только в том случае, когда один из характеристических корней матрицы H_a (корней Киллинга) является целым кратным (*ненулевым*) числа $2\pi i$. Следовательно, *поскольку канонические параметры преобразования S (продолжаемые по непрерывности) не дадут матрице H_a корень Киллинга, являющийся ненулевым целым кратным числа $2\pi i$, канонические параметры можно продолжать.*

Преобразование S рассматриваемой группы, для которого имеет место исключаемый случай, таковы, что соответствующее им преобразование T линейной присоединенной группы допускает характеристический корень $e^{2n\pi i}$, равный 1, *но получающийся по непрерывности из корня, отличного от* 1. Если заранее известно, что эти *сингулярные* преобразования образуют в многообразии группы многообразие не более $r-2$ измерений, то всегда можно достичь несингулярного преобразования, не встречая ни одного сингулярного преобразования, и, следовательно, *группа* (или по меньшей мере множество ее несингулярных преобразований) *может быть целиком порождена с помощью ее бесконечно малых преобразований* [63].

В обратном случае можно показать, вопреки утверждению А. Пуанкаре [1], что бесконечно малые преобразования порождают только часть группы. Наиболее простой пример дает нам группа вещественных унимодулярных линейных подстановок двух переменных

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = a'x + b'y. \end{cases} \qquad (10)$$

Те подстановки, для которых уравнение $(a-\lambda)(b'-\lambda)-ba'=0$ допускает два *различных отрицательных* вещественных корня $(a+b'<-2)$, не могут быть порождены никаким бесконечно малым преобразованием этой группы [64].

25. В частном случае группы G *вещественных* линейных подстановок можно прийти к довольно интересному результату. Всякую подстановку этой группы, не могущую быть порожденной бесконечно малой подстановкой, можно рассматривать как произведение двух или трех подстановок группы, из которых одна *инволютивна*, а другие могут быть порождены бесконечно малыми подстановками, причем одна из этих последних подстановок перестановочна с инволютивной подстановкой *). Доказательство опирается на рассмотрение группы G', полученной заменой вещественных параметров

---

*) В оригинале ошибочно утверждается, что всякую подстановку группы G можно рассматривать как произведение двух перестановочных между собой перестановок, одна из которых инволютивна, а другая может быть порождена бесконечно малой подстановкой. Ошибка Картана была обнаружена Шредером [2], которому и принадлежит помещаемое здесь утверждение. По этому вопросу см. также работы Неймана [1], Шредера [1] и Е. М. Полищука [1].

Переход от группы G к группе G' часто называют *комплексизацией* группы G. (*Прим. перев*).

группы G *комплексными*; выражаясь точнее, группа G' является линейной группой, зависящей от $2r$ вещественных параметров, порожденной бесконечно малыми подстановками $X_1, \ldots, X_r$ группы G и подстановками $iX_1, iX_2, \ldots, iX_r$.

В связи с этим следует заметить, что если нам дана группа G порядка r, то *не всегда существует* группа G' порядка $2r$, в которой G была бы подгруппой, причем $2r$ вещественных канонических параметров группы G' можно было бы получить, придавая r каноническим параметрам группы G *комплексное* значение. В качестве примера мы сошлемся на *односвязную* группу G, локально изоморфную группе дробно линейных преобразований на проективной прямой.

III. ПОДГРУППЫ ГРУППЫ ЛИ

26. Для подгрупп группы Ли можно доказать две основные теоремы.

Первой из этих теорем является теорема о том, что *всякая непрерывная подгруппа группы Ли является группой Ли.* Выражаясь точнее, это значит, что в многообразиях групп G и g можно найти две такие достаточно малые окрестности $\mathcal{V}_0$ и v_0, окружающие единицу группы, что различные операции окрестности v_0, внутренние по отношению к $\mathcal{V}_0$, порождаются некоторым линейным семейством бесконечно малых преобразований группы G. Частный случай этой теоремы, относящийся к подгруппам линейной группы n переменных, был доказан Нейманом.

Пусть N и n — соответственные порядки групп G и g. Возьмем в N-мерном эвклидовом пространстве $\mathcal{E}_N$ канонических параметров группы G гиперсферу Σ с центром в начале и с радиусом R, достаточно малым для того, чтобы две различные точки гиперсферы Σ представляли два различных элемента группы. Условимся называть *модулем* элемента группы G, внутреннего по отношению к Σ, расстояние точки, представляющей этот элемент, от начала. Рассмотрим теперь в группе g окрестность v_0 единицы, причем предположим, что все элементы этой окрестности имеют модуль, меньший R. Мы можем предположить, что эта окрестность представляется некоторой гиперсферой σ радиуса r в n-мерном эвклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$, причем центр ее также соответствует единице группы. Пусть $R' < R$ — нижняя грань модулей элементов группы g, представляющих точки границы гиперсферы σ. Выберем некоторое число $R'' < R'$. Мы можем найти в $\mathscr{E}_n$ гиперсферу σ' радиуса r', настолько близкого к r, что все элементы группы g, внешние по отношению к σ' и внутренние по отношению к σ, имеют модуль, больший R''. Определим, наконец, число ε, достаточно малое для того, чтобы произведение элемента группы g, внутреннего по отношению к гиперсфере σ_ε радиуса ε на элемент g, внутренний по отношению к σ', само находилось бы внутри гиперсферы σ.

Рассмотрим теперь в σ бесконечную последовательность элементов, сходящуюся к началу. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_h \ldots$ — соответственные точки гиперсферы Σ. Тогда полупрямые, соединяющие в $\mathscr{E}_N$ начало с этими точками, имеют по крайней мере одну предельную прямую Δ. Выберем на этой прямой какую-нибудь точку H на расстоянии $R_0 \leqslant R''$ от начала. Если s_h — элемент группы g, представляемый в $\mathscr{E}_N$ точкой A_h, то определим максимальное целое число p_h, такое, что элемент s_h и все его степени до $s_h^{p_h}$ включительно имеют модуль, меньший R_0. Если h настолько велико, что s_h находится внутри гиперсферы σ_ε, то точка пространства $\mathscr{E}_n$, представляющая элемент s_h^2, находится внутри гиперсферы σ, и, более того, так как модуль элемента s_h^2 меньше R'', она будет внутри гиперсферы σ'. Поэтому то же будет относиться ко всем остальным рассматриваемым степеням s_h. Точки пространства $\mathscr{E}_N$, представляющие эти элементы, будут находиться внутри гиперсферы радиуса R_0 и, очевидно, имеют точку H своей предельной точкой. Поэтому из этой последовательности можно выделить подпоследовательность точек, сходящуюся к точке H. Последовательность соответственных точек пространства $\mathscr{E}_n$, находящихся внутри σ', имеет в $\mathscr{E}_n$ по меньшей мере одну предельную точку, и так как в G она не может иметь более одной предельной точки, мы получаем, что точка H представляет элемент группы g, внутренний по отношению к σ. В этом рассуждении в качестве H можно взять любую точку прямой Δ с модулем, меньшим R'' и, следовательно, R'. Иначе говоря, *окрестность v_0 группы g содержит все элементы с модулем, меньшим R', некоторой подгруппы группы G, порожденной ее одним бесконечно малым преобразованием.*

Благодаря этому легко видеть, что все бесконечно малые преобразования группы G, принадлежащие группе g, порождают подгруппу Ли g', содержащуюся в g, причем все элементы подгруппы g' с модулем, меньшим R', принадлежат окрестности v_0 группы g. Но из этого следует, что внутри гиперсферы Σ' радиуса R' нет других элементов, принадлежащих окрестности v_0. В самом деле, такой элемент s можно было бы связать с единицей группы g непрерывным путем, принадлежащим к v_0, причем все элементы этого пути имели бы модуль, меньший R. Пусть A — внутренняя точка гиперсферы Σ, представляющая такой элемент. Геометрическое место элементов sg', находящихся внутри гиперсферы Σ, является *аналитическим* многообразием, проходящим через A, имеющим ту же размерность n', что и порядок подгруппы g'. Плоское многообразие $N - n'$ измерений, выходящее из начала и ортогональное подгруппе g', встретит это многообразие в одной определенной точке. Мы получим, таким образом, последовательность точек, стремящихся к началу одновременно с точкой A, и таких, что прямые, соединяющие начало с этими точками, составляют с прямыми, порождающими подгруппу g', углы, стремящиеся к $\frac{\pi}{2}$. Отсюда следует существование в группе g бесконечно малых преобразований, отличных от бесконечно малых преобразований подгруппы g', что противоречит нашему предположению. Теорема, таким образом, полностью доказана.

Отсюда, в частности, в качестве следствия вытекает то, что *всякая конечная непрерывная линейная группа является группой Ли*. Это же относится ко всякой проективной, конформной группе и т. д. *Поэтому, если существует конечная непрерывная группа, не являющаяся группой Ли, то она не может быть изоморфна ни одной линейной группе.* Вопрос о том, всякая ли группа Ли изоморфна (хотя бы локально) некоторой линейной группе, является до сих пор, как известно, открытым *).

---

*) Этот вопрос полностью разрешен советскими математиками И. Д. Адо и А. И. Мальцевым. В 1934 г. И. Д. Адо в работе [1] (см. также Адо [2]) доказал, что *всякая группа Ли локально изоморфна некоторой линейной группе.*

Предположение о том, что всякая группа Ли в точности изоморфна линейной группе, было опровергнуто Г. Биркгофом, построившим противоречащий пример: факторгруппу группы матриц $M(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ по ее дискретному нормальному делителю $M(0, 0, n)$ (n — целое число) (Биркгоф [1]). Другой противореча-

27. Вторая основная теорема относится к подгруппам, *замкнутым в G*. Она может быть формулирована следующим образом. *Если подгруппа g группы Ли G замкнута в G и не является собственно дискретной, то в G можно найти такую достаточно малую окрестность $\mathcal{V}_0$ единицы, что все элементы подгруппы g, внутренние по отношению к $\mathcal{V}_0$, порождаются некоторым линейным семейством бесконечно малых преобразований группы G.*

Доказательство аналогично предыдущему, но более просто, так как отправной точкой здесь является рассмотрение бесконечной последовательности элементов подгруппы g, стремящихся к единице группы G [65].

Из этой второй теоремы, в частности, следует, что *всякая не собственно дискретная подгруппа g открыта в G, так как подгруппа, образованная группой g и ее предельными элементами в G, является группой Ли.*

IV. ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ ГРУППЫ КОТОРЫХ ЯВЛЯЮТСЯ ГРУППАМИ ЛИ

28. Среди однородных пространств, фундаментальными группами которых являются группы Ли (однородные пространства Ли), в частности, находятся многообразия самих групп Ли, транзитивными группами в которых являются параметрические группы. Эти пространства не могут быть многообразиями, произвольными с топологической точки зрения, как это видно на примере двух измерений. 2-параметрические группы Ли или коммутативны или изоморфны группе преобразований подобия на прямой. Многообразие коммутативной группы гомеоморфно или эвклидовой плоскости (группа сдвигов плоскости), или круглому цилиндру, или тору. Что же касается группы преобразований подобия на прямой, $x' = ax + b$ $(a > 0)$, то она гомеоморфна эвклидовой плоскости (или полуплоскости, что то же самое). Поэтому эта группа односвязна, и, так как ее центр состоит из одного тождественного преобразования, не может быть других групп той же инфинитезимальной

щий пример — односвязная группа, накрывающая группу вещественных дробно-линейных преобразований на прямой, — был найден самим Картаном.

В 1943 г. А. И. Мальцевым было найдено условие линейной представимости групп Ли в целом, см. Мальцев [1, 2.]. *(Прим. перев.)*

структуры. *Мы получим, таким образом, в качестве единственно возможных многообразий групп Ли порядка 2 эвклидову плоскость, круглый цилиндр и тор.*

29. Рассмотрим теперь произвольное однородное пространство Ли E, допускающее связную непрерывную группу Ли в качестве фундаментальной группы. Максимальная подгруппа g, оставляющая неподвижной некоторую точку O этого пространства, является, как мы видели (n°18), замкнутой в G и, следовательно (n°27), собственно дискретной или непрерывной, причем в случае непрерывности может быть как связной, так и несвязной. Кроме того, эта подгруппа не содержит ни одного нормального делителя*) группы G [66].

Обратно, пусть g — произвольная подгруппа, замкнутая в G и не содержащая ни одного нормального делителя группы G. Пусть $r-n$ и r — соответственные порядки групп g и G. Если бы существовало однородное пространство, транзитивно преобразуемое группой G и такое, что g — максимальная подгруппа, оставляющая неподвижной точку O этого пространства, то можно было бы поставить во взаимно однозначное соответствие каждой точке M этого пространства множества Sg преобразований группы G, переводящих O в M, причем все эти преобразования получены умножением некоторого преобразования S на все преобразования группы g. Рассмотрим теперь множество „элементов" или „точек" Sg. Эти „элементы" образуют n-мерное многообразие, удовлетворяющее соответствующим требованиям [67].

В самом деле, определим окрестность „точки" Sg как множество точек sSg, где s — произвольный элемент некоторой окрестности $\mathcal{V}_0$ единицы группы G. Выберем теперь произвольно n бесконечно малых преобразований $X_1, \ldots, X_n$, образующих вместе с $r-n$ бесконечно малыми преобразованиями SgS^{-1} базис группы G. Всякий элемент s может быть одним, и только одним способом представлен как произведение преобразования t окрестности $\mathcal{V}_0$, порожденного бесконечно малым преобразованием $e_1X_1 + \ldots + e_nX_n$, и преобразования окрестности $\mathcal{V}_0$, принадлежащего к множеству преобразований SgS^{-1}. Поэтому

$$sSg = tSg.$$

---

*) Кроме, конечно, единицы группы G. (*Прим. перев.*)

Поэтому можно поставить в соответствие всякой „точке“ рассматриваемой окрестности $\mathcal{V}_0\, Sg$ точку $(e_1, \ldots, e_n)$ n-мерного эвклидова пространства, лежащую внутри гиперсферы достаточно малого радиуса. С другой стороны, две различные точки одной гиперсферы соответствуют двум различным „точкам“ tSg. Если бы это было не так и притом для сколь угодно малой окрестности $\mathcal{V}_0$, то можно было бы найти бесконечную последовательность пар элементов t_n, t'_n, стремящихся к единице, и таких, что элементы t'_nS имеют вид t_nSR_n, где элементы R_n принадлежат группе g. Тогда мы получим

$$t_n^{-1}t'_n = SR_nS^{-1},$$

т. е. элементы R_n стремятся к единице, *не попадая в то же время в достаточно малую окрестность единицы в группе g.* Но это противоречит второй основной теореме (n°27) о подгруппах, замкнутых в G. Поэтому постулат A (n°1) выполнен. Остальные постулаты не вызывают никаких затруднений, за исключением, быть может, последнего постулата E, который доказывается следующим образом. Если нам даны две различные „точки“ Sg и $S'g$ и нельзя найти две окрестности этих „точек“, не имеющих ни одной общей точки, то можно найти бесконечную последовательность пар элементов s_n, s'_n, группы G, стремящихся к единице, и таких, что

$$s_nSg = s'_nS'g.$$

Тогда будем иметь

$$S' = s_n'^{-1}s_nSR_n,$$

где R_n принадлежит группе g. В то же время элемент R_n будет стремиться к элементу $S^{-1}S'$, не принадлежащему группе g, что противоречит предположению о том, что подгруппа g замкнута в G [68].

Ясно, что для того чтобы породить это однородное пространство, можно исходить из любой подгруппы $S_0gS_0^{-1}$, *сопряженной* подгруппе g в G.

30. Вместо того чтобы предполагать, что пространство E преобразуется транзитивно группой, изоморфной группе G, можно предположить, что оно преобразуется с помощью группы, *локально изоморфной* группе G. В этом случае подгруппа g может содержать элементы, образующие нормальный делитель γ группы G, однако этот нормальный делитель не может быть непрерывным. Так как, с другой стороны, нормальный делитель γ состоит из тех преобразований группы G, которые оставляют неподвижными все точки пространства, он замкнут в G и, следовательно, в g. Тем самым он *собственно дискретен* в G. Поэтому каждый из его элементов инвариантен при преобразовании с помощью элементов группы G, т. е. этой нормальный делитель принадлежит центру группы G. *Однородные пространства, транзитивно преобразуемые группой G (причем возможно, что в группе G имеется дискретная подгруппа, оставляющая неподвижными все точки этого пространства), соответствуют, таким образом, различным подгруппам g, замкнутым в G и содержащим в качестве возможных нормальных делителей группы G только собственно дискретные подгруппы центра G.*

Поэтому, *если группа G односвязна*, можно построить с помощью группы G все однородные пространства, допускающие в качестве фундаментальной группы любую группу, локально изоморфную с группой G.

31. Предположим, что группа G односвязна. Подгруппа g может быть как связной, так и несвязной. В этом последнем случае связная часть g_0 группы g, содержащая единицу, является нормальным делителем группы g.

Если группа g связная, однородное пространство E односвязно. В самом деле, возьмем в E замкнутый контур $(\mathscr{C})$, выходящий из точки O и возвращающийся в нее, и поставим в непрерывное соответствие каждой точке M этого контура одно из преобразований группы G, переводящих O в M, причем исходным преобразованием является тождественное преобразование. Контуру $(\mathscr{C})$ будет соответствовать в многообразии группы G некоторый путь $(\mathscr{C}')$, выходящий из единицы и оканчивающийся в одном из элементов группы g, *путь, который можно замкнуть, не выходя из g*, так как группа g связна.

Полученный таким образом замкнутый контур $(\mathscr{C}')$ можно непрерывно деформировать так, чтобы он стянулся в точку. Эта деформация влечет за собой соответственную непрерывную деформацию контура ($\mathscr{C}$), который таким образом также можно стянуть в точку, что и требовалось доказать.

Если группа g не связна, то каждой связной части g_i группы g в пространстве E соответствует множество замкнутых контуров, переводимых один в другой с помощью непрерывной деформации.

Чтобы получить эти контуры, надо соединить в многообразии группы G единицу группы с некоторым элементом, принадлежащим g_i, каким-нибудь непрерывным путем. Элементы этого пути являются преобразованиями, которые, будучи примененными к точке O, дадут в E замкнутый контур. Вообще число замкнутых контуров в E, не переводимых один в другой, равно числу связных частей в группе g. Группа связности пространства E в топологическом смысле является абстрактной группой, каждый элемент (e_i) которой можно отождествить с некоторым g_i, причем произведение $(e_i)(e_j)$ равно (e_k), если произведение элементов g_i на элементы g_j дают элементы g_k.

32. Из предшествующего вытекает одно интересное следствие. Не будем больше предполагать, что группа G односвязна. Тогда, если однородное пространство E односвязно, можно утверждать, что подгруппа g группы G, соответствующая пространству E, связна. Но если, наоборот, пространство E не односвязно, то можно утверждать, что имеет место одно из двух: подгруппа несвязна или группа G не односвязна. Именно так, например, обстоит дело на проективной прямой, транзитивно преобразуемой связной дробно-линейной группой одного переменного. Проективная прямая не односвязна, но подгруппа g, оставляющая неподвижной точку $x=\infty$, т. е. группа $x'=ax+b$ $(a>0)$, является связной группой. *Поэтому дробно-линейная группа не односвязна.* Такой же вывод можно сделать для унимодулярной линейной группы двух вещественных переменных, которая транзитивно преобразует эвклидову плоскость с выкинутой точкой (этой выкинутой точкой является начало), для которой подгруппа g, оставляющая неподвижной точку $(1,0)$, является связной группой

$$x'=x+ay,$$
$$y'=y.$$

Эти замечания показывают, какой большой интерес для топологического изучения однородного пространства представляет топологическое изучение фундаментальной группы этого пространства.

33. Укажем в заключение, что знание всех типов 2-параметрических групп Ли позволяет определить все 2-мерные однородные пространства Ли. Ограничимся только указанием конечного результата.

Всякое двумерное однородное пространство Ли гомеоморфно одному из следующих пространств:

эвклидова плоскость;
круглый цилиндр;
проективная плоскость с выкинутой точкой[*]*;*
сфера;
проективная плоскость;
тор.

Три первых из этих пространств некомпактны, три последних — компактны. Мы видим, что *риманова поверхность рода выше 1 не может транзитивно преобразовываться ни одной группой Ли.* Аналогичная теорема, менее ограничивающая природу группы, была доказана Д. Ван-Данцигом и Б. Л. Ван-дер-Варденом [1].

V. ОРИЕНТИРУЕМЫЕ И НЕОРИЕНТИРУЕМЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ОБЪЕМ. МЕТРИЧЕСКИЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

34. Пусть G — фундаментальная группа однородного пространства, g — соответственная подгруппа, γ — подгруппа линейной присоединенной группы, соответствующая подгруппе g. Предположим, что в инфинитезимальном базисе группы G $r-n$ последними бесконечно малыми преобразованиями являются преобразования, порождающие группу g или по меньшей мере связную часть группы g, содержащую единицу. Линейные подстановки группы γ производятся над параметрами e_i самого общего бесконечно малого преобразования $\sum e_i X_i$ данной группы, но так как группа γ, очевидно, оставляет инвариантным

---

[*] То есть так называемый „лист Мебиуса". (*Прим. перев.*)

множество преобразований подгруппы g, то подстановки группы γ преобразуют параметры $e_1, e_2, \dots, e_n$ между собой. Обозначим через $\bar{\gamma}$ линейную группу, показывающую, как преобразуются эти n параметров.

Предположим, что детерминант всех подстановок группы $\bar{\gamma}$ всегда положителен. Тогда пространство E *ориентируемо*. В самом деле, рассмотрим параллелепипед, построенный на n бесконечно малых векторах OA, выходящих из начальной точки O. Каждую точку A можно получить, применяя к O бесконечно малое преобразование $\sum\limits_{k=1}^{n} e_k^{(i)} X_k$. Расположим эти n векторов в каком-нибудь порядке и будем говорить, что параллелепипед имеет *положительную* или *отрицательную* ориентацию (sens), в зависимости от того, будет ли детерминант $|e_i^{(j)}|$ положителен или отрицателен. При всяком преобразовании группы g этот параллелепипед заменяется другим параллелепипедом, имеющим ту же ориентацию, что и первый, так как здесь мы переходим от значений $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_n^{(i)}$ к значениям, полученным с помощью некоторой подстановки группы $\bar{\gamma}$, одной и той же для всех индексов i. Точно так же можно определить бесконечно малый параллелепипед с началом A, отличным от O, переводя его начало в O с помощью некоторого преобразования группы G, и таким образом *ориентация сохраняется при всех преобразованиях группы G*.

В противоположном случае, когда некоторые подстановки группы $\bar{\gamma}$ имеют отрицательный детерминант, пространство неориентируемо.

Если группа g связная, то ясно, что детерминант подстановок связной линейной группы $\bar{\gamma}$ всегда положителен. Поэтому однородное пространство со связной группой g ориентируемо. *В частности многообразие группы всегда ориентируемо.*

35. Предыдущие рассуждения позволяют определить объем бесконечно малого параллелепипеда однородного пространства, если все линейные подстановки группы $\bar{\gamma}$ имеют детерминант, равный 1 (ориентируемость пространства) или ± 1 (неориентируемость пространства). Определенный таким образом объем сохраняется при всех преобразованиях группы G.

Определим, в частности, объем в многообразии некоторой группы G, рассматриваемой как пространство, транзитивно преобразуемое с помощью первой группы параметров. Здесь подгруппа g сводится к тождественному преобразованию. Определим объем параллелепипеда, имеющего начало в точке O (единица группы) и построенного на векторах, определяющих бесконечно малые преобразования e_1X_1, $e_2X_2, \ldots, e_rX_r$ как число $e_1e_2, \ldots, e_r$. Тогда элемент объема пространства будет иметь вид (Картан и Схоутен [1]; Картан [17])*)

$$d\tau = [\omega_1\omega_2, \ldots, \omega_r];$$

в правой части здесь внешнее произведение.

Если, напротив, рассматривать многообразие группы как пространство, транзитивно преобразуемое с помощью второй группы параметров, мы получим второй элемент объема (Картан и Схоутен [1]; Картан [17])**).

$$d\tau' = [\breve{\omega}_1 \breve{\omega}_2, \ldots, \breve{\omega}_r].$$

36. Если линейная группа $\bar{\gamma}$ оставляет инвариантной положительно определенную квадратичную форму, например, $e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2$, то в однородном пространстве E существует риманова метрика, инвариантная относительно группы G. Пусть, в самом деле, A — точка, бесконечно близкая к начальной точке O. Назовем расстоянием OA число $\sqrt{e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2}$, где $e_1, \ldots, e_n$ — параметры бесконечно малого преобразования $e_1X_1 + \ldots + e_nX_n$, переводящего O в A. Если при некотором преобразовании группы g точка A переходит в A', то мы видим, что расстояние OA' равно расстоянию OA. Определим теперь расстояние MN между двумя бесконечно близкими точками M и N, переводя M в O с помощью некоторого преобразования группы G. Если при этом N переходит в A, то полагаем $MN = OA$. Полученное расстояние не зависит от преобразования, переводящего M в O. Оно сохраняется при произвольном преобразовании группы G.

Аналитически, если S_a и S_{a+da} — два преобразования группы G, соответственно переводящие точку O в две бесконечно

---

*) См. стр. 52 настоящего сборника. (*Прим. перев.*)

**) См. там же. (*Прим. перев.*)

близкие точки M и N, и если $S_a^{-1} S_{a+da}$ — бесконечно малое преобразование $\omega_1 X_1 + \ldots + \omega_r X_r$, то мы имеем

$$\overline{MN}^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_n^2.$$

В частности, многообразие группы G, рассматриваемое как пространство, транзитивно преобразуемое с помощью первой группы параметров, допускает бесконечное количество метрик, инвариантных относительно этой группы: достаточно взять положительно определенную форму переменных $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ с произвольными коэффициентами. Если же взять в качестве g уже не одно тождественное преобразование, а некоторую конечную собственно дискретную подгруппу, то $\overline{\gamma}$ будет конечной линейной группой, всегда оставляющей инвариантной по меньшей мере одну положительно определенную форму и, следовательно, r-мерное пространство E, соответствующее группе g, также всегда допускает по меньшей мере одну метрику, инвариантную относительно группы G.

ГЛАВА III

КОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ ЛИ

I. ОБЪЕМ КОМПАКТНОЙ ГРУППЫ

37. Мы видели (n°35), что в многообразии группы Ли можно определить два различных объема. Очевидно, что каждый из них конечен для компактной группы, так как многообразие такой группы может быть покрыто конечным числом окрестностей, каждая из которых имеет конечный объем.

Если же, наоборот, группа является некомпактной, то оба объема ее многообразия бесконечны. В самом деле, пусть $\mathcal{V}_0$ — некоторая окрестность единицы, а $\mathcal{V}'_0$ — окрестность, внутренняя к $\mathcal{V}_0$ и настолько малая, что если s и s' — два произвольных элемента $\mathcal{V}'_0$, то элемент ss'^{-1} принадлежит к $\mathcal{V}_0$. Мы знаем, что если p — произвольное целое число, то существуют такие элементы группы G, которые не могут быть получены перемножением p элементов, внутренних к $\mathcal{V}_0$, так как в противном случае многообразие G можно было бы покрыть конечным числом окрестностей. Пусть S — элемент такого типа:

$$S = s_1 s_2 \dots s_q \qquad (q > p).$$

Мы можем предположить, что q — минимальное число сомножителей, которые можно взять внутри $\mathcal{V}_0$ для получения S. Рассмотрим окрестности

$$\mathcal{V}'_0, \quad s_1 s_2 \mathcal{V}'_0, \quad s_1 s_2 s_3 s_4 \mathcal{V}'_0, \quad \dots$$

Легко видеть, что никакие две из них не имеют общих элементов. С другой стороны, все они имеют одинаковый объем v' — объем окрестности $\mathcal{V}'_0$. Поэтому в многообразии группы можно найти бесконечное количество областей с объемом v', не имеющих общих точек, что и требовалось доказать.

Два объема, которые можно определить в многообразии компактной группы, совпадают между собой.

II. ТЕОРЕМА ВЕЙЛЯ

38. Для компактных линейных групп Ли, как связных, так и несвязных, имеет место основная теорема Вейля [1, стр. 289]*) о том, что *такая группа оставляет инвариантной по меньшей мере одну положительно определенную эрмитову форму*.

Предположим сначала, что группа G связная и определена уравнениями

$$x'_i=\sum_k a_{ik}x_k \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где коэффициенты a_{ij} зависят, конечно, от подстановки S группы. Обозначим правые части этих уравнений через Sx_i, выражения, комплексно сопряженные к ним, — через $\overline{Sx_i}$. Образуем следующий интеграл, распространенный по всему многообразию группы,

$$\int (Sx_1\overline{Sx_1}+Sx_2\overline{Sx_2}+\ldots+Sx_n\overline{Sx_n})\,d\tau_s.$$

Это положительно определенная эрмитова форма $F(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, Она инвариантна по отношению к G, так как, если произвести над переменными x_i какую-нибудь подстановку S_0, эта форма примет вид

$$\int (SS_0x_1\overline{SS_0x_1}+\ldots+SS_0x_n\overline{SS_0x_n})\,d\tau_s.$$

Полагая $SS_0=S'$ и замечая, что $d\tau_s=d\tau_{s'}$, если за $d\tau$ взят *второй* элемент объема, мы доказываем теорему.

Если группа G — несвязная, она необходимо состоит из конечного числа связных частей. Поэтому достаточно определить форму F как сумму такого числа интегралов, сколько связных частей в группе.

Если компактная линейная группа G является группой с вещественными коэффициентами, то эрмитову форму можно заменить положительно определенной квадратичной формой.

39. Одним из следствий теоремы Вейля является то, что коэффициенты a_{ij} подстановок компактной линейной группы *ограничены*, так как если мы предположим, что инвариантной формой F является, например,

$$F\equiv x_1\overline{x_1}+x_2\overline{x_2}+\ldots+x_n\overline{x_n},$$

---

*) См. стр. 216 русского перевода. *(Прим. перев.)*

то мы будем иметь

$$\sum_k a_{ki}\overline{a_{ki}} = 1. \tag{1}$$

Это свойство можно, впрочем, доказать и непосредственно. Будем называть выражение $\sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}\overline{a_{ij}}}$ модулем линейной подстановки. Если бы коэффициенты не были ограничены, можно было бы найти такую бесконечную последовательность подстановок $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ нашей группы, что модуль каждой подстановки больше удвоенного модуля предыдущей подстановки, и эта последовательность не имела бы предельного элемента в группе.

К этому можно добавить еще одно свойство, вытекающее из предыдущего и состоящее в том, что все корни λ характеристического уравнения подстановки S

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

по модулю равны 1. В самом деле, заменой переменных мы всегда можем привести одно из уравнений подстановки S к виду

$$x_1' = \lambda x_1.$$

Тогда подстановка S^n будет иметь в качестве коэффициента λ^n, а эта величина может быть ограничена только в том случае, когда модуль λ равен 1 [69]. В конечном счете отсюда следует, что детерминант Δ подстановки, являющийся произведением характеристических корней, также имеет модуль, равный 1. Можно было бы и непосредственно исходить из того, что каждой подстановке S соответствует подстановка $v' = \Delta v$, указывающая, как S изменяет объемы. Эти подстановки могут породить компактную группу только в том случае, если модуль Δ равен 1. Это также есть причина того, что многообразие компактной группы может иметь только один вид объема [70].

40. Эти рассуждения можно применить к следующей важной теореме:

Всякая ограниченная алгебраическая линейная группа компактна.

Линейная группа G называется ограниченной, если коэффициенты ее уравнений ограничены, и алгебраической, если она определяется системой целых алгебраических соотношений между ее коэффициентами. Теорема почти очевидна, так как бесконечное множество подстановок такой группы допускает в силу ограниченности коэффициентов по меньшей мере один предельный элемент Σ в группе *всех* линейных подстановок данных переменных, и Σ принадлежит к самой группе G, так как коэффициенты этой группы удовлетворяют данным целым алгебраическим соотношениям.

Ортогональная группа n вещественных переменных, линейная группа положительно определенной эрмитовой формы, унимодулярная линейная группа той же формы в силу этой теоремы являются компактными группами. Но не все их подгруппы компактны, что видно на примере группы

$$x' = e^{ia}x, \quad y' = e^{mia}y$$

с вещественным параметром a, если m — *иррациональное* вещественное число. Эта группа не является компактной и в то же время оставляет инвариантной эрмитову форму $x\bar{x} + y\bar{y}$.

III. СТРУКТУРА КОМПАКТНЫХ ГРУПП

41. Если группа G компактна, ее присоединенная группа Γ также компактна. Поэтому она оставляет инвариантной по меньшей мере одну положительно определенную квадратичную форму, например,

$$F(e) = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_r^2.$$

Выражая тот факт, что бесконечно малые преобразования E_i (n°**22**) присоединенной группы оставляют форму F инвариантной, мы получаем соотношения

$$c_{jik} + c_{kij} = 0.$$

Поэтому в компактной группе можно выбрать такой базис, для которого

$$c_{ijk} = c_{jki} = c_{kij} = -c_{ikj} = -c_{kji} = -c_{jik}. \tag{2}$$

Отсюда следует, что коэффициент при e_1^2 в форме $\varphi(e)$, определяемой в n°22, имеет вид

$$\sum_{j,k} c_{1jk}c_{1kj} = -\sum_{j,k} c_{1jk}^2.$$

Поэтому форма $\varphi(e)$ здесь отрицательно определенная или отрицательно полуопределенная. Это свойство, впрочем, и непосредственно следует из того, что эта форма является суммой квадратов характеристических корней бесконечно малых преобразований присоединенной группы и из того, что эти корни чисто мнимы, без чего характеристические корни конечных подстановок присоединенной группы не могли бы быть равны по модулю 1.

42. Будем рассматривать $e_1, e_2, \ldots, e_r$ как прямоугольные координаты точек в r-мерном эвклидовом пространстве. Если группа Γ оставляет инвариантным плоское многообразие этого пространства, проходящее через начало, то она оставляет инвариантным и ортогональное многообразие. Поэтому можно предположить, что базис бесконечно малых преобразований группы выбран таким образом, что группа Γ отдельно оставляет инвариантным плоские многообразия, определяемые p_1 первыми координатными осями, затем p_2 следующими, затем p_3 следующими и т. д., причем группа Γ не оставляет инвариантным ни одного плоского многообразия, содержащегося в одном из предыдущих многообразий. Несложное вычисление показывает, что константы c_{ijk} могут быть отличны от нуля только в том случае, когда все три индекса i, j, k принадлежат или к последовательности первых p_1 индексов, или к последовательности следующих p_2 индексов и т. д. Бесконечно малые преобразования каждой последовательности порождают группу, и *группа G является* по крайней мере в окрестности единицы, *прямым произведением* некоторого числа других групп $G_1, G_2, \ldots, G_n$. Это значит, что каждое преобразование группы G, достаточно близкое к тождественному преобразованию, можно рассматривать одним, и только одним, способом как произведение некоторого преобразования из G_1, некоторого преобразования из G_2 и т. д., и эти h перемножающихся преобразований перестановочны между собой (и сами находятся в окрестности тождественного преобразования).

Группы-сомножители $G_1, G_2, \ldots, G_n$ *просты:* они, очевидно, не допускают ни одного непрерывного нормального делителя, так как такой нормальный делитель соответствует плоскому многообразию, инвариантному для группы Γ.

43. Некоторые группы-сомножители могут быть 1-параметрическими. Предположим сначала, что все они обладают этим свойством. В этом случае все константы c_{ijk} равны нулю, и мы имеем *компактную коммутативную группу*. Односвязная группа с такой инфинитезимальной структурой является группой сдвигов в r-мерном эвклидовом пространстве. Чтобы перейти от последней к компактной группе, нужно определить в ней собственно дискретную подгруппу. Непосредственно видно, что мы всегда можем получить компактную группу, рассматривая два сдвига, все проекции которых отличаются только на целые числа как тождественные. Такие группы поэтому всегда изоморфны линейной группе

$$x_1' = e^{ia_1} x_1, \quad x_2' = e^{ia_2} x_2, \quad \ldots, \quad x_r' = e^{ia_r} x_r$$

с параметрами $a_1, a_2, \ldots, a_r$.

Всякая линейная группа, изоморфная или гомоморфная предыдущей группе, приводима к виду

$$y_1' = e^{i\sum m_{1k}a_k} y_1, \quad y_2' = e^{i\sum m_{2k}a_k} y_2, \quad \ldots, \quad y_n' = e^{i\sum m_{hk}a_k} y_n,$$

где m_{hk} — произвольные *целые числа*. Для того чтобы это соответствие было изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы можно было и обратно выразить $a_1, a_2, \ldots, a_r$ в виде линейных комбинаций n форм $\sum_k m_{ik} a_k$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с целочисленными коэффициентами.

Интересно отметить, что группа G допускает множество мощности континуума *локальных* автоморфизмов, которые можно получить, производя над переменными a_i произвольную линейную подстановку. Однако такой локальный автоморфизм можно продолжить на всю группу только в том случае, если эта подстановка с целочисленными коэффициентами и с детерминантом, равным ± 1.

ГЛАВА IV

СИММЕТРИЧЕСКИЕ РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА [1]

I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

55.*) Рассмотрим риманово многообразие, метрика которого всюду регулярна и о котором мы предполагаем, что в нем всякое *ограниченное* бесконечное множество различных точек имеет по меньшей мере одну предельную точку. Множество называется ограниченным, если расстояние всех его точек до некоторой фиксированной точки ограничено, причем расстояние двух точек определяется как нижняя грань длин кривых, соединяющих эти точки.

Риманово многообразие называется *симметрическим*, если симметрия по отношению к произвольной точке A пространства сохраняет его метрику. Симметрия определяется следующим образом: каждой точке M (достаточно близкой к A) ставим в соответствие точку M', проводя геодезическую линию AM и продолжая ее на отрезок AM', равный по длине отрезку AM. Свойство риманова многообразия быть симметрическим эквивалентно тому свойству, что параллельный перенос Леви-Чивита сохраняет риманову кривизну этого пространства. Однако здесь мы оставим эту точку зрения полностью в стороне.

Всякое симметрическое риманово многообразие допускает транзитивную непрерывную группу изометрических преобразований. В самом деле, если M и N две произвольные точки (достаточно близкие), то следует провести геодезическую линию MN и произвести последовательно симметрию относительно точки M и симметрию относительно середины P отрезка MN, при этом точка M перейдет в N. Это изометрическое преобразование входит в непрерывное семейство изометрических преобразований, которое можно получить, оставляя точку N

---

[1] В этой главе мы даем упрощенное резюме теорий, изложенных в мемуарах [18] *, [19] * [20], [22] и [26]* Э. Картана. См. также Картан [17]* и Картан и Схоутен [1]. [Работы, отмеченные звездочками, помещены в настоящем сборнике. *(Прим. перев.)*]

*) nn° 44—54 как имеющие второстепенное значение мы в переводе опускаем; последующее изложение от них не зависит. *(Прим. ред.)*

неподвижной и заставляя точку M пробегать геодезическую линию, выходящую из M.

Если G — максимальная связная непрерывная группа изометрических преобразований этого многообразия, то это многообразие можно рассматривать как однородное пространство с фундаментальной группой G и с метрикой, инвариантной относительно G. Поэтому максимальная подгруппа g группы G, оставляющая инвариантной данную точку O пространства, является *компактной. Мы будем считать, что группа G является группой Ли.*

56. Пусть σ — симметрия относительно точки O. Эта симметрия определяет инволютивный автоморфизм группы G, ставящий в соответствие всякому движению S движение

$$\overline{S} = \sigma S \sigma^{-1} = \sigma S \sigma.$$

Если S переводит M в N, то $\overline{S}$ переводит точку $\overline{M}$, симметричную для M относительно O, в точку $\overline{N}$, симметричную для N относительно O. Преобразования подгруппы g, очевидно, инвариантны при этом автоморфизме. С другой стороны, если имеются другие такие преобразования, то каждое из них переводит точку O в такую точку, которая должна совпадать со своей симметричной относительно O. Движения этого типа, если они существуют, составляют такое семейство движений, которое нельзя непрерывно связать с преобразованиями подгруппы g. В частности, единственными бесконечно малыми преобразованиями, инвариантными при этом автоморфизме, являются преобразования самой подгруппы g.

57. Будем отправляться теперь обратно от связной непрерывной группы G и такого инволютивного автоморфизма $\mathcal{A}$ этой группы, что бесконечно малые преобразования, инвариантные при автоморфизме $\mathcal{A}$, порождают компактную подгруппу g. Покажем, что однородное пространство $\mathcal{E}$, соответствующее подгруппе g, может быть снабжено симметрической римановой метрикой, инвариантной относительно группы G.

Автоморфизм $\mathcal{A}$ осуществляет над параметрами e_i бесконечно малых преобразований группы G линейную подстановку вида

$$\left.\begin{aligned} e'_i &= -e_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ e'_\alpha &= e_\alpha \qquad (\alpha = n+1, \ldots, r). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Всюду впоследствии будем обозначать первые n индексов латинскими буквами, а последние $r - n$ — греческими.

По предположению бесконечно малые преобразования X_α порождают компактную непрерывную подгруппу g. Подгруппа γ присоединенной группы Γ, соответствующая подгруппе g, также компактна. Она преобразует переменные $e_1, \ldots, e_n$ между собой. Поэтому она оставляет инвариантной (n°38) по меньшей мере одну положительно определенную квадратичную форму, которую можно привести к виду

$$f(e) = e_1^2 + e_2^2 + \ldots + e_n^2.$$

58. Пусть O — начальная точка, инвариантная при преобразованиях подгруппы g. Обозначим через $\bar{S}$ преобразование группы G, преобразованное из S с помощью автоморфизма $\mathcal{A}$. Пусть Sg — множество преобразований группы G, переводящих точку O в некоторую точку M пространства. „Сопряженные" преобразования $\overline{Sg}$ переводят O в некоторую определенную точку M. Мы получим, таким образом, в пространстве $\mathcal{E}$ точечное преобразование $M \longrightarrow \overline{M}$, оставляющее неподвижной точку O. Обозначим его символом σ. *Это преобразование является изометрическим.* В самом деле, если S_a и S_{a+da} переводят O в две бесконечно близкие точки M и M', точки $\overline{M}$ и $\overline{M'}$, являющиеся результатами применения к M и M' операции σ, могут быть получены из O операциями $\overline{S_a}$ и $\overline{S_{a+da}}$. Мы получим расстояние MM' (n°36), рассматривая бесконечно малое преобразование $S_a^{-1}S_{a+da}$, обозначаемое символом $\sum(\omega_i X_i + \omega_\alpha X_\alpha)$. Это расстояние равно

$$MM' = \sqrt{\sum_i \omega_i^2}.$$

Расстояние $\overline{M}\overline{M'}$ со своей стороны получается при рассмотрении сопряженного преобразования $\sum(-\omega_i X_i + \omega_\alpha X_\alpha)$. Непосредственно видно, что расстояние MM' не изменится при операции σ.

Траектории бесконечно малых преобразований $\sum e_i X_i$, применяемых к точке O, очевидно, инвариантны относительно σ (с изменением ориентации). Преобразование σ, таким образом, сохраняет направления, выходящие из O, но изменяет их ориентацию. В частности, *геодезические линии*, выходящие из точки O, инвариантны при изометрическом преобразовании σ. Отсюда непосредственно следует, что мы перейдем от точки M к точке $\overline{M}$, полученной из M применением операции σ, осуществляя симметрию относительно O, по крайней мере поскольку существует геодезическая линия, соединяющая O с M.

Таким образом, пространство $\mathscr{E}$ допускает изометрическую симметрию относительно O.

59. Отсюда непосредственно вытекает существование изометрической симметрии σ_A относительно произвольной точки A пространства. Будем называть две точки симметричными относительно A, если можно одним движением группы G одновременно перевести A в O, а две данные точки — в две точки, симметричные относительно O. Симметрия σ_A, очевидно, является изометрической.

Если S_0 — одно из преобразований, переводящих O в A, а S — одно из преобразований, переводящих O в M, то точка, симметричная для M относительно A, определяется с помощью преобразования

$$S' = S_0 \overline{S}_0^{-1} \overline{S}. \tag{2}$$

Можно непосредственно проверить, что эта точка не изменяется при умножении S_0 и S на произвольное преобразование подгруппы g.

60. Условимся говорить, что преобразование группы G является *вращением* (rotation), если оно принадлежит подгруппе g, и *сдвигом* (transvection), если оно может быть порождено бесконечно малым преобразованием $\sum e_i X_i$. Будем обозначать вращение буквой R, а сдвиг — буквой T. Тогда имеем

$$\overline{R} = R, \quad \overline{T} = T^{-1}.$$

Пусть (C) — линия, являющаяся геометрическим местом точек, полученных из точки O преобразованием $T(t)$ 1-параметрической группы сдвигов, порожденной данным бесконечно малым преобразованием

$$e_1 X_1 + \ldots + e_n X_n.$$

Возьмем в качестве t канонический параметр подгруппы, который мы можем предположить равным длине дуги кривой

(C) от точки O до точки M_t, получающейся из O сдвигом $T(t)$.

Точка, симметричная для точки M с абсциссой t на кривой (C) относительно точки A с абсциссой t_0, получается из O, согласно (2), с помощью преобразования

$$S' = T(t_0)\,[T(-t_0)]^{-1}\,T(-t) = T(2t_0 - t).$$

Следовательно, это снова точка кривой (C). *Эта траектория, таким образом, симметрична сама себе относительно любой из своих точек.*

Пусть теперь A — точка кривой (C), близкая к O. Геодезическая линия OA симметрична сама себе относительно A. Следовательно, она содержит точку A_1, симметричную с точкой O относительно точки A, причем A_1 лежит на (C). Она будет содержать также точки A_2, A_3, ..., полученные последовательным сдвигом вдоль (C) на отрезки одной и той же длины. Если A приближается к O, то геодезическая линия, соединяющая O с A, в пределе стремится к геодезической линии, которая касается в O кривой (C) и должна содержать все точки (C). *Геодезические линии, выходящие из O, являются, таким образом, траекториями сдвигов.*

61. Можно добавить к этому следующую замечательную теорему.

Возьмем на геодезической линии (C) две точки A и A' с абсциссами t_0 и t_0'. Найдем симметрическую точку для точки S последовательно относительно A и A'. Мы получим при этом точки

$$T(2t_0)\,\overline{S} \quad \text{и} \quad T(2t_0')\,T(-2t_0)\,S = T(2t_0' - 2t_0)\,S.$$

Результат двух симметрий, таким образом, является сдвигом, амплитуда которого равна удвоенному расстоянию AA'. Этот сдвиг не изменяется, если заставить дугу AA' скользить по несущей ее геодезической линии, не изменяя ее длины и ориентации.

Следует заметить, что *траектория 1-параметрической группы сдвигов является геодезической линией только в том случае, когда эта траектория проходит через точку O.*

II. ПРИВОДИМЫЕ И НЕПРИВОДИМЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

62. Формулы (1), определяющие инволютивный автоморфизм $\mathcal{A}$, непосредственно показывают, что коммутаторы $(X_i X_j)$ и $(X_\alpha X_\beta)$ зависят только от X_α, в то время как коммутаторы $(X_i X_\alpha)$ зависят только от X_i. Мы имеем, таким образом, структурные формулы вида

$$\left.\begin{aligned} (X_i X_j) &= \sum_\rho c_{ij\rho} X_\rho, \\ (X_i X_\alpha) &= \sum_k c_{i\alpha k} X_k, \\ (X_\alpha X_\beta) &= \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho} X_\rho. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Подгруппа γ присоединенной группы Γ, соответствующая подгруппе g, преобразует между собой переменные e_α. Она преобразует между собой и переменные e_i, так как подгруппа g оставляет инвариантным линейное семейство бесконечно малых преобразований $\sum e_i X_i$. Так как подгруппа γ компактна, то она оставляет инвариантной не только форму $f(e) \equiv e_1^2 + \ldots + e_n^2$, но также и некоторую положительную определенную форму типа

$$F(e) = e_1^2 + \ldots + e_n^2 + e_{n+1}^2 + \ldots + e_r^2. \tag{4}$$

Отсюда непосредственно следует

$$c_{\alpha ij} + c_{\alpha ji} = 0, \quad c_{\alpha\beta\gamma} + c_{\alpha\gamma\beta} = 0 \quad [^{71}] \tag{5}$$

63. Рассмотрим форму $\varphi(e)$, построенную для группы G. Так как она инвариантна относительно автоморфизма $\mathcal{A}$, то можно предполагать, что базисные бесконечно малые преобразования группы выбраны таким образом, что имеет место

$$-\varphi(e) = \sum_i \lambda_i e_i^2 + \sum_\alpha \lambda_\alpha e_\alpha^2 \quad [^{72}] \tag{6}$$

Коэффициенты λ_α все положительные. В самом деле,

$$\lambda_\alpha = \sum_{i,j} c_{\alpha ij}^2 + \sum_{\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma}^2,$$

и если бы λ_α было бы равно нулю, мы получили бы *особенное* бесконечно малое преобразование X_α. Таким образом, подгруппа g содержала бы непрерывный нормальный делитель группы G, что невозможно (n° 18). Так как подгруппа γ оставляет инвариантной форму $\sum \lambda_\alpha e_\alpha^2$, ничто не мешает нам предположить, как это мы делаем при построении формы F, что все числа λ_α равны 1.

Выражая тот факт, что бесконечно малые преобразования E_i и E_α присоединенной группы оставляют инвариантной форму $\varphi(e)$, мы получим соотношения

$$c_{ij\alpha} = \lambda_j c_{\alpha ij} = \lambda_i c_{\alpha ij} \quad [73] \tag{7}$$

64. Предположим теперь, что коэффициенты λ_i не все равны между собой. Пусть, например, первые n индексов подразделяются на два ряда, причем индексы $i, j, \ldots$, принадлежат к первому ряду, а индексы $i', j', \ldots$ — ко второму ряду, и предположим, что все λ_i отличны от $\lambda_{i'}$. Соотношения (7) тогда дадут

$$c_{ii'\alpha} = c_{\alpha ii'} = 0.$$

Отсюда непосредственно следует, что бесконечно малые преобразования X_i и X_α порождают группу G_1. Точно так же бесконечно малые преобразования X'_i и X_α порождают группу G'_1. Наконец, преобразования X_i перестановочны с $X_{i'}$. Следовательно, всякий сдвиг группы G является произведением сдвига группы G_1 на сдвиг группы G'_1, причем эти сдвиги перестановочны между собой. Группа G_1 определяет симметрическое пространство $\mathscr{E}_1$, соответствующее подгруппе g. Группа G'_1 точно так же определяет симметрическое пространство $\mathscr{E}_2$. Всякая точка пространства (достаточно близкая к 0) может быть определена сдвигом $T = T_1 T'_1$. Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между точками $\mathscr{E}$ и парами точек $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}'_1$. С другой стороны, расстояние между двумя бесконечно близкими точками $T_{ee'}$ и $T_{e+de,\, e'+de'}$ пространства $\mathscr{E}$ определяется с помощью бесконечно малого преобразования

$$T_{e'e'}^{-1} T_{e+de,\, e'+de'} = (T_{1e}^{-1} T_{1e+de})(T_{1e'}^{-1} T_{1e'+de'}).$$

При этом первый множитель правой части выражается в виде

$$\sum \omega_i X_i + \sum \omega_\alpha X_\alpha,$$

а второй — в виде

$$\sum \omega_{i'} X_{i'} + \sum \omega'_\alpha X_\alpha.$$

Отсюда непосредственно видно, что ds^2 пространства $\mathscr{E}$ является суммой ds^2 пространств $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}'_1$.

Мы будем говорить, что *пространство $\mathscr{E}$ получено с помощью произведения* (composition) *симметрических пространств $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}'_1$*. Такое пространство мы будем называть *приводимым* [74].

Мы пришли бы к аналогичному выводу и если бы подгруппа γ, преобразующая векторы e_i, оставляла бы инвариантным плоское многообразие менее чем n измерений с уравнениями, например, $e_{i'}=0$. В самом деле, в этом случае мы имели бы $c_{\alpha i i'}=0$, откуда, благодаря соотношениям (7), $c_{ii'\alpha}=0$.

65. Если пространство $\mathscr{E}$ *неприводимо*, все n коэффициентов λ_i формы $\varphi(e)$, как мы видим, равны между собой. Но здесь следует различать три случая:

1°. Если все λ_i равны нулю, уравнения (7) показывают, что сдвиги перестановочны между собой. В этом случае *пространство является эвклидовым*, или, точнее, это пространство коммутативной группы, в которой в качестве ds^2 взята некоторая положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами от n канонических параметров. Для $n=2$ пространство гомеоморфно эвклидовой плоскости, круглому цилиндру или тору.

2°. Если общее значение λ коэффициентов λ_i отрицательно, группа G является простой или полупростой и некомпактной. Пространство $\mathscr{E}$ также является некомпактным, что следует из того, что подгруппа g компактна.

3°. Если общее значение λ коэффициентов λ_i положительно, группа G проста или полупроста и компактна. Пространство $\mathscr{E}$ здесь также *компактно*.

66. Можно получить некомпактные неприводимые симметрические пространства из компактных пространств с помощью весьма простого приема. В самом деле, введем символы

$$Y_k = iX_k, \quad Y_\alpha = X_\alpha.$$

Тогда получим

$$(Y_iY_j) = -\sum_\rho c_{ij\rho}Y_\rho,$$

$$(Y_iY_\alpha) = \sum_k c_{i\alpha k}Y_k,$$

$$(Y_\alpha Y_\beta) = \sum_\rho c_{\alpha\beta\rho}Y_\rho.$$

Эти формулы определяют новую структуру группы, допускающей инволютивный автоморфизм (1). Соответственная новая форма $\varphi(e)$, очевидно, может быть получена из первоначальной заменой λ на $-\lambda$. Следовательно, *всякому некомпактному неэвклидову неприводимому симметрическому пространству соответствует компактное неэвклидово неприводимое симметрическое пространство и обратно.*

Поэтому разыскание всех неприводимых симметрических пространств сводится к разысканию всех компактных пространств этого типа.

67. Прежде чем начать это исследование, докажем, что *если неприводимое симметрическое пространство определяется полупростой группой G, эта группа является максимальной связной группой движений этого пространства.*

Заметим сначала, что коммутаторы (X_iX_j) должны порождать все $r-n$ независимых линейных комбинаций X_α. В самом деле, в противном случае эти коммутаторы породили бы нормальный делитель g' группы g, как показывает тождество Якоби, примененное к $(X_\alpha(X_iX_j))$. Но так как подгруппа g компактна, она являлась бы прямым произведением g' и некоторой другой подгруппы g''. Но если X_ρ принадлежит g'', то формулы (7) показывают, что в силу равенства $c_{ij\rho}$ нулю $c_{\rho ij}$ также равны нулю. Следовательно, g'' — нормальный делитель в G, что невозможно.

Теперь предположим, что существует связная группа G', содержащая G в качестве подгруппы и оставляющая инвариантной метрику пространства. Группа G' не может быть полупростой, так как коммутаторы (X_iX_j) уже не порождали бы всех преобразований новой подгруппы g', оставляющей неподвижной начальную точку. Поэтому пространство, будучи неприводимым, может быть только эвклидовым, что противоречит предположению. Этим наше утверждение доказано.

III. КОМПАКТНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

68. Оставим локально эвклидовы пространства в стороне. Поэтому группа G является простой или полупростой и компактной.

Если компактная группа G проста и допускает инволютивный автоморфизм $\mathcal{A}$, оставляющим инвариантными преобразования некоторой связной подгруппы g, легко видеть, что эта подгруппа g также компактна. *Соответственное симметрическое пространство $\mathcal{E}$ необходимо является неприводимым.* В самом деле, если бы подгруппа γ присоединенной группы Γ, соответствующая подгруппе g группы G, оставляла бы инвариантными линейное семейство $e_1X_1 + \ldots + e_\nu X_\nu$ $(\nu < n)$, преобразования X_i и (X_iX_j), индексы i и j которых принимают значение $1, 2, \ldots, \nu$, порождали бы нормальный делитель группы G, что невозможно. Мы получим, таким образом, весьма общий класс неприводимых симметрических пространств.

Предположим теперь, что группа G, по крайней мере в малом, является прямым произведением нескольких простых групп $G_1, G_2, \ldots, G_h$. Автоморфизм $\mathcal{A}$ переведет G_1 в одну из других групп-множителей. Так как этот автоморфизм инволютивный, то он будет осуществлять над группами-множителями инволютивную перестановку. Если $h > 2$, мы можем рассматривать G как прямое произведение двух групп G'_1, G'_2, каждая из которых инвариантна относительно $\mathcal{A}$. Соответственная подгруппа g будет прямым произведением двух подгрупп g'_1 и g'_2 групп G'_1 и G'_2. Отсюда непосредственно видно, что пространство $\mathcal{E}$ является произведением пространств, соответствующих подгруппам g'_1 и g'_2. Оно, таким образом, является приводимым.

Единственным случаем, когда пространство может быть неприводимым при полупростой группе G, является, таким образом, тот случай, когда группа G есть прямое произведение двух простых групп G_1 и G_2, изоморфных между собой, и когда автоморфизм $\mathcal{A}$ переводит каждый элемент группы G_1 в соответственный элемент G_2.

69. Обозначим в том случае, когда группа G полупроста, соответствующие друг другу элементы ее групп-множителей через S_a и Σ_a. Вращениями, инвариантными относительно $\mathcal{A}$, являются преобразования $S_a\Sigma_a$, а сдвигами — преобразования $S_a\Sigma_a^{-1}$, обратные своим сопряженным преобразованиям $S_a^{-1}\Sigma_a$.

Среди всех преобразований группы G вида

$$S_a\Sigma_b g = S_a\Sigma_b S_u\Sigma_u,$$

переводящих O в точку M пространства, имеется одно, и только одно, преобразование, принадлежащее к группе G_1, —

это преобразование $S_a S_b^{-1}$. *Поэтому пространство $\mathscr{E}$ в данном случае можно рассматривать как пространство простой группы G_1.* Если мы применим к точке S_x пространства $\mathscr{E}$ преобразование $S_a \Sigma_b$, мы получим преобразование $S_a \Sigma_b S_x$, или, вернее, множество преобразований:

$$S_a \Sigma_b S_x g = S_a S_x S_b^{-1} g.$$

Поэтому общее движение пространства определяется соотношением

$$S_{x'} = S_a S_x S_b^{-1}.$$

Обозначим бесконечно малые преобразования группы G_1 через $X_1, X_2, \ldots, X_r$, а соответствующие им преобразования группы G_2 через $Y_1, Y_2, \ldots, Y_r$. Тогда бесконечно малые вращения будут иметь вид

$$U_i = X_i + Y_i,$$

а бесконечно малые сдвиги —

$$V_i = X_i - Y_i.$$

Форма — $\varphi(e)$, соответствующая группе G, является суммой форм — $\varphi(e)$, соответствующих обеим группам G_1 и G_2, каждая из которых является суммой квадратов r параметров. Отсюда следует, что ds^2 пространства группы G_1 имеет вид

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \ldots + \omega_r^2.$$

Симметрия относительно начала заменяет $S_x g$ на $\Sigma_x g$ или $S_x^{-1} g$. Поэтому она определяется соотношением

$$S_{x'} = S_x^{-1}.$$

При этой операции формы ω_i заменяются на формы $-\breve{\omega}_i$. Таким образом, мы получим соотношение

$$\omega_1^2 + \ldots + \omega_r^2 = \breve{\omega}_1^2 + \ldots + \breve{\omega}_r^2.$$

В пространстве $\mathscr{E}$ существует два замечательных семейства движений — *левые сдвиги* $S_{x'} = S_a S_x$ и *правые сдвиги* $S_{x'} = S_x S_b$. В частном случае, когда G_1 — группа вращений обычного пространства, пространство $\mathscr{E}$ является трехмерным эллиптическим пространством, которое, как известно, допускает два семейства сдвигов в смысле Клиффорда [75]

ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА

[1] Подробное обоснование понятия группового пространства — см. статью этого сборника „Теория конечных непрерывных групп и топология“; гл. I и II; групповое пространство называется в этой статье просто *группой Ли*. Параметры $a_1, \ldots, a_r$, т. е. координаты в групповом пространстве, вообще говоря, могут быть введены лишь локально.

[2] Таким образом, векторы $\overrightarrow{ab}$ и $\overrightarrow{a'b'}$ равны *в первом смысле*, если T_a в T_b и $T_{a'}$ в $T_{b'}$ переводятся умножением на один и тот же элемент *слева*, и равны *во втором смысле*, если имеет место то же самое, но с умножением *справа*.

[3] Требуемое свойство сформулировано недостаточно точно; по существу речь идет о том, что преобразования $T_bT_a^{-1}$ при *переменных* a, b образуют ту же (а не более широкую) совокупность, как и при *переменных* a и как-либо *фиксированных* b. В грубой формулировке это выглядит так, что преобразования $T_bT_a^{-1}$ при произвольных a, b зависят не от $2r$ параметров, как можно было ожидать, а лишь от r параметров.

[4] Величины ω^i, ω_j^i суть при этом любые линейные дифференциальные формы от координат точки (причем ω^i линейно независимы). В „Геометрии римановых пространств“ Картана рассматривается это построение с той разницей, что там 1) формы ω_j^i выводятся из римановой метрики, в то время как в случае произвольной аффинной связности они произвольны, 2) формы ω^i совпадают с дифференциалами dx^i координат пространства, чего при желании можно добиться и в общем случае за счет выбора натурального репера в каждой точке (векторы которого касаются координатных линий).

[5] Пространство аффинной связности в изложении Картана строится следующим образом. Рассмотрим n-мерное многообразие, отнесенное к координатам $x^1, \ldots, x^n$ (координаты можно ввести по крайней мере в окрестности каждой точки). В каждой точке $M(x^1, \ldots, x^n)$ зададим аффинный репер в виде n линейно независимых векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ и будем представлять его себе помещенным в n-мерное аффинное пространство A_n. Это пространство будет, таким образом, иметь с нашим многообразием общую точку M и общие векторы в точке M. Действительно, любой вектор $\overline{\xi}$ в точке M может быть разложен по векторам репера:

$$\overline{\xi} = \sum_k \xi^k \mathbf{e}_k, \qquad (1)$$

где $\xi^1, \ldots, \xi^n$ — координаты вектора ξ, и тем самым ξ переносится в аффинное пространство A_n.

Аффинные пространства A_n, прикрепленные таким образом по одному к каждой точке M нашего многообразия, мы будем называть *локальными аффинными пространствами.*

Наше многообразие будет называться *пространством аффинной связности*, если мы установим аффинное соответствие между локальными аффинными пространствами A_n и A'_n, прикрепленными к бесконечно близким точкам $M(x^1, \ldots, x^n)$ и $M'(x^1+dx^1, \ldots, x^n+dx^n)$ нашего многообразия (при любом выборе этих точек). Это соответствие можно задать, указав то положение, которое займет репер пространства A'_n после отображения A'_n на A_n. Для этого нужно указать смещение отображенной точки M' по сравнению с M и разложение отображенных векторов e'_i относительно репера в пространстве A_n.

Смещение отображенной точки M' мы будем задавать разложением вектора $\overline{MM'} = d\mathbf{r}$:

$$d\mathbf{r} = \sum_k \omega^k \mathbf{e}_k. \tag{2}$$

В силу предположений непрерывности и дифференцируемости, которые здесь молчаливо подразумеваются, отображенные векторы $\mathbf{e}'_i$ бесконечно мало отличаются от $\mathbf{e}_i$, так что можно записать

$$\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}_i + d\mathbf{e}_i, \tag{3}$$

причем $d\mathbf{e}_i$ мы будем разлагать по векторам репера:

$$d\mathbf{e}_i = \sum_k \omega_i^k \mathbf{e}_k. \tag{4}$$

Коэффициенты разложений ω^k, ω_i^k вполне, как мы видим, определяют аффинную связность. Они зависят, конечно, от выбора точек M, M', и мы будем считать, что они выражаются линейными дифференциальными формами $\omega^k(d)$, $\omega_i^k(d)$ от координат $x^1, \ldots, x^n$. Для произвольного пространства аффинной связности эти формы можно задавать произвольно.

Если в пространстве аффинной связности задана кривая $x^i = x^i(t)$, то для элементов этой кривой коэффициенты ω^k, ω_i^k будут представлять собой, очевидно, определенные функции параметра t, умноженные на dt. Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений (2), (4) относительно неизвестных функций — векторов $\mathbf{r}$, $\mathbf{e}_i$, рассматриваемых в пространстве $\overset{0}{A}_n$ в начальной точке пути $M_0(t_0)$. При этом мы ставим начальные условия при $t = t_0$:

$$\mathbf{r} = 0; \quad \mathbf{e}_i = \overset{0}{\mathbf{e}}_i \text{ (векторы репера в } M_0).$$

В результате интегрирования $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{r}$ окажутся вектор-функциями от t в пространстве $\overset{0}{A}_n$ точки M_0 и будут давать нам аффинное отображение пространства A_n в произвольной точке пути $M(t)$ на A_n^0. Наглядный смысл этого отображения состоит в том, что мы движемся „бесконечно малыми шагами“ по данному пути, отображая при каждом шаге A_n в последующей точке на A_n в предыдущей точке согласно установленной в пространстве связности, и через „цепь“ таких отображений получаем отображение A_n в конечной точке на A_n в начальной точке пути.

Особенно интересен случай, когда проделанный путь замкнут и мы возвращаемся в точку M_0. Тогда A_n^0 испытает аффинное отображение на себя. Группу, порождаемую в A_n^0 этими аффинными отображениями при всевозможных замкнутых путях обхода (начинающихся и кончающихся в M_0), Картан называет *группой голономии* данного пространства аффинной связности (эта группа с точностью до изоморфизма одна и та же для всех точек M_0).

Для характеристики данной геометрии аффинной связности очень существенно рассмотреть бесконечно малое преобразование группы голономии, отвечающее бесконечно малому циклу (замкнутому пути обхода). Оно состоит из сдвига на некоторый вектор $\sum_i \Omega^i \mathbf{e}_i$ и из некоторого преобразования векторов репера:

$$d\mathbf{e}_i = \sum_j \Omega_i^{\cdot j} \mathbf{e}_j.$$

Пусть цикл имеет вид бесконечно малого „параллелограмма“. Тогда Ω^i и $\Omega_i^{\cdot j}$ суть кососимметрические билинейные формы от двух рядов дифференциалов $dx^k, \delta x^k$, отвечающих тем двум бесконечно малым смещениям из данной точки, на которых построен „параллелограмм“.

Для определенности считаем, что обход начинается со смещения dx^k. Тогда формы Ω^i, $\Omega_i^{\cdot j}$ могут быть вычислены по формулам

$$\Omega^i(d, \delta) = d\omega^i(\delta) - \delta\omega^i(d) - \sum_k (\omega^k(d)\, \omega_k^{\cdot i}(\delta) - \omega^k(\delta)\, \omega_k^{\cdot i}(d)),$$

$$\Omega_i^{\cdot j}(d, \delta) = d\omega_i^{\cdot j}(\delta) - \delta\omega_i^{\cdot j}(d) - \sum_k (\omega_i^{\cdot k}(d)\, \omega_k^{\cdot j}(\delta) - \omega_i^{\cdot k}(\delta)\, \omega_k^{\cdot j}(d)).$$

Эти же выражения даны у Картана (n° **29**, (9), (10)) в его сокращенных обозначениях.

Форма Ω^i характеризует так называемое *кручение*, а Ω_i^j — так называемую *кривизну* пространства аффинной связности.

Выбор репера $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ в каждой точке пространства аффинной связности можно специализировать таким образом, чтобы формы $\omega^i(d)$ совпадали просто с дифференциалами координат dx^i. В самом деле, если $\omega^k(d) = \sum_j a_j^{\cdot k}\, dx^j$, то

$$d\mathbf{r} = \sum_k \omega^k \mathbf{e}_k = \sum_j dx^j \sum_k a_j^{\cdot k} \mathbf{e}_k.$$

Таким образом, достаточно принять $\sum_k a_j^{\cdot k} \mathbf{e}_k$ за векторы нового репера (что всегда можно сделать, *предполагая* ω^i *линейно независимыми*). Новые ω^i совпадают с dx^i.

Записывая далее $\omega_j^{\cdot i}$ в развернутом виде

$$\omega_j^{\cdot i} = \sum_k \Gamma_{jk}^i dx^k,$$

мы получаем выражение Ω^i:

$$\Omega^i(d, \delta) = -\sum_{k,j} \Gamma_{kj}^i (dx^k \delta x^j - \delta x^k dx^j).$$

В случае симметрии коэффициентов связности Γ_{kj}^i по нижним индексам кручение равно нулю.

В „Геометрии римановых пространств“ Картана (а риманово пространство обладает аффинной связностью) используются перечисленные упрощения.

[6] Из уравнений (14) вычисляются значения $dx_1, \ldots, dx_n$, которые отвечают переходу от $x_1, \ldots, x_n$, полученных из $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ преобразованием T_a^{-1} к $x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n$, полученным из $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ преобразованиями T_{a+da}^{-1}. По первой теореме Ли эти значения $dx_1, \ldots, dx_n$ могут быть записаны в компактной форме (15), вполне аналогичной (8): $df = -\sum_1 \omega^k X_k f$ (15) вместо $df = \sum_{k=1}^{r} \breve{\omega}^k X_k f$ (8).

Действительно, по существу (15) есть не что иное, как формула (8), записанная для перехода от T_b к T_{b+db}, где $T_b = T_a^{-1}$; при этом $\breve{\omega}^k$, непосредственно выражающиеся через b, db, могут быть выражены и через a, da, и в таком виде обозначаются $-\omega^k$.

Итак, бесконечно малое преобразование $T_{a+da}^{-1} T_a$ выражается согласно (15), а $T_a^{-1} T_{a+da}$ отличается от него лишь знаком и выражается, следовательно, как $\sum_{k=1}^{r} \omega^k X_k$.

[7] Действительно, пусть значения $\breve{\omega}^k$ выбраны в каждой точке так, что они определяют контравариантный вектор, фиксированный во второй связности. Тогда соответствующие значения ω^i остаются константами. Значит ковариантный вектор $u_1^i, u_2^i, \ldots, u_r^i = v_1, v_2, \ldots, v_r$ обладает тем свойством, что в результате „скалярного произведения“ с любым контравариантным вектором $\breve{\omega}^1, \ldots, \breve{\omega}^r$, фикси-

рованным во второй связности, он дает константу:

$$\sum_k u^i_k \breve{\omega}^k = \text{const}.$$

Это значит (по определению), что и рассматриваемый ковариантный вектор фиксирован во второй связности.

Итак, $\sum v_s \breve{\omega}^s = \text{const}$. После дифференцирования:

$$\sum dv_s \breve{\omega}^s + \sum v_s d\breve{\omega}^s = 0.$$

Заменяя здесь $d\breve{\omega}^s$, согласно (19),

$$d\breve{\omega}^s = -\sum_{j,k} c^s_{jk} \breve{\omega}^j (d)\, \breve{\omega}^k$$

и учитывая, что равенство должно иметь место тождественно относительно $\breve{\omega}^k$, получаем (21).

[8] Следует иметь в виду, что *равенство* отрезков на различных геодезических, установленное в n°15, не имеет в сущности смысла, так как в общем случае возможно, что „равные“ в этом смысле отрезки на одной и той же геодезической окажутся фактически неравными. Поэтому отрезки, описываемые точками b, b', следует считать не равными, а пропорциональными.

[9] При описанной конструкции параллельного переноса вдоль бескоиечно малого отрезка геодезической допускается ошибка бесконечно малая третьего порядка *относительно размеров этого отрезка*. Размер переносимого вектора рассматривается как независимая бесконечно малая величина, причем относительно нее учитываются лишь бесконечно малые первого порядка.

[10] Уточним сказанное в тексте. Рассмотрим сначала многообразие *всевозможных* аффинных реперов в произвольном r-мерном пространстве. Тогда любая аффинная связность, заданная в этом пространстве, будет выражаться линейными дифференциальными формами ω^i, $\omega_k^{\cdot j}$ от r^2+r параметров, определяющих репер (т. е. точку плюс r линейно независимых векторов $X_1, \ldots, X_r$ в иeй). А именно при переходе от данного репера к бесконечно близкому бесконечно малый сдвиг точки выражается вектором

$$\sum_k \omega^k X_k, \qquad \text{(A)}$$

а векторы нового репера отличаются от векторов старого репера (параллельно перенесенного в новую точку) приращениями вида

$$dX_i = \sum_j \omega_i^{\cdot j} X_j. \qquad \text{(B)}$$

Кручение и кривизна этой аффинной связности выражаются билинейными дифференциальными формами (см. n° 29):

$$\Omega^i = (\omega^i)' - \sum_k [\omega^k \omega_k^{\cdot i}], \qquad \text{(C)}$$

$$\Omega_i^{\cdot j} = (\omega_i^{\cdot j})' - \sum_k [\omega_i^{\cdot k} \omega_k^{\cdot j}], \qquad \text{(D)}$$

которые могут быть тождественно разложены по внешним произведениям *только* форм ω^i:

$$\Omega^i = \sum_{(kl)} S^{i}_{kl} [\omega^k \omega^l], \quad \Omega_i^j = \sum_{(kl)} R_{i\cdot\ kl}^{\cdot j} [\omega^k \omega^l]. \tag{E}$$

Этот факт вытекает и из геометрического смысла кривизны и кручения и из формальных выкладок. Коэффициенты $S^i_{lk} = - S^i_{kl}$, $R_{i.\ kl}^{\cdot j} = - R_{i,\ lk}^{\cdot j}$ образуют соответственно тензор кручения и тензор кривизны (тензор Римана).

Возможность разложений (E) показана в конце этого примечания.

Рассмотрим теперь в групповом пространстве третью аффинную связность. Так как кручение ее равно нулю, то

$$\Omega^i = 0, \quad (\omega^i)' = \sum_k [\omega^k \omega_k^{\cdot i}]. \tag{F}$$

Кроме того, согласно D,

$$(\omega_i^{\cdot j})' = \sum_k [\omega_i^{\cdot k} \omega_k^{\cdot j}] + \Omega_i^j = \sum_k [\omega_i^{\cdot k} \omega_k^{\cdot j}] + \sum_{(kl)} R_{i,\ kl}^{\cdot j} [\omega^k \omega^l]. \tag{G}$$

Формулы (F) и (G) имеют место, конечно, и в любом пространстве аффинной связности без кручения.

В тексте рассматривается пфаффова система:

$$\omega^\alpha = 0, \quad \omega_i^{\cdot\alpha} = 0 \quad (\iota = 1, \ldots, p; \ \alpha = p+1, \ldots, r) \tag{H}$$

Вычислим внешние производные левых частей, пользуясь (F) и (G) и подставляя в эти выражения $\omega^\alpha = \omega_i^{\cdot\alpha} = 0$. Получим

$$(\omega^\alpha)' = \sum_{k=1}^{p} [\omega^k \omega_k^{\cdot\alpha}] + \sum_{\beta=p+1}^{r} [\omega^\beta \omega_\beta^{\cdot\alpha}] = 0. \tag{I}$$

И аналогично

$$(\omega_i^{\cdot\alpha})' = \sum_{(kl)} R_{i\cdot\ jk}^{\cdot\alpha} \ [\omega^j \omega^k]. \tag{J}$$

Ограничимся теперь только семейством нормальных реперов, как это сделано в тексте. Число параметров уменьшится, но все формулы остаются верными. По определению, нормальный репер равен в первом смысле или самому основному реперу $X_1, \ldots, X_r$ в начальной точке, или реперу, полученному из него преобразованием присоединенной группы. Как показано в n° 61, во всех нормальных реперах компоненты тензора $R_{i\cdot kl}^{\cdot j}$ имеют одно и то же значение, а именно

$$R_{i.\ jk}^{\cdot j} = \frac{1}{4} \sum_{\rho} c_{jk}^{\cdot\cdot\rho} c_{\rho i}^{\cdot\cdot l}. \tag{K}$$

Предполагая существование вполне геодезической поверхности, на которой пфаффова система (H) удовлетворяется (формулы (8) и (9) оригинала), причем $\omega^1, \ldots, \omega^p$ остаются линейно независимыми, получаем на этой поверхности $(\omega_i^{\cdot\alpha})' = 0$, и (J) дает нам

$$R_{i\cdot\, jk}^{\cdot\alpha} = 0 \quad \begin{matrix}(i, j, k = 1, 2, \ldots, p) \\ (\alpha = p + 1, \ldots, r).\end{matrix} \tag{L}$$

Согласно (K), получаем

$$\sum_{\rho} c_{jk}^{\cdot\cdot\rho} c_{\rho i}^{\cdot\cdot\alpha} = 0, \tag{M}$$

т. е. коммутаторы $((X_j X_k) X_i)$ *разлагаются только по*

$$X_1, \ldots, X_p. \tag{N}$$

Обратно, рассмотрим пфаффову систему (H) в семействе нормальных реперов *в предположении, что* (N) имеет место. Тогда справедливы формулы (M), а следовательно, и (L), и уравнения (J) дают

$$(\omega_i^{\cdot\alpha})' = 0.$$

Кроме того, согласно (I), $(\omega^\alpha)' = 0$, и значит $(\omega_i^{\cdot\alpha})'$ и $(\omega^\alpha)'$ обращаются в нуль после подстановки $\omega^\alpha = 0$, $\omega_i^{\cdot\alpha} = 0$ из самой пфаффовой системы (H), а значит система (H) вполне интегрируема (и мы можем построить сколько угодно соответствующих вполне геодезических поверхностей.)

Возвращаясь к произвольному пространству аффинной связности, выведем разложение (E).

Ограничимся сначала семейством реперов от r параметров, заданных *по одному* в каждой точке пространства. Векторы этих реперов обозначим $Y_1, \ldots, Y_r$. Формы ω^k, $\omega_i^{\cdot j}$ для этого семейства реперов обозначим $\overset{*}{\omega}{}^k$, $\overset{*}{\omega}{}_i^{\cdot j}$.

В этом случае наличие разложений (E) очевидно, так как r форм $\overset{*}{\omega}{}^k$ от r параметров образуют полную систему линейно независимых форм.

Перейдем теперь к произвольным реперам $(X_1, \ldots, X_r)$; их векторы могут быть заданы через векторы $Y_1, \ldots, Y_r$ линейным преобразованием

$$X_i = a_i^{\cdot 1} Y_1 + \ldots + a_i^{\cdot r} Y_r, \tag{O}$$

где $a_i^{\cdot j}$ — независимые параметры (теперь полное число параметров $r^2 + r$).

Выясним, как будут выражаться формы $\overset{*}{\omega}{}^k$, $\overset{*}{\omega}{}_i^{\cdot j}$ через ω^k, $\omega_i^{\cdot j}$, Подставим (O) в (A):

$$\sum_k \omega^k X^k = \sum_{k,\, l} \omega^k a_k^{\cdot l} Y_l = \sum \overset{*}{\omega}{}^l Y_l,$$

откуда

$$\overset{*}{\omega}{}^l = \sum_k a_k^{\cdot l} \omega^k. \tag{P}$$

Далее подставим (O) в (B):

$$\sum_k (da_i^{\cdot k} Y_k + a_i^{\cdot k} dY_k) = \sum_{j,k} \omega_i^{\cdot j} a_j^{\cdot k} Y_k.$$

Так как $dY_j = \sum_j \overset{*}{\omega}{}_j^{\cdot k} Y_k$, то сравнивая коэффиценты при Y_k, получим

$$da_i^{\cdot k} + \sum_j a_i^{\cdot j} \overset{*}{\omega}{}_j^{\cdot k} = \sum_j \omega_i^{\cdot j} a_j^{\cdot k}. \tag{Q}$$

Берем почленно внешнюю производную от (P):

$$(\overset{*}{\omega}{}^l)' = \sum_k [da_k^{\cdot l} \omega^k] + \sum_k a_k^{\cdot l} (\omega^k)'.$$

Вставим сюда $da_k^{\cdot l}$ из (Q):

$$(\overset{*}{\omega}{}^l)' + \sum_{k,j} a_k^{\cdot j} [\overset{*}{\omega}{}_j^{\cdot l}\, \omega^k] = \sum_k a_k^{\cdot l} \{(\omega^k)' + \sum_i [\omega_i^{\cdot k} \omega^i]\}.$$

Отсюда окончательно:

$$\overset{*}{\Omega}{}^l = \sum_k a_k^{\cdot l} \Omega^k. \tag{R}$$

Далее берем почленно внешнюю производную от (Q) и аналогично убеждаемся, что

$$\sum_j a_i^{\cdot j} \overset{*}{\Omega}{}_j^{\cdot k} = \sum_j a_j^{\cdot k} \Omega_i^{\cdot j}. \tag{S}$$

Уравнения (R) и (S) показывают, что Ω^k, $\Omega_i^{\cdot j}$ можно выразить через $\overset{*}{\Omega}{}^k$, $\overset{*}{\Omega}{}_i^{\cdot j}$, следовательно, они целиком разлагаются по $[\overset{*}{\omega}{}^k \overset{*}{\omega}{}^l]$, а значит (в силу (P)) и по $[\omega^k \omega^l]$.

[11] Первые p векторов любого нормального репера $U_1, \ldots, U_p$, рассматриваемые как векторы в первом смысле, отвечают бесконечно малым преобразованиям, которые или совпадают с $X_1, \ldots, X_p$, или получены из них некоторым преобразованием присоединенной группы (по определению нормального репера). Так как преобразование присоединенной группы $T_\xi \to T_a T_\xi T_a^{-1}$ есть автоморфизм группы G, то разложения простых и двойных коммутаторов от U_i по самим U_i будут в точности такими же, как и для X_i. Следовательно, $((U_j U_k) U_l)$ при $j, k, l \leqslant p$ разлагаются по $U_1, \ldots, U_p$, совершенно так же, как это имеет место для разложения $((X_j X_k) X_l)$ по $X_1, \ldots, X_p$.

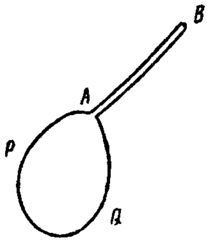
[12] Как было отмечено уже в n° 67, нормальный репер (см. n° 62) остается нормальным в процессе параллельного перенесения в связности без кручения. Действительно, это параллельное перенесение на каждом бесконечно малом участке определяется как "среднее арифметическое" двух перенесений без кривизны. Между

тем при первом перенесении репер вообще не меняется (мы рассматриваем все время равенство векторов в первом смысле!), а при втором перенесении репер подвергается бесконечно малому преобразованию присоединенной группы; а такое преобразование переводит нормальный репер снова в нормальный.

В частности, после параллельного обнесения по циклу нормальный репер возвращается в прежнюю точку, оставаясь нормальным, т. е. преобразованным при помощи некоторого преобразования присоединенной группы.

[18] Чтобы оценить смысл последних заключений, нужно иметь в виду следующее. Рассмотрим произвольное пространство аффинной связности. Группа голономии в данной точке A порождается теми преобразованиями аффинного („декартова") репера, которые он испытывает после параллельного обнесения по замкнутому контуру (циклу) с возвращением в прежнюю точку. Если рассматривать бесконечно малые циклы, то мы будем получать бесконечно малые преобразования группы голономии.

Если в любой другой точке B выбрать репер, получающийся из репера в точке A его параллельным перенесением по какому-нибудь пути AB, то группа голономии в точке B будет состоять в точности из тех же преобразований репера, как и в точке A (черт. 11). Действительно, каждому преобразованию репера в точке A в результате обхода по циклу $APQA$ (обозначение условное) будет отвечать в точности такое же преобразование репера в точке B в результате обхода по циклу $BAPQAB$ (равно как и обратно).



Черт. 11.

Если рассматривать бесконечно малые циклы в точке A, то им будут отвечать бесконечно малые преобразования группы голономии; аналогично и в произвольной другой точке B и т. д. При этом мы считаем, что группы голономии в разных точках отождествлены вышеуказанным образом.

Преобразования, отвечающие бесконечно малым циклам в точке A, вообще говоря, не порождают всей группы голономии. Но если рассмотреть такие преобразования для всех точек A, B, ... и построить какой-либо содержащий их нормальный делитель группы голономии (или, что приводится к тому же, нормальный делитель какой-либо более широкой группы), то он совпадет со всей группой голономии (по этому поводу см. Картан [15]).

То же самое можно выразить и так: группа голономии порождается полностью бесконечно малыми преобразованиями, отвечающими всевозможным бесконечно малым циклам во всевозможных точках при всевозможных выборах репера (однако обязательно принадлежащего к многообразию реперов, получаемых параллельным перенесением начального репера в точке A в произвольные точки по произвольным путям).

Все сказанное относится и к группе γ, которая по существу является факторгруппой группы голономии по ее нормальному делителю, состоящему из сдвигов.

Вернемся теперь к аффинной связности без кручения в групповом пространстве. Будем рассматривать в каждой точке репер, полученный параллельным перенесением из начального репера в начальной точке; такой репер будет во всяком случае нормальным. Как выяснено в тексте, преобразования группы γ, отвечающие бесконечно малым циклам в любой точке, представляют собой всевозможные бесконечно малые преобразования производной группы присоединенной группы. Но производная группа присоединенной группы есть ее нормальный делитель, а следовательно, и подавно нормальный делитель группы γ (которая входит в присоединенную группу и включает в себя ее производную группу).

Отсюда следует, согласно сказанному выше, что производная группа присоединенной группы исчерпывает всю группу γ.

[14] Это же можно получить и гораздо более непосредственно: первая группа уравнений (7) показывает, что реперы, соответствующие друг другу в результате интегрирования системы (7), соответствуют друг другу и геометрически в результате точечного преобразования пространства, отвечающего тому же решению системы (7). Поэтому, в частности, когда точечное преобразование является тождественным, преобразование реперов также тождественное.

[15] Последняя формулировка является неточной. Поясним весь вывод.

Мы включили фиксированный репер в начальной точке в максимальное *связное* многообразие реперов в той же точке, в которой тензор кривизны $R_{k,hl}^{j}$ имеет численно те же компоненты. Реперы этого многообразия переходят один в другой посредством преобразований связной группы h, зависящей от s параметров. Это связное s-мерное многообразие реперов мы переносим параллельно в другие точки пространства (отметим, между прочим, что все это построение нужно рассматривать или в малом, или предполагая пространство односвязным, иначе после обноса по замкнутому контуру это s-мерное многообразие может перейти в *другое* s-мерное многообразие реперов). В результате мы имеем $(r+s)$-мерное многообразие реперов, за пределы которого мы и не выходим в пп° 77—78.

Но если имеется линейная подстановка

$$\overline{u^i} = \sum_k a_k^i u^k, \tag{A}$$

сохраняющая численные значения R_{khl}^{j}, но не принадлежащая к h, то эта подстановка переводит наше многообразие реперов в другое многообразие реперов с совершенно аналогичными свойствами. Говоря точнее, мы каждый репер нашего многообразия преобразуем так, что координаты каждого инвариантного вектора преобразуются согласно (A). При этом у нового репера мы сохраняем те же параметры a, b, которые имел старый. Старое и новое многообразия реперов, конечно, общих реперов не имеют, так как они являются максимальными связными многообразиями реперов с фиксированными значениями $R_{k,hl}^{j}$.

Смысл n°80 заключается в том, чтобы показать существование *изоморфизма, переводящего любой данный репер в* любой данный репер при условии, что тензор кривизны $R_{k,hl}^{\cdot j}$ имеет в этих реперах численно равные компоненты. Здесь, как впрочем и в n° 78, следует иметь в виду, что *теорема справедлива, вообще говоря, лишь в малом; на пространство в целом она переносится лишь в предположении его односвязности и, конечно, полноты (каждую геодезическую можно продолжать неограниченно в смысле роста натурального параметра на ней).* Очевидно, достаточно доказать теорему для двух реперов, из которых один взят из старого, а другой из нового многообразия (в n° 78 рассмотрен случай, когда оба репера взяты из одного многообразия).

Доказательство ведется по существу так же, как и в n°78. А именно: уравнения (17) можно переписать в виде

$$\bar{\omega}^i = \sum a_k^i \omega^k, \qquad \bar{\omega}_k^{\cdot j} = \sum_i \sum_l \overset{*}{a}_k{}^i a_l{}^j \omega_i^{\cdot l};$$

где $\overset{*}{a}_k{}^i$ — матрица, обратная a_k^i. При этом $\bar{\omega}^i$, $\bar{\omega}_k^{\cdot j}$ означают формы ω^i, $\omega_k^{\cdot j}$ *в старом* многообразии реперов (лишь с изменением обозначений параметров a, b на a', b'), а правые части уравнений — те же формы ω^i $\omega_k^{\cdot j}$ *в новом* многообразии реперов; при выше указанной подстановке над реперами старого многообразия формы ω^i, $\omega_k^{\cdot j}$ подвергаются именно такому преобразованию. Поэтому смысл уравнений (17) совершенно такой же, как и уравнений (7), и их тождественная интегрируемость означает наличие изоморфизма, переводящего любой данный репер старого многообразия в любой данный репер нового многообразия.

[16] Группа H (n°79) — это максимальная связная группа аффинных изоморфизмов в данном симметрическом пространстве аффинной связности без кручения. В дальнейшем по отношению к группе H делаются те же построения, которые ранее делались по отношению к группе G. Здесь возможны две точки зрения:

1. Данное симметрическое пространство рассматривается в малом, в малом же рассматриваются и аффинные изоморфизмы, и группа H понимается как локальная группа Ли. Дальнейшие построения тогда тоже нужно рассматривать в малом и с соответствующими оговорками.

2. Данное симметрическое пространство рассматривается в целом, причем оно предполагается односвязным и полным. Тогда, как уже указывалось в примечании [15], каждый локально заданный изоморфизм однозначно распространяется на все симметрическое пространство, и группа задается в целом, т. е. имеет смысл говорить о группе всех изоморфизмов, в частности, о ее максимальной связной подгруппе H.

[17] Полученные формулы представляют собой перенесение на ространство группы H формул n° 63 для пространства группы G:

$$\omega_i^{\cdot j} = \sum_k C_{ki}^{\cdot\cdot j} \theta^k. \tag{A}$$

Последние же формулы, имеющие место в многообразии нормальных реперов, получаются из следующих соображений. Формы $\omega_i^{\cdot j}$ выражают коэффициенты линейного преобразования векторов нормального репера при переходе к бесконечно близкому нормальному реперу, причем при сравнении реперов второй из них переносится параллельно (в третьей связности) в точку приложения первого. Так как при этом он остается нормальным, то дело сводится к преобразованию нормального репера в бесконечно близкий репер; а такое преобразование, по определению нормального репера, есть бесконечно малое преобразование *присоединенной* группы. Отсюда и вытекает формула (А). Линейные дифференциальные формы θ^k составлены по отношению к параметрам нормального репера, т. е. по отношению к r координатам точки приложения и s дополнительным параметрам.

[18] Мы применяем сначала формулы (G) примечания [10] в пространстве группы H, затем ограничиваемся нормальными реперами, принадлежащими рассматриваемому геодезическому многообразию V_r, т. е. учитываем, что $\omega^{r+\alpha} = \omega_i^{\cdot j+\alpha} = 0$, и, наконец, вместо $\omega_i^{\cdot j}$, $\omega_{r+\alpha}^{\cdot j}$, $\omega_{r+\alpha}^{\cdot r+\beta}$ подставляем их выраження через X. Аналогично поступаем и с формулами (F) примечання [10]. В результате получаются формулы (20) текста.

[19] Вообще, если мы имеем два симметрических пространства с аффинной связностью без кручения, причем в них можно указать по реперу *с одинаковыми значениями компонент тензора кривизны* $R_{i\cdot jk}^{\cdot l}$, то эти пространства изоморфно отображаются одно на другое, причем заданные реперы переходят один в другой.

Для доказательства достаточно рассмотреть в первом пространстве максимальное связное многообразие реперов с теми же значениями $R_{i\cdot jk}^{\cdot l}$; в этом многообразии (как и вообще в многообразии всех реперов) формы ω^k, $\omega_i^{\cdot j}$ удовлетворяют соотношениям (F), (G) примечания [10]:

$$(\omega^i)' = \sum_k [\omega^k \omega_k^{\cdot i}], \quad (\omega_i^{\cdot j})' = \sum_k [\omega_i^{\cdot k} \omega_k^{\cdot j}] + \sum_{(kl)} R_{i\cdot kl}^{\cdot j} [\omega^k \omega^l]. \tag{A}$$

Совершенно аналогичное построение мы проводим во втором пространстве; формы ω^k, $\omega_i^{\cdot j}$ в многообразии реперов второго пространства обозначим $\overset{*}{\omega}{}^k$, $\overset{*}{\omega}{}_i^{\cdot j}$. Тогда пфаффова система

$$\omega^k = \overset{*}{\omega}{}^k, \quad \omega_i^{\cdot j} = \overset{*}{\omega}{}_i^{\cdot j}$$

будет вполне интегрируемой, так как уравнения

$$(\omega^k)' = (\overset{*}{\omega}{}^k)', \ (\omega_i^{\cdot j})' = (\overset{*}{\omega}{}_i^{\cdot j})'$$

будут удовлетворяться как следствие самой системы — если учесть формулы (А), имеющие место одинаково для ω и $\overset{*}{\omega}$ с одними и теми же значениями констант $R_{i \cdot kl}^{\cdot j}$.

А следовательно, изоморфизм обоих пространств может быть установлен с отображением заданного репера на заданный репер.

Доказанное предложение нужно рассматривать или в малом, или в целом для односвязных пространств.

Оно применимо, в частности, и для групповых пространств с третьей связностью. Тензор кривизны в этом случае имеет вид

$$R_{i,jk}^{\cdot j} = \frac{1}{4} \sum_{\rho} c_{\cdot jk}^{\cdot \cdot \rho} \, c_{\rho i}^{l} = -\frac{1}{4} c_{ijk.}^{\cdot \cdot \cdot l} \ \left(\text{где} \ c_{ijk.}^{\cdot \cdot l} = \sum_{\rho} c_{i\rho \cdot}^{\cdot \cdot l} \, c_{\cdot jk}^{\cdot \cdot \rho}\right).$$

Поэтому равенство численных значений $c_{ijk.}^{\cdot \cdot \cdot l}$ влечет и равенство $R_{i,jk}^{\cdot j}$, а следовательно, и изоморфизм групповых пространств.

[20] Автор хочет заключить отсюда, что обе аффинные связности — заранее заданная и связность в группе G — обладают не только общими геодезическими, но и общими каноническими параметрами вдоль них, а следовательно, совпадают.

Канонический параметр определяется на всякой геодезической пространства аффинной связности тем условием, что при параллельном перенесении вдоль геодезической касательного к ней бесконечно малого вектора отвечающий этому вектору дифференциал канонического параметра в любой точке сохраняет одно и то же значение.

Канонический параметр определяется с точностью до постоянного множителя, так что введение его равносильно установлению *отношений* отрезков одной и той же геодезической.

Однако из того, что при некотором изоморфизме данная геодезическая скользит по себе, нельзя еще сделать вывода, что каждая ее точка сдвигается на один и тот же отрезок (например, преобразование подобия в обычном аффинном пространстве с траекториями — прямыми, выходящими из центра подобия). Поэтому заключение автора не обосновано. Чтобы сделать его законным, нужно усилить определение сдвига: *траектории сдвига не только должны быть геодезическими, но, кроме того, точки каждой траектории должны смещаться на равные между собой отрезки.*

Далее, в n° **90**, это фактически и подразумевается.

[21] Линейные формы $\xi_\beta = \sum_{(ij)} a_{\beta ij} p_{ij}$ $(\beta = 1, 2, \ldots, r)$ имеют, в сущности, назначение в кратком виде представлять бивекторы $a_{\beta ij}$, где i, j — индексы бивектора, а β — его номер.

Преобразования группы Г вместе с векторами подвергают вращению и бивекторы $a_{\beta ij}$, причем каждый из них переходит в линейную комбинацию этих же бивекторов. А именно формула

$$U_\alpha(\xi_\beta) = -\sum_\rho c_{\alpha\beta\rho}\xi_\rho \tag{A}$$

имеет тот геометрический смысл, что в результате бесконечно малого вращения U_α бивектор $a_{\beta ij}$ получает бесконечно малое приращение

$$\delta a_{\beta ij} = -\delta t\sum_\rho c_{\alpha\beta\rho}a_{\rho ij}. \tag{B}$$

А эта формула легко получается из формулы (5). Действительно, в результате вращения U_α каждый вектор x_i преобразуется согласно (3) по закону

$$\delta x_i = \delta t\sum_k a_{\alpha ki}x_k, \tag{C}$$

а бивектор $a_{\beta ij}$ — соответственно по закону, повторяющему формулу С) для каждого из индексов бивектора i и j:

$$\delta a_{\beta ij} = \delta t\sum_k (a_{\alpha ki}a_{\beta kj} + a_{\alpha kj}a_{\beta ik}) =$$

$$= -\delta t\sum_k (a_{\alpha ik}a_{\beta kj} - a_{\beta ik}a_{\alpha kj}) = -\delta t\sum_\rho c_{\alpha\beta\rho}a_{\rho ij}.$$

Последняя замена сделана на основании (5). Мы получили (В).

Заметим еще, — что будет очень существенно для n°20, — что при конечном повороте V бивектора $a_{\beta ij}$ определяемое им преобразование U_β переходит, очевидно, в преобразование

$$VU_\beta V^{-1}.$$

Поэтому если у нас имеется какая-нибудь линейная система бивекторов (линейно зависящих от $a_{\beta ij}$, $\beta = 1, 2, \ldots, r$), инвариантная относительно поворотов группы Г, то бесконечно малые преобразования, отвечающие бивекторам системы, образуют нормальный делитель группы Г.

[22] По поводу совпадения группы голономии с Γ_1 см. также примечание [13].

Далее нужно доказать совпадение Γ_1 с Г, и для этого приходится ввести указанное дополнительное условие, что среди линейных форм

$$\sum_{\rho,\sigma}\xi_\rho A_{\rho\sigma}a_{\sigma kh}$$

имеется r линейно независимых. Оно выражает действительно, что бесконечно малые преобразования V_{kh},

$$V_{kh} = \sum_{\rho,\sigma} A_{\rho\sigma}a_{\sigma kh}U_\rho,$$

отвечающие бесконечно малым циклам и порождающие группу Γ_1, содержат r линейно независимых преобразований, а следовательно, исчерпывают всю группу Г (которая зависит от r параметров). Очевидно, это условие как необходимо, так и достаточно для того, чтобы группа голономии исчерпывала группу Г.

Так как число переменных ξ_ρ равно r, то наше условие равносильно тому, что равенства

$$\sum_{\rho,\sigma} \xi_\rho A_{\rho\sigma} a_{\sigma kh} = 0 \qquad \text{(A)}$$

влекут за собой $\xi_\rho = 0$. Это означает, во-первых, что $\det|A_{\rho\sigma}| \neq 0$, иначе всегда можно было бы подобрать $\xi_\rho \neq 0$ так, чтобы $\sum\limits_\rho \xi_\rho A_{\rho\sigma} = 0$, и равенства (А) имели бы место. Далее, матрицы $a_{\sigma kh}$, получаемые при $\sigma = 1, 2, \ldots, r$, должны быть линейно независимы, иначе мы подобрали бы $\xi_\rho \neq 0$ так, чтобы $\sum\limits_\rho \xi_\rho A_{\rho\sigma} = a_\sigma$, где a_σ — коэффициенты предполагаемой линейной зависимости, и снова (А) имело бы место. *Итак, дополнительное условие сводится к тому, что* $\det|A_{\rho\sigma}| \neq 0$ *и матрицы* $a_{\sigma kh}$ *линейно независимы. По существу это условие нужно ввести в формулировку прямой и обратной основной теоремы.*

[23] Действительно, всевозможные реперы (T') во всевозможных точках A' получены из одного репера (T) в начальной точке A путем его параллельного перенесения по различным путям, а следовательно, образуют *связное многообразие*. Так как каждое преобразование группы G вполне определяется указанием репера (T') в точке A', в который должен перейти начальный репер (T) в точке A, то и группа G будет *связной*.

[24] Согласно формулам (3) n°5, бесконечно малые преобразования группы голономии имеют вид

$$U_\alpha = \sum_{(ij)} a_{\alpha ij}\left(x_i \frac{\partial}{\partial x^j} - x_j \frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

Так как каждое из двух плоских многообразий вращается в самом себе, то

$$a_{\alpha ij} = 0 \quad \text{при } i \leqslant \nu,\ j > \nu.$$

Далее, в силу (4) n°5,

$$\omega_{ij} = 0 \quad \text{при } i \leqslant \nu,\ j > \nu.$$

Наконец, пользуемся уравнениями (2) n°5.

[25] Комплексные переменные $y_1, \ldots, y_\nu$ подвергаются комплексным преобразованиям, когда $x_1, \ldots, x_n$ подвергаются вещественным линейным преобразованиям группы Г. В этом, собственно, и заключается смысл предположения, что комплексное плоское многообразие $y_1 = \ldots = y_\nu = 0$ инвариантно относительно группы Г.

Переменные $\bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_\nu$ подвергаются также комплексным линейным преобразованиям (конечно, с комплексно сопряженными коэффициентами).

Запишем теперь:

$$y_k = X_k + Y_k i, \quad \bar{y}_k = X_k - Y_k i \quad (k = 1, 2, \ldots, \nu). \qquad \text{(A)}$$

Здесь X_k, Y_k — вещественные линейные комбинации $x_1, \ldots, x_n$ и притом линейно независимые (иначе вещественная плоскость $X_1 = \ldots = X_\nu = Y_1 = \ldots = Y_\nu = 0$ была бы инвариантна относительно группы Г). Представим себе, что в квадратичную форму

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \Phi(y_i) + \overline{\Phi}(\overline{y_i}) + \Psi(y_i, \overline{y_j}) \tag{B}$$

мы подставим выражения y_k, $\overline{y_k}$ из (А) и запишем инвариантность этой формы относительно любого преобразования группы Г. Мы получим тождество относительно $x_1, \ldots, x_n$, а следовательно, инвариантность формы (В) будет иметь место и в том случае, когда в качестве $x_1, \ldots, x_n$ мы будем употреблять любые комплексные переменные (подвергая их, разумеется, прежним вещественным линейным преобразованиям группы Г). Но в этом случае X_k, Y_k— тоже любые комплексные переменные, и y_k и $\overline{y_k}$—любые комплексные переменные (не обязательно комплексно сопряженные). Форма (В) останется, следовательно, иивариантной относительно Г, если, в частности, положить $\overline{y_i} = 0$, $y_i \neq 0$, т. е. $\Phi(y_i)$ оказывается инвариантной формой, равно как и $\overline{\Phi}(\overline{y_i})$, а следовательно, и $\Psi(y_i, \overline{y_j})$.

Возвращаемся к прежней точке зрения с вещественными $x_1, \ldots, x_n$.

Скалярный квадрат вектора $\sum xi^2$ есть знакоопределенная форма, инвариантная относительно Г; кроме того, инвариантны вещественные формы $\Phi(y_i) + \overline{\Phi}(\overline{y_i})$ и $\Psi(y_i, \overline{y_j})$. Согласно замечанию в сноске, эти формы должны быть пропорциональны форме $\sum_i xi^2$, что заведомо не имеет места для формы $\Phi(y_i) + \overline{\Phi}(\overline{y_i})$, так как она не знакоопределенная (см. текст). Поэтому она равна нулю, и скалярный квадрат исчерпывается эрмитовой формой $\Psi(y_i, \overline{y_j})$.

[26] Согласно сказанному в примечании [21], группа Г′ есть группа поворотов Г, рассматриваемая, однако, не в пространстве всевозможных векторов x_k, а в пространстве бивекторов x_{ij}, представляющих собой всевозможные линейные комбинации бивекторов $a_{\alpha ij}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, r$. Так как в пространстве бивекторов в n° 19 введена эвклидова метрика, инвариантная при любых поворотах, то группа Г′ будет некоторой группой вращений и с точки зрения пространства бивекторов x_{ij}.

[27] Вычислим

$$U'_\alpha(\xi_\beta + i\xi_{\beta'}) = -\sum_{\rho=1}^{r} (c_{\alpha\beta\rho} + ic_{\alpha\beta'\rho})\,\xi_\rho = -\sum_{\rho = \text{неч.}} (c_{\alpha\beta\rho} + ic_{\alpha\beta'\rho})\,\xi_\rho -$$
$$- \sum_{\rho' = \text{чет.}} (c_{\alpha\beta\rho}' + ic_{\alpha\beta'\rho'})\,\xi_{\rho'}.$$

Полученное выражение должно быть линейной комбинацией $\xi_\rho + i\xi'_\rho$, что возможно лишь в том случае, если коэффициенты при ξ_ρ и $i\xi_{\rho'}$ будут равны, т. е.

$$c_{\alpha\beta\rho} + ic_{\alpha\beta'\rho} = -i\,(c_{\alpha\beta\rho'} + ic_{\alpha\beta'\rho'}),$$

откуда

$$c_{\alpha\beta\rho} = c_{\alpha\beta'\rho'} \text{ и } c_{\alpha\beta'\rho} = -c_{\alpha\beta\rho'}.$$

У нас нештрихованные индексы β, ρ — нечетные, а штрихованные β', ρ' — четные. Обе формулы можно объединить в одну:

$$c_{\alpha\beta\gamma} = (-1)^{\beta+\gamma} c_{\alpha\beta'\gamma'},$$

где β, γ — любые индексы при условии, что β', γ' — дополнительные к ним индексы той же пары (как в тексте).

Отсюда следует (см. текст), что $c_{\alpha\beta\gamma} = 0$, т. е. группа Γ — коммутативная, а все преобразования группы Γ' — тождественные.

[28] Проверим инвариантность формы

$$\varphi(e) = \sum_{\gamma,\delta,\rho,\sigma} e^{\gamma} e^{\delta} c_{\gamma\rho}^{\cdot\,\cdot\,\sigma} c_{\delta\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\rho}$$

относительно преобразований присоединенной группы, т. е. преобразований

$$U_{\alpha}(e^{\gamma}) = \sum_{\beta} c_{\alpha\beta}^{\cdot\,\cdot\,\gamma} e^{\beta}. \qquad \text{(A)}$$

Мы будем писать индексы при e^{β} и последний индекс при $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ вверху, что в большинстве случаев бывает удобнее. Вычислим $U_{\alpha}\varphi(e)$:

$$U_{\alpha}\varphi(e) = 2 \sum_{\gamma,\delta,\rho,\sigma,\beta} c_{\alpha\beta}^{\cdot\,\cdot\,\gamma} e^{\beta} e^{\delta} c_{\gamma\rho}^{\cdot\,\cdot\,\sigma} c_{\delta\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\rho}. \qquad \text{(B)}$$

В силу третьей теоремы Ли структурные константы удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{\gamma} \left(c_{\alpha\beta}^{\cdot\,\cdot\,\gamma} c_{\gamma\beta}^{\cdot\,\cdot\,\sigma} + c_{\rho\alpha}^{\cdot\,\cdot\,\gamma} c_{\gamma\beta}^{\cdot\,\cdot\,\sigma} + c_{\beta\rho}^{\cdot\,\cdot\,\gamma} c_{\gamma\alpha}^{\cdot\,\cdot\,\sigma} \right) = 0.$$

Умножим на $c_{\delta\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\rho}$ и просуммируем по ρ и σ. Получим, перенеся два последних члена в правую часть, равенства:

$$\sum_{\gamma,\rho,\sigma} c_{\alpha\beta}^{\cdot\,\cdot\,\gamma} c_{\gamma\rho}^{\cdot\,\cdot\,\sigma} c_{\delta\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\rho} = -\sum c_{\rho\alpha}^{\cdot\,\cdot\,\gamma} c_{\gamma\beta}^{\cdot\,\cdot\,\sigma} c_{\delta\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\rho} - \sum c_{\beta\rho}^{\cdot\,\cdot\,\gamma} c_{\gamma\alpha}^{\cdot\,\cdot\,\sigma} c_{\delta\sigma}^{\cdot\,\cdot\,\rho} =$$

$$= \sum c_{\rho\alpha}^{\cdot\,\cdot\,\gamma} c_{\gamma\beta}^{\cdot\,\cdot\,\sigma} c_{\sigma\delta}^{\cdot\,\cdot\,\rho} - \sum c_{\gamma\alpha}^{\cdot\,\cdot\,\sigma} c_{\sigma\delta}^{\cdot\,\cdot\,\rho} c_{\rho\beta}^{\cdot\,\cdot\,\gamma}.$$

В последнем выражении вычитаемое отличается от уменьшаемого лишь перестановкой индексов β и δ (и другими обозначениями индексов суммирования: σ, ρ, γ вместо γ, σ, ρ), и после симметрирования по индексам β и δ мы получаем нуль. Но левая часть после симметрирования по β и δ дает, очевидно, коэффициент при $e^{\beta}e^{\delta}$ в (B), который, таким образом, равен нулю, и, следовательно,

$$U_{\alpha}\varphi(e) = 0.$$

Возвращаясь к обозначениям Картана, можно записать (А) в виде

$$U_{\alpha}(e^{\gamma}) = \sum_{\beta} c_{\alpha\beta\gamma} e^{\beta}$$

или, в случае нормального базиса U_{α}, согласно (18),

$$U_{\alpha}(e^{\gamma}) = -\sum_{\beta} c_{\alpha\gamma\beta} e^{\beta}.$$

Но этот закон преобразования совпадает с законом преобразования ξ_γ (n° 20):

$$U_\alpha(\xi_\gamma) = -\sum_\beta c_{\alpha\gamma\beta}\,\xi_\beta,$$

а значит форма $\varphi(\xi)$ также инвариантна (в случае нормального базиса!).

Если квадратичная форма $\varphi(e)$ вырожденная, то линейные уравнения

$$\frac{\partial\varphi(e)}{\partial e^\alpha} = 0 \tag{C}$$

совместны относительно e^ρ и определяют „плоскость“ в пространстве $e^1, \ldots, e^r$. Эта плоскость характеризуется тем, что на ней квадратичная форма $\varphi(e)$ обращается в 0 и, кроме того, стационарна согласно (С).

Вместе с формой $\varphi(e)$ эта плоскость будет инвариантна относительно присоединенной группы (А), а, следовательно, отвечающие ей преобразования $\sum e^\alpha U_\alpha$ образуют нормальный делитель группы Г.

[29] Здесь имеется ссылка на пункт, опущенный в переводе, так что необходимо восполнить получившийся пробел.

Мы получаем формулы (25) следующим образом.

Тензор G_{ij} представляет собой не что иное, как *свернутый тензор кривизны* (так называемый тензор Риччи):

$$G_{ij} = \sum_k R_{ik,\,jk} = \sum_{\rho,\,\sigma,\,k} A_{\rho\sigma}\, a_{\rho ik}\, a_{\sigma jk}.$$

Вместе с тензором $R_{ij,\,kl}$ тензор G_{ij} инвариантен относительно группы Г, т. е. коэффициенты квадратичной формы $\sum G_{ij}x_i x_j$ инвариантны при вращениях группы Г, выполняемых над векторами x_i. Но, кроме того, инвариантен и скалярный квадрат вектора $x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

Обе квадратичные формы могут отличаться лишь постоянным множителем C, иначе при их совместном приведении к каноническому виду получатся инвариантно связанные с ними взаимно ортогональные плоскости, инвариантные, следовательно, и относительно группы Г. А это противоречит нашему предположению о неприводимости рассматриваемого симметрического пространства.

Отсюда мы получаем $G_{ii} = C$, $G_{ij} = 0$ $(i \neq j)$. Остальные формулы (25) получаются в предположении, что Y_α образуют нормальный базис группы Г (n°19), причем этот нормальный базис так специализирован добавочным ортогональным преобразованием, чтобы форма $\sum\limits_{\alpha,\,\beta} G_{\alpha\beta}\eta_\alpha\eta_\beta$ была приведена к каноническому виду $G_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$. В выражениях для $G_{\alpha\alpha}$ использованы формулы (16) n°19.

[30] Уравнения $\dfrac{\partial\varphi}{\partial e_i} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta_\alpha} = 0$ определяют, как мы знаем (примечание [27], формулы (С)) значения e_i, η_α такие, что $\sum e_i X_i + \sum \eta_\alpha Y_\alpha$ образуют нормальный делитель группы. Но в нашем случае эти урав-

нения дают

$$Ce_i = 0, \qquad (1 + H_\alpha^2)\,\eta_\alpha = 0.$$

Если предположить $C = 0$, то мы получаем лишь $\eta_\alpha = 0$, и преобразования вида $\sum e_i X_i$ образуют нормальный делитель. Однако из первой формулы (12) видно, что X_i не образуют даже подгруппы. Отсюда следует, что $C \neq 0$.

[81] Составим коммутатор

$$(X_i + Z_i,\ Y_\alpha) = (X_i Y_\alpha) + (Z_i Y_\alpha) \qquad (i = 1, 2, \ldots, s).$$

Он должен разлагаться по $X_1 + Z_1, \ldots, X_s + Z_s$; с другой стороны, согласно (12), $(X_i Y_\alpha)$ разлагается только по $X_1, \ldots, X_n$, а $(Z_i Y_\alpha)$ — только по $Y_1, \ldots, Y_r$. *Отсюда следует, что $(X_i Y_\alpha)$ разлагается по $X_1, \ldots, X_s$, а $(Z_i Y_\alpha)$ — по $Z_1, \ldots, Z_s$*, $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

Аналогично составляем коммутатор

$$(X_i + Z_i,\ X_k) = (X_i X_k) + (Z_i X_k) \qquad \begin{matrix}(i = 1, 2, \ldots, s);\\ (k = 1, 2, \ldots, r).\end{matrix}$$

Он должен разлагаться по $X_1 + Z_1, \ldots, X_s + Z_s$; с другой стороны согласно (12), $(X_i X_k)$ разлагается только по $Y_1, \ldots, Y_r$, а $(Z_i X_k)$ — только по $X_1, \ldots, X_r$. *Отсюда следует, что $(X_i X_k)$ разлагается по $Z_1, \ldots, Z_s$ и $(Z_i X_k)$ — по $X_1, \ldots, X_s$.*

Последние результаты означают, что преобразования

$$X_1, \ldots, X_s,\ Z_1, \ldots, Z_s$$

также образуют нормальный делитель, который, согласно n°49, должен совпадать со всей группой G. Отсюда вытекает

$$s = n, \qquad s = r.$$

[82] Мы имеем, следовательно,

$$c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\beta\gamma\alpha} = c_{\gamma\alpha\beta} = -c_{\beta\alpha\gamma} = -c_{\gamma\beta\alpha} = -c_{\alpha\gamma\beta}, \tag{A}$$

причем базис группы определен с точностью до ортогональной подстановки. Можно считать, что форма $\varphi(e)$ подходящей ортогональной подстановкой приведена к сумме квадратов с некоторыми коэффициентами, причем, в силу (5), коэффициент при e_α^2 имеет вид

$$\sum_{\beta,\gamma} c_{\alpha\beta\gamma} c_{\alpha\gamma\beta} = -\sum_{\beta,\gamma} (c_{\alpha\beta\gamma})^2.$$

Если бы хоть один коэффициент в $\varphi(e)$, например при e_α^2, равнялся бы нулю, то мы получили бы, что *при данном* α все $c_{\alpha\beta\gamma} = 0$, т. е.

$$(X_\alpha X_\beta) = \sum_\gamma c_{\alpha\beta\gamma} X_\gamma = 0 \text{ при любом } \beta. \tag{B}$$

Итак, X_α — особенное бесконечно малое преобразование. Следовательно, *если особенного преобразования в ортогональной группе нет, то* форма $\varphi(e)$ отрицательно определенная, и группа унитарная полупростая. Кроме того, ортогональная группа всегда вполне приводима. Теперь из теоремы n° 9 следует компактность группы.

[33] Дадим элементарное доказательство этого предложения без ссылок на предыдущее. Рассмотрим ортогональную группу, заданную таким же образом, как и в примечании [32], но *вместо отсутствия особенных преобразований предполагается, что группа неприводима*.

Если X_1 — особенное преобразование, то все $c_{1\beta\gamma}=0$; принимая во внимание (А) в [32], получим, что разложение

$$(X_\beta X_\gamma)=\sum_\delta c_{\beta\gamma\delta}X_\delta \tag{A}$$

происходит лишь по $X_2, \ldots, X_r$, так что $X_2, \ldots, X_r$ в свою очередь порождают ортогональную группу. В результате наша ортогональная группа явится произведением двух перестановочных между собой подгрупп, порожденных соответственно бесконечно малыми преобразованиями $\{X_1\}$ и $\{X_2, \ldots, X_r\}$. Достаточно, очевидно, доказать компактность каждой из этих групп.

Бесконечно малое ортогональное преобразование X_1 выражается некоторым бивектором $p_{ij}=-p_{ji}$ в пространстве x_i:

$$X_1x_i=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j. \tag{B}$$

Так как X_1 перестановочно со всеми другими преобразованиями группы, то они должны переводить p_{ij} в себя. Отсюда следует, что характеристические числа бивектора p_{ij}, т. е. все корни характеристического уравнения

$$\mathrm{Det}\,|\lambda\delta_{ij}-p_{ij}|=0$$

(обязательно чисто мнимые), распадаются на *одинаковые пары* комплексно сопряженных корней $\pm\lambda$. Действительно, в противном случае каждой паре $\pm\lambda$ отвечала бы инвариантно связанная с бивектором плоскость тех векторов, для которых $\sum_j p_{ij}x_j=\pm\lambda x_i$. Векторы x_i были бы, конечно, комплексные, но инвариантно определилась бы и вещественная плоскость, образованная отдельно взятыми вещественными и чисто мнимыми (без i) частями этих векторов. Эта плоскость, инвариантно связанная с бивектором, оставалась бы вместе с ним инвариантной при всех преобразованиях группы, *вопреки предположению о неприводимости*.

Итак, все пары $\pm\lambda$ одинаковы и после умножения p_{ij} на подходящий множитель можно считать $\lambda=\pm i$. А это означает, что число измерений n четное, и во всех $\frac{n}{2}$ ортогональных двумерных плоскостях вращение, порождаемое X_1, происходит на один и тот же угол, так что после одновременного поворота на 2π мы возвращаемся к тождественному преобразованию. *Таким образом, группа* $\{X_1\}$, *очевидно, компактна.*

В каждой из $\frac{n}{2}$ ортогональных двумерных плоскостей, в которых происходят вращения $\{X_1\}$, бивектор p_{ij} имеет вид

$$\begin{pmatrix} p_{11} p_{12} \\ p_{21} p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

предполагая, что координатные оси расположены попарно в этих плоскостях и что для примера мы взяли плоскость осей x_1, x_2.

Из этой записи нетрудно заметить, что бивектор $-p_{ij}$ имеет матрицу, обратную матрице p_{ij}, т. е.

$$\sum_k p_{ik} p_{kj} = -\delta_{ij}. \qquad \text{(C)}$$

Мы утверждаем, наконец, что группа $\{X_2, \ldots, X_r\}$ компактна *как ортогональная группа, не имеющая особенных бесконечно малых преобразований.*

В самом деле, допустим, например, что X_2 — особенное преобразование. Пусть оно выражается бивектором q_{ij}, аналогично (B). Так как X_1 и X_2 перестановочны, то

$$\sum_k p_{ik} q_{kj} = \sum_k q_{ik} p_{kj}.$$

Другими словами, тензор $w_{ij} = \sum_k p_{ik} q_{kj}$ симметричен по индексам i, j. Так как бивекторы p_{ij}, q_{ij} инвариантны при всех преобразованиях исходной группы, то инвариантен и тензор w_{ij}, а значит инвариантны и связанные с ним неизменяемые плоскости, т. е. плоскости векторов x_i, для которых

$$\sum_j w_{ij} x_j = \lambda x_i. \qquad \text{(D)}$$

В силу неприводимости исходной группы такая плоскость должна быть лишь одна и исчерпывать все пространство; следовательно характеристический корень λ имеет лишь одно значение (вещественное в силу симметрии w_{ij}). Теперь (D) есть тождество, н мы имеем

$$w_{ii} = \lambda, \quad w_{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Так как матрнца w_{ij} есть произведение матриц p_{ik} и q_{kj} и в то же время лишь численным множителем отличается от единичной матрицы, то q_{ij} лишь численным множителем отличается от матрицы, обратной к p_{ij}, а значит (в силу (C)) и от самой матрицы p_{ij}. Другими словами, X_2 лишь численным множителем отличается от X_1, что невозможно. Итак, в группе $\{X_2, \ldots, X_r\}$ нет особенных бесконечно малых преобразований, и следовательно, она компактная; а исходная группа компактна как прямое произведение двух перестановочных компактных групп. Заметим еще, что w_{ij} не могут быть все равны нулю, так как в противном случае и q_{ij} были бы все равны нулю (так как матрица p_{ij} иевырожденная).

[34] Из условия 2° автоматически вытекает, что $(Y_\alpha Y_\beta)$ разлагается только по Y_γ. Действительно, в противном случае в разложе-

нии $(Y_\alpha Y_\beta)$ имелись бы X_i; при автоморфизме 2° члены с X_i изменили бы знак, в то время как остальные члены в левой и правой части остались бы без изменения. Разложение $(Y_\alpha Y_\beta)$ приняло бы другой вид, вопреки определению автоморфизма. Итак, $(Y_\alpha Y_\beta)$ разлагаются только по Y_γ, и, следовательно, Y_α порождают подгруппу. Эта подгруппа и имеется в виду под *характеристической группой* g. Аналогично получим, что $(X_i Y_\alpha)$ разлагаются только по X_k, а $(X_i X_j)$ — только по (Y_α). Сюда нужно присоединить условие, что инфинитезимальная группа линейных преобразований над $X_1, \ldots, X_n$, определяемая коммутатором $(Y_\alpha X_1), \ldots, (Y_\alpha X_n)$, является неприводимой (аналогично n°12).

[35] Весь этот вывод в сущности не имеет отношения к теории групп и может быть проделан геометрически без ссылок на предыдущие результаты. По существу речь идет о преобразовании ортогональных координат $e_1, \ldots, e_s$, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ в псевдоэвклидовом $(n+s)$-мерном пространстве $e_1, \ldots, e_s$, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ со скалярным квадратом вектора

$$\varphi(e) = -e_1^2 - \ldots - e_s^2 + \eta_1^2 + \ldots + \eta_n^2.$$

В общих чертах вопрос решается так. Рассмотрим n-мерную плоскость координатных осей $\eta_1, \ldots, \eta_n$ и аналогичную плоскость в новой ортогональной системе координат $e'_1, \ldots, e'_s$, $\eta'_1, \ldots, \eta'_n$.

В этих двух n-мерных плоскостях — обычная эвклидова метрика. Пусть они пересекаются по $(n-h)$-мерной плоскости (которая может и отсутствовать — в случае $h=n$). Тогда обычным ортогональным преобразованием координат $\eta_1, \ldots, \eta_n$ в первой и $\eta'_1, \ldots, \eta'_n$ во второй плоскости можно привести в совпадение оси η_{h+k} и η'_{h+k} $(k=1, 2, \ldots, n-h)$ на $(n-h)$-мерной плоскости, а остальные оси расположить так, что каждая пара осей η_i и η'_i $(i=1, 2, \ldots, h)$ определяет двумерную плоскость, причем эти двумерные плоскости вполне ортогональны друг другу и пересекаются с плоскостями $e_1, \ldots, e_s$ и $e'_1, \ldots, e'_s$. После поворота осей в этих последних плоскостях можно считать, что оси e_i, e'_i лежат для каждого $i=1, 2, \ldots, h$ в одной двумерной плоскости с осями η_i, η'_i, оси же e_{h+j} совпадают с осями e'_{h+j} $(j=1, \ldots, s-h)$.

Оставшееся преобразование сведется к псевдоортогональным преобразованиям в каждой из h двумерных плоскостей, переводящим для каждого i оси e_i, η_i в оси e'_i, η'_i, т. е. к таким линейным преобразованиям, при которых сохраняется скалярный квадрат вектора в i-й двумерной плоскости, равный $-e_i^2 + \eta_i^2 = -(e_i+\eta_i)(e_i-\eta_i)$. Очевидно, искомое преобразование имеет вид

$$e'_i + \eta'_i = A_i(e_i + \eta_i), \qquad e'_i - \eta'_i = \frac{1}{A_i}(e_i - \eta_i).$$

Правда, возможен случай, когда суммы отвечают разностям, но его можно устранить, изменив на обратное направление оси η_l; далее, если A_l окажется отрицательным, можно заменить на обратные направления осей e_l, η_l (эти предварительные преобразования мы включаем в ранее проделанные ортогональные преобразования). Полагая $A_l = e^{a_l}$, приходим к искомым формулам текста; по существу они представляют простейший вид лоренцевых преобразований.

[86] Так как весь вывод в этом пункте весьма путаный, дадим его в ином изложении. Пусть риманово пространство с $ds^2 > 0$ допускает некомпактную простую группу движений G порядка r с характеристической подгруппой g порядка s. Соответствующий базис пусть будет (как в n° 14) $X_1, \ldots, X_n$; $Y_1, \ldots, Y_s$, и форма $\varphi(e)$ имеет вид

$$\varphi(e) = -e_1^2 - \ldots - e_s^2 + \eta_1^2 + \ldots + \eta_{r-s}^2.$$

Кроме того, подстановка $X'_l = -X_l$, $Y'_\alpha = Y_\alpha$ является автоморфизмом, так что $(X_i X_j)$, $(Y_\alpha Y_\beta)$ разлагаются только по Y_γ, а $(X_l Y_\alpha)$ — только по X_k.

Рассмотрим теперь подгруппу g' изометрических вращений в нашем римановом пространстве. Мы будем считать очевидным, что g' — компактная группа. Действительно, всякое бесконечное множество изометрических вращений (как и вообще любых вращений) имеет по крайней мере одно предельное вращение, которое будет, по соображениям непрерывности, также изометрическим. Нас будет интересовать лишь связная группа g' (т. е. с отбрасыванием преобразований, не получаемых непрерывным переходом из тождественного преобразования). Для полной строгости нашего рассуждения следовало бы еще показать, что определенная таким образом связная компактная группа g' есть группа Ли. Это без труда можно получить, записав алгебраические уравнения, наложенные на коэффициенты ортогонального преобразования группы g' и выражающие сохранение тензора кривизны $R_{ij,kl}$ и его ковариантных производных — до такого порядка, после которого дальнейшие уравнения будут следствием предыдущих. Тогда группа g' примет вид неприводимой алгебраической поверхности в пространстве ортогональных матриц и заведомо будет являться группой Ли.

Поскольку g' компактна и является подгруппой G, то, согласно n° 16, g' можно считать подгруппой группы g (после замены базиса группы G ему сопряженным). Пусть $Y_1, \ldots, Y_h$ $(h \leqslant s)$ будут бесконечно малые преобразования группы g'. Тогда $r - h \leqslant n$, где n — число измерений риманова пространства ($r - h$ операторов, не входящих в g', означают независимые сдвиги в n-мерном пространстве; число этих сдвигов не превосходит n). Итак, $n \geqslant r - h \geqslant r - s$. Рассмотрим случай $n = r - s$. Тогда $n = r - h = r - s$, т. е. $h = s$ и g' совпадает с g. Отсюда и следует формулировка, данная в конце этого пункта. (Доказательство в тексте осложнено тем, что в нем используется лишь ортогональность g'.)

[87] Мы исходим из вещественной полупростой группы G; ее бесконечно малые преобразования $Y_1, \ldots, Y_r$. Эту группу мы дополняем до комплексной группы той же структуры, которая

строится на бесконечно малых преобразованиях

$$Y_1, \ldots, Y_r, iY_1, \ldots, iY_r. \tag{A}$$

Говоря точнее, мы строим вещественную группу от $2r$ параметров с базисными бесконечно малыми преобразованиями $Y_1, \ldots, Y_r$, $Z_1 \ldots, Z_r$, коммутаторы для которых разлагаются в точности так же, как коммутаторы для операторов (A).

А именно, если $(Y_iY_j) = \sum\limits_k c_{ij}^{\cdot\cdot k} Y_k$, то

$$\begin{aligned} (Y_iZ_j) &= \sum_k c_{ij}^{\cdot\cdot k} Z_k, \\ (Z_iZ_k) &= -\sum_k c_{ij}^{\cdot\cdot k} Y_k. \end{aligned} \tag{B}$$

Однако здесь и в аналогичных случаях мы предпочтем (вместе с Картаном) писать *условно* iY_k вместо Z_k ввиду совпадения их формальных свойств. Далее, умножение операторов Y_k, Z_k на i следует понимать как линейную подстановку над ними, переводящую их в Z_k, $-Y_k$.

Согласно n° 19, в комплексной полупростой группе всегда можно выделить вещественную унитарную группу G_u с базисом

$$X_1, \ldots, X_r. \tag{C}$$

При этом базис всей комплексной группы составляется аналогично (A):

$$X_1, \ldots, X_r, iX_1, \ldots, iX_r. \tag{D}$$

Очевидно $X_1, \ldots, X_r$ через $Y_1, \ldots, Y_r$ (и обратно) выражаются линейной подстановкой с комплексными коэффициентами.

[88] Рассмотрим группу (D) порядка $2r$ (см. предыдущее примечание) с унитарной подгруппой (C) (т. е. G_u), которая, очевидно, является характеристической подгруппой. Действительно, обозначая iX_k через Z_k, мы получим для X_k и Z_k соотношения вида (B). Поэтому можно построить такое симметрическое пространство, для которого (D) будет группой движений, а (C) — группой изометрических вращений в некоторой начальной точке A (см. стр. 123 и дальше).

Другая подгруппа G'_u, изоморфная G_u и также компактная, будет в силу n° 16 сопряжена с G_u посредством некоторого движения, а значит представляет собой группу изометрических вращений в некоторой другой точке A', полученной из A этим движением.

Бесконечно малые преобразования $Z = \sum\limits_k \lambda_k Z_k$ (в формальной записи $iX = i\sum\limits_k \lambda_k X_k$) представляют собой параллельные сдвиги репера по всевозможным направлениям.

Операторы X_i подвергаются при этом бесконечно малым преобразованиям $X_i \longrightarrow X_i + (ZX_i)\,\delta t$, или в формальной записи

$$X_i \longrightarrow X_i + i\,(XX_i)\,\delta t.$$

Таким образом, над X_i происходит бесконечно малое преобразование с чисто мнимой матрицей. Отсюда вытекает, что на конечном геодезическом пути (т. е. идущем в направлении постоянного iX) операторы $X_1, \ldots, X_r$ подвергнутся линейному преобразованию с матрицей Θ, которая будет представлять собой e в степени указанной чисто мнимой матрицы. Следовательно, при замене i на $-i$ матрица Θ будет превращаться одновременно и в свою обратную, и в свою комплексно сопряженную: $\bar{\Theta} = \Theta^{-1}$.

[39] Под гомографией Картан понимает в данном случае унитарное преобразование с определителем 1.

Если A есть гомография, порождающая подстановку R присоединенной группы, то это означает, что подстановка R преобразует любую гомографию M в гомографию M' по закону:

$$M' = AMA^{-1}. \qquad \text{(A)}$$

Инволютивный характер R означает поэтому, что

$$A^2MA^{-2} = M,$$

т. е. A^2 коммутирует со всеми M, вследствие чего сводится к умножению на константу. Значит, все $e^{2i\alpha_k}$ равны между собой, а $e^{i\alpha_k}$ равны с точностью до знака, причем можно считать $e^{i\alpha_k} = \pm 1$, не меняя смысла формулы (А).

[40] При $n > 2p$ существуют переменные, например x_{2p+1}, которые квадратом нашей подстановки умножаются на $+1$; следовательно, и все переменные умножаются квадратом подстановки на $+1$, а значит углы a_α — кратные π.

При $n = 2p$ квадрат подстановки может умножать все переменные или на $+1$, тогда повторяется прежняя картина, или на -1, тогда все $2a_\alpha$ — нечетные кратные π.

[41] Итак, G_n состоит из тех унитарных преобразований $2l$ комплексных переменных $x_1, \ldots, x_{2l}$, которые сверх того сохраняют инвариантной кососимметрическую билинейную форму двух рядов этих переменных:

$$(x_1y_2 - x_2y_1) + \ldots + (x_{2l-1}y_{2l} - x_{2l}\,y_{2l-1}).$$

Такую билинейную форму Картан называет внешней квадратичной формой и употребляет для нее сокращенную запись

$$[x_1y_2] + \ldots + [x_{2l-1}x_{2l}].$$

[42] Под $2\pi i\varphi_\alpha$ мы понимаем (здесь и дальше) все $r - l$ характеристических корней, отличных, вообще говоря, от нуля, так что $\sum\limits_\alpha \varphi_\alpha^2$ дает сумму квадратов характеристических корней, деленную на $4\pi^2$ и с обратным знаком, т. е. $\frac{1}{4\pi^2}\varphi(e)$. Таким образом, по существу здесь рассматривается l-мерная плоскость $X_1, \ldots, X_l$, отвечающая подгруппе γ в пространстве бесконечно малых преобразований $\sum e_\alpha X_\alpha$ группы G с эвклидовой метрикой, определяемой формой $\varphi(e)$.

[43] Матрица Y порождает, разумеется, не одну матрицу T, а целую подгруппу от одного параметра t:

$$T = e^{tY},$$

или, что то же самое, решение дифференциального уравнения, в котором элементы матрицы T являются искомыми функциями параметра t,

$$\frac{d}{dt} T = YT$$

при начальном условии: $(T)_{t=0}$ есть единичная матрица.

Однако в тексте под матрицей T имеется в виду преобразование подгруппы при $t = 1$:

$$T = e^{Y}.$$

[44] При этом выводе предполагается, что непрерывный переход от T_0 к T идет через несингулярные матрицы, за исключением конечной матрицы T, которая может быть и сингулярной. Полиэдр (P) включает свою границу.

[45] Можно поставить в соответствие единичной матрице T начало 0, а затем, следуя по контуру (C), строить соответствующий контур (C'). Так как, описывая (C), мы не встретимся ни с одной сингулярной матрицей T, то, двигаясь по (C'), мы не встретим ни одной гиперплоскости (II) и будем оставаться, таким образом, внутри некоторого многогранника (P). Лишь описав контур (C) [и вернувшись к единичной матрице, мы в (P) должны попасть в вершину — точку сети (R) (точки сети (R) отвечают единичной матрице T). Но эта вершина совпадает снова с O, так как по предположению в (P) нет других точек сети (R).

[46] В качестве фундаментальных угловых параметров здесь можно взять, например, $2\varphi_1, \varphi_1 - \varphi_2, \varphi_1 - \varphi_3, \ldots, \varphi_1 - \varphi_l$ (но не φ_i, которые в данном случае вообще не являются угловыми параметрами). Тогда целые значения фундаментальных параметров означают одновременно целые или одновременно полуцелые значения для φ_i.

[47] Известно, что односвязная группа Ли единственным образом определяется своей инфинитезимальной структурой (см. Понтрягин [2], стр.244). Поэтому любой пример односвязной группы с данной структурой будет изоморфен также односвязной группе $\overline{\Gamma}$.

[48] Под точками, эквивалентными, например, точке O_1, здесь имеются в виду точки, полученные из O_1 всеми сдвигами группы $(\overline{\mathcal{T}})$. Все сдвиги, переводящие O в эти точки, считаются за одно преобразование, отвечающее точке O_1. Аналогично поступаем с $O_2, \ldots, O_{h-1}$. Самой точке O отвечают по этой же схеме все сдвиги группы $(\overline{\mathcal{T}})$, которые принимаются за тождественное преобразование. По существу получаемая таким образом группа из h элементов есть фактор группа $\mathcal{T}/\overline{\mathcal{T}}$.

[49] Для доказательства этого утверждения достаточно показать, что матрицы бесконечно малых преобразований присоединенной группы переходят в матрицы такого же рода в результате преобразований посредством подстановки Θ из группы изотропии. Действительно, в этом случае и матрицы конечных преобразований *связной*

присоединенной группы как порождаемые бесконечно малыми преобразованиями также будут обладать этим свойством.

Структурные константы c_{ijk} кососимметричны по всем индексам (предполагая, что базис бесконечно малых преобразований группы G, $X_1, \ldots, X_r$, выбран ортогональным в смысле формы $\varphi(e)$, см. стр. 136). При этом бесконечно малые преобразования присоединенной группы определяются матрицами (бивекторами) связки

$$q_{ij} = \sum_\rho \xi_\rho c_{\rho ij}, \tag{A}$$

где ξ_ρ — произвольные коэффициенты.

Сделаем поворот репера при помощи подстановки Θ из группы изотропии. По определению при этом должны оставаться инвариантными коэффициенты формы R, т. е.

$$R_{ij,\,hk} = \sum_\rho c_{\rho ij} c_{\rho hk}.$$

Инвариантной будет оставаться, следовательно, и связка бивекторов q_{ij}, полученных свертыванием этого коэффициента с произвольным бивектором p_{hk}:

$$q_{ij} = \sum_{\rho,\,h,\,k} c_{\rho ij} c_{\rho hk} p_{hk} = \sum_\rho \xi_\rho c_{\rho ij}, \tag{B}$$

где

$$\xi_\rho = \sum_{h,\,k} c_{\rho hk} p_{hk}.$$

Таким образом, каждый бивектор с компонентами q_{ij} из связки (B) в старом репере встретится в связке (B) и в новом репере (повернутом по отношению к старому посредством Θ); значения $c_{\rho ij}$ и ξ_ρ будут при этом, вообще говоря, другими.

Но связка (B) не только входит, очевидно, в связку (A), но и исчерпывает ее. Действительно, в виде (B) можно представить любой бивектор связки (A), так как $\xi_\rho = \sum_{h,\,k} c_{\rho hk} p_{hk}$ — при переменных p_{hk} — могут принимать любые значения (в противном случае компоненты всех векторов, представляющих коммутаторы $(X_p X_q)$, удовлетворяли бы тем же линейным уравнениям, что и ξ_ρ, и группа G имела бы нормальный делитель).

Если, наконец, бивектор q_{ij} представить матрицей Q его компонент, то преобразование этой матрицы при повороте репера Θ выражается формулой

$$Q' = \Theta^{-1} Q \Theta. \tag{C}$$

Действительно, в силу ортогональности Θ матрица Θ^{-1} является транспонированной матрицей Θ, так что (C) равносильно формуле

$$q_{ij} = \sum_{\alpha,\,\beta} q_{\alpha\beta} \Theta_{\alpha i} \Theta_{\beta i},$$

где $\Theta_{\alpha i}$ — элементы матрицы Θ. По доказанному, Q' принадлежит той же связке (A) и является, следовательно, тоже бесконечно малым преобразованием присоединенной группы.

[50] При повороте Θ репер переходит в новое положение, причем связка бивекторов

$$q_{ij} = \sum \xi_\rho c_{\rho ij} \tag{A}$$

преобразуется в себя (см. предыдущее примечание). Но бивекторы этой связки определяют бесконечно малые преобразования присоединенной группы Γ; базисные бесконечно малые преобразования можно задать бивекторами

$$q^{(\rho)}_{ij} = c_{\rho ij}.$$

В результате поворота Θ каждый из этих бивекторов преобразуется по закону

$$\overset{*}{q}{}^{(\rho)}_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} q^{(\rho)}_{\alpha\beta}\Theta_{\alpha i}\Theta_{\beta j}, \tag{B}$$

где $\Theta_{\alpha i}$ — элементы ортогональной матрицы Θ. Или в матричной записи (см. (C), предыдущее примечание):

$$\overset{*}{Q}{}^{(\rho)} = \Theta^{-1}Q^{(\rho)}\Theta. \tag{C}$$

В силу ортогональности Θ матрица Θ^{-1} является транспонированной матрицей Θ.

С другой стороны, связка (A) остается инвариантной, так что каждый бивектор $\overset{*}{q}{}^{(\rho)}_{ij}$ разлагается по $q^{(\sigma)}_{ij}$:

$$\overset{*}{q}{}^{(\rho)}_{ij} = \sum_\sigma \tau_{\rho\sigma} q^{(\sigma)}_{ij}. \tag{D}$$

Можно считать, что (D) дает преобразование базиса бесконечно малых преобразований присоединенной группы, причем это преобразование есть автоморфизм. Действительно, из записи (B) или (C) ясно, что произведению матриц $Q^{(\rho)}$ будет отвечать произведение матриц $\overset{*}{Q}{}^{(\rho)}$, альтернированному произведению — альтернированное произведение. Следовательно, матрица $\tau_{\rho\sigma}$ выражает автоморфизм в присоединенной группе Γ, а следовательно, и в группе G в силу их одинаковой структуры. *Таким образом, матрица* $\tau_{\rho\sigma}$ *дает некоторое преобразование* T_0 *из полной (вообще говоря, несвязной) присоединенной группы.* Отсюда следует, в частности, что матрица $\tau_{\rho\sigma}$ ортогональна и сохраняет структурные константы:

$$c_{\sigma ij} = \sum_{\lambda,\mu,\nu} c_{\lambda\mu\nu}\tau_{\lambda\sigma}\tau_{\mu i}\tau_{\nu j}.$$

Это выражение для $c_{\sigma ij}$ вставим в (D) вместо $q^{(\sigma)}_{ij}$. Учитывая ортогональность матрицы $\tau_{\rho\sigma}$, получим

$$\overset{*}{q}{}^{(\rho)}_{ij} = \sum_{\mu,\nu} c_{\rho\mu\nu}\tau_{\mu i}\tau_{\nu j} = \sum_{\mu,\nu} q^{(\rho)}_{\mu\nu}\tau_{\mu i}\tau_{\nu j},$$

или в матричной записи

$$\overset{*}{Q}{}^{(\rho)} = T_0^{-1}Q^{(\rho)}T_0. \tag{E}$$

Итак, автоморфизм в присоединенной группе Γ, *заданный посредством* (C), *может быть записан и в виде* (E), *т. е. с заменой* *ортогональной матрицы Θ из группы изотропии ортогональной матрицей T_0 из (полной) присоединенной группы.*

У нас этот автоморфизм записан для матриц бесконечно малых преобразований Q, но он автоматически переносится и на матрицы T конечных преобразований:

$$T' = T_0^{-1} T T_0.$$

[51] Очевидно, число семейств полной группы изотропии не может быть меньше числа семейств полной группы изометрии, так как в каждом семействе группы изометрии можно выделить соответствующее семейство группы изотропии. Но можно было бы предположить, что в одном и том же семействе группы изометрии выделяются два различных семейства группы изотропии. В тексте показано, что это предположение приводит к противоречию.

[52] См. конец n°20. Вместо $\bar{\Gamma}'$ написано $\bar{\Gamma}$, так как эти группы совпадают как односвязные группы одной инфинитезимальной структуры. Впрочем, Γ и Γ' тоже совпадают (см. ниже, примечание [54]).

[53] Действительно, в этом случае группа голономии является существенной подгруппой группы связности $\bar{\Gamma}/\Gamma$, а эти группы, согласно перечислению, сделанному в n°24, имеют лишь циклические подгруппы.

[54] Всевозможные пространства $\mathcal{E}'$ суть пространства всевозможных групп G' данной простой унитарной структуры. Какую бы G' ни взять, группа Γ' будет одной и той же как односвязная группа данной структуры, и группа Γ' будет одной и той же, так как присоединенная группа Γ' в случае простой группы G' есть максимальная связная группа автоморфизмов (см. предыдущую статью, n°7). А автоморфизмы определяются линейными подстановками над базисными операторами $X_1, \ldots, X_r$, сохраняющими структурные константы, и будут одинаковы для всех G', так как структурные константы у них общие. В дальнейшем будем писать Γ, $\bar{\Gamma}$ вместо Γ', $\bar{\Gamma}'$ в силу изоморфизма этих групп.

При этом $\bar{\Gamma}$ накрывает G', а G' накрывает Γ, и группа связности $\bar{\Gamma}/G'$ будет подгруппой группы связности $\bar{\Gamma}/\Gamma$. Но всевозможные $\bar{\Gamma}/\Gamma$ определены в n°24; нетрудно перебрать и все их подгруппы. Теперь для построения всевозможных $\mathcal{E}'$ нужно рассмотреть в односвязном $\mathcal{E}$ (например, в пространстве группы $\bar{\Gamma}$) дискретную группу изометрий, переводящих каждую точку в точку, имеющую тот же образ в группе Γ. Если рассматривать $\bar{\Gamma}$ как группу путей в Γ, эта дискретная группа изометрий будет образована замкнутыми путями (причем, конечно, пути, переводимые один в другой непрерывным образом, не различаются) и будет являться как раз группой связности $\bar{\Gamma}/\Gamma$. Для получения всевозможных $\mathcal{E}'$ достаточно брать всевозможные подгруппы этой группы и отождествлять между собой точки $\bar{\Gamma}$, эквивалентные по данной подгруппе.

[55] Различные формы Клиффорда пространства $\mathcal{E}$ (как и вообще любого риманова пространства) порождаются заданием какой-нибудь дискретной группы изометрических преобразований в $\mathcal{E}$ при усло-

вии, что каждое нетождественное преобразование этой группы существенно сдвигает каждую точку пространства $\mathcal{E}$.

Обозначим такую группу черрз $\mathcal{T}$. Форма Клиффорда $\mathcal{E}'$ возникает при отождествлении между собой точек, переводимых одна в другую преобразованиями $\mathcal{T}$.

Изометрические преобразования в пространстве $\mathcal{E}$ переносятся на пространство $\mathcal{E}'$, очевидно, лишь в тех случаях, когда они перестановочны с группой $\mathcal{T}$. Будем рассматривать лишь группу движений, т. е. связную часть группы изометрии. Если мы хотим получить форму Клейна, то нужно потребовать, чтобы группа движений в $\mathcal{E}$ переносилась и на $\mathcal{E}'$, т. е. чтобы движения были перестановочны с группой $\mathcal{T}$. В силу непрерывности группы движений и дискретности $\mathcal{T}$ это означает, что *движения перестановочны с каждым преобразованием группы* $\mathcal{T}$. В этом и заключается добавочное требование, накладываемое на $\mathcal{T}$ в случае построения формы Клейна.

В случае нашего группового пространства $\mathcal{E}$ движения задаются уравнениями (см. стр. 211)

$$S_{\xi'} = S_a S_\xi S_b,$$

где S_a и S_b — произвольно фиксируемые элементы группы G, а S_ξ — переменный ее элемент.

Так как преобразования $\mathcal{T}$ перестановочны со всеми движениями, то это означает, что они перестановочны с умножением элементов группы G на любой фиксированный элемент как справа, так и слева. Другими словами, преобразования группы $\mathcal{T}$ в групповом пространстве $\mathcal{E}$ перестановочны со сдвигами как первого, так и второго рода.

А это значит, что при отождествлении точек, переводимых друг в друга преобразованиями $\mathcal{T}$, не только групповое риманово пространство $\mathcal{E}$ „свернется" в риманово пространство $\mathcal{E}'$, но и сама группа G „свернется" в локально изоморфную ей группу G'. Действительно, преобразования $\mathcal{T}$, будучи перестановочны со сдвигами первого (второго) рода, должны сами представлять собой сдвиги второго (первого) рода. Следовательно, $\mathcal{T}$ образуют дискретную подгруппу из центра группы G, и речь идет о построении фактор-группы $G' = G/\mathcal{T}$. Эта факторгруппа локально изоморфна G, и имеет, очевидно, своим групповым пространством $\mathcal{E}'$. Этим и доказывается утверждение Картана, что все формы Клейна $\mathcal{E}'$ пространства $\mathcal{E}$, отвечающего группе G, суть групповые пространства групп G', обладающих той же простой унитарной структурой, что и группа G.

[56] Поясним последние рассуждения. Пусть A — любая точка пространства $\mathcal{E}$ и в то же время некоторое преобразование односвязной группы G.

Пусть T — соответствующее преобразование связной присоединенной группы Г. В частности, точка A пространства E_l характеризуется угловыми параметрами φ_α, заданными *с точностью до сдвигов группы* $(\overline{\mathcal{T}})$.

Отвечающее *данной* точке A в E_l преобразование группы γ может быть порождено различными бесконечно малыми преобразованиями, отвечающими *различному* выбору φ_α. Это значит, что мы будем попадать в ту же точку A при помощи различных геодезических, выходящих из O.

Разберем различные возможные здесь случаи.

А) Среди φ_α нет целых чисел (если так обстоит дело при одном выборе φ_α, то и при другом тоже, так как сдвиги $(\overline{\mathcal{T}})$ означают прибавление к φ_α некоторых целых чисел).

Мы утверждаем, что в этом случае все геодезические OA изолированные. Допустим противное: хотя направление геодезической в точке O непрерывно меняется, но она приходит неизменно в точку A. Другими словами, бесконечно малое преобразование непрерывно меняется, но порождает все время одно и то же преобразование группы G и тем более одно и то же преобразование T связной присоединенной группы Γ. Это преобразование несингулярно, т. е. имеет ровно l характеристических корней, равных 1 (остальные имеют вид $e^{2\pi i\varphi_\alpha} \neq 1$, и однозначно определяет l-мерную плоскость, отвечающую этим корням. Плоскость нулевых характеристических корней матрицы каждого порождающего бесконечно малого преобразования тоже l-мерная (так как преобразование несингулярное $2\pi i\varphi_\alpha \neq 0$) и совпадает с только что полученной однозначно определенной l-мерной плоскостью (так как $e^0 = 1$).

Таким образом, все порождающие бесконечно малые преобразования принадлежат *одной и той же группе* γ (бесконечно малые преобразования которой представлены фиксированной l-мерной плоскостью) и не могут непрерывно меняться, так как $e^{2\pi i\varphi_\alpha}$ остаются фиксированными, а значит φ_α могли бы меняться лишь скачкообразно.

В) Среди φ_α имеется 2σ целых чисел, причем все они равны нулю. Повторением прежнего рассуждения покажем, что $(l+2\sigma)$-мерная плоскость нулевых корней порождающего бесконечно малого преобразования группы Γ совпадает с $(l+2\sigma)$-мерной плоскостью единичных корней соответствующего конечного преобразования T группы Γ.

Пусть T фиксировано. Допуская для бесконечно малого преобразования лишь непрерывное изменение, мы увидим, что оно сохраняет значения своих корней (так как $e^{2\pi i\varphi_\alpha}$ фиксированы), причем отвечающая $l+2\sigma$ нулевым корням $(l+2\sigma)$-мерная плоскость остается неизменной. Нетрудно показать, что при этих условиях бесконечно малое преобразование непрерывно меняться не может. Таким образом, геодезическая OA, сдвиг по которой из O в A характеризуется значениями φ_α, которые, либо нецелые числа, либо нули, также является изолированной.

С) Среди φ_α имеется 2σ целых чисел, причем по крайней мере некоторые из них не равны нулю.

Снова $(l+2\sigma)$-мерная плоскость тех $l+2\sigma$ характеристических корней порождающего бесконечно малого преобразования группы Γ, которые имеют вид $2\pi in$ (n — целое), совпадает с $(l+2\sigma)$-мерной плоскостью единичных корней соответствующего конечного преобразования T. Бесконечно малые преобразования группы G, характеризуемые векторами этой плоскости, тем самым перестановочные с преобразованием T (точнее, с тем преобразованием A группы G, которое представлено преобразованием T в группе Γ). Однако среди этих бесконечно малых преобразований есть такие, которые не перестановочны с порождающим A бесконечно малым преобразованием, например, те, которые отвечают его характеристическим корням вида $2\pi i n \neq 0$.

Одночленная подгруппа, порожденная каким-либо из этих бесконечно малых преобразований в группе Γ, оставляет A на месте, но непрерывно меняет порождающее A бесконечно малое преобразование. В этом случае геодезическая OA непрерывно меняет свое направление в точке O, проходя однако через неподвижную точку A.

Заметим в заключение, что для данной точки A возможны, очевидно, геодезические и типа 2 и типа 3. Однако если A есть вершина симплекса (полиэдра) (P), отличная от 0, то имеет место только случай 3. Действительно, в вершине A пересекаются l граней симплекса (P), что означает, что l параметров φ_α (и притом линейно независимых) имеют целые значения.

Будем брать точки A', эквивалентные A в группе сдвигов $(\overline{\mathcal{T}})$. Значения этих l параметров остаются целыми, но ни в каком случае не обращаются одновременно в нуль. Действительно, так как среди форм φ_α лишь l линейно независимых, то обращение в нуль указанных l параметров означало бы обращение в нуль всех φ_α, т. е. A' совпало бы с O; а это невозможно, так как среди вершин (P) нет эквивалентных точек.

[57] Иначе мы могли бы разделить p и q на общий делитель, не содержащий 3, или, если общий наибольший делитель имеет вид 3^n, $n > 1$, могли бы разделить на 3^{n-1}. В обоих случаях мы получили бы целые числа (p', q'), сумма которых также делится на 3 и которые определяют точку сети (R), *предшествующую* точке (p, q) на геодезической (tp, tq). Геодезическая замкнулась бы, таким образом, не в (p, q), а ранее.

[58] Эти r вещественных параметров связаны с коэффициентами при мнимых частях в комплексных значениях первоначальных r параметров.

[59] Точнее, мы определим Σ_t при любом $t > 0$ по формуле

$$\Sigma_t = \Sigma_{t_1} \cdot \Sigma_{t_2} \cdot \ldots \cdot \Sigma_{t_k}, \tag{A}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — положительные числа < 1, дающие в сумме t:

$$t = t_1 + t_2 + \ldots + t_k. \tag{B}$$

Докажем, что Σ_t не зависит от способа разбиения t на такого рода слагаемые. При разбиении каждого t_i еще на несколько слагаемых:

$$\begin{gathered} t_1 = t_{11} + t_{12} + \ldots + t_{1r_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_k = t_{k1} + t_{k2} + \ldots + t_{kr_k}, \end{gathered}$$

мы получаем для t „более мелкое“ разбиение вида (2). Для этого разбиения формула, аналогичная (B), дает прежнее значение Σ_t; действительно, достаточно воспользоваться соотношениями

$$\Sigma_{t_1} = \Sigma_{t_{11}} \cdot \Sigma_{t_{12}} \cdots \Sigma_{t_{1r_1}} \qquad \text{и т. д.,}$$

справедливыми в силу того, что $t_1 < 1$ и т. д.

Если теперь даны два разбиения t на слагаемые вида (B), то можно найти третье разбиение, являющееся подразбиением каждого из двух данных. Значения Σ_t, полученные при обоих данных разбиениях, будут равны значению Σ_t, отвечающему третьему разбиению, а следовательно, совпадают между собой.

Теперь, пользуясь записью (A), без труда получаем *при любых* t, $t' > 0$

$$\Sigma_t \cdot \Sigma_{t'} = \Sigma_{t+t'}.$$

[60] Доказательство вполне аналогично предыдущему (примечание[59]).

[61] Если бы рассматриваемая подгруппа группы G, отвечающая единице I' группы G', не была бы собственно дискретной, то можно было бы найти последовательность ее элементов T_1, T_2, . . . , T_n, . . . , сходящуюся к некоторому элементу S группы G. В силу непрерывности отображения G на G' элементу S тоже отвечает I', а следовательно, T_nS^{-1} тоже отвечает I', причем T_nS^{-1} стремится к I при $n \to \infty$. Но это противоречит локальному *изоморфизму* групп.

[62] Под E_s имеется в виду бесконечно малое преобразование группы Γ, отвечающее бесконечно малому преобразованию X_s группы G.

[63] Рассмотрим пространство параметров a_1, . . . , a_r меняющихся от $-\infty$ до $+\infty$. С помощью линейной подстановки $\frac{e^{H_a}-1}{H_a}$ над da_1, . . . , da_r построим в этом пространстве линейные дифференциальные формы ω_1, . . . , ω_r. Они будут удовлетворять уравнениям Маурера-Картана (3). Отсюда вытекает, что каждый путь OA, проделанный в пространстве a_1, . . . , a_r из начала O (0, . . . , 0) в точку A (a_1^0, . . . , a_r^0), можно перенести в группу G, причем каждому элементу этого пути мы ставим в соответствие бесконечно малое преобразование $\Sigma\,\omega_s(a;\, da)\,X_s$, а точке O — единицу группы.

В результате точке A отвечает определенный элемент g^* группы G и притом однозначно: можно без труда доказать на основании уравнений Маурера-Картана, что g^* не зависит от пути OA (а лишь от точки A). *Итак, пространство* a_1, . . . , a_r *отображается на* G *однозначно в одну сторону. При этом возможно, что оно отображается лишь на часть группы* G, *которую мы обозначим* G^*.

Элемент g^* всегда может быть порожден определенным бесконечно малым преобразованием, а именно бесконечно малым преобразованием $\Sigma a_s^0 X_s$, где a_s^0 — координаты точки A. Чтобы убедиться в этом, достаточно пройти из O в A по „прямолинейному“ пути OA, так что $da_s = a_s^0\,dt$, где t меняется от 0 до 1. Но так как матрица H_a обращает a_s в нули (в силу косой симметрии c_{stj} по первым двум индексам), то матрица $\frac{e^{H_a}-1}{H_a}$ не меняет a_s, а следовательно, и da_s; т. е. вдоль нашего пути

$$\omega_s = da_s = a_s^0\, dt.$$

Следовательно, мы достигаем g^*, применяя все время одно и то же бесконечно малое преобразование.

Очевидно, и обратно, если некоторый элемент g^* группы G может быть порожден некоторым бесконечно малым преобразованием $\Sigma\, a_s^0 X_s$, то он может быть достигнут указанным путем и будет служить в группе G образом точки $A(a_1^0, \ldots, a_r^0)$.

В результате G^* состоит из тех, и только тех, элементов группы G, которые порождаются каждый каким-нибудь определенным бесконечно малым преобразованием.

Если теперь исходить обратно из пути в G, проведениого из единицы группы в некоторый элемент g, то этот путь может быть наверняка перенесен в пространство $a_1, a_2, \ldots, a_r$ лишь в том случае, когда этот путь не проходит через сингулярные элементы. Под сингулярным элементом понимается такой, для которого преобразование присоединенной группы имеет больше характеристических корней, равных 1, чем для элемента общего вида.

Если многообразие сингулярных элементов в группе G не более $r-2$ измерений, то для несингулярных элементов такой путь всегда можно подобрать, так что все они заведомо входят в G^*.

[64] Бесконечно малое преобразование унимодулярной группы (10) имеет вид

$$\begin{aligned} x' &= x + \varepsilon(\alpha x + \beta y), \\ y' &= y + \varepsilon(\gamma x - \alpha y). \end{aligned} \tag{1}$$

Характеристические числа матрицы

$$A = \begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & -\alpha \end{vmatrix}$$

определяются из уравнения $\lambda^2 - \alpha^2 - \gamma\beta = 0$ и будут иметь вид или $\lambda = \pm a$, или $\lambda = \pm ai$, или $\lambda = 0$. После линейного преобразования переменных можно привести (1) к виду:

$$\begin{aligned} x' &= x + \varepsilon a x, \\ y' &= y - \varepsilon a y, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x' &= x + \varepsilon a y, \\ y' &= y - \varepsilon a x, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x' &= \varepsilon a y, \\ y' &= y. \end{aligned}$$

Конечные преобразования, порождаемые этими бесконечно малыми преобразованиями, получаются интегрированием дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dx &= \ \ y\, dt, \\ dy &= -y\, dt, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} dx &= \ \ y\, dt, \\ dy &= -x\, dt; \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} dx &= y\, dt, \\ dy &= 0, \end{aligned}$$

где $a\varepsilon$ принято за дифференциал параметра dt.

Получаем:

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 e^{-t}, \qquad \text{или} \qquad x = x_0 \cos t + y_0 \sin t, \quad y = -x_0 \sin t + y_0 \cos t, \qquad \text{или} \qquad x = x_0 + y_0 t, \quad y = y_0.$$

Характеристические числа матрицы преобразования будут соответственно e^t, e^{-t}, или e^{ti}, e^{-ti}, или 1,1. Следовательно, преобразований с двумя различными отрицательными характеристическими числами никогда не получится. Между тем такие конечные преобразования в группе, очевидно, имеются $\left(\text{например, } x = -2x_0, \ y = -\frac{1}{2} y_0\right)$.

[65] Действительно, в предыдущем доказательстве *непрерывность* подгруппы g использовалась в основном для того, чтобы можно было утверждать *замкнутость куска этой группы* — именно сферы σ' вместе с границей, а также существование последовательности, сходящейся к единице. В сущности доказательство опиралось на эти факты, причем различные дополнительиые ограничения нужны были для того, чтобы не выйти за пределы рассматриваемого куска. Когда же группа в целом замкнута, то эти оговорки отпадают, и аналогичное доказательство проводится в упрощенном виде. Правда, понадобится еще небольшое дополнительное построение, чтобы показать, что в достаточно малой окрестности единицы в G нет иных элементов g, кроме порождаемых семейством бесконечно малых преобразований, которое мы построили.

Для непрерывной (но не замкнутой) подгруппы g это свойство не всегда верно.

Группа g в рассматриваемом случае тоже будет, конечно, группой Ли.

[66] В самом деле, предположим, что такой нормальный делитель существует; обозначим его Γ.

Тогда $a^{-1}\Gamma a$, где a — любой элемент G, совпадает с Γ по определению нормального делителя. С другой стороны, преобразования $a^{-1}\Gamma a$ должны оставлять неподвижной вместо точки O точку A, в которую O переводится преобразованием a. Так как G транзитивна, то в качестве точки A можно получить любую точку пространства. Следовательно, преобразования Γ оставляют на месте любую точку пространства, т. е. Γ состоит лишь из единицы группы G.

[67] Таким образом, мы хотим доказать, что любую группу Ли G с заданной в ней замкнутой подгруппой g, не содержащей никакого нормального делителя G, всегда можно истолковать как фундаментальную группу некоторого однородного пространства со стационарной подгруппой g.

В случае, если g собственно дискретна, при доказательстве нужно считать $r - n = 0$.

[68] Первоначально сделанное предположение, что g не содержит ни одного нормального делителя G (кроме единицы), необходимо и достаточно для того, чтобы в многообразии „точек" Sg различные элементы группы G изображались *различными* преобразованиями.

Действительно, каждому элементу a группы G отвечает преобразование в многообразии „точек“ Sg:

$$Sg \to aSg.$$

Если при данном a это преобразование тождественное, то

$$Sg = aSg$$

или

$$g = S^{-1}aSg.$$

Это значит, что при любом S элемент $S^{-1}aS$ входит в g. Элементы вида $S^{-1}aS$ порождают подгруппу группы g, очевидно, являющуюся нормальным делителем G (и содержащую элемент a — достаточно положить $S = 1$).

Если такой нормальный делитель сводится к единице, то и элемент a есть единица, и следовательно, элементу a, отличному от единицы, всегда отвечает нетождественное преобразование в многообразии „точек“ Sg.

Если же существует нормальный делитель G, входящий в g и не сводящийся к единице, то каждому его элементу, отличному от единицы, будет отвечать тождественное преобразование в многообразии „точек“ Sg. В этом случае группой преобразований в многообразии будет служить не G, а ее факторгруппы по указанному нормальному делителю.

[69] Мы рассматриваем любые целые n, как положительные, так и отрицательные.

[70] Пусть $d\tau$ — элемент объема первого рода в пространстве компактной группы Ли. Он инвариантен относительно первой параметрической группы

$$M' = AM,$$

где M — переменный, а A — фиксированный элемент группы.

Докажем, что $d\tau$ инвариантен также и относительно второй параметрической группы

$$M' = MB.$$

Обозначим

$$\frac{d\tau'}{d\tau} = \lambda_B.$$

Тогда λ_B не зависит от точки, где взят объем $d\tau$; действительно если мы все точки M объема $d\tau$ и все точки M' объема $d\tau'$ умножим слева на произвольное A, то соотношение

$$M' = MB$$

сохранится, а в то же время объемы $d\tau$ и $d\tau'$ не изменятся. Следовательно, $\lambda_B = \frac{d\tau'}{d\tau}$ также не изменится, хотя $d\tau$ перемещен в произвольную точку пространства группы.

Преобразованию

$$M' = MB^n$$

будет отвечать изменение объема $d\tau$ в отношении λ_B^n.

В силу компактности группы из последовательности B^n (как при $n\to\infty$ так и $n\to-\infty$) можно выделить последовательность, сходящуюся к некоторой точке C.

Очевидно, $\lambda_B^n \underset{n\to\pm\infty}{\to} \lambda_C$, что возможно лишь при $\lambda_B=1$.

[71] Бесконечно малое преобразование E_β линейной группы γ в пространстве переменных e_i, e_α определяется по закону

$$\sum_i e_iX_i+\sum_\alpha e_\alpha X_\alpha\to\Big(\sum_i e_iX_i+\sum_\alpha e_\alpha X_\alpha,\ X_\beta\Big)=$$
$$=\sum_i e_i\sum_k c_{i\beta k}X_k+\sum_\alpha e_\alpha\sum_\rho c_{\alpha\beta\rho}X_\rho.$$

Другими словами:

$$e'_k=\sum_i e_ic_{i\beta k},\quad e'_\rho=\sum_\alpha e_\alpha c_{\alpha\beta\rho}.$$

Так как форма (4) инвариантна, то это должно быть бесконечно малое ортогональное преобразование, а матрица такого преобразования кососимметрическая. Отсюда и вытекает (5) (учитывая, что по первым двум индексам коэффициенты всегда кососимметричны).

[72] Согласно n°57 (1), в квадратичной форме $\varphi(e)$ не может быть смешанных членов $e_\alpha e_i$, так как они меняли бы знак при автоморфизме $\mathcal{A}$. Члены же, содержащие только e_α и только e_i, мы приводим к указанному в тексте каноническому виду ортогональными преобразованиями переменных e_α и e_i по отдельности; при этом квадратичная форма (4) сохраняет свой вид. В дальнейшем, когда мы приведем коэффициенты λ_α к единице, коэффициенты при e_α^2 в форме (4) обратятся в $\frac{1}{\lambda_\alpha}$, что, впрочем, не имеет значения для дальнейшего.

[73] Аналогично формулам примечания 71 получим следующую запись для бесконечно малого преобразования E_j присоединенной группы в пространстве переменных e_i, e_α:

$$\sum_i e_iX_i+\sum_\alpha e_\alpha X_\alpha\to\Big(\sum_i e_iX_i+\sum_\alpha e_\alpha X_\alpha,\ X_j\Big)=$$
$$=\sum_i e_i\sum_\rho c_{ij\rho}X_\rho+\sum_\alpha e_\alpha\sum c_{\alpha jk}X_k,$$

т. е.

$$e'_k=\sum_\alpha e_\alpha c_{\alpha jk},\quad e'_\rho=\sum_i e_ic_{ij\rho}.$$

Здесь записано линейное преобразование, отвечающее бесконечно малому преобразованию E_j; само же это преобразование имеет вид

$$\delta e_k=\delta t\sum_\alpha e_\alpha c_{\alpha jk},\quad \delta e_\rho=\delta t\sum_i e_ic_{ij\rho}.$$

Соответствующая вариация инвариантной формы

$$-\varphi(e)=\sum_i \lambda_i e_i^2+\sum_\alpha e_\alpha^2$$

должна быть равна нулю:

$$0=-\delta\varphi(e)=\delta\left(\sum_i \lambda_i e_i^2+\sum_\alpha e_\alpha^2\right)=$$

$$=2\delta t\sum_i \lambda_i e_i \sum_\alpha e_\alpha c_{\alpha j i}+2\delta t\sum_\alpha e_\alpha \sum_i e_i c_{i j \alpha}.$$

Так как это тождество относительно e_i, e_α, то

$$\lambda_i c_{\alpha j i}+c_{i j \alpha}=0$$

или

$$c_{j i \alpha}=\lambda_i c_{\alpha j i}.$$

Используя теперь первую из формул (5) (которая не утрачивает силы, так как коэффициенты при e_i^2 в форме $F(e)$ остались $=1$), продолжим полученный результат:

$$c_{j i \alpha}=\lambda_i c_{\alpha j i}=-\lambda_i c_{\alpha i j}.$$

Поменяем местами i и j:

$$c_{i j \alpha}=\lambda_j c_{\alpha i j}=-\lambda_j c_{\alpha j i}.$$

Как видно, левые части равенств отличаются лишь знаком; поэтому

$$c_{i j \alpha}=\lambda_j c_{\alpha i j}=\lambda_i c_{\alpha i j}.$$

Мы получили формулы (7).

Для дальнейшего необходимо иметь в виду, что значения λ_i определились при совместном приведении к каноническому виду двух квадратичных форм: $\varphi(e)$ и $F(e)$. Форма $\varphi(e)$ строго определенная и вытекает из самой структуры группы G; форма же $F(e)$ *какая-то* положительно определенная форма, инвариантная относительно γ. Поэтому последующие построения, вообще говоря, зависят от ее выбора.

[74] Определенная таким образом приводимость симметрического пространства носит локальный характер. Здесь не утверждается, что пространство $\mathcal{E}$ *в целом* есть произведение пространств $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}'_1$, т. е. что между точками $\mathcal{E}$ и парами точек $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}'_1$ можно установить взаимно однозначное соответствие, причем $ds^2=ds_1^2+ds_1'^2$.

Речь идет лишь об окрестности произвольной точки.

[75] Статьи Э. Картана, вошедшие в настоящий сборник, посвящены введению понятия симметрического пространства и подробному изложению теории этих пространств. За 20 лет, прошедших со времени опубликования этих статей, теория симметрических пространств получила дальнейшее развитие и была применена к конкретным геометрическим исследованиям главным образом в работах советских математиков. В настоящем примечании дается краткое

изложение основных свойств симметрических пространств, указываются важнейшие модели симметрических пространств и пути применения общей теории симметрических пространств к геометрическим проблемам. Ввиду обширности материала настоящее примечание носит характер статьи; оно написано переводчиком книги Б. А. Розенфельдом.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Основные свойства симметрических пространств. 1. В своей работе „Об одном замечательном классе римановых пространств“ (стр. 112—149 настоящего сборника) Картан определяет *симметрические римановы пространства*, т. е. такие римановы пространства, в которых симметрия относительно точек по геодезическим линиям является изометрическим преобразованием. В своей работе „Геометрия групп преобразований“ (стр. 7—111) Картан рассматривает пространства аффинной связности без кручения, обладающие аналогичным свойством: как известно, геометрия пространств аффинной связности без кручения вполне определяется заданием семейства их геодезических линий и „аффинного параметра“ на этих линиях, определенного с точностью до преобразований $t \to at+b$. Так же, как в римановых пространствах, в пространствах аффинной связности без кручения можно сравнивать отрезки вдоль одной геодезической (хотя, в отличие от римановых пространств, здесь нельзя сравнивать отрезки вдоль разных геодезических), можно определять симметрию относительно точек по геодезическим линиям (всякая точка x при симметрии относительно точки x_0 переходит в точку $'x$, лежащую на геодезической, соединяющей x и x_0, и, если точкам x и x_0 соответствуют значения аффинного параметра t и t_0, точке $'x$ соответствует такое значение параметра $'t$, что $\frac{'t+t}{2}=t_0$). Поэтому можно выделить такие пространства аффинной связности без кручения, в которых симметрия относительно точек по геодезическим линиям не изменяет аффинной связности, т. е. переводит геодезические в геодезические с сохранением их аффинного параметра. Эти пространства аффинной связности, которым Картан не дает специального названия, можно называть *симметрическими пространствами аффинной связности*.

Всякое риманово пространство является пространством аффинной связности без кручения (роль аффинного параметра, на геодезических линиях которого может играть их длина), вследствие чего симметрические римановы пространства являются частными случаями симметрических пространств аффинной связности. Другим частным случаем пространств аффинной связности без кручения являются не рассматриваемые Картаном *псевдоримановы пространства*, в которых так же, как в римановых пространствах определено расстояние между бесконечно близкими точками с помощью невырожденной квадратичной дифференциальной формы, однако в отличие от римановых пространств эта форма не является знакоопределенной. Совершенно так же, как симметрические римановы пространства можно определить *симметрические псевдоримановы пространства*.

Подобно тому как простейшими симметрическими римановыми пространствами являются n-мерное *эвклидово пространство* R_n и n-мерное *эллиптическое пространство* S_n, которое можно определить как гиперсферу в R_{n+1} с отождествленными диаметрально противоположными точками, простейшими симметрическими псевдоримановыми пространствами являются n-мерное *псевдоэвклидово пространство индекса* q ${}^qR^n$ (q — индекс метрической квадратичной формы, т. е. число отрицательных членов в каноническом виде этой формы) и n-мерное *псевдоэллиптическое пространство индекса* q ${}^qS_n$, которое можно определить как гиперсферу в ${}^qR_{n+1}$ с отождествленными диаметрально противоположными точками. Радиус r гиперсфер в R_{n+1} или ${}^qR_{n+1}$ называется *радиусом кривизны* пространств S_n или ${}^qS_n$, а число $\frac{1}{r^2}$ называется *кривизной* этих пространств, вследствие чего гиперсферы в R_{n+1} и ${}^qR_{n+1}$ имеющие вещественный радиус, дают нам пространства S_n и ${}^qS_n$ *положительной кривизны*, а гиперсферы в ${}^qR_{n+1}$, имеющие чисто мнимый радиус (такие гиперсферы при $q > 0$ вещественны), дают нам пространства ${}^qS_n$ отрицательной кривизны. Пространства ${}^1S_n$ называются *гиперболическими пространствами*. Пространство ${}^1S_n$ отрицательной кривизны является римановым, а не псевдоримановым пространством и представляет собой *неэвклидово пространство Н. И. Лобачевского* — первое в истории геометрии пространство, отличное от эвклидова (пространство ${}^1S_n$ положительной кривизны является псевдоримановым). Пространство S_n (положительной кривизны) представляет собой *неэвклидово пространство Римана*.

2. В своей работе „Геометрия групп преобразований“ Картан установил два основных свойства симметрических пространств. Первое из этих свойств связано с понятием параллельного переноса векторов и тензором кривизны пространств аффинной связности и состоит в том, что при параллельном переносе тензор кривизны переходит в тензор кривизны (или, в другой формулировке, что ковариантная производная тензора кривизны равна нулю[1]). Это свойство необходимо и достаточно для того, чтобы пространство аффинной связности без кручения было симметрическим пространством. На этом свойстве мы здесь останавливаться не будем. Заметим только, что оно позволяет рассматривать симметрические пространства как пространства в определенном смысле, являющиеся пространствами постоянной кривизны (их частные случаи S_n и ${}^qS_n$ являются пространствами постоянной кривизны в собственном смысле слова).

Вторым важнейшим свойством симметрических пространств является следующее. Оказывается, что *во всякую группу Ли, рассматриваемую как геометрическое пространство, можно единственным образом ввести аффинную связность симметрического прост-*

---

[1] Первые результаты теории римановых пространств, обладающих этим свойством, за несколько лет до появления общей теории Картана были получены советским геометром П. А. Широковым в его работе [1].

ранства, инвариантную относительно групповых операций $x \to ax$, $x \to xa$, $x \to x^{-1}$: для этого достаточно считать за геодезические линии группы Ли ее *1-параметрические подгруппы и их классы смежности*, а за аффинный параметр — *канонический параметр* этих подгрупп (такой параметр t, что $x(t_1)\,x(t_2) = x(t_1 + t_2)$) и соответственный параметр их классов смежности. Симметрией относительно единицы группы является преобразование $x \to x^{-1}$, симметрией относительно произвольного элемента a являются преобразования $x \to ax^{-1}a$.

Эта аффинная связность в общем случае не порождается ни римановой, ни псевдоримановой метрикой, но *в случае простой группы эта связность порождается единственной с точностью до масштаба инвариантной метрикой — римановой в случае компактности группы и псевдоримановой в случае некомпактности группы*. В своей работе „Геометрия простых групп“ (стр. 183—239 настоящего сборника). Картан подробно рассматривает первый из этих случаев.

Совершенно очевидно, что *все вполне геодезические поверхности группового пространства также являются симметрическими пространствами*. Важным фактом теории симметрических пространств является то, что верно и обратное: *всякое симметрическое пространство может быть реализовано в виде вполне геодезической поверхности некоторого группового пространства*.

Как показал Картан, среди бесконечно малых преобразований фундаментальной группы G всякого симметрического пространства $\mathcal{E}$ можно всегда выбрать базис, состоящий из линейно независимых преобразований двух видов: X_i ($i = 1, 2, \ldots, n$, где n — число измерений пространства $\mathcal{E}$) и Y_α ($\alpha = 1, 2, \ldots, r$, где $n + r$ — число параметров группы G), причем коммутаторы типов $[X_i X_j]$ и $[Y_\alpha Y_\beta]$ являются линейными комбинациями преобразований Y, а коммутаторы типа $[X_i Y_\alpha]$ являются линейными комбинациями преобразований X. Отсюда следует, что:

1°. В группе G существует *инволютивный автоморфизм* (т. е. преобразование $S \to S^*$, при котором $(S_1 S_2)^* = S_1^* S_2^*$ и $S^{**} = S$), определяющийся такой линейной подстановкой бесконечно малых преобразований, при которой преобразования X меняют знак, а преобразования Y остаются инвариантными (так как эта линейная подстановка не изменяет структурных констант группы).

2°. Бесконечно малые преобразования Y порождают группу. Эта группа g является подгруппой группы G и состоит из тех элементов группы G, которые остаются инвариантными при рассматриваемом инволютивном автоморфизме ($S^* = S$).

Подгруппу g, инвариантную при некотором инволютивном автоморфизме, Картан называет *характеристической подгруппой* группы G.

Преобразования подгруппы g переводят в себя некоторую точку пространства $\mathcal{E}$, вследствие чего эти преобразования называют *вращениями* этого пространства, а самую подгруппу g — *стационарной подгруппой* пространства $\mathcal{E}$.

3°. Бесконечно малые преобразования X порождают *вполне геодезическую поверхность* в пространстве группы G, рассматриваемом как пространство аффинной связности без кручения, причем эта поверхность и является реализацией пространства $\mathcal{E}$.

Преобразования группы G, порожденные преобразованиями X, называются *сдвигами* пространства $\mathcal{E}$.

Заметим, что если симметрия относительно точки x пространства $\mathcal{E}$ является преобразованием σ группы G, то преобразования группы G, порожденные бесконечно малыми преобразованиями X, имеют вид $\sigma\sigma_0$, где σ_0 — симметрия относительно фиксированной точки x_0 пространства $\mathcal{E}$. В этом случае инволютивный автоморфизм, определяющий эту поверхность, имеет вид $S \rightarrow S^* = \sigma_0 S \sigma_0$.

Указанные свойства симметрических пространств позволяют определить их различными способами: с помощью указания фундаментальной группы G и некоторого ее инволютивного автоморфизма $S \rightarrow S^*$, с помощью указания фундаментальной группы G и некоторой ее характеристической подгруппы g и, наконец, с помощью указания фундаментальной группы G и некоторой вполне геодезической поверхности в ее групповом пространстве. В разных работах, вошедших в настоящий сборник, Картан пользуется различными из этих способов задания симметрического пространства, однако, как мы видели, все эти способы легко сводятся один к другому.

II. Модели симметрических пространств и геометрия образов симметрии. 3. Кроме указанных способов абстрактного задания симметрического пространства, с помощью указания его фундаментальной группы и ее инволютивного автоморфизма, характеристической подгруппы или вполне геодезической поверхности, симметрические пространства можно задавать с помощью построения их моделей. Настоящая статья посвящена именно этому способу задания симметрических пространств, позволяющему применить общую теорию симметрических пространств для получения конкретных геометрических результатов.

Пусть группа G является фундаментальной группой некоторого однородного пространства E и пусть в пространстве E имеется геометрическая конфигурация A_0, переводящаяся в себя *инволютивным преобразованием* σ_0 группы G (т. е. таким преобразованием, квадрат которого является тождественным преобразованием). Будем называть такое преобразование σ_0 *симметрией* относительно конфигурации A_0, а самое конфигурацию A_0, определяющую такое преобразование, — *образом симметрии*. Преобразования группы G переводят конфигурацию A_0 в конфигурации A, определяющие симметрии σ. Совокупность всех получающихся таким образом конфигураций A мы будем называть *пространством образов симметрии*.

Построенное таким образом пространство образов симметрии в E является моделью некоторого симметрического пространства $\mathcal{E}$ с фундаментальной группой G. В самом деле, симметрия σ_0 относительно произвольного из построенных нами образов симметрии A_0 в E определяет инволютивный автоморфизм $S \rightarrow S^* = \sigma_0 S \sigma_0$ в группе G, который в свою очередь определяет некоторое симметрическое пространство $\mathcal{E}$ с фундаментальной группой G. Стационарной подгруппой этого пространства является подгруппа g

группы G, переводящая в себя образ A_0 (элементы этой подгруппы определяются свойством $S = S^*$ или $S\sigma_0 = \sigma_0 S$, т. е. эти элементы перестановочны с симметрией σ_0). Вполне геодезическая поверхность группового пространства группы G, реализующая пространство $\mathcal{E}$ и состоящая из преобразований этой группы, порожденной бесконечно малыми преобразованиями изменяющими знак при инволютивном автоморфизме $S \rightarrow S^*$, образована произведениями симметрий вида $\sigma\sigma_0$ (так что всякому образу симметрии A взаимно однозначно соответствует элемент $\sigma\sigma_0$, где σ — симметрия относительно A). При этом симметрия относительно образа симметрии в E является симметрией относительно соответственной точки симметрического пространства $\mathcal{E}$ в том смысле, который применялся при определении симметрических пространств.

Аффинная связность или метрика в групповом пространстве группы G, инвариантная относительно преобразований $S \rightarrow TS$, $S \rightarrow ST$, $S \rightarrow S^{-1}$ этой группы, порождает аффинную связность или метрику в построенном нами пространстве образов симметрии, инвариантную относительно преобразований группы G. В самом деле, при преобразовании S в пространстве образов симметрии симметрия σ относительно образа A преобразуется в симметрию относительно образа $S(A)$, полученного из A преобразованием S. Симметрия относительно образа $S(A)$ имеет вид $S\sigma S^{-1}$. Этой симметрии соответствует элемент $(S\sigma S^{-1})\sigma_0$ вполне геодезической поверхности группового пространства группы G. Таким образом элемент $\sigma\sigma_0$ этой поверхности при преобразовании S группы G переходит в элемент $(S\sigma S^{-1})\sigma_0$ этой поверхности. Но элемент $(S\sigma S^{-1})\sigma_0$ может быть переписан в виде $S(\sigma\sigma_0)\sigma_0 S^{-1}\sigma_0 = S(\sigma\sigma_0)(\sigma_0 S\sigma_0)^{-1} = S(\sigma\sigma_0)(S^*)^{-1}$. Поэтому при преобразованиях S группы G в построенном нами пространстве образов симметрии изображающая это пространство вполне геодезическая поверхность подвергается преобразованию, состоящему из преобразований $T \rightarrow UT$ и $T \rightarrow TU$, т. е. аффинная связность или метрика, порождаемая на этой поверхности, является инвариантной при определенных выше преобразованиях группы G на этой поверхности. Но эта связность или метрика, естественно, переносится на само пространство образов симметрии: роль геодезических линий в пространстве образов симметрии играют последовательности образов симметрии, изображающиеся геодезическими линиями построенной вполне геодезической поверхности, а значения аффинного параметра, соответствующие определенным образам симметрии, полагаются равными значениям аффинного параметра в соответственных точках вполне геодезической поверхности; в случае же инвариантной метрики расстояние между двумя образами симметрии полагается равным расстоянию между соответственными точками вполне геодезической поверхности.

Таким образом может быть построена модель любого симметрического пространства $\mathcal{E}$ с фундаментальной группой G: если симметрии относительно точек пространства $\mathcal{E}$ являются элементами σ группы G, то пространством образов симметрии является пространство конфигураций пространства E, переводящихся в себя преобразованиями σ, если же симметрии относительно точек $\mathcal{E}$ не являются элементами G, то группу G следует расширить таким образом, чтобы инволютивный автоморфизм, соответствующий данному симметрическому пространству, стал внутренним автоморфизмом, т. е. преобразованием типа $S \to S^* = \sigma_0 S \sigma_0^{-1} = \sigma_0 S \sigma_0$, далее следует построить все преобразования расширенной группы типа $\sigma = S\sigma_0 S^{-1}$, где S — произвольное преобразование группы G, и искомым пространством образов симметрии снова является пространство конфигураций пространства E, переводящихся в себя преобразованиями σ.

Мы видим, что теория симметрических пространств теснейшим образом связана с геометрией образов симметрии, которая и образует область геометрических приложений теории симметрических пространств.

4. Какие же разделы геометрии составляют геометрию образов симметрии? Уже самый беглый обзор образов симметрии 3-мерного пространства показывает, что эта область геометрии достаточно широка. В самом деле, *точки* эвклидова и неэвклидовых пространств являются образами симметрии, так как в этих пространствах можно определить *отражение* относительно точек, вследствие чего обычные эвклидова и неэвклидовы геометрии являются простейшими геометриями образов симметрии, что, впрочем, следует и из того, что римановы пространства постоянной кривизны являются простейшими случаями симметрических римановых пространств.

Далее, *плоскости* и *прямые* эвклидова и неэвклидовых пространств также являются образами симметрии, так как в этих пространствах можно определить *отражение* относительно плоскости и прямой (по перпендикулярам), вследствие чего геометрия плоскостей и геометрия прямых (линейчатая геометрия) эвклидова и неэвклидовых пространств также являются геометриями образов симметрии.

Далее, *шары* и *круги* конформного пространства (эвклидова пространства, дополненного одной бесконечно удаленной точкой, за фундаментальную группу которого взята группа конформных преобразований) также являются образами симметрии, так как в конформном пространстве можно определить *инверсию* относительно шара и круга (инверсия относительно круга — произведение инверсий относительно двух ортогональных шаров, проходящих через этот круг), вследствие чего геометрии шаров и кругов конформного пространства также являются геометриями образов симметрии.

Далее, *квадрики* (поверхности второго порядка) проективного пространства (за фундаментальную группу которого взята полная группа коллинеаций и корреляций) также являются образами симметрии, так как в проективном пространстве можно определить *полярное преобразование* относительно квадрики, вследствие чего геометрия квадрик проективного пространства также является геометрией образов симметрии.

Наконец, конфигурации *точка + плоскость* и *пары прямых* в проективном пространстве также являются образами симметрии, так как в проективном пространстве можно определить *инволюции*, оставляющие инвариантными точки этих образов (в первом случае всякой точке ставится в соответствие четвертая гармоническая точка для тройки точек, состоящей из данной точки, точки данной конфигурации и точки пересечения прямой, проходящей через эти две точки, с плоскостью конфигурации; во втором случае всякой точке ставится в соответствие четвертая гармоническая точка для тройки точек, состоящей из данной точки и точек пересечения прямой, проходящей через данную точку и пересекающей прямые пары, с этими прямыми), вследствие чего геометрия конфигураций точка + плоскость и пар прямых в проективном пространстве также являются геометриями образов симметрии[1].

Перечисленные здесь геометрии образов симметрии представляют собой хорошо известные области геометрического исследования, однако до появления теории симметрических пространств все эти области развивались с помощью специфических методов, почти совершенно не связанных между собой. С основными результатами линейчатой геометрии и геометрии шаров и кругов, относящимися к этому периоду развития этих геометрий, читатель может познакомиться по книге Ф. Клейна [1].

На основе теории симметрических пространств все эти геометрии, а также те геометрии образов симметрии, которые не рассматривались раньше, могут быть построены и развиты дальше совершенно единым методом.

Возможность приложения теории симметрических пространств к конкретным геометриям образов симметрии впервые была указана самим Картаном в его мемуаре „Об одном замечательном классе римановых пространств“ (см. стр. 115 настоящего сборника). Однако сам Картан реализовал эту возможность только для случая геометрии 3-мерного комплексного проективного пространства и некоторых подчиненных ей геометрий[2].

III. Классификация пространств образов симметрии с компактными простыми фундаментальными группами. 5. Изложенная в настоящем сборнике классификация инволютивных автоморфизмов в простых группах Ли позволяет произвести полную классификацию всех пространств образов симметрии с простыми фундаментальными группами. Приведем здесь эту классификацию в случае тех групп, которые представляют наибольший геометрический интерес.

Прежде всего напомним классификацию компактных простых групп и инволютивных автоморфизмов в этих группах.

Как известно, вещественные или комплексные матрицы называются *унимодулярными*, если их детерминант равен +1. Вещественные или комплексные матрицы называются *ортогональными*, если они переводят в себя квадратичную форму

$$\sum_i x^{i2}. \qquad (1)$$

---

[1] Геометрия конфигураций точка + плоскость впервые изучалась (с другой точки зрения) Д. М. Синцовым в его теории *коннексов* (см. Синцов [1]), геометрия пар прямых впервые изучалась (также с другой точки зрения) А. П. Котельниковым в его теории *моторов* (см. Котельников [1]).

[2] Этим приложениям посвящена книга Картана [28].

Ортогональные матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\sum_i a^i_j a^i_k = \delta_{jk}. \tag{2}$$

Вещественные или комплексные матрицы называются *симплектическими*, если они переводят в себя кососимметрическую билинейную форму („внешнюю форму“)

$$\sum_i (x^i y^{i+n} - x^{i+n} y^i) = \sum_i [x^i y^{i+n}] \tag{3}$$

Симплектические матрицы удовлетворяют соотношению

$$\sum_i (a^i_j a^{i+n}_k - a^{i+n}_j a^i_k) = \delta_{j,\, k+n} - \delta_{j-n,\, k}. \tag{4}$$

Комплексные матрицы называются *унитарными*, если они переводят в себя эрмитову форму

$$\sum_i x^i \bar{x}^i. \tag{5}$$

Унитарные матрицы удовлетворяют соотношениям

$$\sum_i a^i_j \bar{a}^i_k = \delta_{jk}. \tag{6}$$

Тогда *классификация компактных простых групп Ли производится следующим образом: все компактные простые группы Ли локально изоморфны группам четырех „больших классов“ A_l, B_l, C_l (l пробегает все натуральные числа) и D_l (l пробегает все натуральные числа кроме 2), причем группа A_l состоит из всех унимодулярных унитарных комплексных матриц $(l+1)$-го порядка, группа B_l состоит из всех ортогональных вещественных матриц $(2l+1)$-го порядка, группа C_l состоит из всех унитарных симплектических комплексных матриц $2l$-го порядка, группа D_l состоит из всех ортогональных вещественных матриц $2l$-го порядка (между этими группами имеют место локальные изоморфизмы $A_1 = B_1 = C_1$, $B_2 = C_2$, $A_3 = D_3$) или пяти изолированным группам E_6, E_7, E_8, F_4, G_2.*

Группа D_2 не является простой и изоморфна прямому произведению двух групп B_1; группа D_1 является 1-параметрической.

Здесь мы рассмотрим более подробно группы четырех больших классов.

6. Для того чтобы получить другое представление групп C_l, рассмотрим кольцо *кватернионов* $\alpha = a + bi + cj + dk$ ($i^2 = j^2 = -1$, $k = ij = -ji$, a, b, c, d — вещественные числа). Это кольцо изоморфно представляется кольцом комплексных матриц второго порядка типа $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$: для доказательства достаточно поставить в соответствие всякому кватерниону $a + bi + cj + dk$ комплексную матрицу $\begin{pmatrix} a + di & -b + ci \\ b + ci & a - di \end{pmatrix}$ и убедиться, что сумме и произведению кватернионов соответствует сумма и произведение соответственных матриц, и обратно.

Так как для каждого кватерниона $\alpha = a + bi + cj + dk$ определен ***сопряженный кватернион*** $\bar{\alpha} = a - bi - cj - dk$, причем произведение является вещественным числом $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, то над кватернионами, так же, как над комплексными числами, можно определить эрмитовы формы, имеющие вид (5), где все переменые x^i и $\overline{x^i}$ являются кватернионами. Поэтому можно определить группу кватернионных матриц, преобразующих кватернионные переменные x^i по формулам $'x^i = \sum\limits_j a^i_j x^i$ (где все переменные $'x^i$, x^j и элементы матриц a^i_j — кватернионы) и переводящих в себя эрмитову форму (5). Такие кватернионные матрицы также называются унитарными и удовлетворяют соотношениям (6) (где все элементы матриц a^i_j и $\overline{a^i_k}$ — кватернионы).

В отличие от вещественных и комплексных чисел кольцо кватернионов *некоммутативно* (т. е. для кватернионов α и β в общем случае $\alpha\beta \neq \beta\alpha$), вследствие чего для кватернионных матриц нельзя определить детерминантов, инвариантных относительно преобразования переменных. Поэтому нельзя определить унимодулярных кватернионных матриц.

Как показал Шевалле[1], *группа C_l в точности изоморфна группе унитарных кватернионных матриц l-го порядка.* Для доказательства достаточно всякой кватернионной матрице l-го порядка a^i_j, удовлетворяющей условию (6), поставить в соответствие такую комплексную матрицу A^I_J $2l$-го порядка ($i, j = 1, 2, \ldots, l$; $I, J = 1, 2, \ldots, 2l$), что если при указанном выше изоморфизме кольца кватернионов и кольца комплексных матриц второго порядка типа $\begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ кватерниону a^i_j соответствует матрица $\begin{pmatrix} \alpha^i_j & -\overline{\beta^i_j} \\ \beta^i_j & \overline{\alpha^i_j} \end{pmatrix}$, то комплексная матрица определяется соотношениями $A^i_j = \alpha^i_j$, $A^{i+l}_j = \beta^i_j$, $A^i_{j+l} = -\overline{\beta^i_j}$, $A^{i+l}_{j+l} = \overline{\alpha^i_j}$, и убедиться, что комплексные матрицы A^I_J удовлетворяют условиям (6) и (4), что, обратно, всякой комплексной матрице A^I_J, удовлетворяющей этим двум условиям, по тем же формулам можно поставить в соответствие кватернионную матрицу a^i_j, удовлетворяющую условию (6), и что произведению двух кватернионных матриц соответствует произведение соответственных комплексных матриц.

7. Как показал Картан, все инволютивные автоморфизмы групп A_l, B_l, C_l и D_l могут быть представлены в виде преобразования $S \to \sigma S \sigma^{-1}$, где σ — элемент самой рассматриваемой группы или группы, полученной с помощью некоторого расширения этой группы.

Элементы σ, порождающие инволютивные автоморфизмы группы A_l, могут быть приведены к виду

$$x^i = -x^i \, (i = 0, 1, \ldots, p), \quad 'x^{p+j} = x^{p+j} \; (j = 1, 2, \ldots, n-p), \tag{7}$$

---

[1] См. Шевалле [2], стр. 38 русского перевода.

или

$$'x^i = \overline{x^i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{8}$$

где $l = n$, или к виду

$$'x^i = \overline{x^{i+n}}, \quad 'x^{i+n} = \overline{x^i} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{9}$$

где $l = 2n - 1$, или являются произведениями двух или трех из этих преобразований.

Симметрические пространства, фундаментальной группой которых является группа A_l, соответствующие инволютивным автоморфизмам, порождаемым этими элементами σ, Картан называет, соответственно, симметрическими пространствами типов AIII и AIV (частный случай при $p = 0$ или $n - 1$), AI и AII.

Элементы σ, порождающие инволютивные автоморфизмы группы B_l, могут быть приведены к виду (7), где $n = 2l$. Симметрические пространства, фундаментальной группой которых является группа B_l, соответствующие инволютивным автоморфизмам, порождаемым этими элементами σ, Картан называет симметрическими пространствами типов BI и BII (частный случай при $p = 0$ или $n - 1$).

Элементы σ, порождающие инволютивные автоморфизмы группы C_l, могут быть приведены к виду (7), где $n = 2l - 1$ и p нечетно, и к виду

$$'x^i = -ix^{i+n}, \quad 'x^{i+n} = ix^i \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{10}$$

где $n = l$, или являются произведениями этих преобразований.

Симметрические пространства, фундаментальной группой которых является группа C_l, соответствующие инволютивным автоморфизмам, порождаемым этими элементами σ, Картан называет соответственно симметрическими пространствами типов CII и CI.

Если представить группу C_l не комплексными матрицами $2l$-го порядка, а кватернионными матрицами l-го порядка, то элементы σ, порождающие инволютивные автоморфизмы этой группы, могут быть приведены соответственно к виду (7), где $'x^i$ и x^i уже не комплексные числа, а кватернионы, и $n = l - 1$, и к виду

$$'x^i = ix^i i^{-1} \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \tag{11}$$

где $'x^i$ и x^i кватернионы, i — одна из кватернионных единиц, а $n = l - 1$, или являются произведениями этих преобразований.

Элементы σ, порождающие инволютивные автоморфизмы группы D_l, могут быть приведены к виду (7), где $n = 2l - 1$, и к виду

$$'x^i = -x^{i+n}, \quad 'x^{i+n} = x^i \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{12}$$

где $l = n$, или являются произведениями этих преобразований.

Симметрические пространства, фундаментальной группой которых является группа D_l, соответствующие инволютивным автоморфизмам, порождаемым этими элементами σ, Картан называет соответственно симметрическими пространствами типов DI и DII (частный случай при $p = 0$ или $n - 1$) и DIII.

Симметрические пространства с теми же фундаментальными группами A_l, B_l, C_l, D_l, соответствующие инволютивным автоморфизмам, порождаемым произведениями указанных элементов σ, как мы увидим ниже, являются приводимыми римановыми пространствами.

8. Для построения моделей симметрических пространств с фундаментальными группами классов B и D заметим, что эти группы локально изоморфны группам движений n-мерных *вещественных эллиптических пространств* S_n, т. е. гиперсфер в R_{n+1} с отождествленными диаметрально противоположными точками (для групп B_l $n=2l$, для групп D_l $n=2l-1$).

Пространство S_n можно также определить как n-мерное вещественное проективное пространство P_n, в качестве группы преобразований которого рассматривается группа проективных преобразований, переводящих в себя мнимую квадрику

$$\sum_i x^{i3} = 0, \tag{13}$$

называемую *абсолютом* S_n.

Расстояние ω между точками x и y пространства S_n определяется по формуле

$$\cos^2 \frac{\omega}{r} = \frac{\left(\sum_i x^i y^i\right)^2}{\sum_i x^{i2} \cdot \sum_i y^{i2}}, \tag{14}$$

где r — радиус кривизны пространства S_n.

Преобразования (7) в S_n представляют собой отражения относительно *p-мерных плоскостей* (при $p=0$ относительно точек, при $p=1$ относительно прямых), причем отражение относительно каждой p-мерной плоскости одновременно является отражением относительно $(n-p-1)$-мерной плоскости, являющейся абсолютной полярой данной плоскости (т. е. полярой этой плоскости по отношению к абсолюту S_n).

Преобразование (12) в S_{2n-1} переводит каждую точку x в точку $'x$, находящуюся на расстоянии $\frac{\pi}{2} r$ от точки x (так как выражение (14) для точек x и $'x$ равно 0). Соединяя каждую точку x с соответственной точкой $'x$ прямой, мы найдем, что через каждую точку пространства проходит единственная прямая полученной системы. Такая система называется *паратактической конгруэнцией* („конгруэнцией параллелей Клиффорда“). Нетрудно проверить, что две прямые такой конгруэнции имеют не 2 общих перпендикуляра, как две прямые S_{2n-1} в общем случае, а 1-параметрическое множество общих перпендикуляров, причем все эти перпендикуляры имеют одинаковую длину, а также то, что каждая прямая такой конгруэнции соединяет пару комплексно сопряженных точек двух комплексно сопряженных плоскостей

$$x^i + i x^{i+n} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1)$$

и

$$x^i - i x^{i+n} = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{15}$$

лежащих на абсолюте (13). Прямая паратактической конгруэнции, проходящая через точку x, проходит через точки

$$'x^i = x^i \cos t - x^{i+n} \sin t, \quad 'x^{i+n} = x^i \sin t = x^{i+n} \cos t. \tag{16}$$

Преобразование, переводящее всякую точку x в соответственную точку (16), называется *паратактическим* (параллельным) *сдвигом*. При таком сдвиге каждая прямая паратактической конгруэнции переходит в себя, сдвигаясь на отрезок tr. Преобразование (12) является частным случаем паратактического сдвига, при котором каждая прямая паратактической конгруэнции сдвигается на половину своей длины.

Поэтому *образами симметрии в S_n, образующими модели неприводимых симметрических пространств, являются p-мерные плоскости (при $p=0$ точки, при $p=1$ прямые) вместе с их абсолютными полярами и, при нечетном n, паратактические конгруэнции.*

Пространство p-мерных плоскостей S_n при $p \neq 0$ или $n-1$ является моделью симметрического пространства BDI, пространство точек или гиперплоскостей S_n (т. е. само S_n) является моделью симметрического пространства BDII, пространство паратактических конгруэнций S_n является моделью симметрического пространства (DIII).

Произведение преобразований (7) и (12) при нечетных n и p определяет сдвиги вдоль паратактических конгруэнций в некоторой p-мерной плоскости S_n и ее абсолютной поляре. Пространство таких конгруэнций может быть расщеплено на семейства конгруэнций в плоскостях и является моделью приводимого симметрического пространства, представляющего собой метрическое произведение пространства BDI и двух пространств DIII.

9. Группы класса A локально изоморфны группам движений n-мерных *комплексных унитарно-эллиптических пространств $K_n(i)$*, которые можно определить как n-мерные комплексные проективные пространства $P_n(i)$, в качестве групп преобразований которых рассматриваются группы проективных преобразований, переводящих в себя мнимые поверхности

$$\sum x^i \bar{x}^i = 0. \tag{17}$$

Поверхность (17) называется *абсолютом* $K_n(i)$.

Расстояние ω между точками x и y пространства $K_n(i)$ определяется по формуле

$$\cos^2 \frac{\omega}{r} = \frac{\sum\limits_i x^i \bar{y}^i \cdot \sum\limits_i y^i \bar{x}^i}{\sum\limits_i x^i \bar{x}^i \cdot \sum\limits_i y^i \bar{y}^i}, \tag{18}$$

где число r (всегда вещественное) — радиус кривизны пространства $K_n(i)$. Пространство $K_1(i)$ изометрично сфере радиуса $\frac{r}{2}$ в пространстве R_3, пространства $K_n(i)$ при $n > 1$ изометричны вещественным $2n$-мерным римановым пространствам переменной кривизны. Пространство $K_n(i)$ впервые рассматривалось Фубини и Штуди (подробнее об этом пространстве см. цитированную книгу Картана [28], стр. 241 и след.).

Преобразования (7) в $K_n(i)$ представляют собой отражения относительно комплексных *p-мерных плоскостей* (при $p=0$ относительно точек, при $p=1$ относительно прямых), причем отражение относительно p-мерной плоскости является одновременно отражением относительно $(n-p-1)$-мерной плоскости, являющейся абсолютной полярой данной плоскости. Преобразование (8) представляет собой отражение относительно геометрического места точек с вещественными координатами, изометричного S_n. Такое геометрическое место, а также все геометрические образы, получающиеся из него движениями $K_n(i)$, называются ***нормальными n-мерными цепями*** $K_n(i)$.

Преобразование (9) в $K_{2n-1}(i)$ переводит каждую точку x в точку $'x$, находящуюся на расстоянии $\frac{\pi}{2}r$ от точки x (так как выражение (18) для точек x и $'x$ равно 0). Соединяя каждую точку x с соответственной точкой $'x$ прямой, мы найдем, что через каждую точку пространства проходит единственная прямая полученной системы. Такая система называется *комплексной паратактической конгруэнцией*. Нетрудно проверить, что две прямые такой конгруэнции имеют не 2 общих перпендикуляра, как две прямые $K_{2n-1}(i)$ в общем случае, а 2-параметрическое множество общих перпендикуляров, причем все эти перпендикуляры имеют одинаковую длину. Прямая паратактической конгруэнции, проходящая через точку x, проходит через точки

$$'x^i=\alpha x^i-\beta\overline{x}^{i+n},\quad 'x^{i+n}=\alpha x^{i+n}+\beta\overline{x}^i,\quad \alpha\overline{\alpha}+\beta\overline{\beta}=1. \tag{19}$$

(при этом координаты точек прямой $'x^i$ и $'x^{i+n}$ рассматриваются с точностью до умножения на комплексное число единичного модуля).

Преобразование, переводящее всякую точку x в соответственную точку (19), называется *комплексным паратактическим сдвигом*, при таком сдвиге каждая прямая паратактической конгруэнции переходит в себя. Преобразование (9) является частным случаем комплексного паратактического сдвига, двухкратное повторение которого является тождественным преобразованием (на сфере радиуса $\frac{r}{2}$ в R_3, изометричной прямой $K_n(i)$, такой сдвиг представляется отражением относительно центра сферы).

Поэтому *образами симметрии в* $K_n(i)$, *образующими модели неприводимых симметрических пространств, являются комплексные p-мерные плоскости (при $p=0$ точки, при $p=1$ прямые) вместе с их абсолютными полярами, нормальные n-мерные цепи, и, при нечетном n, комплексные паратактические конгруэнции.*

Пространство нормальных n-мерных цепей $K_n(i)$ является моделью симметрического пространства AI, пространство комплексных паратактических конгруэнций $K_n(i)$ является моделью симметрического пространства AII, пространство комплексных p-мерных плоскостей $K_n(i)$ при $p \neq 0$ и $n-1$ является моделью симметрического пространства AIII, пространство точек $K_n(i)$ (т. е. само $K_n(i)$) является моделью симметрического пространства AIV.

Преобразования, являющиеся произведениями преобразований (7) и (8), представляют собой отражения относительно вещественных p-мерных плоскостей и их абсолютных поляр в нормальных n-мерных цепях $K_n(i)$, рассматриваемых как пространства S_n. Преобразования являющиеся произведениями преобразований (8) и (9), представляют собой вещественные паратактические сдвиги в нормальных n-мерных цепях, рассматриваемых как пространства S_n, т. е. симметрии относительно вещественных паратактических конгруэнций в нормальных n-мерных цепях $K_n(i)$. Преобразования, являющиеся произведениями преобразований (7) и (9) и преобразований (7), (8) и (9) (при нечетных n и p), определяют сдвиги вдоль комплексных и вещественных паратактических конгруэнций в некоторой p-мерной плоскости $K_n(i)$ и в ее абсолютной поляре. Пространства образов симметрии последних четырех классов могут быть расщеплены на семейства таких образов, лежащих в одной нормальной n-мерной цепи или в одной p-мерной плоскости и ее взаимной поляре, и являются моделями приводимых симметрических пространств, представляющих собой метрические произведения пространства AI соответственно на пространства BDI и BDII в первом случае и на пространства DIII во втором случае, и метрические произведения пространства AIII на два пространства AII в третьем случае, и на два пространства AII и два пространства DIII в четвертом случае.

Заметим также, что пространству $K_n(i)$ можно дать и вещественную интерпретацию. В n° 8 мы определили паратактическую конгруэнцию в S_{2n-1}. Прямые этой конгруэнции находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с точками каждой из комплексных плоскостей (15), представляющих собой пространства $P_{n-1}(i)$. Если мы поставим в соответствие каждой паре точек такого $P_{n-1}(i)$ расстояние (длину общих перпендикуляров) между соответственными прямыми паратактической конгруэнции, мы введем в это $P_{n-1}(i)$ метрику. Ставя всякой прямой с координатами точек (16) в соответствие точку $P_{n-1}(i)$ с координатами $\xi^i=(x^i+ix^{i+n})e^{it}$ и находя расстояние между двумя прямыми конгруэнции, мы найдем, что это расстояние выражается через координаты соответственных точек $P_{n-1}(i)$ по формуле (14), т. е. пространство $P_{n-1}(i)$ с введенной нами метрикой совпадает с пространством $K_{n-1}(i)$. Таким образом, *пространство $K_n(i)$ изометрично паратактической конгруэнции в S_{2n+1}*.

Подгруппа группы движений S_{2n-1}, переводящая в себя паратактическую конгруэнцию, может быть определена также как такая подгруппа группы движений S_{2n-1}, которая переводит в себя кососимметрическую билинейную форму (3). Эта группа является прямым произведением 1-параметрической группы паратактических сдвигов вдоль прямых конгруэнции и группы, переводящей прямые конгруэнции друг в друга, и изоморфной группе движений $K_{n-1}(i)$.

10. Группы класса C также локально изоморфны группам движений некоторого пространства. Для определения этого пространства рассмотрим n-мерное *кватернионное проективное пространство* $P_n(i, j)$, каждая точка которого задается $n+1$ кватернионными координатами x^i, определенными с точностью до правого кватернионного множителя ρ, $x^i \to x^i\rho$ (кольцо кватернионов некоммутативно). Проективные преобразования этого пространства имеют вид $'x^i=\sum_j a^i_j x^j$, где координаты $'x^i$, x^j и элементы матриц a^i_j — кватернионы. В отличие от групп проективных преобразований в P_n и $P_n(i)$, локально изоморфных группам соответственно вещественных или комплексных унимодулярных матриц, группа проективных преобразований в $P_n(i, j)$ локально изоморфна группе всех обратимых кватернионных матриц (так как над кватернионами нельзя построить инвариантных детерминантов).

Будем называть n-мерным *кватернионным унитарно-эллиптическим пространством* $K_n(i,j)$ пространство $P_n(i,j)$, в качестве группы преобразований которого рассматривается группа проективных преобразований, переводящих в себя мнимую поверхность с уравнением (17), где все координаты x^i и $\bar{x}^i$ являются кватернионами. Эта поверхность называется *абсолютом* $K_n(i,j)$.

Расстояние ω между точками x и y пространства $K_n(i,j)$ мы определим по той же формуле (18), что и в $K_n(i)$, где, однако, все координаты x^i, y^i, $\bar{x}^i$, $\bar{y}^i$ являются кватернионами. Легко видеть, что правая часть формулы (18) здесь, так же, как в $K_n(i)$, всегда вещественна и принимает значения от 0 до $+1$. Вещественное число r здесь также называется радиусом кривизны пространства $K_n(i,j)$. Пространство $K_1(i,j)$ изометрично сфере радиуса $\frac{r}{2}$ в пространстве R_5; пространства $K_n(i,j)$ при $n>1$ изометричны вещественным $4n$-мерным римановым пространствам переменной кривизны[1].

Из определения пространства $K_n(i,j)$ видно, что группы класса C с точностью до локального изоморфизма совпадают с группами движений пространств $K_n(i,j)$.

Преобразования (7) в $K_n(i,j)$ представляют собой отражения относительно кватернионных *p-мерных плоскостей* (при $p=0$ относительно точек, при $p=1$ относительно прямых), причем отражение относительно p-мерной плоскости является одновременно отражением относительно $(n-p-1)$-мерной плоскости, представляющей собой абсолютную поляру данной плоскости. Преобразование (11), переводящее всякий кватернион $a+bi+cj+dk$ в кватернион $a+bi-cj-dk$, представляет собой отражение относительно геометрического места точек $K_n(i,j)$, координатами которого служат кватернионы типа $a+bi$. Такое геометрическое место изометрично $K_n(i)$. Это геометрическое место, а также все геометрические образы, получающиеся из него движениями $K_n(i,j)$, называются *нормальными n-мерными цепями* $K_n(i,j)$.

Поэтому *образами симметрии в $K_n(i,j)$, образующими модели неприводимых симметрических пространств, являются кватернионные p-мерные плоскости (при $p=0$ точки, при $p=1$ прямые) вместе с их абсолютными полярами и нормальные n-мерные цепи.*

Пространство нормальных n-мерных цепей $K_n(i,j)$ является моделью симметрического пространства CI, пространство кватернионных p-мерных плоскостей $K_n(i,j)$ является моделью пространства CII. Картан не выделяет случаев $p=0$ и $n-1$ — случаев пространств точек и гиперплоскостей пространства $K_n(i,j)$, т. е. самого пространства $K_n(i,j)$, которое, однако, по аналогии с соответственными пространствами групп A, B и D можно назвать пространством CIII.

---

[1] Более подробно о пространствах $K_n(i,j)$ см. в заметке автора [10].

Преобразования, являющиеся произведениями преобразований (7) и (11), представляют собой отражения относительно комплексных p-мерных плоскостей и их абсолютных поляр в нормальных n-мерных цепях $K_n(i, j)$, рассматриваемых как пространства $K_n(i)$. Пространства таких плоскостей могут быть расщеплены на семейства плоскостей, лежащих в одной нормальной n-мерной цепи, и являются моделями приводимых симметрических пространств, представляющих собой метрические произведения пространства CI на пространства AIII и AIV.

Заметим также, что пространству $K_n(i, j)$ можно дать и другую интерпретацию, связанную с первоначальным определением групп C. В n° 9 мы определили комплексную паратактическую конгруэнцию в $K_{2n-1}(i)$. Если мы поставим каждой точке пространства $K_{2n-1}(i)$ с координатами (x^i, x^{i+n}) в соответствие комплексную матрицу $\begin{pmatrix} x^i & -\overline{x^{i+n}} \\ x^{i+n} & \overline{x^i} \end{pmatrix}$, то каждой прямой паратактической конгруэнции в K_{2n-1}, координаты точек которой имеют вид (19), мы поставим во взаимно однозначное соответствие совокупность комплексных матриц

$$\begin{pmatrix} \alpha x^i - \beta\overline{x^{i+n}} & -\overline{\alpha}\,\overline{x^{i+n}} - \overline{\beta} x^i \\ \alpha x^{i+n} + \beta\overline{x^i} & \overline{\alpha}\,\overline{x^i} - \overline{\beta} x^{i+n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^i & -\overline{x^{i+n}} \\ x^{i+n} & \overline{x^i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad (20)$$

где α, β — произвольные комплексные числа, связанные условием $\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} = 1$. Но так как все комплексные матрицы, участвующие в формуле (20), имеют вид $\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$, каждой из этих матриц можно взаимно однозначно поставить в соответствие кватернион $a + bi + cj + dk$ (для которого $\alpha = a + di$; $\beta = b + ci$) и, следовательно, каждой прямой паратактической конгруэнции в K_{2n-1} мы поставили во взаимно однозначное соответствие n кватернионов ξ^i ($i = 0, 1, \ldots, n-1$), представленных комплексными матрицами $\begin{pmatrix} x^i & -\overline{x^{i+n}} \\ x^{i+n} & \overline{x^i} \end{pmatrix}$, определенных с точностью до правого кватернионного множителя ρ, представленного комплексной матрицей $\begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}$. Таким образом, мы установили взаимно однозначное соответствие между прямыми комплексной паратактической конгруэнции в $K_{2n-1}(i)$ и точками пространства $P_{n-1}(i, j)$. Если мы поставим в соответствие каждой паре точек этого $P_{n-1}(i, j)$ расстояние (длину общих перпендикуляров) между соответственными прямыми комплексной паратактической конгруэнции, мы введем в $P_{n-1}(i, j)$ метрику. Ставя всякой прямой с координатами точек (19) в соответствие точку $P_{n-1}(i, j)$ с кватернионными координатами ξ^i, представленными комплексными матрицами (20), и находя расстояние между двумя прямыми конгруэнции, мы найдем, что это расстояние выражается через координаты соответственных точек $P_{n-1}(i, j)$ по формуле (14), т. е. пространство $P_{n-1}(i, j)$ с введенной нами метрикой совпадает с пространством $K_{n-1}(i, j)$. Таким образом *пространство $K_n(i, j)$ изометрично комплексной паратактической конгруэнции в $K_{2n+1}(i)$.*

Подгруппа группы движений $K_{2n-1}(i)$, переводящая в себя комплексную паратактическую конгруэнцию, может быть определена так же, как такая подгруппа группы движений $K_{2n-1}(i)$, которая переводит в себя кососимметрическую билинейную форму (3). Эта группа в точности изоморфна группе движений $K_{n-1}(i, j)$, что следует также из теоремы Шевалле (см. n° 6).

11. Приведенные модели симметрических пространств с компактными простыми фундаментальными группами позволяют весьма просто определить стационарные подгруппы этих пространств.

Стационарной подгруппой пространства p-мерных плоскостей с их абсолютными полярами в S_n, является прямое произведение группы движений p-мерной плоскости S_n и группы движений ее абсолютной поляры, т. е. *стационарной подгруппой пространства* BDI *является прямое произведение групп движений S_p и S_{n-p-1}.*

Стационарной подгруппой самого пространства S_n является группа движений гиперплоскости S_n (т. к. группа движений точки состоит из одного элемента), т. е. *стационарной подгруппой пространства* BDII *является группа движений S_{n-1}.*

Стационарной подгруппой пространства паратактических конгруэнций в S_{2n+1} является, как мы видели в n° 7, прямое произведение 1-параметрической подгруппы паратактических сдвигов на группу движений комплексного пространства $K_n(i)$, т. е. *стационарной подгруппой пространства* DIII *является прямое произведение группы движений $K_n(i)$ на группу движений S_1.*

Стационарной подгруппой пространства нормальных n-мерных цепей $K_n(i)$, изометричных пространству S_n, является группа движений S_n, т. е. *стационарной подгруппой пространства* AI *является группа движений S_n.*

Стационарной подгруппой пространства комплексных паратактических конгруэнций в $K_{2n+1}(i)$ является, как мы видели в n° 8, группа движений кватернионного пространства $K_n(i, j)$, т. е. *стационарной подгруппой пространства* AII *является группа движений $K_n(i, j)$.*

Стационарной подгруппой пространства комплексных p-мерных плоскостей с их абсолютными полярами в $K_n(i)$ является прямое произведение группы движений p-мерной плоскости $K_n(i)$, группы движений ее абсолютной поляры и группы комплексных чисел единичного модуля, изометричной группе движений S_1 (так как каждая матрица движения p-мерной плоскости может быть умножена на число $e^{i\alpha}$ при умножении матриц движений поляры этой плоскости на $e^{-i\alpha}$), т. е. *стационарной подгруппой пространства* AIII *является прямое произведение групп движений $K_p(i)$, $K_{n-p-1}(i)$ и S_1.*

Стационарной подгруппой самого пространства $K_n(i)$ является прямое произведение группы движений гиперплоскости $K_n(i)$ на группу комплексных чисел единичного модуля, т. е. *стационарной подгруппой пространства* AIV *является прямое произведение группы движений $K_{n-1}(i)$ на группу движений S_1.*

Стационарной подгруппой пространства нормальных n-мерных цепей $K_n(i, j)$, изометричных пространству $K_n(i)$, является прямое произведение группы движений $K_n(i)$ на группу комплексных чисел единичного модуля, т. е. *стационарной подгруппой пространства*

CI *является прямое произведение группы движений* $K_n(i)$ *на группу движений* S_1.

Стационарной подгруппой пространства кватернионных p-мерных плоскостей с их абсолютными полярами в $K_n(i, j)$ является прямое произведение группы движений p-мерной плоскости $K_n(i, j)$ и группы движений ее абсолютной поляры, т. е. *стационарной подгруппой пространства* (CII) *является прямое произведение групп движений* $K_p(i, j)$ *и* $K_{n-p-1}(i, j)$.

Стационарной подгруппой самого пространства $K_n(i, j)$ является группа движений гиперплоскости $K_n(i, j)$, т. е. *стационарной подгруппой пространства* CIII *является группа движений* $K_{n-1}(i, j)$.

IV. Классификация пространств образов симметрии с некомпактными простыми фундаментальными группами. **12.** Для получения некомпактных простых групп Ли можно воспользоваться теоремой Картана о том, что каждая такая группа может быть или построена по соответственной компактной простой группе и одному из ее инволютивных автоморфизмов или получена *комплексизацией* соответственной компактной группы, т. е. переходом от вещественных параметров этой группы к комплексным параметрам (см. стр. 263 настоящего сборника).

Мы рассмотрим здесь некомпактные группы, соответствующие компактным группам четырех больших классов и их инволютивным автоморфизмам, порожденным преобразованиями (7) (все классы), (8) (класс A) и (11) (класс C).

Применяя теорему Картана для групп вещественных ортогональных матриц и инволютивного автоморфизма, порожденного преобразованием (7), мы получим группы вещественных матриц, переводящих в себя квадратичную форму индекса p

$$-\sum_{i=1}^{p} x^{i^2} + \sum_{j=1}^{n-p} x^{p+j^2}; \qquad (21)$$

такие вещественные матрицы называются *псевдоортогональными* матрицами индекса p.

Применяя теорему Картана для групп комплексных и кватернионных унитарных матриц и инволютивного автоморфизма, порожденного преобразованием (7), мы получим группы комплексных и кватернионных матриц, переводящих в себя эрмитовы формы индекса p

$$-\sum_{i=1}^{p} x^i \bar{x}^i + \sum_{j=1}^{n-p} x^{p+j} \bar{x}^{p+j} \qquad (22)$$

(координаты x^i и $\bar{x}^i$ — соответственно комплексные числа и кватернионы) — такие комплексные и кватернионные матрицы называются *псевдоунитарными* матрицами индекса p.

13. Применяя теорему Картана для групп комплексных унимодулярных унитарных матриц и инволютивного автоморфизма, порожденного преобразованием (8), мы получим матрицы, элементами которых являются уже не комплексные числа, а *двойные числа* $\alpha = a + be$, где $e^2 = +1$, а a и b — вещественные числа. Двойные числа образуют кольцо. Всякое двойное число α можно записать в виде $\alpha = a_1e_1 + a_2e_2$, где $e_1 = \frac{1}{2}(1+e)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1-e)$, a_1, a_2 — вещественные числа, причем $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1e_2 = 0$. Отсюда следует что всякий многочлен $f(\xi^1, \dots, \xi^m)$, где $\xi^i = x^ie_1 + y^ie_2$, может быть представлен в виде

$$f(\xi^1, \dots, \xi^m) = f(x^1, \dots, x^m)\,e_1 + f(y^1, \dots, y^m)\,e_2. \qquad (23)$$

Так как для каждого двойного числа $\alpha = a + be$ можно определить сопряженное число $\bar{\alpha} = a - be$, причем произведение $\alpha\bar{\alpha}$ является вещественным числом $a^2 - b^2$, то над двойными числами, так же, как над комплексными, можно определить *эрмитовы формы*, имеющие вид (5), где все числа x^i и $\bar{x}^i$ являются двойными числами. Поэтому можно определить группу двойных матриц, преобразующих двойные переменные x^i по формулам $'x^i = \sum_j a^i_j x^j$ (где все переменные $'x^i, x^j$ и элементы матриц a^i_j — двойные числа) и переводящих в себя эрмитову форму (5). Такие двойные матрицы называются *унитарными* двойными матрицами и удовлетворяют соотношениям (6) (где все элементы матриц a^i_j и $\bar{a}^i_k$ — двойные числа). Для двойных матриц можно определить детерминанты по обычным формулам (так как детерминант является многочленом, из (23) следует, что детерминант $|\alpha^i_j|$ двойной матрицы $\alpha^i_j = a^i_je_1 + b^i_je_2$ имеет вид $|a^i_j|\,e_1 + |b^i_j|\,e_2$) и, следовательно, можно определить *унимодулярные* двойные матрицы — матрицы с детерминантом, равным $+1$ (так как $1 = e_1 + e_2$, то матрица $\alpha^i_j = a^i_je_1 + b^i_je_2$ унимодулярна тогда, и только тогда, когда унимодулярны вещественные матрицы a^i_j и b^i_j). Применяя теорему Картана для групп комплексных унимодулярных унитарных матриц и инволютивного автоморфизма, порожденного преобразованием (8), мы получаем *группы двойных унимодулярных унитарных матриц.*

Важное значение построенной нами группы для вещественной геометрии следует из того, что *группа двойных унимодулярных унитарных матриц n-го порядка в точности изоморфна группе вещественных унимодулярных матриц того же порядка.* Для доказательства достаточно поставить в соответствие всякой вещественной матрице n-го порядка a^i_j двойную матрицу $\alpha^i_j = a^i_je_1 + b^i_je_2$, где b^i_j — транспонированная обратная матрица для матрицы a^i_j, т. е. матрицы a^i_j и b^i_j связаны условием

$$\sum_i a^i_j b^i = \delta_{jk}, \qquad (24)$$

и убедиться, что двойная матрица α^i_j удовлетворяет условию унитарности (4), что, обратно, для всякой унитарной двойной матрицы $\alpha^i_j = a^i_je_1 + b^i_je_2$ матрицы a^i_j и b^i_j связаны условием (24) и что произведению двух вещественных матриц соответствует произведение двух соответственных двойных матриц. Мы уже видели, что при унимодулярности матрицы α^i_j необходимо унимодулярны обе матрицы a^i_j и b^i_j, а при унимодулярности матрицы a^i_j и, следовательно, b^i_j, унимодулярна и матрица α^i_j.

14. Применяя теорему Картана для групп кватернионных унитарных матриц и инволютивного автоморфизма, порожденного преобразованием (11), мы получим матрицы, элементами которых являются не кватернионы, а *псевдокватернионы* $\alpha = a + bi + ce + df$, где $i^2 = -1$, $e^2 = +1$, $f = ie = -ei$, a, b, c, d — вещественные числа. Псевдокватернионы образуют кольцо, изоморфно представляющееся кольцом всех вещественных матриц второго порядка: для доказательства достаточно поставить в соответствие всякому псевдокватерниону $a + bi + ce + df$ вещественную матрицу $\begin{pmatrix} a+d & -b+c \\ b+c & a-d \end{pmatrix}$ и убедиться, что сумме и произведению псевдокватернионов соответствует сумма и произведение соответственных матриц и обратно.

Для каждого псевдокватерниона $\alpha = a + bi + ce + df$ определен *сопряженный псевдокватернион* $\bar{\alpha} = a - bi - ce - df$, причем произведение $\alpha\bar{\alpha}$ является вещественным числом $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$. Легко проверить, что если псевдокватерниону α соответствует матрица $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, то сопряженному псевдокватерниону $\bar{\alpha}$ соответствует матрица $\begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$, а число $\alpha\bar{\alpha}$ равно детерминанту матрицы $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Благодаря тому, что произведение псевдокватернионов $\alpha\bar{\alpha}$ является вещественным числом над псевдокватернионами, так же, как над кватернионами можно определить *эрмитовы формы*, имеющие вид (5), где все переменные x^i и $\bar{x}^i$ являются псевдокватернионами. Поэтому можно определить группу псевдокватернионных матриц, преобразующих псевдокватернионные переменные x^i по формулам $'x^i = \sum_j a^i_j x^j$ (где все переменные $'x^i$ и x^j и элементы матриц a^i_j — псевдокватернионы) и переводящих в себя эрмитову форму (5). Такие псевдокватернионные матрицы также называются *унитарными* и удовлетворяют соотношениям (6), где все элементы матриц a^i_j и $\bar{a}^i_k$ — псевдокватернионы).

Применяя теорему Картана для групп кватернионных матриц и инволютивного автоморфизма, порожденного преобразованием (11), мы получаем группы *псевдокватернионных унитарных матриц*.

Кольцо псевдокватернионов, так же, как кольцо кватернионов, некоммутативно, вследствие чего нельзя определить унимодулярных псевдокватернионных матриц.

Важное значение построенной нами группы для вещественной геометрии следует из того, что *группа псевдокватернионных унитарных матриц n-го порядка в точности изоморфна группе вещественных симплектических матриц 2n-го порядка*. Для доказательства достаточно поставить в соответствие всякой псевдокватернионной матрице n-го порядка α^i_j, удовлетворяющей условию (6), такую вещественную матрицу A^I_J $2n$-го порядка (i, $j=1, 2, \ldots, n$; I, $J=1, 2, \ldots, 2n$), что если при указанном выше изоморфизме колец псевдокватернионов и вещественных матриц второго порядка псевдокватерниону α^i_j соответствует вещественная матрица второго порядка $\begin{pmatrix} a^i_j & c^i_j \\ b^i_j & d^i_j \end{pmatrix}$, то вещественная матрица $2n$-го порядка A^I_J определяется соотношениями $A^i_j = a^i_j$, $A^{i+n}_j = b^i_j$, $A^i_{j+n} = c^i_j$, $A^{i+n}_{j+n} = d^i_j$, и убедиться, что вещественные матрицы A^I_J удовлетворяют условию (4); обратно, всякой вещественной матрице A^I_J, удовлетворяющей этому условию, по тем же формулам можно поставить в соответствие псевдокватернионную матрицу α^i_j, удовлетворяющую условию (6), и что произведению двух псевдокватернионных матриц соответствует произведение соответственных вещественных матриц.

Применяя теорему Картана для групп комплексных и кватернионных унитарных матриц и инволютивного автоморфизма, порожденного, соответственно, произведением преобразований (7) и (8) и произведением преобразований (7) и (11) мы получим, соответственно, группы двойных и псевдокватернионных матриц, переводящих в себя эрмитовы формы индекса p (22), где координаты x^i и $\overline{x^i}$, соответственно, — двойные числа и псевдокватернионы, — такие двойные и псевдокватернионные матрицы также называются *псевдоунитарными* матрицами индекса p.

15. Все инволютивные автоморфизмы некомпактных групп классов A, B, C и D также могут быть представлены в виде преобразований $S \to \sigma S \sigma^{-1}$, где σ — элемент рассматриваемой группы или группы, полученной с помощью некоторого расширения этой группы.

Элементы σ, порождающие инволютивные автоморфизмы для некомпактных групп B_l и D_l, являющихся группами вещественных псевдоортогональных матриц индекса p порядков, соответственно, $2l+1$ и $2l$, могут быть приведены к виду (7), где $n=2l$ для групп B_l и $n=2l-1$ для групп D_l, и для групп D_l при $p=l$ к виду (12), где $n=l$ и к виду

$$'x^i = x^{i+n}, \quad 'x^{i+n} = x^i, \tag{25}$$

где также $n=l$, или являются произведениями этих преобразований.

Элементы σ, порождающие инволютивные автоморфизмы для некомпактных групп A_l, являющихся группами комплексных унимодулярных псевдоунитарных матриц индекса p $(l+1)$-го порядка, могут быть приведены к виду (7) и (8), где $l=n$, и при $l=2p-1$ к виду (9) и (25), где $l=2n-1$, или являются произведениями этих преобразований.

Элементы σ, порождающие инволютивные автоморфизмы для некомпактных групп C_l, являющихся группами кватернионных псевдоунитарных матриц индекса p l-го порядка могут быть приведены к виду (7) или (11), где $n=l-1$, или являются произведениями этих преобразований.

Элементы σ, порождающие инволютивные автоморфизмы для некомпактных групп A_l являющихся группами двойных унимодулярных унитарных матриц $(l+1)$-го порядка и двойных унимодулярных псевдоунитарных матриц индекса p того же порядка, могут быть приведены к виду (7) и (8), где $'x^i$ и x^i — двойные числа и $l=n$, и для случая унитарных матриц к виду (9), где $'x^i$ и x^i — двойные числа и $l=2n-1$, а для случая псевдоунитарных матриц индекса $p=\frac{l+1}{2}$ — к виду (9) и (25), где $'x^i$ и x^i — двойные числа и $l=2n-1$, или являются произведениями этих преобразований.

Элементы σ, порождающие инволютивные автоморфизмы для некомпактных групп C_l, являющихся группами псевдокватернионных унитарных матриц l-го порядка и псевдокватернионных псевдоунитарных матриц — индекса p того же порядка могут быть приведены к виду (7), (11), где $'x^i$ и x^i — псевдокватернионы и $n=l-1$, и к виду

$$'x^i = e x^i e^{-1} \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n), \qquad (26)$$

где также $'x^i$ и x^i — псевдокватернионы и $n=l-1$, или являются произведениями этих преобразований.

16. Некомпактные простые группы классов B и D, являющиеся группами вещественных псевдоортогональных матриц индекса p, локально изоморфны группам движений n-мерных *вещественных псевдоэллиптических пространств индекса q* ^qS_n, т. е. гиперсфер в $^qR_{n+1}$ с отождествленными диаметрально противоположными точками. Пространство ^qS_n можно также определить как n-мерное вещественное проективное пространство, в качестве группы преобразований которого рассматривается группа проективных преобразований, переводящих в себя уже не мнимую квадрику (13), а вещественную квадрику

$$-\sum_{i=0}^{q} {x^i}^2 + \sum_{j=1}^{n-q} {x^{q+j}}^2 = 0, \qquad (27)$$

называемую *абсолютом* ^qS_n. В пространстве ^qS_n можно определить расстояние по формуле, получающейся из (14) заменой билинейных форм, соответствующих форме (13), билинейными формами, соответствующими форме (27).

Преобразования (7) в ^qS_n представляют собой отражения относительно *p-мерных плоскостей* (при $p=0$ относительно точек, при $p=1$ относительно прямых), причем отражение относительно p-мерной плоскости является одновременно отражением относительно $(n-p-1)$-мерной плоскости, являющейся абсолютной полярой данной плоскости. Преобразование (12) в $^nS_{2n-1}$ представляет собой сдвиг по системе прямых линий, соединяющих комплексно сопряженные точки двух комплексно сопряженных плоскостей (15), взаимно полярных относительно квадрики (27). Преобразование (25) в $^nS_{2n-1}$ представляет собой сдвиг по системе прямых линий, соединяющих точки двух вещественных плоскостей

$$x^i + x^{i+n} = 0 \text{ и } x^i - x^{i+n} = 0, \qquad (28)$$

целиком лежащих на квадрике (27). Такие системы прямых в ${}^nS_{2n-1}$ называются: вторая *паратактической* и первая *псевдопаратактической конгруэнциями*, а сдвиги вдоль лучей этих конгруэнций называются, соответственно, *паратактическим* и *псевдопаратактическим сдвигами*.

Поэтому *образами симметрии в ${}^qS_n$, образующими модели неприводимых симметрических пространств, являются p-мерные плоскости (при $p = 0$ точки, при $p = 1$ прямые) вместе с их абсолютными полярами и при $n = 2q - 1$ — паратактические и псевдопаратактические конгруэнции.*

Произведения преобразований (7) на (12) и (25) при нечетных n и p определяют сдвиги вдоль паратактической или псевдопаратактической конгруэнции в некоторой p-мерной плоскости и ее абсолютной поляре. Пространства таких конгруэнций могут быть расщеплены на семейства конгруэнций в плоскостях и являются моделями приводимых симметрических пространств.

17. Построенные группы допускают и другую геометрическую интерпретацию. Выделим в пространстве ${}^{q+1}S_{n+1}$ некоторую гиперплоскость, не касающуюся абсолюта, и введем в это пространство эвклидову или псевдоэвклидову метрику, в которой выделенная нами гиперплоскость является бесконечно удаленной плоскостью, а абсолют — гиперсферой (метрика этого пространства — эвклидова, если абсолют — овальная квадрика, и псевдоэвклидова индекса q, если абсолют — квадрика с вещественными $(q-1)$-мерными образующими плоскостями). Тогда всякой $(p+1)$-мерной плоскости ${}^{q+1}S_{n+1}$ соответствует p-мерная сфера на этой гиперсфере, являющаяся пересечением гиперсферы с данной плоскостью. Группа движений пространства ${}^{q+1}S_{n+1}$ в его старой метрике переводит гиперсферу (27) в себя, причем сферы на этой гиперсфере переходят в сферы. Легко проверить, что при этих преобразованиях углы между сферами сохраняются, т. е. группа движений пространства ${}^{q+1}S_{n+1}$ индуцирует группу *конформных преобразований* на нашей гиперсфере. Рассматриваемая таким образом гиперсфера в $(n+1)$-мерном псевдоэвклидовом пространстве индекса ${}^qR_{n+1}$ (при $q = 0$ — в эвклидовом пространстве R_{n+1}) называется при $q > 0$ n-мерным *псевдоконформным пространством индекса q* и обозначается ${}^qC_n$, а при $q = 0$ — n-мерным *конформным пространством C_n*. Геометрию пространств C_n и ${}^qC_n$ можно перенести с гиперсфер в пространствах R_{n+1} и ${}^qR_{n+1}$ на пространства R_n и ${}^qR_n$, являющиеся гиперплоскостями в R_{n+1} и ${}^qR_{n+1}$, касающимися наших гиперсфер, с помощью *стереографических проекций* (в этом случае пространства R_n и ${}^qR_n$ следует дополнить „бесконечно удаленными элементами", соответствующими тем точкам гиперсфер, которые не отображаются на гиперплоскости R_n и ${}^qR_n$ при стереографических проекциях; эти точки гиперсфер образуют пересечения гиперсфер с гиперплоскостями, касающимися гиперсфер в центрах проекций и параллельными гиперплоскостям проекций).

Инволютивными автоморфизмами группы конформных преобразований ${}^qC_n$ являются инволютивные автоморфизмы изоморфной ей группы движений ${}^{q+1}S_{n+1}$, вследствие чего образы симметрии являются пересечениями образов симметрии ${}^{q+1}S_{n+1}$ с квадрикой (27).

Пересечения $(p+1)$-мерных плоскостей ${}^{q+1}S_{n+1}$ с этой квадрикой (27) являются *p-мерными сферами* ${}^{q}C_n$, причем пересечения абсолютно полярных плоскостей ${}^{q+1}S_{n+1}$ с квадрикой (27) называются *сопряженными* сферами (в C_n сфера, сопряженная к вещественной сфере, всегда мнима), пересечения плоскостей (28) и (15) с квадрикой (27) называются *изотропными* и *мнимыми сопряженными сферами.* Отражения относительно $(p+1)$-мерных плоскостей ${}^{q+1}S_{n+1}$ определяют *инверсии* относительно p-мерных сфер ${}^{q}C_n$, инволютивные паратактический и псевдопаратактический сдвиги ${}^{q+1}S_{n+1}$ определяют симметрии относительно пары изотропных сфер и пары мнимых сопряженных сфер.

Поэтому *образами симметрии в ${}^{q}C_n$ образующими модели неприводимых симметрических пространств, являются p-мерные сферы (при $p=0$ пары точек, при $p=1$ круги) вместе со сферами, сопряженными к ним, и при $n=2q$ пары изотропных сфер и пары мнимых сопряженных сфер.*

18. Некомпактные простые группы классов (A) и (C), являющиеся группами комплексных унимодулярных псевдоунимодулярных матриц индекса p и кватернионных псевдоунитарных матриц того же индекса, локально изоморфны группам движений n-мерных *комплексных* и *кватернионных унитарно-псевдоэллиптических пространств индекса* $q\,{}^{q}K_n(i)$ и ${}^{q}K_n(i, j)$, т. е. проективных пространств $P_n(i)$ и $P_n(i, j)$, в качестве групп преобразований которых рассматриваются группы проективных преобразований, переводящих в себя уже не мнимые поверхности (17), а вещественные поверхности

$$-\sum_{i=0}^{q} x^i\bar{x}^i + \sum_{j=1}^{n-q} x^{q+j}\bar{x}^{q+j} = 0 \tag{29}$$

(все координаты x^i и $\bar{x}^i$ — комплексные числа или кватернионы), называемые *абсолютами* пространств ${}^{q}K_n(i)$ и ${}^{q}K_n(i, j)$. В этих пространствах можно определить расстояние по формуле, получающейся из (18) заменой билинейных форм, соответствующих форме (17), билинейными формами, соответствующими форме (29).

Преобразования (7) в ${}^{q}K_n(i)$ и ${}^{q}K_n(i, j)$ представляют собой отражения относительно, соответственно, комплексных и кватернионных *p-мерных плоскостей* (при $p=0$ относительно точек, при $p=1$ относительно прямых), причем отражение относительно p-мерной плоскости является отражением относительно $(n-p-1)$-мерной плоскости, являющейся абсолютной полярой данной плоскости. Преобразования (8) в ${}^{q}K_n(i)$ и (11) в ${}^{q}K_n(i, j)$ представляют собой отражения относительно геометрических мест точек с соответственно вещественными или комплексными координатами, изометричных соответственно ${}^{q}S_n$ и ${}^{q}K_n(i)$ — такие геометрические места и все геометрические образы, получающиеся из них движениями ${}^{q}K_n(i)$ и ${}^{q}K_n(i, j)$, можно называть *нормальными n-мерными цепями* в ${}^{q}K_n(i)$ и ${}^{q}K_n(i, j)$. Произведения преобразований (8) и (25) и преобразования (9) в ${}^{n}K_{2n-1}(i)$ представляют собой инволютивные сдвиги вдоль прямых комплексных конгруэнций прямых, которые можно называть *паратактическими* и *псевдопаратактическими конгруэнциями* и которые определяются аналогично одноименным конгруэнциям в ${}^nS_{2n-1}$.

Поэтому *образами симметрии в* ${}^qK_n(i)$ *и* ${}^qK_n(i,j)$, *образующими модели неприводимых симметрических пространств, являются p-мерные плоскости (при $p=0$ точки, при $p=1$ прямые) вместе с их абсолютными полярами, нормальные n-мерные цепи и в* ${}^nK_{2n-1}$ — *паратактические и псевдопаратактические конгруэнции.*

Так же, как и в предыдущих случаях, легко показать, что все образы симметрии, соответствующие инволютивным автоморфизмам групп движений, порожденным произведениями рассмотренных нами преобразований, образуют модели приводимых симметрических пространств.

19. Некомпактная простая группа класса A, являющаяся группой двойных унимодулярных унитарных матриц, также локально-изоморфна группе движений некоторого пространства. Для определения этого пространства рассмотрим n-мерное *двойное проективное пространство* $P_n(e)$, каждая точка которого задается $n+1$ координатами x^i, являющимися двойными числами, определенными с точностью до умножения на двойное число ρ (кольцо двойных чисел коммутативно). Проективные преобразования этого пространства имеют вид $'x^i = \sum_j a^i_j x^j$, где координаты $'x^i, x^j$ и элементы матриц a^i_j — двойные числа, причем матрицы a^i_j, представляющие проективные преобразования так же, как в пространствах P_n и $P_n(i)$, всегда могут быть выбраны унимодулярными.

Будем называть n-мерным *двойным унитарно-эллиптическим пространством* $K_n(e)$ пространство $P_n(e)$, в качестве группы преобразований которого рассматривается группа проективных преобразований, переводящих в себя поверхности с уравнением (17), где все координаты x^i и $\overline{x^i}$ являются двойными числами. Такая поверхность в $K_n(e)$ вещественна и называется *абсолютом* $K_n(e)$.

Расстояние между точками x и y пространства $K_n(e)$ мы определим по той же формуле (18), что и в $K_n(i)$, где, однако, все координаты x^i, y^i, $\overline{x^i}$, $\overline{y^i}$ являются двойными числами. Легко видеть, что правая часть формулы (18) здесь, так же, как в случае $K_n(i)$, всегда вещественна, однако в отличие от $K_n(i)$ может быть больше 1 (в этом случае число $\frac{\omega}{r}$ чисто мнимо) и меньше 0 (в этом случае число $\frac{\omega}{r}$ имеет вид $\frac{\pi}{2}+iR$, где R — вещественное число). Число r, которое здесь может принимать вещественное или чисто мнимое значение, здесь также называется радиусом кривизны пространства $K_n(e)$. Пространство $K_1(e)$ изометрично сфере радиуса $\frac{r}{2}$ в пространстве ${}^1R_3$; пространства $K_n(e)$ при $n>1$ изометричны вещественным $2n$-мерным псевдоримановым пространствам переменной кривизны[1].

---

[1] Изометричность пространства $K_1(e)$ сфере в ${}^1R_3$ была установлена И. М. и А. М. Ягломами [1]. Более подробно о пространствах $K_n(e)$ см. в заметке автора [10].

Из определения пространства $K_n(e)$ видно, что группы двойных унимодулярных унитарных матриц с точностью до локального изоморфизма совпадают с группами движений пространств $K_n(e)$.

Образы симметрии пространства $K_n(e)$ определяются совершенно аналогично образам симметрии пространства $K_n(i)$.

Из доказанного нами в n° 13 изоморфизма групп двойных унимодулярных унитарных матриц n-го порядка и вещественных унимодулярных матриц того же порядка следует *изоморфизм группы движений двойного пространства $K_n(e)$ и группы проективных преобразований вещественного пространства P_n.*

Покажем, что *если в пространстве P_n рассмотреть геометрические образы, представляющие собой конфигурации точка + гиперплоскость, то в пространство этих образов можно ввести проективно инвариантную метрику, причем в этой метрике построенное пространство изометрично пространству $K_n(e)$.* В самом деле, всякой такой конфигурации с координатами точки x^i и тангенциальными координатами гиперплоскости u_i можно взаимно однозначно поставить в соответствие точку $K_n(e)$ с координатами $\xi = x^i e_1 + u_i e_2$ (при умножении координат ξ^i на двойное число $\rho = re_1 + se_2$ координаты x^i умножаются на число r, а координаты u_1 — на число s). Составляя для двух точек $K_n(e)$ с координатами $\xi = x^i e_1 + u_i e_2$ и $\eta^i = y^i e_1 + v_i e_2$ инвариант (18), мы находим, что этот инвариант равен двойному отношению

$$W = \frac{\sum\limits_i x^i v_i \cdot \sum\limits_i y^i u_i}{\sum\limits_i x^i u_i \cdot \sum\limits_i y^i v_i} \tag{30}$$

четырех точек: точек x^i и y^i и точек пересечения определяемой этими точками прямой с гиперплоскостями u_i и v_i. Полагая $W = \cos^2 \omega$, мы можем назвать число ω расстоянием между нашими двумя конфигурациями. Это расстояние, как мы видим, инвариантно при проективных преобразованиях P_n.

Отсюда следует, что всякому образу симметрии в $K_n(e)$ взаимно однозначно соответствует образ симметрии в P_n. С помощью установленного нами соответствия между точками $K_n(e)$ и конфигурациями точка + гиперплоскость P_n мы найдем, что преобразование (7) в $K_n(e)$, т. е. отражение относительно двойной *p-мерной плоскости* $K_n(e)$ и ее абсолютной поляры, изображает такую инволюцию инволютивную коллинеацию P_n, которая оставляет неподвижными точки p-мерной и $(n-p-1)$-мерной плоскостей. Конфигурацию, состоящую из двух таких плоскостей, мы будем называть *p-парой*. При симметрии относительно p-пары каждой точке ставится в соответствие четвертая гармоническая точка для тройки точек, состоящей из данной точки и точек пересечения прямой, проходящей через данную точку и пересекающей плоскости p-пары. Точки p-мерной плоскости $K_n(e)$ и ее поляры изображают конфигурации точки + гиперплоскость, точки которых лежат в одной из плоскостей p-пары, а гиперплоскости проходят через вторую из этих плоскостей.

Преобразование (8) в $K_n(e)$, т. е. отражение относительно нормальной n-мерной цепи $K_n(e)$, определяемой аналогично одноименному образу в $K_n(i)$, изображает инволютивную корреляцию P_n, представляющую собой полярное преобразование относительно *мнимой квадрики*. Точки нормальной n-мерной цепи $K_n(e)$ изображают конфигурации точка $+$ гиперплоскость, связанные полярным соответствием относительно такой квадрики (точки произвольной n-мерной цепи $K_n(e)$ изображают конфигурации точка $+$ гиперплоскость, связанные произвольным коррелятивным соответствием).

Преобразование (9) в $K_n(e)$ (n нечетно), т. е. инволютивный сдвиг вдоль прямых двойной паратактической конгруэнции $K_n(e)$, определяемой аналогично одноименному образу в $K_n(i)$, изображает в P_n инволютивную корреляцию, переводящую в себя кососимметрическую билинейную форму (3). Такая корреляция называется *нуль-системой* и в произвольных координатах имеет вид $u_i = \sum_j a_{ij}x^j$, где $a_{ij} = -a_{ji}$. Нуль-систему можно рассматривать как симметрию относительно семейства $\frac{n-1}{2}$-мерных плоскостей, переходящих при этом преобразовании в себя; такие плоскости называются *нуль-плоскостями*, а полное семейство нуль-плоскостей — *линейным комплексом* $\frac{n+1}{2}$-*мерных плоскостей.*

Произведение преобразований (7) и (8) в $K_n(e)$ изображает в P_n произведение инволюции, определяемой p-парой, на перестановочное с ним полярное преобразование относительно мнимой квадрики. Произведение таких преобразований является инволютивной корреляцией в P_n, представляющей собой полярное преобразование относительно *вещественной квадрики* индекса p (с уравнением типа (27)).

Произведение преобразований (8) и (9) в $K_n(e)$ изображает в P_n произведение полярного преобразования относительно мнимой квадрики на перестановочную с ним нуль-систему. Произведение таких преобразований является инволюцией в P_n, которая переводит в себя прямые, соединяющие пары комплексно сопряженных точек двух комплексно сопряженных $\frac{n-1}{2}$-мерных плоскостей (типа плоскостей (15)) — такие семейства прямых называются *эллиптическими линейными конгруэнциями* (гиперболическими линейными конгруэнциями называются семейства прямых, соединяющих точки двух вещественных $\frac{n-1}{2}$-мерных плоскостей, т. е. точки двух плоскостей $\frac{n-1}{2}$-пары). Инволютивный сдвиг вдоль лучей эллиптической линейной конгруэнции в P_n можно рассматривать как симметрию относительно комплексно-сопряженной $\frac{n-1}{2}$-пары.

В отличие от пространства $K_n(i)$ два последних типа преобразований в $K_n(e)$ и P_n определяют такие образы симметрии, которые образуют модели неприводимых симметрических пространств, как это видно из геометрического смысла соответственных образов симметрии в P_n.

Поэтому *образами симметрии в P_n, образующими модели неприводимых симметрических пространств, являются p-пары (конфигурации p-мерная $+(n-p-1)$-мерная плоскость, при $p=0$ конфигурации точка + гиперплоскость), мнимые и вещественные квадрики, и, при нечетном n, эллиптические линейные конгруэнции прямых и линейные комплексы $\frac{n-1}{2}$-мерных плоскостей.*

Произведения преобразований (7) и (9) и преобразований (7), (8) и (9) в P_n (при нечетных n и p) определяют нуль-системы и инволютивные сдвиги вдоль прямых эллиптических линейных конгруэнций в плоскостях некоторой p-пары. Пространства соответственных образов симметрии могут быть расщеплены на семейства таких образов, принадлежащие к плоскостям одной p-пары, и являются моделями приводимых симметрических пространств.

20. Некомпактная простая группа класса C, являющаяся группой псевдокватернионных унитарных матриц, также локально изоморфна группе движений некоторого пространства. Для определения этого пространства рассмотрим n-мерное *псевдокватернионное проективное пространство* $P_n(i, e)$, каждая точка которого задается $n+1$ псевдокватернионными координатами x^i, определенными с точностью до правого псевдокватернионного множителя ρ, $x^i \longrightarrow x^i\rho$ (кольцо псевдокватернионов некоммутативно). Проективные преобразования этого пространства имеют вид $'x^i = \sum_j a^i_j x^j$, где координаты $'x^i$, x^j и элементы матриц a^i_j — псевдокватернионы. Группа проективных преобразований в $P_n(i, e)$, так же, как группа таких же преобразований в $P_n(i, j)$, локально изоморфна группе всех обратимых псевдокватернионных матриц (так как над псевдокватернионами, так же как над кватернионами, нельзя построить инвариантных детерминантов).

Будем называть n-мерным *псевдокватернионным унитарно-эллиптическим пространством* $K_n(i, e)$ пространство $P_n(i, e)$, в качестве группы преобразований которого рассматривается группа проективных преобразований, переводящих в себя поверхности с уравнением (17), где все координаты x^i и $\bar{x}^i$ являются псевдокватернионами. Такая поверхность в $K_n(i, e)$ — вещественна и называется *абсолютом* $K_n(i, e)$.

Расстояние между точками x и y пространства $K_n(i, e)$ мы определим по той же формуле (18), что и в $K_n(i, j)$, где, однако, все координаты $x^i, y^i, \bar{x}^i, \bar{y}^i$ являются псевдокватернионами. Легко видеть, что правая часть формулы (18) здесь, так же, как в случае $K_n(i, j)$, всегда вещественна, однако в отличие от $K_n(i, j)$ может быть больше 1 (в этом случае число $\frac{\omega}{r}$ чисто мнимо) и меньше 0 (в этом случае число $\frac{\omega}{r}$ имеет вид $\frac{\pi}{2}+iR$, где R — вещественное число). Число r, которое здесь может принимать вещественное или чисто мнимое значение, здесь также называется радиусом кривизны пространства $K_n(i, e)$. Пространство $K_1(i, e)$ изометрично сфере радиуса $\frac{r}{2}$ в пространстве ${}^2R_5$; пространства $K_n(i, e)$ при $n > 1$ изометричны вещественным $4n$-мерным псевдоримановым пространствам переменной кривизны[1]).

Из определения пространства $K_n(i, e)$ видно, что группы псевдокватернионных унитарных матриц с точностью до локального изоморфизма совпадают с группами движений пространств $K_n(i, e)$.

Образы симметрии пространства $K_n(i, e)$ определяются совершенно аналогично образам симметрии пространства $K_n(i, j)$.

Из доказанного нами в n° 14 изоморфизма групп псевдокватернионных матриц n-го порядка и вещественных симплектических матриц $2n$-го порядка следует *изоморфизм группы движений псевдокватернионного пространства $K_n(i, e)$ и группы тех проективных преобразований P_{2n+1}, которые переводят в себя кососимметрическую билинейную форму* (3).

Пространство P_{2n+1}, фундаментальной группой которого является группа проективных преобразований, переводящих в себя форму (3), называется *симплектическим пространством* Sp_{2n+1}, а преобразования фундаментальной группы Sp_{2n+1} называются *симплектическими преобразованиями*. Нуль-система пространства Sp_{2n+1}, определяемая его основной формой (3), называется *абсолютной нуль-системой* Sp_{2n+1}.

Покажем, что *в пространство прямых Sp_{2n+1} можно ввести метрику, инвариантную относительно симплектических преобразований, причем пространство прямых Sp_{2n+1} в этой метрике изометрично пространству $K_n(i, e)$*. В самом деле, всякой прямой Sp_{2n-1}, определяемой двумя точками с координатами x^i и y^i, можно взаимно однозначно поставить в соответствие точку $K_{n-1}(i, e)$, координатами которой служат псевдокватернионы ξ^i, представляемые матрицами $\begin{pmatrix} x^i & y^i \\ x^{i+n} & y^{i+n} \end{pmatrix}$ (при умножении координат ξ^i справа на псевдокватернион $\rho = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ точки x и y заменяются точками с координатами $ax^i + by^i$ и $cx^i + dy^i$ той же прямой). Составляя для двух точек $K_{n-1}(i, e)$ с псевдокватернионными координатами ξ^i и η^i, представляемыми матрицами $\begin{pmatrix} x^i & y^i \\ x^{i+n} & y^{i+n} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} z^i & w^i \\ z^{i+n} & w^{i+n} \end{pmatrix}$, инвариант (18), мы находим, что этот инвариант имеет вид

$$V = \frac{\sum_i [x^i w^{i+n}] \cdot \sum_i [y^i z^{i+n}] - \sum_i [x^i z^{i+n}] \cdot \sum_i [y^i w^{i+n}]}{\sum_i [x^i y^{i+n}] \cdot \sum_i [z^i w^{i+n}]}. \qquad (31)$$

---

[1]) Более подробно о пространствах $K_n(i, e)$ см. в заметке автора [10].

Число V является симплектическим инвариантом прямых Sp_{2n-1} определяемых парами точек x, y и z, w. Полагая $V = \cos^2 \omega$, мы можем называть число ω расстоянием между этими двумя прямыми. Это расстояние остается инвариантным при симплектических преобразованиях Sp_{2n-1}.

Отсюда следует, что всякому образу симметрии в $K_n(i, e)$ взаимно однозначно соответствует образ симметрии в Sp_{2n+1}. С помощью установленного нами соответствия между точками $K_n(i, e)$ и прямыми Sp_{2n+1} мы найдем, что преобразование (7) в $K_n(i, e)$, т. е. отражение относительно псевдокватернионной *p-мерной плоскости* и ее абсолютной поляры изображает в Sp_{2n+1} инволютивное симплектическое преобразование, оставляющее неподвижными точки *$(2p+1)$-мерной плоскости* и плоскости, соответствующей ей относительно абсолютной нуль-системы Sp_{2n+1}. Преобразования (11) и (26) в $K_n(i, e)$, т. е. отражения относительно *нормальных n-мерных цепей* $K_n(i, e)$, изображают симметрии, соответственно, относительно комплексно сопряженной или вещественной пары нуль-плоскостей абсолютной нуль-системы Sp_{2n+1}. Эти пары плоскостей однозначно определяют квадрики, соответственно, мнимые или вещественные индекса $n+1$, содержащие эти плоскости в качестве своих образующих и обладающие тем свойством, что полярные преобразования относительно этих квадрик перестановочны с абсолютной нуль-системой Sp_{2n+1}. Если ввести в Sp_{2n+1} метрику пространств S_{2n+1} или ${}^{n+1}S_{2n+1}$ с помощью этих квадрик, рассматриваемые пары плоскостей определят паратактические конгруэнции прямых, и симметрии относительно наших пар плоскостей являются инволютивными паратактическими сдвигами вдоль лучей этих конгруэнций. Будем называть такие конгруэнции прямых *симплектическими паратактическими конгруэнциями.*

Поэтому *образами симметрии в Sp_{2n+1}, образующими модели неприводимых симметрических пространств, являются $2p+1$-мерные плоскости (при $p = 0$ прямые) вместе с плоскостями, соответствующими им относительно абсолютной нуль-системы Sp_{2n+1}, и симплектические паратактические конгруэнции.*

Произведения преобразований (7) и (11) и преобразований (7) и (26) в $K_n(i, e)$ определяют симплектические паратактические конгруэнции в $(2p+1)$-мерных плоскостях и плоскостях, соответствующих им относительно абсолютной нуль-системы Sp_{2n+1}, рассматриваемых как пространства Sp_{2p+1} и $Sp_{2n-2p-1}$. Пространства таких конгруэнций могут быть расщеплены на семейства конгруэнций, принадлежащих к $(2p+1)$-мерным и $(2n-2p-1)$-мерным плоскостям, и являются моделями приводимых симметрических пространств.

Некомпактные простые группы классов А и С, являющиеся группами двойных унимодулярных псевдоунитарных матриц индекса q и псевдокватернионных псевдоунитарных матриц того же индекса, также локально изоморфны группам движений пространств ${}^qK_n(e)$ и ${}^qK_n(i, e)$, определяющихся аналогично пространствам ${}^qK_n(i)$ и ${}^qK_n(i, j)$. Образы симметрии этих пространств определяются совершенно аналогично образам симметрии пространств ${}^qK_n(i)$ и ${}^qK_n(i, j)$.

21. Кроме простых некомпактных групп, получающихся из компактных групп с помощью их инволютивных автоморфизмов, как мы уже указывали, имеются простые некомпактные группы, полученные из соответственных компактных групп путем *комплексизации*. Некомпактную группу, получающуюся таким образом из компактной группы G, мы будем обозначать $G(i)$.

Группы $G(i)$ могут быть получены из компактных групп и в точности таким же образом, как рассмотренные нами выше группы, однако соответственные компактные группы уже не являются простыми. В самом деле, наряду с комплексизацией групп, мы можем говорить об *удвоении* групп, т. е. о переходе от вещественных параметров группы к *двойным* параметрам. Группу, получающуюся таким образом из группы G, можно обозначить $G(e)$. Группа $G(e)$ изоморфна прямому произведению двух групп G, так как всякий элемент ξ группы $G(e)$ имеет координаты $\xi^i = x^i e_1 + y^i e_2$, где x^i и y^i — координаты некоторых элементов x и y группы G. Поэтому, если группа G компактна, группа $G(e)$ также компактна. Если группа G проста, то группа $G(e)$ изоморфна группе преобразований $a \rightarrow xay^{-1}$ группы G, т. е. связной группе изометрических преобразований группы G, рассматриваемой как симметрическое риманово пространство. В полученной таким образом компактной, но не простой группе $G(e)$ имеется инволютивный автоморфизм $\xi^i \rightarrow \bar{\xi}$. Исходя из группы $G(e)$ и этого инволютивного автоморфизма, применяя тот же метод, что и выше, мы получим группу $G(i)$.

Группы $B_l(i)$ и $D_l(i)$ локально изоморфны группам движений соответственно $2l$- и $(2l-1)$-мерных комплексных эллиптических пространств $S_{2l}(i)$ и $S_{2l-1}(i)$, которые можно определить как пространства $P_{2l}(i)$ и $P_{2l-1}(i)$, в качестве преобразований которого рассматриваются проективные преобразования, переводящие в себя квадрики (13). Матрицы таких преобразований также удовлетворяют условию ортогональности (2), а между точками x и y пространства S_n можно определить расстояние ω по формуле (14), которое, в отличие от вещественного случая, является комплексным числом, и, следовательно, каждые две точки S_n имеют два вещественных инварианта.

Группы $A_l(i)$ локально изоморфны полным группам проективных преобразований комплексных пространств $P_l(i)$, а группы $C_l(i)$ локально изоморфны группам симплектических преобразований пространства $Sp_{2l-1}(i)$, т. е. таких проективных преобразований пространства $P_{2l-1}(i)$, которые переводят в себя кососимметрическую билинейную форму (3). Фундаментальные группы пространств $P_n(i)$ и $Sp_{2n+1}(i)$ в точности изоморфны группам движений унитарно-эллиптических пространств K_n соответственно над кольцом *двойных комплексных чисел* $\alpha + \beta e$ (α и β — комплексные числа) и кольцом *комплексных кватернионов* $\alpha + \beta i + \gamma j + \delta k$ (α, β, γ, δ — комплексные числа), изоморфно представляющимся кольцом комплексных матриц второго порядка.

Инволютивными автоморфизмами фундаментальных групп комплексных пространств $S_n(i)$, $P_n(i)$ и $Sp_{2n+1}(i)$ являются инволютивные автоморфизмы соответственных вещественных пространств S_n, P_n и Sp_{2n+1}, преобразования, порожденные преобразованием (8), и произведения последнего преобразования на одно из первых. Образы симметрии в пространствах $S_n(i)$, $P_n(i)$ и $Sp_{2n+1}(i)$ определяются этими инволютивными автоморфизмами совершенно аналогично тому, как мы это делали в рассмотренных выше случаях.

22. Приведенные модели симметрических пространств с некомпактными простыми фундаментальными группами позволяют также весьма просто определить стационарные подгруппы этих пространств.

Например, стационарной подгруппой пространства p-мерных плоскостей с нх взаимными полярами в ${}^qS_n$ является прямое произведение группы движений p-мерной плоскости и группы движений ее абсолютной поляры, т. е. прямое произведение групп движений ${}^rS_pn$ и ${}^{q-r-1}S_{n-p-1}$.

Стационарной подгруппой пространства паратактических конгруэнций в ${}^nS_{2n+1}$, в силу того, что каждый луч такой конгруэнции взаимно однозначно соответствует паре точек двух P_n (т. е. одной точке двойного пространства $P_n(e)$, причем можно показать, что, введя в $P_n(e)$ метрику, в которой расстояние между двумя точками $P_n(e)$ равно расстоянию между двумя соответственными прямыми конгруэнции, мы получим метрику $K_n(e)$), является прямое произведение группы движений $K_n(e)$ на группу движений ${}^1S_1$ или, что тоже самое, произведение группы проективных преобразований P_n на группу движений ${}^1S_1$.

Стационарной подгруппой пространства псевдопаратактических конгруэнций в ${}^nS_{2n+1}$ в силу того, что каждый луч такой конгруэнции взаимно однозначно соответствует точке комплексного пространства $P_n(i)$, на котором абсолют ${}^nS_{2n+1}$ высекает абсолют $S_n(i)$ и, следовательно, определяет метрику $S_n(i)$, является группа движений $S_n(i)$.

Стационарной подгруппой пространства p-пар P_n является прямое произведение группы проективных преобразований P_p, группы проективных преобразований P_{n-p-1} и группы движений ${}^1S_1$.

Стационарной подгруппой пространства квадрик индекса q в P_n является подгруппа группы проективных преобразований P_n, переводящая в себя эту квадрику, т. е. группа движений ${}^qS_n$.

Стационарной подгруппой пространства линейных комплексов n-мерных плоскостей в P_{2n+1} является подгруппа группы преобразований P_{2n+1}, переводящая в себя этот комплекс, т. е. группа симплектических преобразований Sp_{2n+1}.

Стационарной подгруппой пространства эллиптических линейных конгруэнций в P_{2n+1} в силу того, что каждый луч такой конгруэнции взаимно однозначно соответствует точке пространства $P_n(i)$, является прямое произведение группы проективных преобразований $P_n(i)$ на группу движений S_1.

Стационарной подгруппой пространства $(2p+1)$-мерных плоскостей Sp_{2n+1} вместе с плоскостями, соответствующими им относительно абсолютной нуль-системы Sp_{2n+1}, является прямое произведение групп симплектических преобразований Sp_{2p+1} и $S_{2n-2p-1}$.

Стационарной подгруппой пространства симплектических паратактических конгруэнций в Sp_{2n+1} является подгруппа группы симплектических преобразований Sp_{2n+1}, переводящих в себя квадрику, определяемую паратактической конгруэнцией, т. е. подгруппа группы движений S_{2n+1} или $^nS_{2n+1}$ переводящая в себя паратактическую конгруэнцию прямых этих пространств, или, что то же, прямое произведение групп движений $K_n(i)$ или $K_n(e)$, соответственно, на группу движений S_1 или $^1S_1$.

23. Приведенные примеры пространств образов симметрии с некомпактными простыми фундаментальными группами показывают, что каждому типу симметрических пространств с компактной простой фундаментальной группой — AI, AII и т. д. соответствует некоторый тип симметрических пространств с некомпактной фундаментальной группой, имеющей ту же комплексную форму, однако при этом симметрическому пространству приводимому, в компактном случае, может соответствовать в некомпактном случае неприводимое симметрическое пространство. Так, например, как мы видели, в случае, группы проективных преобразований P_n, кроме пространств мнимых квадрик, линейных комплексов плоскостей, p-пар и конфигураций точка + гиперплоскость, являющихся моделями неприводимых симметрических пространств, соответствующих неприводимым пространствам типов AI, AII, AIII и AIV, имеются пространства вещественных квадрик и эллиптических линейных конгруэнций прямых, также являющихся моделями неприводимых симметрических пространств, но соответствующих приводимым симметрическим пространствам с компактной фундаментальной группой.

В своих работах Картан рассматривает только те из пространств с некомпактными простыми фундаментальными группами, стационарные подгруппы которых компактны и, следовательно, метрика которых является римановой, а не псевдоримановой. Из приведенных примеров видно, что такими пространствами в случае рассмотренных групп являются только пространства мнимых квадрик P_n, пространства симплектических паратактических конгруэнций Sp_{2n+1}, определяемых парами комплексно сопряженных нуль-плоскостей Sp_{2n+1}, и пространства таких p-мерных плоскостей ^qS_n, $^qK_n(i)$ и $^qK_n(i, j)$, что ни данные плоскости, ни их поляры не пересекают абсолюта (при $p = 0$ таким пространством является пространство точек, находящихся во внутренней области абсолюта ^1S_n, т. е. неэвклидово пространство Лобачевского), а также пространства с компактными стационарными группами G и фундаментальными группами $G(i)$. Картан называет такие пространства *„симметрическими пространствами отрицательной кривизны“* (см. стр. 229 настоящего сборника).

Однако если не связывать себя этим искусственным ограничением, а рассматривать все симметрические пространства с некомпактными простыми группами, классификация Картана должна быть дополнена новыми типами, определяемыми теми неприводимыми симметрическими пространствами с некомпактными фундаментальными группами, которые соответствуют приводимым симметрическим пространствам с компактными фундаментальными группами.

24. Образы симметрии в 3-мерных пространствах можно рассмотреть и с другой точки зрения. Каждую прямую P_3, проходящую через точки x^i и y^i, как известно, можно характеризовать плюккеровыми координатами $p^{ij}=x^iy^j-x^jy^i$. Эти координаты, определенные с точностью до множителя, не зависят от выбора точек и связаны соотношением

$$<pp>=p^{01}p^{23}+p^{02}p^{31}+p^{03}p^{12}=0. \qquad (32)$$

Плюккеровы координаты прямых *линейного комплекса*, являющихся нуль-прямыми некоторой нуль-системы $u_i=\sum_j a_{ij}x^j$, $a_{ij}=-a_{ji}$, связаны одним линейным соотношением $\sum_i\sum_j u_{ij}p^{ij}=0$.

Числа $u_{ij}=-u_{ji}$ называются координатами линейного комплекса и нормируются условием $<uu>=u_{01}u_{23}+u_{02}u_{31}+u_{03}u_{12}=\pm 1$. Два линейных комплекса с нормированными координатами u_{ij} и v_{ij} имеют проективный инвариант ω, определяемый соотношением $\cos\omega=<uv>$.

Пространство линейных комплексов P_3, если за расстояние между двумя комплексами принять их проективный инвариант ω, изометрично пространству ${}^3S_5$, а группа проективных преобразований P_3 в точности изоморфна группе движений ${}^3S_5$. Для доказательства достаточно рассматривать координаты линейных комплексов как координаты точек ${}^3S_5$, в котором роль абсолюта играет квадрика (32). Тогда инвариант ω двух комплексов равен расстоянию между соответственными точками, а фундаментальная группа P_3 изображается фундаментальной группой ${}^3S_5$.

Точки самой квадрики (32), взаимно однозначно соответствующие *прямым* P_3, изображают комплексы прямых, пересекающихся с одной прямой. Прямые ${}^3S_5$ высекают из квадрики (32) пары точек, изображающие пары прямых P_3, а 3-мерные плоскости, полярные к этим прямым, высекают из квадрики (32) 2-мерные квадрики, изображающие *линейные конгруэнции* прямых — семейства прямых, пересекающих пару прямых. 2-мерные плоскости ${}^3S_5$ высекают из квадрики (32) кривые, изображающие семейства прямолинейных образующих *квадрик* P_3, причем 2-мерные плоскости, полярные между собой, изображают семейства образующих одной и той же квадрики. Прямолинейные образующие квадрики (32) изображают *плоские пучки* прямых P_3, а 2-мерные образующие плоскости квадрики (32) изображают семейства прямых P_3, проходящих через одну *точку* или лежащих в одной *плоскости* P_3.

Из изоморфизма фундаментальных групп P_3 и ${}^3S_5$ следует, что всякому образу симметрии в ${}^3S_5$ взаимно однозначно соответствует образ симметрии в P_3. В частности, как мы видели, точки ${}^3S_5$ изображают *линейные комплексы прямых* P_3; прямые ${}^3S_5$, пересекающие квадрику (32), изображают *пары прямых* P_3; прямые ${}^3S_5$, не пересекающие квадрики (32), изображают пары комплексно сопряженных прямых P_3, т. е. *эллиптические линейные конгруэнции* прямых P_3; 2-мерные плоскости ${}^3S_5$, пересекающие квадрику (32), изображают *линейчатые квадрики* P_3; 2-мерные плоскости ${}^3S_5$, не пересекающие квадрики (32), изображают *мнимые квадрики* P_3; *паратактические конгруэнции* прямых ${}^3S_5$, т. е. конгруэнции прямых, пересекающих пары образующих 2-мерных плоскостей квадрики (32) (принадлежащие к разным семействам), изображают *конфигурации точка + гиперплоскость P_3*; *псевдопаратактические конгруэнции* прямых ${}^3S_5$, т.е. конгруэнции прямых, соединяющих пары комплексно сопряженных 2-мерных плоскостей ${}^3S_5$, полярных относительно квадрики (32), изображают *овальные квадрики P_3*.

Так как подгруппа группы проективных преобразований P_n, переводящая в себя квадрику индекса q, является группой движений пространства ${}^qS_n$, абсолютом которого является эта квадрика, то отсюда мы находим, что группа движений S_3 изоморфна подгруппе группы движений ${}^3S_5$, переводящей в себя пару 2-мерных плоскостей, полярных относительно квадрики (32) и не пересекающих эту квадрику, т. е. *группа движений S_3 изоморфна прямому произведению двух групп движений S_2 или группе движений $S_2(e)$*; группа движений ${}^2S_3$, изоморфна подгруппе группы движений ${}^3S_5$, переводящей в себя пару 2-мерных плоскостей, полярных относительно квадрики (32) и пересекающих эту квадрику, т. е. *группа движений ${}^2S_3$ изоморфна прямому произведению двух групп движений ${}^1S_2$ или группе движений ${}^1S_2(e)$*; группа движений ${}^1S_3$ изоморфна подгруппе группы движений ${}^3S_5$, переводящей в себя псевдопаратактическую конгруэнцию или пару комплексно сопряженных 2-мерных плоскостей, полярных относительно квадрики (32), т. е. *группа движений ${}^1S_3$ изоморфна группе движений $S_2(i) = {}^1S_2(i)$*.

Из изложенных результатов следует также, что *пространство прямых пространства Sp_3, если за расстояние между двумя прямыми принять такое число ω, что $V = \cos^2\omega$, является инвариантом* (31) *этих прямых, и если отождествить пары прямых, соответствующих друг другу относительно абсолютной нуль-системы Sp_3, изометрично пространству ${}^2S_4$, а группа симплектических преобразований Sp_3 в точности изоморфна группе движений ${}^2S_4$*. В самом деле группа симплектических преобразований Sp_3 изображается в ${}^3S_5$ группой вращений вокруг точки, изображающей ее комплекс нуль-прямых, и, следовательно, группой движений в 4-мерной плоскости, полярной к этой точке относительно квадрики (32). Каждая точка этой плоскости, являющейся пространством ${}^2S_4$, взаимно однозначно соответствует паре точек пересечения квадрики (32) с прямой, соединяющей данную точку с полюсом 4-мерной плоскости, а эта пара точек квадрики (32) изображает пару прямых Sp_3, соответствующих друг другу относительно абсолютной нуль-системы Sp_3. Пространство прямых Sp_3 без отождествления пар прямых в той же метрике изометрично уже не пространству ${}^2S_4$, а сфере в ${}^2R_5$, что следует и из того, что это пространство изометрично пространству $K_1(i, e)$.

Из изоморфизма фундаментальных групп Sp_3 и ${}^2S_4$ следует, что всякому образу симметрии в ${}^2S_4$ взаимно однозначно соответствует образ симметрии в Sp_3. В частности, как мы видели, точки ${}^2S_4$ изображают пары *прямых* Sp_3, соответствующих друг другу относительно абсолютной нуль-системы, а прямые ${}^2S_4$ изображают пары вещественных или комплексно сопряженных нуль-прямых Sp_3, т. е. *симплектические паратактические конгруэнции Sp_3*.

25. Совершенно аналогично тому, как мы провели классификацию образов симметрии в пространствах с простыми фундаментальными группами, можно провести такую классификацию в пространствах, фундаментальные группы которых не просты. К таким пространствам относятся n-мерное *эвклидово пространство* R_n, n-мерное *псевдоэвклидово пространство индекса* q ^qR_n, n-мерные *унитарно-эвклидовы пространства* $U_n(i)$, $U_n(i, j)$, $U_n(e)$ и $U_n(i, e)$, т. е. аффинные пространства соответственно над кольцом комплексных чисел, кватернионов, двойных чисел и псевдокватернионов, причем скалярное произведение векторов в этих пространствах определяется с помощью эрмитовой формы (5), и n-мерные *унитарно-псевдоэвклидовы пространства индекса* q $^qU_n(i)$, $^qU_n(i, j)$, $^qU_n(e)$ и $^qU_n(i, e)$, т. е. аффинные пространства над теми же кольцами, причем скалярное произведение векторов в этих пространствах определяется с помощью эрмитовой формы (22). Как следует из результатов Картана. все инволютивные автоморфизмы групп движений всех этих пространств могут быть представлены в виде преобразований $S \to \sigma S \sigma^{-1}$, где σ может быть приведено к виду (7), и в случае комплексных и двойных пространств σ может быть приведено к виду (8) или к виду произведения (7) на (8), в случае кватернионных и псевдокватернионных пространств σ может быть приведено к виду (11) или (26), или к виду произведения (7) на (11), или (7) на (26).

Преобразования (7) в R_n, ^qR_n, U_n и ^qU_n представляют собой отражения относительно *p-мерных плоскостей* (при $p = 0$ относительно точек, при $p = 1$ относительно прямых), преобразования (8), (11) и (26) в U_n и ^qU_n представляют собой отражения относительно *нормальных n-мерных цепей*, изометричных R_n в $U_n(i)$ и $U_n(e)$, $U_n(i)$ и $U_n(e)$ в $U_n(i, j)$ и $U_n(i, e)$ и т. д. Произведения преобразований (7) на преобразования (8), (11) и (26) представляют собой отражения относительно p-мерных плоскостей в нормальных p-мерных цепях, и пространства этих образов могут быть расщеплены на пространства таких образов, лежащих в одной нормальной n-мерной цепи. Таким образом мы определили образы симметрии в пространствах R_n, ^qR_n, U_n и ^qU_n.

V. Некоторые следствия и выводы. 26. Теория симметрических пространств позволяет весьма простым способом, совершенно единым для всех образов симметрии, разрешить ряд задач геометрии этих образов, решавшихся раньше специфическими методами независимо друг от друга.

Для всяких двух образов симметрии можно определить геометрические и числовые *взаимные параметры* такие, что задание одного из этих образов и взаимных параметров позволяет однозначно определить второй из этих образов. Для получения взаимных параметров в общем случае надо рассмотреть симметрии относительно этих образов и преобразование фундаментальной группы, являющееся произведением этих симметрий. Тогда инвариантные подпространства этого произведения симметрий будут искомыми геометрическими параметрами, а инварианты этого преобразования, определяющие его с точностью до преобразования $S \to TST^{-1}$ с помощью произвольного преобразования той же группы, являются искомыми числовыми параметрами. Например, для двух прямых R_3 геометрическим взаимным параметром является их общий перпендикуляр, а числовыми взаимными параметрами — длина этого перпендикуляра и угол между прямыми для двух прямых S_3, геометрическими взаимными параметрами являются два общих перпендикуляра этих прямых, а числовыми взаимными параметрами — длины этих перпендикуляров.

Полученные таким образом числовые параметры, соответствующие двум образам симметрии, принадлежащим к одному связному пространству образов симметрии, определяют эти два образа с точностью до преобразования фундаментальной группы.

Во всяком пространстве образов симметрии можно определить единственную *аффинную связность* симметрического пространства, инвариантную при преобразовании фундаментальной группы. Роль геодезических линий в этой связности играют такие последовательности образов симметрии, что произведения симметрий относительно этих образов иа симметрию относительно одного из них образуют 1-параметрическую группу. Например, роль геодезических линий в пространствах прямых R_3 и S_3 играют последовательности прямолинейных образующих линейчатых геликоидов.

Во всяком пространстве образов симметрии с простой фундаментальной группой можно определить единственную с точностью до масштаба *метрику* симметрического риманова или псевдориманова пространства, инвариантную при преобразованиях фундаментальной группы. Например, в пространстве прямых S_3 расстояние между двумя прямыми в этой метрике равно $\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}$, где ω_1 и ω_2 — длины общих перпендикуляров этих прямых.

Для всяких двух бесконечно близких образов симметрии можно определить *локальные параметры* — предельные положения геометрических взаимных параметров при стремлении этих образов симметрии друг к другу и предел отношений числовых взаимных параметров при том же предельном переходе. Для всякого семейства образов симметрии можно найти закон расположения локальных параметров в окрестности каждого образа этого семейства. Например, для прямых R_3 локальными параметрами являются центр луча (предельное положение основания общего перпендикуляра двух бесконечно близких прямых при их стремлении друг к другу) и параметр распределения (предел отношения длины общего перпендикуляра к углу между прямыми при том же предельном переходе). Закон распределения этих параметров в окрестности прямой в конгруэнции прямых в R_3 (2-параметрическом семействе) определяется известными формулами Гамильтона и Мангейма.

Совершенно единым методом может быть также развита дифференциальная геометрия семейств образов симметрии, частными случаями которой являются теория конгруэнций прямых в R_3 (см. Дубнов [1]), теория конгруэнций прямых в S_3 и $^1S_3$ (см. Кулидж [1]), теория конгруэнций прямых в R_n (см. Рашевский [1]), теория конгруэнций p-мерных плоскостей в R_n и S_n (см. Вагнер [1]), теория конгруэнций кругов в C_3 (см. Кулидж [2]), теория пар конгруэнций прямых в P_3 (см. Фиников [1]).

Систематическому применению теории симметрических пространств к геометрии образов симметрии посвящен ряд работ автора, в которых рассматриваются как вопросы общей теории образов симметрии ([1], [3], [5]), так и специальные вопросы дифференциальной геометрии семейств различных образов симметрии: p-мерных плоскостей R_n и S_n [2], пар прямых и квадрик P_3 [6], p-мерных сфер C_n [7], p-мерных плоскостей и нормальных n-мерных цепей $K_n(i)$ [8] и p-пар и квадрик P_n [9].

27. Все изложенное в настоящей статье позволяет сделать также некоторый общий вывод о *роли и значении неэвклидовой геометрии*. Неэвклидова геометрия, открытие которой является бессмертной заслугой великого русского геометра Н. И. Лобачевского, была первой в истории математики непротиворечивой геометрией пространства, отличного от эвклидова. Расширившееся в результате этого открытия понятие о пространстве привело к развитию большого числа геометрий однородных пространств, важнейшими из которых являются проективная, конформная и симплектическая геометрии, причем в ряду этих геометрий сама неэвклидова геометрия заняла место скромного частного случая. Изложенная в настоящем сборнике теория симметрических пространств Картана показывает, что наиболее важные однородные пространства — симметрические пространства — можно, как мы уже указывали, рассматривать как пространства, в определенном смысле являющихся пространствами постоянной кривизны, и таким образом все эти пространства являются обобщением неэвклидовых пространств, являющихся пространствами постоянной кривизны в собственном смысле этого слова.

Результаты, изложенные в настоящей статье, показывают, что все наиболее интересные симметрические пространства — пространства, фундаментальными группами которых являются простые группы всех больших классов, можно рассматривать как *пространства образов симметрии в неэвклидовых пространствах* над той или иной системой чисел, в частности, важнейшие геометрии однородных пространств — проективную, конформную и симплектическую — при надлежащем выборе основного образа (конфигурация точка + гиперплоскость, гиперсфера и прямая) можно рассматривать как неэвклидовы геометрии. Таким образом, мы видим, что неэвклидова геометрия является не частным случаем геометрии однородного пространства, ценным для нас только благодаря своему историческому значению, но что неэвклидова геометрия представляет собой весьма широкую схему, охватывающую наиболее важные геометрии однородных пространств. Этот вывод объясняет взаимоотношение неэвклидовой геометрии с общей теорией симметрических пространств и дает основу для установления тесной взаимной связи между теориями геометрических образов в этих однородных пространствах.

БИБЛИОГРАФИЯ

АДО И. Д.

[1]. О представлении конечных непрерывных групп линейными подстановками. *Известия Казанского физ.-мат. о-ва,* 3 (7) (1934—1935) стр. 1—43.

[2] Представление алгебр Ли матрицами. *Успехи матем. наук,* **2:6 (22)** (1947), стр. 159—173.

АЛЕКСАНДРОВ П. С.

[1] О понятии пространства в топологии. *Успехи матем. наук,* **2:1 (17)** (1947), стр. 5—57.

БИРКГОФ Г. — BIRKHOFF G.

[1] Lie groups simply isomorphic with no linear groups. *Bull. Amer. Math., Soc.* **42** (1936), стр. 883—888.

[2]. Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices *Ann. of Math.,* **38** (1937), стр. 526—532.

БУЛЬ А. — BUHL A.

[1] Aperçus modernes sur la théorie des groupes continus et finis. *Mémorial Sci math.,* **32**, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

ВАГНЕР В. В.

[1] Differential geometry of the family of R_k's in R_n and of the family of totally geodesic S_{k-1}'s in S_{k-1} of positive curvature. *Матем. сборник,* **10 (52)** (1942), стр. 165—209.

ВЕЙЛЬ Г. — WEYL H.

[1] Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen. *Math. Zeitschr.* **23** (1925) стр. 271—307, **24** (1925), стр. 328—395. Имеется сокращенный русский перевод.: Теория представлений непрерывных полупростых групп при помощи линейных преобразований. *Успехи матем. наук,* **4** (1938), стр. 201—245.

[2] Classical groups. Their invariants and representations. Univ. Press. Princeton, 1939, 2-е изд., 1947. Имеется русский перевод: Классические группы, их инварианты и представления. ГИИЛ, 1947.

ГАНТМАХЕР Ф. Р.

[1] Canonical representation of automorphism of a complex semi-simple Lie group. *Матем. сборник*, **5** (**47**): 1 (1939), стр. 101—146.

[2] On the classification of real simple Lie groups. *Матем. сборник*, **5** (**47**): 2 (1939), стр. 217—250.

ГЕЛЬФАНД И. М. и АЙМАРК М. А.

[1] Унитарные представления групп Лоренца. *Известия АН СССР*, **11** (1945), стр. 411—504.

[2] Унитарные представления полупростых групп Ли. *Матем. сборник*, **21** (**63**) (1947), стр. 405—434.

ГИЛЬБЕРТ Д. — HILBERT D.

[1] Mathematische Probleme, *Gött. Nachrichten* (1900), стр. 253—297.

ГУРВИЦ А. — HURWITZ A.

[1] Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration. *Gött. Nachrichten* (1897), стр. 71—90.

ГУРСА Э. — GOURSAT E.

[1] Leçons sur le problème de Pfaff. Paris, Hermann, 1922.

ДАНЦИГ Д. ВАН и ВАРДЕН Б. А. ВАН ДЕР — DANZIG D. VAN und WAERDEN B. L. VAN DER.

[1] Über metrisch homogene Räume. *Abh. math. Seminar*. Hamburg, **6** (1928), стр. 367—376.

ДЖЕКОБСОН Н. — JACOBSON N.

[1] Structure and automorphisms of semi-simple Lie groups in the large. *Ann. of Math.*, **40** (1939), стр. 455—463.

ДУБНОВ Я. С.

[1] Die Differentialgeometrie der Strahlenkongruenzen. *Труды семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ*, вып. **1** (1933), стр. 223—303.

ДЫНКИН Е. Б.

[1] Структура полупростых алгебр Ли. *Успехи матем. наук*, **2**: 4 (20) (1947), стр. 59—128.

[2] Вычисление коэффициентов в формуле Campbell'a — Hausdorff'a. *Доклады АН СССР*, **57**, № 4 (1947), стр. 323—327.

[3] О представлении ряда log $(e^x e^y)$ от некоммутирующих x и y через коммутаторы. *Матем. сборник*, **25**(**67**): 1 (1949), стр. 155—162.

КАРТАН Э. — CARTAN E.

[1] Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. Thèse. Paris, Nony, 1894, 2-е изд., Paris, Vuibert, 1933.

[2] Sur certaines expressions differentielles et le problème de Pfaff. *Ann. Éc. Norm.*, 3-я серия, **16** (1899), стр. 239—332.

[3] La structure des groupes de transformations et la théorie du trièdre mobile. *Bull. Sci. math.*, 2-я серия, **34** (1910), стр. 250—283.

[4] Les groupes projectifs qui ne laissent invariante ancune multiplicité plane. *Bull. Soc. math.* 2-я серия, **41** (1913), стр. 53—94.

[5] Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent aucune multiplicité plane. *Journal Math. pures et appl.*, 6-я серия, т. **10** (1914), стр. 149—186.

[6] Les groupes réels simples, finis et continus. *Ann. Éc. Norm.*, 3-я серия, т. **31** (1914), стр. 263—355.

[7] Leçons sur les invariants integraux. Paris, Hermann, 1922. Имеется русский перевод: Интегральные инварианты. ГТТИ, 1940.

[8] Sur les variétés à connexion affine et la relativité généralisée. *Ann. Éc. Norm.*, 3-я серия, т. **40** (1923), стр. 325—412; **41** (1924), стр. 1—25; т. **42** (1925), стр. 17—18.

[9] Les récents géneralisations de la notion d'espace. *Bull. Sci. math.*, 2-я серия, т. **48** (1924), стр. 294—320.

[10] Sur les varietés à connexion projective. *Bull. Soc. Math. Françe*, **52**, (1924), стр. 205—241.

[11] La géométrie des espaces de Riemann. *Mémorials Sci. Math.*, **9**. Paris, Gauthier-Villars, 1925.

[12] Les tenseurs irreductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples. *Bull. Sci. math.*, 2-я серия, т. **49** (1925), стр. 130—152.

[13] Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples. *Bull. Sci. math.*, 2-я серия, т. **49** (1925), стр. 361—374.

[14] Sur certains systèmes differentiels dont les inconnues sont des formes de Pfaff. *Comptes rendus, Ac. Sci.*, **182** (1926), стр. 956—958.

[15] Les groupes d'holonomie des espaces généralisés. *Acta math.*, **48** (1926), стр. 1—42. Имеется русский перевод в книге „VIII международный конкурс на премию им. Н. И. Лобачевского". Издание Каз. физ.-мат. об-ва (1937), стр. 61—111.

[16] Sur les espaces de Riemann dans lesquels le transport par parallelisme conserve la courbure. *Rendic. Accad. Lincei*, 6-я серия, **3** (1926), стр. 544—547.

[17] La géométrie des groupes de transformations. *Journal Math. pures et appl.*, серия 9, т. **6** (1927), стр. 1—119. (Русский перевод в настоящем сборнике, стр. 7—111.)

[18] Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann. *Bull. Soc. math.* **54** (1926), стр. 214—264; **55** (1927), стр. 114—134. (Русский перевод в настоящем сборнике, стр. 112—142.)

[19] La géométrie des groupes simples. *Annali di Mat.*, 4-я серия, т. **4** (61) (1927), стр. 209—256. (Русский перевод в настоящем сборнике, стр. 183—239.)

[20] Sur certaines formes riemanniennes remarquables de géométries à groupe fondamental simple. *Ann. École Norm.*, 3-я серия, т. **44** (1927), стр. 345—467.

[21] La théorie des groupes et la géométrie. *L'enseignement math.*, т. **26** (1927), стр. 200—225.

[22] Complement au Mémoire „Sur la géométrie de groupes simples". *Annali di Mat.*, 4-я серия, т. **5** (1928), стр. 253—260.

[23] Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann. Paris, Gauthier-Villars, 1928. Имеется русский перевод: Геометрия римановых пространств, ОНТИ, 1936.

[24] Sur les espaces de Riemann clos admettant un groupe transitif de déplacements. *Comptes rendus, Ac. Sci.*, **186** (1928), стр. 1817—1819.

[25] Sur les nombres de Betti des espaces de groupes clos. *Comptes rendus, Ac. Sci.*, **187** (1928), стр. 196—198.

[26] Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne. *Journal Math. pures. et appl.*, **8** (1929), стр. 1—33. (Русский перевод в настоящем сборнике, стр. 150—182.)

[27] La théorie des groupes finis et continus et l'Analysis situs. *Mémorial Sci. math.*, **42**, Paris, Gauthier-Villars, (1930). (Русский перевод в настоящем сборнике, стр. 240—292.)

[28] Leçons sur la géométrie projective complexe. Paris, Gauthier-Villars, 1931.

[29] La topologie des groupes de Lie. Actualités scient. et industr., n° **358**, Paris. Hermann, 1936.

[30] Leçons sur la théorie des spineurs. Actualités scient. et industr., nn° **643**, **701**, Paris, Hermann, 1938. Имеется русский перевод: Теория спиноров, ГИИЛ, 1947.

[31] Les représentations linéaires des groupes de Lie. *Journal Math. pures. et appl.*, **17** (1938), стр. 1—12.

КАРТАН Э. и СХОУТЕН Я. А. — CARTAN E. EN SCHOUTEN J. A.

[1] Over de meetkunde der groepuitgebreidheid van halfeenvoudige en eenvoudige groupen. *Versl. Kon. Akad. van. Wetensch.*, Amsterdam, **35** (1926), стр. 387—399. Имеется английский перевод. On the geometry of the groupmanifold of simple and semisimple groups. *Proc. Kon. Akad. van Wetensch.*, Amsterdam, **29** (1926), стр. 803—815.

[2] Over Riemannsche meetkunden di een absoluut parallelisme toelaten. *Versl. Kon. Akad. van Wetensch.*, Amsterdam, 35 (1926), стр. 505—518. Имеется английский перевод: On Riemannian Geometry admitting an absolute parallelism. *Proc. Kon. Akad. van Wetensch.*, Amsterdam, 29 (1926), стр. 923—946.

КЛЕЙН Ф. — KLEIN F.

[1] Vorlesungen über höhere Geometrie, 3-е изд., Berlin, Springer, 1926. Имеется русский перевод: Высшая геометрия. ГОНТИ, 1939.

КОТЕЛЬНИКОВ А. П.

[1] Проективная теория векторов, Казань (1899).

КУЛИДЖ ДЖ. Л. — COOLIDGE I. L.

[1] The elements of non-euclidian geometry, Oxford, Clarendon Press, 1909.

[2] A treatise on the circle and sphere, Oxford, Clarendon Press, 1915.

[3] The geometry of the complex domain, Oxford, Clarendon Press, 1924.

ЛЕВИ Г. — LEVY H.

[1] Forma canonica dei ds^2 per i quali si annulano i simboli di Riemann a cinque indici. *Rendic. Accad. Lincei*, 6-я серия, (1926), стр. 65—69.

[2] Sopra alcune proprietà degli spazi per i quali si annullano i simboli di Riemann a cinque indici. *Rendic. Accad. Lincei*, 6-я серия, **3** (1926), стр. 124—129.

ЛИ С. и ШЕФФЕРС Г. — LIE S. UND SCHEFFERS G.

[1] Vorlesungen über continuierliche Gruppen. Leipzig, Teubner, 1893.

ЛИ С. и ЭНГЕЛЬ Ф. — LIE S. UND ENGEL FR.

[1] Theorie der Transformationsgruppen. Leipzig, Teubner, **1**, 1888; **2**, 1890; **3**, 1893.

МАЛЬЦЕВ А. И.

[1] О линейных связных локально замкнутых группах. *Доклады АН СССР*, **50**: **3** (1943), стр. 108—110.

[2] On the theory of the Lie groups in the large. *Матем. сборник*, **16** (**58**): **2** (1945), стр. 163—190; **19** (**61**): **3** (1946), 523—524.

МАЙЕР В. и ТОМАС Т. И. — MAYER W. AND THOMAS T. Y.

[1] Foundations of the continuos groups. *Ann. of Math.*, **36** (1935), стр. 770—822.

МЕДИЧИ С. — MEDICI S.

[1] Sui gruppi di rotazioni. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **10** (1908) стр. 1—60.

МОНТГОМЕРИ Д. — MONTGOMERY D.

[1] Analytic parameters in three dimensional groups. *Ann. of Math.*, **49** (1948), стр. 118—131.

НЕЙМАН ДЖ. — NEUMANN J. VON.

[1] Zur Theorie der Darstellung kontinuierlicher Gruppen. *Sitzungsber. Akad., Berlin* (1927), стр. 76—90.

[2]. Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearen Transformationen und ihrer Darstellungen. *Math. Zeitschr.*, **30** (1929), стр. 3—42.

[3] Die Einführung analytischer Parameter in topologischen Gruppen. *Ann. of Math.*, **34** (1933), стр. 170—190.

[4] Zum Haarschen Mass in topologischen Gruppen, *Compositio Mathematica*, **I**, вып. 1 (1934). Имеется русский перевод: О мере Хаара в топологических группах. *Успехи матем. наук*, **2** (1936), стр. 168—176.

ПОЛИЩУК Е. М.

[1] Об экспоненциальном представлении элементов полупростой комплексной группы Ли. *Матем. сборник*, **24** (**66**): **2** (1949), стр. 237—248.

ПОНТРЯГИН Л. С.

[1] The theory of topological commutative groups. *Ann. of Math.*, **35** (1934), стр. 361—388. Имеется русский перевод: Теория топологических коммутативных групп. *Успехи матем. наук*, **2** (1936), стр. 177—195.

[2] Непрерывные группы, ГТТИ, 1938.

[3] Homologies in compact Lie groups. *Матем. сборник*, **6 (48)** (1939), стр. 389—422.

ПУАНКАРЕ А. — POINCARÉ H.

[1] Sur les groupes continus. *Comptes rendus, Ac. Sci.*, **128** (1899), стр. 1065—1069.

[2] Sur les groupes continus. *Cambr. Trans.* (1900), стр. 200—225.

[3] Sur les groupes continus. *Rend. Circ. matem. Palermo.* **15** (1901), стр. 321—368; **25** (1908), стр. 81—130.

РАШЕВСКИЙ П. К.

[1] Congruence rectiligne dans l'espace euclidien à *n* dimensions *Труды семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ*, вып. **2—3** (1935), стр. 212—228.

[2] Геометрическая теория уравнений с частными производными, ГТТИ, 1947.

РОЗЕНФЕЛЬД Б. А.

[1] Теория поверхностей в симметрических пространствах. *Известия АН СССР*, серия матем., **9** (1945), стр. 371—386.

[2] Дифференциальная геометрия семейств многомерных плоскостей. *Известия АН СССР*, серия матем. **11** (1947), стр. 283—308.

[3] Метрика и аффинная связность в пространствах плоскостей, сфер в квадрик. *Доклады АН СССР*, **57**: **6** (1947), стр. 543—546.

[4] Спинорные представления действительных вращений. *Труды семинара по вект. и тенз. анализу при МГУ*, вып. 6 (1948), стр. 506—512.

[5] Дифференциальная геометрия образов симметрии. Доклады АН СССР, т. **59**: **6** (1948), стр. 1057—1060.

[6] Метрический метод в проективно-дифференциальной геометрии и ее конформных и контактных аналогах. *Матем. сборник*, **22** (**64**): **3** (1948), стр. 457—462.

[7] Конформно-дифференциальная геометрия семейств C_m в C_n. *Матем. сборник*, **23** (**65**): 2 (1948), стр. 297—313.

[8] Унитарно-дифференциальная геометрия семейств K_m в K_n. *Матем. сборник*, **24** (**66**): **1** (1949), стр. 53—74.

[9] Проективно-дифференциальная геометрия семейств пар P_m+P_{n-m-1} в P_n. *Матем. сборник*, **24** (**66**): **3** (1949), стр. 405—428.

[10] Геометрии простейших алгебр. *Доклады АН СССР*, **64**: **5** (1949), стр. 629—633.

СЕВЕРИ Ф.—SEVERI F.

[1] Sulla curvatura delle superficie e varietà. *Rend. Circ. matem. Palermo*, 42 (1917), стр. 227—259.

СИНЦОВ Д. М.

[1] Теория коннексов в пространстве в связи с теорией дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. *Уч. зап. Казанского университета* (1894), 6, стр. 145—194 (1895), 1, стр. 143—198; 3, стр. 99—184, 4, стр. 85—146.

СХОУТЕН Я. А.—SCHOUTEN J. A.

[1] Der Ricci-Kalkül, Berlin, Springer, 1922.

СХОУТЕН Я. А. и СТРОЙК Д. ДЖ.
SCHOUTEN J. A. UND STRÚIK D. J.

[1] Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie 2-е изд., т. I. Algebra und Übertragungslehre, Groningen-Batavia, Noordhoff, 1935. Имеется русский перевод: Введение в новые методы дифференциальной геометрии, т. I, Алгебра и учение о перенесении, ОНТИ, 1939.

ФИНИКОВ С. П.

[1] Проективно-дифференциальная геометрия, ОНТИ, 1934.

[2] Метод внешних форм Картана, ГТТИ, 1948.

ХАУСДОРФ Ф.—HAUSDORFF F.

[1] Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig, 1914. Имеется русский перевод под редакцией и с дополнениями П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова. Теория множеств ОНТИ, 1937.

ЧЕБОТАРЕВ Н. Г.

[1] Теория групп Ли, ГТТИ, 1940.

ШЕВАЛЛЕ К.—CHEVALLEY CL.

[1] On the topological structure of solvable groups. *Ann. of Math.*, 42 (1941), стр. 668—675.

[2] Theory of Lie groups. Univ. Press. Princeton, 1946. Имеется русский перевод: Теория групп Ли, ГИИЛ, 1948.

ШИРОКОВ П. А.

[1] Постоянные поля векторов и тензоров в Riemann'овых пространствах. *Известия Казанского физ.-мат. об-ва*, 2 (25) (1925), стр. 86—114.

ШРЕДЕР К. — SCHRÖDER K.

[1] Einige Sätze aus der Teorie der Kontinuierlichen Gruppen linearer Transformationen. *Schriften math. Seminars. Berlin* II: 4 (1934), стр. 111—149.

[2] Über k-parametrige Matrizengruppen. *Deutsche Mathematik*, 4 (1939), стр. 201—225.

ШРЕЙЕР О. — SCHREIER O.

[1] Abstrakte kontinuierliche Gruppen. *Abh. math. Seminar. Hamburg*, 4 (1926), стр. 15—32.
[2] Die Verwandschaft stetiger Gruppen im Grossen. *Abh. math. Seminar. Hamburg*, **5** (1927), стр. 233—244.

ШТУДИ Э. и КАРТАН Э. — STÜDY E. ET CARTAN E.

[1] Nombres complexes. *Encycl. Sc. Math.*, т. I, кн. I, вып. III (1908), стр. 329—468.

ШУР Ф. — SCHUR F.

[1] Über den analytischen Charakter der eine endliche continuierliche Transformationsgruppe darstellenden Funktionen. *Math. Ann.* **41** (1893), стр. 509—538.

ЭЙЗЕНХАРТ Л. П. — EISENHART L. P.

[1] Continous groups of transformation, 1933. Имеется русский перевод: Непрерывные группы преобразований, ГИИЛ, 1948.

ЭНРИКВЕС Ф. — ENRIQÚES F.

[1] Fondements de la Géometrie. *Encycl. Sc. Math.*, т. III, кн. I, вып. I (1911), стр. 133—136.

ЯГЛОМ И. М. и ЯГЛОМ А. М.

[1] Тангенциальные модели Пуанкаре плоских геометрий постоянной кривизны. *Доклады АН СССР*, **53**: **5** (1946), стр. 405—408.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

Адо И. Д. 266

Биркгоф Г. (Birkhoff G.) 266

Вагнер В. В. 368
Варден Б. Л. ван дер (Waerden B. L. van der) 272
Вейль Г. (Weyl H.) 151, 155, 156, 158, 162, 171, 184, 185, 190, 191, 201, 203, 235, 240, 277

Гамильтон В. Р. (Hamilton W. R.) 367
Гантмахер Ф. Р. 18, 182
Гильберт Д. (Hilbert D.) 256
Гурвиц А. (Hurwitz A.) 53, 240
Гурса Э. (Goursat E.) 125

Данциг Д. ван (Dantzig D. van) 272
Дубнов Я. С. 367
Дынкин Е. Б. 171, 185, 194

Клейн Ф. (Klein F.) 151, 337
Котельников А. П. 337
Кулидж Дж. Л. (Coolidge J. L.) 367

Леви Г. (Levy H.) 113
Леви-Чивита Т. (Levi-Civita T.) 232, 282
Ли С. (Lie S.) 7, 12, 35, 37, 40, 43, 240
Лобачевский Н. И. 332, 368

Мальцев А. И. 266
Мангейм А. (Mannheim A.) 367
Медичи С. (Medici S.) 114
Монтгомери Д. (Montgomery D.) 256

Нейман Дж. (Neumann J. von) 53, 256, 263, 264

Полищук Е. М. 263
Понтрягин Л. С. 53, 185, 186, 202, 253, 256
Пуанкаре А. (Poincaré H.) 240, 254, 263

Рашевский П. К. 5, 125, 367
Риман В. (Riemann B.) 332
Розенфельд Б. А. 182, 345, 355, 359, 368

Севери Ф. (Severi F.) 70
Синцов Д. М. 337
Стройк Д. Дж. (Struik D. J.) 38, 43, 69, 75
Схоутен Я. А. (Schouten J. A.) 7, 38, 43, 69, 75, 108, 112, 113, 150, 183, 274, 282

Фиников С. П. 5, 125, 367
Фробениус Г. (Frobenius G.) 209
Фубини Г. (Fubini G.) 342

Хаусдорф Ф. (Hausdorff F.) 242
Чеботарев Н. Г. 5. 37, 40, 44, 76, 82, 107, 140, 141, 176, 185, 187, 194

Шевалле К. (Chevalley Cl.) 339, 347
Шефферс Г. (Scheffers G.) 12, 35, 37, 40, 43
Широков П. А. 113, 382
Шредер К. (Schröder K.) 263
Шрейер О. (Schreier O.) 240, 253
Штуди Э. (Study E.) 230, 342
Шур И. (Schur I.) 209

Энгель Ф. (Engel F.) 82
Энриквес Ф. (Enriques F.) 212

Яглом А. М. 355
Яглом И. М. 355
Якоби К. Г. (Jacobi C. G.) 40

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абелева группа 249
Абсолют 341
Абстрактная группа 245
Автоморфизм группы 18, 261
Автоморфизм инволютивный 175, 283, 333
Алгебра 182
Алгебра Ли 257
Антигомография 177
Антиинволюция 178
Антипод, антиподное многообразие 219
Аффинная связность 38, 294
Аффинная связность без кривизны 38, 44
Аффинная связность без кручения 61
Аффинное вращение 39
Аффинное движение 38
Аффинный параметр 69, 331

Бесконечно малое преобразование 34, 256
Бианки тождества 43
Билинейный ковариант 39
Больцано-Вейерштрасса теорема 243

Вектор 9
Внешнее произведение дифференциальных форм 39
Внешняя квадратичная форма 180, 317, 338
Внешняя производная дифференциальной формы 39
Вполне геодезическое многообразие 25, 117
Вполне приводимая группа 159

Гейне-Бореля теоремы обобщение 245
Геодезическая линия 19
Гиперболическое пространство 332
Голономии группа 44, 83, 118, 296, 301
Гомография 177
Гомоморфизм групп 251
Группа абстрактная 245
  — голономии 44, 83, 118, 295, 301
  — движений 127
  — изоморфии 19
  — изотропии 97
  — инфинитезимальная 257
  — конечная непрерывная 246
  — Ли 256
Групповое пространство 9

Движений группа 127
Двойные числа 348

Изоморфизм аффинный 58, 97
Изоморфизм групповой 15, 251
Изоморфии группа 19
Изотропии группа 97
Инвариантная метрика в групповом пространстве 274
  — — в однородном пространстве 274
  — — в симметрическом пространстве 128
Инвариантный объем в групповом пространстве 52, 74, 274
  — — в однородном пространстве 274
Инверсия 336, 357
Инволютивное преобразование 334
Инволюция 177, 336, 356
Индекс связности 193
Инфинитезимальная группа 257
Инфинитезимальные операторы 257

Канонические параметры 35, 258
Кватернионы 178, 338
Киллинга уравнение 260
Класс смежности 249
Клейна формы пространственные 212
Клейново многообразие, — пространство 254
Клиффорда параллелизм 113, 292, 341
Клиффорда формы пространственные 212
Ковариант билинейный 39
Коммутативная группа 249
Коммутатор 40, 257
Компактная группа 152
Компактное многообразие 245
Комплекс линейный 357
Комплексизация 263, 348
Компонента единицы группы 246
Конгруэнция линейная 357
Конгруэнция паратактическая 341, 343
— псевдопаратактическая 353
Конечная непрерывная группа 246
Константы структурные 40, 257
Конформное пространство 353
Корни характеристические 76, 187, 260
Кривизна пространства аффинной связности 38, 295
Кривизны тензор 72
Кручение пространства аффинной связности 38, 295

Ли группа 256
Ли однородное пространство 267
Ли основные теоремы: 1-я 37, 2-я 40, 3-я 43, 258
Линейная конгруэнция 357
Линейный комплекс 357
Лобачевского пространство 332, 355
Локальный изоморфизм 251

Маурера-Картана уравнения 257
Метрика инвариантная в групповом пространстве 274
Метрика инвариантная в однородном пространстве 274
— — в симметрическом пространстве 128
Многообразие компактное 245
Многообразие n-мерное 242
Многообразие E_l 214

Неголономное пространство 83, 126
Непрерывный путь 243
Неприводимая группа 159
Неприводимое риманово пространство 117, 289
Неприводимое симметрическое пространство типа A 343
— — — типа B 342
— — — типа C 345
— — — типа D 342
Несвязная группа 246
Нормальный делитель 249
Нормальные цепи n-мерные 343, 345
Нуль-система 357

Образы симметрии 115, 334
Объем инвариантный в групповом пространстве 52, 74, 274
— — — в однородном пространстве 274
Однопараметрическая группа 249
Однородное пространство 254
Однородное пространство Ли 267
Односвязная группа 267
Окрестность 242
Операторы инфинитезимальные 257
Ориентируемое однородное пространство 211, 273
Ортогональная группа 100, 133
Ортогональные матрицы 337
Основные теоремы Ли: 1-я 37, 2-я 40, 3-я 43, 258
Особенное преобразование 260, 287
Отражение 336, 341
Отрицательной кривизны симметрическое пространство 229, 363

Параллелизм Клиффорда 113, 292, 341

Параллелизм геодезических линий группового пространства 22
Параллельный перенос векторов 38, 232, 282, 294
Параметрические группы 12, 246
Параметры канонические 35, 258
Паратактическая конгруэнция 341
Паратактические сдвиги 343
Плюккеровы координаты 364
Подгруппа непрерывной группы 248
  — замкнутая 248
  — несобственно дискретная 248
  — открытая 248
  — собственно дискретная 248
  — стационарная 255
  — характеристическая 165, 333
Полупростая группа 76, 140, 260
Полярное преобразование 336, 357
Предельная точка 243, -ый элемент группы 152, 243
Предельный элемент группы 152, 243
Преобразование с помощью элемента 249, 261
Приводимое риманово пространство 117, 289
Присоединенная группа 18, 136, 189, 261
Проективное пространство вещественное 341
  — — двойное 355
  — — кватернионное 344
  — — комплексное 342
  — — псевдокватернионное 358
Произведение прямое групп 280
Произведение симметрических пространств 289, 342
Производная группа 44
Простая группа 140, 260: типа A 177, 186, 194, 338, 351, 352, типа B 179, 186, 195, 338, 351, типа C 180, 186, 139, 338, 351, 352, типа D 179, 186, 196, 338, 351, типа E 196, 197, 198, типа F 199, типа G 199
Просто транзитивная группа 13
Пространственные формы Клейна 212
  — — Клиффорда 212
Пространство аффинной связности 38, 294
  — гиперболическое 332
  — конформное 353
  — Лобачевского 332, 355
  — проективное 341, 342, 344, 345, 358
  псевдоконформное 353
  псевдориманово 331
  — псевдоэвклидово 332
  — псевдоэллиптическое 332
  — Римана 332
  — симметрическое 94, 130, 282, 331
  — симплектическое 359
  — унитарно-псевдоэвклидово 366
  — унитарно-псевдоэллиптическое 354
  — унитарно-эвклидово 366
  — унитарно-эллиптическое 342, 345, 355, 358
Прямое произведение групп 280
Псевдокватернионы 350
Псевдоконформное пространство 353
Псевдоортогональные матрицы 348
Псевдопаратактическая конгруэнция 353
Псевдопаратактические сдвиги 353
Псевдориманово пространство 331
Псевдоунитарные матрицы 348
Псевдоэвклидово пространство 332
Псевдоэллиптическое пространство 332
Пуанкаре группа 254
Пфаффа уравнения 124

Равенство векторов 10
Разрешимая группа 260

Римана пространство 331
Римана форма 118
Римана-Кристоффеля тензор 72

Сверзнутый тензор кривизны 73
Связная группа 246
Связное многообразие 244
Связности группа 151, 254
Сдвиги в групповом пространстве 24, 292
— в симметрическом пространстве 173, 232, 334
— бесконечно малые 101
— паратактические 341, 343
— псевдопаратактические 353
Симметрии образы 115, 334
Симметрическое пространство
— аффинной связности 94, 331
— неприводимое 342, 343, 345
— отрицательной кривизны 229, 363
— псевдориманово 331
— риманово 130, 282, 331
Симплектические матрицы 338
Симплектическое пространство 359
Сингулярное преобразование 187, 263
Специальная линейная группа 160
Стационарная подгруппа 255
Структурные константы 40, 257
Структуры уравнения группы 40, 123
— пространства аффинной связности 120

Тензор кривизны (Римана-Кристоффеля) 72,— свернутый 73
Теорема Больцано-Вейерштрасса 243
Теоремы Гейне-Бореля обобщение 245
Теоремы Ли основные: 1-я 37, 2-я 40, 3-я 43, 258
Тождества Бианки 43
Тождество Якоби 40, 257

Угловые параметры 187
Унимодулярные матрицы 337
Унитарная группа 139, 158, 171
Унитарно-псевдоэвклидово пространство 366
Унитарно-псевдоэллиптическое пространство 354
Унитарно-эвклидово пространство 366
Унитарно-эллиптическое пространство двойное 355
— — — кватернионное 345
— — — комплексное 342
— — — псевдокватернионное 358
Унитарные матрицы 337
Уравнения Пфаффа 124
Уравнения структуры группы 40, 123,— пространства аффинной связности 120
Уравнение характеристическое 76, 187

Факторгруппа 249
Форма Римана 118
Формы пространственные Клейна 212
— — Клиффорда 212
Фундаментальная группа 255
Фундаментальный полиэдр 190

Характеристическая подгруппа 165, 333
Характеристические корни 76, 187, 260
Характеристическое уравнение 76, 187

Центр 249
Цепи нормальные *n*-мерные 343, 345

Эвклидово пространство 332
Эллиптическое пространство 332

Якоби тождество 40, 257

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к русскому изданию 5

Геометрия групп преобразований 7
Введение 7

Глава I. Групповое простраиство непрерывной группы и два параллелизма в этом пространстве . . 9
I. Групповое пространство и два рода равенства в нем 9
II. Геодезические линии. Два параллелизма. Сдвиги . 19
III. Подгруппы и вполне геодезические многообразия 25
IV. Кинематическая интерпретация 29

Глава II. Две аффинные связности без кривизны в групповом пространстве 34
I. Бесконечно малые преобразования. Канонические переменные 34
II. Аффинная связность без кривизны, связанная с равенством в первом смысле 36
III. Аффинная связность без кривизны, связанная с равенством во втором смысле 44
IV. Переход от одной аффинной связности без кривизны к другой 49
V. Характеристические свойства аффинной связности без кривизны, связанной с групповым пространством 55

Глава III. Аффинная связность без кручения в групповом пространстве 61
I. Определение аффинной связности без кручения . . 61
II. Аффинная связность без кручения и геодезические линии группового пространства 68
III. Кривизна аффинной связности без кручения. . . 70
IV. Элемент объема пространства аффинной связности без кручения 74
V. Свернутый тензор кривизны 75
VI. Вполне геодезические многообразия в групповом пространстве 77

Глава IV. Группа голономии, группа изоморфии и группа изотропии в пространстве аффинной связности без кручения, связанном с группой 83
I. Группа голономии 83
II. Группа изоморфии пространства аффинной связности без кручения 85
III. Общие сведения о пространствах аффинной связности без кручения, для которых ковариантная производная $R^{j}_{ikh|l}$ равна нулю 87
IV. Группа изоморфии и группа изотропии группового пространства 97

V. Достаточное условие того, что пространство аффинной связности без кручения является групповым пространством. Сдвиги и абсолютное равенство 101

Об одном замечательном классе римановых пространств 112

Введение 112

Глава I. Основная теорема 117
- I. Постановка задачи. Неприводимые пространства . 117
- II. Группа голономии и форма Римана 117
- III. Основная теорема 122
- IV. Группа движений G 127
- V. Группа голономии неприводимых вещественных симметрических пространств 130

Глава II. Первый метод: группа голономии 133
- I. Общие сведения о вещественных ортогональных группах 133

Глава III. Второй метод: группа движений 140
- I. Структура группы G движений 140
- II. Сведение задачи к теории вещественных простых групп 146

Компактные и некомпактные простые группы и риманова геометрия 150
- I. Компактные группы 152
- II. Компактные подгруппы некомпактной простой группы 162
- III. Инволютивные автоморфизмы компактных и некомпактных простых групп 171
- IV. Эффективное определение некомпактных простых групп четырех больших классов 177

Геометрия простых групп 183

Введение 183

Глава I. Топология унитарных простых групп 186
- I. Фундаментальный полиэдр присоединенной группы 186
- II. Абстрактная односвязная группа и ее линейные представления 201

Глава II. Пространства унитарных простых групп . . 208
- I. Групповое пространство 208
- II. Геодезические линии 213
- III. Классификация замкнутых геодезических линий . 223

Глава III. Комплексные простые группы и соответствующие им римановы пространства отрицательной кривизны 229
- I. Римановы пространства, соответствующие комплексным простым группам 229
- II. Топология комплексных простых групп 233
- III. Геодезические линии и тригонометрия пространств $\mathcal{E}$ 234
- IV. Четыре больших класса пространств $\mathcal{E}$ 235

Теория конечных непрерывных групп и топология 240
Введение 240

Глава I. Общие сведения о многообразиях и об абстрактных непрерывных группах 242
I. Многообразия. Компактные и некомпактные многообразия 242
II. Абстрактные конечные непрерывные группы 245
III. Подгруппы 248
IV. Абстрактные группы порядка 1 249
V. Изоморфизм и гомоморфизм 251
VI. Однородные пространства 254

Глава II. Группы Ли 256
I. Определение и обзор основных теорем 256
II. Присоединенная группа. Порождение группы при помощи ее бесконечно малых преобразований 261
III. Подгруппы группы Ли 264
IV. Однородные пространства, фундаментальные группы которых являются группами Ли 267
V. Ориентируемые и неориентируемые однородные пространства. Объем. Метрические однородные пространства 273

Глава III. Компактные группы Ли 276
I. Объем компактной группы 276
II. Теорема Вейля 277
III. Структура компактных групп 279

Глава IV. Симметрические римановы пространства 282
I. Определение и основные свойства 282
II. Приводимые и неприводимые симметрические пространства 287
III. Компактные неприводимые симметрические пространства 290
Примечания редактора 293
Библиография 369

Именной указатель 377
Предметный указатель 378

Редактор *Н. Орехова*
Техн. редактор *А. Никифорова.* Корректор *М. Шулименко*

Сдано в производство 17/VIII 1949 г. Подписано к печати 22/X 1949 г.
A11940. Печ. л. 24. Уч.-изд. л. 21,7. Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Издат. № $^1/_{17}$.
Цена 22 р. 50 к. Зак. № 2624.

Набрано в Первой Образцовой типографии им. А. А. Жданова Главполиграфиздата при Совете Министров СССР. Москва, Валовая, 28.
Отпечатано во 2-й тип. Издательства АН СССР, Москва, Шубинский пер., д. 10