COLLECTION MÉTHODES

H. CARTAN

CALCUL DIFFÉRENTIEL

FORMES DIFFERENTIELLES

HERMANN PARIS

1967

А. Картан

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Перевод с французского
Б. К. КАЛЯКИНА и А. Н. ТЮРИНА
Под редакцией
Б. А. ФУКСА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1971

УДК 517. 43

Эта книга, написанная выдающимся математиком Анри Картаном, содержит изложение его лекций по курсу «Математика II» в Парижском университете. В них входит дифференциальное исчисление, теория дифференциальных уравнений в банаховых пространствах, теория дифференциальных форм и построенная на ее основе теория многомерных интегралов, а также первоначальные сведения по вариационному исчислению и дифференциальной геометрии. Изложение элементарно, хотя и ведется на современном научном уровне.

Книга принесет большую пользу студентам и преподавателям высших учебных заведений (в том числе и технических), в которых читается расширенный курс математики.

Современная трактовка условий интегрируемости систем дифференциальных уравнений, вариационных задач, метода подвижного репера и дифференциальной геометрии кривых и поверхностей представит большой интерес для механиков, физиков и инженеров, использующих в своей работе математические методы.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
28/29-71

А. Картан

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

Редакторы *В. И. Авербух, Д. Ф. Борисова*. Художник *А. В. Шипов*. Художественный редактор *В. И. Шаповалов*. Технический редактор *Л. П. Бирюкова*. Корректор *О. К. Румянцева*

Сдано в набор 2/II 1971 г. Подписано к печати 17/VIII 1971 г. Бумага кн. журн. $60\times90^1/_{16}=12{,}25$ бум. л., 24,5 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 21,71. Изд. № 1/5825.
Цена 1 р. 71 к. Зак. № 743

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР». Москва, 1-й Рижский пер., 2. Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР, Москва, Трехпрудный пер., 9.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В этой книге излагаются лекции по курсу «Математика II», прочитанному Анри Картаном на факультете наук Парижского университета. Книга состоит из пяти глав. В первых двух главах сообщаются основные факты дифференциального исчисления и теории дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. Глава 3 содержит теорию дифференциальных форм и ее применения к многомерным интегралам и условиям интегрируемости систем дифференциальных уравнений. Две последние главы посвящены элементам вариационного исчисления и методу подвижного репера в теории кривых и поверхностей.

Первая часть книги «Дифференциальное исчисление», включающая главы 1 и 2, и вторая ее часть «Дифференциальные формы», включающая главы 3—5, изданы во Франции двумя отдельными книгами. Однако такое их разделение носит искусственный характер, поскольку во второй части имеются многочисленные ссылки на первую, и, вообще, чтение второй части без первой затруднительно. Поэтому по совету автора в русском издании обе части соединены в одну книгу, и в ней установлена единая нумерация глав.

Точные формулировки определений и теорем автор во всех случаях предпочитает обращению к смутной интуиции и расплывчатым идеям. Если не считать немногочисленных ясно оговоренных исключений, в тексте приведены доказательства всех сформулированных утверждений. Это, на наш взгляд, значительно облегчает чтение книги и позволяет рекомендовать ее в качестве учебного пособия.

Каждая глава сопровождается задачами, составленными К. Бюттен, Ф. Ридо и Дж. Л. Верли. Эти задачи должны помочь читателю овладеть предметом. Решив их, он сможет также удостовериться в том, что действительно понял и усвоил изложенные теоретические понятия.

Первая часть книги переведена Б. К. Калякиным, а вторая — А. Н. Тюриным.

Автор адресует свою книгу студентам, изучившим курс «Математика I», читаемый во французских университетах. У нас книга будет доступна читателям, имеющим подготовку по курсам математического анализа и алгебры в объеме программы первых двух семестров университетов. Для изучения второй главы книги желательно иметь хотя бы первоначальные представления о методах решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

В заключение я хочу поблагодарить профессора Анри Картана за внимание, проявленное к переводу его книги на русский язык, а также за присланные исправления к французскому тексту. Они учтены нами при подготовке данного перевода.

Б. А. Фукс

Часть I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

§ 1. ОБЗОР ОСНОВНЫХ ПОНЯТИЙ, ОТНОСЯЩИХСЯ К БАНАХОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ И НЕПРЕРЫВНЫМ ЛИНЕЙНЫМ ОТОБРАЖЕНИЯМ [1])

В дальнейшем основным полем K будет либо *поле действительных чисел* $\mathbb{R}$, либо *поле комплексных чисел* $\mathbb{C}$. Определения векторных пространств и их элементарные свойства мы предполагаем известными. Если пространство E является *комплексным* векторным пространством (т. е. определено над полем $\mathbb{C}$), то оно обладает также структурой *действительного* векторного пространства: для любого вектора $x \in E$ и числа $\lambda \in \mathbb{R}$ определено произведение λx.

1.1. Норма на векторном пространстве E

Функция ρ: $E \to \mathbb{R}^+$ (где $\mathbb{R}^+$ обозначает множество действительных чисел $\geqslant 0$) называется *нормой* на векторном пространстве E, если она удовлетворяет следующим условиям:

(i) $\rho(0) = 0$;

(i′) $(\rho(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$;

(ii) $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y) \quad \forall x, y \in E$;

(iii) $\rho(\lambda x) = |\lambda| \cdot \rho(x) \quad \forall x \in E, \lambda \in K$.

Векторное пространство, на котором определена норма, называется *нормированным векторным пространством*. Значение нормы $\rho(x)$ на векторе x часто обозначается через $\|x\|$. Тогда условия (i) — (iii) можно переписать следующим образом:

(i) $\|0\| = 0$;

(i′) $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$;

(ii) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;

(iii) $\|\lambda x\| \leqslant |\lambda| \cdot \|x\|$.

---

[1]) Обзор этих понятий можно найти в учебнике по анализу Г. Шоке. [Этот учебник не переведен на русский язык, и потому мы рекомендуем читателю обратиться к книге Г. Е. Шилова «Математический анализ», ч. I, гл. 3, изд-во «Наука», М, 1969. В дальнейшем все ссылки на книгу Г. Шоке, заменены ссылками на книгу Г. Е. Шилова.— *Прим. перев.*]

Пусть E — нормированное векторное пространство. Определим *расстояние* d между двумя точками x, y из E формулой:

$$d(x, y) = \| x - y \|.$$

Из свойства (iii) в результате замены x на $x - y$, а λ на -1, получаем $\| x - y \| = \| y - x \|$ и, следовательно, $d(x, y) = d(y, x)$.

Из свойства (ii) непосредственно вытекает, что

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$$

(«неравенство треугольника»).

Наконец, $d(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$.

Таким образом, пространство E является *метрическим пространством*; как всякое метрическое пространство оно является также *топологическим пространством*. Так как $|\, \| u \| - \| v \| \,| \leqslant \| u - v \|$, то относительно этой топологии норма $u \to \| u \|$ является непрерывным отображением $E \to \mathbb{R}$.

Пусть $B'(a, r)$ — *шар* с центром в точке $a \in E$ и радиусом $r > 0$, образованный точками $x \in E$, для которых

$$d(x, a) \leqslant r, \quad \text{т. е.} \quad \| x - a \| \leqslant r.$$

Говорят, что подмножество $U \subset E$ *открыто*, если для любой точки $a \in U$ найдется такое $r > 0$, что шар $B'(a, r)$ содержится в U. Эти открытые множества полностью определяют некоторую топологию.

Можно проверить, что шар $B'(a, r)$ *замкнут* (его дополнение есть открытое множество), а шар $B(a, r)$, образованный точками x, для которых $\| x - a \| < r$, является открытым множеством.

Топология пространства E *отделима*, поскольку при $x \neq y$ и $r = d(x, y)$ открытые шары $B(x, r/2)$ и $B(y, r/2)$ не пересекаются.

Последовательность $(x_n)_{n \geqslant 0}$ точек пространства E имеет *пределом* точку $a \in E$ (обозначается: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$), если последовательность расстояний $\| x_n - a \|$ стремится к нулю. Легко доказать, что если

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \to \infty} y_n = b, \quad \text{то} \quad \lim_{n \to \infty} (x_n + y_n) = a + b.$$

Аналогично, если

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \to \infty} \lambda_n = \mu,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} (\lambda_n x_n) = \mu a.$$

Последовательность (x_n) называется *последовательностью Коши*, если $\lim\limits_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \| x_m - x_n \| = 0$. Это значит, что $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N$, такое, что

$$(m \geqslant N, \; n \geqslant N) \Rightarrow \| x_m - x_n \| \leqslant \varepsilon.$$

Известно, что всякая *сходящаяся* последовательность (т. е. последовательность, имеющая предел) является последовательностью Коши. В том случае, когда верно и обратное утверждение (т. е. всякая последовательность Коши сходится), говорят, что метрическое пространство E *полно*.

Определение. Нормированное векторное пространство, *полное* относительно метрики, определяемой нормой, называется *банаховым пространством*. Для основного поля $\mathbb{R}$ мы получаем действительное банахово пространство, для $\mathbb{C}$ — комплексное банахово пространство.

1.2. Примеры банаховых пространств

Пример 1. Рассмотрим действительное числовое пространство $\mathbb{R}^n$ (соответственно комплексное числовое пространство $\mathbb{C}^n$). Пространство $\mathbb{R}^n$ является действительным векторным пространством (соответственно $\mathbb{C}^n$ — комплексным векторным пространством). Рассмотрим в этом пространстве одну из трех обычных норм:

$$\rho_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

$$\rho_2(x) = \sup_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|,$$

$$\rho_3(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad \text{(евклидова норма);}$$

[здесь через $x_1, x_2, \ldots, x_n$ обозначены координаты вектора x.]

Топология, определенная на $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) по любой из этих норм,— это *топология произведения* $\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}$ (n раз) [соответственно $\mathbb{C} \times \ldots \times \mathbb{C}$ (n раз)]. Для того чтобы последовательность точек имела своим пределом $a = (a_1, \ldots, a_n)$, необходимо и достаточно, чтобы для любого целого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ пределом последовательности i-ых координат точек этой последовательности было a_i. Так как пространство $\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$) полное, то и пространство $\mathbb{R}^n$ (соответственно $\mathbb{C}^n$) является полным. Следовательно, по любой из норм ρ_1, ρ_2, ρ_3 оно является *банаховым пространством*.

Пример 2. Пусть X — топологическое пространство, а $\mathscr{C}_b(X)$ — множество всех *непрерывных* и *ограниченных* числовых функций $X \to \mathbb{R}$. Мы называем функцию $f(x)$ ограниченной, если

$$\sup_{x \in X} |f(x)| \text{ конечен.}$$

Очевидно, что $\mathscr{C}_b(X)$ есть *векторное пространство* (сложение определяется как сложение функций, а произведение λf, где λ —

скаляр, определяется как произведение функции f и постоянной функции λ). Положим

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Можно проверить (рекомендуется сделать это в качестве упражнения), что $\|f\|$ определяет *норму* в векторном пространстве $\mathscr{C}_b(X)$; сходимость по такой норме называется *равномерной*. Пространство $\mathscr{C}_b(X)$ полно (это следует из того, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных ограниченных функций является непрерывной функцией) [1]. Следовательно, $\mathscr{C}_b(X)$ является действительным *банаховым пространством*.

Если мы определим такую же норму в векторном пространстве непрерывных ограниченных функций, принимающих комплексные значения, то получим комплексное банахово пространство.

Пример 2'. Обобщим пример 2. Вместо непрерывных ограниченных функций $X \to \mathbb{R}$ рассмотрим непрерывные ограниченные отображения $X \to F$, где F — фиксированное банахово пространство. Мы называем отображение $f\colon X \to F$ *ограниченным*, если норма

$$\|f\| = \sup_{x \in X} \|f(x)\|$$

конечна (в правой части этого равенства $\|f(x)\|$ обозначает норму элемента $f(x)$ в банаховом пространстве F). Множество $\mathscr{C}_b(X;\ F)$ таких отображений тоже является векторным пространством (над $\mathbb{R}$, если F — действительное банахово пространство, и над $\mathbb{C}$, если F — комплексное банахово пространство). Определенная выше норма $\|f\|$ является нормой и в этом пространстве. Можно показать, что так как пространство F полно, то и пространство $\mathscr{C}_b(X;\ F)$ является *полным* (это рекомендуется сделать в качестве упражнения). Следовательно, оно является *банаховым пространством*.

Пример 3. Пусть $\mathscr{L}_1([0,\ 1])$ — векторное пространство числовых функций на отрезке $[0,\ 1] \subset \mathbb{R}$, интегрируемых по Лебегу. Положим

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|\, dt.$$

Так определенная норма обладает всеми свойствами нормы, за исключением (i'). Действительно, из равенства $\|f\| = 0$ не следует, что функция f равна тождественно нулю, а следует только, что она равна нулю почти всюду (за исключением множества меры нуль).

---

[1]) См. доказательство в книге Г. Е. Шилова «Математический анализ», ч. I, гл. 5, § 9.— *Прим. перев.*

Чтобы получить настоящую норму, рассмотрим отношение эквивалентности $\mathscr{R}(f_1, f_2)$:

«f_1 и f_2 равны почти всюду».

Множество $L_1([0, 1])$ классов эквивалентности относительно $\mathscr{R}(f_1, f_2)$ обладает структурой векторного пространства. (Оно совпадает с факторпространством пространства $\mathscr{L}_1([0, 1])$ по подпространству, образованному функциями, у которых $\| f \| = 0$.) Если φ есть класс эквивалентности, то можно определить $\| \varphi \|$ как общее значение $\| f \|$ для всех функций из этого класса. Тогда $\| \varphi \|$ будет *нормой* в векторном пространстве $L_1([0, 1])$. Из теории интегралов Лебега следует, что пространство $L_1([0, 1])$ *полно* (это было бы неверно, если бы мы использовали интеграл Римана). Значит, $L_1([0, 1])$ — банахово пространство.

Пример 3′ аналогичен предыдущему. Рассмотрим на этот раз векторное пространство $\mathscr{L}_2([0, 1])$ интегрируемых с квадратом функций с нормой

$$\| f \| = \sqrt{\int_0^1 | f(t) |^2 \, dt}.$$

Так же, как и в предыдущем примере, перейдем к факторпространству с помощью введенного выше отношения эквивалентности $\mathscr{R}(f_1, f_2)$. Факторпространство $L_2([0, 1])$ является банаховым пространством.

1.3. Нормально сходящиеся ряды в банаховом пространстве

Определение. Пусть $(u_n)_{n \geqslant 0}$ — последовательность элементов $u_n \in E$, где E — банахово пространство. Говорят, что ряд $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ *сходится нормально*, если сходится ряд с положительными членами, составленный из норм

$$\sum_{n \geqslant 0} \| u_n \|.$$

Теорема. *Если ряд* $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ *сходится нормально, то он сходится* (т. е. частичные суммы $\sum\limits_{0 \leqslant n \leqslant p} u_n$ имеют предел при $p \to \infty$, обозначаемый через $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$) *и имеет место неравенство*

$$\Big\| \sum_{n \geqslant 0} u_n \Big\| \leqslant \sum_{n \geqslant 0} \| u_n \|.$$

Мы не будем доказывать эту теорему [1]). Поскольку в доказательстве используется критерий Коши, то нужно потребовать, чтобы члены ряда u_n принадлежали некоторому банахову пространству E.

---

[1]) См. книгу Г. Е. Шилова «Математический анализ», ч. I, гл. 6.— *Прим. перев.*

Пример. Рассмотрим банахово пространство $\mathscr{C}_b(X)$ (см. п. 1.2, пример 2). В силу нашей теоремы ряд $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$, где u_n — непрерывные ограниченные числовые функции на топологическом пространстве X, сходится нормально, если существует сходящийся числовой ряд $\sum \varepsilon_n$ с положительными членами, такой, что для любого n

$$|u_n(x)| \leqslant \varepsilon_n \quad \text{для любого} \quad x \in X.$$

В самом деле, достаточно положить $\varepsilon_n = \| u_n \| = \sup\limits_{x\in X} | u_n(x) |$. Таким образом мы приходим к обычному понятию *нормальной сходимости* функционального ряда.

1.4. Непрерывные линейные отображения

Пусть E и F—нормированные векторные пространства (оба над полем $\mathbb{R}$ или над полем $\mathbb{C}$). Сформулируем критерий, позволяющий определить, является ли *непрерывным* линейное отображение $f\colon E \to F$ в случае, когда пространства E и F наделены топологиями, индуцированными их нормами.

Теорема 1.4.1. *Для линейного отображения $f\colon E \to F$ следующие условия эквивалентны:*

(a) *f непрерывно в любой точке пространства E;*

(b) *f непрерывно в начале координат 0;*

(c) *$\| f(x) \|$ ограничена на единичном шаре $\| x \| \leqslant 1$.*

Доказательство. Очевидно, что из (a) следует (b). Покажем, что из (b) следует (c). Предположим, что отображение f непрерывно в точке 0; тогда прообраз f^{-1} единичного шара пространства F является окрестностью точки 0 в пространстве E. Эта окрестность содержит шар $\| x \| \leqslant r$ для некоторого $r > 0$. Итак, существует такое число $r > 0$, что из неравенства

$$\| x \| \leqslant r \quad \text{следует} \quad \| f(x) \| \leqslant 1.$$

Покажем, что из неравенства

$$\| x \| \leqslant 1 \quad \text{следует} \quad \| f(x) \| \leqslant 1/r.$$

Положим $y = rx$; тогда $\| f(y) \| = r \cdot \| f(x) \|$ и, если $\| f(y) \| \leqslant 1$, то $\| f(x) \| \leqslant 1/r$. Таким образом, мы доказали, что $\| f(x) \|$ ограничена на единичном шаре $\| x \| \leqslant 1$, т. е. из (b) следует (c).

Покажем теперь, что из (c) следует (a). Предположим, что выполняется условие (c). Тогда существует такое число $M > 0$, что $\| f(x) \| \leqslant M$ для любого x из шара $\| x \| \leqslant 1$. Отсюда для любого x

$$\| f(x) \| \leqslant M \| x \|$$

(это очевидно для $\| x \| = 0$; если $\| x \| = r > 0$, то вектор $y = (1/r)\, x$ имеет норму $\| y \| = 1$, откуда $\| f(y) \| \leqslant M$ и $\| f(x) \| = r \| f(y) \| \leqslant rM = M \| x \|$).

Покажем теперь, что при выполнении условий (b) и (c) отображение f непрерывно в произвольной точке $a \in E$. В силу линейности отображения f, $f(x) - f(a) = f(x - a)$. Значит, если $\| x - a \| \leqslant \varepsilon/M$, то

$$\| f(x) - f(a) \| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Таким образом, непрерывность отображения f в точке a доказана.

Обозначение. Мы будем обозначать через $\mathscr{L}(E; F)$ множество всех линейных *непрерывных* отображений пространства E в пространство F. Очевидно, что $\mathscr{L}(E; F)$ — векторное пространство (подпространство пространства всех линейных отображений $E \to F$). Для элемента $f \in \mathscr{L}(E; F)$ положим

$$\| f \| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \| f(x) \|$$

(в силу условия (c) теоремы 1.4.1 норма $\| f \|$ конечна).

Как мы показали, для любого $x \in E$ имеет место *основное соотношение*

$$\boxed{\| f(x) \| \leqslant \| f \| \cdot \| x \|.} \tag{1.4.1}$$

Пусть число $M > 0$ таково, что

$$\| f(x) \| \leqslant M \| x \| \text{ для любого } x \in E; \tag{1.4.2}$$

тогда из последнего неравенства вытекает, что $\| f(x) \| \leqslant M$ при $\| x \| \leqslant 1$. Отсюда

$$\sup_{\|x\| \leqslant 1} \| f(x) \| \leqslant M,$$

т. е. $\| f \| \leqslant M$. Значит, *норма* $\| f \|$ *есть наименьшее из чисел* $M \geqslant 0$, *для которых выполняется соотношение* (1.4.2).

Следовательно, $\| f \|$ *является нормой в векторном пространстве* $\mathscr{L}(E; F)$: проверка свойств нормы не составляет большого труда (рекомендуется сделать это в качестве упражнения). Таким образом, $\mathscr{L}(E; F)$ — *нормированное векторное пространство*, а его топология полностью определяется топологиями пространств E и F.

Теорема 1.4.2. *Если F — банахово пространство, то пространство $\mathscr{L}(E; F)$ также является банаховым.*

Доказательство. Пусть (f_n) — последовательность Коши в пространстве $\mathscr{L}(E; F)$. Для каждого $r > 0$ рассмотрим сужения $f_n^{(r)}$ функций f_n на шар $\| x \| \leqslant r$. Функции $f_n^{(r)}$ образуют последовательность Коши в векторном пространстве $\mathscr{C}_b(B'(0, r); F)$ (см. пример 2' из п. 1.2), которое полно, так как F — банахово пространство. Поэтому последовательность $f_n^{(r)}$ в шаре $\| x \| \leqslant r$ равномерно сходится к *непрерывной и ограниченной функции* $f^{(r)}$. Ясно, что при $r' < r$ сужение функции $f^{(r)}$ на шар $\| x \| \leqslant r'$ равно $f^{(r')}$. Тогда совокупность функций $f^{(r)}$ (функция $f^{(r)}$ полагается равной 0 вне шара $\| x \| \leqslant r$) определяет некоторую функцию f во всем пространстве E; при этом сужение функции f на шар $\| x \| \leqslant r$ совпадает с $f^{(r)}$. Поскольку последовательность (f_n) равномерно сходится к функции f на каждом шаре с центром в точке 0, то для любого $x \in E$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Отсюда следует, что если $x \in E$ и $y \in E$, то

$$\begin{aligned} f(x+y) = \lim_{n\to\infty} f_n(x+y) &= \lim_{n\to\infty}(f_n(x)+f_n(y)) = \\ &= \lim_{n\to\infty} f_n(x) + \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \\ &= f(x)+f(y). \end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

Значит, f — *линейное* отображение. Оно ограничено на каждом шаре $\| x \| \leqslant r$ и, следовательно, *непрерывно*.

Наконец, из равномерной сходимости последовательности (f_n) к функции f в шаре $\| x \| \leqslant 1$ следует, что норма разности

$$\| f - f_n \| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \| f(x) - f_n(x) \|$$

стремится к нулю при $n \to \infty$. Таким образом мы показали, что последовательность Коши (f_n) имеет предел f, а это означает, что $\mathscr{L}(E; F)$ — банахово пространство.

1.5. Композиция непрерывных линейных отображений

Пусть E, F, G — нормированные векторные пространства и $f: E \to F$, $g: F \to G$ — непрерывные линейные отображения. Тогда $g \circ f: E \to G$ есть непрерывное линейное отображение (как известно, композиция двух линейных отображений является линейным отображением, а композиция двух непрерывных отображений — непрерывным отображением). Для любого $x \in E$

$$\| (g \circ f)(x) \| = \| g(f(x)) \| \leqslant \| g \| \cdot \| f(x) \|;$$

но поскольку

$$\| f(x) \| \leqslant \| f \| \cdot \| x \|,$$

то

$$\| (g \circ f)(x) \| \leqslant \| g \| \cdot \| f \| \cdot \| x \|.$$

В силу характеристического свойства нормы линейного отображения (см. п. 1.4) из предыдущего неравенства получаем, что

$$\boxed{\|g \circ f\| \leqslant \|g\| \cdot \|f\|.} \tag{1.5.1}$$

1.6. Изоморфизм нормированных векторных пространств; эквивалентные нормы на нормированных векторных пространствах

Определение. Отображение $f\colon E \to F$ (где E и F — нормированные векторные пространства) называется *изоморфизмом*, если:

1) f линейно и непрерывно;

2) существует линейное непрерывное отображение $g\colon F \to E$, такое, что $g \circ f = \mathrm{id}_E$ — тождественное отображение пространства E в пространство E и $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Заметим, что в силу этих условий отображение f пространства E в пространство F и обратное отображение g биективны. Однако из непрерывности линейного биективного отображения f, вообще говоря, не вытекает, что обратное биективное отображение также непрерывно. В силу этих замечаний можно дать другую характеристику изоморфизма:

Для того чтобы отображение $f\colon E \to F$ являлось изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы оно было гомеоморфизмом (топологических пространств) и *линейным* отображением.

Сформулируем без доказательства очень важную теорему анализа (доказательство ее весьма непросто) [1]:

Теорема Банаха. *Если E и F — банаховы пространства, то всякое непрерывное линейное биективное отображение $f\colon E \to F$ является изоморфизмом.*

(Эта теорема утверждает, что обратное отображение $f^{-1}\colon F \to E$ автоматически непрерывно.)

Подчеркнем, что не следует смешивать *изоморфизм* и *изометрию*.

Определение. Отображение $f\colon E \to F$ (где E и F — нормированные векторные пространства) называется *изометрией*, если оно биективно, линейно и сохраняет норму, т. е.

$$\|f(x)\| = \|x\| \quad \text{для} \quad x \in E.$$

Из этого условия вытекает, что норма $\|f(x)\|$ изометрического отображения ограничена на единичном шаре; следовательно, отображение f линейно и непрерывно. Можно показать, что в этом случае обратное отображение g также является линейным и непрерывным. Следовательно, *всякая изометрия есть в то же время изоморфизм.* Однако обратное утверждение неверно: например, гомотетия $x \to \lambda x$

[1] См., например, Н. Бурбаки «Топологические векторные пространства», гл. 2, ИЛ, М., 1959.

(где $\lambda \neq 0$) является изоморфизмом $E \to E$, но не будет изометрией при $|\lambda| \neq 1$.

Определение. Нормы ρ_1 и ρ_2, заданные на одном и том же векторном пространстве E, называются *эквивалентными*, если они определяют одну и ту же топологию.

Дадим другую формулировку этого определения: пространство E с нормой ρ_1 обозначим через E_{ρ_1}, а пространство E с нормой ρ_2 — через E_{ρ_2}. Тождественное отображение пространства E определяет два обратных друг к другу биективных отображения

$$f_1\colon E_{\rho_1} \to E_{\rho_2} \quad \text{и} \quad f_2\colon E_{\rho_2} \to E_{\rho_1}.$$

Нормы ρ_1 и ρ_2 задают одну и ту же топологию тогда и только тогда, когда отображения f_1 и f_2 представляют собой *изоморфизмы* векторных пространств. Для этого необходимо и достаточно, чтобы отображения f_1 и f_2 были *непрерывными*.

Применим к отображениям f_1 и f_2 критерий непрерывности линейного отображения (теорема 1.4.1). Непрерывность отображения f_1 означает, что существует такое число $M > 0$, что

$$\rho_2(x) \leqslant M\rho_1(x) \quad \text{для любого} \quad x \in E.$$

Непрерывность отображения f_2 означает, что существует такое число $M' > 0$, что

$$\rho_1(x) \leqslant M'\rho_2(x).$$

Таким образом, мы получаем

Предложение 1.6.1. *Для того чтобы нормы ρ_1 и ρ_2 были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы отношение $\rho_2(x)/\rho_1(x)$ (определенное для $x \neq 0$) было ограничено сверху и снизу двумя положительными числами.*

Теорема 1.6.2. *На пространстве $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим через

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2}$$

евклидову норму ($\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора x). Пусть ρ — произвольная норма в $\mathbb{R}^n$; сначала покажем, что отображение $\rho\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ непрерывно (когда на $\mathbb{R}^n$ задана топология произведения $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ раз}}$, которая совпадает с топологией, индуцированной евклидовой нормой). Имеем

$$|\rho(x) - \rho(y)| \leqslant \rho(x-y) \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|\, \rho(e_i),$$

где через $(e_1, \ldots, e_n)$ обозначен канонический базис в пространстве $\mathbb{R}^n$. Из последнего неравенства следует, что $\rho(y)$ стремится к $\rho(x)$, когда $y \to x$; значит, норма ρ непрерывна.

Вследствие компактности единичной сферы $\| x \| = 1$ непрерывная функция ρ, не равная нулю, достигает на ней своей верхней грани $M > 0$ и нижней грани $m > 0$. Отсюда

$$\rho(x) \leqslant M \| x \|, \quad \rho(x) \geqslant m \| x \|.$$

Это означает, что норма ρ эквивалентна евклидовой норме.

Следствие. *Если E — нормированное векторное пространство, то всякое линейное биективное отображение $f: \mathbb{R}^n \to E$ является изоморфизмом.*

Действительно, если ρ — норма на E, то функция $\rho \circ f$ является нормой на $\mathbb{R}^n$; значит, она задает ту же топологию, что и евклидова норма. Отсюда следует наше утверждение.

Теорема 1.6.3. *Конечномерное нормированное векторное пространство E является банаховым пространством; всякое линейное отображение этого пространства в нормированное векторное пространство F непрерывно.*

Доказательство. Обозначим размерность пространства E через n; тогда существует линейное биективное отображение $f: \mathbb{R}^n \to E$. В силу предыдущего следствия отображение f — изоморфизм. Так как пространство $\mathbb{R}^n$ полно, то и пространство E полно (и, следовательно, является банаховым пространством). Пусть теперь дано линейное отображение $g: E \to F$, где F — нормированное векторное пространство. Если мы покажем, что отображение

$$h = g \circ f: \mathbb{R}^n \to F$$

непрерывно, то отсюда будет следовать непрерывность отображения $g = h \circ f^{-1}$.

Убедимся в том, что всякое линейное отображение $h: \mathbb{R}^n \to F$ непрерывно. Действительно, так как

$$h(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i h(e_i),$$

то

$$\| h(\xi_1, \ldots, \xi_n) \| \leqslant \sum_{i=1}^{n} | \xi_i | \cdot \| h(e_i) \|.$$

Поэтому, $h(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ стремится к 0, когда точка $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ стремится к 0.

Замечание. Результаты, аналогичные теоремам 1.6.2 и 1.6.3, могут быть получены для *комплексных* векторных пространств; при этом роль $\mathbb{R}^n$ будет выполнять $\mathbb{C}^n$.

Пусть E и F — два векторных пространства конечных размерностей, $\dim E = m$, $\dim F = n$. При фиксированных базисах в пространствах E и F векторное пространство $\mathcal{L}(E; F)$ совпадает с векторным пространством матриц, имеющих n строк и m столбцов (элементы матриц принадлежат основному полю). Размерность пространства $\mathcal{L}(E; F)$ равна произведению mn.

1.7. Примеры пространств $\mathcal{L}(E; F)$

Пример 1. Предположим, что $E = \mathbb{R}$ в случае действительных векторных пространств и соответственно $E = \mathbb{C}$ в случае комплексных векторных пространств. Рассмотрим действительный случай. Определим *естественную изометрию*

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}; F) \approx F.$$

Для этого сопоставим каждому элементу $y \in F$ линейное отображение $\lambda \longrightarrow \lambda y$ пространства $\mathbb{R}$ в F. Такое отображение непрерывно, поскольку

$$\| \lambda y \| = \| y \| \cdot | \lambda |.$$

Установленное выше соответствие между элементами пространства F и линейными непрерывными отображениями из $\mathbb{R}$ в F определяет отображение $\varphi\colon F \to \mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$, которое, очевидно, линейно, причем норма линейного отображения $\varphi(y)\colon \mathbb{R} \to F$ равна $\| y \|$. Обратно, сопоставим каждому линейному непрерывному отображению $f\colon \mathbb{R} \to F$ элемент $f(1) \in F$. Таким образом мы определим отображение ψ пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ в пространство F, которое тоже будет линейным. По построению отображения φ и ψ взаимно обратны и, следовательно, являются биективными отображениями. В силу равенства $\| \varphi(y) \| = \| y \|$ каждое из отображений φ и ψ является *изометрией*. По определению, отображение ψ является естественной изометрией пространства $\mathcal{L}(\mathbb{R}; F)$ на пространство F.

Пример 2. Пусть E — действительное банахово пространство; тогда действительное банахово пространство $\mathcal{L}(E; \mathbb{R})$ называется *топологическим сопряженным* пространством для пространства E. Элементами сопряженного пространства служат *линейные непрерывные формы*, определенные на пространстве E.

Не следует смешивать топологическое сопряженное пространство с *алгебраическим сопряженным*, которое содержит все линейные формы (как непрерывные, так и не являющиеся непрерывными). Если пространство E имеет конечную размерность n, то топологическое сопряженное пространство совпадает с алгебраическим сопряженным и имеет в этом случае ту же размерность n, что и пространство E.

Мы будем обозначать топологическое сопряженное пространство к пространству E через E^*. Пространство E^* обладает структурой банахова пространства.

Аналогично для комплексного банахова пространства E определяется топологическое сопряженное пространство $\mathcal{L}(E;\ \mathbb{C})$.

Пример 3. *Алгебра $\mathcal{L}(E;\ E)$, где E — банахово пространство.* Как мы уже знаем, пространство $\mathcal{L}(E;\ E)$ является банаховым. В $\mathcal{L}(E;\ E)$, помимо основных операций, рассмотрим операцию

$$(g,\ f) \longrightarrow g \circ f$$

и назовем ее *умножением* (вообще говоря, она не коммутативна). Для этого умножения имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered}(g_1 + g_2) \circ f = (g_1 \circ f) + (g_2 \circ f), \\ (\lambda g) \circ f = \lambda (g \circ f)\end{gathered} \tag{1.7.1}$$

(они следуют из определений суммы $g_1 + g_2$ линейных отображений и правила умноженяя линейного отображения g на скаляр λ). Кроме того, в силу линейности отображения g

$$\begin{gathered}g \circ (f_1 + f_2) = (g \circ f_1) + (g \circ f_2), \\ g \circ (\lambda f) = \lambda (g \circ f).\end{gathered} \tag{1.7.2}$$

Из соотношений (1.7.1) и (1.7.2) вытекает, что если отображение f фиксировано, то отображение $g \longrightarrow g \circ f$ линейно, а если g фиксировано, то отображение $f \longrightarrow g \circ f$ линейно. Такое отображение называется *билинейным* (см. ниже п. 1.8).

Если в векторном пространстве A определен внутренний *билинейный* закон композиции (называемый умножением), то говорят, что A обладает структурой *алгебры* над основным полем. Эта алгебра *ассоциативна*, если умножение ассоциативно. Очевидно, что пространство $\mathcal{L}(E;\ E)$ будет ассоциативной алгеброй над полем $\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$), если E — действительное (соответственно комплексное) векторное пространство. В дальнейшем мы будем опускать знак умножения $\circ$, просто обозначая через gf композицию отображений $g \circ f$.

В алгебре $\mathcal{L}(E;\ E)$ задана норма, обладающая обычными свойствами нормы векторного пространства (см. п. 1.1) и, кроме этого, удовлетворяющая, согласно (1.5.1), условию

$$\| gf \| \leqslant \| g \| \cdot \| f \| \tag{1.7.3}$$

(свойство нормы по отношению к умножению).

Наконец, если E — *банахово пространство* (это предположение мы будем считать выполненным до конца параграфа), то пространство $\mathcal{L}(E;\ E)$ *полно* по норме (в силу теоремы 1.4.2). Тогда мы будем говорить, что $\mathcal{L}(E;\ E)$ — *банахова алгебра.* Более точно банахова алгебра A — это алгебра с нормой, удовлетворяющей условию (1.7.3), которая полна по этой норме.

З а м е ч а н и е. Не следует думать, что всегда имеет место равенство $\| gf \| = \| g \| \cdot \| f \|$. *Например*, возьмем $E = \mathbb{R}^2$. Пусть отображение f (соответственно g) — проекция точки плоскости $\mathbb{R}^2$ на первую (соответственно вторую) координатную ось. Тогда

$$gf = fg = 0,$$

в то время как

$$\| f \| = 1, \quad \| g \| = 1.$$

В следующих двух теоремах, относящихся к теории банаховых алгебр $\mathscr{L}(E; E)$, используется теория нормально сходящихся рядов.

Теорема 1.7.1. *Если E — банахово пространство и $f \in \mathscr{L}(E; E)$, то ряд*

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} f^n$$

сходится нормально.

О б о з н а ч е н и е. Сумма ряда $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} f^n$ обозначается через $\exp f$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условимся, что $f^0 = 1$, единичный элемент алгебры (тождественное отображение $E \to E$). Далее, из неравенства (1.7.3) вытекает, что

$$\| f^n \| \leqslant \| f \|^n.$$

Таким образом ряд из норм мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} \| f \|^n = \exp \| f \|$$

(обычная экспоненциальная функция действительной переменной). Теорема доказана.

У п р а ж н е н и е. Доказать, что если $gf = fg$, то

$$(\exp f) \cdot (\exp g) = (\exp g) \cdot (\exp f) = \exp (f + g).$$

Из данного соотношения и того, что $\exp (0) = 1$, вытекает равенство

$$(\exp f) \cdot (\exp (-f)) = 1.$$

Следовательно, $\exp f$ — *обратимый* элемент пространства $\mathscr{L}(E; E)$.

З а м е ч а н и е. Только что полученный результат справедлив для любой банаховой алгебры.

Теорема 1.7.2. *Пусть E — банахово пространство, и пусть элемент $u \in \mathscr{L}(E; E)$ таков, что*

$$\| u \| < 1.$$

Тогда $1 - u$ является обратимым элементом в алгебре $\mathscr{L}(E; E)$.

Доказательство. Ряд

$$\sum_{n\geqslant 0} u^n = 1 + u + \ldots + u^n + \ldots$$

сходится нормально, поскольку $\| u^n \| \leqslant \| u \|^n$, а геометрическая прогрессия $\sum\limits_{n\geqslant 0} \| u \|^n$ сходится в силу предположения $\| u \| < 1$. Обозначим через v сумму ряда $\sum\limits_{n\geqslant 0} u^n$. Тогда произведение

$$vu = uv$$

представляет собой сумму ряда $\sum\limits_{n\geqslant 1} u^n$. Отсюда вытекает, что

$$v(1-u) = (1-u)v = 1.$$

Следовательно, v — обратный элемент для $1-u$.

Замечание. Эта теорема справедлива для любой банаховой алгебры.

В качестве следствия из теоремы 1.7.2 получается

Теорема 1.7.3. *Пусть E и F — банаховы пространства. Обозначим через* $\mathrm{Isom}\,(E;\,F)$ *подмножество пространства* $\mathscr{L}\,(E;\,F)$, *образованное изоморфизмами* $E \to F$ (см. определение п. 1.6). *Тогда*

(a) *подмножество* $\mathrm{Isom}\,(E;\,F)$ *открыто в* $\mathscr{L}\,(E;\,F)$;

(b) *отображение* $u \to u^{-1}$ подмножества $\mathrm{Isom}\,(E;\,F)$ *в пространство* $\mathscr{L}(F;\,E)$ *непрерывно*.

Доказательство. Сначала заметим, что множество $\mathrm{Isom}\,(E;\,F)$ может быть пусто (если пространства E и F не изоморфны). В этом случае утверждение очевидно. Предположим, что $\mathrm{Isom}\,(E;\,F)$ не пусто; пусть элемент $u_0 \in \mathrm{Isom}\,(E;\,F)$. Утверждение (a) будет доказано, если мы установим, что всякий элемент $u \in \mathscr{L}\,(E;\,F)$, *достаточно близкий* к u_0, является изоморфизмом. Для изоморфности отображения $u\colon E \to F$ необходимо и достаточно, чтобы отображение

$$(u_0)^{-1}u\colon E \to E$$

было изоморфизмом. В силу теоремы 1.7.2 для того, чтобы отображение $(u_0)^{-1}u$ представляло собой изоморфизм, т. е. было обратимым элементом в пространстве $\mathscr{L}\,(E;\,E)$, *достаточно*, чтобы $\| v \| < 1$, где

$$(u_0)^{-1}u = 1 - v.$$

Далее, имеем $v = 1 - u_0^{-1}u = u_0^{-1}(u_0 - u)$, откуда

$$\| v \| \leqslant \| u_0^{-1} \| \cdot \| u - u_0 \|. \tag{1.7.4}$$

Таким образом, если

$$\| u - u_0 \| < \frac{1}{\| u_0^{-1} \|},$$

то $\| v \| < 1$, и потому отображение u — изоморфизм. Таким образом, всякий элемент u, достаточно близкий к u_0, есть изоморфизм.

(*Внимание*! Не следует считать, что $\| u_0^{-1} \| = 1/\| u_0 \|$.)

Теперь нам осталось доказать утверждение (b). Поскольку

$$u^{-1} = (u_0 (1 - v))^{-1} = (1 - v)^{-1} (u_0)^{-1},$$

то

$$u^{-1} - (u_0)^{-1} = [(1 - v)^{-1} - 1] (u_0)^{-1}. \tag{1.7.5}$$

Так как $(1 - v)^{-1} = \sum\limits_{n \geqslant 0} v^n$, то

$$(1 - v)^{-1} - 1 = \sum_{n \geqslant 1} v^n,$$

$$\| (1 - v)^{-1} - 1 \| \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \| v \|^n = \frac{\| v \|}{1 - \| v \|}.$$

Из формулы (1.7.5) вытекает, что

$$\| u^{-1} - (u_0)^{-1} \| \leqslant \| u_0^{-1} \| \cdot \frac{\| v \|}{1 - \| v \|}. \tag{1.7.6}$$

Согласно неравенству (1.7.4), $\| v \|$ стремится к 0, когда u стремится к u_0, Тогда u^{-1} стремится к $(u_0)^{-1}$ в силу неравенства (1.7.6). Значит, обратный элемент u^{-1} является непрерывной функцией от u на множестве $\operatorname{Isom}(E; F)$. Теорема полностью доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть пространства E и F имеют одну и ту же конечную размерность n, а пространство $\mathcal{L}(E; F)$ реализуется как пространство матриц порядка $n \times n$. Как известно, матрица f называется обратимой, если ее определитель $\det f$ не равен нулю. Так как отображение $f \to \det f$ пространства $\mathcal{L}(E; F)$ в пространство $\mathbb{R}$ (соответственно в пространство $\mathbb{C}$) непрерывно, то прообраз дополнения к нулю, который является не чем иным, как $\operatorname{Isom}(E; F)$, *открыт*. Это рассуждение является в нашем частном случае новым доказательством п. (a) теоремы 1.7.3. Чтобы доказать утверждение (b), достаточно записать в явном виде обратную матрицу.

1.8. Полилинейные непрерывные отображения

Вначале напомним некоторые алгебраические определения. Пусть $E_1, \ldots, E_n$ и F — векторные пространства. Отображение

$$f \colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F$$

называется *полилинейным* (билинейным, когда $n = 2$; трилинейным, когда $n = 3$), если для любого целого $k \in [1, n]$ и для любой системы элементов $a_i \in E_i$ $(i \neq k)$ «частичное» отображение

$$x_k \to f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

пространства E_k в пространство F линейно. Другими словами, если зафиксированы все переменные, кроме одной, то отображение f линейно зависит от оставшейся переменной. Из этого определения следует, что полилинейное отображение $f(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль, если хотя бы одно из переменных x_i равно нулю. В частности, f равно нулю в начале координат $(0, \ldots, 0)$. Заметим, что для полилинейного отображения

$$f(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) = (\lambda_1 \ldots \lambda_n) f(x_1, \ldots, x_n). \qquad (1.8.1)$$

Пример. Возьмем в качестве пространств $E_1, \ldots, E_n$ и F числовые поля. Тогда *произведение* n элементов поля

$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n$$

представляет собой полилинейную функцию переменных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Предположим теперь, что $E_1, \ldots, E_n$, F — нормированные векторные пространства. Тогда произведение $E_1 \times \ldots \times E_n$ обладает структурой топологического пространства (как произведение топологических пространств). В этом случае разумно поставить вопрос, является ли отображение $f\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ непрерывным. Следующая теорема обобщает теорему 1.4.1:

Теорема 1.8.1. *Пусть $E_1, \ldots, E_n$, F — нормированные векторные пространства, и пусть $f\colon E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ — полилинейное отображение. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *отображение f непрерывно в любой точке пространства $E_1 \times \ldots \times E_n$;*

(b) *отображение f непрерывно в начале координат*

$$(0, 0, \ldots, 0) \in E_1 \times \ldots \times E_n;$$

(c) *норма $\| f(x_1, \ldots, x_n) \|$ ограничена на произведении единичных шаров*

$$\| x_1 \| \leqslant 1, \ \ldots, \ \| x_n \| \leqslant 1.$$

Доказательство ведется так же, как и доказательство теоремы 1.4.1. Очевидно, что (a) $\Rightarrow$ (b). Для доказательства того, что (b) $\Rightarrow$ (c), заметим, что если отображение f непрерывно в начале координат, то прообраз единичного шара из F является окрестностью начала координат $(0, \ldots, 0)$ в пространстве $E_1 \times \ldots \times E_n$. Следовательно, существует такое число $r > 0$, что

$$(\| x_i \| \leqslant r \text{ для любого } i) \Rightarrow (\| f(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant 1).$$

Отсюда получаем, учитывая свойство (1.8.1), что

$$(\| x_i \| \leqslant 1 \text{ для любого } i) \Rightarrow \left(\| f(x_1, \ldots, x_n) \| \leqslant \frac{1}{r^n} \right),$$

и условие (c) доказано

Предположим теперь, что отображение f удовлетворяет условию (c). Пусть число $M > 0$ таково, что

$$(\|x_i\| \leqslant 1 \text{ для любого } i) \Rightarrow (\|f(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant M).$$

Тогда для любых x_i получаем

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant M \|x_1\| \ldots \|x_n\|. \tag{1.8.2}$$

Докажем, что в этих условиях отображение f непрерывно в произвольной точке $(a_1, \ldots, a_n)$, т. е. что (c) $\Rightarrow$ (a). Составим разность

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) =$$
$$= f(x_1 - a_1, x_2, \ldots, x_n) + f(a_1, x_2 - a_2, x_3, \ldots, x_n) + \ldots$$
$$\ldots + f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n - a_n).$$

[Проверка этого равенства не представляет большого труда, так как f — аддитивная функция по каждой переменной в отдельности.] Норма левой части мажорируется суммой норм членов правой части. Следовательно, принимая во внимание неравенство (1.8.2), получаем:

$$\|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)\| \leqslant M \|x_1 - a_1\| \cdot \|x_2\| \ldots \|x_n\| +$$
$$+ M \|x_2 - a_2\| \cdot \|a_1\| \cdot \|x_3\| \ldots \|x_n\| + \ldots$$
$$\ldots + M \|x_n - a_n\| \cdot \|a_1\| \ldots \|a_{n-1}\|. \tag{1.8.3}$$

Пусть $\|x_i - a_i\| \leqslant \varepsilon$ при любом i. Тогда $\|x_i\| \leqslant \|a_i\| + \varepsilon$, и, следовательно, существует такое число $A > 0$, что

$$(\|x_i - a_i\| \leqslant \varepsilon \text{ для любого } i) \Rightarrow (\|x_i\| \leqslant A \text{ для любого } i).$$

Из равенства (1.8.3) получаем, что

$$\|f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)\| \leqslant M A^{n-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} \|x_i - a_i\|\Big) \leqslant n M A^{n-1} \varepsilon, \tag{1.8.4}$$

как только $\|x_i - a_i\| \leqslant \varepsilon$ для любого i. Если число $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то число A может быть выбрано независимо от ε. Тогда, как показывает неравенство (1.8.4), $f(x_1, \ldots, x_n)$ стремится к $f(a_1, \ldots, a_n)$, когда одновременно все x_k стремятся к a_k ($k = 1, \ldots, n$). Следовательно, отображение f *непрерывно* в точке $(a_1, \ldots, a_n)$, и доказательство окончено.

Обозначение. Будем обозначать через $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ множество непрерывных линейных отображений $E_1 \times \ldots \times E_n \to F$. Это множество, очевидно, является подпространством векторного пространства линейных отображений $E_1 \times \ldots \times E_n \to F$. Для элемента $f \in \mathscr{L}(E_1 \times \ldots \times E_n; F)$ положим

$$\|f\| = \sup \|f(x_1, \ldots, x_n)\|$$
$$\text{при } \|x_k\| \leqslant 1, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда в силу неравенства (1.8.2)

$$\| f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant \| f \| \cdot \| x_1 \| \ldots \| x_n \|, \tag{1.8.5}$$

где $\| f \|$ есть наименьшее из чисел $M > 0$, для которых неравенство (1.8.2) имеет место.

Упражнение 1. Проверить, что $\| f \|$ является *нормой* на векторном пространстве $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Упражнение 2. Показать, что если F является банаховым пространством, то и нормированное векторное пространство $\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ является банаховым. (Проверка ведется так же, как в случае $n = 1$; см. выше п. 1.4.)

Пример билинейного непрерывного отображения. Пусть E, F, G — нормированные векторные пространства. Рассмотрим отображение

$$\varphi: \mathscr{L}(F; G) \times \mathscr{L}(E; F) \to \mathscr{L}(E; G),$$

определенное соотношением

$$\varphi(g, f) = g \circ f$$

как композиция отображений

$$g: F \to G \quad \text{и} \quad f: E \to F.$$

Как мы уже видели, это отображение *билинейно*. Кроме того, известно, что (см. (1.5.1))

$$\| g \circ f \| \leqslant \| g \| \cdot \| f \|.$$

Следовательно, если $\| f \| \leqslant 1$ и $\| g \| \leqslant 1$, то $\| g \circ f \| \leqslant 1$. Таким образом, билинейное отображение φ является непрерывным и его норма $\| \varphi \| \leqslant 1$.

1.9. Естественная изометрия $\mathscr{L}(E, F; G) \approx \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G))$

Определим сначала отображение

$$\varphi: \mathscr{L}(E, F; G) \to \mathscr{L}(E; \mathscr{L}(F; G)).$$

Пусть $f \in \mathscr{L}(E, F; G)$. Отображение $f(x, y)$ представляет собой функцию двух переменных $x \in E$ и $y \in F$. При фиксированном x отображение $y \to f(x, y)$ является линейным отображением пространства F в G; обозначим его через f_x (частное отображение). Имеем

$$\| f_x(y) \| = \| f(x, y) \| \leqslant \| f \| \cdot \| x \| \cdot \| y \|.$$

Следовательно,

$$\| f_x \| \leqslant \| f \| \cdot \| x \|. \tag{1.9.1}$$

Это означает, что отображение f_x линейно и *непрерывно* (поскольку его норма конечна). Тогда соответствие $x \longrightarrow f_x$ порождает отображение $g\colon E \to \mathscr{L}(F;\ G)$. Непосредственно проверяется, что оно линейно. Условие (1.9.1) записывается в виде:

$$\| g(x) \| \leqslant \| f \| \cdot \| x \|.$$

Отсюда вытекает, что отображение g непрерывно и $\| g \| \leqslant \| f \|$. Таким образом, каждому отображению $f \in \mathscr{L}(E,\ F;\ G)$ мы сопоставляем отображение $g \in \mathscr{L}(E;\ \mathscr{L}(F;\ G))$. Определим новое отображение φ. Для этого мы положим $\varphi(f) = g$. Легко заметить, что отображение φ линейно. Так как φ переводит f в g и $\| g \| \leqslant \| f \|$, то норма $\| \varphi \| \leqslant 1$. Теперь мы определим обратное отображение

$$\psi\colon\ \mathscr{L}(E;\ \mathscr{L}(F;\ G)) \to \mathscr{L}(E,\ F;\ G).$$

Чтобы построить ψ, рассмотрим линейное непрерывное отображение

$$g\colon E \to \mathscr{L}(F;\ G).$$

Для $x \in E$ отображение $g(x)$ является линейным и непрерывным отображением $F \to G$. Тогда для $x \in E$, $y \in F$ отображение $g(x) \cdot y$ есть *билинейное* отображение

$$f\colon E \times F \to G.$$

Так как

$$\| g(x) \| \leqslant \| g \| \cdot \| x \|,$$

то

$$\| f(x,\ y) \| = \| g(x) \cdot y \| \leqslant \| g(x) \| \cdot \| y \| \leqslant \| g \| \cdot \| x \| \cdot \| y \|.$$

Из этого неравенства следует, что отображение f *непрерывно* и

$$\| f \| \leqslant \| g \|.$$

Таким образом каждому отображению $g \in \mathscr{L}(E;\ \mathscr{L}(F;\ G))$ мы ставим в соответствие отображение $f \in \mathscr{L}(E,\ F;\ G)$. Положим по определению $f = \psi(g)$. Тогда мы определим отображение ψ для любого $g \in \mathscr{L}(E;\ \mathscr{L}(F;\ G))$. По построению ψ линейно. Более того, так как ψ переводит g в f и $\| f \| \leqslant \|g\|$, то норма $\| \psi \| \leqslant 1$.

Из приведенного построения ясно, что отображения φ и ψ являются взаимно обратными. Тогда $\psi \circ \varphi$ есть тождественное отображение пространства $\mathscr{L}(E \times F;\ G)$ с нормой, равной 1. Отсюда

$$1 = \| \psi \circ \varphi \| \leqslant \| \psi \| \cdot \| \varphi \|,$$

а поскольку

$$\| \varphi \| \leqslant 1, \qquad \| \psi \| \leqslant 1,$$

то

$$\| \varphi \| = 1, \qquad \| \psi \| = 1.$$

Следовательно, отображение φ сохраняет норму, т. е. является *изометрией*, ч. т. д.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

2.1. Определение дифференцируемого отображения

Рассмотрим банаховы пространства E и F, открытое непустое множество $U \subset E$ и отображение f: $U \to F$. Для каждой точки $a \in U$ определяется следующее *отношение эквивалентности* в множестве этих функций.

Определение. Отображения f_1: $U \to F$ и f_2: $U \to F$ *касаются* друг друга в точке $a \in U$, если функция

$$m(r) = \sup_{\|x-a\| \leqslant r} \|f_1(x) - f_2(x)\|,$$

определенная для всех достаточно малых чисел $r > 0$ (так как множество U открыто), удовлетворяет условию

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ r > 0}} \frac{m(r)}{r} = 0, \tag{2.1.1}$$

или иначе, если

$$m(r) = o(r). \tag{2.1.2}$$

Предоставляем читателю проверить, что отношение «отображения f_1 и f_2 касаются друг друга в точке a» является отношением эквивалентности. В частном случае, когда одно из рассматриваемых отображений является нулевым, мы приходим к понятию отображения, *касательного* к нулевому отображению в точке a.

Из условия (2.1.2) следует, что в точке a функция $f_1 - f_2$ *непрерывна* и равна нулю. Таким образом, две функции, являющиеся касательными в точке a, принимают в этой точке одно и то же значение; если одна из них непрерывна в точке a, то и вторая функция непрерывна в этой точке.

Пример. Пусть g — линейное отображение $E \to F$ (непрерывное или нет). Положим

$$f(x) = g(x - a)$$

и посмотрим, является ли отображение f касательным к нулевому отображению в точке a. Имеем

$$m(r) = \|g\| \cdot r;$$

значит, если $m(r)/r$ стремится к 0 вместе с r, то $\|g\| = 0$. Итак, g — *нулевое отображение*. Отсюда вытекает, что для произвольно заданного отображения f: $U \to F$ существует *не более одного* такого линейного отображения g: $E \to F$, что отображения

$$x \to f(x) - f(a) \text{ и } x \to g(x - a)$$

касаются друг друга в точке a. Более того, если такое линейное отображение g существует, то из непрерывности f в точке a вытекает непрерывность отображения g в начале координат (и всюду, поскольку g линейно), и обратно.

Определение. Отображение $f\colon U \to F$ *дифференцируемо в точке* $a \in U$, если выполняются следующие условия:

(i) f непрерывно в точке a;

(ii) существует такое линейное отображение $g\colon E \to F$, что отображения $x \to f(x) - f(a)$ и $x \to g(x-a)$ касаются друг друга в точке a.

Последнее условие может быть записано иначе:

$$\| f(x) - f(a) - g(x-a) \| = o(\| x - a \|). \tag{2.1.3}$$

Если отображение f дифференцируемо в точке a, то, как это следует из предыдущего замечания, единственное соответствующее ему линейное отображение g *непрерывно*. Оно принадлежит пространству $\mathscr{L}(E; F)$; мы обозначим его через $f'(a)$ и назовем *производным* от отображения f в точке a.

Дадим эквивалентное определение: отображение f *дифференцируемо в точке* $a \in U$, *если существует единственное линейное отображение* $g \in \mathscr{L}(E;\ F)$, *для которого имеет место* (2.1.3). Заметим, что тогда из непрерывности g вытекает непрерывность отображения f в точке a.

Соотношение (2.1.3), используя обозначение $f'(a)$, можно записать так:

$$\| f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \| = o(\|x - a\|). \tag{2.1.4}$$

Пример. Пусть F — действительное банахово пространство и U — открытое подмножество в $\mathbb{R}$. Тогда отображение $f\colon U \to F$ является функцией действительного переменного. Заметим, что в силу канонической изометрии $\mathscr{L}(\mathbb{R};\ F) \approx F$ дифференцируемость отображения f в точке a эквивалентна существованию такого элемента $c \in F$, что

$$\| f(x) - f(a) - (x-a)c \| = o(| x - a |).$$

Иначе говоря, отношение

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \qquad (\text{для } x \neq a)$$

должно иметь предел $c \in F$, когда x стремится к a. Таким образом мы получаем обычное определение производной от функции действительного переменного со значениями, принадлежащими банахову пространству F.

Обозначим величину c через $f'(a)$. Линейное отображение

$$t \to tf'(a)$$

пространства $\mathbb{R}$ в F является элементом пространства $\mathscr{L}(\mathbb{R}; F)$, который соответствует элементу c при естественной изометрии $F \approx \approx \mathscr{L}(\mathbb{R}; F)$. Мы обозначили его через $f'(a)$. Заметим, что мы используем одно и то же обозначение $f'(a)$ для элемента пространства F и соответствующего ему элемента пространства $\mathscr{L}(\mathbb{R}; F)$. То же самое относится и к случаю пространства $\mathscr{L}(\mathbb{C}; F)$, где F — комплексное банахово пространство.

Вернемся к общему случаю: пусть $E \supset U \xrightarrow{f} F$.

Определение. Отображение f *дифференцируемо на множестве* U, если оно дифференцируемо в каждой точке $a \in U$.

Следовательно, мы имеем отображение $a \to f'(a)$, которое будем обозначать просто через:

$$f'\colon U \to \mathscr{L}(E; F).$$

Как уже отмечалось, мы называем f' *производным отображением* от дифференцируемого отображения $f\colon U \to F$. Мы видим, что f отображает пространство E в F, а f' отображает E в $\mathscr{L}(E; F)$. Напомним, что если $E = \mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$), а F — действительное (соответственно комплексное) банахово пространство, то можно отождествить $\mathscr{L}(\mathbb{R}; F)$ с F (соответственно $\mathscr{L}(\mathbb{C}; F)$ с F). Таким образом, для функции f действительного (соответственно комплексного) переменного можно отождествить производное отображение f' с некоторым отображением $U \to F$.

Определение. Отображение $f\colon U \to F$ *непрерывно дифференцируемо* (иначе говоря, *принадлежит к классу* C^1), если

1) f дифференцируемо на множестве U, т. е. дифференцируемо в каждой точке $a \in U$;

2) производное отображение $f'\colon U \to \mathscr{L}(E; F)$ *непрерывно*.

(Не следует забывать, что пространство $\mathscr{L}(E; F)$ снабжено нормой, относительно которой оно является банаховым. Следовательно, U и $\mathscr{L}(E; F)$ — топологические пространства.)

Замечание о понятии дифференцируемости. Пусть, как всегда, f — непрерывное отображение $U \to F$, где F — банахово пространство, а U — открытое подмножество в банаховом пространстве E. Заменим нормы пространств E и F на эквивалентные (см. п. 1.6). Обозначим через $\| x \|$ старую норму элемента $x \in E$, а новую норму — через $\| x \|_1$; при этом топология пространства E, так же как топология пространства F, не изменится, подмножество U останется открытым, а отображение F — непрерывным.

Предложение 2.1.1. *Если отображение f дифференцируемо в точке $a \in U$ относительно старых норм, то оно также дифференцируемо в точке a относительно новых норм. При этом значение производной не меняется.*

Действительно, тот факт, что отображение f дифференцируемо в точке a, а его производная в этой точке есть элемент $g \in \mathscr{L}(E; F)$, выражается следующим равенством

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{\| f(x) - f(a) - g(x-a) \|}{\| x - a \|} = 0.$$

Поскольку нормы $\| \ \|$ и $\| \ \|_1$ эквивалентны в E, то

$$\frac{1}{\| x - a \|_1} \leqslant M \frac{1}{\| x - a \|},$$

где M — фиксированное число. Так как в пространстве F нормы $\| \ \|$ и $\| \ \|_1$ также эквивалентны, то

$$\| f(x) - f(a) - g(x-a) \|_1 \leqslant M' \| f(x) - f(a) - g(x-a) \|,$$

где M' — фиксированное число. Отсюда

$$\frac{\| f(x) - f(a) - g(x-a) \|_1}{\| x - a \|_1} \leqslant M M' \frac{\| f(x) - f(a) - g(x-a) \|}{\| x - a \|}.$$

Так как правая часть последнего неравенства по предположению стремится к 0, когда x стремится к a (оставаясь $\neq a$), то левая часть также стремится к 0, ч. т. д.

2.2. Производная сложной функции

Пусть E, F, G — банаховы пространства, U — открытое подмножество в E и V — открытое подмножество в F. Рассмотрим непрерывные отображения

$$f \colon U \to F, \qquad g \colon V \to G$$

и точку $a \in U$. Предположим, что точка $b = f(a) \in F$ принадлежит подмножеству V. Тогда множество $f^{-1}(V) \subset U$ открыто в E и содержит точку a. В этом открытом множестве (обозначим его U') определено сложное отображение

$$g \circ f \colon U' \to G.$$

Теорема 2.2.1. *Если отображение f дифференцируемо в точке a и отображение g дифференцируемо в точке $b = f(a)$, то отображение $h = g \circ f$ дифференцируемо в точке a и имеет место равенство*

$$h'(a) = g'(b) \circ f'(a). \tag{2.2.1}$$

Иными словами, линейное отображение $h'(a) \colon E \to G$ представляет собой композицию линейных отображений $f'(a) \colon E \to F$ и $g'(b) \colon F \to G$.

Доказательство. По предположению,

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \varphi(x - a), \tag{2.2.2}$$

где φ — отображение, касательное к нулевому отображению в начале координат, т. е.

$$\|\varphi(x-a)\| = o(\|x-a\|).$$

Аналогично, по предположению,

$$g(y) = g(b) + g'(b)\cdot(y-b) + \psi(y-b). \tag{2.2.3}$$

где $\|\psi(y-b)\| = o(\|y-b\|)$.

Оценим разность $h(x) - h(a) = g(f(x)) - g(f(a))$. Воспользуемся равенством (2.2.3). Заменяя в нем y на $f(x)$ и b на $f'(a)$, получаем, что

$$h(x) - h(a) = g'(f(a))\cdot(f(x) - f(a)) + \psi(f(x) - f(a)).$$

Заменим в этом соотношении разность $f(x) - f(a)$ ее значением, полученным из (2.2.2). Тогда, принимая во внимание тот факт, что отображение $g'(f(a))$ есть *линейная* функция $F \to G$, мы получим следующее равенство:

$$h(x) - h(a) = (g'(f(a))\circ f'(a))\cdot(x-a) + g'(f(a))\cdot\varphi(x-a) + \\ + \psi(f(x) - f(a)).$$

Чтобы доказать, что h — дифференцируемое отображение в точке a, а его производная равна $g'(f(a))\circ f'(a)$, достаточно показать, что второй и третий члены в правой части касаются нулевого отображения, т. е. что

$$\|g'(f(a))\cdot\varphi(x-a)\| = o(\|x-a\|), \tag{2.2.4}$$

$$\|\psi(f(x) - f(a))\| = o(\|x-a\|). \tag{2.2.5}$$

Из формулы (2.2.4) следует, что

$$\|g'(f(a))\cdot\varphi(x-a)\| \leqslant \|g'(f(a))\|\cdot\|\varphi(x-a)\|.$$

Из соотношения (2.2.5) находим, что

$$\|\psi(f(x) - f(a))\| = o(\|f(x) - f(a)\|),$$

а с помощью соотношения (2.2.2) получаем неравенство

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant M\cdot\|x-a\|.$$

(где число $M > \|f'(a)\|$). Таким образом, из соотношения (2.2.2) вытекает, что последнее неравенство имеет место, если норма $\|x-a\|$ достаточно мала. Теорема 2.2.1 доказана.

2.3. Линейность операции дифференцирования

Рассмотрим общий случай. Пусть U — открытое множество в банаховом пространстве E, а F — банахово пространство. Пусть f и g — отображения $U \to F$. Их *суммой* называется отображение

$h: U \to F$, определенное по формуле

$$h(x) = f(x) + g(x) \quad (\text{сложение в } F).$$

Аналогично, произведением λf элемента f на число λ называется отображение $k: U \to F$, определенное по формуле $k(x) = \lambda \cdot f(x)$.

Предложение 2.3.1. *Если отображения f и g дифференцируемы в точке a, то отображение $h = f + g$ дифференцируемо в точке a и*

$$h'(a) = f'(a) + g'(a).$$

Если отображение f дифференцируемо в точке a, то отображение $k = \lambda f$ дифференцируемо в точке a и

$$k'(a) = \lambda f'(a).$$

Иными словами, отображения $f: U \to F$, дифференцируемые в точке $a \in U$, образуют векторное пространство V_a. Оно является *подпространством* пространства всех отображений $U \to F$, а отображение $f \to f'(a)$ является *линейным* отображением этого подпространства в $\mathscr{L}(E; F)$. Подобно этому можно заметить, что множество отображений $f: U \to F$ *класса* C^1 (на U) также образует векторное пространство, являющееся подпространством пространства V_a.

2.4. Производные некоторых функций частного вида

Предложение 2.4.1. *Если отображение $f: U \to F$ постоянно, то оно дифференцируемо и его производная $f'(x)$ равна нулю для любого $x \in U$.*

Этот факт вытекает непосредственно из определений.

Мы увидим далее (см. § 3), что верно и обратное: если f дифференцируемо, $f'(x) = 0$ для любого $x \in U$ и множество U *связно*, то отображение f постоянно на множестве U.

Предложение 2.4.2. *Если $f: U \to F$ есть сужение линейного непрерывного отображения $E \to F$* (которое часто также обозначается f), *то оно дифференцируемо и*

$$f'(x) = f \text{ для любого } x \in U$$

[т. е. производная линейной функции постоянна; не следует забывать, что последняя является элементом пространства $\mathscr{L}(E; F)$]. Это предложение нетрудно получить из определений.

Теперь рассмотрим производную *билинейного непрерывного отображения*

$$f: E_1 \times E_2 \to F,$$

где через E_1, E_2, F обозначены банаховы пространства. Вначале мы определим на произведении $E_1 \times E_2$ структуру банахова пространства. Для этого введем сначала на $E_1 \times E_2$ структуру *вектор-*

ного пространства. Мы положим

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),$$
$$\lambda (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

В частности, $(x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2)$.

Остается ввести норму; положим

$$\| (x_1, x_2) \| = \| x_1 \| + \| x_2 \|. \tag{2.4.1}$$

Можно проверить, что это действительно норма, задающая на $E_1 \times E_2$ *топологию произведения.* Так как по предположению E_1 и E_2 — полные пространства, то пространство $E_1 \times E_2$ полно по введенной на нем норме.

Замечание. Вместо нормы, определенной равенством (2.4.1), можно было бы взять какую-нибудь другую эквивалентную норму, например $\sup (\| x_1 \|, \| x_2 \|)$.

Теорема 2.4.3. *Если отображение f: $E_1 \times E_2 \to F$ билинейно и непрерывно, то f дифференцируемо и его производная в точке (a_1, a_2) $[a_1 \in E_1, a_2 \in E_2]$ определяется равенством*

$$f' (a_1, a_2) \cdot (h_1, h_2) = f (h_1, a_2) + f (a_1, h_2). \tag{2.4.2}$$

В этой формуле $h_1 \in E_1$, $h_2 \in E_2$, а левая часть — это образ вектора $(h_1, h_2) \in E_1 \times E_2$ при отображении $f' (a_1, a_2) \in \mathscr{L} (E_1 \times E_2; F)$.

Доказательство. Поскольку

$$f (a_1 + h_1, a_2 + h_2) - f (a_1, a_2) = f (h_1, a_2) + f (a_1, h_2) + f (h_1, h_2),$$

то все будет доказано, если мы покажем, что

$$\| f (h_1, h_2) \| = o (\| (h_1, h_2) \|).$$

По определению нормы $\| (h_1, h_2) \| = \| h_1 \| + \| h_2 \|$. Так как

$$\| f (h_1, h_2) \| \leqslant \| f \| \cdot \| h_1 \| \cdot \| h_2 \| \leqslant \| f \| \cdot (\| h_1 \| + \| h_2 \|)^2,$$

то ясно, что $(\| h_1 \| + \| h_2 \|)^2 = o (\| h_1 \| + \| h_2 \|)$, ч. т. д.

Обобщение. Вместо произведения *двух* банаховых пространств E_1 и E_2 можно рассмотреть произведение

$$E_1 \times \ldots \times E_n,$$

где n — некоторое целое число. На этом произведении мы определим структуру векторного пространства и норму

$$\| (x_1, \ldots, x_n) \| = \sum_{i=1}^{n} \| x_i \|,$$

которая задает топологию произведения. Пусть

$$f: E_1 \times \ldots \times E_n \to F$$

есть полилинейное непрерывное отображение. Тогда утверждение теоремы 2.4.3 может быть распространено следующим образом: отображение f дифференцируемо и

$$f'(a_1, \ldots, a_n)\cdot(h_1, \ldots, h_n) = f(h_1, a_2, \ldots, a_n) + \\ + f(a_1, h_2, a_3, \ldots, a_n) + \ldots + f(a_1, \ldots, a_{n-1}, h_n). \qquad (2.4.3)$$

[В $f(a_1, \ldots, a_n)$ мы заменяем последовательно каждое a_i на h_i, не трогая остальных a_j, и складываем полученные члены; их сумма дает правую часть равенства (2.4.3).] Эту теорему можно доказать по индукции. Мы предоставляем читателю сделать это в качестве упражнения.

Вот еще один пример: в теореме 1.7.3 было определено *непрерывное* отображение

$$u \to u^{-1}$$

множества $\mathrm{Isom}(E; F)$ (открытого в банаховом пространстве $\mathcal{L}(E; F)$) на $\mathrm{Isom}(F; E)$ (открытое в банаховом пространстве $\mathcal{L}(F; E)$). Пусть φ — это отображение, т. е. $\varphi(u) = u^{-1}$. Можно считать, что φ отображает множество $\mathrm{Isom}(E; F)$ в банахово пространство $\mathcal{L}(F; E)$. Тогда имеет смысл поставить вопрос о дифференцируемости φ. Производная отображения φ, если она существует, должна быть элементом пространства

$$\mathcal{L}(\mathcal{L}(E; F); \mathcal{L}(F; E)).$$

Теорема 2.4.4. *Отображение φ принадлежит к классу C^1 на открытом множестве $\mathrm{Isom}(E; F) \subset \mathcal{L}(E; F)$. Его производная определяется равенством*

$$\varphi'(u)\cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \quad \text{для} \quad h \in \mathcal{L}(E; F). \qquad (2.4.4)$$

Доказательство. Посмотрим сначала, что представляет собой правая часть формулы (2.4.4). Символ $\circ$ означает здесь композицию непрерывных линейных отображений:

$$F \xrightarrow{u^{-1}} E \xrightarrow{h} F \xrightarrow{u^{-1}} E.$$

Следовательно, правая часть есть элемент пространства $\mathcal{L}(F; E)$.

Для доказательства формулы (2.4.4) придадим аргументу u «приращение» h:

$$\begin{aligned}\varphi(u+h) - \varphi(u) &= (u+h)^{-1} - u^{-1} = \\ &= (u+h)^{-1} \circ (u - (u+h)) \circ u^{-1} = \\ &= -(u+h)^{-1} \circ h \circ u^{-1}.\end{aligned}$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно показать, что для заданного элемента $u \in \mathrm{Isom}(E; F)$ разность между $(u+h)^{-1} \circ h \circ u^{-1}$

и (линейной по h) функцией $u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ есть $o(\| h \|)$. Имеем

$$(u + h)^{-1} \circ h \circ u^{-1} - u^{-1} \circ h \circ u^{-1} = ((u + h)^{-1} - u^{-1}) \circ h \circ u^{-1},$$

откуда

$$\| (u+h)^{-1} \circ h \circ u^{-1} - u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \| \leqslant \| (u+h)^{-1} - u^{-1} \| \cdot \| u^{-1} \| \cdot \| h \|.$$

Таким образом достаточно убедиться, что $\| (u + h)^{-1} - u^{-1} \|$ стремится к 0, когда h стремится к 0. Это утверждение справедливо, так как отображение $u \to u^{-1}$ *непрерывно* (теорема 1.7.3).

Итак, мы доказали, что отображение φ дифференцируемо во всякой точке $u \in \operatorname{Isom}(E; F)$ и его производная $\varphi'(u)$ может быть выражена по формуле (2.4.4). Для доказательства принадлежности φ к классу C^1 покажем, что отображение

$$\varphi' \colon \operatorname{Isom}(E; F) \to \mathscr{L}(\mathscr{L}(E; F); \mathscr{L}(F; E))$$

непрерывно. Введем для этого такое обозначение: для $v \in \mathscr{L}(F; E)$, $w \in \mathscr{L}(F; E)$ обозначим через $\psi(v, w)$ линейное отображение

$$h \to -v \circ h \circ w$$

пространства $\mathscr{L}(E; F)$ в пространство $\mathscr{L}(F; E)$. Тогда из формулы (2.4.4) вытекает, что

$$\varphi'(u) = \psi(u^{-1}, u^{-1}).$$

Значит, отображение $(v, w) \to \psi(v, w)$ пространства $\mathscr{L}(F; E) \times \mathscr{L}(F; E)$ в пространство $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E; F); \mathscr{L}(F; E))$ билинейно; к тому же оно непрерывно, ибо

$$\| \psi(v, w) \cdot h \| = \| v \circ h \circ w \| \leqslant \| v \| \cdot \| h \| \cdot \| w \|.$$

Отсюда вытекает (см. соотношение (1.4.2) и сделанные из него выводы), что

$$\| \psi(v, w) \| \leqslant \| v \| \cdot \| w \|.$$

Следовательно, ψ билинейно и непрерывно. Это означает, что отображение

$$u \to \varphi'(u) = \psi(u^{-1}, u^{-1})$$

является композицией *непрерывного* отображения $u \to (u^{-1}, u^{-1})$ множества $\operatorname{Isom}(E, F)$ в пространство

$$\mathscr{L}(F; E) \times \mathscr{L}(F; E)$$

и *непрерывного* отображения $(v, w) \to \psi(v, w)$. Значит, оно само непрерывно, ч. т. д.

Замечание. Позднее мы увидим, что это отображение дифференцируемо.

Частный случай теоремы 2.4.4. Пусть $E = F = \mathbb{R}$ (соответственно $E = F = \mathbb{C}$ в комплексном случае). Тогда линейное отображение $E \to F$ определяется некоторым числом, которое мы обозначим через u. Для того чтобы отображение, задаваемое этим числом, было изоморфизмом, необходимо и достаточно, чтобы $u \neq 0$. Тогда множество $\mathrm{Isom}(\mathbb{R};\ \mathbb{R})$ может быть отождествлено с открытым подмножеством пространства $\mathbb{R}$, образованным элементами $u \neq 0$. Теорема 2.4.4 утверждает, что в этом случае отображение $u \to 1/u$ дифференцируемо и его производная равна $-1/u^2$. Это классический результат.

2.5. Функции со значениями в произведении банаховых пространств

Предположим, что пространство F есть произведение конечного множества k банаховых пространств:

$$F = F_1 \times \ldots \times F_k.$$

Введем следующие обозначения. Пусть для любого целого i, такого, что $1 \leqslant i \leqslant k$,

$$p_i\colon F \to F_i$$

есть отображение, проектирующее все произведение на его i-ый множитель, и пусть

$$u_i\colon F_i \to F$$

есть инъективное отображение, заданное с помощью формулы

$$u_i(x_i) = (0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$$

[0 стоит всюду, кроме i-го места]. Легко видеть, что непрерывные линейные отображения p_i и u_i удовлетворяют следующим соотношениям:

$$p_i \circ u_i = 1_{F_i} \quad \text{(тождественное отображение } F_i\text{)},$$

$$\sum_{i=1}^{k} u_i \circ p_i = 1_F \quad \text{(тождественное отображение } F\text{)}. \qquad (2.5.1$$

Предложение 2.5.1. *Пусть $f\colon U \to F$ — непрерывное отображение (где U — открытое множество в банаховом пространстве E). Для дифференцируемости отображения f в точке $a \in U$ необходимо и достаточно, чтобы для любого i, где $1 \leqslant i \leqslant k$, функция $f_i = p_i \circ f\colon U \to F_i$ была дифференцируемой в точке a. Если отображение f дифференцируемо, то*

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ f_i'(a). \qquad (2.5.2)$$

Доказательство нетрудно. Линейные отображения p_i и u_i дифференцируемы. Если отображение f дифференцируемо, то сложное отображение $p_i \circ f$ дифференцируемо (теорема 2.2.1) и

$$f_i'(a) = p_i \circ f'(a) \in \mathscr{L}(E;\ F_i).$$

Обратно, если отображения f_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, дифференцируемы в точке a, то в силу второго из соотношений (2.5.1)

$$\sum_{i=1}^{k} u_i \circ p_i \circ f = f,$$

т. е. $f = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ f_i$. Следовательно (см. теорему 2.2.1 и предложение 2.3.1), отображение f дифференцируемо в точке a и

$$f'(a) = \sum_{i=1}^{k} u_i \circ f_i'(a), \qquad \text{ч. т. д.}$$

З а м е ч а н и е. Отображение $f'\colon U \to \mathscr{L}(E;\ F)$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображения $f_i'\colon U \to \mathscr{L}(E;\ F_i)$ непрерывны для всех i.

П р и м е р. Применим предыдущее предложение к случаю, когда $F = \mathbb{R}^k$ (соответственно $\mathbb{C}^k$). Положим

$$F_1 = \ldots = F_k = \mathbb{R} \quad (\text{соответственно } \mathbb{C}).$$

Тогда задание отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^k$ эквивалентно заданию k числовых функций $f_i\colon U \to \mathbb{R}$ (а именно, $f_i = p_i \circ f$). Для дифференцируемости отображения f необходимо и достаточно, чтобы все f_i были дифференцируемыми. Тогда производная $f'(a)$ есть линейное отображение $E \to \mathbb{R}^k$ с компонентами $f_1'(a), \ldots, f_k'(a)$.

П р и м е р. Рассмотрим так же, как в п. 2.4, билинейное непрерывное отображение $f\colon E_1 \times E_2 \to F$. Пусть $u\colon U \to E_1$ и $v\colon U \to E_2$ — два непрерывных отображения. С помощью отображения f определим функцию $w\colon U \to F$ по формуле

$$w(x) = f(u(x), v(x)). \tag{2.5.3}$$

Предложение 2.5.2. *Пусть функции u и v дифференцируемы в точке $a \in U$. Тогда функция w дифференцируема в этой точке и ее производная $w'(x)$ определяется равенством*

$$w'(a)\cdot h = f(u'(a)\cdot h, v(a)) + f(u(a), v'(a)\cdot h) \ \text{для}\ h \in E. \tag{2.5.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу предложения 2.5.1 отображение $x \to (u(x), v(x))$ множества U в $E_1 \times E_2$ дифференцируемо в точке a и его производная есть линейное отображение

$$h \to (u'(a)\cdot h, v'(a)\cdot h).$$

С другой стороны, отображение $f\colon E_1 \times E_2 \to F$ дифференцируемо в любой точке пространства $E_1 \times E_2$, так как оно билинейно и непрерывно (теорема 2.4.3). Отображение w, определяемое формулой (2.5.3), представляет собой композицию следующих отображений:

$$U \xrightarrow{(u,\, v)} E_1 \times E_2 \xrightarrow{f} F.$$

Следовательно (теорема 2.2.1), оно дифференцируемо в точке a и его производная равна композиции производных отображений.

Выпишем формулу для указанной производной: для этого нужно в соотношении (2.4.2) заменить a_1 на $u(a)$, a_2 на $v(a)$, h_1 на $u'(a)\cdot h$, h_2 на $v'(a)\cdot h$. Тогда мы получим в точности правую часть равенства (2.5.4).

Частный случай. Предположим, что $E = \mathbb{R}$, т. е. что u и v суть функции *числового* аргумента x. Тогда, как известно, $u'(a)\cdot h$ равно $h\cdot u'(a)$ (произведение $u'(a) \in E_1$ на число h), $v'(a)\cdot h$ равно $h\cdot v'(a)$ и $w'(a)\cdot h$ равно $h\cdot w'(a)$. Соотношение (2.5.4) при $h = 1$ дает

$$w'(a) = f(u'(a), v(a)) + f(u(a), v'(a)). \tag{2.5.5}$$

Соотношение (2.5.5) — это формула для вычисления производной «произведения» двух функций u и v числового аргумента (например, для векторного произведения двух функций со значениями в $\mathbb{R}^3$, для скалярного произведения двух функций со значениями в $\mathbb{R}^n$). Применим эту формулу к случаю, когда пространство $E_1 = E_2 = A$ является *банаховой алгеброй* (см. п. 1.7), а отображение $f: A \times A \to A$ сводится к умножению в этой алгебре. Тогда соотношение (2.5.5) запишется следующим образом:

$$(uv)'(a) = u'(a)\, v(a) + v'(a)\, u'(a).$$

В случае, когда алгебра A — числовое поле, мы получаем обычную формулу для производной произведения двух числовых функций.

2.6. Случай, когда U — открытое множество в произведении банаховых пространств

Предположим теперь, что $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ и U — открытое множество в E. Пусть $f\colon U \to F$ — линейное отображение. Для любого $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ рассмотрим инъективное отображение $\lambda_i\colon E_i \to E$, задаваемое формулой

$$\lambda_i(x_i) = (a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Тогда сложное отображение $f \circ \lambda_i$ будет определено на открытом множестве $(\lambda_i)^{-1}(U) \subset E_i$, содержащем $a_i \in E_i$. Такое отображение называется i-м частным отображением в точке a.

Определение. Производная частного отображения в точке a обозначается через $f'_{x_i}(a)$, или $\partial f/\partial x_i(a)$, или $f'_{x_i}(a_1, \ldots, a_n)$, или

$\partial f/\partial x_i\ (a_1, \ldots, a_n)$. Такая производная называется *частной производной*; она является элементом пространства $\mathscr{L}\ (E_i;\ F)$.

Предложение 2.6.1. *Если отображение f дифференцируемо в точке a, то для любого целого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ частное отображение $f \circ \lambda_i$ дифференцируемо в точке a_i. Кроме того, имеет место соотношение*

$$f'(a)\cdot(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}(a)\cdot h_i, \quad \text{где} \quad h_1 \in E_1, \ldots, h_n \in E_n. \quad (2.6.1)$$

Доказательство. Обозначим через $u_i\colon E_i \to E$ инъективное каноническое отображение

$$u_i\ (x_i) = (0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0).$$

Отображение u_i линейно и непрерывно. Имеем

$$\lambda_i\ (x_i) = a + u_i\ (x_i - a_i), \quad \lambda_i\ (a) = a, \quad (2.6.2)$$

откуда

$$\lambda'_i\ (x_i) = u_i \quad \text{для любого} \quad x_i \in E_i. \quad (2.6.3)$$

Если отображение f дифференцируемо в точке a, то $f \circ \lambda_i$ дифференцируемо в точке a_i (теорема 2.2.1) и $(f \circ \lambda_i)' = f'\ (a) \circ u_i$. Таким образом, производная $f'_{x_i}\ (a)$ существует и есть не что иное, как $f'(a) \circ u_i$. Тогда равенство (2.6.1) получается из равенства

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \circ p_i = 1_E,$$

(см. 2.5.1). Отсюда вытекает другая форма записи формулы (2.6.1):

$$\sum_{i=1}^{n} (f'(a) \circ u_i) \circ p_i = f'(a). \quad (2.6.4)$$

Замечание. В отличие от предложения 2.5.1, в предложении 2.6.1 не утверждается, что из существования частных производных $f'_{x_i}(a)$ следует существование производной $f'(a)$. Мы еще вернемся к этому вопросу в § 3.

Предположим теперь, что отображение f дифференцируемо во всех точках множества U, и пусть

$$f'\colon U \to \mathscr{L}\ (E;\ F)$$

есть производное отображение. Тогда отображение «частная производная»

$$f'\colon U \to \mathscr{L}\ (E_i;\ F)$$

представляет собой композицию отображения f' и линейного отображения

$$\mathscr{L}\ (E;\ F) \to \mathscr{L}\ (E_i;\ F) \quad (2.6.5)$$

Оно ставит в соответствие каждому линейному непрерывному отображению φ: $E \to F$ отображение $\varphi \circ u_i$: $E_i \to F$, что вытекает из соотношения

$$f'_{x_i}(a) = f'(a) \circ u_i. \tag{2.6.6}$$

Линейное отображение (2.6.5) непрерывно, так как его норма $\leqslant 1$. Отсюда следует, что если производное отображение f' непрерывно, то и отображения f'_{x_i} непрерывны. Обратное утверждение также справедливо, поскольку из соотношения (2.6.4) вытекает, что отображение f' равно композиции сложных отображений

$$U \xrightarrow{f'_{x_i}} \mathscr{L}(E_i;\ F) \to \mathscr{L}(E;\ F),$$

причем при линейном отображении $\mathscr{L}_i\ (E_i;\ F) \to \mathscr{L}\ (E;\ F)$ элементу $\varphi_i \in \mathscr{L}\ (E_i;\ F)$ ставится в соответствие отображение $\varphi_i \circ p_i \in \mathscr{L}\ (E;\ F)$.

Итак, имеет место

Предложение 2.6.2. *Если отображение f дифференцируемо в любой точке множества U, то необходимым и достаточным условием принадлежности f к' классу C^1 является непрерывность производных $f'_{x_i} : U \to \mathscr{L}(E_i;\ F)$.*

2.7. Объединение случаев, изученных в п. 2.5. и 2.6

Предположим, что $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ и $F = F_1 \times \ldots \times F_m$. Пусть U — открытое множество в E и f: $U \to F$ — отображение, дифференцируемое в точке $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$. Тогда отображения $p_i \circ f = f_i$ (где p_i: $F \to F_i$ — проекция F на F_i) дифференцируемы в точке a; следовательно, существуют частные производные $\partial f_i / \partial x_j(a)$ $\quad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$. При этом

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \in \mathscr{L}(E_j;\ E_i)$$

и

$$f'(a) = \sum_{i,\ j} u_i \circ \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \circ q_j, \tag{2.7.1}$$

где

$$q_j\colon E \to E_j \text{ — каноническая проекция,}$$

$$u_i\colon F_i \to F \text{ — каноническая инъекция.}$$

Таким образом, линейное отображение $f'(a)$ определяется *матрицей* $(\partial f_i / \partial x_j)(a)$. Эта матрица имеет m строк и n столбцов (i — индекс строк, причем i-я строка соответствует пространству F_i; j — индекс столбцов, причем j-й столбец соответствует пространству E_j).

Рассмотрим теперь банахово пространство $G = G_1 \times \ldots \times G_p$ и непрерывное отображение g открытого множества $V \subset G$ в $U \subset E$, дифференцируемое в точке $b \in V$, причем $g(b) = a$. Если мы обозначим через h сложное отображение $f \circ g$: $V \to F$, то получим, что матрица $[(\partial h_i/\partial y_k)(b)]$ (где $y_k \in G_k$, $1 \leqslant k \leqslant p$) будет равна произведению матрицы $(\partial g_j/\partial y_k)(b)$ на матрицу $(\partial f_i/\partial x_j)(a)$. Иными словами,

$$\frac{\partial h_i}{\partial y_k}(b) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \circ \frac{\partial g_j}{\partial y_k}(b). \tag{2.7.2}$$

Это непосредственно вытекает из теоремы о дифференцировании сложной функции:

$$h'(b) = f'(a) \circ g'(b).$$

Применим предыдущий результат к случаю, когда $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^m$ $(E_1 = \ldots = E_n = \mathbb{R},\quad F_1 = \ldots = F_m = \mathbb{R})$. Тогда $(\partial f_i/\partial x_j)(a) \in \mathbb{R}$. Если кроме того, $G = \mathbb{R}^p$ $(G_1 = \ldots = G_p = \mathbb{R})$, то все производные $(\partial g_j/\partial y_k)(b)$ будут числами, в правой части равенства (2.7.2) операция $\circ$ сведется к обычному умножению, а равенство (2.7.2) — к классической формуле для произведения двух матриц с числовыми элементами.

2.8. Заключительное замечание: сравнение $\mathbb{R}$-дифференцируемости и $\mathbb{C}$-дифференцируемости

Как уже отмечалось, предыдущая теория в равной мере применима как к *действительным*, так и к *комплексным* банаховым пространствам. Сравним эти два случая.

Пусть E и F — два банаховых пространства над полем $\mathbb{C}$. Мы можем считать их банаховыми пространствами над полем $\mathbb{R}$: для этого достаточно ограничиться рассмотрением произведений векторов на *действительные* числа. Например, $\mathbb{C}$ является векторным пространством размерности 1 над полем $\mathbb{C}$ и векторным пространством размерности 2 над полем $\mathbb{R}$.

Пусть E и F — банаховы пространства над $\mathbb{C}$, U — открытое множество в E, f: $U \to F$ — непрерывное отображение и точка $a \in U$. Рассмотрим две возможности для отображения f:

(i) f дифференцируемо в точке a;

(ii) f дифференцируемо в точке a, если считать E и F банаховыми пространствами над полем $\mathbb{R}$.

В первом случае производная $f'(a)$ — это линейное непрерывное отображение $E \to F$, где слово «линейное» означает $\mathbb{C}$-линейность. Обозначим через $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E;\ F)$ векторное (нормированное и полное) пространство $\mathbb{C}$-линейных непрерывных отображений пространства E в F. Во втором случае производная $f'(a)$ представляет собой $\mathbb{R}$-линейное непрерывное отображение $E \to F$. Обозначим через $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E;\ F)$

банахово пространство $\mathbb{R}$-линейных непрерывных отображений E в F.

Всякое $\mathbb{C}$-линейное отображение $\mathbb{R}$-линейно. Поэтому $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E;\ F) \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E;\ F)$. Поскольку банахово пространство $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E,\ F)$ *полно*, то оно является *замкнутым* подпространством пространства $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E;\ F)$.

Из предположения (i) вытекает, что существует такое единственное отображение $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E;\ F)$, что $\| f(x) - f(a) - g(x-a) \| = o(\| x - a \|)$. Из предположения (ii) вытекает, что существует такое единственное отображение $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E;\ F)$, что

$$\| f(x) - f(a) - g(x-a) \| = o(\| x - a \|).$$

Ясно, что из выполнения условия (i) вытекает выполнение условия (ii): *если отображение f $\mathbb{C}$-дифференцируемо в точке a, то f $\mathbb{R}$-дифференцируемо в точке a и его производная $f'(a)$ в действительном случае совпадает с производной в комплексном случае.*

Обратно, предположим, что отображение f является $\mathbb{R}$-дифференцируемым в точке a, и пусть $f'(a) \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E;\ F)$ — его производная. *Для $\mathbb{C}$-дифференцируемости отображения f в точке a необходимо и достаточно, чтобы производная $f'(a)$ принадлежала векторному подпространству $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E;\ F)$ пространства $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E;\ F)$.*

Теория $\mathbb{C}$-дифференцируемых функций излагается в другой части курса «Математика II», в которой изучаются $\mathbb{C}$-дифференцируемые функции на открытых подмножествах пространства $\mathbb{C}$. Такие функции называются *голоморфными*.

§ 3. ТЕОРЕМА О КОНЕЧНЫХ ПРИРАЩЕНИЯХ

3.1. Формулировка основной теоремы

Рассмотрим точки $a,\ b \in \mathbb{R}$, причем $a < b$. Обозначим через $[a,\ b]$ замкнутый отрезок, который они ограничивают.

Теорема 3.1.1. *Пусть даны непрерывные линейные отображения*

$$f\colon [a,\ b] \to F, \quad g\colon [a,\ b] \to \mathbb{R},$$

где F — банахово пространство. Предположим, что отображения f и g дифференцируемы в любой точке открытого интервала $(a,\ b)$ и

$$\| f'(x) \| \leqslant g'(x) \ \text{для}\ a < x < b. \tag{3.1.1}$$

Тогда

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant g(b) - g(a). \tag{3.1.2}$$

Мы докажем более сильную теорему. Прежде чем ее сформулировать, дадим

Определение. Отображение $f\colon [a, b] \to F$ имеет *правую производную* в точке $x \in [a, b)$, если существует

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)).$$

Этот предел обозначается $f'_{\text{п}}(x)$ и называется *правой производной* отображения f в точке x. Заметим, что $f'_{\text{п}} \in F$. Аналогично мы определим, если она существует, *левую производную* функцию f в точке $x \in (a, b]$:

$$f'_{\text{л}}(x) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{1}{h}(f(x+h)-f(x)).$$

Функция f имеет производную $f'(x)$ в точке $x \in (a, b)$ тогда и только тогда, когда существуют и равны $f'_{\text{п}}(x)$ и $f'_{\text{л}}(x)$. Это очевидно.

Теорема 3.1.2. *Пусть даны непрерывные линейные отображения*

$$f\colon [a, b] \to F, \quad g\colon [a, b] \to \mathbb{R},$$

где F — банахово пространство. Предположим, что они имеют правые производные $f'_{\text{п}}(x)$ и $g'_{\text{п}}(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$ и

$$\|f'_{\text{п}}(x)\| \leqslant g'_{\text{п}}(x) \quad \text{для } a<x<b. \tag{3.1.1)$_{\text{п}}$ $$

Тогда

$$\|f(b)-f(a)\| \leqslant g(b)-g(a).$$

Таким образом, мы *ослабили предположения* теоремы 3.1.1, а утверждение осталось прежним. В этом смысле теорема 3.1.2 сильнее, чем теорема 3.1.1.

Доказательство теоремы 3.1.2. Зададимся числом $\varepsilon > 0$. Покажем, что

$$\|f(x)-f(a)\| \leqslant g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon \tag{3.1.3}$$

для любой точки $x \in [a, b]$. Доказав это неравенство, мы применим его для точки $x = b$ и затем устремим ε к 0. В пределе мы получим неравенство (3.1.2), которое нужно было доказать.

Обозначим через U множество точек $x \in [a, b]$, для которых неравенство (3.1.3) не имеет места, т. е. для которых

$$\|f(x)-f(a)\| > g(x)-g(a)+\varepsilon(x-a)+\varepsilon. \tag{3.1.4}$$

Мы хотим показать, что множество U *пусто*. Докажем сначала, что оно *открыто*. Действительно, поскольку функции f и g по предположению *непрерывны*, то каждый из двух членов неравенства (3.1.4) является непрерывной функцией x. Таким образом, мы имеем неравенство вида $\varphi(x) > 0$, где φ — непрерывная числовая функция. Как известно, точки x, удовлетворяющие подобному неравенству, образуют *открытое* множество. Следовательно, множество U открыто.

Докажем теперь (от противного), что множество U пусто. Если бы множество U было непусто, то оно имело бы *нижнюю грань* c и тогда элемент c удовлетворял бы трем условиям:

(i) $c > a$; в самом деле, поскольку обе части неравенства (3.1.3) непрерывны, оно справедливо для любого x, достаточно близкого к a.

(ii) $c \notin U$; в самом деле, множество U открыто. Если бы элемент c принадлежал множеству U, существовали бы такие элементы x, что $a < x < c$ и $x \in U$. Тогда бы c не было нижней гранью множества U;

(iii) $c < b$; в противном случае множество U состояло бы из одной точки b и не было открытым.

Так как $a < c < b$, то в силу предположения нашей теоремы

$$\| f'_{\text{п}}(c) \| \leqslant g'_{\text{п}}(c). \tag{3.1.5}$$

По определению правой производной существует интервал $c \leqslant x \leqslant \leqslant c + \eta$ (где $\eta > 0$), в котором

$$\| f'_{\text{п}}(c) \| \geqslant \left\| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right\| - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$g'_{\text{п}}(c) \leqslant \frac{g(x) - g(c)}{x - c} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из этих неравенств и (3.1.5) следует, что

$$\| f(x) - f(c) \| \leqslant g(x) - g(c) + \varepsilon (x - c). \tag{3.1.6}$$

Как мы уже заметили, $c \notin U$; иначе говоря,

$$\| f(c) - f(a) \| \leqslant g(c) - g(a) + \varepsilon (c - a). \tag{3.1.7}$$

Из неравенств (3.1.6) и (3.1.7) вытекает, что

$$\| f(x) - f(a) \| \leqslant \| f(x) - f(c) \| + \| f(c) - f(a) \| \leqslant$$
$$\leqslant g(x) - g(a) + \varepsilon (x - a).$$

Это неравенство справедливо для $c \leqslant x \leqslant c + \eta$. Следовательно, (3.1.3) имеет место при $c \leqslant x \leqslant c + \eta$. Но тогда неравенство (3.1.3) имеет место во всех точках $x \leqslant c + \eta$ и потому $\inf U \geqslant c + \eta$. Мы пришли к противоречию, ч. т. д.

З а м е ч а н и е. Заменяя правые производные на левые, мы приходим к аналогичной теореме. Она получается из теоремы 3.1.2 заменой x на $-x$.

Сформулируем теорему, более сильную, чем теорема 3.1.2.

Теорема 3.1.3. *Пусть f: $[a, b] \to F$ и g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Предположим, что во всех точках $x \in [a, b]$, за возможным исключением некоторого счетного множества точек D, существуют правые производные $f'_{\text{п}}(x)$ и $g'_{\text{п}}(x)$, удовлетворяющие* *неравенству* $(3.1.1)_{\text{п}}$. *Тогда*

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant g(b) - g(a). \tag{3.1.2}$$

Указание к доказательству. Образуем последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, членами которой являются точки множества D. Для каждой точки $x \in [a, b]$ обозначим через N_x множество таких целых чисел $n > 0$, что $x_n < x$. Тогда вместо того, чтобы доказывать неравенство (3.1.3), как это было сделано в теореме 3.1.2, мы докажем неравенство

$$\| f(x) - f(a) \| \leqslant g(x) - g(a) + \varepsilon \left(\sum_{n \in N_x} 2^{-n} \right) + \varepsilon (x - a) + \varepsilon.$$

Затем нужно положить $x = b$ и устремить ε к 0.

3.2. Частные случаи основной теоремы

Предположим, что пространство $F = \{0\}$. Тогда условие теоремы 3.1.2 запишется так: «$g'_{\text{п}}(x) \geqslant 0$», а утверждение так: «$g(b) \geqslant g(a)$». Применяя этот вывод к двум произвольным точкам $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ отрезка $[a, b]$, мы получим, что $g(x_2) \geqslant g(x_1)$, если $x_1 < x_2$.

Следствие 3.2.1. *Если отображение g: $[a, b] \to \mathbb{R}$ непрерывно и имеет правую производную $g'_{\text{п}}(x) \geqslant 0$ для любого значения $x \in (a, b)$, то отображение g возрастает (в широком смысле) на отрезке $[a, b]$.*

Обратное утверждение очевидно: если возрастающая функция обладает правой производной, то эта производная $\geqslant 0$.

Применим теперь теорему 3.1.2 в случае, когда функция $g(x)$ имеет вид $g(x) = kx$ (здесь k — неотрицательное число). Тогда неравенство $(3.1.1)_{\text{п}}$ превращается в неравенство $\| f'_{\text{п}}(x) \| \leqslant k$. Отсюда получаем

Следствие 3.2.2. *Пусть f: $[a, b] \to F$ — непрерывное отображение (где F — банахово пространство). Предположим, что f имеет правую производную $f'_{\text{п}}(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$ и что $\| f'_{\text{п}}(x) \| \leqslant k$ (k — неотрицательное число). Тогда*

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant k(b - a)$$

и, более общо,

$$\| f(x_2) - f(x_1) \| \leqslant k \, | x_2 - x_1 |, \tag{3.2.1}$$

если $x_1, x_2 \in [a, b]$.

3.3. Теорема о конечных приращениях для функций, определенных на открытых множествах банахова пространства

До сих пор мы рассматривали отображения f, определенные на множествах пространства $\mathbb{R}$. Теперь пусть U — открытое множество в банаховом пространстве E и f — непрерывное отображение $U \to F$, где F — банахово пространство. Напомним, что если a и b — две точки пространства E, то множество точек $x \in E$ вида

$$x = (1 - t)\, a + tb, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1,$$

мы называем *отрезком* с концами a и b.

Предложение 3.3.1. *Если отображение f дифференцируемо на множестве U и отрезок с концами a и b содержится в U, то*

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant \| b - a \| \cdot \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| f'((1-t)\, a + tb) \|. \qquad (3.3.1)$$

Доказательство. Пусть $h(t) = f((1 - t)\, a + tb)$. Очевидно, что $h(t)$ — дифференцируемая функция переменного t. Ее производная равна

$$h'(t) = f'((1 - t)\, a + tb) \cdot (b - a)$$

(см. п. 2.2, теорема о производной сложной функции). Отсюда

$$\| h'(t) \| \leqslant \| f'((1 - t)\, a + tb) \| \cdot \| b - a \|.$$

Используя следствие 3.2.2 (где f заменена на h), получаем оценку (3.3.1), ч. т. д.

Предположим теперь, что открытое множество U *выпукло*, т. е. для любой пары точек a, $b \in U$ отрезок с концами a и b содержится в U. Из предложения 3.3.1 легко получается

Теорема 3.3.2. *Пусть U — открытое выпуклое множество в банаховом пространстве E и f: $U \to F$ — дифференцируемое отображение в банахово пространство F. Предположим, что*

$$\| f'(x) \| \leqslant k \text{ для любых } x \in U.$$

Тогда, каковы бы ни были элементы $x_1 \in U$, $x_2 \in U$,

$$\| f(x_2) - f(x_1) \| \leqslant k \, \| x_2 - x_1 \|. \qquad (3.3.2)$$

Неравенство (3.3.2) для функции f называется *k-условием Липшица*. (Это определение можно распространить на случай двух метрических пространств и отображения одного из них в другое.)

Следствие 3.3.3. *Положим $k = 0$ в условии теоремы* 3.3.2, *т. е. $f'(x) = 0$ для любого $x \in U$. Тогда отображение f постоянно на U.*

Мы увидим далее, что это следствие в действительности справедливо не только для выпуклого множества, но и в более общем случае, когда множество U *связно*.

Напомним, что топологическое пространство X называем *связным*, если каждый раз, когда X представлено в виде объединения двух *непересекающихся открытых* множеств, одно из них пусто (а другое — это само пространство X).

Теорема 3.3.4. *Пусть U — открытое связное множество в банаховом пространстве E, и пусть f: $U \to F$ — дифференцируемое отображение в банахово пространство F. Если производная $f'(x)$ равна нулю при любом $x \in U$, то отображение f постоянно.*

Доказательство. Пусть a — какая-нибудь точка множества U. Множество U содержит открытый шар B с центром в точке a. Так как шар B — выпуклое множество, то отображение f в силу следствия 3.3.3 постоянно на нем. Следовательно, f *локально постоянна* на множестве U [говорят, что функция, определенная на топологическом пространстве, локально постоянна, если каждая точка обладает окрестностью, в которой функция постоянна]. Мы еще не использовали предположение о связности множества U. Для того чтобы применить его, докажем следующую лемму:

Лемма. *Пусть f: $X \to Y$ — непрерывное отображение непустого топологического пространства X в отделимое топологическое пространство Y. Если f локально постоянна, а пространство X связно, то отображение f постоянно на X.*

Теорема 3.3.4, очевидно, следует из этой леммы. Докажем лемму. Пусть $b \in Y$. Тогда прообраз $f^{-1}(b)$ *замкнут* в X, так как отображение f непрерывно и множество $\{b\} \subset Y$ замкнуто (топология в пространстве Y отделимая). С другой стороны, множество $f^{-1}(b)$ *открыто*, так как отображение f локально постоянно. Значит, множество $f^{-1}(b)$ одновременно открыто и замкнуто. Следовательно, пространство X является объединением открытого множества $f^{-1}(b)$ и его дополнения, которое также открыто. Поскольку пространство X связно, то, по определению, одно из этих множеств есть само X. Возьмем точку $a \in X$, и пусть $b = f(a)$. Тогда $f^{-1}(b)$ непусто и потому $f^{-1}(b) = X$. Итак доказано, что $f(x) = b$ для любого $x \in X$, ч. т. д.

Заметим, что предположения теоремы 3.3.4 являются *более слабыми*, чем предположения следствия 3.3.3. Действительно, всякое открытое выпуклое множество U связно. Этот факт вытекает из следующего предложения, являющегося критерием связности множества U.

Предложение 3.3.5. *Пусть U — открытое множество в нормированном векторном пространстве (над полем $\mathbb{R}$). Следующие условия эквивалентны:*

(a) *множество U связно;*

(b) *две произвольные точки множества U могут быть соединены путем, целиком содержащимся в U;*

(c) *две произвольные точки множества U могут быть соединены ломаной линией, целиком содержащейся в U.*

Прежде чем перейти к доказательству, уточним термины, использованные в формулировке условий (b) и (c).

Определение. Мы будем называть *путем* в топологическом пространстве X непрерывное отображение φ отрезка $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ в X. Точка $\varphi(0)$ называется *началом*, а точка $\varphi(1)$ — *концом* пути. Говорят, что две точки a и $b \in X$ могут быть соединены путем, если существует такой путь φ, что $\varphi(0) = a$ и $\varphi(1) = b$.

Определение. *Ломаной линией* в нормированном векторном пространстве E над полем $\mathbb{R}$ мы будем называть путь φ: $[0, 1] \to E$, для которого существует конечное множество таких точек отрезка $[0, 1]$:

$$t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = 1,$$

что в каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ $(0 \leqslant i \leqslant n-1)$ функция φ представляет собой сумму *линейного* и постоянного отображений (образ отрезка $[t_i, t_{i+1}]$ при отображении φ является отрезком прямой в векторном пространстве E).

Доказательство предложения 3.3.5. Ясно, что (c) $\Rightarrow$ (b). Докажем последовательно, что (b) $\Rightarrow$ (a) и (a) $\Rightarrow$ (c). Тем самым будет доказана эквивалентность условий (a), (b) и (c).

Докажем, что (b) $\Rightarrow$ (a) (это доказательство проходит не только для открытого множества в нормированном векторном пространстве, но и в произвольном топологическом пространстве). Пусть верно (b); будем рассуждать от противного. Предположим, что существуют два таких непересекающихся открытых непустых множества U_0 и U_1, что U является их объединением. Возьмем точку $x_0 \in U_0$ и точку $x_1 \in U_1$. Так как условие (b) предполагается выполненным, то существует такой путь φ: $[0, 1] \to U$, что $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$. Отрезок $[0, 1]$ является при этом объединением двух непустых открытых непересекающихся множеств $\varphi^{-1}(U_0)$ и $\varphi^{-1}(U_1)$. Но тогда он является несвязным множеством. Мы получили противоречие, так как отрезок числовой прямой $\mathbb{R}$ связен [1]).

Докажем, что (a) $\Rightarrow$ (c). Можно предположить, что множество U непусто (в противном случае условия (a), (b) и (c), очевидно, выполнены). Зафиксируем точку $x_0 \in U$, и пусть V — множество точек из U, которые можно соединить с точкой x_0 ломаной линией, содержащейся в U. Покажем сейчас, что множество V одновременно открыто и замкнуто в U. Отсюда будет следовать, что если множество U связно (предположение (a)), то $V = U$ так как V непусто. Следовательно, (a) $\Rightarrow$ (b).

Докажем, что множество V *открыто* в U. Пусть точка $a \in V$ — конец ломаной линии I (содержащейся в U), началом которой служит точка x_0 (см. рис. 1.). Поскольку множество U открыто, существует шар $B(a, r)$ с центром a и радиусом $r > 0$, содержащийся в U.

[1]) См. Н. Бурбаки **«Общая топология», Физматгиз,** М., 1968.— *Прим. перев.*

Любая точка $x \in B(a, r)$ может быть соединена с точкой a отрезком. Объединение этого отрезка и ломаной линии I можно рассматривать как новую ломаную линию с началом в точке x_0 и концом в $x \in B(a, r)$, целиком содержащуюся в U. [При этом нам придется изменить параметризацию на ломаной линии I, считая например, что точкам отрезка I соответствуют возрастающие значения t от 0 до $^1/_2$, а точкам отрезка $[a, x]$ — возрастающие значения t от $^1/_2$ до 1.] Таким образом, точка a обладает окрестностью, все точки x которой могут быть соединены с точкой x_0 ломаной линией. Следовательно, множество V *открыто*.

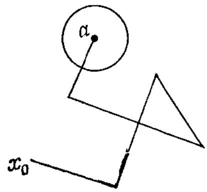

Рис. 1.

Докажем, что множество V *замкнуто* в U. Пусть $a \in U$ — предельная точка множества V; покажем, что $a \in V$. Для некоторого $r > 0$ шар $B(a, r)$ содержится в U. Поскольку a — предельная точка множества V, то найдется точка $b \in B(a, r) \cap V$. Ее можно соединить с точкой x_0 ломаной линией, содержащейся в U, так как $b \in V$. Точка a в свою очередь может быть соединена с b отрезком, содержащемся в U. Следовательно, существует ломаная линия с началом в точке x_0 и концом в точке a, т. е. $a \in V$, ч. т. д.

Итак, предложение 3.3.5 доказано.

З а м е ч а н и е. В топологическом пространстве X *связная компонента* точки $x_0 \in X$ определяется как наибольшее связное подмножество, содержащее точку x_0 (можно доказать, что среди связных подмножеств, к которым принадлежит точка x_0, существует такое, которое содержит в себе все остальные). Связные компоненты пространства X образуют *разбиение* X. Как следует из предложения 3.3.5, для открытого множества U в нормированном векторном пространстве связная компонента точки $x_0 \in U$ — это множество V таких точек, которые могут быть соединены с точкой x_0 ломаной линией, содержащейся в U. В последней части доказательства предложения 3.3.5 мы показали, что множество V открыто. Значит, если U — открытое множество нормированного векторного пространства, то его *связные компоненты являются открытыми множествами*.

3.4. Еще одна теорема о конечных приращениях

Пусть E — нормированное векторное пространство. Как известно, *длина* отрезка с началом в точке a и концом в точке b определяется формулой

$$d(a, b) = \| b - a \|.$$

Длиной ломаной линии называется сумма длин составляющих ее отрезков (эта длина больше или равна расстоянию $\| b - a \|$ от начала a до конца b).

Определение. Пусть U — *связное* открытое множество в банаховом пространстве E. Для точек $a, b \in U$ обозначим через $d_U(a, b)$ нижнюю грань длин ломаных линий с началом в a и концом в b, *содержащихся в* U. Это определение имеет смысл, поскольку в силу предложения 3.3.5 множество таких ломаных линий непусто. Нижняя грань $d_U(a, b)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$d_U(a, b) = d_U(b, a),$$

$$d_U(a, c) \leqslant d_U(a, b) + d_U(b, c)$$

(читателю рекомендуется проверить эти соотношения в качестве упражнения). Другими словами, $d_U(a, b)$ определяет *расстояние* в топологическом пространстве U.

Упражнение. Показать, что это расстояние задает на U ту же самую топологию, что и $\| a - b \|$. Для этого надо только заметить, что если точка a задана, то $d_U(a, b) = \| a - b \|$, как только точка b достаточно близка к a.

Предложение 3.4.1. *Пусть U — открытое множество в банаховом пространстве E, и пусть f: $U \to F$ — дифференцируемое отображение в банахово пространство F. Если*

$$\| f'(x) \| \leqslant k \text{ для любого } x \in U,$$

то каковы бы ни были x_1 и $x_2 \in U$,

$$\| f(x_2) - f(x_1) \| \leqslant k \cdot d_U(x_1, x_2).$$

(Сравните эту формулировку с условием теоремы 3.3.2.) Доказательство предложения 3.4.1 мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

3.5. Упражнения

1) (легкое). Пусть U — открытое связное множество в банаховом пространстве E, и пусть f: $U \to F$ — дифференцируемое отображение в банахово пространство F. Показать, что если отображение f': $U \to \mathcal{L}(E; F)$ постоянно, то f есть сумма постоянного отображения и сужения на U (непрерывного) линейного отображения.

2) Пусть f — непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ в банахово пространство F. Положим $g(x) = \| f(x) \|$. Показать, что если отображение f дифференцируемо справа в точке $x \in [a, b)$, то g также дифференцируемо справа в этой точке и имеет место неравенство

$$| g'_{\text{п}}(x) | \leqslant \| f'_{\text{п}}(x) \|.$$

(Используйте выпуклость нормы и упражнение 6 в конце этой главы.) Показать на простом примере, что из дифференцируемости отображения f не вытекает дифференцируемость отображения g.

3) Пусть f — непрерывное отображение отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство F, имеющее правую производную в любой точке $x \in (a, b)$. Пусть C — такое замкнутое выпуклое подмножество в пространстве F, что $f'_п(x) \in C$ для любого $x \in (a, b)$. Показать, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \in C.$$

[Доказательство является дословным повторением доказательства теоремы 3.1.2. Показать, что для $a < u < v < b$ и произвольного $\varepsilon > 0$ множество

$$U_\varepsilon = \left\{x \in [u, v];\ \frac{f(x)-f(u)}{x-u} \notin C_\varepsilon\right\}$$

пусто. Здесь через C_ε обозначено множество таких элементов $y \in F$, для которых $d(y, C) \leqslant \varepsilon$; надо установить, что множество C_ε замкнуто и выпукло.]

3.6. Первое приложение теоремы о конечных приращениях: сходимость последовательности дифференцируемых функций

Теорема 3.6.1. *Пусть U — выпуклое открытое множество в банаховом пространстве E, и пусть*

$$f_n\colon U \to F \qquad (F \text{ — банахово пространство})$$

есть последовательность дифференцируемых отображений. Если

(i) *существует такая точка $a \in U$, что последовательность $f_n(a) \in F$ имеет предел;*

(ii) *последовательность отображений $f'_n\colon U \to \mathcal{L}(E; F)$ равномерно сходится на множестве U к отображению $g\colon U \to \mathcal{L}(E; F)$,*

то для любого $x \in U$ последовательность $f_n(x) \in F$ имеет предел (который обозначается через $f(x)$); при этом последовательность $\{f_n\}$ сходится к $f(x)$ равномерно на каждом ограниченном подмножестве множества U. Наконец, предельная функция f дифференцируема и ее производная $f'(x) = g(x)$.

Доказательство. По теореме 3.3.2 (ее можно применить, поскольку мы предположили, что множество U выпукло) имеем

$$\| f_p(x) - f_p(a) - (f_q(x) - f_q(a)) \| \leqslant \| x - a \| \cdot \sup_{y \in U} \| f'_p(y) - f'_q(y) \|. \qquad (3.6.1)$$

В силу предположения (ii) правая часть стремится к 0, когда p и q неограниченно возрастают. Более того, сходимость по x *равномерна*, поскольку норма $\| x - a \|$ остается ограниченной, т. е. x остается в некотором ограниченном подмножестве множества U. Следовательно, и левая часть равенства (3.6.1) стремится к 0, когда $p \to \infty$,

$q \to \infty$. Эта сходимость равномерна по x для любого ограниченного подмножества множества U. Далее, в силу предположения (i) разность $f_p(a) - f_q(a)$ стремится к 0. Значит, норма разности $\| f_p(x) - f_q(x) \|$ стремится к нулю равномерно по x в любой ограниченной части множества U. Пусть f — предельная функция. Каждая точка множества U обладает ограниченной окрестностью, в которой функция f является пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций f_n. Поэтому функция f непрерывна в окрестности каждой точки множества U. Другими словами, функция f *непрерывна* на U. Остается показать, что f дифференцируема и что $f'(x) = g(x)$. Зафиксируем $x_0 \in U$. Достаточно показать, что

$$\| f(x) - f(x_0) - g(x_0)\cdot(x - x_0) \| = o(\| x - x_0 \|). \tag{3.6.2}$$

Очевидно, что имеет место неравенство

$$\begin{aligned} \| f(x) - f(x_0) - g(x_0)\cdot(x - x_0) \| \leqslant \| f(x) - f(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0)) \| + \\ + \| f_n(x) - f_n(x_0) - f'_n(x_0)\cdot(x - x_0) \| + \\ + \| f'_n(x_0)\cdot(x - x_0) - g(x_0)\cdot(x - x_0) \|. \end{aligned} \tag{3.6.3}$$

Зададимся числом $\varepsilon > 0$ и найдем мажоранту для первого из трех членов в правой части (3.6.3). В силу неравенства (3.6.1)

$$\| f_p(x) - f_p(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0)) \| \leqslant \varepsilon \| x - x_0 \|$$

при p и $n \geqslant n_0$ (n_0 — подходящее целое число, зависящее от ε). Следовательно, переходя к пределу при $p \to \infty$, получим

$$\| f(x) - f(x_0) - f_n(x) - f_n(x_0) \| \leqslant \varepsilon \| x - x_0 \| \text{ при } n \geqslant n_0. \tag{3.6.4}$$

С другой стороны, по определению предела

$$\| f'_n(x_0) - g(x_0) \| \leqslant \varepsilon \text{ при } n \geqslant n_0,$$

откуда при $n \geqslant n_0$

$$\| f'_n(x_0)\cdot(x - x_0) - g(x_0)\cdot(x - x_0) \| \leqslant \varepsilon \| x - x_0 \|. \tag{3.6.5}$$

Итак, при $n \geqslant n_0$ как первый, так и третий члены в правой части (3.6.3) меньше, чем $\varepsilon \| x - x_0 \|$. *Зафиксируем теперь* n (например, положим $n = n_0$). Если норма $\| x - x_0 \| \leqslant h$, где h достаточно мало, то

$$\| f_n(x) - f_n(x_0) - f'_n(x_0)\cdot(x - x_0) \| \leqslant \varepsilon \| x - x_0 \|$$

по определению производной $f'_n(x_0)$. Это позволяет найти мажоранту для второго члена в правой части (3.6.3). В результате мы получаем из (3.6.3), что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $h > 0$, что при $\| x - x_0 \| \leqslant h$

$$\| f(x) - f(x_0) - g(x_0)\cdot(x - x_0) \| \leqslant 3\varepsilon \| x - x_0 \|.$$

Этот результат и выражается неравенством (3.6.2).

Замечание. Если $E = \mathbb{R}$, то теорема 3.6.1 распространяется и на *правые производные*.

Можно освободиться от предположения о *выпуклости* множества U в теореме 3.6.1:

Теорема 3.6.2. *Пусть U — связное открытое множество в банаховом пространстве E, и пусть*

$$f_n: U \to F \quad (F \text{ — банахово пространство})$$

есть последовательность дифференцируемых отображений. Если

(i) *существует такая точка $a \in U$, что последовательность $f_n(a) \in U$ имеет предел;*

(ii) *для любого $x_0 \in U$ существует шар с центром в точке x_0, в котором последовательность $\{f'_n\}$ сходится равномерно, то для любого $x \in U$ последовательность $f_n(x) \in F$ имеет предел* (который обозначается $f(x)$); *любая точка множества U обладает окрестностью, в которой последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к f, и, наконец, функция f дифференцируема в U и $f'(x) = g(x)$ для любого $x \in U$.*

Эта теорема является простым следствием теоремы 3.6.1. Детальное доказательство мы оставляем читателю, который должен действовать следующим образом: 1) показать, что множество точек $x \in U$, для которых последовательность $\{f_n(x)\}$ имеет предел, *открыто и замкнуто* в U (используя теорему 3.6.1); 2) показать, что если $x_0 \in U$ и в шаре $B(x_0, r)$ последовательность $\{f'_n\}$ сходится равномерно, то последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно к функции f в шаре $B(x_0, r)$ (надо применить еще раз теорему 3.6.1); 3) показать, что $f'(x) = g(x)$ (с помощью теоремы 3.6.1, применяя ее к подходящему шару, содержащемуся в U).

3.7. Второе приложение теоремы о конечных приращениях: связь между частной дифференцируемостью и дифференцируемость

Пусть $E_1, \ldots, E_n, F$ — банаховы пространства, и пусть $E = E_1 \times \ldots \times E_n$. Пусть U — открытое множество в E и отображение $f: U \to F$ непрерывно. Напомним, что понятие частной производной f'_{x_i} или $\partial f/\partial x_i$ было дано в п. 2.6.

Теорема 3.7.1. *Для того чтобы отображение f принадлежало к классу C^1, необходимо и достаточно, чтобы f обладало частными производными $\partial f/\partial x_i$ и отображения*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathscr{L}(E_i; F)$$

были непрерывны.

В силу предложений 2.6.1 и 2.6.2 это условие необходимо. Остается показать, что оно достаточно. Предположим, что в любой точке $a \in U$ существует частные производные $(\partial f/\partial x_i)(a) \in \mathcal{L}(E_i; F)$ и отображения $\partial f/\partial x_i$: $U \to \mathcal{L}(E_i; F)$ непрерывны. Мы хотим показать, что при этих условиях f принадлежит к классу C^1. Сначала покажем, что для любой точки a производная $f'(a)$ существует (т. е. f дифференцируемо в точке a). Тогда доказательство будет завершено, ибо в силу предложения 2.6.2 отображение f': $U \to \mathcal{L}(E; F)$ будет непрерывно.

В результате нам осталось доказать только следующее.

Предложение 3.7.2. *Если частные производные* $(\partial x/\partial x_i)(x)$ *существуют в любой точке* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$ *и отображения* $\partial f/\partial x_i$: $U \to \mathcal{L}(E_i; F)$ *непрерывны в точке* a, *то отображение* f *дифференцируемо в точке* a.

Доказательство. Мы будем пользоваться теоремой о конечных приращениях. Мы хотим показать, что

$$\left\| f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i) \right\| = o(\|x - a\|).$$

Напомним, что, согласно определению нормы в произведении банаховых пространств,

$$o(\|x - a\|) = o(\|x_1 - a_1\| + \ldots + \|x_n - a_n\|).$$

Имеет место очевидное тождество

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot (x_i - a_i) =$$

$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \cdot (x_1 - a_1) +$$

$$+ f(a_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \cdot (x_2 - a_2) + \ldots$$

$$\ldots + f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) -$$

$$- \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \cdot (x_n - a_n).$$

Нам достаточно показать, что для заданного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что из неравенств

$$\|x_1 - a_1\| \leqslant \eta, \ \ldots, \ \|x_n - a_n\| \leqslant \eta \tag{3.7.1}$$

вытекают неравенства

$$\begin{aligned}
&\left\| f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(x_1 - a_1)\right\| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \varepsilon \| x_1 - a_1 \|, \\
&\left\| f(a_1, x_2, \ldots, x_n) - f(a_1, a_2, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\cdot(x_2 - a_2)\right\| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \varepsilon \| x_2 - a_2 \|, \qquad (3.7.2) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\left\| f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) - f(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\cdot(x_n - a_n)\right\| \leqslant \\
&\qquad\qquad \leqslant \varepsilon \| x_n - a_n \|.
\end{aligned}$$

Покажем, что по заданному числу $\varepsilon > 0$ можно выбрать число $\eta > 0$ таким образом, что из неравенств (3.7.1) будет следовать первое из неравенств (3.7.2). Для остальных неравенств доказательства будут аналогичными; затем из чисел η, полученных для каждого из n неравенств (3.7.2), нужно выбрать наименьшее, и тогда все неравенства (3.7.2) будут выполняться одновременно для этого η.

Рассмотрим левую часть первого из неравенств (3.7.2). Пусть ξ_1 — произвольный элемент пространства E_1, достаточно близкий к a_1. Положим

$$g(\xi_1) = f(\xi_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\cdot(\xi_1 - a_1).$$

Мы хотим оценить сверху норму разности $\| g(x_1) - g(a) \|$. По предположению, отображение g имеет производную

$$g'(\xi_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, \ldots, a_n).$$

Так как производная $(\partial f/\partial x_1)(x)$ является непрерывной функцией x в точке a (по предположению!), то существует такое число $\eta > 0$, что из неравенств (3.7.1) следует неравенство

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right\| \leqslant \varepsilon.$$

Если $\xi_1 = (1-t)a_1 + tx_1$ есть точка отрезка с началом в a_1 и концом в x_1 (в векторном пространстве E_1), то

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2, \ldots, a_n)\right\| \leqslant \varepsilon,$$

поскольку $\| \xi_1 - a_1 \| \leqslant \| x_1 - a_1 \| \leqslant \eta$. На основании предложения 3.3.1 заключаем, что

$$\| g(x_1) - g(a_1) \| \leqslant \varepsilon \| x_1 - a_1 \|.$$

Предложение 3.7.2 доказано.

Замечание. Мы применим предложение 3.7.2 и теорему 3.7.1 в случае, когда $E_1 = \mathbb{R}, \ldots, E_n = \mathbb{R}$. Тогда $E = \mathbb{R}^n$. Следовательно, $\partial f/\partial x_i$ — это отображение $U \to F$.

3.8. Третье приложение теоремы о конечных приращениях: понятие строго дифференцируемой функции

Во всем последующем изложении символ U обозначает открытое множество в банаховом пространстве E, а F — банахово пространство. Мы изучим отображения множества U в пространство F.

Определение. Отображение f: $U \to F$ *строго касается нулевого отображения* в точке $a \in U$, если оно обладает следующими свойствами:

(i) $f(a) = 0$;

(ii) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $r > 0$, что в шаре $\| x - a \| \leqslant r$, отображение f удовлетворяет ε-условию Липшица.

Если эти условия выполнены, то, в частности, для $\| x - a \| \leqslant r$

$$\| f(x) \| = \| f(x) - f(a) \| \leqslant \varepsilon \| x - a \|.$$

Следовательно, отображение f *касается нулевого отображения* в точке a (см. определение, данное в п. 2.1). Итак, из того, что отображение f строго касается нулевого отображения следует, что f касается нулевого отображения, т. е. терминология выбрана достаточно удачно.

Определение. *Отображение* f_1 *строго касается отображения* f_2 в точке $a \in U$, если их разность $f_1 - f_2$ строго касается нулевого отображения. Можно проверить (упражнение!), что при этом мы получаем *отношение эквивалентности* между функциями вида $U \to F$.

Определение. Отображение f: $U \to F$ называется *строго дифференцируемым* в точке $a \in U$, если существует *непрерывное линейное отображение* g: $E \to F$, такое, что отображения

$$x \to f(x) - f(a) \quad \text{и} \quad x \to g(x - a)$$

строго касаются в точке a.

Такие два отображения будут касательными. Значит, отображение f дифференцируемо в точке a, а g равно производной $f'(a)$.

Итак, для того чтобы отображение f было строго дифференцируемым в точке a, необходимо и достаточно, чтобы f было дифференцируемым в точке a и для любого числа $\varepsilon > 0$ существовало такое число $r > 0$, что отображение

$$x \to f(x) - f(a) - f'(a) \cdot (x - a) = g(x)$$

удовлетворяет ε-условию Липшица в шаре $\| x - a \| \leqslant r$.

Поясним подробнее наш вывод: это означает, что

$$\left.\begin{array}{r} f(x)-f(y)=f'(a)\cdot(x-y)+\|x-y\|\cdot\psi(x,y), \\ \text{где } \lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to a}}\|\psi(x,y)\|=0. \end{array}\right\} \qquad (3.8.1)$$

Теорема 3.8.1. *Если отображение f: $U\to F$ дифференцируемо в U и отображение f': $U\to\mathcal{L}(E;\ F)$ непрерывно в точке a, то f строго дифференцируемо в точке a.*

Этот критерий строгой дифференцируемости может быть доказан с помощью теоремы о конечных приращениях. Действительно, положим

$$g(x)=f(x)-f(a)-f'(a)\cdot(x-a).$$

Отображение g дифференцируемо, поэтому

$$g'(x)=f'(x)-f'(a),$$

так как, в силу сделанного предположения $\lim\limits_{x\to a}\|g'(x)\|=0$. Следовательно, для заданного числа $\varepsilon>0$ существует такое число $r>0$, что

$$\|g'(x)\|\leqslant\varepsilon \text{ для } \|x-a\|\leqslant r.$$

Отсюда на основании теоремы о конечных приращениях (в форме теоремы 3.3.2) вытекает, что отображение g удовлетворяет ε-условию Липшица в шаре $\|x-a\|\leqslant r$, ч. т. д.

§ 4. ЛОКАЛЬНОЕ ОБРАЩЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КЛАССА C^1. ТЕОРЕМА О НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЯХ

4.1. Диффеоморфизмы класса C^1

Определение. Пусть E и F — банаховы пространства, V — открытое множество в E и W — открытое множество в F. Отображение f: $V\to W$ называется *диффеоморфизмом класса* C^1 (или C^1-*диффеоморфизмом*, если f является биективным отображением, принадлежит к классу C^1 (как отображение V в F) и если обратное отображение $g=f^{-1}$: $W\to V$ также принадлежит к классу C^1 (как отображение W в E).

Предостережение. Отображение f: $V\to W$ класса C^1 может быть *гомеоморфизмом* и не являться диффеоморфизмом класса C^1. Иначе говоря, обратное отображение $f^{-1}=W\to V$ не обязательно принадлежит к классу C^1. Например, функция действительного переменного x

$$y=x^3=f(x)$$

определяет гомеоморфное отображение $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$. Оно принадлежит к классу C^1, но обратное отображение

$$x = y^{1/3} = g(y)$$

не дифференцируемо в начале координат. Действительно, производная $f'(x)$ равна $3x^2$ и обращается в нуль при $x = 0$. Если бы $g'(0)$ существовала, то тогда бы $g'(0) f'(0) = 1$ (производная сложного отображения), а это невозможно.

Предложение 4.1.1. *Пусть $f\colon V \to W$ — гомеоморфизм класса C^1, где V — открытое множество в банаховом пространстве E, а W — открытое множество в банаховом пространстве F. Для того чтобы отображение f было диффеоморфизмом класса C^1, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in V$ отображение $f'(x)$ принадлежало множеству* $\mathrm{Isom}(E; F)$.

Докажем сначала лемму.

Лемма. *Пусть отображение $f\colon V \to W$ — гомеоморфизм и предположим, кроме того, что оно является дифференцируемым в точке $a \in V$. Для того чтобы отображение $g = f^{-1}$ было дифференцируемым в точке $b = f(a) \in W$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(a) \in \mathrm{Isom}(E; F)$. Тогда*

$$g'(b) = (f'(a))^{-1}.$$

Это условие необходимо. В самом деле, если отображение g дифференцируемо в точке b, то, согласно теореме о производной сложной функции,

$$g'(b) \circ f'(a) = 1_E, \quad f'(a) \circ g'(b) = 1_F.$$

Значит, $f'(a)$ — изоморфизм E на F, а $g'(b)$ — обратный изоморфизм.

Докажем достаточность нашего условия. Предположим, что $f'(a) \in \mathrm{Isom}(E; F)$. Мы хотим показать, что отображение g дифференцируемо в точке b. Так как отображение f дифференцируемо в точке a, то, полагая $y = f(x)$, мы получим для точек x, достаточно близких к точке a, равенство

$$y - b = f'(a)\cdot(x - a) + \|x - a\|\cdot\varphi(x - a), \tag{4.1.1}$$

где

$$\lim_{x \to a} \varphi(x - a) = 0.$$

Применим к обеим частям этого равенства линейное преобразование $(f'(a))^{-1}$:

$$x - a = (f'(a))^{-1}\cdot(y - b) - \|x - a\|\,(f'(a))^{-1}\cdot\varphi(x - a). \tag{4.1.2}$$

Докажем теперь, что

$$\|x - a\|\,(f'(a))^{-1}\cdot\varphi(x - a) = o(\|y - b\|).$$

Положим для сокращения записи

$$(f'(a))^{-1}\cdot\varphi(x-a)=\psi(x-a).$$

Это выражение стремится к нулю, когда x стремится к a, так как $(f'(a))^{-1}$ является *непрерывным* линейным отображением пространства F в E. Из соотношения 4.1.2 вытекает, что

$$\|(f'(a))^{-1}\cdot(y-b)\|\geqslant\|x-a\|(1-\|\psi(x-a)\|).$$

Отсюда

$$\|x-a\|\leqslant\|y-b\|\cdot\frac{\|(f'(a))^{-1}\|}{1-\|\psi(x-a)\|}$$

(норма $\|x-a\|$ берется настолько малой, что норма $\|\psi(x-a)\|<1$). Отсюда

$$\|x-a\|\cdot\|\psi(x-a)\|\leqslant\|y-b\|\cdot(f'(a))^{-1}\cdot\frac{\|\psi(x-a)\|}{1-\|\psi(x-a)\|}=$$

$$=o(\|y-b\|),\text{ ч. т. д.}$$

Переходим к доказательству предложения 4.1.1. Ясно, что сформулированное условие необходимо. Обратно, если отображение $f'(x)\in\operatorname{Isom}(E;\,F)$ для любого $x\in V$, то, как следует из леммы, отображение g дифференцируемо в любой точке $y\in W$ и

$$g'(y)=(f'(g(y)))^{-1}. \tag{4.1.3}$$

Остается доказать, что g принадлежит к классу C^1, т. е. что отображение

$$g'\colon W\to\mathcal{L}(F;\,E)$$

непрерывно. Как показывает равенство (4.1.3), это отображение представляет собой композицию трех отображений:

1) отображения $y\to g(y)$ множества W в V, являющегося непрерывным, так как отображение f — гомеоморфизм;

2) отображения $x\to f'(x)$ множества V в $\operatorname{Isom}(E;\,F)$, являющегося непрерывным, так как, по предположению, отображение f принадлежит к классу C^1;

3) отображения $u\to u^{-1}$ множества $\operatorname{Isom}(E,F)$ в $\mathcal{L}(F,E)$, являющегося непрерывным (теорема 1.7.3).

Это соображение завершает доказательство теоремы.

4.2. Теорема о локальном обращении

До настоящего момента мы предполагали, что отображение $f\colon V\to W$ — гомеоморфизм. Теперь мы хотим освободиться от этого предположения. Имеет место следующая основная

Теорема 4.2.1. *Пусть U — открытое множество в банаховом пространстве E и $f\colon U\to F$ — отображение класса C^1 (F — также* *банахово пространство). Предположим, что в точке $a \in U$*

$$f'(a) \in \mathrm{Isom}\,(E;\ F).$$

Тогда существуют открытая окрестность V точки a ($V \subset U$) и открытая окрестность W точки $b = f(a)$, такие, что f является C^1-диффеоморфизмом V на W.

Доказательство этой теоремы мы проведем несколько позже (см. ниже п. 4.3, 4.4, 4.5), а сейчас получим из нее

Следствие 4.2.2. *Для того чтобы отображение $f\colon U \to F$ класса C^1 было C^1-диффеоморфизмом U на открытое множество пространства F, необходимо и достаточно, чтобы:*

(i) *отображение f было инъективным;*

(ii) $f'(x) \in \mathrm{Isom}\,(E;\ F)$ *для любого $x \in U$.*

Доказательство следствия. Оба условия, очевидно, необходимы. Обратно, предположим их выполненными. Тогда из условия (ii) следует, что $f\colon U \to F$ — *открытое отображение* (т. е. для любого открытого множества $V \subset U$ образ $f(V)$ является открытым множеством в F). Это вытекает из теоремы 4.2.1, утверждающей, что для любой точки $a \in U$ образ всякой открытой окрестности точки a при отображении f содержит открытую окрестность точки $f(a)$. В частности, множество $f(U)$ *открыто* в F. Если мы покажем, что f осуществляет гомеоморфное отображение множества U на $f(U)$, то получим, в силу предложения 4.1.1, что f есть C^1-диффеоморфизм U на $f(U)$. В самом деле, в силу предположения (i), *биективное* отображение f одновременно непрерывно и открыто. Поскольку отображение f открыто, то обратное отображение $g = f^{-1}\colon f(U) \to U$ непрерывно. Следовательно, f гомеоморфно отображает U на $f(U)$. Доказательство следствия окончено.

4.3. Доказательство теоремы о локальном обращении: сведе́ние к частному случаю

Допустим, что выполнены все предположения теоремы 4.2.1. Тогда так как f — отображение класса C^1, то отображение f *строго дифференцируемо* в точке a (см. теорему 3.8.1). Допустим, что справедливо следующее

Предложение 4.3.1. *Пусть U — открытое множество в банаховом пространстве E и $f\colon U \to F$ — непрерывное отображение (F — банахово пространство). Если отображение f строго дифференцируемо в точке $a \in U$ и $f'(a) \in \mathrm{Isom}\,(E;\ F)$, то существуют открытая окрестность V' точки a ($V' \subset U$) и открытая окрестность W' точки $b = f(a)$, такие, что f отображает гомеоморфно V' на W'.*

Тогда в силу предположения теоремы 4.2.1 производная $f'(x)$ существует для любой точки $x \in V'$. Более того, существует такая открытая окрестность V точки a $(V \subset V')$, что $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E; F)$. Действительно, множество $\operatorname{Isom}(E; F)$ *открыто* в $\mathscr{L}(E; F)$ (см. теорему 1.7.3). Его прообраз при *непрерывном* отображении f' есть открытое подмножество в V', содержащее точку a. Пусть $W = f(V)$; множество W открыто в W', так как f гомеоморфно отображает множество V' на W' (в силу предложения 4.3.1). Более того, отображение f — гомеоморфизм V на W. Но тогда выполнены условия предложения 4.1.1. На основании этого предложения мы заключаем, что отображение f есть C^1-диффеоморфизм V на W. Итак, мы доказали теорему 4.2.1, предполагая, что справедливо предложение 4.3.1.

4.4. Доказательство предложения 4.3.1

Докажем теперь предложение 4.3.1. Линейное и непрерывное отображение $(f'(a))^{-1}$ переводит пространство F в E. Рассмотрим сложное отображение

$$f_1 = (f'(a))^{-1} \circ f\colon\ U \to E$$

(напомним, что множество U открыто в E). Легко видеть, что отображение f_1 строго дифференцируемо в точке $a \in U$ и что $f_1'(a) = 1_E$. (Рекомендуем читателю проверить это.) Так как отображение f_1 строго дифференцируемо, то можно сопоставить каждому числу $k > 0$ такое число $r > 0$, что отображение $x \mapsto x - f_1(x) = \varphi(x)$ удовлетворяет k-условию Липшица в шаре $\| x - a \| \leqslant r$. Число k фиксируется $(0 < k < 1)$ и по нему определяется указанное число $r > 0$. Тогда отображение φ является *сжатием* в шаре $\| x - a \| \leqslant r$. Следовательно, к нему можно применить теорему 4.4.1 из теории последовательных приближений, которую мы сформулируем и докажем ниже. Из нее вытекает, что существует такая открытая окрестность V точки a (содержащаяся в шаре $\| x - a \| \leqslant r$), что f_1 отображает эту окрестность *гомеоморфно* на открытую окрестность W_1 точки $b_1 = f_1(a)$. Производная $f'(a)$ представляет собой гомеоморфное отображение пространства E на F. Поэтому отображение

$$f = f'(a) \circ f_1$$

переводит гомеоморфно окрестность V на множество W, получаемое из W_1 при отображении $f'(a)$. Здесь W — открытое множество в пространстве F, содержащее точку $b = f(a)$. Предложение 4.3.1 доказано. (Заметим, что множества, которые в формулировке этого предложения обозначены через V' и W', в доказательстве фигурируют как V и W.)

Сформулируем теорему, которая была использована в доказательстве предложения 4.3.1.

Теорема 4.4.1. *Пусть $B(a, r)$ — открытый шар $\| x - a \| \leqslant r$ в банаховом пространстве E, и пусть для непрерывного отображения*

$$f : B(a, r) \to E$$

отображение

$$x \to x - f(x) = \varphi(x)$$

является сжатием (т. е. $\|\varphi(x) - \varphi(y)\| < k\,\|x - y\|$, $k < 1$), *причем* $f(a) = b$. *Тогда в шаре* $B(a, r)$ *существует такое открытое подмножество* V, *содержащее точку* a, *что отображение* f *является гомеоморфизмом* V *на открытый шар* $B(b, (1 - k)\,r)$. *При этом обратное отображение*

$$g = f^{-1}\colon B(b, (1 - k)\,r) \to B(a, r)$$

удовлетворяет условию Липшица с константой $1/(1 - k)$.

4.5. Доказательство теоремы 4.4.1

Пусть точки $x, x' \in B(a, r)$. Тогда

$$f(x) - f(x') = (x - x') - (\varphi(x) - \varphi(x')),$$

откуда

$$\|f(x) - f(x')\| \geqslant \|x - x'\| - \|\varphi(x) - \varphi(x')\|.$$

Из этого неравенства с учетом того, что отображение φ удовлетворяет k-условию Липшица, вытекает, что

$$\|f(x) - f(x')\| \geqslant (1 - k)\cdot\|x - x'\|. \tag{4.5.1}$$

Лемма. *Для любого* $y \in B(b, (1 - k)\,r)$ *существует одна и только одна такая точка* $x \in B(a, r)$, *что* $f(x) = y$.

Доказательство *единственности*. Если $f(x) = f(x')$, то из неравенства (4.5.1) следует, что $x = x'$.

Доказательство *существования*. Найдем точку x методом последовательных приближений. Рассмотрим последовательность точек

$$\begin{gathered} x_0 = a, \quad x_1 = y + \varphi(x_0), \ \ldots, \\ x_{n+1} = y + \varphi(x_n), \ \ldots . \end{gathered} \tag{4.5.2}$$

Чтобы это рекуррентное определение точек x_n было корректным, мы должны быть уверены в том, что на каждом шаге $x_n \in B(a, r)$. Так как отображение φ определено только в шаре $B(a, r)$, то мы сможем построить x_{n+1} только при условии, что $x_n \in B(a, r)$. Докажем по индукции, что

$$\|x_n - a\| \leqslant \frac{1 - k^n}{1 - k}\,\|y - b\|. \tag{4.5.3}$$

Поскольку, в силу нашего предположения $\|y - b\| < (1 - k)\,r$, то $\|x_n - a\| < r$. Для $n = 1$

$$x_1 - a = y + \varphi(a) - a = y - f(a) = y - b.$$

Следовательно, соотношение (4.5.3) справедливо при $n = 1$. Предположим, что соотношение (4.5.3) верно для некоторого n ($n \geqslant 1$), и докажем его для $n + 1$. Из формул (4.5.2) вытекает, что

$$x_{n+1} - x_n = \varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1}),$$

откуда

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant k \, \| x_n - x_{n-1} \|,$$

и по рекуррентности

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant k^n \, \| x_1 - a \| = k^n \, \| y - b \|. \tag{4.5.4}$$

Из неравенств (4.5.3) и (4.5.4) находим, что

$$\| x_{n+1} - a \| \leqslant \| x_n - a \| + \| x_{n+1} - x_n \| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1-k^n}{1-k} + k^n \right) \cdot \| y - b \| = \frac{1-k^{n+1}}{1-k} \, \| y - b \|.$$

Таким образом, мы доказали неравенство (4.5.3) (только в нем n заменено на $n + 1$). Теперь, как это вытекает из (4.5.4), ряд с общим членом $x_{n+1} - x_n$ сходится нормально. Следовательно, $\{x_n\}$ — последовательность Коши. Пусть x — ее предел. Переходя к пределу в неравенстве (4.5.3), получаем

$$\| x - a \| \leqslant \frac{1}{1-k} \, \| y - b \| < r.$$

Переходя к пределу в соотношении $x_{n+1} = y + \varphi(x_n)$ [см. (4.5.2)], мы находим, что

$$x = y + \varphi(x),$$

т. е. $y = f(x)$. Итак, *лемма доказана.*

Введем теперь новое обозначение: для $y \in B(b, (1 - k) r)$ мы обозначим через $g(y)$ однозначно определенный элемент $x \in B(a, r)$, такой, что $f(x) = y$. Тем самым мы определили отображение

$$g \colon B(b, (1 - k) r) \to B(a, r).$$

В силу неравенства (4.5.1), если y и y' — две точки шара $B(b, (1 - k) r)$, то

$$\| g(y) - g(y') \| \leqslant \frac{1}{1-k} \, \| y - y' \|.$$

Следовательно, g удовлетворяет условию Липшица с константой $1/(1 - k)$. Отсюда вытекает, что отображение g *непрерывно.* Пусть $V = g(B(b, (1 - k) r)) \subset B(a, r)$. Тогда множество

$$V = f^{-1}(B(b, (1 - k) r))$$

является прообразом открытого множества. Так как отображение f непрерывно, то множество V *открыто* в $B(a, r)$ и, значит, открыто в E. Очевидно, что отображения

$$f\colon V \to B\,(b,\,(1-k)\,r)$$

и

$$g\colon B\,(b,\,(1-k)\,r) \to V$$

являются взаимно обратными биективными отображениями. Поскольку оба эти отображения непрерывны, то они являются *гомеоморфизмами*.

Теорема 4.4.1 доказана. Тем самым закончено доказательство *теоремы* 4.2.1 *о локальном обращении*, так как мы свели его к доказательству предложения 4.3.1 и теоремы 4.4.1.

4.6. Теорема о локальном обращении в случае пространства конечной размерности

Мы предполагали в теореме 4.2.1, что отображение $f'(a)$ является линейным изоморфизмом $E \to F$. Таким образом, в ней требуется, чтобы банаховы пространства E и F были изоморфными. Для пространств конечной размерности это требование выполняется, когда они имеют *одинаковую размерность*. Поэтому мы рассмотрим случай, когда $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^n$. Тогда отображение $f\colon U \to F$ определяется n числовыми функциями от n действительных переменных в открытом множестве U:

$$f_i\,(x_1,\,\ldots,\,x_n) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Мы предположим, что все они принадлежат к классу C^1. Линейное отображение $f'(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\,\mathbb{R}^n)$ задается матрицей, составленной из частных производных

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,(a_1,\,\ldots,\,a_n)$$

(i — индекс строк, j — индекс столбцов). Отображение $f'\,(a) \in \in \operatorname{Isom}\,(\mathbb{R}^n,\,\mathbb{R}^n)$, когда *определитель* этой матрицы отличен от нуля. Он обозначается символом

$$\frac{\partial\,(f_1,\,\ldots,\,f_n)}{\partial(x_1,\,\ldots,\,x_n)}\,(a_1,\,\ldots,\,a_n)$$

[речь идет о значении определителя в точке $a = (a_1,\,\ldots,\,a_n)$] и называется *якобианом* отображения f в точке a.

Теорема о локальном обращении утверждает, что если якобиан отличен от нуля в точке a, то существуют открытое множество V, содержащее точку a и содержащееся в U, и открытое множество W, содержащее точку $b = f\,(a)$, такие, что отображение f является C^1-диффеоморфизмом $V \to W$. Тогда обратное отображение g определено n функциями $g_i\,(y_1,\,\ldots,\,y_n)$ класса C^1 в W.

4.7. Теорема о неявных функциях

Пусть E, F, G — банаховы пространства, U — открытое множество пространства $E \times F$ и $f\colon U \to G$ — отображение класса C^1. Таким образом, f — функция двух переменных x и y, где $x \in E$, $y \in F$, а пара $(x, y) \in U$. Предположим, что в точке $(a, b) \in U$

$$f(a, b) = 0.$$

Мы хотим изучить решения (x, y) уравнения

$$f(x, y) = 0,$$

«достаточно близкие» к (a, b). Для этого предположим, что *отображение «частная производная» $f'_y(a, b) \in \mathscr{L}(F; G)$ является изоморфизмом пространства F на пространство G.*

Теорема 4.7.1 (теорема о неявных функциях). *При выполнении указанных выше предположений существуют* 1) *в пространстве $E \times F$ открытая окрестность V точки (a, b), содержащаяся в U;* 2) *в пространстве E открытая окрестность W точки a;* 3) *отображение класса C^1*

$$g\colon W \to F,$$

для которых условия

$$(x, y) \in V \text{ и } f(x, y) = 0 \tag{4.7.1}$$

эквивалентны условиям

$$x \in W \text{ и } y = g(x). \tag{4.7.2}$$

Пояснение. В окрестности V точки (a, b) решения уравнения $f(x, y) = 0$ задаются формулой (4.7.2). Иначе говоря, функция $y = g(x)$ в окрестности V является решением уравнения $f(x, y) = 0$. Эта функция принадлежит к классу C^1 в W.

Замечание. Так как по предположению

$$(a, b) \in V, \qquad f(a, b) = 0$$

и точка $a \in W$, то эквивалентность условий (4.7.1) и (4.7.2) означает, что $g(a) = b$.

Доказательство теоремы 4.7.1. Мы воспользуемся теоремой 4.2.1 о локальном обращении. Для этого рассмотрим отображение

$$f_1\colon U \to E \times G,$$

определенное с помощью функции

$$f_1(x, y) = (x, f(x, y)) \qquad (x \in E,\ y \in F). \tag{4.7.3}$$

Отображение f_1 принадлежит к классу C^1 на множестве U, поскольку x и $f(x, y)$ принадлежат к классу C^1 на этом множестве U. Производная $f_1'(a, b)$ определяется матрицей

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix},$$

где

$$\alpha \in \mathscr{L}(E;\ E),\quad \beta \in \mathscr{L}(F;\ \mathrm{E}),\quad \gamma \in \mathscr{L}(E;\ G),\ \delta \in \mathscr{L}(F;\ G).$$

Действительно, вычисление частных производных отображения f_1 показывает, что

$$\alpha = 1_E, \qquad \beta = 0,$$
$$\gamma = f_x'(a, b), \qquad \delta = f_y'(a, b).$$

Таким образом, $f_1'(a)$ — линейное отображение

$$(h, k) \longrightarrow (h, f_x'(a, b)\cdot h + f_y'(a, b)\cdot k) \tag{4.7.4}$$

произведения $E \times F$ в $E \times G$. Так как $f_y'(a, b) \in \mathrm{Isom}(E; F)$, то отображение (4.7.4) есть *изоморфизм* $E \times F \longrightarrow E \times G$. При этом обратный изоморфизм задается формулой

$$(h', k') \longrightarrow (h', (f_y')^{-1}\cdot k' - (f_y')^{-1}\circ f_x' \circ h').$$

Следовательно, мы можем применить к отображению f_1 в окрестности точки $(a, b) \in U$ теорему о локальном обращении. Она утверждает, что в пространстве $E \times F$ существует открытая окрестность V точки (a, b), содержащаяся в U, а в пространстве $E \times G$ существует открытая окрестность W_1 точки $(a, 0) = f_1(a, b)$, такие, что отображение f_1 является C^1-диффеоморфизмом V на W_1. Обратный диффеоморфизм g_1 имеет вид:

$$g_1(x, z) = (x, g(x, z)) \quad \text{для } x \in E,\ z \in G,$$

причем $(x, z) \in W_1$. Таким образом, мы определяем функцию

$$g\colon W_1 \to F$$

класса C^1. Так как отображения f_1 и g_1 являются взаимно обратными гомеоморфизмами, то следующие условия эквивалентны:

(i) $(x, y) \in V$ и $f(x, y) = z$,

(ii) $(x, z) \in W_1$ и $g(x, z) = y$.

Положим в этих соотношениях $z = 0$; тогда условие (i) превращается в (4.7.1). Посмотрим, во что переходит условие (ii). Рассмотрим пространство E как подпространство пространства $E \times F$, отождествляя точку $x \in E$ с точкой $(x, 0) \in E \times F$. Поскольку $(x, 0) \in W_1$, отсюда следует, что x принадлежит пересечению W_1 и E. Это пересечение W *открыто* в E и содержит точку a [так как множество W_1 содержит точку $(a, 0)$]. Положим, с другой стороны,

$$g(x, 0) = g(x);$$

эта функция принадлежит к классу C^1 на открытом множестве W. Тогда условие (ii) для $z = 0$ запишется в виде

$$x \in W \quad \text{и} \quad y = g(x),$$

что совпадает с соотношением (4.7.2). Таким образом, доказана эквивалентность соотношений (4.7.1) и (4.7.2), ч. т. д.

Открытое множество W теоремы 4.7.1 может не быть связным. Но оно включает в себя открытое связное подмножество W', содержащее точку a (например, открытый шар с центром в точке a). Очевидно, что *из соотношений*

$$x \in W' \quad \text{и} \quad y = g(x)$$

следует, что

$$(x, y) \in U \quad \text{и} \quad f(x, y) = 0.$$

Мы утверждаем, что g — *единственная непрерывная функция в* W', *обладающая указанными свойствами.* Более точно, имеет место следующее

Предложение 4.7.2. *Пусть W' — открытое связное множество в пространстве E, содержащее точку a и содержащееся в множестве W, и пусть $h\colon W' \to F$ — непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:*

$$h(a) = b, \quad (x, h(x)) \in U \text{ для любого } x \in W',$$
$$f(x, h(x)) = 0.$$

Тогда функция h совпадает с функцией g на множестве W'.

Идея доказательства (мы предоставляем его читателю в качестве упражнения) такова: пусть A — множество таких точек $x \in W'$, для которых $h(x) = g(x)$. Надо установить, что точка $a \in A$ и что множество A *замкнуто* в W', а затем показать, что A *открыто* в W'. Отсюда, если учесть связность множества W', будет следовать наше утверждение.

Случай, когда пространства E, F и G имеют конечную размерность. В силу предположений теоремы 4.7.1 пространства F и G должны иметь тогда одинаковую размерность. Предположим, что $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}^p$, $G = \mathbb{R}^p$. Зададимся системой уравнений

$$f_i(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_p) = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant p), \tag{4.7.5}$$

где f_i — числовые функции класса C^1 в открытом множестве U. Мы предполагаем, что в точке $(a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_p)$ якобиан

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)} \neq 0.$$

Отсюда вытекает, что система (4.7.5) эквивалентна системе

$$y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

(где функции g_i принадлежат к классу C^1) по меньшей мере тогда, когда точка $(x_1, \ldots, x_n)$ достаточно близка к точке $(a_1, \ldots, a_n)$ и точка $(y_1, \ldots, y_p)$ достаточно близка к точке $(b_1, \ldots, b_p)$. Для точной формулировки нужно взять множества V и W, обладающие свойствами, указанными в теореме 4.7.1.

§ 5. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

5.1. Вторая производная

Пусть E и F — банаховы пространства, U — открытое множество в E и $f: U \to F$ — отображение, дифференцируемое на множестве U. Тогда существует производное отображение

$$f': U \to \mathcal{L}(E; F),$$

и можно поставить вопрос, будет ли оно дифференцируемо.

Определение. Отображение f *дважды дифференцируемо* в точке $a \in U$, если отображение f' дифференцируемо в точке a. В этом случае через $f''(a)$ мы обозначаем производную (в точке a) от f'. Имеем

$$f''(a) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)).$$

Замечание. Когда не предполагается, что отображение f дифференцируемо на всем множестве U, то говорят, что f дважды дифференцируемо в точке $a \in U$, если 1) f дифференцируемо в некоторой окрестности V точки a; 2) отображение $f': V \to \mathcal{L}(E; F)$ дифференцируемо в точке a.

Определение. Отображение f *дважды дифференцируемо* на множестве U, если оно дважды дифференцируемо в любой точке множества U (другими словами, отображения f и $f': U \to \mathcal{L}(E; F)$ дифференцируемы на U). Тогда соответствие $x \mapsto f''(x)$ определяет отображение

$$f'': U \to \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)).$$

Определение. Отображение f *принадлежит к классу* C^2 (или *дважды непрерывно дифференцируемо*) на множестве U, если f дважды дифференцируемо и отображение f'' *непрерывно*. Эквивалентное условие: f' принадлежит классу C^1 на множестве U.

Вспомним (см. п. 1.9), как определялась каноническая изометрия

$$\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F)) \approx \mathcal{L}(E, E; F). \tag{5.1.1}$$

С помощью этой изометрии мы сопоставляем производной $f''(a)$ некоторый элемент пространства $\mathcal{L}(E, E; F)$, т. е. *непрерывное били-*

нейное отображение $E \times E \to F$. Для краткости мы часто говорим, что отображение $f''(a)$ является элементом пространства $\mathscr{L}(E, E; F)$. Из соотношения (5.1.1) находим, что отображение $E \times E \to F$, определяемое производной $f''(a)$, записывается следующим образом:

$$(h, k) \to (f''(a) \cdot h) \cdot k. \tag{5.1.2}$$

Поясним эту запись: здесь через h и k обозначены два вектора, принадлежащие E. Так как $f''(a)$ — линейное непрерывное отображение $E \to \mathscr{L}(E; F)$, то образ вектора $h \in E$ при этом отображении есть элемент

$$f''(a) \cdot h \in \mathscr{L}(E; F).$$

Следовательно, $f''(a) \cdot h$ представляет собой линейное непрерывное отображение $E \to F$. Образ вектора $k \in E$ при этом отображении обозначается через

$$(f''(a) \cdot h) \cdot k.$$

Таким образом, мы уточнили смысл формулы (5.1.2).

Теорема 5.1.1. *Если отображение $f\colon U \to F$ дважды дифференцируемо в точке a, то вторая производная $f''(a) \in \mathscr{L}(E, F; F)$ является билинейным симметрическим отображением. Иными словами,*

$$(f''(a) \cdot h) \cdot k = (f''(a) \cdot k) \cdot h \quad \forall h \in E, \ \forall k \in E. \tag{5.1.3}$$

Доказательство. Введем функцию

$$A(h, k) = f(a + h + k) - f(a + h) - f(a + k) + f(a),$$

которая, очевидно, симметрична: $A(h, k) = A(k, h)$. Предположим, что мы доказали соотношение

$$\| A(h, k) - (f''(a) \cdot k) \cdot h \| = o((\| h \| + \| k \|)^2). \tag{5.1.4}$$

Мы утверждаем, что отсюда следует равенство (5.1.3). В самом деле, если в (5.1.4) переставить местами h и k, то мы получим соотношение

$$\| A(h, k) - (f''(a) \cdot h) \cdot k \| = o((\| h \| + \| k \|)^2).$$

Из этого соотношения и (5.1.4) следует, что

$$\| (f''(a) \cdot k) \cdot h - (f''(a) \cdot h) \cdot k \| = o((\| h \| + \| k \|)^2), \tag{5.1.5}$$

так как

$$\| (f''(a) \cdot k) \cdot h - (f''(a) \cdot h) \cdot k \| \leqslant \| (f''(a) \cdot k) \cdot h - A(h, k) \| + \\ + \| A(h, k) - (f''(a) \cdot h) \cdot k \|.$$

Равенство (5.1.5) означает, что если задано число $\varepsilon > 0$, то найдется такое число $\eta > 0$, что

$$\| (f''(a) \cdot k) \cdot h - (f''(a) \cdot h) \cdot k \| \leqslant \varepsilon (\| h \| + \| k \|)^2 \tag{5.1.6}$$

при $\| h \| + \| k \| \leqslant \eta$. Однако для любого числа λ имеем

$$\| (f''(a) \cdot \lambda k) \cdot (\lambda h) - (f''(a) \cdot \lambda h) \cdot \lambda k \| = \\ = | \lambda |^2 \cdot \| (f''(a) \cdot k) \cdot h - (f''(a) \cdot h) \cdot k \|.$$

По заданным *произвольным* элементам h и k из пространства E всегда можно найти такое число $\lambda \neq 0$, что $\| \lambda h \| + \| \lambda k \| \leqslant \eta$. Следовательно, в силу неравенства (5.1.6), в котором h и k заменены на λh и λk, имеем

$$| \lambda |^2 \cdot \| (f''(a) \cdot k) \cdot h - (f''(a) \cdot h) \cdot k \| \leqslant \varepsilon \, | \lambda |^2 (\| h \| + \| k \|)^2.$$

Деля на $| \lambda |^2 \neq 0$, мы получим, что *неравенство* (5.1.6) *справедливо, каковы бы ни были* h *и* k. Так как число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то заключаем, что соотношение (5.1.3) справедливо. Теорема 5.1.1 будет доказана, если мы установим справедливость соотношения (5.1.4).

Доказательство соотношения (5.1.4). Мы исходим из очевидного неравенства:

$$\| A(h, k) - (f''(a) \cdot k) \cdot h \| \leqslant \\ \leqslant \| A(h, k) - f'(a + k) \cdot h + f'(a) \cdot h \| + \\ + \| f'(a + k) \cdot h - f'(a) \cdot h - (f''(a) \cdot k) \cdot h \|. \quad (5.1.7)$$

Промажорируем каждое слагаемое в правой части, т. е.

$$\| A(h, k) - f'(a + k) \cdot h + f'(a) \cdot h \| \quad (5.1.8)$$

и

$$\| f'(a + k) \cdot h - f'(a) \cdot h - (f''(a) \cdot k) \cdot h \|. \quad (5.1.9)$$

Начнем с (5.1.9). Имеем

$$\| f'(a + k) \cdot h - f'(a) \cdot h - (f''(a) \cdot k) \cdot h \| \leqslant \\ \leqslant \| h \| \cdot \| f'(a + k) - f'(a) - f''(a) \cdot k \|.$$

По определению производной от функции f' в точке a

$$\| f'(a + k) - f'(a) - f''(a) \cdot k \| = o(\| k \|).$$

Следовательно, величина (5.1.9) есть $\| h \| \cdot o(\| k \|)$ и тем более может быть представлена в виде:

$$\| h \| \cdot o(\| h \| + \| k \|).$$

Теперь промажорируем (5.1.8). Рассмотрим вспомогательную функцию

$$B(h) = f(a + k + h) - f(a + h) - f'(a + k) \cdot h + f'(a) \cdot h.$$

Выражение (5.1.8) есть не что иное, как $\| B(h) - B(0) \|$. Из предложения 3.3.1 вытекает, что

$$\| B(h) - B(0) \| \leqslant \| h \| \cdot \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \| B'(th) \|.$$

Имеем

$$B'(h) = f'(a + k + h) - f'(a + h) - f'(a + k) + f'(a).$$

Следовательно, величина (5.1.8) меньше, чем

$$\|h\| \cdot \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|f'(a+k+th) - f'(a+th) - f'(a+k) + f'(a)\|. \quad (5.1.10)$$

Промажорируем в свою очередь выражение (5.1.10). По определению производной $f''(a)$,

$$f'(a + k + th) = f'(a) + f''(a) \cdot (k + th) + o(\|k + th\|),$$
$$f'(a + th) = f'(a) + f''(a) \cdot (th) + o(\|th\|),$$
$$f'(a + k) = f'(a) + f''(a) \cdot k + o(\|k\|).$$

Отсюда находим, объединяя все три неравенства, что

$$\|f'(a + k + th) - f'(a + th) - f'(a + k) + f'(a)\| =$$
$$= o(\|k + th\|) + o(\|th\|) + o(\|k\|).$$

Так как $\|k + th\| \leqslant \|k\| + \|h\|$ и $\|th\| \leqslant \|h\|$ для всех t, удовлетворяющих условию $0 \leqslant t \leqslant 1$, то выражение (5.1.10) имеет вид $o(\|h\| + \|k\|)$. Значит, (5.1.8) мажорируется выражением

$$\|h\| \cdot o(\|h\| + \|k\|).$$

Итак, каждое из выражений (5.1.8) и (5.1.9) (так же как и их сумма) может быть представлено в виде $\|h\| \cdot o(\|h\| + \|k\|)$. Тогда в силу неравенства (5.1.7)

$$\|A(h, k) - (f''(a) \cdot k) \cdot h\| = \|h\| \cdot o(\|h\| + \|k\|).$$

Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что

$$\|A(h, k) - (f''(a) \cdot k) \cdot h\| \leqslant \varepsilon \|h\| \cdot (\|h\| + \|k\|),$$

как только $\|h\| + \|k\| \leqslant \eta$. Тогда из неравенства $\|h\| + \|k\| \leqslant \leqslant \eta$ следует, что

$$\|A(h, k) - (f''(a) \cdot k) \cdot h\| \leqslant \varepsilon (\|h\| + \|k\|)^2.$$

Соотношение (5.1.4) доказано. Таким образом доказательство теоремы 5.1.1 полностью завершено.

5.2. Случай, когда $E = E_1 \times \ldots \times E_n$

Как всегда, мы предполагаем, что U — открытое подмножество в пространстве E и f: $U \to F$ — отображение, дважды дифференцируемое в точке $a \in U$. Отсюда следует (по определению), что отображение f дифференцируемо в любой точке x, принадлежащей к окрестности точки a. В силу (2.6.1) имеем

$$f'(x)\cdot(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\cdot h_j \quad \text{для} \quad h_j \in E_j. \tag{5.2.1}$$

Та же самая формула, примененная к f' (вместо f), дает

$$f''(a)\cdot(k_1, \ldots, k_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\cdot k_i \quad \text{для} \quad k_i \in E_i. \tag{5.2.2}$$

Следовательно,

$$(f''(a)\cdot(k_1, \ldots, k_n))\cdot(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\cdot k_i\right)\cdot(h_1, \ldots, h_n). \tag{5.2.3}$$

Чтобы лучше понять, что представляет собой правая часть этого соотношения, заметим, что

$$\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a) \in \mathscr{L}(E_i; \mathscr{L}(E; F));$$

следовательно,

$$\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\cdot k_i \in \mathscr{L}(E; F),$$

т. е. образ вектора $(h_1, \ldots, h_n) \in E$ при этом отображении является элементом пространства F.

Для вычисления $\partial f'/\partial x_i\,(a)$ мы используем формулу (5.2.1) для производной f'. Дифференцируя (5.2.1) по x_i, получаем

$$\left(\frac{\partial f'}{\partial x_i}(a)\cdot k_i\right)\cdot(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)\cdot k_i\right)\cdot h_j. \tag{5.2.4}$$

Значение производной $\partial/\partial x_i\,(\partial f/\partial x_j)$ в точке a мы обозначим через $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)\,(a)$. Это элемент пространства $\mathscr{L}(E_i; \mathscr{L}(E_j; F)) \approx \approx \mathscr{L}(E_i, E_j; F)$. Наконец, если в равенстве (5.2.3) преобразовать правую часть, используя формулу (5.2.4), то мы получим, что

$$(f''(a)\cdot(k_1, \ldots, k_n))\cdot(h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i,\,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a)\cdot k_i\right) h_j. \tag{5.2.5}$$

Это *основное соотношение*, выражающее $f''(a) \in \mathscr{L}(E, E; F)$ через частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}(a) \in \mathscr{L}(E_i, E_j; F).$$

Отметим, что эта формула для второй производной аналогична выражению (2.7.1) для первой производной.

Отметим теперь, что отображение $f''(a)$: $E \times E \to F$ билинейно и *симметрично* (теорема 5.1.1). Переставляя k_i и h_i (для каждого i), из (5.2.5) получаем равенство

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)\cdot k_i\right)\cdot h_j = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)\cdot h_i\right)\cdot k_j,$$

а переставляя индексы суммирования i и j в правой части, мы найдем, что

$$\sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)\cdot k_i\right)\cdot h_j = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a)\cdot h_j\right)\cdot k_i.$$

Последнее равенство является *тождеством* по $k_1, \ldots, k_n, h_1, \ldots, h_n$. Из него вытекает, что для любой пары (i, j)

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)\cdot k_i\right)\cdot h_j = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a)\cdot h_j\right)\cdot k_i. \tag{5.2.6}$$

Это означает, что билинейное отображение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a)\colon\ E_j \times E_i \to F$$

является композицией симметрического отображения $E_j \times E_i \to E_i \times E_j$ [которое переводит (h_j, k_i) в (k_i, h_j)] и билинейного отображения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)\colon\ E_i \times E_j \to F.$$

Короче говоря, *два билинейных отображения* $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a)$ *и* $(\partial^2 f/\partial x_j \partial x_i)(a)$ *получаются одно из другого с помощью перестановки переменных* $k_i \in E_i$ *и* $h_j \in E_j$. В частности, производная $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_i)(a)$, обозначаемая также $(\partial^2 f/\partial x_i^2)(a)$, есть билинейное *симметрическое* отображение $E_i \times E_i \to F$.

Замечание. В предыдущих пунктах мы предполагали существование второй производной $f''(a)$, откуда следовало существование частных производных $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a)$. Можно получить *достаточное* условие для того, чтобы отображение f было дважды дифференцируемым в точке a. Применяя дважды предложение 3.7.2, получаем

Предложение 5.2.1. *Для существования производной $f''(a)$ достаточно, чтобы частные производные $\partial f/\partial x_j$ существовали и были непрерывными функциями на множестве U, а вторые частные производные $\partial/\partial x_i\ (\partial f/\partial x_j)$ существовали в любой точке $x \in U$ и были непрерывными функциями в точке a [как отображения $U \to \mathscr{L}(E_i, E_j; F)$].*

Частный случай, когда $E = \mathbb{R}^n$. В этом случае положим $E_i = \mathbb{R}$ для $i = 1, \ldots, n$. При этом, как мы уже отмечали пространство $\mathscr{L}(E_i; F)$ отождествляется с F. Теперь пространства

$$\mathscr{L}(E_i; \mathscr{L}(E_j; F)) = \mathscr{L}(\mathbb{R}; \mathscr{L}(\mathbb{R}; F))$$

также отождествятся с пространством F. Если мы проведем такое отождествление и обозначим через $c_{ij} \in F$ элементы пространства F, определяемые производными $(\partial^2 f/\partial x_i \partial x_j)(a)$, то соответствующее билинейное отображение $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to F$ сведется к отображению

$$(\lambda_i, \lambda_j) \to \lambda_i \lambda_j c_{ij}.$$

Отсюда будет следовать, что $\lambda_i \lambda_j c_{ij} = \lambda_j \lambda_i c_{ji}$ для любых λ_i, λ_j и, значит, $c_{ij} = c_{ji}$ (например, при $\lambda_i = 1$, $\lambda_j = 1$). Таким образом, имеет место

Предложение 5.2.2. *Если f: $U \to F$ — дважды дифференцируемая функция n действительных переменных, то*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a) \in F.$$

Это классическая *теорема Шварца*. Она часто формулируется в условиях предложения 5.2.1, которые являются достаточными, но не необходимыми для существования производной $f''(a)$. Теорема Шварца представляет собой частный случай теоремы 5.1.1 для функции n действительных переменных.

5.3. Последовательные производные

Пусть f: $U \to F$ — дважды дифференцируемая функция. Тогда существует отображение *вторая производная*

$$f'': U \to \mathscr{L}_2(E; F).$$

Обозначим для краткости через $\mathscr{L}_2(E; F)$ банахово пространство $\mathscr{L}(E, E; F)$, образованное билинейными непрерывными отображениями $E \times E \to F$. Вообще мы будем обозначать через $\mathscr{L}_n(E; F)$ пространство полилинейных непрерывных отображений

$$\underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ сомножителей}} \to F$$

Можно поставить вопрос о дифференцируемости отображения f''. Если оно дифференцируемо в точке $a \in U$, то обозначим через $f'''(a)$ или через $f^{(3)}(a)$ производную функции f'' в точке a. Это элемент пространства

$$\mathscr{L}(E; \mathscr{L}_2(E; F)) \approx \mathscr{L}_3(E; F).$$

Мы определим по индукции, что означает утверждение «отображение f n раз дифференцируемо в точке a» и его n-я производная $f^{(n)}(a) \in \mathscr{L}_n(E; F)$. Предположим, что это понятие уже определено для $n-1$. Мы будем говорить, что отображение f n раз дифференцируемо в точке a, если: 1) существует такая открытая окрестность V точки a, что f можно $n-1$ раз продифференцировать в каждой точке $x \in V$, и 2) отображение $x \to f^{(n-1)}(x)$ окрестности V в $\mathcal{L}_{n-1}(E; F)$ дифференцируемо в точке a. Тогда производная от $f^{(n-1)}(x)$ в точке a обозначается через $f^{(n)}(a)$ и называется n-й производной отображения f в точке a. Это элемент пространства $\mathcal{L}_n(E; F)$.

Мы будем обозначать через $f^{(n)}(a)\cdot(h_1, \ldots, h_n)$ образ вектора $(h_1, \ldots, h_n) \in E \times \ldots \times E$ при отображении $f^{(n)}(a)$ пространства $E \times \ldots \times E$ в пространстве F.

Определение. Отображение f *принадлежит к классу* C^n в U (иначе: отображение f n раз непрерывно дифференцируемо на множестве U), если f n раз дифференцируемо в любой точке $x \in U$ и отображение

$$f^{(n)}: U \to \mathcal{L}_n(E; F)$$

непрерывно.

Определив таким образом $f^{(n)}$ для $n \geqslant 1$ (когда эта n-я производная существует), положим

$$f^{(0)} = f \quad \text{(нулевая производная).}$$

Говорят, что отображение f *принадлежит к классу* C^0, если f непрерывно.

Определение. Отображение f: $U \to F$ *принадлежит к классу* C^∞, если оно принадлежит к классу C^n для любого n.

Упражнение. Доказать, что для этого достаточно, чтобы производная $f^{(n)}$ существовала при любом n. В этом случае говорят, что отображение f *бесконечно дифференцируемо.*

Замечание. Для того чтобы отображение f было n раз дифференцируемым в точке a ($n \geqslant 1$), необходимо и достаточно, чтобы 1) производная $f'(x)$ существовала в любой точке x некоторой открытой окрестности V точки a и 2) отображение f': $V \to F$ было $n-1$ раз дифференцируемым в точке a. Тогда

$$f^{(n)}(a) = (f')^{(n-1)}(a).$$

Аналогично для $n \geqslant 2$ имеем

$$f^{(n)}(a) = (f'')^{(n-2)}(a) \quad \text{и т. д.}$$

Рекомендуем читателю в качестве упражнения доказать эти утверждения. Из основной теоремы 5.1.1 без труда получается

Теорема 5.3.1. *Если отображение f n раз дифференцируемо в точке a, то производная $f^{(n)}(a) \in \mathcal{L}_n(E; F)$ является полилинейным* *симметрическим отображением* $E \times \ldots \times E \to F$. Иными словами, если $h_1, \ldots, h_n$, суть n векторов пространства E и σ обозначает некоторую перестановку чисел $[1, 2, \ldots, n]$, то

$$f^{(n)}(a)\cdot(h_1, h_2, \ldots, h_n) = f^{(n)}(a)\cdot(h_{\sigma(1)}, h_{\sigma(2)}, \ldots, h_{\sigma(n)}). \qquad (5.3.1)$$

Доказательство. Утверждение теоремы надо доказать лишь для $n \geqslant 2$. Для $n = 2$ оно уже доказано (теорема 5.1.1). Воспользуемся методом индукции: пусть $n \geqslant 3$ и предположим, что теорема доказана для $n - 1$. Тогда $f^{(n)}(a)$ представляет собой производную от отображения

$$f^{(n-1)} : V \to \mathscr{L}_{n-1}(E;\ F),$$

которая, по предположению, существует в некоторой окрестности V точки a. По предположению индукции, $f^{(n-1)}$ — отображение в подпространство пространства $\mathscr{L}_{n-1}(E;\ F)$, состоящее из $(n-1)$-линейных *симметрических* отображений. Следовательно, $f^{(n)}(a)\cdot h_1$ при $h_1 \in E$ является элементом этого подпространства. Другими словами,

$$(f^{(n)}(a)\cdot h_1)\cdot(h_2, \ldots, h_n)$$

есть *симметрическая* функция векторов $h_2, \ldots, h_n$. Но она совпадает с

$$f^{(n)}(a)\cdot(h_1, h_2, \ldots, h_n),$$

и потому полилинейное отображение $f^{(n)}(a)$: $E^n \to E$ является симметрической функцией $n-1$ переменных $h_2, \ldots, h_n$. Теперь нам достаточно убедиться в том, что величина

$$f^{(n)}(a)\cdot(h_1, h_2, \ldots, h_n)$$

не изменяет своего значения при перестановке векторов h_1 и h_2. В самом деле, известно, что всякая перестановка из n элементов состоит из конечного числа «транспозиций», т. е. перестановок двух последовательных элементов. Как было показано выше, значение отображения $f^{(n)}$ не изменяется при перестановке h_i и h_{i+1} для $2 \leqslant i \leqslant n-1$.

Если мы покажем, что то же самое имеет место при перестановке векторов h_1 и h_2, то доказательство будет окончено. Но, поскольку $f^{(n)}(a)$ есть вторая производная от $f^{(n-2)}$, выражение

$$(f^{(n)}(a)\cdot h_1)\cdot h_2 \in \mathscr{L}_{n-2}(E;\ F)$$

симметрично относительно h_1 и h_2 в силу теоремы 5.1.1, примененной к функции $f^{(n-2)}$, ч. т. д.

5.4. Примеры n раз дифференцируемых функций

Предложение 5.4.1. *Всякое билинейное непрерывное отображение*

$$\varphi\colon E_1 \times E_2 \to F$$

принадлежит к классу C^∞; точнее, производная φ'' является постоянным отображением, а производные $\varphi^{(n)}$ равны нулю при $n > 2$.

Доказательство. Из теоремы 2.4.3 мы знаем, что отображение φ дифференцируемо и

$$\varphi'(x_1, x_2)\cdot(h_1, h_2) = \varphi(h_1, x_2) + \varphi(x_1, h_2).$$

Это соотношение показывает, что отображение

$$\varphi'\colon E_1 \times E_2 \to \mathscr{L}(E_1, \ E_2; F)$$

представляет собой *линейную непрерывную* функцию в точке $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. Следовательно, ее производная φ'' есть *константа*. Ее значение является элементом пространства $\mathscr{L}_2(E_1 \times E_2; F)$ [где произведение $E_1 \times E_2$ рассматривается как банахово пространство]. Отображение φ'' ставит в соответствие элементам (h_1, h_2) и (k_1, k_2) векторного пространства $E_1 \times E_2$ элемент

$$\varphi_1(h_1, k_2) + \varphi(k_1, h_2)$$

пространства $\mathscr{L}(E_1 \times E_2; F)$. Доказательство окончено.

Теорема 5.4.2 (производная сложной функции). *Пусть $U \subset E$ и $V \subset F$ — открытые множества в банаховых пространствах, $f\colon U \to V$ и $g\colon V \to G$ — непрерывные отображения.*

(i) *Если отображение f n раз дифференцируемо в точке $a \in U$, а отображение g n раз дифференцируемо в точке $b = f(a) \in V$, то отображение $h = g \circ f\colon U \to G$ является n раз дифференцируемым в точке a.*

(ii) *Если f и g принадлежат к классу C^n, то и $h = g \circ f$ принадлежит к классу C^n.*

Доказательство. Теорема верна для $n = 1$. В самом деле, это следует из теоремы 2.2.1 (о производной сложной функции), согласно которой

$$h'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x). \tag{5.4.1}$$

Формула (5.4.1) показывает, что если производные f' и g' непрерывны, то непрерывна и функция h' (откуда следует утверждение (ii) для $n = 1$). Докажем утверждения (i) и (ii) индукцией по n, предполагая, что они справедливы для $n - 1$ $(n \geqslant 2)$.

Рассмотрим, например, доказательство утверждения (ii). Для утверждения (i) рассуждение аналогично. Мы хотим показать, что функция h принадлежит к классу C^n; достаточно доказать, что ее производная h' есть функция класса C^{n-1}. Из формулы (5.4.1) мы видим, что отображение h' состоит из двух отображений:

1°) отображения $x \to (g'(f(x)), f'(x))$ множества U в пространство $\mathscr{L}(F; G) \times \mathscr{L}(E; F)$;

2°) отображения $(v, u) \to v \circ u$ пространства $\mathscr{L}(F; G) \times \mathscr{L}(E; F)$ в пространство $\mathscr{L}(E; G)$.

Второе отображение билинейно и непрерывно (см. конец п. 1.8). Следовательно, оно принадлежит к классу C^∞ (предложение 5.4.1). Первое отображение — это отображение пространства E в произведение пространств. Его составляющими служат отображения

$$x \to g'(f(x)) \quad \text{и} \quad x \to f'(x).$$

По предположению, второе отображение принадлежит к классу C^{n-1}. Первое отображение можно представить в следующем виде:

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} \mathscr{L}(F; G).$$

Отображение f принадлежит к классу C^n и, следовательно, к классу C^{n-1}. Отображение g' также принадлежит к классу C^{n-1}. *По предположению индукции*, композиция отображений $g' \circ f$ — это функция, принадлежащая к классу C^{n-1}. Итак, отображение 1°) принадлежит к классу C^{n-1} (так как каждое из двух составляющих отображений принадлежит этому классу). Отображение 2°) также принадлежит к классу C^{n-1} (даже C^∞). *По предположению индукции* (примененному во второй раз), их композиция также принадлежит к классу C^{n-1}. Эта композиция есть отображение h', и индукция полностью завершена.

Теорема 5.4.3. *Пусть E и F — банаховы пространства;* Isom (E, F) *— открытое подмножество пространства $\mathscr{L}(E, F)$, образованное линейными изоморфизмами пространства E на F. Если отображение* φ: Isom $(E; F) \to \mathscr{L}(F; E)$ *таково, что*

$$\varphi(u) = u^{-1} \in \mathrm{Isom}(F; E),$$

то оно принадлежит к классу C^∞.

Доказательство. Как мы уже знаем из теоремы 2.4.4, отображение φ принадлежит к классу C^1 и

$$\varphi'(u) \cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1} \quad \text{для} \quad h \in \mathscr{L}(E; F). \tag{5.4.2}$$

Первая производная $\varphi'(u)$ является элементом пространства $\mathscr{L}(\mathscr{L}(E; F); \mathscr{L}(F; E))$. По аналогии с доказательством теоремы 2.4.4 введем билинейное непрерывное отображение

$$\psi: \quad \mathscr{L}(F; E) \times \mathscr{L}(F; E) \to \mathscr{L}(\mathscr{L}(E; F); \mathscr{L}(F; E)),$$

определенное с помощью формулы

$$\psi(v, w) \cdot h = -v \circ h \circ w.$$

Тогда соотношение (5.4.2) перепишется в виде

$$\varphi'(u) = \psi(\varphi(u), \varphi(u)) \tag{5.4.3}$$

[так как $u^{-1} = \varphi(u)$]. Это дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция φ. Выведем отсюда, пользуясь индукцией по n, что функция φ принадлежит к классу C^n.

Мы уже знаем, что это утверждение справедливо для $n = 1$. Пусть $n \geqslant 2$; будем предполагать уже доказанным, что функция φ принадлежит к классу C^{n-1}. Покажем, что тогда производная φ' также принадлежит к классу C^{n-1} (т. е. отображение φ принадлежит к классу C^n). Как показывает равенство (5.4.3), отображение φ' представляет собой композицию двух отображений:

1°) отображения $u \longrightarrow (\varphi(u), \varphi(u))$ подмножества $\mathrm{Isom}\,(E; F)$ в пространство $\mathscr{L}(F; E) \times \mathscr{L}(F; E)$;

2°) билинейного отображения ψ.

Первое отображение принадлежит к классу C^{n-1} по предположению индукции, второе — к классу C^∞ (предложение 5.4.1). Следовательно, их композиция есть отображение класса C^{n-1} (теорема 5.4.2), ч. т. д.

Упражнение. Вывести формулу для n-й производной отображения φ:

$$\varphi^{(n)}(u)\cdot(h_1, \ldots, h_n) = (-1)^n \sum_\sigma u^{-1} \circ h_{\sigma(1)} \circ u^{-1} \circ \ldots \circ u^{-1} \circ h_{\sigma(n)} \circ u^{-1},$$

где суммирование производится по $n!$ перестановкам σ чисел $[1, \ldots, n]$.

Теорема 5.4.4. *Пусть E и F — банаховы пространства, а $V \subset E$ и $W \subset F$ — открытые множества. Пусть отображение*

$$f\colon V \to W$$

является C^1-диффеоморфизмом (см. п. 4.1). *Если отображение f принадлежит к классу C^n, то обратный гомеоморфизм $g = f^{-1}$ также является отображением класса C^n.*

[Тогда говорят, что f есть C^n-диффеоморфизм.]

Доказательство. Для $n = 1$ утверждение теоремы очевидно. Более того, как мы уже знаем, для $y \in W$

$$g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}. \tag{5.4.4}$$

Это значит, что отображение g' представляет собой композицию трех отображений:

отображения $g\colon W \to V$;

отображения $f'\colon V \to \mathrm{Isom}\,(E; F)$;

отображения $\mathrm{Isom}\,(E; F) \to \mathscr{L}(F; E)$, определенного с помощью формулы $u \longrightarrow u^{-1}$.

Доказательство мы проведем по индукции. Предположим, что утверждение справедливо для $n-1$ ($n \geqslant 2$). Тогда, по условию, второе и третье отображения принадлежат к классу C^{n-1} (а третье даже к классу C^∞ в силу теоремы 5.4.3). Что касается первого отображения g, то оно, *по предположению индукции*, принадлежит к классу C^{n-1}. Тогда отображение g' есть композиция трех отображений класса C^{n-1} и, следовательно, само принадлежит к классу C^{n-1} (теорема 5.4.2), ч. т. д.

Замечание. Если отображение $f\colon V \to W$ — диффеоморфизм класса C^n ($n \geqslant 1$) (соответственно класса C^∞) и если $f'(x) \in \operatorname{Isom}(E; F)$ для любого $x \in V$, то f является C^n-диффеоморфизмом (соответственно C^∞-диффеоморфизмом). [Для $n = 1$ утверждение совпадает с предложением 4.1.1. Объединяя его с только что доказанной теоремой 5.4.4, получаем сформулированный выше результат.]

Следствие 5.4.5. *Если в теореме* 4.2.1 *о локальном обращении предположить, что отображение f принадлежит к классу C^n, то сужение отображения f на множество V* [в обозначениях теоремы 4.2.1] *будет C^n-диффеоморфизмом V на W.*

Аналогично, если в теореме 4.7.1 *о неявных функциях предположить, что отображение $(x, y) \to f(x, y)$ принадлежит к классу C^n, то* [в обозначениях теоремы 4.7.1] *отображение $g\colon W \to F$ принадлежит к классу C^n.*

5.5. Формула Тейлора: частный случай

Начнем с предварительной формулы. Пусть E, F и G — банаховы пространства и $\varphi\colon E \times F \to G$ — непрерывное линейное отображение. Пусть, с другой стороны,

$$u\colon U \to E, \quad v\colon U \to F$$

суть $n+1$ раз дифференцируемые отображения, где U — открытый интервал *числовой прямой* $\mathbb{R}$. Предположим, что последовательные производные $u^{(i)}$, $v^{(i)}$ также являются отображениями соответственно в пространства E и F. Тогда справедлива

Лемма. *Производная отображения*

$$t \to \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \varphi\left(u^{(p)}(t),\ v^{(n-p)}(t)\right)$$

интервала U в G задается формулой

$$t \to \varphi\left(u(t),\ v^{(n+1)}(t)\right) + (-1)^n\, \varphi\left(u^{(n+1)}(t),\ v(t)\right).$$

Доказательство леммы мы предоставляем читателю (здесь нужно применить формулу для производной билинейной функции от двух функций числового переменного (см. 2.5.5)).

Применим эту лемму в следующем частном случае: $E = \mathbb{R}$, $G = F$. Отображение φ: $\mathbb{R} \times F \to F$ мы определим как умножение вектора, принадлежащего пространству F, на число. Возьмем функцию

$$u(t) = \frac{1}{n!}(1-t)^n,$$

которая принадлежит к классу C^n и $u^{(n+1)}(t) = 0$. Тогда мы получим

Предложение 5.5.1. *Если v есть $n+1$ раз дифференцируемая функция действительного переменного $t \in U$ со значениями в банаховом пространстве F, то*

$$\frac{d}{dt}\left[v(t) + (1-t)v'(t) + \ldots + \frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n)}(t)\right] = \\ = \frac{1}{n!}(1-t)^n v^{(n+1)}(t) \qquad (5.5.1)$$

(символ $(d/dt)f$ обозначает производную от функции f действительного переменного t).

Следствие 5.5.2. *Если $U \supset [0, 1]$ и производная $v^{(n+1)}$ непрерывна, то*

$$v(1) - v(0) - v'(0) - \frac{1}{2}v''(0) - \ldots - \frac{1}{n!}v^{(n)}(0) = \\ = \int_0^1 \frac{(1-\ )^n}{n!} v^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (5.5.2)$$

В самом деле, если функция $t \to f(t)$ имеет непрерывную производную f' при $t \in [0, 1]$, то, как известно[1]),

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,dt.$$

Надо применить эту формулу, полагая

$$f(t) = v(t) - (1-t)v'(t) - \ldots - \frac{1}{n!}(1-t)^n v^{n)}(t). \qquad (5.5.3)$$

Следствие 5.5.3. *Пусть выполнены условия предложения 5.5.1, и пусть*

$$\|v^{(n+1)}(t)\| \leqslant M \quad \text{для} \quad t \in [0, 1]. \qquad (5.5.4)$$

Тогда

$$\left\|v(1) - v(0) - v'(0) - \frac{1}{2}v''(0) - \ldots - \frac{1}{n!}v^{(n)}(0)\right\| \leqslant \frac{M}{(n+1)!}. \qquad (5.5.5)$$

---

[1]) См. Г. Е. Шилов «Математический анализ», ч. I, § 93.— *Прим. перев.*

Доказательство. Применим теорему 3.1.1 о конечных приращениях, заменяя в ней интервал $[a, b]$ на $[0, 1]$, функцию f на функцию, заданную формулой (5.5.3), и полагая

$$g(t) = -M\frac{(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Из соотношения (5.5.1) вытекает, что

$$\|f'(t)\| \leqslant \frac{(1-t)^n}{n!}\|v^{(n+1)}(t)\|.$$

Следовательно, в силу предложения (5.5.4),

$$\|f'(t)\| \leqslant M\frac{(1-t)^n}{n!} = g'(t).$$

По теореме о конечных приращениях 3.1.1 мы получим, что

$$\|f(1) - f(0)\| \leqslant g(1) - g(0).$$

Это неравенство совпадает с неравенством (5.5.5), которое нужно было доказать.

В следствиях 5.5.2 и 5.5.3 рассмотрены два частных случая формулы Тейлора. Теперь мы перейдем к общему случаю.

5.6. Формула Тейлора: общий случай

Пусть U — открытое множество в банаховом пространстве E и F — банахово пространство. Рассмотрим отображение

$$f\colon U \to F.$$

Обозначим через a и $a + h$ две такие точки множества U, что отрезок $[a, a + h]$ содержится в U (например, если множество выпукло, то для того, чтобы этот отрезок целиком содержался в U, достаточно, чтобы точки a, $a + h \in U$. Если же U — произвольное открытое множество и a — точка из U, то точка $a + h \in U$ для любого вектора $h \in E$ с достаточно малой нормой).

Рассмотрим функцию

$$v(t) = f(a + th), \qquad t \in [0, 1].$$

Если функция f является $n + 1$ раз дифференцируемой в U, то и функция v является $n + 1$ раз дифференцируемой (в силу теоремы о дифференцируемости сложной функции). Вычислим производные от функции v:

$$v'(t) = f'(a + th)\cdot h,$$
$$v''(t) = (f''(a + th)\cdot h)\cdot h.$$

Последнюю из них мы обозначим через $f''(a + th)\cdot(h, h)$. [Заметим, что производная $f''(a + th)$ представляет собой билинейное симметрическое отображение $E \times E \to F$.]. Для производной $v^{(n)}(t)$ мы найдем по индукции, что

$$v^{(n)}(t) = f^{(n)}(a+th)\cdot\underbrace{(h, \ldots, h)}_{n \text{ раз}}. \tag{5.6.1}$$

Обозначим для краткости элемент $(h, \ldots, h) \in E^n$ через $(h)^n$.

Наконец, в следствиях (5.5.2) и (5.5.3) мы заменим функцию v и производные от нее выражением (5.6.1). Таким образом, мы получим такой результат:

Теорема 5.6.1 («формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме»). *Пусть f: $U \to F$ — отображение класса C^{n+1}. Если отрезок $[a, a+h]$ содержится в множестве U, то*

$$\boxed{\begin{aligned} f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \frac{1}{2} f''(a)\cdot(h, h) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\cdot(h)^n + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(a+th)\cdot(h)^{n+1}\,dt. \end{aligned}} \tag{5.6.2}$$

Теорема 5.6.2 («формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа»). *Пусть f: $U \to E$ есть $n+1$ раз дифференцируемое отображение; предположим, что*

$$\| f^{(n+1)}(x) \| \leqslant M \quad \text{при} \quad x \in U. \tag{5.6.3}$$

Тогда

$$\boxed{\left\| f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h - \ldots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\cdot(h)^n \right\| \leqslant M \frac{\|h\|^{n+1}}{(n+1)!}.} \tag{5.6.4}$$

Действительно,

$$\| v^{(n+1)}(t) \| = \| f^{(n+1)}(a+th)\cdot(h, \ldots, h) \|$$

по свойству нормы $(n+1)$-линейного непрерывного отображения (см. (1.8.5)). Это выражение меньше, чем

$$\| f^{(n+1)}(a+th) \| \cdot \| h \|^{n+1},$$

а в силу условия (5.6.3) последнее произведение меньше, чем $M \cdot \| h \|^{n+1}$. Теперь достаточно применить следствие 5.5.3 (где M заменено на $M \| h \|^{n+1}$).

Таковы две «формулы Тейлора». Из них может быть выведена третья формула. Анализируя неравенство (5.6.4), мы видим, что когда h стремится к 0, правая, а следовательно, и левая части представляют собой $o(\| h \|^n)$. Но этот результат был получен в предположении, что $(n+1)$-я производная функции f ограничена в окрестности точки a. В действительности он имеет место при более слабых предположениях:

Теорема 5.6.3. *Пусть f: $U \to F$ есть $n-1$ раз дифференцируемое отображение. Предположим, что отображение f n раз дифференцируемо в точке $a \in U$. Тогда*

$$\boxed{\| f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h - \ldots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\cdot(h)^n \| = o(\| h \|^n).} \tag{5.6.5}$$

Эта «формула Тейлора» выражает только «асимптотическое» свойство. Она показывает, что происходит, *когда h стремится к нулю.*

Доказательство. При $n=1$ формула (5.6.5) — это просто *определение* производной $f'(a)$:

$$\| f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h \| = o(\| h \|).$$

Воспользуемся индукцией по n. Предположим, что формула (5.6.5) верна для $n-1$ $(n \geqslant 2)$. Рассмотрим функцию

$$\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a)\cdot h - \ldots - \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\cdot(h)^n. \tag{5.6.6}$$

Вычислим ее производную. Для этого найдем сначала производную функции $h \to f^{(n)}(a)\cdot(h)^n$. Для каждого значения h эта производная является элементом пространства $\mathscr{L}(E; F)$, т. е. линейной функцией от $k \in E$ со значениями в пространстве F. Так как производная $f^{(n)}(a)$ представляет собой n-линейную функцию $E \times \ldots \times E \to F$, то по формуле (2.4.3) можно найти ее производную для значения $(h, \ldots, h)$ переменной: это линейное отображение

$$k \to f^{(n)}(a)\cdot(k, h, \ldots, h) + f^{(n)}(a)\cdot(h, k, h, \ldots, h) + \ldots$$
$$\ldots + f^{(n)}(a)\cdot(h, \ldots, h, k).$$

Так как производная $f^{(n)}(a)$ есть *симметрическое* отображение, то $k \to nf^{(n)}(a)\cdot(h, \ldots, h, k)$. Это соответствие можно интерпретировать следующим образом: рассмотрим $f^{(n)}(a)$ как производную порядка $n-1$ от отображения f': $U \to \mathscr{L}(E; F)$. Это $(n-1)$-линейное симметрическое отображение в пространство $\mathscr{L}(E; F)$. Обозначим через

$$f^{(n)}(a)\cdot\underbrace{(h, \ldots, h)}_{n-1 \text{ раз}} = f^{(n)}(a)\cdot(h)^{n-1}$$

образ мультивектора $(h, \ldots, h)$, принадлежащий пространству $\mathscr{L}(E; F)$. Тогда мы установим, чт опроизводной от функции

$$h \to \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)\cdot(h)^n \qquad (\text{отображение } E \to F)$$

будет функция

$$h \to \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a) \cdot (h)^{n-1} \quad (\text{отображение } E \to \mathscr{L}(E; F)).$$

В результате мы найдем, что производная от функции φ, определенной формулой (5.6.6), запишется так:

$$\varphi'(h) = f'(a+h) - f'(a) - \ldots - \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a) \cdot (h)^{n-1}.$$

Применяя предположение индукции к функции f', получим:

$$\| \varphi'(h) \| = o(\| h \|^{n-1}).$$

Другими словами, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что из неравенства

$$\| h \| \leqslant \eta \quad \text{следует} \quad \| \varphi'(h) \| \leqslant \varepsilon \| h \|^{n-1}.$$

Отсюда в силу теоремы о конечных приращениях вытекает, что

$$\| \varphi(h) - \varphi(0) \| \leqslant \varepsilon \| h \|^n \text{ для } \| h \| \leqslant \eta.$$

Но $\varphi(0) = 0$. Таким образом,

$$\| \varphi(h) \| = o(\| h \|^n),$$

а это и есть формула (5.6.5), которую нужно было доказать.

§ 6. ПОЛИНОМЫ

Формула Тейлора (см. п. 5.6) определяет функцию от $h \in E$:

$$h \to \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot \underbrace{(h, \ldots, h)}_{n \text{ раз}},$$

где производная $f^{(n)}(a)$ есть полилинейное симметрическое отображение $E^n \to F$. Это приводит нас к общему понятию *однородного полиномиального отображения степени n пространства E в F.*

Прежде всего мы займемся чисто алгебраической стороной этого вопроса.

6.1. Однородные полиномы степени n

В этом и следующих пунктах K означает коммутативное поле характеристики нуль, т. е. поле, содержащее в себе поле отношений $\mathbb{Q}$. Нет необходимости предполагать, что поле K есть $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. В частности, поле K может совпадать с полем $\mathbb{Q}$. Все векторные пространства рассматриваются как векторные пространства над полем K конечной или бесконечной размерности.

Определение. Пусть E и F — векторные пространства и n — целое число $\geqslant 1$. Отображение $\varphi: E \to F$ называется *однородным полиноминальным отображением* степени n, если существует такое n-линейное отображение

$$f: \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ раз}} \to F,$$

что

$$\varphi(x) = f(x, \ldots, x). \tag{6.1.1}$$

В этом случае также говорят, что φ есть однородный полином степени n (определенный в пространстве E и принимающий значения в пространстве F).

Равенство (6.1.1) показывает, что отображение $\varphi: E \to F$ является композицией двух отображений

$$E \xrightarrow{\Delta} E^n \xrightarrow{f} F,$$

где отображение f полилинейно, а Δ обозначает диагональное отображение

$$\Delta(x) = \underbrace{(x, \ldots, x)}_{n \text{ раз}}.$$

Предложение 6.1.1. *Если отображение $\varphi: E \to F$ является однородным полиномом степени n, то существует такое полилинейное симметрическое отображение $g: E^n \to F$, что*

$$\varphi(x) = g(x, \ldots, x). \tag{6.1.2}$$

В самом деле, если f — полилинейное отображение $E^n \to F$, для которого имеет место равенство (6.1.1), то достаточно взять

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

где суммирование ведется по $n!$ перестановкам σ чисел $[1, 2, \ldots, n]$.

Замечание. Далее мы увидим (следствие 6.3.3), что существует *единственное* n-линейное *симметрическое* отображение g, которое удовлетворяет условию (6.1.2) для заданного однородного полинома φ степени n.

Пример. Однородный полином степени 1, заданный на пространстве E и принимающий значения в пространстве F, является *линейным отображением* $E \to F$.

Условимся, что *константа* является однородным полиномом степени $n = 0$ (постоянное отображение $E \to F$).

Замечание. Если φ: $E \to F$ — однородный полином степени n, то

$$\varphi(\lambda x) = \lambda^n \varphi(x) \quad \text{для любого числа} \quad \lambda \in K. \tag{6.1.3}$$

В самом деле, соотношение (6.1.1) дает

$$\varphi(\lambda x) = f(\lambda x, \ldots, \lambda x) = \lambda^n f(x, \ldots, x) = \lambda^n \varphi(x).$$

Предложение 6.1.2. *Множество однородных полиномов $E \to F$ степени n образует подпространство векторного пространства всех отображений $E \to F$.*

Напомним, что структура векторного пространства на множестве всех отображений E в F вводится следующим образом: суммой $\varphi + \psi$ двух отображений называется отображение

$$x \to \varphi(x) + \psi(x);$$

произведением $\lambda\varphi$ отображения φ: $E \to F$ на скаляр $\lambda \in K$ называется отображение $x \to \lambda \cdot \varphi(x)$. В этом определении используется структура векторного пространства. Предложение 6.1.2 очевидно, поскольку n-линейные функции $E^n \to F$ образуют векторное пространство.

Умножение однородных полиномов. Пусть

$$\varphi\colon E \to F, \quad \psi\colon E \to G$$

суть два однородных полинома: φ — степени p и ψ — степени q. Здесь E, F и G — векторные пространства. Если при этом заданы еще одно векторное пространство H и *билинейное* отображение

$$\Phi\colon F \times G \to H,$$

то можно определить «произведение» функций φ и ψ относительно отображения Φ. Это функция

$$x \to \Phi(\varphi(x), \psi(x)),$$

определенная в пространстве E и принимающая значения в пространстве H.

Предложение 6.1.3. *Произведение однородного полинома φ степени p и однородного полинома ψ степени q есть однородный полином степени $p + q$.*

Доказательство. Пусть f: $E^p \to F$ и g: $E^q \to G$ — два таких полилинейных отображения, что

$$\varphi(x) = f(x, \ldots, x), \quad \psi(x) = g(x, \ldots, x).$$

Определим отображение h: $E^{p+q} \to H$ с помощью формулы

$$h(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \Phi(f(x_1, \ldots, x_p), \; g(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})).$$

Ясно, что h — полилинейное отображение. Более того,

$$h(x, \ldots, x) = \Phi(\varphi(x), \psi(x)),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Применим предыдущее предложение к случаю, когда $G = K$, $H = F$, а отображение $\Phi\colon F \times K \to F$ сводится к умножению вектора, принадлежащего пространству F, на скаляр. Если, кроме того, мы предположим, что $F = K$, то получим *умножение однородных полиномов с числовыми значениями*. Оно коммутативно и ассоциативно.

6.2. Полиномы, не обязательно однородные

Определение. Отображение $\varphi\colon E \to F$ есть *полином* (не обязательно однородный), если существуют такие целые числа n и однородные полиномы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (полином φ_i имеет степень i), что

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_n \tag{6.2.1}$$

(речь идет о сложении в векторном пространстве отображений $E \to F$).

Замечание. Из определения непосредственно не видно, однозначно ли отображение φ определяет полиномы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Ниже мы увидим (следствие 6.3.2), что это так.

Когда имеет место разложение (6.2.1), то говорят, что степень полинома φ меньше или равна n. Всякий полином степени $\leqslant n$ является в то же время полиномом степени $\leqslant p$, каково бы ни было $p \geqslant n$. Полиномы степени $\leqslant 0$ представляют собой постоянные функции. Условимся говорить, что полиномы, тождественно равные нулю, имеют степень < 0.

Полиномы $E \to F$ степени $\leqslant n$, очевидно, образуют векторное пространство.

Что касается умножения полиномов (относительно билинейного отображения $\Phi\colon F \times G \to H$, как это делалось выше), то ясно, что произведение полинома $\varphi\colon E \to F$ степени $\leqslant p$ и полинома $\psi\colon E \to G$ степени $\leqslant q$ является полиномом $E \to H$ степени $\leqslant p + q$. В самом деле,

$$\Phi(\varphi(x), \psi(x)) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} \Phi(\varphi_i(x), \psi_j(x))$$

и отображение $x \to \Phi(\varphi_i(x), \psi_j(x))$ есть однородный полином степени $i + j$ (предложение 6.1.3). В частности, можно рассмотреть *алгебру полиномов* $E \to K$ (полиномов, принимающих числовые значения).

Первый пример. Предположим, что $E = K$ (K рассматривается как векторное пространство размерности один). Всякое n-линейное отображение

$$K^n \to F$$

имеет вид

$$(x_1, \ldots, x_n) \to x_1 \ldots x_n c,$$

где $c \in F$. Если заменить все $x_i \in K$ на одно и то же $x \in K$, то видно, что *любой однородный полином степени* n, отображающий поле K в пространство F, имеет вид

$$x \to x^n c \qquad (c \in F).$$

В частном случае, когда $F = K$, однородный полином степени n является функцией числового переменного x вида

$$x \to cx^n,$$

где $c \in K$ — скаляр. Это соответствует классическому понятию полинома от одного переменного.

Обобщая случай, разобранный в первом примере, найдем, когда отображение $K^p \to F$ является однородным полиномом φ степени n (мы только что обсудили случай $p = 1$). Для этого построим сначала полилинейные отображения

$$f\colon \underbrace{K^p \times \ldots \times K^p}_{n \text{ раз}} \to F,$$

а затем применим формулу (6.1.1) для нахождения отображения φ. Пусть $x^1, \ldots, x^n$ суть n векторов, принадлежащих K^p; каждый из них, например x^i, имеет p координат

$$x_1^i, \ldots, x_p^i.$$

Обозначим через $(e_1, \ldots, e_p)$ канонический базис в пространстве K^p: тогда

$$x^i = \sum_{j=1}^{p} x_j^i e_j.$$

В силу полилинейности отображения f,

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{j_1, \ldots, j_n} x_{j_1}^1 \ldots x_{j_n}^n f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}),$$

где целые числа $j_1, \ldots, j_n$ изменяются независимо друг от друга от 1 до p. Положим

$$f(e_{j_1}, \ldots, e_{j_n}) = c_{j_1, \ldots, j_n} \in F.$$

Мы видим, что функция f записывается с помощью координат n векторов $x^1, \ldots, x^n$ следующим образом:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{j_1, \ldots, j_n} x_{j_1}^1 \ldots x_{j_n}^n c_{j_1, \ldots, j_n}.$$

Обратно, всякая функция такого вида, как выражение, стоящее в правой части этого равенства, представляет собой полилинейное отображение $K^p \times \ldots \times K^p \to F$.

Упражнение. Каким условиям должны удовлетворять «коэффициенты» $c_{j_1, \ldots, j_n}$ для того, чтобы отображение f было *симметрическим* по $x^1, \ldots, x^n$?

Вычислим функцию $f(x, \ldots, x)$; если

$$x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j,$$

то всякий полином φ: $K^p \to E$ есть выражение вида

$$\varphi(x) = \sum_{j_1, \ldots, j_n} x_{j_1} \ldots x_{j_n} c_{j_1, \ldots, j_n}, \tag{6.2.2}$$

где $c_{j_1, \ldots, j_n} \in F$. Здесь целые числа $j_1, \ldots, j_n$ пробегают независимо друг от друга множество значений $[1, \ldots, p]$.

Пусть в наборе индексов $(j_1, \ldots, j_n)$ число i (где $1 \leqslant i \leqslant p$) встречается α_i раз. Очевидно, что $\alpha_i \geqslant 0$. Тогда

$$x_{j_1} \ldots x_{j_n} = (x_1)^{\alpha_1} \ldots (x_p)^{\alpha_p},$$

причем $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$. Заметим, что, вообще говоря, имеется несколько наборов чисел $(j_1, \ldots, j_n)$, приводящих к одной и той же системе показателей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Все такие наборы получаются из одного с помощью перестановки чисел $j_1, \ldots, j_n$. Сгруппировав в сумме (6.2.2) члены с одной и той же системой показателей, мы получим в результате, что

$$\varphi(x) = \sum (x_1)^{\alpha_1} \ldots (x_p)^{\alpha_p} d_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}, \tag{6.2.3}$$

где «коэффициенты» $d_{\alpha_1, \ldots, \alpha_p}$ принадлежат пространству F, а суммирование ведется по множеству последовательностей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ с целыми $\alpha_i \geqslant 0$, такими, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_p = n$. Обратно, функция φ, определенная по формуле (6.2.3), является однородным полиномом степени n.

Теперь можно найти (предлагаем читателю сделать это в качестве упражнения) общий вид такого n-линейного *симметрического* отображения f, что $\varphi(x) = f(x, \ldots, x)$.

Формула (6.2.3) показывает, что классический однородный полином n-й степени от скалярных переменных $x_1, \ldots, x_p$ является частным случаем рассмотренного нами однородного полинома.

6.3. Последовательные «разности» полиномов

Пусть φ: $E \to F$ — *произвольная* функция (где E и F — векторные пространства над полем K). Определим для $h \in E$ отображение $\Delta_h\varphi$: $E \to F$ формулой

$$(\Delta_h\varphi)(x) = \varphi(x + h) - \varphi(x) \tag{6.3.1}$$

[эта функция от $x \in E$ зависит от параметра $h \in E$]. К полученной функции можно применить ту же самую операцию: если $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, то $\Delta_{x_2}(\Delta_{x_1}\varphi)$ есть функция вида

$$x \to (\Delta_{x_1}\varphi)(x + x_2) - (\Delta_{x_1}\varphi)(x) =$$
$$= \varphi(x + x_1 + x_2) - \varphi(x + x_1) - \varphi(x + x_2) + \varphi(x). \quad (6.3.2)$$

Будем обозначать через $\Delta_{x_2}\Delta_{x_1}\varphi$ функцию $\Delta_{x_2}(\Delta_{x_1}\varphi)$. Заметим, что, согласно предыдущей формуле, она зависит от x_1 и x_2 симметрично:

$$\Delta_{x_2}\Delta_{x_1}\varphi = \Delta_{x_1}\Delta_{x_2}\varphi.$$

Эта функция называется *второй разностью* функции φ относительно $x_1, x_2 \in E$. [Вторая разность уже использовалась в доказательстве теоремы 5.1.1.] Определим по индукции n-ю разность

$$\Delta_{x_n}\Delta_{x_{n-1}} \ldots \Delta_{x_1}\varphi = \Delta_{x_n}(\Delta_{x_{n-1}} \ldots \Delta_{x_1}\varphi)$$

как сумму 2^n функций, каждая из которых имеет вид

$$x \to (-1)^{n-p}\varphi(x + x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}). \quad (6.3.3)$$

Здесь набор индексов $i_1 < \ldots < i_p$ образован элементами последовательности $[1, 2, \ldots, n]$. Можно установить по индукции, что n-я разность $\Delta_{x_n}\Delta_{x_{n-1}} \ldots \Delta_{x_1}\varphi$ является *симметрической* функцией переменных $x_1, \ldots, x_n$; раньше это было установлено для случая $n = 2$.

Вот основной результат алгебраической теории полиномов:

Теорема 6.3.1. *Пусть $\varphi = \varphi_0 + \ldots + \varphi_n$ есть полином $E \to F$ степени $\leqslant n$, и пусть f_n: $E^n \to F$ — такое полилинейное симметрическое отображение, что*

$$\varphi_n(x) = f_n(x, \ldots, x) \quad (6.3.4)$$

[известно, что такое отображение f_n существует,— см. предложение 6.1.1]. *Тогда*

(i) *первая разность $\Delta_h\varphi$: $E \to F$ является полиномом степени $\leqslant n - 1$.*

(ii) *n-я разность $\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n}\varphi$ постоянна и*

$$\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n}\varphi = n!\, f_n(x_1, \ldots, x_n) \quad (\textit{не зависит от } x \in E). \quad (6.3.5)$$

Прежде чем доказывать теорему, извлечем из нее несколько важных следствий.

Следствие 6.3.2. *Задание полинома φ степени $\leqslant n$ определяет, и притом единственным образом, однородные полиномы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$, такие, что*

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i.$$

Докажем это утверждение индукцией по n. Для $n=0$ наше утверждение очевидно: полином φ степени $\leqslant 0$ сводится по определению к константе φ_0. Предположим, что следствие доказано для $n-1$ (при $n \geqslant 1$) и докажем его для n. Согласно условию (ii) теоремы 6.3.1, задание полинома φ позволяет вычислить f_n, а, следовательно, в силу (6.3.4), и φ_n. Следовательно, если полином φ задан, то полином φ_n определен единственным образом. Но тогда известна разность $\varphi - \varphi_n$, которая является полиномом степени $\leqslant n-1$; к ней можно применить предположение индукции, ч. т. д.

Терминология: полином φ_i называется *однородной компонентой степени* i полинома φ.

Следствие 6.3.3. *Пусть $\varphi_n\colon E \to F$ — однородный полином степени n. Тогда существует единственное полилинейное симметрическое отображение $f_n\colon E^n \to F$, удовлетворяющее соотношению* (6.3.4).

В силу условия (ii) теоремы 6.3.1, примененному к $\varphi = \varphi_n$, получаем

$$f_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n} \varphi_n.$$

Обозначение. Эту однозначно определенную полилинейную симметрическую функцию, ассоциированную с φ_n, мы будем обозначать через $\widetilde{\varphi}_n$. Следовательно, имеют место два основных соотношения:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_n(x) &= \widetilde{\varphi}_n(x, \ldots, x), \\ \widetilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{n!} \Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n} \varphi_n, \end{aligned}} \tag{6.3.6}$$

которые позволяют переходить от $\widetilde{\varphi}_n$ к φ_n и обратно.

Доказательство теоремы 6.3.1 проводится по индукции. Теорема верна для $n=1$, ибо если $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, то n-я разность

$$(\Delta_h \varphi)(x) = \varphi_0 + \varphi_1(x+h) - \varphi_0 - \varphi_1(x) = \varphi_1(h)$$

является константой (не зависящей от x). Это условие (i). Более того, эта константа есть $\varphi_1(h)$, откуда следует формула (6.3.5), так как $\varphi_1 = f_1$, согласно (6.3.4). Предположим, что теорема верна для $n-1$ ($n \geqslant 2$), и докажем ее для n. Имеем

$$\Delta_h \varphi = \Delta_h \varphi_n + \Delta_h(\varphi_0 + \ldots + \varphi_{n-1}).$$

По предположению индукции, $\Delta_h(\varphi_0 + \ldots + \varphi_{n-1})$ есть полином степени $\leqslant n-2$. Вычислим

$$\begin{aligned}(\Delta_h \varphi_n)(x) &= \varphi_n(x+h) - \varphi_n(x) = \\ &= f_n(x+h, \ldots, x+h) - f_n(x, \ldots, x).\end{aligned}$$

Если расписать эту разность более подробно, принимая во внимание тот факт, что отображение f_n полилинейно и *симметрично*, то мы получим соотношение

$$(\Delta_h \varphi_n)(x) = nf_n\underbrace{(x, \ldots, x, h)}_{n-1 \text{ раз}} + \ldots,$$

где точки обозначают полином от x степени $\leqslant n-2$. В результате мы найдем, что

$$(\Delta_h \varphi)(x) = nf_n(x, \ldots, x, h) + \psi(x, h),$$

где ψ — полином от x степени $\leqslant n-2$, а $nf_n(x, \ldots, x, h)$ — однородный полином от x степени $n-1$. Тем самым доказано утверждение (i). Положим

$$\Delta_{x_n}\varphi = \psi_{n-1} + \psi_{n-2} + \ldots + \psi_0,$$

где ψ_i — однородный полином от x степени i (зависящий, помимо этого, от параметра x_n), где

$$\psi_{n-1}(x) = g_{n-1}(x, \ldots, x).$$

Здесь g_{n-1} — полилинейная *симметрическая* функция, определенная формулой

$$g_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = nf_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \tag{6.3.7}$$

[функция g_{n-1} зависит от параметра x_n].

Теперь мы можем применить предположение индукции к полиному $\Delta_{x_n}\varphi$ степени $\leqslant n-1$: условие (ii) (для $n-1$) показывает, что $\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_{n-1}}(\Delta_{x_n}\varphi)$ есть константа, которая равна $(n-1)!\, g_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$. Если подставить сюда выражение для g_{n-1} из (6.3.7), то мы получим формулу (6.3.5), ч. т. д.

6.4. Случай, когда E и F — нормированные векторные пространства

В этом пункте рассматриваются нормированные векторные пространства над полями $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Мы изучим вопрос о *непрерывности* полинома $\varphi = \varphi_1 + \ldots + \varphi_n\colon E \to F$. Символом $\tilde{\varphi}_i$ обозначим i-линейную *симметрическую* функцию, ассоциированную с компонентой φ_i полинома φ. Заметим, что $\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0$ (константа) и $\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1$ (линейная функция).

Теорема 6.4.1. *Следующие условия эквивалентны:*

(a) $\tilde{\varphi}_0, \ldots, \tilde{\varphi}_n$ — *непрерывные функции*;

(b) $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ — *непрерывные функции*;

(c) *полином* φ — *непрерывная функция*;

(d) *полином* φ *непрерывен в начале координат*;

(e) *существует такое число* $r > 0$, *что норма* $\|\varphi(x)\|$ *ограничена при* $\|x\| \leqslant r$;

(f) *для любого числа* $r > 0$ *норма* $\| \varphi(x) \|$ *ограничена в шаре* $\| x \| \leqslant r$.

[Таким образом, условия (a), (b), (d), (e), (f) являются критериями непрерывности полинома φ.]

Доказательство. Очевидно, что (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d). Покажем, что условие (d) влечет за собой условие (a), откуда вытекает эквивалентность условий (a), (b), (c), (d). Предположим, что полином φ непрерывен в начале координат. Согласно формуле (6.3.5), имеем

$$\tilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n}\varphi.$$

В силу формулы (6.3.3), правая часть этого равенства представляет собой сумму 2^n слагаемых вида

$$\frac{(-1)^{n-p}}{n!} \varphi(x_{i_1} + \ldots + x_{i_p}) \tag{6.4.1}$$

[в формуле (6.3.3) можно положить $x = 0$, так как в действительности $\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n}\varphi$ — константа, не зависящая от x]. Ясно, что каждое из выражений (6.4.1) представляет собой функцию от $x_1, \ldots$ $\ldots, x_n$, *непрерывную в начале координат* $(0, \ldots, 0)$, поскольку функция $\varphi(x)$ непрерывна, по предположению, в начале координат. Следовательно, функция $\tilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывна в начале координат. Так как $\tilde{\varphi}_n$ полилинейна, то она непрерывна всюду (см. теорему 1.8.1). Отсюда следует, что функция

$$\varphi_n(x) = \tilde{\varphi}_n(x, \ldots, x)$$

непрерывна всюду и, в частности, непрерывна при $x = 0$. Поэтому разность

$$\varphi - \varphi_n = \varphi_0 + \ldots + \varphi_{n-1}$$

непрерывна в начале координат, и степень этого полинома $\leqslant n - 1$. Основываясь на этом выводе, мы можем доказать по индукции, что из (d) следует (a), поскольку эта импликация тривиальна при $n = 0$.

Покажем, что (a) $\Rightarrow$ (f) $\Rightarrow$ (e) $\Rightarrow$ (a); отсюда будет следовать эквивалентность всех сформулированных условий. Сначала докажем, что (a) $\Rightarrow$ (f). Предположим, что функции $\tilde{\varphi}_0, \ldots, \tilde{\varphi}_n$ непрерывны, и пусть задано число $r > 0$. Для любого $i \leqslant n$ норма

$$\| \tilde{\varphi}_i(x_1, \ldots, x_i) \|$$

ограничена при $\| x_1 \| \leqslant r, \ldots, \| x_i \| \leqslant r$. Следовательно, и норма

$$\| \varphi_i(x) \| = \| \tilde{\varphi}_i(x, \ldots, x) \|$$

ограничена при $\|x\| \leqslant r$. Отсюда вытекает, что норма

$$\|\varphi(x)\| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \|\varphi_i(x)\|$$

также ограничена при $\|x\| \leqslant r$. Таким образом, утверждение (f) доказано.

Импликация (f) $\Rightarrow$ (e) очевидна.

Наконец, остается показать, что из (e) следует (a). Будем вести доказательство индукцией по n. Этот факт очевиден при $n = 0$. Предположим, что он справедлив для $n - 1$ и докажем его для n. По предположению, найдутся такие числа $r > 0$ и $M > 0$, что при $\|x\| \leqslant r$ имеет место неравенство $\|\varphi(x)\| \leqslant M$. В силу (6.4.1), при $\|x_i\| \leqslant r/n$

$$\|\tilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant \frac{2^n}{n!} M.$$

Следовательно, полилинейное отображение $\tilde{\varphi}_n$ непрерывно (см. теорему 1.8.1) и норма $\|\tilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n)\|$ ограничена при $\|x_i\| \leqslant r$. Отсюда вытекает, что норма $\|\varphi_n(x)\|$ ограничена при $\|x\| \leqslant r$. Поэтому норма $\|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|$ ограничена при $\|x\| \leqslant r$, и мы можем применить предположение индукции к полиному $\varphi - \varphi_n = \varphi_0 + \ldots + \varphi_{n-1}$. Отсюда следует, что функции $\tilde{\varphi}_0, \ldots, \tilde{\varphi}_{n-1}$ непрерывны, а поскольку уже доказана непрерывность $n - 1$ функции $\tilde{\varphi}_n$, условие (a) оказывается выполненным. Доказательство теоремы 6.4.1 закончено.

Замечание. Если векторное пространство E имеет *конечную размерность*, то всякое полилинейное отображение $E^n \to F$ непрерывно. Тогда имеет место условие (a) теоремы 6.4.1. Отсюда вытекает, что *всякий полином* φ: $E \to F$ *непрерывен*, если пространство E имеет конечную размерность.

§ 7. ОГРАНИЧЕННЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

7.1. Определения

Пусть E и F — банаховы пространства и V — открытое множество в E, содержащее начало координат $0 \in E$. Пусть n — целое число $\geqslant 0$. Говорят, что отображение g: $V \to F$ имеет *касание n-го порядка к нулевому отображению* в начале координат, если

$$\|g(x)\| = o(\|x\|^n).$$

При $n = 1$ мы приходим к понятию отображения, касательного к нулевому отображению (см. п. 2.1). В общем случае также говорят, что отображение g является n-касательным к нулевому отображению в начале координат. Ясно, что если g имеет касание $(n+1)$-го порядка к нулевому отображению, то g является n-касательным к нулевому отображению.

Это понятие позволяет ввести *отношение эквивалентности* между отображениями $V \to F$. Пусть даны отображения g_1 и g_2. Говорят, что отображение g_1 является n-касательным к отображению g_2 в начале координат, если их разность $g_1 - g_2$ имеет касание n-го порядка к нулевому отображению в начале координат.

Предложение 7.1.1. *Если отображение g: $V \to F$ является n-касательным к нулевому отображению в начале координат, то*

$$\| \Delta_{x_1} \dots \Delta_{x_n} g)(0) \| = o((\| x_1 \| + \dots + \| x_n \|)^n). \tag{7.1.1}$$

Доказательство. В силу (6.4.1) нам достаточно показать, что

$$\| g(x_{i_1} + \dots + x_{i_p}) \| = o((\| x_1 \| + \dots + \| x_n \|)^n),$$

где $1 \leqslant i_1 < \dots < i_p \leqslant n$. Это очевидно.

Определение. Пусть U — открытое множество в банаховом пространстве E, и пусть f: $U \to F$ — функция, принимающая значения в банаховом пространстве F. Зафиксируем точку $a \in U$. Полином φ: $E \to F$ степени $\leqslant n$ является *ограниченным разложением порядка n для функции f в точке a*, если

$$\| f(a + x) - \varphi(x) \| = o(\| x \|^n).$$

Иначе говоря, мы требуем, чтобы отображение $x \to f(a + x)$ было n-касательным к полиному φ в начале координат.

Замечание. Нельзя быть заранее уверенным в том, что для заданной функции f существует полином φ, который является ее ограниченным разложением порядка n в точке a. Однако если такой полином φ существует, то он единствен. В самом деле, имеет место

Предложение 7.1.2. *Если φ_1 и φ_2 — два ограниченных разложения порядка n функции f в точке a, то $\varphi_1 = \varphi_2$.*

Доказательство. Положим $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$. Тогда отображение φ является n-касательным к нулевому отображению в начале координат. Нам достаточно доказать следующую лемму:

Лемма. *Если полином φ: $E \to F$ степени $\leqslant n$ является n-касательным к нулевому отображению в начале координат, то φ тождественно равно нулю.*

Доказательство леммы. Воспользуемся методом индукции. Для $n=0$ лемма тривиальна. В самом деле, если постоянная есть $o(1)$, то она равна нулю. Предположим, что лемма справедлива для $n-1$, и докажем ее для n. Пусть

$$\varphi=\varphi_0+\ldots+\varphi_n.$$

Имеем в силу (6.3.5), что

$$\tilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n)=\frac{1}{n!}\Delta_{x_1}\ldots\Delta_{x_n}\varphi.$$

Так как отображение φ по предположению n-касательно к нулевому отображению в начале координат, то из равенства (7.1.1) получаем, что

$$\|\Delta_{x_1}\ldots\Delta_{x_n}\varphi\|=o((\|x_1\|+\ldots+\|x_n\|)^n).$$

Значит, для каждого числа $\varepsilon>0$ существует такое число η, что

$$\|\tilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n)\|\leqslant\varepsilon(\|x_1\|+\ldots+\|x_n\|)^n \tag{7.1.2}$$

при $\|x_1\|+\ldots+\|x_n\|\leqslant\eta$. Но тогда это неравенство имеет место для произвольных $x_1, \ldots, x_n$, поскольку в силу полилинейности заданной функции $\tilde{\varphi}_n$

$$\|\tilde{\varphi}_n(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)\|=|\lambda|^n\cdot\|\tilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n)\|.$$

Итак, неравенство (7.1.2) имеет место для любых $x_1, \ldots, x_n$. Поскольку число $\varepsilon>0$ можно выбрать произвольно, отсюда следует, что

$$\tilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n)=0 \quad \text{для любых } x_1, \ldots, x_n.$$

Следовательно, $\varphi_n\equiv 0$ и степень φ меньше или равна $n-1$. Более того, отображение φ является $(n-1)$-касательным к нулевому отображению в начале координат. Применяя предположение индукции, заключаем, что функция φ тождественно равна нулю, ч. т. д.

Учитывая предложение 7.1.2, можно говорить об ограниченном разложении порядка n для функции f в точке a, если это ограниченное разложение существует!

Замечание относительно непрерывности. Легко видеть, что функция, n-касающаяся нулевой функции в начале координат, непрерывна в начале координат. Следовательно, если полином $\varphi(x)$ степени $\leqslant n$ является n-касательным к функции $f(x+a)$, то *из непрерывности φ в начале координат следует непрерывность функции f в точке a, и обратно.* Далее мы будем всегда предполагать функцию f *непрерывной.* Тогда ограниченное разложение φ порядка n для функции f будет непрерывным полиномом (так как полином φ непрерывен в начале координат, то он непрерывен всюду в силу теоремы 6.4.1).

Определение. Пусть $\varphi=\sum_{i=0}^{n}\varphi_i$ есть полином степени $\leqslant n$ и p —

целое число $< n$. Полином $\sum\limits_{i=0}^{p} \varphi_i$ называется *отрезком полинома* φ *порядка* p.

Предложение 7.1.3. *Предположим, что непрерывная функция* $f\colon U \to F$ *имеет в точке* $a \in U$ *ограниченное разложение* φ *порядка* n. *Тогда, если полином* ψ *является отрезком полинома* φ *порядка* $p < n$, *то* ψ — *ограниченное разложение порядка* p *для функции* f *в точке* a.

Доказательство. Пусть $\varphi = \sum\limits_{i=0}^{n} \varphi_i$. Однородные полиномы φ_i *непрерывны*; следовательно,

$$\varphi_i(x) = o(\|x\|^i).$$

Далее, при $i > p$

$$\varphi_i(x) = o(\|x\|)^p.$$

Поэтому

$$\left\| f(x+a) - \sum_{i=0}^{p} \varphi_i(x) \right\| \leqslant \left\| f(x+a) - \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) \right\| + \left\| \sum_{i=p+1} \varphi_i(x) \right\|$$

и, следовательно, правая часть есть $o(\|x\|^n) + o(\|x\|^p)$ и, следовательно, $o(\|x\|^p)$, ч. т. д.

Предложение 7.1.4. *Если непрерывное отображение* $f\colon U \to F$ *допускает в точке* $a \in U$ *ограниченное разложение порядка* n:

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x),$$

то

$$\|(\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n} f)(a) - n!\,\tilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n)\| = o((\|x_1\| + \ldots + \|x_n\|)^n).$$

Доказательство. Применим предложение 7.1.1 к функции

$$g(x) = f(x+a) - \varphi(x)$$

и заметим, что в силу равенства (6.3.5)

$$\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n} \varphi = n!\,\tilde{\varphi}_n(x_1, \ldots, x_n).$$

Пояснение. Предположим, что непрерывная функция f допускает ограниченное разложение порядка n в точке a. Тогда значение n-й разности $\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n} f$ в точке a представляет собой «почти» полилинейную симметрическую (и непрерывную) функцию от $x_1, \ldots, x_n$. Здесь термин «почти» означает, что ошибка является бесконечно малой величиной порядка $> n$, т. е. величиной

$$o((\|x_1\| + \ldots + \|x_n\|)^n).$$

7.2. Случай, когда функция f дифференцируема n раз в точке a

В этом случае из формулы Тейлора (теорема 5.6.3) следует, что функция f имеет ограниченное разложение φ порядка n в точке a:

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(x),$$

где

$$\varphi_i(x)=\frac{1}{i!}f^{(i)}(a)\cdot\underbrace{(x,\ \ldots,\ x)}_{i\ \text{раз}}.$$

Поэтому функция φ_i является однородным полиномом, ассоциированным с полилинейной симметрической функцией

$$\tilde{\varphi}_i=\frac{1}{i!}f^{(i)}(a)\in\mathscr{L}_i(E;\ F).$$

Из полученного результата и предложения 7.1.4 сразу же вытекает

Предложение 7.2.1. *Если отображение f: $U\to F$ дифференцируемо n раз в точке a, то*

$$\|(\Delta_{x_1}\ \ldots\ \Delta_{x_n}f)(a)-f^{(n)}(a)\cdot(x_1,\ \ldots,\ x_n)\|=$$
$$=o((\|x_1\|+\ldots+\|x_n\|)^n). \qquad (7.2.1)$$

Пояснение. n-я разность отображения f в точке a «почти» равна n-й производной f в этой точке. Значение термина «почти» было пояснено выше.

Упражнение. Пусть f: $U\to F$ — непрерывное отображение и задана звездная окрестность U начала координат $0\in E$. Предположим, что существует n-я производная $f^{(n)}(0)$ и что

$$f(tx)=t^nf(x)$$

при $x\in U$, $0\leqslant t\leqslant 1$. Показать, что тогда f — однородный полином степени n.

7.3. Операции над ограниченными разложениями

Сложение. Пусть f: $U\to F$ и g: $U\to F$ — непрерывные отображения (U — открытое множество в банаховом пространстве F). Если f имеет в точке $a\in U$ ограниченное разложение φ порядка n и g имеет в точке a ограниченное разложение ψ порядка n, то сумма $\varphi+\psi$ является ограниченным разложением порядка n отображения $f+g$. [Доказательство существования подобной суммы предоставляем читателю.]

Умножение. Пусть заданы банаховы пространства E, F, G, H и билинейное непрерывное отображение $\Phi\colon F \times G \to H$. Пусть U — открытое множество в E и

$$f\colon U \to F, \qquad g\colon U \to G$$

суть непрерывные отображения. Их «произведением» относительно отображения Φ называется отображение $h\colon U \to H$, определенное формулой

$$h(x) = \Phi(f(x), g(x)).$$

Предложение 7.3.1. *Пусть отображение f имеет в точке $a \in U$ ограниченное разложение φ порядка n и отображение g имеет в точке a ограниченное разложение ψ порядка n. Рассмотрим отрезок порядка n полинома*

$$\lambda(x) = \Phi(\varphi(x), \psi(x)).$$

Тогда полученный таким образом полином $\mu\colon E \to H$ является ограниченным разложением порядка n отображения h в точке a.

Доказательство. Имеем

$$f(x+a) = \varphi(x) + r(x), \qquad g(x+a) = \psi(x) + s(x),$$

где

$$\| r(x) \| = o(\| x \|^n), \qquad s(x) = o(\| x \|^n).$$

Тогда

$$\Phi(f(x+a), g(x+a)) - \Phi(\varphi(x), \psi(x)) =$$
$$= \Phi(\varphi(x), s(x)) + \Phi(r(x), \psi(x)) + \Phi(r(x), s(x)).$$

Пусть $A = \| \Phi \|$ (норма билинейного непрерывного отображения; см. п. 1.8). Так как

$$\| \Phi(\varphi(x), s(x)) \| \leqslant A \, \| \varphi(x) \| \cdot \| s(x) \| = o(\| x \|^n),$$
$$\| \Phi(r(x), \psi(x)) \| \leqslant A \, \| r(x) \| \cdot \| \psi(x) \| = o(\| x \|^n),$$
$$\| \Phi(r(x), s(x)) \| \leqslant A \, \| r(x) \| \cdot \| s(x) \| = o(\| x \|^n),$$

то

$$\| \Phi(f(x+a), g(x+a)) - \Phi(\varphi(x), \psi(x)) \| = o(\| x \|^n).$$

Следовательно, разность между полиномом $\lambda(x) = \Phi(\varphi(x), \psi(x))$ и полиномом $\mu(x)$ есть $o(\| x \|^n)$. Предложение доказано.

7.4. Композиция двух ограниченных разложений

Пусть E, F, G — банаховы пространства, U — открытое множество в пространстве E и V — открытое множество в пространстве F. Рассмотрим непрерывное отображение

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} G,$$

и пусть $h = g \circ f$: $U \to G$. Предположим, что отображение f имеет в точке $a \in U$ ограниченное разложение φ порядка n, g имеет в точке $b = f(a) \in V$ ограниченное разложение ψ порядка n. Мы докажем, что отображение h имеет в точке a ограниченное разложение порядка n и выразим это ограниченное разложение через φ и ψ.

По предположению, имеем

$$f(a+x) = b + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x), \tag{7.4.1}$$

где φ_i — однородный полином степени i и $\|r(x)\| = o(\|x\|^n)$. Аналогично,

$$g(b+y) = g(b) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j(y) + s(y), \qquad \|s(y)\| = o(\|y\|^n). \tag{7.4.2}$$

Таким образом,

$$h(a+x) = g(f(a+x)) = g(b+y),$$

где

$$y = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x). \tag{7.4.3}$$

Из формулы (7.4.3) следует, что $\|y\| = o(\|x\|)$, откуда

$$\|s(y)\| = o(\|x\|^n).$$

Если в равенстве (7.4.2) мы заменим y на его значение, полученное с помощью формулы (7.4.3), то будем иметь

$$h(a+x) = h(a) + \sum_{j=1}^{n} \psi_j\Big(\sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x) + r(x)\Big) + o(\|x\|^n). \tag{7.4.4}$$

Остается показать, что каждая из функций

$$\psi_j\Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x)\Big)$$

совпадает с полиномом от x с точностью до $o(\|x\|^n)$. Так как

$$\psi_j(u) = \underbrace{\tilde{\psi}_j(u, \ldots, u)}_{j \text{ раз}},$$

то

$$\psi_j\Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x)\Big) = \tilde{\psi}_j\Big(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x), \ldots, \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) + r(x)\Big).$$

Если расписать более подробно эту сумму, используя полилинейность функций $\tilde{\psi}_j$, то мы получим сумму выражений вида

$$\tilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \varphi_{i_2}(x), \ldots, \varphi_{i_j}(x)). \tag{7.4.5}$$

Здесь $1 \leqslant i_1, \ldots, i_j \leqslant n$. Остальные члены нашей суммы содержат $r(x)$ по крайней мере один раз, т. е. имеют вид

$$\widetilde{\psi}_j(\ldots, r(x), \ldots).$$

Заметим, что члены последнего вида суть $o(\|x\|^n)$, так как $\|r(x)\| = o(\|x\|^n)$, а функция $\widetilde{\psi}_j$ полилинейна и непрерывна. В результате мы получим, что

$$\left\| h(a+x) - h(a) - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_j} \widetilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \ldots, \varphi_{i_j}(x)) \right\| = o(\|x\|^n).$$

Покажем, что каждая функция типа (7.4.5) есть *однородный полином степени* $i_1 + i_2 + \ldots + i_j$. Действительно, сумма всех этих однородных полиномов сама является полиномом; если составить отрезок этого полинома порядка n, то мы получим ограниченное разложение отображения $h = g \circ f$ порядка n. Так как

$$\widetilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \ldots, \varphi_{i_j}(x)) = \widetilde{\psi}_j(\widetilde{\varphi}_{i_1}(x, \ldots, x), \ldots, \widetilde{\varphi}_{i_j}(x, \ldots, x)),$$

то мы получим однородный полином степени $i_1 + \ldots + i_j$, ассоциированный с полилинейной функцией (вообще говоря, не симметрической)

$$\widetilde{\psi}_j(\widetilde{\varphi}_{i_1}(x_1, \ldots, x_{i_1}), \ldots, \widetilde{\varphi}_{i_j}(\ldots, x_{i_1+\ldots+i_j})).$$

Таким образом мы доказали, что *ограниченным разложением порядка n для функции $h = g \circ f$ в точке a служит полином*

$$\boxed{h(a) + \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i_1+\ldots+i_j \leqslant n} \widetilde{\psi}_j(\varphi_{i_1}(x), \ldots, \varphi_{i_j}(x))\Big).} \qquad (7.4.6)$$

7.5. Вычисление последовательных производных сложной функции

Пусть $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} G$ (как в п. 7.4). Предположим, что функция f дифференцируема n раз в точке a и функция g дифференцируема n раз в точке b. Мы знаем (теорема 5.4.2), что тогда отображение $h = g \circ f$ будет n раз дифференцируемым в точке a. Укажем метод, позволяющий вычислять $h^{(n)}(a)$ (n-линейное симметрическое отображение $E^n \to G$) с помощью производных $f^{(i)}(a)$ и $g^{(j)}(b)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Идея метода. Выразим ограниченные разложения функций f и g с помощью формулы Тейлора. Отсюда мы получим, как это было сделано в п. 7.4, ограниченное разложение отображения h. Однородная компонента степени n этого разложения имеет, как известно, вид

$$\frac{1}{n!} h^{(n)}(a) \cdot (x, \ldots, x).$$

Таким образом мы получим отображение $h^{(n)}(a)\cdot(x, \ldots, x)$. Отсюда легко перейти к отображению $h^{(n)}(a)\cdot(x_1, \ldots, x_n)$, которое является полилинейной симметрической функцией, соответствующей некоторому однородному полиному.

В качестве примера проведем вычисления для случая $n = 2$:

$$f(x+a) = f(a) + f'(a)\cdot x + \frac{1}{2} f''(a)\cdot(x, x) + \ldots,$$

$$g(y+b) = g(b) + g'(b)\cdot y + \frac{1}{2} g''(b)\cdot(y, y) + \ldots .$$

Пользуясь обозначениями п. 7.4, запишем $\frac{1}{2} h''(a)\cdot(x, x)$ в виде однородного полинома степени 2:

$$\tilde{\psi}_1(\varphi_2(x)) + \tilde{\psi}_2(\varphi_1(x), \varphi_1(x)),$$

где

$$\tilde{\psi}_1 = g'(b), \qquad \tilde{\psi}_2 = \frac{1}{2} g''(b),$$

$$\varphi_1(x) = f'(a)\cdot x, \qquad \varphi_2(x) = \frac{1}{2} f''(a)\cdot(x, x).$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2} h''(a)\cdot(x, x) = \frac{1}{2} g'(b)(f''(a)\cdot(x, x)) + \frac{1}{2} g''(b)\cdot(f'(a)\cdot x, f'(a)\cdot x).$$

Удвоенная левая часть — это полином степени 2, соответствующий билинейной симметрической форме

$$(x_1, x_2) \to h''(a)\cdot(x_1, x_2).$$

Удвоенная правая часть — это полином степени 2, соответствующий билинейной симметрической форме

$$(x_1, x_2) \to g'(b)\cdot(f''(a)\cdot(x_1, x_2)) + g''(b)\cdot(f'(a)\cdot x_1, f'(a)\cdot x_2).$$

Откуда получаем формулу, которая представляет производную $h''(a)$ как билинейное симметрическое отображение $E \times E \to G$:

$$\boxed{h''(a)\cdot(x_1, x_2) = g'(b)\cdot(f''(a)\cdot(x_1, x_2)) + g''(b)\cdot(f'(a)\cdot x_1, f'(a)\cdot x_2).} \tag{7.5.1}$$

Замечание. Предположим, что $E = \mathbb{R}$ и $F = \mathbb{R}$. Тогда f — числовая функция действительного переменного, а g — функция действительного переменного со значениями в банаховом пространстве G. В этом случае производные $f'(a)$ и $f''(a)$ отождествляются с элементами пространства $\mathbb{R}$, а производные $g'(b)$ и $g''(b)$ отождествляются с элементами пространства G, так же как и $h''(a)$. Формула (7.5.1) тогда запишется так:

$$h''(a) = f''(a) \cdot g'(b) + (f'(a))^2 \cdot g''(b).$$

(В правой части стоит сумма произведений чисел на элементы пространства G.)

§ 8. ЛОКАЛЬНЫЕ МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ

В этом параграфе рассматриваются непрерывные отображения $f\colon U \to \mathbb{R}$, где U — открытое множество в банаховом пространстве E.

8.1. Первое необходимое условие для локального минимума

Определение. Функция f имеет *локальный* [1]) *минимум* в точке $a \in U$, если существует окрестность V точки a ($V \subset U$), в которой

$$f(x) \geqslant f(a) \quad \text{для любого} \quad x \in V.$$

Другая формулировка: множество точек $x \in U$, таких, что $f(x) \geqslant f(a)$, является окрестностью точки a.

Функция f имеет *строгий локальный минимум* в точке a, если существует окрестность V точки a, в которой

$$f(x) > f(a) \quad \text{для любого} \quad x \in V, \quad \textit{отличного} \text{ от } a.$$

Аналогично определяется *локальный максимум* (соответственно *строгий локальный максимум*). Для того чтобы функция f имела локальный максимум (соответственно строгий локальный максимум), необходимо и достаточно, чтобы функция $-f$ имела локальный минимум (соответственно строгий локальный минимум). Мы будем изучать лишь случай минимума, оставляя читателю переложение полученных результатов на случай максимума.

Предложение 8.1.1. *Если функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ имеет локальный минимум в точке $a \in U$ и дифференцируема в этой точке, то $f'(a) = 0$* (*необходимое* условие для локального минимума).

Доказательство. Это классический результат для случая $U = \mathbb{R}$, т. е. для случая функции f действительного переменного; заметим, что в той точке, где имеется минимум, правая производная $f'_\text{п}(a)$ обязательно $\geqslant 0$, а левая производная $f'_\text{л}(a)$ обязательно $\leqslant 0$. Так как по предположению функция f имеет производную в этой точке, то $f'_\text{п}(a) = f'_\text{л}(a)$, откуда $f'(a) = 0$.

В общем случае (U — открытое множество в банаховом пространстве E) возьмем произвольный вектор $h \in E$. Рассмотрим

---

[1]) Автор называет такой минимум «относительным».— *Прим. ред.*

функцию $g(t) = f(a + th)$ действительного переменного t, определенную для достаточно малых $|t| < \varepsilon$. Тогда функция g имеет локальный минимум при $t = 0$; следовательно, $g'(0) = 0$. Так как

$$g'(t) = f'(a + th) \cdot h,$$

то $f'(a) \cdot h = 0$ для любого вектора $h \in E$. Другими словами, линейное отображение $f'(a)$: $E \to \mathbb{R}$ является нулевым, ч. т. д.

Замечание. Хорошо известно, что обращение в нуль производной $f'(a)$ числовой дифференцируемой функции f не позволяет заключить, что f обладает локальным максимумом или локальным минимумом в точке a. Например, пусть $E = \mathbb{R}^2$. В качестве точки a возьмем начало координат. Рассмотрим функцию $f(x, y) = x^2 - y^2$. Частные производные f'_x и f'_y обращаются в начале координат в нуль, но функция f не имеет в этой точке ни максимума, ни минимума.

8.2. Условие второго порядка для локального минимума

Как известно, каждому однородному полиному второй степени

$$\varphi: E \to \mathbb{R}$$

(называемому также *квадратичной формой*) соответствует такое однозначно определенное *билинейное симметрическое* отображение $\tilde{\varphi}$: $E \times E \to \mathbb{R}$, что

$$\varphi(x) = \tilde{\varphi}(x, x).$$

Очевидно, что

$$\tilde{\varphi}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(\varphi(x_1 + x_2) - \varphi(x_1) - \varphi(x_2)).$$

Определение. Квадратичная форма φ называется *положительно определенной* (обозначение: $\varphi \gg 0$), если

$$\varphi(x) \gg 0 \quad \text{для любого} \quad x \in E.$$

В этом случае говорят также, что положительно определена и билинейная ассоциированная форма $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi}(x, x) \gg 0 \quad \text{для любого} \quad x \in E.$$

Напомним *классическое неравенство Шварца*: если φ — положительно определенная квадратичная форма, то

$$|\tilde{\varphi}(x, y)|^2 \leqslant \varphi(x) \cdot \varphi(y). \tag{8.2.1}$$

[Доказательство. Пусть $x \in E$ и $y \in E$. Для любых чисел $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\mu \in \mathbb{R}$, $\varphi(\lambda x + \mu y) \gg 0$ или, более подробно,

$$\lambda^2 \varphi(x) + 2\lambda\mu\tilde{\varphi}(x, y) + \mu^2 \varphi(y) \gg 0.$$

Следовательно, дискриминант этого трехчлена второй степени по λ и μ меньше или равен нулю. Отсюда следует неравенство (8.2.1).]

Следствие из неравенства (8.2.1). *Если* $\varphi \geqslant 0$ *и* $\varphi(x) = 0$ *для некоторого* $x \in E$, *то* $\tilde{\varphi}(x, y) = 0$ *для любого* $y \in E$.

Теорема 8.2.1. *Пусть функция* $f\colon U \to \mathbb{R}$ *дважды дифференцируема в точке* $a \in U$ (U — *открытое множество в банаховом пространстве* E). *Если функция* f *имеет локальный минимум в точке* a, *то не только* $f'(a) = 0$ (предложение 8.1.1), *но и*

$$f''(a) \geqslant 0. \tag{8.2.2}$$

Внимание! Условие (8.2.2) означает, что симметрическая билинейная форма $f''(a)$ положительна. Иначе говоря,

$$f''(a)\cdot(x, x) \geqslant 0 \quad \text{для любого} \quad x \in E.$$

Доказательство. Так как $f'(a) = 0$, то из формулы Тейлора получаем

$$f(a+x) - f(a) = \frac{1}{2} f''(a)\cdot(x, x) + r(x),$$

где $\| r(x) \| = o(\| x \|^2)$. По предположению, функция f при достаточно малой норме $\| x \|$ имеет локальный минимум в точке a. Следовательно,

$$f''(a)\cdot(x, x) + 2r(x) \geqslant 0.$$

Зафиксируем произвольный элемент x, и пусть t — действительное переменное. Тогда при достаточно малом $|t|$

$$f''(a)\cdot(tx, tx) + 2r(tx) \geqslant 0 \tag{8.2.3}$$

или при фиксированном x

$$f''(a)\cdot(tx, tx) = t^2 f''(a)\cdot(x, x),$$
$$2r(tx) = \varepsilon(t, x)\, t^2,$$

где число $\varepsilon > 0$ стремится к 0 вместе с t. Тогда из неравенства (8.2.3) следует, что

$$f''(a)\cdot(x, x) + \varepsilon(t, x) \geqslant 0 \quad \text{для малых} \quad |t|.$$

Таким образом, если ε стремится к 0 вместе с t, то предел

$$f''(a)\cdot(x, x) \geqslant 0, \qquad \text{ч. т. д.}$$

8.3. Достаточное условие для строгого локального минимума

Прежде всего мы сообщим некоторые факты из теории квадратичных форм. Пусть φ — *непрерывная* квадратичная форма, и пусть

$$\tilde{\varphi} \in \mathscr{L}_2(E;\ \mathbb{R}) \approx \mathscr{L}(E;\ \mathscr{L}(E;\ \mathbb{R}))$$

— соответствующая непрерывная билинейная форма; $\mathscr{L}(E;\ \mathbb{R}) = E^*$ — сопряженное (топологическое) пространство для банахова пространства E.

Определение. Непрерывная квадратичная форма φ *невырождена*, если отображение $\tilde{\varphi} \in \mathcal{L}(E;\ E^*)$ является *изоморфизмом* $E \to E^*$ (банаховых пространств) или, иначе, если $\tilde{\varphi} \in \operatorname{Isom}(E;\ E^*)$.

Предложение 8.3.1. *Для того чтобы форма φ была невырожденной, необходимо выполнение следующего условия: если для какого-либо $x \in E$*

$$\tilde{\varphi}(x,\ y) = 0 \quad \textit{для всех} \quad y \in E,$$

то $x = 0$.

Это необходимое условие невырожденности формы φ является *достаточным*, если пространство E имеет *конечную* размерность.

Доказательство. Обозначим через $\tilde{\varphi}_x$ линейную форму

$$y \to \tilde{\varphi}(x,\ y).$$

Иначе говоря, $\tilde{\varphi}_x(y) = \tilde{\varphi}(x,\ y)$. Линейное отображение $E \to E^*$, определяемое формой $\tilde{\varphi}$, — это отображение вида

$$x \to \tilde{\varphi}_x. \tag{8.3.1}$$

Невырожденность формы φ означает, что отображение (8.3.1) является изоморфным отображением пространства E на сопряженное ему пространство E^*. Тогда *ядро* линейного отображения (8.3.1) состоит только из нуля. Другими словами, из равенства $\tilde{\varphi}_x = 0$ следует, что $x = 0$. Наше утверждение доказано.

Обратно, доказанное условие выражает тот факт, что линейное отображение (8.3.1) инъективно. Если пространство E имеет конечную размерность n, то, как мы знаем, пространство E^* имеет ту же размерность. Тогда отображение (8.3.1) из E в E^* биективно, так как его ядро содержит только 0. Следовательно, оно является изоморфизмом векторных пространств, а поскольку обратное отображение $E^* \to E$ непрерывно (так как пространство E^* имеет конечную размерность), то отображение (8.3.1) принадлежит $\operatorname{Isom}(E;\ E^*)$. Значит, форма φ невырожденна, ч. т. д.

Замечание. Пусть пространство E имеет конечную размерность. Тот факт, что форма φ невырожденна, означает, что определитель линейного преобразования (8.3.1) из E в E^* отличен от нуля, если в пространствах E и E^* выбраны сопряженные базисы. Этот определитель называется *дискриминантом* квадратичной формы относительно рассматриваемого базиса в пространстве E.

Пусть φ: $E \to \mathbb{R}$ — непрерывная, *положительно определенная и невырожденная* квадратичная форма. Тогда

$$\varphi(x) > 0 \quad \text{для любого} \quad x \neq 0. \tag{8.3.2}$$

В самом деле, если $\varphi(x) = 0$, то $\tilde{\varphi}(x, y) = 0$ для любого y (согласно (8.2.1)). Следовательно, $x = 0$, так как форма φ невырожденна (предложение 8.3.1).

Неравенство (8.3.2) можно усилить:

Теорема 8.3.2. *Если квадратичная (непрерывная) форма* φ *положительно определена и невырожденна, то существует такое число* $\lambda > 0$, *что*

$$\varphi(x) \geqslant \lambda \|x\|^2 \quad \text{для любого} \quad x \in E. \tag{8.3.3}$$

Доказательство. В случае, когда размерность пространства E конечна, можно получить неравенство (8.3.3) из соображений компактности. Предположим, для определенности, что $\|x\|$ — евклидова норма (известно, что всякая другая норма ей эквивалентна). Пусть Σ — *единичная сфера*, т. е. множество таких $x \in E$, для которых норма $\|x\| = 1$. Это *компактное* пространство. Функция φ непрерывна на Σ и $\varphi(x) > 0$ для любого $x \in \Sigma$ в силу (8.3.2). Тогда в силу классической теоремы топологии функция φ достигает нижней грани λ в некоторой точке сферы x. Значит, существует такое число $\lambda > 0$, что

$$\|\varphi(x)\| \geqslant \lambda \quad \text{для всех} \quad \|x\| = 1,$$

откуда с помощью гомотетии мы получаем неравенство (8.3.3).

Теперь мы дадим другое доказательство, которое пригодно и в общем случае банахова пространства E. Так как, по предположению, отображение $x \to \tilde{\varphi}_x$ является изоморфизмом $E \to E^*$, то существует такое число $\mu > 0$, что

$$\|x\| \leqslant \mu \|\tilde{\varphi}_x\| \quad \text{для всех векторов} \quad x \in E.$$

[Здесь $\|\tilde{\varphi}_x\|$ — норма в пространстве $E^* = \mathscr{L}(E; \mathbb{R})$]. Фиксируем вектор $x \in E$. По определению нормы в пространстве E^*, имеем

$$\|\tilde{\varphi}_x\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \|\tilde{\varphi}(x, y)\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\tilde{\varphi}(x, y)|.$$

Следовательно, существует такой вектор $y \in E$, что $\|y\| \leqslant 1$ и

$$\|\tilde{\varphi}(x, y)\| \geqslant \frac{1}{2} \|\tilde{\varphi}_x\|,$$

откуда

$$\|x\| \leqslant 2\mu |\tilde{\varphi}(x, y)|.$$

Используя неравенство Шварца (8.2.1), получаем

$$\|x\|^2 = 4\mu^2 \varphi(x) \varphi(y).$$

Так как $\|y\| \leqslant 1$, то $\|\varphi(y)\| \leqslant M$ (M — фиксированное число), ибо функция φ, которая по предположению непрерывна, ограничена на единичном шаре. Значит,

$$\| x \|^2 \leqslant 4\mu^2 M \varphi (x).$$

Полагая $\lambda = 1/(4\mu^2 M)$, получаем неравенство (8.3.3).

Теперь мы в состоянии сформулировать достаточное условие для строгого минимума.

Теорема 8.3.3. *Пусть $f\colon U \to \mathbb{R}$ — дважды дифференцируемая функция в точке $a \in U$. Если $f'(a) = 0$, а $f''(a)$ положительна и невырожденна, то функция f имеет в этой точке строгий относительный минимум.*

Доказательство. Согласно формуле Тейлора, имеем

$$f(a+x) - f(a) = \frac{1}{2} f''(a)\cdot(x, x) + \varepsilon (x) \| x \|^2,$$

где $\varepsilon (x)$ стремится к 0 вместе с x. В силу теоремы 8.3.2 существует такое число $\lambda > 0$, что

$$f''(a)\cdot(x, x) \geqslant \lambda \| x \|^2.$$

Следовательно,

$$f(a+x) - f(a) \geqslant \left(\frac{\lambda}{2} + \varepsilon (x)\right) \| x \|^2.$$

Таким образом, $\lambda/2 + \varepsilon (x) > 0$, если норма $\| x \|$ достаточно мала. Если, кроме того, $x \neq 0$, то

$$f(a + x) - f(a) > 0, \quad \text{ч. т. д.}$$

УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 1. Пусть E — нормированное векторное пространство над полем действительных чисел. Назовем *гиперплоскостью* всякое векторное подпространство H пространства E коразмерности 1 (т. е. E/H имеет размерность 1).

(a) Показать, что замыкание векторного подпространства есть векторное подпространство. Вывести отсюда, что всякая гиперплоскость или замкнута, или всюду плотна в E.

(b) Пусть u — линейная форма на E. Показать, что u разрывна тогда и только тогда, когда существует последовательность $(x_n) \in E$, $x_n \to 0$ при $n \to \infty$, такая, что $u(x_n) = 1$ для любого n.

(c) Пусть $x_0 \in E$ — вектор с нормой 1, и пусть H — алгебраическое дополнение к векторному подпространству пространства E, порожденному элементом x_0. Тогда для любого $x \in E$ имеет место однозначное разложение

$$x = t(x) x_0 + y(x),$$

где t и y — линейные отображения пространства E в $\mathbb{R}$ и H соответственно. Показать, что t и y непрерывны тогда и только тогда, когда подпространство H замкнуто.

(d) Пусть u — линейная форма на E. Показать, что форма u непрерывна тогда и только тогда, когда ядро $H = u^{-1}(\{0\})$ замкнуто.

Упражнение 2. Пусть E — банахово пространство всех последовательностей $x = (\xi_n)_{n \geqslant 0}$, состоящих из действительных чисел, таких, что

$\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$, с нормой $\| x \| = \sup\limits_n | \xi_n |$. Для любого целого числа $m \geqslant 0$ положим $e_m = (\delta_{mn})_{n\geqslant 0} \in E$, где δ_{mn} — символ Кронекера ($\delta_{mn} = 0$, если $m \neq n$, и $\delta_{mm} = 1$).

(a) Показать, что для любого $x = (\xi_n) \in E$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \xi_n e_n$ сходится к x в пространстве E.

Пусть u — линейная непрерывная форма на E; положим $u(e_n) = \eta_n$. Показать, что последовательность действительных чисел $(\eta_n)_{n\geqslant 0}$ суммируема и норма линейной формы u равна

$$\| u \| = \sum_{n=0}^{\infty} | \eta_n |.$$

Вывести отсюда, что топологическое пространство $E^* = \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$, сопряженное к E, можно отождествить с пространством $l^1(\mathbb{R})$ суммируемых последовательностей действительных чисел, снабженных нормой, которую следует найти.

(b) Используя тот же самый метод, показать, что векторное пространство E^{**} линейных непрерывных форм на E^* можно отождествить с пространством $l^\infty(\mathbb{R})$ всех последовательностей $z = (\zeta_n)_{n\geqslant 0}$ ограниченных действительных чисел с нормой

$$\| z \| = \sup_{n\geqslant 0} | \zeta_n |.$$

Упражнение 3. В пространстве $\mathbb{R}^n$ определяются последовательно три нормы $\| x \| = \left(\sum x_i^2\right)^{1/2}$, $\| x \| = \sum | x_i |$, $\| x \| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n} | x_i |$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Найти в каждом из этих случаев множество точек, в которых функция $x \longrightarrow \| x \|$ дифференцируема.

Упражнение 4. Пусть $E = \mathscr{C}([a, b], \mathbb{R})$ — банахово пространство непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ с нормой

$$\| f \| = \sup_{x\in[a, b]} | f(x) |.$$

Пусть $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — отображение класса C^2. Показать, что отображение $f \longrightarrow \int\limits_a^b \varphi(f(x))\, dx$ есть дифференцируемое отображение пространства E в $\mathbb{R}$. Всегда ли это отображение принадлежит к классу C^1?

Упражнение 5. Пусть $\Omega \in \mathbb{R}^n$ и $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$ — два открытых непустых множества и f — биективное отображение Ω на Ω', такое, что f и f^{-1} дифференцируемы на множествах Ω и Ω' соответственно.

Показать, используя формулу для производной сложной функции, что $n = m$.

Упражнение 6. Пусть f — выпуклая функция действительного переменного, принимающая действительные значения. Показать, что функция f имеет в каждой точке левую и правую производные.

Упражнение 7. Пусть U — открытое выпуклое множество в банаховом пространстве E и f — дифференцируемое отображение U в $\mathbb{R}$.

(a) Показать, что функция f выпукла в U тогда и только тогда, когда

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

для любой пары точек $x, x_0 \in U$.

(b) Предположим, что $E = \mathbb{R}^n$ и функция f принадлежит к классу C^2. Для каждого вектора $x \in U$ пусть φ_x — квадратичная форма вида

$$\varphi_x(h) = \sum_{i,\, j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\, h_i h_j, \qquad h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Показать, что функция f выпукла в U тогда и только тогда, когда форма φ_x положительна для любого $x \in U$, т. е. $\varphi_x(h) \geqslant 0$ для $x \in U$ и $h \in \mathbb{R}^n$.

Упражнение 8. Пусть f — функция со значениями в банаховом пространстве E, принадлежащая к классу C^1 в открытом интервале I. Положим

$$g(x,\, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad \text{если} \quad x \neq y,$$

$$g(x,\, x) = f'(x).$$

1) Показать, что функция g непрерывна на $I \times I$ и принадлежит к классу C^1 на множестве $I \times I - \bigcup\limits_{x \in I} \{x,\ x\}$.

2) Показать, что если $f''(x_0)$ существует в точке $x_0 \in I$, то функция g дифференцируема в точке $(x_0,\, x_0)$. (Применить теорему о конечных приращениях к функции

$$f(x) - xf'(x_0) - \frac{(x - x_0)^2}{2} f''(x_0).$$

Упражнение 9. Пусть U — открытое выпуклое подмножество в банаховом пространстве и f — дифференцируемая выпуклая функция на U, принимающая действительные значения. Показать, что если $f'(x_0) = 0$ в точке $x_0 \in U$, то f имеет абсолютный минимум в точке x_0.

Упражнение 10. Пусть f — непрерывное отображение отрезка $[a,\, b]$ в банахово пространство E, имеющее в любой точке интервала $[a,\, b)$ непрерывную правую производную. Показать, применяя теорему о конечных приращениях к функции $g(t) = f(t) - (t - t_0) f'_п(t_0)$, что функция f принадлежит к классу C^1 на интервале $(a,\, b)$.

Упражнение 11. Пусть f — отображение класса C^1 интервала $(a,\, b)$ в банахово пространство E. Показать, что если функция f имеет вторую производную в точке $t_0 \in (a,\, b)$, то

$$\frac{1}{hk}\left[f(t_0 + h + k) - f(t_0 + h) - f(t_0 + k) + f(t_0)\right]$$

стремится к $f''(t_0)$ при $h,\ k \to 0$. (Вводя функцию

$$g(u) = f(t_0 + u + k) - f(t_0 + u) - ukf''(t_0),$$

показать следующее: для всякого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число η, что неравенства $|u| < \eta$ и $|k| < \eta$ влекут за собой неравенство

$$\| g'(u) \| \leqslant \varepsilon (2\, |u| + |k|).)$$

Упражнение 12. Пусть U — выпуклое открытое множество в банаховом пространстве E, и пусть $f : U \to F$ — дифференцируемое отображение в банахово пространство F. Показать, что если производное отображение $f' : U \to \mathscr{L}(E;\, F)$ постоянно, то отображение f является суммой постоянного и линейного непрерывного отображения.

Упражнение 13. Доказать следующее свойство: если U — открытое множество в произведении $E_1 \times \ldots \times E_n$ банаховых пространств, отображение $f : U \to F$ имеет в любой точке множества U частные производные $\partial f/\partial x_i$ и отображения $\partial f/\partial x_i : U \to \mathcal{L}(E_i; F)$ непрерывны в точке a, то отображение f строго дифференцируемо в a (см. п. 3.8).

Упражнение 14. Пусть f — отображение открытого подмножества U банахова пространства E в банахово пространство F. Предположим, что f дифференцируемо в любой точке $x \in U$, отличной от некоторой точки $a \in U$, и что отображение $x \longrightarrow f'(x)$ из U в $\mathcal{L}(E; F)$ имеет предел, когда x стремится к a. Показать, что f строго дифференцируемо в точке a (см. п. 3.8) и

$$f'(a) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\neq a}} f'(x).$$

Упражнение 15. Пусть f — непрерывное отображение отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство E. Предположим, что f имеет правую производную в любой точке $x \in (a, b)$. Показать, что существует такое число $\xi \in (a, b)$, что

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant (b-a) \| f'_{\text{п}}(\xi) \|.$$

[Указание. Пусть $k = \| f(b) - f(a) \| / (b - a) > 0$. Предположим, что $\| f'_{\text{п}}(x) \| < k$ для любого $x \in (a, b)$. Тогда существуют такие $x_0 \in (a, b)$ и $h > 0$, что $\| f(x_0 + h) - f(x_0) \| < kh$. Применяя теорему о конечных приращениях к отрезкам $[a, x_0]$ и $[x_0 + h, b]$, приходим к противоречию.]

Упражнение 16. (Классическая теорема о конечных приращениях.)

(a) Пусть f — функция с *действительными* значениями, определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$, дифференцируемая на интервале (a, b) и такая, что $f(a) = f(b) = 0$. Показать, что найдется точка $c \in (a, b)$, в которой $f'(c) = 0$ (теорема Ролля).

(b) Пусть f — функция с *действительными* значениями, определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$, дифференцируемая на интервале (a, b). Показать, что существует такая точка $c \in (a, b)$, что

$$f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$$

(классическая теорема о конечных приращениях).

(c) Показать, что для действительных чисел a и b, $a \neq b$, не существует такого действительного числа c, что

$$e^{ib} - e^{ia} = i(b-a) e^{ic}.$$

Вывести отсюда, что классическая теорема о конечных приращениях не применима к вектор-функциям.

Упражнение 17. (a) Пусть f — функция с действительными значениями, определенная и непрерывная на отрезке $[a, b]$, дифференцируемая на интервале (a, b). Показать, используя классическую теорему о конечных приращениях (см. упр. 16), что если $| f'(x) | \geqslant \alpha$ для любого $x \in (a, b)$, то $| f(b) - f(a) | \geqslant (b - a)$.

(b) Показать, что результат п. (a) не будет иметь места, если заменить производную на правую производную или рассматривать вектор-функции [можно рассмотреть функцию $f = (f_1, f_2)$, где $f_1 = a \cos x$, $f_2 = a \sin x$].

(c) Показать, что для любой функции с действительными значениями, удовлетворяющей предположениям п. (a), производная $f'(x_0)$, $x_0 \in (a, b)$, является предельным значением для $f'(x)$ при $x \to x_0$ [нужно применить результат п. (a) к функции $g(x) = f(x) - (x - x_0) f'(x_0)$].

(d) Показать, что этот результат неверен для вектор-функций.

[Указание. Рассмотреть функцию $f = (f_1, f_2)$, определенную равенствами

$$f_1(x) = x^2 \sin 1/x \quad \text{для} \quad x \neq 0, \qquad f_1(0) = 0,$$
$$f_2(x) = x^2 \cos 1/x \quad \text{для} \quad x \neq 0, \qquad f_2(0) = 0.$$

Показать, что $f'(0)$ — изолированная точка множества значений $f'(x)$.]

Упражнение 18. Пусть E — банахово пространство. Обозначим через F банахово пространство $\mathscr{L}(E, E)$.

(a) Показать, что для любого целого n отображение $x \longrightarrow x^n$ пространства F в F принадлежит к классу C^∞. Вывести отсюда, что отображение $x \longrightarrow \exp x = \sum\limits_{n \geqslant 0} x^n/n!$ принадлежит к классу C^∞.

(b) Показать, что отображение $x \longrightarrow \exp x$ является C^∞-диффеоморфизмом некоторой окрестности нуля на некоторую окрестность элемента 1_E. Обратное отображение, определенное для y, достаточно близких к 1_E, задается формулой

$$y \longrightarrow -\sum_{n \geqslant 1} \frac{(1_E - y)^n}{n}.$$

Упражнение 19. Пусть E и F — банаховы пространства, U — открытое множество в E, содержащее начало координат. Пусть

$$A\colon U \longrightarrow \mathscr{L}(E; F)$$

есть отображение класса C^1 и $B\colon U \to F$ — отображение, определенное формулой

$$B(x) = A(x) \cdot x.$$

Показать, что если $A(0) \in \mathrm{Isom}(E, F)$, то существуют такая открытая окрестность V точки 0 в E и такая окрестность W точки 0 в F, что B является C^1-диффеоморфизмом окрестности V на окрестность W.

Упражнение 20. Пусть E — действительное гильбертово пространство и f — такое отображение класса C^1 пространства E в само себя, что

$$(f'(x) \cdot h \mid h) \geqslant \alpha (h \mid h)$$

для произвольных $x, h \in E$ $(\alpha > 0)$.

(a) Применяя классическую теорему о конечных приращениях к функции

$$\varphi(t) = (f(tb + (1 - t)a) \mid b - a),$$

показать, что для $a, b \in E$

$$(f(b) - f(a) \mid b - a) \geqslant \alpha (b - a \mid b - a).$$

Вывести отсюда, что отображение $f'(x)$ замкнуто.

(b) Показать, что образ отображения $f(x)$ плотен в E, так как это отображение биективно для любого $x \in E$. Вывести отсюда, что отображение f' открыто.

(c) Показать, что f — диффеоморфизм класса C^1 пространства E на E.

Упражнение 21. Пусть E, F_1, F_2, G — банаховы пространства и B — билинейное непрерывное отображение пространства $F_1 \times F_2$ в пространство G. Показать, что если f и g — отображения класса C^m открытого множества $\Omega \subset E$ в пространства F_1 и F_2 соответственно, то отображение $B(f, g)$, ставящее в соответствие элементу x элемент $B(f(x), g(x))$, принадлежит к классу C^m; доказать для $k \leqslant m$ формулу

$$(B(f, g))^{(k)}(x)(u_1, \ldots, u_k) = \sum_J B_J(x; u_1, \ldots, u_k).$$

(Здесь J пробегает множество всех подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, k\}$.)

Обозначения. Пусть $(u_1, \ldots, u_k) \in E^k$ и $J = \{i_1, \ldots, i_p\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$. Если $K = \{j_1, \ldots, j_{k-p}\}$ есть дополнение к J в $\{1, \ldots, k\}$, то

$$B_J(x; u_1, \ldots, u_k) = B(f^{(p)}(x)\cdot(u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}), g^{(k-p)}(x)\cdot(u_{j_1}, \ldots, u_{k-p})).$$

Упражнение 22. Пусть E и F — банаховы пространства и Ω — открытое множество в E. Обозначим через $\mathscr{C}^p(\Omega, F)$ векторное пространство таких отображений f класса C^p множества Ω в пространство F, что $f(x)$ и все производные $f^{(k)}(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant p)$ ограничены на множестве $x \in \Omega$.

(a) Для $f \in \mathscr{C}^p(\Omega, F)$ положим

$$\| f \|_p = \sup_{x \in \Omega} (\| f(x) \| + \| f'(x) \| + \ldots + \| f^{(p)}(x) \|).$$

Показать, что $\| f \|_p$ является нормой на $\mathscr{C}^p(\Omega, F)$, относительно которой это пространство полно.

(b) Показать, что отображение $f \longrightarrow f$ является линейным непрерывным отображением пространства $\mathscr{C}^p(\Omega, F)$ в пространство $\mathscr{C}^{p-1}(\Omega, \mathscr{L}(E, F))$ при $p \geqslant 2$.

Упражнение 23. Пусть f — отображение класса C^∞ открытого интервала I с центром в точке x_0 в банахово пространство E. Предположим, что производные четного порядка имеют на I мажоранту вида

$$\| f^{(2n)}(x) \| \leqslant M(2n)!\, k^n,$$

где M и k — константы, не зависящие от n.

Какую оценку можно получить отсюда для производных нечетного порядка? Показать с помощью этой оценки, что ряд Тейлора для f сходится к $f(x)$ в любой точке x некоторой окрестности точки x_0, которую следует уточнить.

[Указание. Можно показать, оценивая с помощью формулы Тейлора порядка 2 разности $\varphi(x_0 + h) - \varphi(x)$ и $\varphi(x_0 - h) - \varphi(x)$, что если φ — такая функция класса C^2 в окрестности $[x_0 - h, x_0 + h]$, что $\| \varphi(x) \| \leqslant A$ и $\| \varphi''(x) \| \leqslant B$, то

$$\| \varphi'(x) \| \leqslant A/h + Bh$$

для любого x в этом интервале.]

Упражнение 24. (a) Рассмотрим отображение $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ пространства $\mathbb{R}^3$ в себя, определенное формулами

$$\varphi_1(x, y, z) = e^{2y} + e^{2z},$$
$$\varphi_2(x, y, z) = e^{2x} - e^{2z},$$
$$\varphi_3(x, y, z) = x - y.$$

Дать наглядную геометрическую характеристику образа $\varphi(\mathbb{R}^3)$ и показать, что φ — диффеоморфизм $\mathbb{R}^3$ на $\varphi(\mathbb{R}^3)$.

(b) Пусть $F = (F_1, F_2, F_3)$ — отображение $\mathbb{R}^3$ в себя, определенное формулами

$$F_1(x, y, z) = e^{x-y+2z} + e^{-x+y+2z},$$
$$F_2(x, y, z) = e^{2x} + e^{2y} - 2\lambda e^{x-y},$$
$$F_3(x, y, z) = e^{2x} + e^{2y} - 2e^{y-x}.$$

Показать, что F записывается в виде $F = G \circ \varphi$, где G — отображение, которое следует определить. Показать, что F является диффеоморфизмом $\mathbb{R}^3$ на свой образ в том и только в том случае, если $\lambda \geqslant 0$.

Упражнение 25. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^2$.

(a) Пусть w — такое отображение класса C^2 множества U в $\mathbb{R}$, что $\partial^2 w/\partial u \partial y$ не обращается в нуль на множестве U.

Показать, что можно локально решить систему

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{\partial w}{\partial y}(u, y),\\
v &= \frac{\partial w}{\partial u}(u, y)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

относительно u и v и вычислить якобиан отображения $(x, y) \longrightarrow (u, v)$.

(b) Пусть $(x, y) \longrightarrow (u(x, y), v(x, y))$ — отображение класса C^1 множества U в пространство $\mathbb{R}^2$ с якобианом, равным 1, и производная $\partial u/\partial x$ не обращается в нуль на множестве U. Показать, что тогда локально существует такая функция w класса C^2, удовлетворяющая системе (1), что $\partial^2 w/\partial u\, \partial y \neq 0$.

(c) Определить локально все отображения $(x, y) \longrightarrow (u(x, y), v(x, y))$ множества U в пространство $\mathbb{R}^2$, якобиан которых равен заданной функции $\varphi(x, y)$, не обращающейся в нуль на множестве U и $\partial u/\partial x \neq 0$.

Упражнение 26. Пусть E: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — такое отображение класса C^m $(m \geqslant 2)$, что

$$F(0) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(0) = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Положим $a_{ij} = \frac{1}{2}(\partial^2 F/\partial x_i \partial x_j)(0)$. Показать, применяя, например, формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, что существуют такие функции g_{ij} класса C^{m-2}, что $g_{ij} = g_{ji}$, $g_{ij}(0) = a_{ij}$ и

$$F(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, x^i x^j, \qquad x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Упражнение 27. Пусть E_0 — векторное пространство функций, принимающих действительные значения, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ с нормой $\| f \|_0 = \sup\limits_{x \in [0,1]} | f(x) |$, а E_1 — векторное пространство функций с действительными значениями, принадлежащих классу C^1 на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих условию $f(0) = 0$, с нормой

$$\| f \|_1 = \sup_{x \in [0, 1]} | f'(x) |.$$

Показать, что отображение φ: $E_1 \to E_0$, определенное формулой $\varphi(f) = f' + f^2$, является C^∞-диффеоморфизмом некоторой окрестности V начала координат в пространстве E_1 на некоторую окрестность W начала координат в пространстве E_0 (рассмотреть $\varphi'(0)$). Вычислить первые и вторые производные от обратного отображения ψ: $W \to V$.

Упражнение 28. Пусть φ: $E \to F$ — такое отображение банаховых пространств, что сужение φ на каждую аффинную прямую пространства E непрерывно. Показать, что если n-я разность

$$\Delta_{x_1} \ldots \Delta_{x_n} \varphi$$

тождественно равна нулю по x при любых $x_1, \ldots, x_n \in E$, то φ — полином степени $\leqslant n - 1$.

[Указание. Воспользоваться индукцией по n. Для $n = 2$ положить $g(x) = \varphi(x) - \varphi(0)$. Доказать, что $g(x_1 + x_2) = g(x_1) + g(x_2)$, затем использовать тот факт, что всякое непрерывное и аддитивное отображение пространства $\mathbb{R}$ в F линейно. Доказать, что функция

$$h(x_3, \ldots, x_n, x) = \Delta_{x_3} \ldots \Delta_{x_n} \varphi(x)$$

есть сумма $(n-1)$-линейной симметрической функции $F(x, x_3, \ldots, x_n)$ и постоянной (по x) функции. После этого сравнить $\varphi(y)$ с полиномом $F(y, \ldots, y)/(n-1)!$.]

Упражнение 29. Пусть f — непрерывное отображение открытого интервала $I \subset \mathbb{R}$ в банахово пространство E.

(a) Предположим, что существуют такие отображения g_1 и g_2 интервала I в $\mathbb{R}$, что выражение

$$\frac{1}{h^2}\left[f(x+h)-f(x)-hg_1(x)-\frac{h^2}{2}g_2(x)\right]$$

стремится к нулю при $h \to 0$ равномерно на любом компакте, содержащемся в I.

Положим

$$\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x),$$
$$\Delta_h\Delta_h f(x)=\Delta_h f(x+h)-\Delta_h f(x).$$

Показать, что

$$\frac{\Delta_h\Delta_h f(x)}{h^2}$$

стремится к $g_2(x)$ при $h \to 0$ равномерно на любом компакте, содержащемся в I, и что функция g_2 непрерывна.

Вывести отсюда, что $\Delta_h f(x)/h$ стремится к $g_1(x)$ при $h \to 0$ равномерно на любом компакте, содержащемся в I, и что g_1 — непрерывная функция.

Показать, что f принадлежит к классу C^2 на I.

(b) Показать, что функция f, определенная формулами

$$f(x)=x^3\sin\frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \neq 0,$$
$$f(0)=0,$$

допускает в начале координат ограниченное разложение порядка 2, но не имеет второй производной в начале координат. Таким образом, из существования ограниченного разложения следует существование производных, только если имеется равномерная сходимость на любом компакте.

Упражнение 30. Рассмотрим отображение φ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, определенное с помощью равенств

$$\varphi(x, y)=(u(x, y), v(x, y)), \qquad \begin{cases} u(x, y)=x+f(y), \\ v(x, y)=y+f(x). \end{cases}$$

Здесь f — такое отображение класса C^1, что $|f'(t)| \leqslant k < 1$ для любого $t \in \mathbb{R}$.

(a) Доказать, что φ — сюръективное отображение. Для этого показать, что для любой точки $(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$ функция

$$\psi(x, y) = (\xi - u(x, y))^2 + (\eta - v(x, y))^2$$

имеет минимум в некоторой точке (x_1, y_1) и $\varphi(x_1, y_1) = (\xi, \eta)$.

(b) Показать, что отображение φ — биективно.

Упражнение 31. Пусть $M(x, y, z)$ — точка поверхности, заданной уравнением

$$\frac{x^4}{a^4}+\frac{y^4}{b^4}+\frac{z^4}{c^4}=1.$$

На этой поверхности функция $f(M) = x^2 + y^2 + z^2$ имеет 14 точек экстремума. Найти эти точки и показать, что шесть точек, лежащих на осях координат, являются точками минимума, а остальные восемь — точками максимума.

[Указание: параметризовать поверхность в окрестности каждой точки с помощью двух координат. В результате задача локально сведется к задаче нахождения минимумов и максимумов функции двух переменных.]

Упражнение 32. Пусть E, F, G — банаховы пространства, U и V — открытые множества в пространствах E и F соответственно. Рассмотрим отображения

$$U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} G,$$

где f трижды дифференцируемо в точке $a \in V$, а g трижды дифференцируемо в точке $b = f(a)$. Полагая $h = g \circ f$, показать, используя метод п. 7.5, что

$$\begin{aligned} h'''\cdot(x_1, x_2, x_3) = {} & g'\cdot f'''\cdot(x_1, x_2, x_3) + g''\cdot(f'\cdot x_1, f''\cdot(x_2, x_3)) + \\ & + g''\cdot(f'\cdot x_2, f''\cdot(x_3, x_1)) + g''\cdot(f'\cdot x_3, f''\cdot(x_1, x_2)) + \\ & + g'''\cdot(f'\cdot x_1, f'\cdot x_2, f'\cdot x_3). \end{aligned}$$

Мы пишем здесь для сокращения f' вместо $f'(a)$, f'' вместо $f''(a)$ и т. д.

2 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

В этой главе E обозначает банахово пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Рассматриваются функции φ одного *действительного переменного* t со значениями в пространстве E. Предполагается, что значения производных φ' также лежат в пространстве E [при этом пространства E и $\mathscr{L}(\mathbb{R};\ E)$ отождествляются].

1.1. Дифференциальное уравнение первого порядка

Пусть $U \subset \mathbb{R} \times E$ — заданное подмножество (чаще всего U будет предполагаться открытым, но это необязательно; иногда подмножество U будет замкнутым). Пусть дана *непрерывная* функция

$$f\colon U \to E.$$

Тогда дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \qquad (1.1.1)$$

Решением дифференциального уравнения называется принадлежащая к классу C^1 функция

$$\varphi\colon I \to E$$

(где $I \subset \mathbb{R}$ обозначает интервал, который может быть открытым или замкнутым, ограниченным или нет), удовлетворяющая двум условиям

$$\begin{array}{lll} \text{(i)} & (t,\ \varphi(t)) \in U & \text{для любого } t \in I; \\ \text{(ii)} & \varphi'(t) = f(t,\ \varphi(t)) & \text{для любого } t \in I. \end{array}$$

Замечание 1. Не следует забывать, что без условия (i) условие (ii) не имеет смысла.

Замечание 2. Излишне предполагать, что функция φ принадлежит к классу C^1; если φ только дифференцируема и удовлетворяет условиям (i) и (ii), то производная φ' автоматически будет непрерывной функцией от t, ибо $f(t,\ \varphi(t))$ является непрерывной функцией t как композиция двух непрерывных функций.

Если $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ — (конечное) произведение банаховых пространств, то

$$U \subset \mathbb{R} \times E_1 \times \ldots \times E_n$$

и $f = f(t, x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i \in E_i$ для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$; функция f определяется заданием n функций $f_1, \ldots, f_n$, где $f_i\colon U \to E_i$. Решение дифференциального уравнения φ представляет собой совокупность таких n функций класса C^1

$$\varphi_i\colon I \to E_i$$

что

(i) $(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \in U$ для любого $t \in I$,

(ii) $\varphi_i'(t) = f_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ для любого $t \in I$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

Заметим, что по существу мы имеем здесь систему n дифференциальных уравнений первого порядка с n неизвестными функциями от t:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.1.2}$$

В частном случае, когда $E = \mathbb{R}^n$, $E_i = \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, мы получаем систему из n *скалярных* дифференциальных уравнений, где данные функции f_i и неизвестные функции $x_i = \varphi_i(t)$ являются числовыми. Изучение такой системы сводится к изучению одного векторного дифференциального уравнения (1.1.1).

1.2. Дифференциальные уравнения n-го порядка

Такое уравнение имеет вид:

$$\frac{d^n x}{dt^n} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right). \tag{1.2.1}$$

Здесь f — заданная непрерывная функция $U \to E$, где

$$U \subset \mathbb{R} \times \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ раз}}.$$

Решением уравнения называется функция $\varphi\colon I \to E$ класса C^n, удовлетворяющая следующим двум условиям:

(i) $(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)) \in U$ для любого $t \in I$;

(ii) $\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t))$ для любого $t \in I$.

Решение уравнения (1.2.1) эквивалентно решению системы n уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{dt} = x_1,\\
&\frac{dx_1}{dt} = x_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1},\\
&\frac{dx_{n-1}}{dt} = f(t, x, x_1, \ldots, x_{n-1}).
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

При такой замене одного уравнения системой уравнений вместо *одной* неизвестной функции $\varphi\colon I \to E$ класса C^n приходится находить систему n таких неизвестных функций $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}\colon I \to E$ класса C^1, что

$$\varphi'(t)=\varphi_1(t),\ \varphi_1'(t)=\varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_{n-2}'(t)=\varphi_{n-1}(t),$$
$$\varphi_{n-1}'(t)=f(t, \varphi(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)).$$

Здесь функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$ являются последовательными производными функции φ.

Таким образом, решение одного дифференциального уравнения n-го порядка сводится к решению одного дифференциального уравнения первого порядка (с заменой E на $E^n = \underbrace{E\times\ldots\times E}_{n \text{ раз}}$).

Мы будем рассматривать по этой причине в основном уравнения первого порядка. Результаты, полученные для дифференциального уравнения первого порядка, будут затем *перенесены* нами без доказательства на уравнения n-го порядка. Например, мы докажем, что при некоторых предположениях (условие Липшица для данной функции f) для *внутренней* точки (t_0, x_0) множества U существует такое число $\varepsilon > 0$, что в отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] = I'$ дифференциальное уравнение (1.1.1) имеет единственное решение $\varphi\colon I' \to E$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Если «перенести» этот результат на случай уравнения n-го порядка, то мы придем к следующему выводу: пусть дана внутренняя точка множества U

$$(t_0, x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)});$$

тогда существует такое число $\varepsilon > 0$, что в отрезке $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] = I'$ дифференциальное уравнение (1.2.1) имеет единственное решение $\varphi\colon I' \to E$, удовлетворяющее начальным условиям

$$\varphi(t_0)=x_0, \quad \varphi'(t_0)=x_0', \quad \ldots, \quad \varphi^{(n-1)}(t_0)=x_0^{(n-1)}$$

[при $t = t_0$ задаются значения φ и ее производных до порядка $n - 1$ включительно].

1.3. Приближенные решения

Возьмем дифференциальное уравнение (1.1.1). Пусть дано число $\varepsilon > 0$. Функция

$$\varphi\colon I \to E,$$

принадлежащая к классу C^1, называется *приближенным с точностью до* ε *решением* уравнения (1.1.1) или, иначе, его ε-*приближенным решением*, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned} &\text{(i)}\ (t, \varphi(t)) \in U && \text{для любого } t \in I;\\ &\text{(ii)}\ \|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\| \leqslant \varepsilon && \text{для любого } t \in I. \end{aligned} \qquad (1.3.1)$$

Обобщим сейчас же это понятие на случай *кусочно гладкой класса* C^1 функции φ: $I \to E$. Предположим для простоты, что I — компактный интервал. Пусть I представляет собой объединение конечной совокупности смежных компактных интервалов I_k; при этом 1) для любого i конец интервала I_{k-1} совпадает с началом интервала I_k, 2) сужение φ на каждый интервал I_k принадлежит к классу C^1. Мы потребуем, кроме того, чтобы функция φ удовлетворяла условиям (1.3.1), понимая под этим, что соответствующее неравенство имеет место в каждом из интервалов I_k. Иначе говоря, в каждой точке из конечного множества точек $t \in I$, где производная φ' терпит разрыв, мы требуем, чтобы

$$\|\varphi'_{\text{п}}(x)-f(t, \varphi(t))\| \leqslant \varepsilon, \quad \|\varphi'_{\text{л}}(t)-f(t, \varphi(t))\| \leqslant \varepsilon$$

(условия на правую и левую производную).

Теперь мы докажем теорему существования для *приближенных решений*.

Теорема 1.3.1. *Пусть* $B(x_0, r) \subset E$ — *замкнутый шар* $\|x - x_0\| \leqslant r$ *с центром в точке* $x_0 \in E$ *и радиусом* $r > 0$. *Пусть* $I \subset \mathbb{R}$ — *компактный интервал и* $t_0 \in I$. *Предположим, что дана непрерывная ограниченная функция*

$$f\colon I \times B(x_0, r) \to E,$$

причем

$$|f(t, x)| \leqslant M \tag{1.3.2}$$

(где M — конечное фиксированное число) *для* $t \in I$, $\|x - x_0\| \leqslant r$. *Пусть* J — *пересечение интервала* I *с отрезком*

$$t_0-\frac{r}{M} \leqslant t \leqslant t_0+\frac{r}{M}.$$

Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ *дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt}=f(x, t)$$

имеет кусочно гладкое класса C^1 ε-*приближенное решение* φ: $J \to B(x_0, r)$, *такое, что* $\varphi(t_0) = x_0$. *Заметим, что всегда найдется кусочно линейная функция* φ, *удовлетворяющая этим условиям.*

Доказательство. Достаточно построить функцию φ отдельно на отрезке J при $t \geqslant t_0$ и при $t \leqslant t_0$. Построим сначала искомое решение, если I есть отрезок

$$t_0 \leqslant t \leqslant T$$

длины $T - t_0 \leqslant r/M$. Исходя из этого результата, мы затем сможем построить функцию φ во всем интервале I. Рассмотрим в интервале I такую однозначно определенную аффинно-*линейную* функцию

φ_0: $I \to E$, что $\varphi_0(t_0) = x_0$, $\varphi_0'(t_0) = f(t_0, x_0)$, т. е. функцию вида

$$\varphi_0(t) = x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0). \tag{1.3.3}$$

Значения функций φ_0 принадлежат шару $B(x_0, r)$, поскольку $\| \varphi_0(t) - x_0 \| \leqslant \frac{r}{M} M$ при $t - t_0 \leqslant \frac{r}{M}$ для любого $t \in I$. Функция φ_0 есть ε-приближенное решение на отрезке $[t_0, t_1]$, если

$$\| f(t_0, x_0) - f(t, x_0 + (t - t_0) f(t_0, x_0)) \| \leqslant \varepsilon \tag{1.3.4}$$

при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$. В силу *непрерывности* функции f это неравенство имеет место во всяком случае для любого t, достаточно близкого к t_0. Если оно имеет место во всем I, т. е. при $t_0 \leqslant t \leqslant T$, то φ_0 является ε-приближенным решением на I, таким, что $\varphi_0(t_0) = x_0$, и мы получаем требуемый результат. В противном случае существует *наибольший* отрезок $[t_0, t_1]$ с началом в точке t_0, в котором выполняется неравенство (1.3.4). Действительно, пусть t_1 — нижняя грань тех t, для которых (1.3.4) не выполняется. Тогда неравенство (1.3.4) справедливо при $t_0 \leqslant t < t_1$ и также для $t = t_1$ из соображений непрерывности. Положим $\varphi_0(t_1) = x_1$; тогда $x_1 - x_0 = (t_1 - t_0) f(t_0, x_0)$ и, следовательно, $\| x_1 - x_0 \| < r$ при $t_1 - t_0 < T - t_0 \leqslant r/M$. Положим $r_1 = r - \| x_1 - x_0 \|$. Тогда функция f будет определена и непрерывна при $t_1 \leqslant t \leqslant T$, $\| x - x_1 \| \leqslant r_1$, причем будет иметь место неравенство $\| f(t, x) \| \leqslant M$ и, как легко проверить,

$$T - t_1 \leqslant \frac{r_1}{M}. \tag{1.3.5}$$

Таким образом, для значений t_1 и x_1 будут выполнены те же условия, что и для t_0, x_0. Следовательно, мы можем, отправляясь от этих значений, вновь начать тот же самый процесс построения. Пусть аффинно-линейная функция

$$\varphi_1(t) = x_1 + (t - t_1) f(t_1, x_1),$$

определенная при $t_1 \leqslant t \leqslant T$, принимает значения в шаре $B(x_1, r_1)$ (а, значит, и в шаре $B(x_0, r_0)$). Существует наибольший отрезок $[t_1, t_2]$ (где $t_1 < t_2 \leqslant T$), в котором выполняется неравенство

$$\| f(t_1, x_1) - f(t, x_1 + (t - t_1) f(t_1, x_1)) \| \leqslant \varepsilon.$$

Если $t_2 = T$, то функция φ, равная φ_0 на отрезке $[t_0, t_1]$ и равная φ_1 на $[t_1, t_2]$, является ε-приближенным решением дифференциального уравнения в отрезке $[t_0, T]$, и наше построение окончено. Если $t_2 < T$, то мы вновь повторим процесс построения. Возьмем $\varphi_1(t_2) = x_2$ и найдем, что $\| x_2 - x_1 \| < r_1$, так как $t_2 - t_1 < T - t_1 \leqslant r_1/M$ (см. (1.3.5)). Положим $r_2 = r_1 - \| x_2 - x_1 \|$; тогда $T - t_2 \leqslant r_2/M$ и т. д.

Таким образом, мы построили по индукции возрастающую последовательность точек $t < t_1 < \ldots < t_n \leqslant T$, последовательность элементов $x_0, x_1, \ldots, x_n \in E$ и линейных функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, определенных соответственно на отрезках $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots$ $\ldots, [t_{n-1}, t_n]$ и принимающих значения в шаре $B(x_0, r)$, причем их значения согласуются в общих концах $t_1, \ldots, t_{n-1}$. Объединение функций φ_i дает непрерывную кусочно линейную функцию $\varphi: [t_0, t_n] \to B(x_0, r)$, которая является ε-приближенным решением дифференциального уравнения. Если $t_n = T$ при некотором n, то теорема доказана.

Остается рассмотреть случай, когда $t_n < T$ для любого n, т. е. случай, когда процесс построения решения продолжается неограниченно. Покажем, что *такой ситуации быть не может.* Будем рассуждать от противного. Предположим, что построение неограниченно продолжается, и пусть t' — верхняя грань *строго* возрастающей последовательности $t_0 < t_1 < \ldots < t_n < \ldots$. Очевидно, что

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant M (t_{n+1} - t_n).$$

Следовательно, $\{x_n\}$ — последовательность Коши (доказать это нетрудно). Вследствие замкнутости шара $\| x - x_0 \| \leqslant r$, она имеет предел $x' \in B(x_0, r)$. При $t_n \leqslant t \leqslant t'$

$$\varphi_n(t) - x_n = (t - t_n) f(t_n, x_n).$$

Значит, $\| \varphi_n(t) - x_n \| \leqslant M(t' - t_n)$ при $t_n \leqslant t \leqslant t'$, откуда

$$\| \varphi_n(t) - x' \| \leqslant \| x' - x_n \| + M(t' - t_n) \text{ при } t_n \leqslant t \leqslant t'. \quad (1.3.6)$$

Поскольку функция f непрерывна в точке (t', x'), то существует такое число $\eta > 0$, что из неравенств $| t - t' | \leqslant \eta$ и $| x - x' | \leqslant \eta$ следует $\| f(t', x') - f(t, x) \| \leqslant \varepsilon/2$. Значит, при достаточно большом n в силу (1.3.6)

$$\| f(t', x') - f(t, \varphi_n(t)) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad t_n \leqslant t \leqslant t',$$

$$\| f(t', x') - f(t_n, x_n) \| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Сравнивая два последних неравенства, мы заключаем, что

$$\| f(t_n, x_n) - f(t, \varphi_n(t)) \| \leqslant \varepsilon \text{ для } t_n \leqslant t \leqslant t'.$$

Следовательно, φ_n есть ε-приближенное решение на отрезке $[t_n, t']$. Отсюда, по определению t_{n+1}, вытекает, что $t_{n+1} \geqslant t'$. Мы пришли к противоречию, так как $t' \geqslant t_{n+2} \geqslant t_{n+1}$. Итак, доказательство теоремы 1.3.1 закончено.

Замечание. Пусть $U \subset \mathbb{R} \times E$ — *открытое* множество, точка $(t_0, x_0) \in U$ и $f: U \to E$ — непрерывная функция. Тогда существуют такие числа $\tau > 0$, $r > 0$, $M > 0$, что любая точка (t, x), для которой выполняются неравенства

$$| t - t_0 | \leqslant \tau, \qquad \| x - x_0 \| \leqslant r,$$

содержится в U и $\| f(t, x) \| \leqslant M$ для этих пар (t, x). Пусть α — наименьшее из чисел τ и M/r. Теорема 1.3.1 утверждает, что на *компактном интервале* $| t - t_0 | \leqslant \alpha$ *дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

для любого числа $\varepsilon > 0$ *имеет кусочно линейное* ε*-приближенное решение* $x = \varphi(t)$, *удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(t_0) = x_0$. Этот результат, вообще говоря, справедлив лишь для достаточно малых α. Подчеркнем, что *выбор числа* α *не зависит от выбора числа* ε.

1.4. Пример: линейное дифференциальное уравнение

Определение. *Линейным дифференциальным уравнением* (первого порядка) называется уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t), \tag{1.4.1}$$

где $A: I \to \mathscr{L}(E; E)$ и $B: I \to E$ — *непрерывные* функции, заданные на интервале $I \subset \mathbb{R}$. Таким образом, здесь $f(t, x) = A(t) \cdot x + B(t)$ есть афинно-линейная непрерывная функция от $x \in E$ для каждого $t \in I$. Эта функция непрерывно зависит от t (так как $A(t)$ и $B(t)$ непрерывно зависят от t). Подмножество $U \subset \mathbb{R} \times E$ совпадает с $I \times E$.

Рассмотрим точки $t_0 \in I$ и $x_0 \in E$. Мы можем применить теорему 1.3.1 к замкнутому шару $B(x_0, r)$ *произвольного* радиуса r. Покажем, что из теоремы 1.3.1 вытекает

Теорема 1.4.1. *Если интервал* I *компактен, то для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует такое* ε*-приближенное решение* $\varphi: I \to E$ *уравнения* (1.4.1), *что* $\varphi(t_0) = x_0$.

Заметим, что функцию φ, удовлетворяющую условиям этой теоремы, можно выбрать кусочно линейной. Весьма важно то обстоятельство, что получаемое в этой теореме *решение* φ *существует на всем интервале* I.

Доказательство. Норма $\| A(t) \|$ [норма в пространстве $\mathscr{L}(E; E)$] является непрерывной функцией переменного $t \in I$. Так как интервал I компактен, эта норма имеет верхнюю грань. Положим

$$\alpha = \sup_{t \in I} \| A(t) \|;$$

аналогично,

$$\beta = \sup_{t \in I} \| B(t) \|.$$

Имеем

$$\| f(t, x) \| = \| A(t) \cdot x + B(t) \| \leqslant \alpha \| x \| + \beta.$$

Следовательно, если $\| x - x_0 \| \leqslant r$, то

$$\| f(t, x) \| \leqslant \alpha \| x_0 \| + \beta + \alpha r.$$

Таким образом, для значений $t \in I$, $\| x - x_0 \| \leqslant r$

$$\| f(t, x) \| \leqslant M, \quad \text{где } M = \alpha \| x_0 \| + \beta + \alpha r.$$

Отсюда

$$\frac{M}{r} = \frac{\alpha \| x_0 \| + \beta}{r} + \alpha.$$

Для данного x_0 выберем число r так, чтобы $M/r \leqslant 2\alpha$. Тогда, согласно теореме 1.3.1, существует ε-приближенное (кусочно линейное) решение φ в компактном интервале

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{1}{2\alpha}, t_0 + \frac{1}{2\alpha} \right],$$

удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Этот результат позволит нам найти кусочно линейное ε-приближенное решение во *всем* интервале I. Достаточно построить его отдельно на интервале I' (множество таких $t \in I$, что $t \geqslant t_0$) и на интервале I'' (множество таких $t \in I$, что $t \leqslant t_0$). Построим это решение, например, на интервале I'. Пусть точка T — его правый конец. Мы только что нашли ε-приближенное решение φ_0 на интервале $I' \cap [t_0, \ t_0 + 1/(2\alpha)]$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi_0(t_0) = x_0$ (в качестве φ_0 можно взять кусочно линейную функцию). Если $t_0 + 1/(2\alpha) \geqslant T$, наше построение окончено. В противном случае пусть $t_1 = t_0 + 1/(2\alpha) < T$, $\varphi_0(t_1) = x_1$. Мы повторим для t_1 и x_1 то, что мы делали для t_0 и x_0. В результате получим на интервале $I' \cap [t_1, t_1 + 1/(2\alpha)]$ кусочно линейное ε-приближенное решение φ_1, удовлетворяющее начальному условию $\varphi_1(t_1) = x_1$. Если $t_1 + 1/(2\alpha) \geqslant T$, то наше построение окончено, ибо функция φ, равная φ_0 на отрезке $[t_0, t_1]$ и φ_1 на отрезке $[t_1, T]$, отвечает всем нашим требованиям. В противном случае начнем сначала: полагаем $t_1 + 1/(2\alpha) = t_2 < T$, $\varphi_1(t_1 + 1/(2\alpha)) = x_2$. Этот процесс должен закончиться через конечное число шагов, поскольку $t_n = t_0 + n/(2\alpha) \geqslant T$ для достаточно больших n, ч. т. д.

1.5. Случай, когда правая часть удовлетворяет условию Липшица; основная лемма

Напомним известное определение (гл. 1, п. 3.2). Функция $f(t, x)$, определенная и непрерывная на множестве $U \subset \mathbb{R} \times E$ со значениями в пространстве E, удовлетворяет *k-условию Липшица по x*, если

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leqslant k \| x_1 - x_2 \| \qquad (1.5.1)$$

для любых пар $(t, x_1) \in U$, $(t, x_2) \in U$.

Пусть $U = I \times V$, где V — *выпуклое* открытое множество в E. Если для любой пары $(t, x) \in U$ частная производная $f'_x(t, x) \in \mathscr{L}(E; E)$ существует и удовлетворяет неравенству

$$\| f'_x(t, x) \| \leqslant k,$$

то в силу теоремы о конечных приращениях (гл. 1, теорема 3.3.2) имеет место неравенство (1.5.1).

Покажем, что если функция f удовлетворяет k-условию Липшица, то можно промажорировать разность $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ двух приближенных решений дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x). \tag{1.5.2}$$

Более точно, имеет место

Основная лемма 1.5.1. *Пусть $\varphi_1 \colon I \to E$ есть ε_1-приближенное решение, а $\varphi_2 \colon I \to E$ есть ε_2-приближенное решение уравнения* (1.5.2). *Пусть $x_1 = \varphi_1(t_0)$ и $x_2 = \varphi_2(t_0)$ — начальные условия, которым они удовлетворяют при $t_0 \in I$. Тогда, если f удовлетворяет k-условию Липшица по x для $t \in I$, то*

$$\boxed{\| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| \leqslant \| x_1 - x_2 \| e^{k|t - t_0|} + (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.} \tag{1.5.}$$

Доказательство основной леммы. Мы воспользуемся теоремой о конечных приращениях. Для упрощения записи будем предполагать, что $t_0 = 0$ (всегда можно преобразовать переменное t так, что t_0 перейдет в 0). Мы проведем доказательство неравенства (1.5.3) только в случае, когда $t > t_0$ (т. е. $t > 0$). Случай $t < 0$ сводится к указанному выше заменой t на $-t$.

По предположению, имеют место неравенства:

$$\| \varphi'_1(t) - f(t, \varphi_1(t)) \| \leqslant \varepsilon_1, \qquad \| \varphi'_2(t) - f(t, \varphi_2(t)) \| \leqslant \varepsilon_2,$$

откуда

$$\| \varphi'_1(t) - \varphi'_2(t) \| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \| f(t, \varphi_1(t)) - f(t, \varphi_2(t)) \|.$$

Согласно неравенству (1.5.1), находим

$$\| \varphi'_1(t) - \varphi'_2(t) \| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \|. \tag{1.5.4}$$

[Напомним, что φ'_1 и φ'_2 — производные функций φ_1 и φ_2 кусочно гладкие класса C^1 в каждом из интервалов, где φ_1 и φ_2 принадлежат к классу C^1.] Положим

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \varphi(t).$$

Функция φ является кусочно гладкой класса C^1. Применяя теорему о конечных приращениях (гл. 1, теорема 3.1.1) к неравенству (1.5.4), мы получим, что при $t > 0$

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leqslant \int_0^t (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + k\,\|\varphi(\tau)\|)\,d\tau.$$

Так как $\|\varphi(\tau)\| \leqslant \|\varphi(0)\| + \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|$, то

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leqslant (\varepsilon + k\,\|\varphi(0)\|)\,t + k\int_0^t \|\varphi(\tau) - \varphi(0)\|\,d\tau, \tag{1.5.5}$$

где $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon$.

Положим для упрощения записи:

$$\left.\begin{aligned} &\|\varphi(t) - \varphi(0)\| = u(t) \geqslant 0 \text{ (непрерывная числовая функция)},\\ &\varepsilon + k\,\|\varphi(0)\| = a > 0. \end{aligned}\right. \tag{1.5.6}$$

Тогда (1.5.5) запишется в виде

$$u(t) \leqslant at + k\int_0^t u(\tau)\,d\tau. \tag{1.5.7}$$

Мы сейчас воспользуемся этим неравенством.

Вспомогательная лемма. *Если непрерывная функция* $u(t)$ *определена на отрезке* $[0, T]$ $(T > 0)$, $u(t) \geqslant 0$ *на этом отрезке и удовлетворяет соотношению* (1.5.7), *то*

$$u(t) \leqslant \frac{a}{k}(e^{kt} - 1) \quad \textit{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{1.5.8}$$

Допустим, что вспомогательная лемма верна, и закончим доказательство основной леммы: если мы заменим $u(t)$ и a на их значения из формулы (1.5.6), то получим, что

$$\|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{k} + \|\varphi(0)\|\right)(e^{kt} - 1) \quad \text{при} \quad t > 0,$$

откуда

$$\|\varphi(t)\| \leqslant \|\varphi(0)\| + \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leqslant \|\varphi(0)\|\,e^{kt} + \frac{\varepsilon}{k}(e^{kt} - 1).$$

Это и есть неравенство (1.5.3), которое нам нужно было доказать, ибо

$$\varphi(0) = \varphi_1(0) - \varphi_2(0) = x_1 - x_2.$$

Нам осталось лишь доказать вспомогательную лемму. Положим

$$v(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau.$$

Отсюда $v'(t) = u(t)$, $v(0) = 0$. Тогда неравенство (1.5.7) запишется так:

$$v'(t) \leqslant at + kv(t), \tag{1.5.9}$$

т. е. в виде *дифференциального неравенства*. Положим

$$w(t)=e^{-kt}v(t),$$

откуда

$$w'(t)=e^{-kt}(v'(t)-kv(t)).$$

Тогда неравенство (1.5.9) запишется в виде

$$w'(t)\leqslant ate^{-kt}.$$

Отсюда мы получаем, учитывая, что $w(0)=0$,

$$w(t)\leqslant\int_0^t a\tau e^{-k\tau}\,d\tau.$$

Вычисляя интеграл в правой части, находим, что

$$w(t)\leqslant\frac{a}{k^2}(1-e^{-kt}-kt\,e^{-kt}),$$

откуда

$$v(t)=e^{kt}w(t)\leqslant\frac{a}{k^2}\left(e^{kt}-1-kt\right).$$

Или, поскольку в силу неравенства (1.5.7), $u(t)\leqslant at+kv(t)$, имеем

$$u(t)\leqslant at+\frac{a}{k}(e^{kt}-1-kt)=\frac{a}{k}(e^{kt}-1).$$

Мы пришли к неравенству (1.5.8), которое и требовалось доказать.

1.6. Применение основной леммы: теорема единственности

Теорема 1.6.1. *Пусть* $U\subset\mathbb{R}\times E$ *и* $f\colon U\to E$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая* k*-условию Липшица по* $x\in E$. *Если* φ_1 *и* $\varphi_2\colon I\to E$ *суть два* (точных) *решения дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x)$$

и $\varphi_1(t_0)=\varphi_2(t_0)$ $(t_0\in I)$, *то функции* φ_1 *и* φ_2 *совпадают в интервале* I.

Доказательство. Воспользуемся неравенством (1.5.3) основной леммы: здесь $x_1=x_2$, $\varepsilon_1=0$, $\varepsilon_2=0$. Находим

$$\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\|=0 \text{ для } t\in I, \text{ ч. т. д.}$$

1.7. Теорема существования в случае, когда правая часть удовлетворяет условию Липшица

Теорема 1.7.1. *Пусть* $U\subset\mathbb{R}\times E$ — *замкнутое множество и* $f\colon U\to E$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая* k*-условию Липшица по переменному* x. *Пусть* $(t_0,x_0)\in U$ и $I\in\mathbb{R}$ — *компактный интервал, содержащий точку* t_0. *Предположим, что для любого* *числа* $\varepsilon > 0$ *в интервале* I *существует такое кусочно гладкое класса* C^1 ε*-приближенное решение* $\varphi\colon I \to E$ *дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

что $\varphi(t_0) = x_0$ [см., например, теорему 1.3.1, которая дает достаточное условие для существования таких приближенных решений]. *Тогда на интервале* I *существует точное решение* $\varphi\colon I \to E$ *этого дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(t_0) = x_0$.

Напомним, что в силу теоремы 1.6.1 такое точное решение *единственно.*

Доказательство. Зададимся последовательностью чисел $\varepsilon_n > 0$, стремящихся к нулю, когда $n \to +\infty$. Пусть непрерывные отображения $\varphi_n\colon I \to E$ являются такими ε_n-приближенными решениями данного уравнения, что $\varphi_n(t_0) = x_0$. В силу основной леммы 1.5.1

$$\|\varphi_n(t) - \varphi_p(t)\| \leqslant (\varepsilon_n + \varepsilon_p)\,\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}$$

для любого $t \in I$. Пусть K — верхняя грань множества

$$\frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k} \quad \text{для} \quad t \in I.$$

Тогда $\|\varphi_n(t) - \varphi_p(t)\| \leqslant K(\varepsilon_n + \varepsilon_p)$ для $t \in I$; отсюда следует, что функции φ_n образуют *последовательность Коши* по норме равномерной сходимости. Эта последовательность имеет предел φ, причем φ является *непрерывной* функцией $I \to E$. По предположению,

$$(t, \varphi_n(t)) \in U$$

для любого n и для любого $t \in I$. В силу замкнутости множества U мы получаем в пределе, что

$$(t, \varphi(t)) \in U \text{ для } t \in I$$

и $\varphi(t_0) = x_0$. Остается убедиться в том, что функция φ дифференцируема на I и

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) \text{ при } t \in I.$$

Нам осталось доказать, что

$$\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi(\tau))\,d\tau. \tag{1.7.1}$$

Так как, по предположению,

$$\|\varphi_n'(t) - f(t, \varphi_n(t))\| \leqslant \varepsilon_n,$$

то в силу теоремы о конечных приращениях

$$\left\| \varphi_n(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, \varphi_n(\tau))\, d\tau \right\| \leqslant \varepsilon_n |t - t_0|.$$

Устремим в этом неравенстве n к бесконечности; тогда $f(\tau, \varphi_n(\tau))$ будет стремиться к $f(\tau, \varphi(\tau))$ равномерно относительно $t \in I$. Таким образом, мы получим в пределе соотношение (1.7.1), которое и нужно было доказать.

Следствие 1.7.2 (теорема о локальном существовании). *Пусть V — окрестность точки $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times E$ и $f(t, x)$ — функция, непрерывная на V, со значениями в банаховом пространстве E, удовлетворяющая k-условию Липшица по x. Тогда существует число $\alpha > 0$, обладающее следующим свойством: дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

имеет на отрезке $I = [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ (единственное) решение $\varphi: I \to E$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Более точно, если числа $\tau > 0$ и $r > 0$ выбраны столь малыми, что произведение $[t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times B(x_0, r)$ содержится в V и

$$\| f(t, x) \| \leqslant M$$

при $|t - t_0| \leqslant \tau$, $\| x - x_0 \| \leqslant r$, то при

$$\alpha = \inf\left(\tau, \frac{r}{M}\right),$$

значения функции $\varphi: I \to E$, являющейся решением данного уравнения, принадлежат шару $B(x_0, r)$.

Доказательство. Возвратимся к замечанию в конце п. 1.3, в котором было показано, что если числа α и r выбраны так, как в условии нашей теоремы, то для любого числа $\varepsilon > 0$ дифференциальное уравнение на интервале I имеет *ε-приближенное* решение со значениями в шаре $B(x_0, r)$, принимающее значение x_0 при $t = t_0$. Поэтому достаточно применить теорему 1.7.1, выбрав в качестве U замкнутое множество $I \times B(x_0, r)$, ч. т. д.

1.8. Случай, когда f локально удовлетворяет условию Липшица

Определение. Функция $f: U \to E$ *локально удовлетворяет условию Липшица* на множестве $U \subset \mathbb{R} \times E$, если для любой точки $(t_0, x_0) \in U$ существует такая окрестность V этой точки, содержащаяся в U, и такое число $k > 0$, что для любых пар (t, x_1), $(t, x_2) \in V$

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leqslant k \| x_1 - x_2 \|.$$

Другими словами, сужение отображения f на V удовлетворяет k-условию Липшица по x.

Теорема 1.8.1. *Если отображение $f\colon U \to E$ непрерывно и локально удовлетворяет условию Липшица, а (t_0, x_0) — внутренняя точка множества U, то существует такое число $\alpha > 0$, что дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x)$$

имеет (точное) решение $\varphi\colon [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to E$.

Доказательство. Применяем следствие 1.7.2 к окрестности V точки (t_0, x_0), содержащейся в U, в которой отображение f удовлетворяет k-условию Липшица по переменному x.

Теорема 1.8.2 (теорема о глобальной единственности). *Пусть функция $f\colon U \to E$ локально удовлетворяет условию Липшица, I — интервал, принадлежащий полю $\mathbb{R}$, необязательно компактный (он может быть открытым, замкнутым или полуоткрытым, ограниченным или неограниченным). Если существует два (точных) решения φ_1 и $\varphi_2\colon I \to E$ дифференциального уравнения $dx/dt = f(t, x)$ и они равны при $t_0 \in I$, то эти решения совпадают во всем интервале I.*

Доказательство. Поскольку интервал I — связное множество, то достаточно убедиться в том, что множество $J \subset I$, на котором

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t),$$

одновременно *открыто* и *замкнуто* в I. Очевидно, что J замкнуто, так как функция $\varphi_1 - \varphi_2$ непрерывна. Теперь покажем, что подмножество J открыто в I. Действительно, если $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, то существует такое число $\alpha > 0$, что из соотношений $t \in I$ и $|t - t_0| \leqslant \alpha$ следует равенство $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$. Пусть $x_0 = \varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$. По предположению существует такая окрестность V точки (t_0, x_0), содержащаяся в U, и число $k > 0$, что функция f на множестве V удовлетворяет k-условию Липшица. Пусть число $\alpha > 0$ таково, что для $t \in I$, $|t - t_0| \leqslant \alpha$ пары $(t, \varphi_1(t))$ и $(t, \varphi_2(t))$ принадлежат окрестности V. Тогда теорема единственности 1.6.1 утверждает, что $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$ для любого $t \in I \cap [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, ч. т. д.

Остается невыясненным вопрос о *глобальном существовании* решения уравнения $dx/dt = f(t, x)$, принимающего значение x_0 при $t = t_0$, когда функция f *локально удовлетворяет условию Липшица*. Пусть (t_0, x_0) — внутренняя точка множества $U \subset \mathbb{R} \times E$, на котором функция f, по предположению, локально удовлетворяет условию Липшица. Согласно теореме 1.8.1, существует интервал I, содержащий точку t_0, на котором имеется (точное) решение $\varphi\colon I \to E$ дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Рассмотрим множество $\mathscr{E}$ *всех пар* (I, φ), где I — некоторый интервал, а функция $\varphi\colon I \to E$ — некоторое решение данного уравнения, удовлетворяющее условию $\varphi(t_0) = x_0$. Если (I_1, φ_1)

и (I_2, φ_2) — две подобные пары, то пересечение $I_1 \cap I_2$ не пусто, а решения φ_1 и φ_2 *совпадают* в пересечении в силу теоремы единственности 1.8.2. Обозначим тогда через J *объединение* всех интервалов I, образующих пары $(I, \varphi) \in \mathscr{E}$. В J существует такая единственная функция ψ: $J \to E$, что для всякой пары $(I, \varphi) \in \mathscr{E}$ сужение решения ψ на I совпадает с φ. Эта функция ψ, очевидно, является решением дифференциального уравнения и $\psi(t_0) = x_0$. Таким образом, доказана

Теорема 1.8.3. *Если функция f: $U \to E$ непрерывна, локально удовлетворяет условию Липшица и (t_0, x_0) — заданная внутренняя точка множества U, то существует наибольший интервал $J \ni t_0$, в котором определено решение ψ: $J \to E$ уравнения $dx/dt = f(x, t)$, удовлетворяющее начальному условию $\psi(t_0) = x_0$.* [Согласно теореме 1.8.2, такое решение ψ *единственно*.]

Это решение ψ называется *максимальным решением* для начальных данных (t_0, x_0).

З а м е ч а н и е. Можно было бы подумать, что решение ψ нельзя продолжить в строго больший интервал, чем J, только по той причине, что заданная функция f определена лишь на части множества $\mathbb{R} \times E$. Однако невозможность продолжения может иметь место даже в том случае, когда f непрерывна и локально удовлетворяет условию Липшица на всем пространстве $\mathbb{R} \times E$. Приведем простой пример, в котором роль пространства E играет числовая прямая $\mathbb{R}$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2, \tag{1.8.1}$$

где $x(t)$ — неизвестная функция, принимающая числовые значения. Легко проверить, что если B — *ограниченная* часть $\mathbb{R}$, то функция $f(t, x) = x^2$ удовлетворяет условию Липшица на множестве $\mathbb{R} \times B$. Следовательно, функция $f(t, x) = x^2$ *локально удовлетворяет условию Липшица* на пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Пусть x_0 — начальное значение, которое принимает решение $\varphi(t)$ при $t = 0$. Если $x_0 = 0$, то решение $\varphi(t) = 0$ для любого t в силу теоремы единственности. Предположим теперь, что $x_0 \neq 0$. Тогда для t, близких к нулю, $x = \varphi(t) \neq 0$, и уравнение (1.8.1)может быть записано в виде

$$\frac{dx}{x^2} = dt.$$

Отсюда мы получаем с помощью интегрирования, что

$$-\frac{1}{x} + \frac{1}{x_0} = t,$$

или

$$x = \frac{x_0}{1 - x_0 t}.$$

Таким образом, $\varphi(t) = x_0/(1 - x_0 t)$. Если, например, $x_0 > 0$, то максимальное решение существует на интервале $-\infty < t < 1/x_0$. Когда t стремится к $1/x_0$, то $\varphi(t)$ стремится к бесконечности.

Критерий продолжаемости решения для случая, когда функция f локально удовлетворяет условию Липшица. Предположим, что множество U открыто и φ: $[t_0, t_1) \to E$ — решение дифференциального уравнения $dx/dt = f(t, x)$. Если

$$\lim_{\substack{t \to t_1 \\ t < t_1}} \varphi(t)$$

существует (пусть этот предел равен x_1) и $(t_1, x_1) \in U$, то решение φ продолжается на интервал $[t_0, t_2]$ при $t_2 > t_1$. (Этот факт можно легко доказать с помощью рассуждений, использованных при доказательстве теоремы 1.8.2.)

1.9. Случай линейного дифференциального уравнения

В п. 1.4 мы определили линейное дифференциальное уравнение как уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t), \tag{1.9.1}$$

где A и B — заданные *непрерывные* функции в интервале $I \subset \mathbb{R}$. Здесь функция $f(t, x) = A(t) \cdot x + B(t)$ определена и непрерывна на произведении $I \times E$. Она *локально удовлетворяет условию Липшица*, ибо на любом произведении $J \times E$ (где J — *компактный* интервал, принадлежащий интервалу I) функция f удовлетворяет условию Липшица. В самом деле,

$$f(t, x_1) - f(t, x_2) = A(t) \cdot (x_1 - x_2),$$

$$\| f(t, x_1) - f(t, x_2) \| \leqslant k_J \| x_1 - x_2 \| \text{ при } t \in J,$$

где

$$k_J = \sup_{t \in J} \| A(t) \|.$$

По теореме 1.8.3, уравнение (1.9.1) имеет максимальное решение для начальных данных (t_0, x_0), где $t_0 \in I$. Итак, может быть сформулирована

Теорема 1.9.1 (теорема о *глобальном* существовании в случае линейного уравнения). *Каковы бы ни были точки $t_0 \in I$ и $x_0 \in E$, существует (точное) решение φ: $I \to E$ уравнения* (1.9.1), *определенное во всем интервале I и удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Это решение, очевидно, единственно.*

Доказательство. Пусть J — компактный интервал, содержащийся в интервале I и содержащий точку x_0. Согласно теореме 1.4.1, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует ε-приближенное решение на интервале J, принимающее значение x_0 при $t = t_0$. Теорема 1.7.1 утверждает, что на интервале J существует *точное* решение, удовлетворяющее тому же начальному условию. Поскольку решение существует на всяком компактном интервале, содержащемся в I (и содержащем t_0), то максимальное решение определено во всем интервале I, ч. т. д.

Мы подробно изучим линейные дифференциальные уравнения в § 2.

1.10. Зависимость от начальных данных

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.10.1}$$

где функция $f\colon U \to E$ непрерывна и удовлетворяет k-условию Липшица по переменному x, а точка $t_0 \in I$. Предположим, что для любого $u \in A \subset E$ существует (точное) решение уравнения (1.10.1), определенное на интервале I и принимающее значение u при $t = t_0$. Пусть $\varphi(t, u)$ — такое решение. Исследуем зависимость этого решения от *начального значения* u.

Воспользуемся основной леммой 1.5.1. В силу этой леммы для любых $u, v \in A$

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t, v) \| \leqslant \| u - v \| e^{k|t-t_0|}.$$

Пусть K — верхняя грань функции $e^{k|t-t_0|}$ для $t \in I$ (мы предполагаем интервал I ограниченным). Тогда

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t, v) \| \leqslant K \| u - v \|. \tag{1.10.2}$$

Отсюда вытекает

Предложение 1.10.1. *Решение $\varphi(t, u)$, принимающее значение u при $t = t_0$, удовлетворяет K-условию Липшица по u, причем постоянная K не зависит от $t \in I$.*

Следствие 1.10.2. *Функция $\varphi(t, u)$ является непрерывной функцией пары $(t, u) \in I \times A$.*

В самом деле, пусть задано u_0. При фиксированном t функция $\varphi(t, u)$ стремится к $\varphi(t, u_0)$, когда u стремится к u_0. Кроме того, так как постоянная Липшица K не зависит от t, то каждому числу $\varepsilon > 0$ можно сопоставить такое число $\eta > 0$, что при $\| u - u_0 \| \leqslant \eta$ для *любого* t

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t, u_0) \| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, *решение φ зависит от u непрерывно и равномерно относительно t.* Теперь следствие 1.10.2 можно получить из такой леммы:

Лемма 1.10.3. (a) *Если функция* ψ: $I \times A \to E$ *непрерывна по* $t \in I$ *при фиксированном* $u \in A$ *и непрерывна по* $u \in A$ *равномерно относительно* $t \in I$, *то* ψ — *непрерывная функция на произведении* $I \times A$;

(b) *Обратно, если функция* ψ: $I \times A \to E$ *непрерывна на* $I \times A$ *и интервал* I *компактен, то* $\psi(t, u)$ *непрерывна по* u *равномерно относительно* $t \in I$.

Более общо, эта лемма остается справедливой, если заменить I произвольным *компактным* пространством.

Доказательство леммы. (a) Пусть заданы t_0, u_0 и $\varepsilon > 0$. Имеем

$$\|\psi(t, u) - \psi(t_0, u_0)\| \leqslant \|\psi(t, u) - \psi(t, u_0)\| + \\ + \|\psi(t, u_0) - \psi(t_0, u_0)\|.$$

По предположению, существует такое число $\eta > 0$, что из неравенства $\|u - u_0\| \leqslant \eta$ следует

$$\|\psi(t, u) - \psi(t, u_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{для любого} \quad t \in I.$$

Более того, найдется такое число $\eta' > 0$, что при $|t - t_0| \leqslant \eta'$ будет иметь место неравенство

$$\|\psi(t, u_0) - \psi(t_0, u_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{непрерывность по } t).$$

Тогда при $\|u - u_0\| \leqslant \eta$ и $|t - t_0| \leqslant \eta'$

$$\|\psi(t, u) - \psi(t_0, u_0)\| \leqslant \varepsilon.$$

Это означает непрерывность ψ как функции пары (t, u).

(b) Обратно, предположим, что функция ψ непрерывна на $I \times A$. Зафиксируем точку $u_0 \in A$ и число $\varepsilon > 0$. По предположению, для любого $t \in I$ существует такое число $\eta(t) > 0$, что при $|t' - t| < \eta(t)$ и $\|u - u_0\| \leqslant \eta(t)$

$$\|\psi(t', u) - \psi(t, u_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2};$$

в частности, $\|\psi(t', u_0) - \psi(t, u_0)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда

$$\|\psi(t', u) - \psi(t', u_0)\| \leqslant \varepsilon. \tag{1.10.3}$$

Каждой точке $t \in I$ мы поставили в соответствие открытый интервал, образованный точками t', для которых $|t' - t| < \eta(t)$. Поскольку I — *компакт*, его можно покрыть конечной системой подобных интервалов. Иначе говоря, существуют конечное множество точек $t_i \in I$ и число $\eta > 0$, такие, что $\eta \leqslant \eta(t_i)$ для любого t_i и неравенство (1.10.2) имеет место при $\|u - u_0\| \leqslant \eta$ и любом $t' \in I$. Тем самым утверждение (b) леммы 1.10.3 доказано.

1.11. Случай, когда дифференциальное уравнение зависит от параметра

Теперь мы предположим, что функция $f(t, x)$ зависит от параметра λ, который изменяется в *топологическом пространстве* L. Более точно, рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \lambda) \tag{1.11.1}$$

где f — *непрерывная* функция

$$I \times B(x_0, r) \times L \to E$$

(I означает компактный интервал, а $B(x_0, r)$ — замкнутый шар $\|x - x_0\| \leqslant r$ в банаховом пространстве E). Предположим, что

1) $\|f(t, x; \lambda)\| \leqslant M$ на $I \times B(x_0, r) \times L$;

2) $\|f(t, x_1; \lambda) - f(t, x_2; \lambda)\| \leqslant k\|x_1 - x_2\|$

при $t \in I$, $\|x_1 - x_0\| \leqslant r$, $\|x_2 - x_0\| \leqslant r$, $\lambda \in L$. [Иными словами, предполагается, что f удовлетворяет k-условию Липшица по x с постоянной k, не зависящей от t и λ.]

Если мы зафиксируем $\lambda \in L$, то уравнение (1.11.1) будет иметь решение $x = \varphi(t)$ (и притом единственное), определенное в интервале

$$J = I \cap \left[t_0 - \frac{r}{M},\ t_0 + \frac{r}{M}\right]$$

с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$. Это следует из теорем 1.3.1 и 1.7.1. Обозначим это решение через $\varphi(t; \lambda)$, чтобы явно указать на его зависимость от параметра λ.

Теорема 1.11.1. *Решение $\varphi(t; \lambda)$ является непрерывной функцией пары $(t, \lambda) \in J \times L$.*

Доказательство. Как мы уже знаем, функция $\varphi(t; \lambda)$ непрерывна по t при фиксированном λ. Покажем, что функция $\varphi(t; \lambda)$ непрерывна по λ *равномерно относительно* $t \in J$. Отсюда будет следовать наша теорема (см. лемму 1.10.3).

Итак, пусть дано λ_0. Поскольку функция $\varphi(t; \lambda_0)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x; \lambda_0),$$

то

$$\varphi_t'(t; \lambda_0) - f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda_0) = 0. \tag{1.11.2}$$

Здесь $f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda)$ — непрерывная функция пары (t, λ). В силу леммы 1.10.3(b) она стремится к $f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda_0)$, когда λ стремится к λ_0 *равномерно относительно* $t \in J$. Другими словами, для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность V точки λ_0 в L, что

$$\| f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda) - f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda_0) \| \leqslant \varepsilon \tag{1.11.3}$$

для $\lambda \in V$, *каково бы ни было* $t \in J$. Сравнивая с (1.11.2), находим, что

$$\| \varphi'_t(t; \lambda_0) - f(t, \varphi(t; \lambda_0); \lambda) \| \leqslant \varepsilon.$$

Это означает, что $\varphi(t; \lambda_0)$ является ε-приближенным решением уравнения (1.11.1). Заметим, что точным решением будет функция $\varphi(t; \lambda)$, которая также принимает значение x_0 при $t = t_0$. В силу основной леммы 1.5.1 получаем

$$\| \varphi(t; \lambda) - \varphi(t; \lambda_0) \| \leqslant \varepsilon \frac{e^{k|t-t_0|} - 1}{k}.$$

Так как $|t - t_0| \leqslant r/M$, то при $\lambda \in V$ (окрестность точки λ_0)

$$\| \varphi(t; \lambda) - \varphi(t; \lambda_0) \| \leqslant K\varepsilon,$$

где K не зависит от $t \in J$. Поскольку число $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то тем самым мы доказали, что $\varphi(t; \lambda)$ стремится к $\varphi(t; \lambda_0)$ *равномерно относительно* $t \in J$, ч. т. д.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2.1. Общее решение

Пусть

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t) \tag{2.1.1}$$

есть линейное дифференциальное уравнение, где A — непрерывное отображение $I \to \mathscr{L}(E; E)$ и B — непрерывное отображение $I \to E$. Из теоремы 1.9.1 известно, что это уравнение имеет единственное решение $\varphi\colon I \to E$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$ (для заданных $t_0 \in I$ и $x_0 \in E$).

Определение. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x \tag{2.1.2}$$

называется *однородным* уравнением, соответств ющим уравнению (2.1.1).

Очевидно, что если φ — решение уравнения (2.1.2) и ψ — решение уравнения (2.1.1), то сумма $\varphi + \psi$ является решением уравнения (2.1.1). В самом деле,

$$\varphi'(t) + \psi'(t) = A(t) \cdot \varphi(t) + A(t) \cdot \psi(t) + B(t) =$$
$$= A(t) \cdot (\varphi(t) + \psi(t)) + B(t).$$

В частности, пусть $\varphi(t;\ x_0)$ — решение однородного уравнения (2.1.2), принимающее значение x_0 при $t = t_0$, и $\psi(t)$ — решение уравнения (2.1.1), обращающееся в нуль при $t = t_0$. Тогда решение уравнения (2.1.1), принимающее значение x_0 при $t = t_0$, имеет вид:

$$\varphi(t;\ x_0) + \psi(t)$$

(сумма «общего решения» однородного уравнения и частного решения уравнения (2.1.1)).

2.2. Линейное однородное уравнение

Исследуя уравнение (2.1.2), мы будем использовать ранее введенные обозначения. Очевидно, что

$$\varphi(t;\ x_0) + \varphi(t;\ x_1) = \varphi(t;\ x_0 + x_1),$$
$$\varphi(t;\ \lambda x_0) = \lambda\varphi(t;\ x_0), \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Иначе говоря, решение $\varphi(t;\ x_0)$ *линейно* зависит от начального значения x_0 (точка $t = t_0$ все время одна и та же).

В частности, $\varphi(t;\ 0) = 0$ для любого t. Итак, *если решение $x = \varphi(t)$ обращается в нуль при некотором $t_0 \in I$, то оно тождественно равно нулю в интервале I.* Отсюда вытекает

Следствие. *Пусть мы имеем k решений $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)$ и существуют такие постоянные $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ (не все равные нулю), что $\sum\limits_i \lambda_i\varphi_i(t_0) = 0$. Тогда это равенство влечет за собой $\sum\limits_i \lambda_i\varphi_i(t) = 0$ для любого $t \in I$. Решения $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_k(t)$ являются линейно зависимыми.*

Докажем, что решение $\varphi(t;\ x_0)$ линейно зависит от x_0. Действительно, сопоставим уравнению (2.1.2) [где неизвестной является функция $\varphi\colon I \to E$] другое линейное однородное дифференциальное уравнение относительно неизвестной функции $R(t)$, значения которой принадлежит пространству $\mathcal{L}(E;\ E)$,

$$\frac{dR}{dt} = A(t) \circ R(t). \tag{2.2.1}$$

Смысл такой записи состоит в следующем: производная $dR/dt = R'(t) \in \mathcal{L}(E;\ E)$ должна равняться композиции линейных отображений $A(t) \in \mathcal{L}(E;\ E)$ и $R(t) \in \mathcal{L}(E;\ E)$. Последнее уравнение однородно и линейно. Если мы положим $E' = \mathcal{L}(E;\ E)$, то элемент $A(t)$ определит линейное непрерывное отображение $f \to A(t)\circ f$ для $f \in \mathcal{L}(E;\ E)$. Обозначим через $C(t)$ элемент пространства $\mathcal{L}(E',\ E')$, определенный выше с помощью $A(t)$. Тогда

$$\| C(t) \| \leqslant \| A(t) \|,$$

поскольку $\| A(t) \circ f \| \leqslant \| A(t) \| \cdot \| f \|$. В силу непрерывности отображения $A\colon I \to \mathscr{L}(E;\ E)$, мы получим, что

$$A(t) = \lim_{t' \to t} A(t'),$$

т. е.

$$\lim_{t' \to t} \| A(t') - A(t) \| = 0.$$

Так как $\| C(t') - C(t) \| \leqslant \| A(t') - A(t) \|$, то $C(t')$ стремится к $C(t)$, когда t' стремится к t. Иначе говоря, $C\colon I \to \mathscr{L}(E';\ E')$ есть непрерывная функция, ч. т. д.

Следовательно, дифференциальное уравнение (2.2.1) принадлежит к рассматриваемому классу уравнений, и к нему можно применить теорему 1.9.1 существования и единственности. Пусть $R(t,\ t_0)$ — решение уравнения (2.2.1), *которое принимает значение* 1_E *при* $t = t_0$ (здесь $1_E \in \mathscr{L}(E;\ E)$ есть тождественное отображение E в E).

Теорема 2.2.1. *Решение дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x, \tag{2.1.2}$$

принимающее значение x_0 *при* $t = t_0$, *равно*

$$R(t,\ t_0) \cdot x_0,$$

где через $R(t,\ t_0)$ *обозначено решение уравнения* (2.2.1), *принимающее значение* 1_E *при* $t = t_0$.

Доказательство. Пусть $x(t) = R(t,\ t_0) \cdot x_0$. Тогда

$$x'(t) = R'(t,\ t_0) \cdot x_0.$$

Согласно уравнению (2.2.1),

$$(A(t) \circ R(t,\ t_0)) \cdot x_0 = A(t) \cdot (R(t,\ t_0 \cdot x_0) = A(t)) \cdot x(t).$$

Следовательно, $x(t)$ является решением уравнения (2.1.2), а его значение при $t = t_0$ равно

$$R(t_0,\ t_0) \cdot x_0 = 1_E \cdot x_0 = x_0, \text{ ч. т. д.}$$

Определение. Функция $R(t,\ t_0)$ называется *резольвентой* (или *резольвентным ядром*) уравнения (2.1.2).

Теорема 2.2.2. *Если* t_0, t_1 *и* t — *точки интервала* I, *то*

$$R(t,\ t_0) = R(t,\ t_1) \circ R(t_1,\ t_0). \tag{2.2.2}$$

Доказательство. Обозначим через $S(t)$ правую часть равенства (2.2.2). Имеем

$$\frac{dS}{dt} = \left(\frac{d}{dt} R(t,\ t_1)\right) \circ R(t_1,\ t_0) = (A(t) \circ R(t,\ t_1)) \circ R(t_1,\ t_0) = A(t) \circ S(t).$$

Следовательно, функция $S(t)$ представляет собой решение уравнения (2.2.1). Ее значение при $t = t_1$ равно

$$1_E \circ R(t_1, t_0) = R(t_1, t_0).$$

Таким образом, функция $S(t)$ является решением, которое при $t = t_1$ равно $R(t_1, t_0)$. Однако левая часть (2.2.2), а именно $R(t, t_0)$, также является решением уравнения (2.2.1), которое равно $R(t_1, t_0)$ при $t = t_1$. Отсюда следует равенство (2.2.2), ч. т. д.

Следствие 2.2.3. *Функция* $R(t, t_0) \in \operatorname{Isom}(E; E)$, *а обратным изоморфизмом является* $R(t_0, t)$.

Действительно

$$R(t_0, t) \circ R(t, t_0) = R(t_0, t_0) = 1_E,$$
$$R(t, t_0) \circ R(t_0, t) = R(t, t) = 1_E.$$

Замечание. Мы строили решение дифференциального уравнения в *действительном* банаховом пространстве E для заданного оператора $A(t) \in \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E; E)$. Сказанное можно применить и к *комплексному* случаю. Пусть E — банахово пространство над $\mathbb{C}$. Рассмотрим непрерывное отображение

$$A\colon I \to \mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E; E).$$

Так как $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E; E) \subset \mathscr{L}_{\mathbb{R}}(E; E)$, то к отображению A можно применить изложенную нами теорию линейных дифференциальных уравнений. В этом случае *резольвента* $R(t, t_0)$ будет элементом пространства $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E; E)$ и даже $\operatorname{Isom}_{\mathbb{C}}(E, E)$.

2.3. Случай, когда размерность пространства E конечна

Пусть n — размерность пространства E. На самом деле существуют две теории: действительная, в которой E изоморфно $\mathbb{R}^n$ (т. е. n — действительная размерность E), и комплексная, в которой E изоморфно $\mathbb{C}^n$ (т. е. n — комплексная размерность E). Как в одном, так и в другом случае предположим, что мы выбрали в пространстве E *базис*. Тогда эндоморфизм $A(t)$ определяется квадратной матрицей

$$\{a_{ij}(t)\}$$

с n строками и n столбцами, элементы которой $a_{ij}(t)$ суть *непрерывные* функции на интервале I. Эти функции принимают действительные значения в действительном случае и комплексные значения — в комплексном случае. Неизвестная функция $x(t)$ (со значениями в пространстве E) определяется n функциями $x_i(t)$, значения которых принадлежат $\mathbb{R}$ (соответственно $\mathbb{C}$); дифференциальное уравнение (2.1.2) превращается в систему из n дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j, \qquad 1\leqslant i\leqslant n.$$

При $t = t_0$ можно задать начальные значения $(x_i)_0$ для n неизвестных функций. Резольвента $R(t, t_0)$ определяется квадратной матрицей

$$\{r_{ij}(t, t_0)\}, \quad \text{где } r_{ij}(t_0, t_0)=\delta_{ij}.$$

Так как отображение $R(t, t_0)$ является изоморфизмом, то его определитель $\det R(t, t_0)$ отличен от нуля. Мы сейчас увидим, что этот определитель легко вычисляется с помощью матрицы $\{a_{ij}(t)\}$.

Напомним определение *следа* матрицы $\{a_{ij}\}$, или иначе эндоморфизма A векторного пространства конечной размерности. Этот след определяется формулой

$$\mathrm{Tr}(A)=\sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad \text{(сумма диагональных элементов).}$$

Он не зависит от выбора базиса [напомним, что в самом деле $\mathrm{Tr}(A)$ представляет собой сумму корней характеристического уравнения

$$\det(A-\lambda\cdot 1_E)=0].$$

Предложение 2.3.1. *Имеет место равенство*

$$\det R(t, t_0)=\exp\int_{t_0}^{t}\mathrm{Tr}(A(\tau))\,d\tau. \tag{2.3.1}$$

Мы получим требуемое равенство, если покажем, что функция

$$y(t)=\det R(t, t_0)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'(t)=(\mathrm{Tr}(A(t)))\cdot y(t) \tag{2.3.2}$$

и начальному условию $y(t_0)=1$ [последнее очевидно, так как $\det(1_E)=1$]. Докажем равенство (2.3.2). Будем писать $R(t)$ вместо $R(t, t_0)$. Выберем базис $(e_1, \ldots, e_n)$ в пространстве E и рассмотрим внешнюю алгебру, определенную на пространстве E. Согласно правилам внешнего умножения[1],

$$R(t)\,e_1\wedge\ldots\wedge R(t)\,e_n=\det(R(t))\cdot e_1\wedge\ldots\wedge e_n.$$

Полученное выражение мы продифференцируем по t: производная левой части (это производная полилинейной функции) равна

$$R'(t)\,e_1\wedge R(t)\,e_2\wedge\ldots\wedge R(t)\,e_n+R(t)\,e_1\wedge R'(t)\,e_2\wedge\ldots$$
$$\ldots\wedge R(t)\,e_n+\ldots+R(t)\,e_1\wedge\ldots\wedge R(t)\,e_{n-1}\wedge R'(t)\,e_n.$$

[1]) См. главу 3 настоящей книги.— *Прим. ред.*

Согласно дифференциальному уравнению (2.2.1), это выражение равно

$$(A(t) \circ R(t) e_1) \wedge R(t) e_2 \wedge \ldots \wedge R(t) e_n + R(t) e_1 \wedge (A(t) \circ R(t) e_2) \wedge \ldots$$
$$\ldots \wedge (R(t) e_n) + \ldots + R(t) e_1 \wedge \ldots \wedge R(t) e_{n-1} \wedge (A(t) \circ R(t) e_n),$$

и если положить $R(t) e_i = e_i'$ (для $i = 1, \ldots, n$), то мы получим

$$(A(t) e_1') \wedge e_2' \wedge \ldots \wedge e_n' + e_1' \wedge (A(t) e_2' \wedge \ldots \wedge e_n' + \ldots$$
$$\ldots + e_1' \wedge \ldots \wedge e_{n-1}' \wedge (A(t) e_n'). \quad (2.3.3)$$

Пусть $\{a_{ij}(t)\}$ — матрица оператора $A(t)$ относительно базиса $(e_1', \ldots, e_n')$. Записывая ее след в явном виде, мы найдем, что выражение (2.3.3) равно

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(t)\Big) e_1' \wedge \ldots \wedge e' = \operatorname{Tr}(A(t)) \cdot R(t) e_1 \wedge \ldots \wedge R(t) e_n =$$
$$= \operatorname{Tr}(A(t)) \cdot \det(R(t)) (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n).$$

Итак, мы показали, что

$$\frac{d}{dt} (\det R(t)) (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = \operatorname{Tr}(A(t)) \cdot \det(R(t)) (e_1 \wedge \ldots \wedge e_n),$$

откуда

$$\frac{d}{dt} (\det R(t)) = \operatorname{Tr}(A(t)) \cdot \det(R(t)),$$

т. е. мы получили дифференциальное уравнение (2.3.2)

$$\frac{d}{dt} (\det R(t)) = \operatorname{Tr}(A(t)) \cdot \det(R(t)), \quad \text{ч. т. д.}$$

2.4. Линейное уравнение «с правой частью»

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t) \cdot x + B(t), \quad (2.4.1)$$

где $A(t)$ и $B(t)$ имеют тот же самый смысл, что и в п. 2.1. Пусть $R(t, t_0)$ — резольвента соответствующего однородного уравнения (см. теорему 2.2.1). Метод вариации постоянных состоит в том, что мы полагаем

$$x(t) = R(t, t_0) \cdot y(t) \quad (2.4.2)$$

и рассматриваем в качестве неизвестной функции $y(t)$ вместо $x(t)$ [одна из этих функций определяет другую, так как $R(t, t_0) \in \in \operatorname{Isom}(E; E)$]. Подставим выражение $x(t)$, полученное с помощью (2.4.2), в (2.4.1). Тогда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dR}{dt} \cdot y(t) + R \cdot \frac{dy}{dt} = A(t) \cdot [R(t, t_0) \cdot y(t)] + R \frac{dy}{dt},$$

поскольку $R(t, t_0)$ является решением уравнения (2.2.1). Подставим это значение dx/dt в (2.4.2). После преобразований мы придем к уравнению

$$R(t, t_0) \cdot \frac{dy}{dt} = B(t)$$

или, поскольку $R(t, t_0)^{-1} = R(t_0, t)$, к эквивалентному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = R(t_0, t) \cdot B(t). \tag{2.4.3}$$

Это уравнение нам предстоит решить. Оно выражает тот факт, что функция $y(t)$ является примитивной для $R(t_0, t) \cdot B(t)$. В силу (2.4.2) имеем

$$x_0 = x(t_0) = R(t_0, t_0) \cdot y(t_0) = y(t_0),$$

откуда

$$y(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t_0, \tau) \cdot B(\tau)\, d\tau.$$

Подставим $y(t)$ из предыдущего равенства в (2.4.2) и заметим, что

$$R(t, t_0) \cdot \int_{t_0}^{t} R(t_0, \tau) \cdot B(\tau)\, d\tau = \int_{t_0}^{t} (R(t, t_0) \cdot R(t_0, \tau)) \cdot B(\tau)\, d\tau =$$
$$= \int_{t_0}^{t} R(t, \tau) \cdot B(\tau)\, d\tau.$$

В результате мы получим, что

$$\boxed{x(t) = R(t, t_0) \cdot x_0 + \int_{t_0}^{t} R(t, \tau) \cdot B(\tau)\, d\tau.} \tag{2.4.4}$$

Следовательно, резольвента однородного уравнения позволяет решить уравнение с правой частью (2.4.1). Заметим, что правая часть (2.4.4) представляет собой сумму двух функций: первая $R(t, t_0) \cdot x_0$ есть «общее решение» однородного уравнения, а вторая

$$\int_{t_0}^{t} R(t, \tau) \cdot B(\tau)\, d\tau \tag{2.4.5}$$

есть решение уравнения (2.4.1), обращающееся в нуль при $t = t_0$. Этот результат вполне соответствует тому, что мы отмечали в начале п. 2.1. Полученное решение *линейно зависит от функции* $B(t)$.

2.5. Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка

Переформулируем предыдущие результаты на случай уравнения n-го порядка. Начнем с линейного однородного уравнения

$$\frac{d^n x}{dt^n} = A_0(t)\cdot x + A_1(t)\cdot\frac{dx}{dt} + \ldots + A_{n-1}(t)\cdot\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} =$$
$$= \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t)\cdot\frac{d^i x}{dt^i} \qquad \left(\text{полагая } \frac{d^0 x}{dt^0} = x\right), \tag{2.5.1}$$

где $x(t)$ — неизвестная функция $I \to E$ (E — банахово пространство), «коэффициенты» $A_i(t)$ — заданные *непрерывные* функции $I \to \mathscr{L}(E; E)$. Случай $n = 1$ был нами только что рассмотрен (п. 2. 2). Общий случай сводится к нему в результате перехода к системе из n линейных однородных дифференциальных уравнений с n неизвестными функциями

$$x(t) = x^0(t),\ x'(t),\ x''(t),\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t),$$

принимающими значения в пространстве E и удовлетворяющими системе

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dx'}{dt} = x'', \quad \ldots, \quad \frac{dx^{(n-2)}}{dt} = x^{(n-1)}, \\ &\frac{dx^{(n-1)}}{dt} = A_0(t)\cdot x + A_1(t)\cdot x' + \ldots + A_{n-1}(t)\cdot x^{(n-1)}. \end{aligned}\right. \tag{2.5.2}$$

Эту систему можно рассматривать как уравнение для одной неизвестной функции $X(t)$, значения которой лежат в пространстве

$$E^n = \underbrace{E \times \ldots \times E}_{n \text{ раз}},$$

причем ее компонентами являются функции

$$x(t),\ x'(t),\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t).$$

Таким образом, систему (2.5.2) можно записать в матричном виде:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\cdot X,$$

где $A(t) \in \mathscr{L}(E^n; E^n)$ — матрица из n строк и n столбцов [элементы матрицы лежат в пространстве $\mathscr{L}(E; E)$]:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1_E & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1_E & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1_E \\ A_0(t) & A_1(t) & A_2(t) & \ldots & A_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{2.5.3}$$

Пусть $R(t, t_0)$ — резольвента этого уравнения; она также является матрицей с n строками и n столбцами. Обозначим через

$$R_0(t, t_0),\ R_1(t, t_0),\ \ldots,\ R_{n-1}(t, t_0)$$

элементы ее первой строки.

Решение нашего уравнения $X(t) = [x(t), x'(t), \ldots, x^{(n-1)}(t)]$, равное $X_0 = (x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)})$ при $t = t_0$, задается формулой

$$x(t) = R_0(t, t_0)\cdot x_0 + R_1(t, t_0)\cdot x_0' + \ldots + R_{n-1}(t, t_0)\cdot x_0^{(n-1)} = \sum_{i=0}^{n-1} R_i(t, t_0)\cdot x_0^{(i)}. \qquad (2.5.4)$$

Дифференцируя по t равенство (2.5.4), получаем

$$\frac{d^j x}{dt^j} = \sum_{i=0}^{n-1} R_i^{(j)}(t, t_0)\cdot x_0^{(i)}, \qquad (2.5.5)$$

где через $R_i^{(j)}(t, t_0)$ обозначена j-я производная от $R_i(t, t_0)$. Таким образом, матрица-резольвента имеет вид

$$R(t, t_0) = \left[\frac{d^j R_i}{dt^j}(t, t_0)\right]_{\substack{0\leq i\leq n-1\\ 0\leq j\leq n-1}}. \qquad (2.5.6)$$

Теперь уравнение (2.2.1) примет вид

$$\boxed{\frac{d^n R_i}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\circ\frac{d^j R_i}{dt^j}, \qquad 0 \leqslant i \leqslant n-1,} \qquad (2.5.7)$$

а начальные условия запишутся в виде

$$\boxed{\frac{d^j R_i}{dt^j}(t_0, t_0) = \delta_{ij}\cdot 1_E.} \qquad (2.5.8)$$

Заметим, что при $t = t_0$ матрица (2.5.6) совпадает с единичной матрицей. Таким образом, 1) *каждая функция* $R_i(t, t_0) \in \mathcal{L}(E; E)$ *является решением дифференциального уравнения* (2.5.7) *n-го порядка*; 2) *начальные условия для этого решения, так же как и для его производных до порядка $n-1$ включительно, при $t = t_0$ задаются равенством* (2.5.8).

Исследуем частный случай, когда E — векторное пространство размерности 1. Пусть $E = \mathbb{R}$ в действительном случае (соответственно $E = \mathbb{C}$ в комплексном). Тогда $A_i(t)$ — числовые функции. Обозначим их через $a_i(t)$. Наше дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i(x) \frac{d^i(x)}{dt^i}, \tag{2.5.9}$$

где неизвестная функция $x(t)$ принимает числовые значения. В этом случае матрица-резольвента $R(t, t_0)$ — это обычная квадратная матрица порядка n, элементами которой служат числовые функции

$$R(t, t_0) = \left[\frac{d^j r_i}{dt^j}(t, t_0)\right].$$

Каждая функция $r_i(t)$ является решением уравнения

$$\frac{d^n r_i}{dt^n} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) \frac{d^j r_i}{dt^n},$$

удовлетворяющим начальным условиям $d^j r_i/dt^j = \delta_{ij}$ (при $t = t_0$). Общее решение уравнения (2.5.9) имеет вид

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n-1} r_i(t, t_0) \cdot x_0^{(i)}.$$

Таким образом, при фиксированном t_0 функции $r_i(t, t_0)$ образуют *базис* в векторном пространстве решений уравнения (2.5.9), причем размерность этого пространства равна n. При этом

$$\det R(t, t_0) = \det\left[\frac{d^j r_i}{dt^j}(t, t_0)\right]$$

Применим к этому выражению соотношение (2.3.1). Мы получим, что

$$\operatorname{Tr} A(t) = a_{n-1}(t),$$

откуда

$$\det\left[\frac{d^j r_i}{dt^j}(t, t_0)\right] = \exp\int_{t_0}^{t} a_{n-1}(\tau)\, d\tau \tag{2.5.10}$$

Покажем, что последнее выражение равно определителю линейного преобразования, которое переводит строку

$$x(t_0),\ x'(t_0),\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0)$$

в строку

$$x(t),\ x'(t),\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t)$$

[для *любого* решения $x(t)$ уравнения (2.5.9)]. Действительно, рассмотрим n решений $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ уравнения (2.5.9.). Тогда определитель

$$\det\begin{pmatrix} x_1(t) & x_1'(t) & \ldots & x_1^{(n-1)}(t) \\ x_2(t) & x_2'(t) & \ldots & x_2^{(n-1)}(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n(t) & x_n'(t) & \ldots & x_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix},$$

называющийся *вронскианом* системы, *равен произведению его значения при* $t = t_0$ *и определителя* (2.5.10), который строго положителен. В частности, если вронскиан системы обращается в нуль при некотором t_0, то он равен нулю при любом t. Отсюда вытекает, что тогда имеет место линейное соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i(t) = 0$$

с постоянными коэффициентами c_i, среди которых не все равны нулю

2.6. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с правой частью»

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i(t)\cdot\frac{d^i x}{dt^i} + B(t), \tag{2.6.1}$$

где значения неизвестной функции x: $I \to E$ лежат в банаховом пространстве E, коэффициенты $A_i(t)$ суть непрерывные функции $I \to \mathscr{L}(E;\ E)$, а $B(t)$ — заданная непрерывная функция $I \to E$. Применим результаты п. 2. 4 к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A(t)\cdot X + C(t),$$

где матрица $A(t)$ задается формулой (2.5.3) и

$$C(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ B(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда общее решение уравнения (2.6.1) представляет собой сумму общего решения соответствующего однородного уравнения [формула (2.5.4)] и *решения уравнения* (2.6.1), *обращающегося в нуль вместе с производными до порядка* $n - 1$ *включительно при* $t = t_0$. Если воспользоваться аналогом равенства (2.4.4) для нашего случая, это решение запишется в виде

$$\boxed{\int_{t_0}^{t} R_{n-1}(t, \tau)\cdot B(\tau)\,d\tau.} \tag{2.6.2}$$

Напомним (см. соотношения (2.5.7) и (2.5.8), что $R_{n-1}(t, \tau)$ — *единственное решение дифференциального уравнения*

$$\frac{d^nS}{dt^n}=\sum_{j=0}^{n-1} A_j(t)\circ\frac{d^jS}{dt^j}$$

со значениями в пространстве $\mathscr{L}(E; E)$, *которое при* $t=\tau$ *обращается в нуль вместе с производными до порядка* $n-2$ *включительно, а* $(n-1)$*-я производная* $d^{n-1}S/dt^{n-1}$ *в этой точке равна* 1_E.

Рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^nx}{dt^n}=B(t).$$

Найдем его решение («n-ю примитивную» для $B(t)$), которое обращается в нуль вместе с производными до порядка $n-1$ включительно при $t=t_0$. Очевидно, что функция

$$S(t)=\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot 1_E$$

обращается в нуль вместе со своими производными до порядка $n-2$ включительно при $t=\tau$, а ее $(n-1)$-я производная равна 1_E. Эта функция удовлетворяет однородному уравнению $d^nx/dt^n=0$. Отсюда вытекает, что отыскиваемое решение данного уравнения имеет вид

$$\boxed{\int_{t_0}^{t}\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!}B(\tau)\,d\tau}$$

[мы не пишем 1_E, поскольку $1_E\cdot B(\tau)=B(\tau)$]. Таким образом, отыскание n-й примитивной свелось к вычислению простого интеграла.

Пример 2. Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=B(t).$$

Его решение, обращающееся в нуль вместе со своей первой производной при $t = t_0$, имеет вид

$$\int_{t_0}^{t} \sin(t-\tau)\, B(\tau)\, d\tau.$$

Действительно, функция $S(t) = \sin(t-\tau)\cdot 1_E$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2S}{dt^2} + S = 0$$

и обращается в нуль при $t = \tau$, а ее производная равна 1_E.

2.7. Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

Теперь разберем частный случай, когда заданная функция $A: I \to \mathscr{L}(E; E)$ *постоянна*. Рассмотрим сначала линейное однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A\cdot x, \tag{2.7.1}$$

где $A \in \mathscr{L}(E;\ E)$ — заданная функция. Можно считать, что здесь $I = \mathbb{R}$. *Резольвента* $R(t, 0) = R(t)$ — это функция $\mathbb{R} \to \mathscr{L}(E;\ E)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dR}{dt} = A \circ R \tag{2.7.2}$$

и начальному условию $R(0) = 1_E$. Найдем эту функцию в явном виде. В гл. 1 (см. теорему 1.7.1) мы определили экспоненту

$$\exp A = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} A^n \quad \text{для } A \in \mathscr{L}(E;\ E) \tag{2.7.3}$$

[условимся, что $A^0 = 1_E$]. В правой части стоит нормально сходящийся ряд, так как

$$\| A^n \| \leqslant \| A \|^n.$$

Легко видеть, что функция

$$R(t) = \exp(tA) \quad (\text{для } t \in \mathbb{R})$$

удовлетворяет уравнению (2.7.2). Поскольку $R(0) = 1_E$, то функция $R(t)$ и будет резольвентой уравнения (2.7.1). Тогда

$$R(t) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n \tag{2.7.4}$$

является суммой степенного ряда по $t \in \mathbb{R}$ с «коэффициентами», принадлежащими пространству $\mathscr{L}(E;\ E)$. Из теоремы о дифференцировании степенных рядов вытекает, что производная $R'(t)$ равна сумме степенного ряда, полученного почленным дифференцированием ряда (2.7.4):

$$R'(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} A^n = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^{n+1}.$$

Можно вынести A за скобку (например, слева); тогда мы получим, что

$$R'(t) = A \circ \Big(\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n \Big) = A \circ R(t), \qquad \text{ч. т. д.}$$

Следовательно, решение уравнения (2.7.1), равное x_0 при $t = t_0$, имеет вид

$$\boxed{x(t) = \exp((t - t_0) A) \cdot x_0.} \tag{2.7.5}$$

Соотношение (2.2.2) в этом случае запишется так:

$$\exp((t - t_0) A) = \exp((t - t_1) A) \circ \exp((t_1 - t_0) A).$$

Заметим, что

$$\exp((t_1 + t_2) A) = \exp(t_1 A) \circ \exp(t_2 A),$$

и поскольку для произвольных коммутирующих эндоморфизмов A_1 и A_2 имеет место равенство $A_1 \circ A_2 = A_2 \circ A_1$,

$$\exp(A_1 + A_2) = (\exp A_1) \circ (\exp A_2).$$

В частности, из равенства $\exp(tA) \circ \exp(-tA) = 1_E$, очевидно, следует, что $\exp(tA) \in \mathrm{Isom}(E; E)$.

Теперь рассмотрим уравнение с правой частью:

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x + B(t).$$

В силу соотношения (2.4.4) решение этого уравнения, обращающееся в нуль при $t = t_0$, задается формулой

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} (\exp(t - \tau) A) \cdot B(\tau)\, d\tau.$$

2.8. Уравнение с постоянными коэффициентами: случай, когда размерность пространства E конечна

Мы ограничимся случаем *комплексного* векторного пространства E размерности n. Рассмотрим оператор $A \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E; E)$. Тогда $\exp(tA) \in \mathrm{Isom}_{\mathbb{C}}(E; E)$. Сопоставим этому оператору A разложение векторного пространства E в прямую сумму некоторых подпространств.

«Характеристическое» уравнение эндоморфизма A имеет вид:

$$\det(A - \lambda \cdot 1_E) = 0. \tag{2.8.1}$$

Это уравнение n-й степени по λ, корни которого (элементы поля $\mathbb{C}$) являются *собственными значениями* эндоморфизма A. Согласно теореме Даламбера — Гаусса, уравнение n-й степени имеет n корней с учетом их кратностей. Пусть λ_i — *различные* собственные значения и $k_i \geqslant 1$ — кратности корней λ_i. Мы предполагаем известным следующий результат, который доказывается приведением матрицы A к треугольному виду с помощью выбора подходящего базиса в пространстве E.

Лемма. *Пусть λ_i — корень уравнения* (2.8.1) *кратности k_i, а E_i — подпространство, состоящее из точек $x \in E$, для которых*

$$(A-\lambda_i\cdot 1_E)^{k_i}\,x=0. \tag{2.8.2}$$

Тогда размерность пространства E_i равна k_i (оно содержит собственные векторы, отвечающие собственному значению λ_i), *а всё пространство E является прямой суммой пространств E_i* (здесь $\sum\limits_i k_i=n$).

Из этой леммы вытекает, что если $x \in E_i$, то и $A\cdot x \in E_i$, так как

$$((A-\lambda_i\cdot 1_E)^{k_i}\circ A)\cdot x=(A\cdot(A-\lambda_i 1_E)^{k_i})\cdot x=A\cdot((A-\lambda_i\cdot 1_E)^{k_i}\cdot x)=0.$$

Обозначим через $A_i \in \mathscr{L}(E_i;\ E_i)$ линейное отображение, индуцированное отображением A. Тогда

$$(A_i-\lambda_i\cdot 1_{E_i})^{k_i}=0. \tag{2.8.3}$$

В этих условиях однородное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=A\cdot x$$

оказывается эквивалентным системе однородных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=A_i\cdot x_i, \tag{2.8.4}$$

где $x_i(t)$ — функции, значения которых лежат в пространстве E_i. Решение системы (2.8.4) имеет вид

$$x_i\,(t)=\exp\,(tA_i)\cdot u_i, \quad \text{причем} \quad u_i=x_i\,(0)\in E_i.$$

Выражение для $\exp\,(tA_i)$ можно упростить в силу (2.8.3). Для сокращения будем писать $A_i-\lambda_i$ вместо $A_i-\lambda_i\cdot 1_{E_i}$; тогда мы получим, что

$$\exp\,(tA_i)=e^{\lambda_i t}\exp t\,(A_i-\lambda_i)=$$
$$=e^{\lambda_i t}\left(1_{E_i}+t\,(A_i-\lambda_i)+\ldots+\frac{t^{k_i-1}}{(k_i-1)!}(A_i-\lambda_i)^{k_i-1}\right)=e^{\lambda_i t}P_i\,(t),$$

где $P_i(t)$ — полином степени $\leqslant k_i-1$ со значениями в пространстве $\mathscr{L}(E_i;\ E_i)$. Когда u_i (начальное значение) пробегает пространство E_i, $P_i(t)\cdot u_i$ образуют *векторное пространство* (размерности k_i) полиномов степени $\leqslant k_i - 1$. Их значения лежат в подпространстве E_i пространства E. Подводя итог изложенному, сформулируем

Предложение 2.8.1. *Для каждого собственного значения λ_i оператора A (кратности k_i) однородное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = A\cdot x \tag{2.8.5}$$

имеет решения (со значениями, принадлежащими к пространству E_i), которые образуют векторное пространство размерности k_i. Каждое из этих решений имеет вид

$$e^{\lambda_i t}Q_i(t),$$

где $Q_i(t)$ — полином степени $\leqslant k_i - 1$ (со значениями, принадлежащими к пространству E_i). Всякое решение уравнения (2.8.5) представляет собой сумму подобных решений:

$$x(t) = \sum_i e^{\lambda_i t}Q_i(t),$$

где суммирование ведется по всем различным собственным значениям.

Частный случай. Если характеристическое уравнение (2.8.1) имеет n различных корней, то решение уравнения (2.8.5), соответствующее собственному значению λ_i, имеет вид

$$e^{\lambda_i t}c_i \quad (c_i \in E,\ c_i \neq 0),$$

и любое решение этого уравнения является комбинацией (с постоянными коэффициентами) этих n частных решений.

Практический метод. Для нахождения решения $x(t)$ мы воспользуемся методом неопределенных коэффициентов. Для каждого корня λ_i запишем в общем виде полином $Q_i(t)$ степени $k_i - 1$ со значениями в пространстве E_i [такой полином определяется $(k_i)^2$ числовыми коэффициентами]. Затем подставим $e^{\lambda_i t}Q_i(t)$ в уравнение (2.8.5) и потребуем, чтобы это выражение являлось решением этого уравнения. В результате мы получим соотношения для вычисления коэффициентов полинома $Q_i(t)$. После проведения необходимых вычислений останутся неопределенными как раз k_i коэффициентов.

2.9. Линейное дифференциальное уравнение порядка n с постоянными коэффициентами

Достаточно объединить результаты п. 2.5 и 2.7. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} = A_0\cdot x + A_1\cdot\frac{dx}{dt} + \ldots + A_{n-1}\cdot\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}, \tag{2.9.1}$$

где $x\colon \mathbb{R} \longrightarrow E$ — неизвестная функция и $A_i \in \mathcal{L}(E;\, E)$ — заданные отображения. Положим

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1_E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1_E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1_E \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} \end{pmatrix}; \tag{2.9.2}$$

тогда

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} R_0(t) & R_1(t) & \dots & R_{n-1}(t) \\ R_0'(t) & R_1'(t) & \dots & R_{n-1}'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_0^{(n-1)}(t) & R_1^{(n-1)}(t) & \dots & R_{n-1}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Решение уравнения с правой частью

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} A_i \frac{d^i x}{dt^i} + B(t),$$

обращающееся при $t = t_0$ в нуль вместе со своими производными до порядка $n-1$ включительно, имеет вид

$$\int_{t_0}^{t} R_{n-1}(t-\tau)\cdot B(\tau)\, d\tau.$$

Решения уравнений, найденные в конце п. 2.6, легко получаются из этой формулы.

Исследуем более подробно *случай, когда E — комплексное пространство E размерности* 1, т. е. $E = \mathbb{C}$. Тогда мы получаем однородное уравнение

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \frac{d^i x}{dt^i}, \tag{2.9.3}$$

где $a_i \in \mathbb{C}$ — фиксированные числа, а $x(t)$ — неизвестная функция, принимающая комплексные значения. Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ — линейное отображение, заданное матрицей (2.9.2), в которой A_i заменены на a_i. Тогда характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda) = 0$$

сведется к уравнению

$$\lambda^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i. \tag{2.9.4}$$

Записывая условие того, что это уравнение имеет собственный вектор для значения λ или (согласно п. 2.8) что существует решение уравнения (2.9.3) вида

$$x = e^{\lambda t},$$

мы придем к соотношению (2.9.4). В силу результатов п. 2.8, если λ_i — корень уравнения (2.9.4) кратности k_i, то дифференциальное уравнение (2.9.3) имеет k_i линейно независимых решений, каждое из которых имеет вид

$$e^{\lambda_i t} q_i(t).$$

Здесь $q_i(t)$ — полиномы степени $\leqslant k_i - 1$, принимающие числовые значения. Эти полиномы образуют векторное пространство размерности k_i. Каждому, произвольному полиному $q_i(t)$ степени $\leqslant k_i - 1$ соответствует решение уравнения (2.9.3) вида $e^{\lambda_i t} q_i(t)$.

Итак, мы получаем

Предложение 2.9.1. *Общее решение однородного уравнения* (2.9.3) *имеет вид*

$$\sum_i e^{\lambda_i t} q_i(t),$$

где $q_i(t)$ — *произвольный полином (с числовыми значениями) степени* $k_i - 1$ (k_i — кратность корня λ_i); *здесь суммирование ведется по множеству различных корней характеристического уравнения* (2.9.4).

§ 3. РАЗЛИЧНЫЕ ВОПРОСЫ

3.1. Однопараметрические группы линейных автоморфизмов

Пусть даны банахово пространство E и отображение $A \in \mathcal{L}(E; E)$; тогда отображение

$$t \to \exp(tA) \qquad (3.1.1)$$

является непрерывным отображением пространства $\mathbb{R}$ в группу $\operatorname{Isom}(E; E)$ автоморфизмов пространства E. Так как

$$\exp((t + t')A) = \exp(tA) \circ \exp(t'A),$$

то отображение (3.1.1) представляет собой гомоморфизм *аддитивной группы* $\mathbb{R}$ в группу $\operatorname{Isom}(E; E)$.

Обратно, пусть

$$t \to B(t)$$

есть гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{R}$ в $\operatorname{Isom}(E, E)$. Предположим, что функция B принадлежит к классу C^1. Пусть $A = B'(0)$.

Тогда

$$B'(t) = \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}(B(t+h) - B(t)) =$$
$$= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}(B(h) - 1_E) \circ B(t) = A \circ B(t).$$

Следовательно, функция $B(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dB}{dt} = A \circ B(t),$$

причем $B(0) = 1_E$. Иначе говоря, $B(t) = \exp(tA)$.

Гомоморфизм $\mathbb{R} \to \operatorname{Isom}(E; E)$ класса C^1 называется *однопараметрической* (аддитивной) *группой* линейных автоморфизмов пространства E. Мы только что установили *биективное соответствие между этими группами и элементами* $A \in \mathcal{L}(E; E)$. Часто говорят, что A — инфинитезимальное преобразование однопараметрической группы.

Примеры. (1) Для $A = 1_E$ находим группу

$$B(t) = e^t \cdot 1_E,$$

т. е. *группу гомотетий с положительным параметром.*

(2) На плоскости $E = \mathbb{R}^2$ пусть отображение $A \in \mathcal{L}(E; E)$ задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $A^2 = -1_E$, то мы находим отсюда, что

$$B(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix};$$

получаем *группу вращений* плоскости $\mathbb{R}^2$ (угол вращения t выражен в радианах).

(3) Более общо, пусть $E = \mathbb{R}^n$. Как известно, ортогональная группа $O(n)$ — это группа таких линейных преобразований $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, что

$$B \circ {}^tB = 1_E.$$

Здесь через ${}^tB$ обозначено отображение, *транспонированное* к B (т. е. матрица ${}^tB$ относительно канонического базиса в пространстве $\mathbb{R}^n$ является транспонированной к матрице B). Это означает следующее: пусть $t \to B(t)$ — однопараметрическая группа, состоящая из преобразований группы $O(n)$. Тогда

$$B(t)\circ {}^t(B(t)) = 1_E,$$

и поскольку $B(t)^{-1} = B(-t)$, то

$$B(t) = B(-t). \tag{3.1.2}$$

Таким образом, мы установили, что инфинитезимальное преобразование $A = B'(0)$ удовлетворяет соотношению

$${}^tA = -A. \tag{3.1.3}$$

Обратно, пусть матрица $A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ обладает этим свойством (т. е. матрица A «антисимметрична»). Если мы положим $B(t) = \exp(tA)$, то

$${}^tB(t) = {}^t\Big(\sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!} A^n\Big) = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\, {}^t(A^n),$$

или ${}^t(A^n) = ({}^tA)^n$. Отсюда

$${}^tB(t) = \exp(t\,{}^tA).$$

Итак мы видим, что из (3.1.3) следует (3.1.2). Резюме: *для того чтобы A было инфинитезимальным преобразованием однопараметрической подгруппы ортогональной группы $O(n)$, необходимо и достаточно, чтобы A удовлетворяло соотношению* (3.1.3).

Из соотношения $B(t)\circ {}^t(B(t)) = 1_E$ вытекает, что $(\det B(t))^2 = 1$, откуда $\det B(t) = \pm 1$ (хорошо известное свойство ортогональных преобразований). Но $B(t)$ является непрерывной функцией t, равной $+1$ при $t = 0$ (так как $B(0) = 1_E$); поэтому $\det B(t) = +1$ при любом t. Иначе говоря, всякая однопараметрическая подгруппа группы $O(n)$ содержится в подгруппе $SO(n)$ ортогональных преобразований с определителем, равным $+1$ («вращения»).

3.2. Образующая однопараметрической группы

В предыдущем пункте рассмотрение дифференциального уравнения

$$\frac{dB}{dt} = A\circ B(t)$$

привело нас к однопараметрическим группам линейных автоморфизмов пространства E. Решение этого уравнения $B(t)$ служит резольвентой дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A\cdot x$$

с неизвестной функцией $x(t)$, значения которой принадлежат к пространству E.

Более общо, пусть имеется дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{3.2.1}$$

где f — непрерывное отображение, локально удовлетворяющее условию Липшица на множестве $U \subset E$ (E обозначает банахово пространство, U — *открытое* множество в пространстве E). Можно интерпретировать отображение f как *векторное поле* на открытом множестве U: каждой точке $x \in U$ ставится в соответствие вектор $f(x) \in E$. К такому дифференциальному уравнению применимы общие результаты, установленные в § 1. Единственная особенность здесь состоит в том, что данная функция $f(x)$ *не зависит от* t.

Пусть дана точка $x_0 \in U$ и такие числа r, M и $k > 0$, что замкнутый шар $\| x - x_0 \| \leqslant r$ содержится в U и

$$\| f(x) \| \leqslant M \quad \text{при} \quad \| x - x_0 \| \leqslant r,$$

$$\| f(x') - f(x'') \| \leqslant k \| x' - x'' \| \quad \text{при} \quad \begin{aligned} &\| x' - x_0 \| \leqslant r, \\ &\| x'' - x_0 \| \leqslant r. \end{aligned}$$

Тогда для любого вектора $u \in E$, такого, что $\| u - x_0 \| \leqslant \rho$ $(\rho < r)$, замкнутый шар $B(u, r - \rho)$ содержится в шаре $B(x_0, r)$. Следовательно, в силу общих теорем (теорема 1.3.1 и теорема 1.7.1) уравнение (3.2.1) обладает на отрезке

$$|t| \leqslant \frac{r-\rho}{M}$$

единственным решением

$$x = \varphi(t, u),$$

удовлетворяющим начальному условию $\varphi(0, u) = u$, причем

$$\| \varphi(t, u) - u \| \leqslant M |t| \quad \text{при} \quad |t| \leqslant \frac{r-\rho}{M}. \tag{3.2.2}$$

Мы видим, что если $\| u - x_0 \| \leqslant \rho < r$ и $t, t' \in \mathbb{R}$ таковы, что $|t| + |t'| \leqslant (r - \rho)/M$, то функция

$$\varphi(t, \varphi(t', u))$$

определена и ее значения принадлежат шару $\| x - x_0 \| \leqslant r$.

Теорема 3.2.1. *В предыдущих предположениях имеем*

$$\boxed{\varphi(t, \varphi(t', u)) = \varphi(t + t', u).} \tag{3.2.3}$$

Доказательство. Поскольку в дифференциальном уравнении (3.2.1) функция $f(x)$ не зависит от t, то функция $\varphi(t + t', u)$ (рассматриваемая как функция t в окрестности точки $t = 0$) является решением дифференциального уравнения; ее значение при $t = 0$ равно $\varphi(t', u)$. Но правая часть равенства (3.2.3) — это решение уравнения (3.2.1), равное $\varphi(t', u)$ при $t=0$; тогда равенство (3.2.3) является следствием *теоремы единственности* (теорема 1.8.2).

Обозначим $\varphi(t, u)$ через $\varphi_t(u)$; если $|t| \leqslant (r-\rho)/(2M)$, то $\varphi_t(u)$ является функцией u, определенной при $\|u - x_0\| \leqslant \rho$; ее значения лежат в шаре $\|x - x_0\| \leqslant r$. Из теоремы 3.2.1 вытекает, что при достаточно малых $|t|$ и $|t'|$ можно построить композицию $\varphi_t \circ \varphi_{t'}$ в шаре с центром в точке x_0 и достаточно малым радиусом. Тогда

$$\boxed{\varphi_t \circ \varphi_{t'} = \varphi_{t+t'}.} \tag{3.2.4}$$

В этом случае говорят, что функция φ_t является *образующей однопараметрической (аддитивной) группы с параметром t в окрестности точки x_0*. Как мы видим, задание дифференциального уравнения (3.2.1) определяет в окрестности каждой точки множества U образующую однопараметрической группы. Запишем

$$\frac{d}{dt}\varphi_t(u) = f(\varphi_t(u)).$$

Иначе говоря, «вектор скорости в момент t» в точке $x = \varphi_t(u)$ «траектории» равен $f(x)$ — значению функции f в точке x заданного векторного поля.

Замечание. Для достаточно малых t

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \text{тождественное отображение}.$$

Следовательно, φ_t представляет собой гомеоморфизм окрестности точки x_0 на окрестность точки $\varphi_t(x_0)$. Можно показать, что если f — функция класса C^k, то φ_t есть C^k-диффеоморфизм окрестности точки x_0 на ее образ.

3.3. Вопросы дифференцируемости

Теорема 3.3.1. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{3.3.1}$$

где $f: U \to E$ (U — открытое множество в пространстве $\mathbf{R} \times E$) есть функция класса C^k ($k \geqslant 1$). Если функция $x = \varphi(t)$ является решением уравнения (3.3.1), *то она принадлежит к классу C^{k+1}.*

Доказательство. По предположению,

$$\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)). \tag{3.3.2}$$

Следовательно, φ' — непрерывная функция t; иначе говоря, функция φ принадлежит к классу C^1. Докажем по индукции, что если φ принадлежит к классу C^h ($1 \leqslant h \leqslant k$), то φ принадлежит к классу

C^{h+1}. Отсюда сразу же будет следовать утверждение теоремы. Если φ класса C^h, то правая часть равенства (3.3.2) является функцией класса C^h в силу теоремы о сложных функциях (гл. 1, теорема 5.4.2). В нашем случае эта теорема применима потому, что отображение $(t, x) \to f(t, x)$ принадлежит к классу C^h (так как $h \leqslant k$). Следовательно, φ' принадлежит к классу C^h, а, значит, функция φ принадлежит к классу C^{h+1}, ч. т. д.

3.4. Вопросы дифференцируемости: дифференцируемость по начальному значению u

Рассмотрим снова дифференциальное уравнение (3.3.1). Мы знаем (п. 1.10), что если функция f непрерывна и удовлетворяет условию Липшица по переменному x, то решение этого уравнения $\varphi(t, u)$, равное u при $t = t_0$, удовлетворяет условию Липшица по переменному u (для значений u, близких к x_0):

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t, v) \| \leqslant K \| u - v \|.$$

Покажем теперь, что если функция $f(t, x)$ дифференцируема по x, то и функция $\varphi(t, u)$ дифференцируема по u (сейчас мы это уточним). Но прежде хорошо бы определить *область существования решения* $t \to \varphi(t, u)$ относительно начального значения u, близкого к x_0.

Предложение 3.4.1. Пусть $(t, x) \to f(t, x)$ — *непрерывное отображение со значениями в пространстве E, локально удовлетворяющее по переменному x условию Липшица. Пусть $(t_0, x_0) \in U$ и I — компактный интервал $(t_0 \in I)$, в котором существует решение*

$$t \to \varphi(t, x_0)$$

уравнения (3.3.1), *удовлетворяющее начальному условию* $\varphi(t_0, x_0) = x_0$. *Если норма $\| u - x_0 \|$ достаточно мала, то в интервале I* (а может быть, и вне его) *существует решение $\varphi(t, u)$ уравнения* (3.3.1), *равное u при $t = t_0$*.

Доказательство. Для каждой точки $\tau \in I$ существует открытая окрестность W_τ точки $(\tau, \varphi(\tau, x_0))$ в пространстве $\mathbb{R} \times E$ и такие числа k_τ, M_τ, что

$$W_\tau \subset U;$$

$$\| f(t, x) \| \leqslant M_\tau \quad \text{при} \quad (t, x) \in W_\tau;$$

$$f \text{ удовлетворяет } k_\tau\text{-условию Липшица по } x.$$

В силу компактности интервала I существует открытое множество $V \subset U$, содержащее все точки $(t, \varphi(t, x_0))$ [когда t пробегает I], и существуют такие два числа M и k, что

$$\| f(t, x) \| \leqslant M \quad \text{при} \quad (t, x) \in V; \tag{3.4.1}$$

f удовлетворяет k-условию Липшица по x на множестве V. Заметим, что всегда можно найти такое число $r > 0$, что множество V содержит все точки (t, x), для которых

$$t \in I, \qquad \| x - \varphi(t, x_0) \| \leqslant r$$

(снова используется условие компактности). Пусть, с другой стороны, $a > 0$ — такое число, что $| t - t_0 | \leqslant a$ для $t \in I$.

Покажем, что *если выбрать u так, что*

$$\| u - x_0 \| \leqslant e^{-ka}, \tag{3.4.2}$$

то решение $\varphi(t, u)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0, u) = u$, существует на всем интервале I и в этом интервале удовлетворяет условию

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) \| \leqslant r \quad \textit{для} \quad t \in I. \tag{3.4.3}$$

Пусть J — наибольший интервал, содержащийся в I и включающий в себя точку t_0, в котором решение $\varphi(t, u)$ существует и удовлетворяет неравенству (3.4.3) (см. теорему 1.8.3). Покажем, что $J = I$. Убедимся, например, в том, что правый конец t_1 интервала J совпадает с правым концом интервала I. Действительно, если точки $t, t' \in J$, то в силу теоремы о конечных приращениях

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t', u) \| \leqslant M \, | t - t' |,$$

поскольку $\| f(t, \varphi(t, u)) \| \leqslant M$ при $t \in J$. Следовательно, $\varphi(t, u)$ имеет предел x_1, когда t стремятся к t_1, оставаясь меньше t_1. Имеем

$$\| x_1 - \varphi(t_1, x_0) \| = \lim_{\substack{t \to t_1 \\ t < t_1}} \| \varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) \|.$$

Согласно результатам п. 1.10,

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) \| \leqslant e^{k|t - t_0|} \cdot \| u - x_0 \|$$

(в силу основной леммы 1.5.1). Следовательно,

$$\| x_1 - \varphi(t_1, x_0) \| \leqslant e^{k|t_1 - t_0|} \cdot \| u - x_0 \|.$$

Откуда в силу предположения (3.4.2)

$$\| x_1 - \varphi(t_1, x_0) \| \leqslant r e^{k(|t_1 - t_0| - a)}.$$

Покажем, что t_1 не может принадлежать к *внутренности* I. Действительно, в этом случае мы имели бы $| t_1 - t_0 | < a$ и потому

$$\| x_1 - \varphi(t_1, x_0) \| < r,$$

где t_1 — внутренняя точка интервала, в котором дифференциальное уравнение имеет решение $\psi(t)$, удовлетворяющее условию

$$\| \psi(t) - \varphi(t, x_0) \| \leqslant r, \quad \psi(x_1) = x_1.$$

В этих условиях решение ψ оказывается продолжением решения $\varphi(t, u)$ за пределы интервала I. Мы пришли к противоречию.

Предложение 3.4.1 гарантирует существование решения $\varphi(t, u)$ в компактном интервале $t \in I$ для u, достаточно близких к x_0. Теперь сформулируем условие *дифференцируемости решения* $\varphi(t, u)$ по u.

Теорема 3.4.2. *Пусть $f(t, x)$ — непрерывное отображение открытого множества $U \subset \mathbb{R} \times E$ в пространство E. Предположим, что частная производная $f'_x(t, x)$ существует и непрерывна в точках $(t, x) \in U$* [это так, если f — функция класса C^1 на U]. *Пусть точка $(t_0, x_0) \in U$ и $I \ni t_0$ — компактный интервал, в котором дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \tag{3.4.4}$$

имеет решение $x = \varphi(t, x_0)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0, x_0) = x_0$. Так как функция f локально удовлетворяет условию Липшица по x (согласно теореме о конечных приращениях в силу того, что производная f'_x локально ограничена), *то уравнение* (3.4.3) *имеет на интервале I решение $x = \varphi(t, u)$, удовлетворяющее условию $\varphi(t_0, u) = u$ при u, достаточно близком к x_0* (см. предложение 3.4.1). *Тогда $\varphi(t, u)$ принадлежит как функция точки $(t, u) \in \mathbb{R} \times E$ к классу C^1; производная $\varphi'_u(t, u)$ дифференцируема по t и*

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial u} f(t, \varphi(t, u)), \tag{3.4.5}$$

т. е. функция $\varphi'_u(t, u) = y(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial y}{\partial t} = A(t, u) \circ y(t), \qquad y(t_0) = 1_E, \tag{3.4.6}$$

где

$$A(t, u) = f'_x(t, \varphi(t, u)). \tag{3.4.7}$$

Эта теорема будет доказана в п. 3.5. Сейчас мы получим из нее ряд следствий. Согласно (3.4.6), производная $\varphi'_u(t, u)$ как функция t является *резольвентой* $R(t, t_0)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t, u) \cdot x,$$

или иначе $R(t, t_0) \in \mathrm{Isom}(E; E)$.

Следствие 3.4.3. *При выполнении предположений теоремы* 3.4.2

$$\varphi'_u(t, u) \in \mathrm{Isom}(E; E).$$

Применим теорему о локальном обращении к преобразованию

$$(t, u) \mapsto (t, \varphi(t, u))$$

для точек (t, u), близких к (t_1, x_0), при произвольном $t_1 \in I$. Соотношение

$$x = \varphi(t, u)$$

для t, близких к t_1, для u, близких к x_0, и x, близких к $\varphi(t_1, x_0)$, эквивалентно соотношению

$$u = \psi(t, x),$$

где ψ принадлежит к классу C^1. Затем мы приходим к выводу, что функция ψ принадлежит к классу C^1 по (t, x) в любой окрестности множества точек $(t, \varphi(t, x_0))$, где t пробегает интервал I. Таким образом, оказывается справедливым

Следствие 3.4.4. *На открытом множестве $U \subset \mathbb{R} \times E$, содержащем точки $(t, \varphi(t, x_0))$, где t пробегает интервал I, существует такая функция ψ класса C^1 со значениями в пространстве E, что всякое решение дифференциального уравнения* (3.4.4), *близкое к решению $x = \varphi(t, x_0)$, получается приравниванием функции $\psi(t, x)$ произвольной постоянной $u \in E$, близкой к x_0.*

3.5. Доказательство теоремы 3.4.2.

Будем действовать следующим образом. Введем сначала функцию $y(t)$ — решение линейного дифференциального уравнения (3.4.6) для значения $u = x_0$. Затем покажем, что для значений u, близких к x_0,

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) - y(t)\cdot(u - x_0) \| = o(\| u - x_0 \|). \qquad (3.5.1)$$

Согласно *определению* производной, тем самым будет показано, что $\varphi'_u(t, x_0)$ существует и равна $y(t)$. Результат, полученный для значения $u = x_0$, будет справедлив и для значений u, близких к x_0. Итак, мы установили, что $\varphi'_u(t, u)$ существует и удовлетворяет соотношению (3.4.5). После этого нам остается установить принадлежность $\varphi(t, u)$ к классу C^1 и проверить, что производные $\varphi'_t(t, u)$ и $\varphi'_u(t, u)$ являются непрерывными функциями пары (t, u). Функция

$$\varphi'_t(t, u) = f(t, \varphi(t, u)),$$

очевидно, непрерывна. Что касается производной $\varphi'_u(t, u)$, то она является решением дифференциального уравнения (3.4.6). Поскольку, в силу (3.4.7), $A(t, u)$ — непрерывная функция пары (t, u), то достаточно воспользоваться теоремой 1.11.1, чтобы заключить, что решение y уравнения (3.4.6) является непрерывной функцией пары (t, u).

В итоге все сводится к доказательству соотношения (3.5.1). При $t = t_0$ оно очевидно. В этом случае, по определению, $y(t_0) = 1_E$, так как $\varphi(t_0, u) = u$, $\varphi(t_0, x_0) = x_0$. Для упрощения записи положим

$$z(t) = \varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) - y(t)\cdot(u - x_0), \qquad (3.5.2)$$

опустив u в обозначении $z(t)$. Отсюда мы получим с помощью простых вычислений [ниже мы вместо $A(t, u)$ пишем $A(t)$], что

$$z'(t) - A(t)\cdot z(t) = f(t, \varphi(t, u)) - f(t, \varphi(t, x_0)) - \\ - f'_x(t, \varphi(t, x_0))\cdot(\varphi(t, u) - \varphi(t, x_0)). \quad (3.5.3)$$

Промажорируем правую часть, используя для этого теорему о конечных приращениях. Положим

$$\varphi(t, u) = x, \quad u(t, x_0) = x_1.$$

Тогда правая часть (3.5.3) равна

$$f(t, x) - f(t, x_1) - f'_x(t, x_1)\cdot(x - x_1)$$

и является непрерывной функцией x, обращающейся в нуль при $x = x_1$. Ее производная равна

$$f'_x(t, x) - f'_x(t, x_1),$$

откуда

$$\| f(t, x) - f(t_1, x_1) - f'_x(t, x_1)\cdot(x - x_1) \| \leqslant m\cdot \| x - x_1 \|,$$

где

$$m = \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} \| f'_x(t, \lambda x + (1-\lambda) x_1) - f'_x(t, x_1) \| = \\ = \sup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} \| f'_x(t, \lambda\varphi(t, u) + (1-\lambda)\varphi(t, x_0)) - f'_x(t, \varphi(t, x_0)) \|.$$

Значит,

$$\| z'(t) - A(t)\cdot z(t) \| \leqslant m\cdot \| \varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) \|.$$

Функция $f'_x(t, \lambda\varphi(t, u) + (1-\lambda)\varphi(t, x_0))$ непрерывна по (t, λ, u). Следовательно, когда u стремится к x_0, *эта функция стремится к* $f'_x(t, \varphi(t, x_0))$ *равномерно по* $t \in I$ *и* $\lambda \in [0, 1]$ (см. лемму 1.10.3). Таким образом, для заданного числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что

$$\| z'(t) - A(t)\cdot z(t) \| \leqslant \varepsilon \| \varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) \| \quad (3.5.4)$$

при $\| u - x_0 \| \leqslant \eta$ и для любого $t \in I$. В силу результатов п. 1.10 найдется такое число K, что

$$\| \varphi(t, u) - \varphi(t, x_0) \| \leqslant K \| u - x_0 \|. \quad (3.5.5)$$

Используя эту оценку, мы получим из (3.5.4), что

$$\| z'(t) - A(t)\cdot z(t) \| \leqslant K\varepsilon \| u - x_0 \| \quad \text{при} \quad \| u - x_0 \| \leqslant \eta.$$

Заметим, что $z(t_0) = 0$ в силу (3.5.2). Применим основную лемму 1.5.1 к дифференциальному уравнению

$$\frac{dz}{dt} = A(t)\cdot z;$$

функция $A(t)\cdot z$ по z удовлетворяет α-условию Липшица, где

$$\alpha = \sup_{t\in I} \| A(t) \|.$$

Вследствие неравенства (3.5.5), $z(t)$ есть приближенное решение дифференциального уравнения с точностью до $K\varepsilon \| u - x_0 \|$, а точное решение с тем же самым начальным значением $z(t_0) = 0$ равно нулю. Используя основную лемму, заключаем, что

$$\| z(t) \| \leqslant K\varepsilon \| u - x_0 \| \cdot \frac{e^{\alpha |t-t_0|} - 1}{\alpha}.$$

Иначе говоря, существует такое число K', что для любого $t \in I$

$$\| z(t) \| \leqslant K'\varepsilon \| u - x_0 \| \quad \text{при} \quad \| u - x_0 \| \leqslant \eta.$$

Это означает, что $\| z(t) \| \leqslant o(\| u - x_0 \|)$. Мы получили соотношение (3.5.1), которое и нужно было доказать.

3.6. Дифференцируемость по параметру, от которого зависит правая часть дифференциального уравнения

Теорема 3.6.1. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \tag{3.6.1}$$

где параметр λ изменяется в банаховом пространстве L. Предположим, что функция f непрерывна на открытом множестве $U \subset \mathbb{R} \times E \times L$, производные $f'_x(t, x, \lambda) \in \mathscr{L}(E; E)$ и $f'_\lambda(t, x, \lambda) \in \mathscr{L}(L, E)$ существуют и являются непрерывными функциями в точке $(t, x, \lambda) \in U$. Пусть $(t_0, x_0, \lambda_0) \in U$ и I — компактный интервал ($t_0 \in I$), в котором уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda_0)$$

обладает решением $\varphi(t)$, удовлетворяющим начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$. Тогда для любого значения u, достаточно близкого к x_0, и значения λ, достаточно близкого к λ_0, уравнение (3.6.1) имеет в I такое решение $x = \varphi(t, u, \lambda)$, что

$$\varphi(t_0, u, \lambda) = u.$$

Здесь функция $\varphi(t, u, \lambda)$ принадлежит к классу C^1 по (t, u, λ); ее производные $\varphi'_u(t, u, \lambda)$ и $\varphi'_\lambda(t, u, \lambda)$ дифференцируемы по t и

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

В частности, функция $\varphi'_\lambda(t, u, \lambda)$ совпадает с решением $z(t)$ линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dz}{dt} = B(t) \circ z + C(t), \tag{3.6.2}$$

удовлетворяющим начальному условию $z(t_0) = 0$, *где*

$$B(t) = f'_x(t, \varphi(t, u, \lambda), \lambda),$$
$$C(t) = f'_\lambda(t, \varphi(t, u, \lambda), \lambda).$$

Заметим, что значения функции $z(t)$ лежат в пространстве $\mathscr{L}(L, E)$.

Доказательство. Мы сведем доказательство к применению теоремы 3.4.2. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями $x(t)$ и $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda), \qquad \frac{dy}{dt} = 0$$

и начальными условиями $x(t_0) = u$, $y(t_0) = \lambda$ (значения функции $y(t)$ лежат в пространстве L). Рассмотрим эту систему как одно дифференциальное уравнение с неизвестной функцией, принимающей значения в произведении пространств $E \times L$ и начальным условием (u, λ) при $t = t_0$. Применим к этому уравнению теорему 3.4.2. Из нее следует, что решение

$$x = \varphi(t, u, \lambda), \quad y = \lambda$$

есть функция класса C^1 по (t, u, λ). Теорема доказана.

3.7. Дифференцируемость высшего порядка

Теорема 3.7.1. *Пусть дано дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \lambda),$$

где функция f *принадлежит к классу* C^k $(k \geqslant 1)$ *в открытом множестве* $U \subset \mathbb{R} \times E \times L$, *и пусть* $x = \varphi(t, u, \lambda)$ — *решение этого уравнения* (*для* $t \in I$, *где* I — *компактный интервал*), *причем* $\varphi(t_0, u, \lambda) = u$ (см. теорему 3.6.1). *Тогда функция* $\varphi(t, u, \lambda)$ *принадлежит по* (t, u, λ) *к классу* C^k.

Доказательство. Докажем теорему по индукции. Утверждение справедливо для $k = 1$ (теорема 3.6.1). Предположим, что оно верно для $k - 1$ $(k \geqslant 2)$, и покажем, что оно справедливо для k. Достаточно убедиться в том, что производные $\varphi'_t(t, u, \lambda)$, $\varphi'_u(t, u, \lambda)$ и $\varphi'_\lambda(t, u, \lambda)$ — функции класса C^{k-1}. Для φ'_t это очевидно, потому что $\varphi'_t(t, u, \lambda) = f(t, \varphi(t, u, \lambda), \lambda)$, а функция $\varphi(t, u, \lambda)$ принадлежит к классу C^{k-1} (по предположению индукции).

Функция $\varphi'_u(t, u, \lambda)$ является решением уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f'_x(t, \varphi(t, u, \lambda), \lambda) \circ y(t), \qquad y(t_0) = 1_E.$$

Правая часть этого уравнения принадлежит к классу C^{k-1} по (t, u, λ) (предположение индукции). Значит, его решение принадлежит к классу C^{k-1}, согласно теореме 3.7.1, примененной к этому уравнению (предположение индукции). Аналогично мы установим, что функция $\varphi'_\lambda(t, u, \lambda)$ является решением уравнения

$$\frac{dz}{dt} = f'_x(t, \varphi(t, u, \lambda), \lambda) \circ z(t) + f'_\lambda(t, \varphi(t, u, \lambda), \lambda),$$

что ее значения лежат в пространстве $\mathscr{L}(L; E)$ и она удовлетворяет начальному условию $z(t_0) = 0$. Правая часть этого уравнения принадлежит к классу C^{k-1}. Следовательно, и его решение принадлежит классу C^{k-1} по (t, u, λ) в силу теоремы 3.7.1, примененной к этому уравнению (предположение индукции). Тем самым доказательство окончено.

Замечание. На самом деле производная по t

$$\varphi'_t(t, u, \lambda) = f(t, \varphi(t, u, \lambda), \lambda)$$

принадлежит к классу C^k по (t, u, λ), а не только к классу C^{k-1}.

3.8. Дифференциальное уравнение второго порядка

Пусть

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) \tag{3.8.1}$$

— дифференциальное уравнение второго порядка, где функция f принадлежит к классу C^k $(k \geqslant 1)$ на открытом множестве $U \subset \mathbb{R} \times E \times E$, ее значения лежат в пространстве E, точка $(t_0, x_0, x'_0) \in U$. В силу доказанных ранее общих теорем найдется такой интервал I, содержащий внутри себя точку t_0, что для любой пары $(u, v) \in E \times E$, достаточно близкой к паре (x_0, x'_0), существует такое (единственное) решение

$$x = \varphi(t, u, v), \qquad t \in I,$$

уравнения (3.8.1), что

$$\varphi(t_0, u, v) = u, \qquad \varphi'_t(t_0, u, v) = v. \tag{3.8.2}$$

Здесь предполагается, что $\varphi(t, u, v)$ принадлежит к классу C^k.

Теорема 3.8.1. *Если точка $t_1 \in I$ достаточно близка к точке t_0 и отлична от нее, то отображение*

$$(u, v) \to (u, \varphi(t_1, u, v)) \tag{3.8.3}$$

является C^k-диффеоморфизмом окрестности точки (x_0, x'_0) в пространстве $E \times E$ на окрестность точки (x_0, x_1) в $E \times E$ [здесь мы положили $x_1 = \varphi(t_1, x_0, x'_0)$].

Пояснение. Геометрический смысл этой теоремы состоит в следующем: на интегральной кривой

$$x = \varphi(t, x_0, x_0'),$$

соответствующей начальному положению x_0 и «начальной скорости» x_0', отметим начало x_0 (положение точки x при $t = t_0$) и конец t_1 (положение точки x при $t = t_1$). Тогда если мы зададимся двумя точками y_0 и y_1, достаточно близкими соответственно к точкам x_0 и x_1, то существует такая единственным образом определенная начальная скорость y_0', близкая к x_0', что интегральная кривая $x = \varphi(t, y_0, y_0')$ пройдет через точку y_1 при $t = t_1$. Более того, эта начальная скорость y_0' является функцией класса C^k пары (y_0, y_1).

Доказательство теоремы 3.8.1. Достаточно показать, что

$$\varphi_v'(t_1, x_0, x_0') \in \operatorname{Isom}(E; E).$$

В самом деле, тогда производное отображение для (3.8.3) в точке (x_0, x_0') будет определяться матрицей

$$\begin{pmatrix} 1_E & 0 \\ ? & \varphi_v' \end{pmatrix},$$

которая является элементом множества $\operatorname{Isom}(E \times E; E \times E)$. Воспользуемся теоремой о локальном обращении: отображение (3.8.3) есть C^k-диффеоморфизм окрестности точки (x_0, x_0') на ее образ. Следовательно, доказательство сводится к вычислению производной $\varphi_v'(t_1, x_0, x_0')$. Пусть

$$y(t) = \varphi_v'(t, x_0, x_0').$$

Известно, что эта функция дифференцируема по t и что

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

В частности, при $t = t_0$, согласно (3.8.2), имеем

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t_0, u, v) = 1_E.$$

Значит, $y'(t_0) = 1_E$. Кроме того, опять в силу (3.8.2),

$$\frac{\partial}{\partial v}\varphi(t_0, u, v) = 0 \text{ и, значит, } y(t_0) = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\| y(t_1) - (t_1 - t_0) 1_E \| = o(|t_1 - t_0|).$$

Следовательно, как только $0 < |t_1 - t_0| \leqslant \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ достаточно мало),

$$\| y(t_1) - (t_1 - t_0) 1_E \| < |t_1 - t_0|,$$

и потому $y(t_1) \in \mathrm{Isom}(E;\ E)$, ибо

$$y(t_1) = (t_1 - t_0)(1_E + \alpha),$$

где $\alpha \in \mathscr{L}(E;\ E)$ и $\|\alpha\| < 1$. Таким образом, если t_1 выбрано так, что $0 < |t_1 - t_0| \leqslant \varepsilon$, то

$$\varphi'_v(t_1,\ x_0,\ x'_0) \in \mathrm{Isom}(E;\ E), \quad \text{ч. т. д.}$$

3.9. Дифференциальные уравнения, не содержащие независимой переменной

Мы уже рассматривали (см. п. 3.2, определение образующей однопараметрической группы) дифференциальные уравнения вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{3.9.1}$$

где функция f принадлежит к классу C^1 на открытом множестве U банахова пространства E.

Заметим, что уравнение общего вида может быть сведено к этому частному случаю. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t,\ x). \tag{3.9.2}$$

Сопоставим ему систему дифференциальных уравнений (с двумя неизвестными функциями x и t от действительного переменного u):

$$\frac{dx}{du} = f(t,\ x), \qquad \frac{dt}{du} = 1 \tag{3.9.3}$$

[значения $t(u)$ принадлежат к полю $\mathbb{R}$, а значения функции $x(u)$ — к банахову пространству E] и зададимся следующими начальными условиями: потребуем, чтобы при $u = t_0$ переменное t принимало значение t_0, а переменное x — значение x_0. Тогда $t = u$, а функция $x(u)$ — это решение $x(t)$ уравнения (3.9.2), принимающее значение x_0 при $t = t_0$.

Вернемся к уравнению (3.9.1). Пусть дано его решение $x = \varphi(t)$. Изучим *траекторию* точки $\varphi(t)$ в пространстве E, т. е. образ отображения φ без учета его зависимости от параметра t. Если $x_0 = \varphi(t_0)$ и если $f(x_0) = 0$, то, как известно, решение $\varphi(t)$ *постоянно* в силу теоремы единственности для дифференциального уравнения. Рассмотрим случай, когда $f(x_0) \neq 0$.

Для простоты предположим, что $E = \mathbb{R}^n$, и пусть $x_1, \ldots, x_n$ — координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$; $a_1, \ldots, a_n$ — координаты начальной точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда уравнение (3.9.1) может быть заменено системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1,\ \ldots,\ x_n), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3.9.4}$$

По предположению, по крайней мере одна из функций f_i в точке $(a_1, \ldots, a_n)$ отлична от нуля; для определенности предположим, что

$$f_n(a_1, \ldots, a_n) \neq 0.$$

Тогда система (3.9.4) в некоторой окрестности точки $(a_1, \ldots, a_n)$ эквивалентна системе

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)} \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$
$$\frac{dt}{dx_n} = \frac{1}{f_n(x)}.$$

В этой окрестности рассматриваемая траектория может быть задана с помощью системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{3.9.5}$$

с $n-1$ неизвестными функциями $x_1, \ldots, x_{n-1}$ от переменного x_n, принимающими начальные значения $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ при $x_n = a_n$. Следовательно, x_n можно рассматривать как «парамето» на кривой траектории. Наконец, соотношение

$$\frac{dt}{dx_n} = \frac{1}{f_n(x)}$$

задает t как функцию x_n с помощью квадратуры.

Если нас интересует только траектория, а не «зависимость от времени», то достаточно рассмотреть систему уравнений (3.9.5) в окрестности точки $(a_1, \ldots, a_n)$. Такая система часто записывается в виде

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \frac{dx_2}{f_2(x)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x)}. \tag{3.9.6}$$

В этой записи все координаты равноправны, но функции $f_1, \ldots, f_n$ (класса C^1) не должны обращаться одновременно в нуль в точке $(a_1, \ldots, a_n)$.

Перейдем к более общему случаю. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x) \frac{dx_j}{dt} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1, \tag{3.9.7}$$

где $c_{ij}(x)$ — числовые функции класса C^1 в окрестности точки $(a_1, \ldots, a_n)$, а ранг матрицы $\{c_{ij}(x)\}$ равен $n-1$ в точке $(a_1, \ldots, a_n)$ [и, следовательно, в любой точке, близкой к этой точке]. Такая система часто записывается в форме

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x)\, dx_j = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n-1. \tag{3.9.8}$$

Решение системы (3.9.8) определяет в окрестности $(a_1, \ldots, a_n)$ некоторую кривую $C \subset \mathbb{R}^n$. Эта кривая задается параметрически в виде $x = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, где функции $x_i(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(x(t))\, x_j'(t) = 0, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

которая состоит из $n - 1$ однородных линейных соотношений между $x_j' = dx_j/dt$ и эквивалентна (в силу предположения о ранге) системе вида (3.9.4). Будем говорить, что соотношения (3.9.8) образуют систему дифференциальных уравнений, решения которой определяют траектории системы (3.9.4). Заметим, что решения системы (3.9.8) являются решениями системы дифференциальных уравнений (3.9.6) (f_i не равны нулю одновременно). Поскольку C — подобная траектория, то часто говорят, что левые части системы (3.9.8) обращаются в нуль на C.

Таким образом, теорема о локальном существовании и единственности решения позволяет изучать системы вида (3.9.8) в случае, когда ранг матрицы $\{c_{ij}(x)\}$ равен $n - 1$.

Случай, когда все $f_1, \ldots, f_n$ обращаются одновременно в нуль. Такая ситуация имеет место в некоторой точке, где ранг матрицы из коэффициентов системы (3.9.8) становится меньше $< n - 1$. Тогда к системе (3.9.6) не применима теорема о локальном существовании и единственности решения. Однако ее можно применить к системе (3.9.4). При этом траектория, выходящая из точки $(a_1, \ldots, a_n)$, превращается в точку, когда функции $f_1, \ldots, f_n$ обращаются в нуль в точке $(a_1, \ldots, a_n)$. Покажем на примерах, как может быть устроено множество траекторий в окрестности точки $(a_1, \ldots, a_n)$, в которой все функции f_i обращаются одновременно в нуль. Рассмотрим случай $n = 2$. Обозначим через x и y координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Выберем точку $(a_1, \ldots, a_n)$ за начало координат. Поскольку $n - 1 = 1$ при $n = 2$, то речь идет об изучении траекторий уравнения

$$a(x, y)\, dx + b(x, y)\, dy = 0$$

в окрестности начала координат, если в этой точке обе функции a и b, принадлежащие к классу C^1, равны нулю.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $x\,dx + y\,dy = 0$. Оно эквивалентно системе

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = +x,$$

которая, как известно, порождает группу вращений плоскости:

$$x = x_0 \cos t - y_0 \sin t, \quad y = x_0 \sin t + y_0 \cos t.$$

Траектории представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат, которое в свою очередь является траекторией, выродившейся в точку.

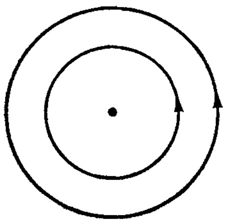

Рис. 2.

Пример 2. Уравнение $x\,dy - y\,dx = 0$ эквивалентно системе

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = y,$$

которая порождает группу гомотетий:

$$x = x_0 e^t, \qquad y = y_0 e^t.$$

Траектории представляют собой полупрямые, выходящие из начала координат. Само начало координат является траекторией, выродившейся в точку.

Пример 3. Пусть дано уравнение $x\,dy + y\,dx = 0$. Оно эквивалентно системе

$$\frac{dx}{dt} = x, \qquad \frac{dy}{dt} = -y,$$

которая порождает однопараметрическую группу:

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 e^{-t}.$$

Траектории представляют собой ветви равнобочных гипербол, асимптотами которых служат оси координат, и, кроме них, четыре

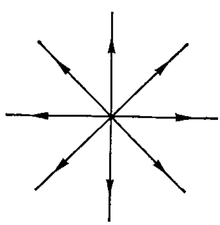

Рис. 3.

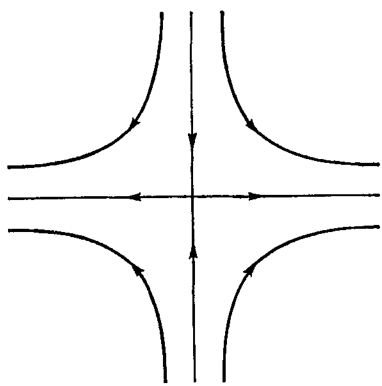

Рис. 4.

полуоси координат. Наконец, само начало координат — это траектория, выродившаяся в одну точку.

Стрелки на рисунках указывают направление возрастания параметра t.

3.10. Дифференциальные уравнения, «не разрешенные» относительно y'

Не строя общей теории, мы ограничимся указанием нескольких важных результатов в самом простейшем случае уравнения первого порядка с неизвестной функцией y от переменного x (здесь y и x предполагаются действительными переменными). Рассмотрим уравнение вида:

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \tag{3.10.1}$$

где $F(x, y, y')$ обозначает функцию класса C^2 (с числовыми значениями) на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^3$. Мы будем решать следующую задачу.

Дана точка $(x_0, y_0, y'_0) \in U$, в которой $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$. Надо найти такое решение $y = \varphi(x)$ уравнения (3.10.1) со значениями в $\mathbb{R}$, принадлежащее к классу C^1 в окрестности точки x_0, что

$$\varphi(x_0) = y_0, \quad \varphi'(x_0) = y'_0, \quad F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0. \tag{3.10.2}$$

Задача сводится к отысканию системы из двух функций y и y' от x (для x, близких к x_0), равных соответственно y_0 и y'_0 при $x = x_0$ и удовлетворяющих системе уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \qquad \frac{dy}{dx} = y'.$$

Мы рассмотрим несколько более общую задачу: будем искать *три* функции x, y, y' одного и того же переменного t (не уточняемого заранее), удовлетворяющие *начальным значениям* $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$ и системе уравнений

$$F(x, y, y') = 0, \quad dy - y'dx = 0. \tag{3.10.3}$$

Последнее уравнение означает, что $dy/dt - y'(dx/dx) = 0$. После того как поставленная задача будет решена, мы возьмем в качестве t в зависимости от ситуации одну из величин x, y, y' (это мы уточним несколько позднее). Заменим смешанную систему (3.10.3) системой дифференциальных уравнений:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial y'} dy' = 0, \qquad dy - y'\,dx = 0.} \tag{3.10.4}$$

Если $\{x = x(t),\ y = y(t),\ y' = y'(t)\}$ — решение этой системы, причем $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$, то сложная функция $F(x(t), y(t), y'(t))$ будет постоянной, поскольку производная от F по t равна нулю. Так как начальное значение этой функции равно нулю, это и сама функция есть нуль. Следовательно, функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $y' = y'(t)$ определяют решение системы (3.10.3).

Итак, мы заменили первоначальную задачу (отыскание решения уравнения (3.10.1), удовлетворяющего начальным условиям $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y'_0$, для которых $F(x_0, y_0, y'_0) = 0$) более общей задачей: отыскание решений системы дифференциальных уравнений (3.10.4) с теми же начальными условиями.

Система уравнений (3.10.4) является частным случаем системы вида (3.9.8) с тремя переменными x, y, y'. Матрица коэффициентов этой системы имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial y'} \\ -y' & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если *ранг* этой матрицы равен 2 в окрестности точки (x_0, y_0, y'_0), то система (3.10.4) эквивалентна системе

$$\frac{dx}{\partial F/\partial y'} = \frac{dy}{y'\,(\partial F/\partial y')} = \frac{-dy'}{\partial F/\partial x + y'\,(\partial F/\partial y)}, \tag{3.10.5}$$

причем все *три знаменателя не обращаются в нуль одновременно*. Таким образом, задача сведена к рассмотрению системы вида (3.9.6), которая была изучена выше. Существует два различных случая (которые, впрочем, не исключают один другого):

Первый случай: $\partial F/\partial y' \neq 0$. Тогда можно выбрать x в качестве переменного, а система (3.10.5) оказывается эквивалентной системе

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{dy'}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x + y'\,(\partial F/\partial y)}{\partial F/\partial y'}$$

(обычная система дифференциальных уравнений с двумя неизвестными функциями y и y' от x). В этом случае можно применить теорему о неявных функциях к уравнению

$$F(x, y, y') = 0,$$

которое в этом случае можно заменить уравнением вида $y' = f(x, y)$ в окрестности точки (x_0, y_0, y'_0). Таким образом, мы пришли к классическому случаю, для которого имеет место локальная теорема существования и единственности.

Второй случай: $\partial F/\partial x + y'\,(\partial F/\partial y) \neq 0$. Тогда можно взять y' в качестве переменного, и система (3.10.5) оказывается эквивалентной системе

$$\frac{dx}{dy'} = -\frac{\partial F/\partial y'}{\partial F/\partial x + y'\,(\partial F/\partial y)}, \qquad \frac{dy}{dy'} = -\frac{y'\,(\partial F/\partial y')}{\partial F/\partial x + y'\,(\partial F/\partial y)}. \tag{3.10.6}$$

Здесь правые части являются функциями класса C^1 по (x, y, y'). Применяя локальную теорему о существовании и единственности решения, мы получим x и y как функции y', равные соответственно x_0 и y_0 при $y' = y'_0$.

Частный случай. Рассмотрим уравнение $x + yy' = 0$ с начальными условиями $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Тогда $\partial F/\partial y' = y$ в точке (x_0, y_0, y'_0) обращается в нуль, а $\partial F/\partial x + y' (\partial F/\partial y) = 1 + y'^2$ отлично от нуля. Единственное решение системы (3.10.6) имеет вид

$$x = 0, \quad y = 0$$

(функции x и y переменного y' тождественно равны нулю). Кривая, получаемая в (x, y, y')-пространстве, оказывается прямой линией. Ее проекция на (x, y)-плоскость сводится к точке. Очевидно, что полученное «решение» не является решением исходной задачи. Это обобщенное решение, т. е. решение системы (3.10.4), в котором переменным служит y'.

Мы оставляем в стороне подробное обсуждение случая, когда выражения $\partial F/\partial y'$ и $\partial F/\partial x + y' (\partial F/\partial y)$ равны нулю в точке (x_0, y_0, y'_0). Рассмотрим только крайний случай.

Пусть во всех точках некоторой кривой C, лежащей в пространстве $\mathbb{R}^3$ переменных (x, y, y'),

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad F(x, y, y') = 0, \quad \text{но} \quad \frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Тогда в силу соотношения

$$\frac{\partial F}{\partial y}(dy - y'\,dx) = dF - \frac{\partial F}{\partial y'}\,dy' - \left(\frac{\partial F}{\partial x} + y' \frac{\partial F}{\partial y}\right) dx,$$

$dy - y'dx = 0$ на этой кривой, т. е. C — *интегральная кривая* системы (3.10.4). Ее проекция на (x, y)-плоскость определяет *особый интеграл* дифференциального уравнения (3.10.1).

[Мы не ставим перед собою задачи построить общую теорию особых интегралов.]

Пример: особый интеграл уравнения Клеро. Речь идет о классическом уравнении

$$y = xy' + g(y') \tag{3.10.7}$$

(g — данная функция класса C^2). Здесь выражение $\partial F/\partial x + y' (\partial F/\partial y)$ тождественно равно нулю, и особый интеграл уравнения (3.10.7) определяется с помощью равенств $F = 0$, $\partial F/\partial y' = 0$, т. е.

$$x + g'(y') = 0, \qquad y = -y'g'(y') + g(y'). \tag{3.10.8}$$

Найдем этот особый интеграл, применяя к системе (3.10.7) общий метод, который дает все решения. В рассматриваемом случае система (3.10.4) имеет вид

$$dy = x\,dy' + y'dx + g'(y')\,dy', \qquad dy = y'dx.$$

От нее мы перейдем к эквивалентной системе, заменяя dy на $y'dx$ в первом уравнении:

$$[x + g'(y')]\,dy' = 0, \qquad dy = y'dx$$

или иначе

$$[x + g'(y')]\,dy' = 0, \qquad dF = 0 \qquad (F = -y + xy' + g(y')).$$

Нас интересуют лишь решения, для которых постоянное значение F равно нулю. В результате мы приходим к системе

$$[x + g'(y)]\,dy' = 0, \qquad y = xy' + g(y'). \tag{3.10.9}$$

Ее «общее» решение $y = c$ (постоянная), откуда $y = cx + g(c)$. Это семейство прямых (в плоскости переменных (x, y)), зависящее от параметра c. Но имеется «частное» решение $x = -g'(y)$. Подставляя это значение x в уравнение $y = xy' + g(y')$, мы находим особый интеграл уравнения (3.10.8). Убедимся, что этот особый интеграл определяет на (x, y)-плоскости *огибающую* семейства прямых $y = cx + g(c)$. Через точку этой огибающей проходят *две* интегральные кривые: прямая и огибающая. Утверждения теоремы единственности решения не выполняются (естественно, что в этом случае не выполняются и предположения теоремы).

Более общий случай уравнения Лагранжа. Речь пойдет о дифференциальном уравнении (не разрешенном относительно y')

$$y = xf(y') + g(y'),$$

где f и g — две данные функции. Общий метод здесь приводит к отысканию решений системы

$$\begin{aligned} (y' - f(y'))\,dx &= [xf'(y') + g'(y')]\,dy', \\ y &= xf(y') + g(y'). \end{aligned} \tag{3.10.10}$$

Если $y_0' - f(y_0') \neq 0$, то первое из дифференциальных уравнений (3.10.10) дает в качестве x функцию $\varphi(y')$ с начальным условием $\varphi(y_0') = x_0$. Тогда из второго уравнения мы найдем y как функцию y'. Таким образом, получим параметрическое представление интегральной кривой.

Случай, когда $y_0' - f(y_0') = 0$, следует рассмотреть особо. В этой ситуации уравнение Лагранжа может иметь особый интеграл, но может его и не иметь.

Пример. Пусть дано уравнение

$$y + kx + 2y' + y'^2 = 0 \qquad (k \text{ — данная постоянная}).$$

Для особого интеграла должны выполняться равенства

$$1 + y' = 0, \qquad k + y' = 0.$$

Следовательно, особый интеграл не существует, если $k \neq 1$. Предположим, что $k = 1$. Система (3.10.10) перепишется в виде

$$(1 + y')\cdot(dx + 2dy') = 0, \qquad y = -x - 2y' - y'^2.$$

Общий интеграл получается из уравнения $dx + 2dy' = 0$, откуда

$$x = x_0 - 2(y' - y'_0), \qquad y = -x_0 - 2y'_0 - y'^2$$

(это параболы, на которых роль параметра играет y'). Особый интеграл определяется из равенств $y' = -1$, $y = -x + 1$. Мы получим прямую, которая является огибающей найденного выше семейства парабол.

§ 4. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

4.1. Определение первых интегралов дифференциальной системы

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{4.1.1}$$

где f — отображение класса C^1 открытого множества $U \subset E$ в пространство E (через E, как всегда, обозначается банахово прстранство). Заметим, что правая часть уравнения (4.1.1) *не зависит* от t (впрочем, как мы видели в п. 3.9, можно всегда свести общий случай к этому частному).

Определение. Функция $\psi(x)$, принадлежащая к классу C^1 в U (с числовыми значениями или в более общем случае со значениями в банаховом пространстве F) называется *первым интегралом* уравнения (4.1.1), если сложная функция $\psi(\varphi(t))$ *постоянна* в интервале I (т. е. не зависит от t) для любой функции $\varphi\colon I \to U$, являющейся решением дифференциального уравнения (4.1.1) [в интервале I].

Равенство $x = \varphi(t)$ определяет траекторию уравнения (4.1.1), т. е. мы можем сказать, что *функция ψ должна быть постоянной на каждой траектории, содержащейся в U.*

Предложение 4.1.1. *Для того чтобы функция ψ была первым интегралом дифференциального уравнения* (4.1.1), *необходимо и достаточно, чтобы неравенство*

$$\psi'(x)\cdot f(x) = 0 \tag{4.1.2}$$

имело место в любой точке $x \in U$.

[Пояснение. Здесь $\psi'(x)$ является элементом из $\mathscr{L}(E; F)$. В качестве произведения $\psi'(x)\cdot f(x) \in F$ здесь берется его значение, отвечающее значению функции $f(x) \in E$. Из условия (4.1.2) вытекает, что это значение равно нулю.]

Доказательство. Условие (4.1.2) является *достаточным*. Если оно выполнено, то производная от функции $\psi \circ \varphi$ равна нулю, ибо

$$(\psi \circ \varphi)'(t) = \psi'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \psi'(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)).$$

Следовательно, функция $\psi \circ \varphi$ постоянна.

Покажем, что условие (4.1.2) *необходимо*. Если функция ψ является первым интегралом, то

$$\psi'(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)) = 0$$

для *любого* решения φ уравнения (4.1.1). Однако в силу теоремы существования решения дифференциального уравнения через любую точку $x_0 \in U$ проходит интегральная кривая этого уравнения. Следовательно, $\psi'(x_0) \cdot f(x_0) = 0$ для любого $x_0 \in U$, ч. т. д.

Случай, когда $E = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad (4.1.3)$$

где f_i — числовые функции (класса C^1 на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^n$), x_i — неизвестные числовые функции переменного t. Тогда первым интегралом будет функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ от n действительных переменных $x_1, \ldots, x_n$, а условие (4.1.2) запишется в виде

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = 0.} \qquad (4.1.4)$$

Таково условие, которому должен удовлетворять первый интеграл системы (4.1.3) — функция $\psi(x_1, \ldots, x_n)$.

Соотношение вида (4.1.4) между частными производными $\partial\psi/\partial x_i$ неизвестной функции $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, где «коэффициенты» f_i — заданные функции (класса C^1), называется *линейным однородным уравнением первого порядка в частных производных*. Мы видим, что произвольно заданному уравнению такого вида можно поставить в соответствие систему дифференциальных уравнений (4.1.3), построенную с помощью «коэффициентов» f_i. Решения ψ уравнения в частных производных будут первыми интегралами соответствующей системы дифференциальных уравнений (4.1.3). Система (4.1.3) называется *характеристической системой* уравнения (4.1.4).

Замечание. Можно обобщить предыдущие понятия на случай системы дифференциальных уравнений более высокого порядка. Например, пусть нам дана система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = f_i\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \qquad (4.1.5)$$

Как известно, этой системе можно сопоставить систему $2n$ уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i', \qquad \frac{dx_i'}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'). \qquad (4.1.6)$$

Применим к системе (4.1.6) определение первого интеграла: первый интеграл системы (4.1.6) — это функция $\psi(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')$, такая, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i' \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n') \frac{\partial\psi}{\partial x_i'} = 0$$

(тождество по $x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'$). Тогда говорят, что функция

$$\psi\left(x_1, \ldots, x_n, \frac{dx_1}{dt}, \ldots, \frac{dx_n}{dt}\right)$$

является *первым интегралом* системы (4.1.5). Это понятие очень важно для механики, где постоянно приходится иметь дело с дифференциальными уравнениями второго порядка: например, оно используется в классической «теореме живых сил».

4.2. Существование первых интегралов

Мы ограничимся рассмотрением системы дифференциальных уравнений вида (4.1.3) в пространстве $\mathbb{R}^n$. Предположим, что в точке $(a_1, \ldots, a_n) \in U$ *не все функции* $f_i(a_1, \ldots, a_n)$ *обращаются в нуль* (для определенности предположим, что $f_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Мы видели в п. 3.9, что тогда система

$$\frac{dx_1}{f_1(x)} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n(x)} \qquad (4.2.1)$$

в некоторой окрестности V точки $(a_1, \ldots, a_n)$ записывается в виде

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1.$$

Таким образом, мы получаем «геометрические траектории», не зависящие от времени. Первый интеграл ψ — это функция, постоянная на геометрических траекториях. В силу теоремы 3.4.2 решение системы (4.2.1), принимающее при $x_n = a_n$ значение $(u_1, \ldots, u_{n-1})$, близкое к $(a_1, \ldots, a_{n-1})$, имеет вид

$$x_i = \varphi_i(x_n; u_1, \ldots, u_{n-1}), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \qquad (4.2.2)$$

Здесь функции φ_i принадлежат к классу C^1 по $(x_n, u_1, \ldots, u_{n-1})$; см. теорему 3.4.2. Кроме того, известно (следствие 3.4.3), что определитель матрицы

$$\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial u_j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n-1\\ 1\leqslant j\leqslant n-1}} \qquad (4.2.3)$$

отличен от нуля для значений $(u_1, \ldots, u_{n-1}, x_n)$, близких к $(a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$. Следовательно, по теореме о неявных функциях система (4.2.2) эквивалентна системе

$$u_i = \psi_i(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{4.2.4}$$

где ψ_i — функции класса C^1 в окрестности точки $(a_1, \ldots, a_n)$.

Очевидно, что *каждая из* $n-1$ *функций* ψ_i *является первым интегралом*: *функция* ψ_i постоянна вдоль каждой интегральной кривой (4.2.2). Помимо этого, определитель матрицы

$$\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}\right),$$

обратной к матрице (4.2.3), отличен от нуля. Пусть $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ — какой-нибудь первый интеграл в окрестности точки $(a_1, \ldots, a_n)$. Тогда функция

$$\psi(\varphi_1(x_n; u_1, \ldots, u_{n-1}), \ldots, \varphi_{n-1}(x_n; u_1, \ldots, u_{n-1}), x_n)$$

не зависит от x_n; обозначим ее $\Phi(u_1, \ldots, u_{n-1})$. Отсюда

$$\psi(x_1, \ldots, x_n) = \Phi(\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)). \tag{4.2.5}$$

Иначе говоря, всякий первый интеграл может быть представлен в окрестности точки $(a_1, \ldots, a_n)$ как некоторая функция Φ от $n-1$ первых интегралов $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$. Очевидно, что для всякой функции Φ (класса C^1) от $n-1$ переменных сложная функция $\Phi(\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x))$ является первым интегралом системы уравнений (4.2.1). Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 4.2.1. *Система дифференциальных уравнений* (4.2.1), *в которой числовые функции* $f_1, \ldots, f_n$ *принадлежат к классу* C^1 *в некоторой окрестности точки* $(a_1, \ldots, a_n)$ *и не все равны нулю в этой точке, обладает в этой окрестности точки* $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ *системой из* $n-1$ *первых интегралов* $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ [*с числовыми значениями*], *их производные являются линейными формами, линейно независимыми в любой точке этой окрестности. Всякий первый интеграл* ψ *имеет вид* $\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$ [*где* Φ — *произвольная функция класса* C^1].

Используя выводы, сделанные в п. 4.1, можно сформулировать эквивалентную теорему:

Теорема 4.2.2. *Пусть дано уравнение в частных производных*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial\psi}{\partial x_i} = 0, \tag{4.2.6}$$

коэффициенты которого $f_i(x)$ *суть числовые функции класса* C^1 *в окрестности точки* $(a_1, \ldots, a_n)$, *не обращающиеся одновременно* *в нуль в этой точке. Тогда уравнение* (4.2.6) *обладает* $n - 1$ *решениями* (с числовыми значениями) $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, *производные от которых линейно независимы. Всякое решение* ψ *уравнения* (4.2.6) *есть* (*произвольная*) *функция* $\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$.

4.3. Неоднородное линейное уравнение в частных производных

Рассмотрим вновь уравнение (4.2.6); обозначим теперь неизвестную функцию через $y(x_1, \ldots, x_n)$. Можно обобщить результат, полученный выше, предполагая, что коэффициенты $f_i(x_1, \ldots, x_n, y)$ *зависят также от* y, и считая в этом уравнении правую часть, вообще говоря, отличной от нуля. Таким образом, мы приходим к уравнению

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n, y) \frac{\partial y}{\partial x_i} = f(x_1, \ldots, x_n, y). \qquad (4.3.1)$$

Пусть (числовые) функции f_i и f принадлежат к классу C^1. Уравнение типа (4.3.1) называется *линейным* (*неоднородным*) *уравнением первого порядка в частных производных* с неизвестной функцией y от переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Укажем метод решения этого уравнения, когда f и все f_i не обращаются одновременно в нуль в окрестности точки $(a_i, \ldots, a_n, b)$. Мы сведем задачу с помощью искусственного приема к случаю *однородного* уравнения.

Найдем в окрестности $(a_1, \ldots, a_n, b)$ такую числовую функцию $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ класса C^1, что 1) $\psi(a_1, \ldots, a_n, b) = 0$ и $\partial\psi/\partial y \neq 0$ в точке $(a_1, \ldots, a_n, b)$; 2) функция $y = \lambda(x_1, \ldots, x_n)$, определенная из соотношения

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0 \qquad (4.3.2)$$

[применяется теорема о неявных функциях], удовлетворяет уравнению (4.3.1).

Дифференцируя (4.3.2), находим

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} = 0, \text{ откуда } -\frac{\partial\lambda}{\partial x_i} = \frac{\partial\psi}{\partial x_i} \Big/ \frac{\partial\psi}{\partial y}.$$

Запишем условие того, что производные $\partial\lambda/\partial x_i$ должны удовлетворять уравнению (4.3.1). Тогда мы получим следующее равенство:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n, y) \frac{\partial\psi}{\partial x_i} + f(x_1, \ldots, x_n, y) \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0. \qquad (4.3.3)$$

Равенство (4.3.3) должно иметь место в любой точке $(x_1, \ldots, x_n, y)$, удовлетворяющей уравнению (4.3.2) (и достаточно близкой к точке $(a_1, \ldots, a_n, b)$).

Покажем, что всякое решение уравнения (4.3.1) может быть получено из неявного уравнения $\psi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$, причем функция ψ должна удовлетворять равенству (4.3.3) *тождественно* [а не только в точках, где она равна нулю]. Действительно, если функция $y = \lambda(x_1, \ldots, x_n)$ является решением уравнения (4.3.1), то для проверки нашего утверждения достаточно положить

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, y) = y - \lambda(x_1, \ldots, x_n);$$

вычисления не представляют каких-либо затруднений. Итак, мы можем сформулировать

Метод решения уравнения (4.3.1). Надо построить *однородное* уравнение (4.3.3), рассмотреть его характеристическую систему

$$\frac{dx_1}{f_1} = \ldots = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{dy}{f}$$

и затем найти n первых интегралов

$$\psi_1(x_1, \ldots, x_n, y), \ldots, \psi_n(x_1, \ldots, x_n, y),$$

производные которых являются линейно независимыми формами. После этого следует положить

$$\psi(x_1, \ldots, x_n, y) = \Phi(\psi_1, \ldots, \psi_n),$$

где Φ — произвольная функция, такая, что выполняется условие $\partial\psi/\partial y \neq 0$. Решая уравнение $\psi(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ относительно y, мы и получим наиболее общее решение уравнения (4.3.1).

4.4. Примеры

Пример 1. Обозначим координаты в пространстве $\mathbb{R}^3$ через x, y, z [вместо x_1, x_2, y]. Рассмотрим уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z \tag{4.4.1}$$

с неизвестной функцией z от x и y в некоторой окрестности точки (a, b, c), *отличной от начала координат*. Характеристическая система для уравнения (4.4.1) имеет вид

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}.$$

Если, например, $x \neq 0$, то мы получаем два первых интеграла

$$\frac{y}{x} \text{ и } \frac{z}{x}.$$

Тогда общее решение имеет вид

$$z = x\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

где φ — произвольная функция одного переменного. Это уравнение *конуса с вершиной в начале координат*. Итак (4.4.1) является уравнением в частных производных для конусов с вершиной в точке нуль. Заметим, что это уравнение выражает следующий факт: касательная плоскость к поверхности $z = f(x, y)$ в любой ее точке проходит через начало координат или, более точно,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f(x, y).$$

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$-y \frac{\partial f}{\partial x} + x \frac{\partial f}{\partial y} + (1 + z^2) \frac{\partial f}{\partial z} = 3zf \tag{4.4.2}$$

с неизвестной функцией f от переменных x, y, z. Характеристическая система для этого уравнения имеет вид

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{1+z^2} = \frac{df}{3zf}$$

(система дифференциальных уравнений с четырьмя переменными x, y, z, f). Найдем три первых интеграла этой системы

$$x^2 + y^2, \qquad \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tg} z, \qquad (1 + z^2)^{-3/2} f;$$

производные этих первых интегралов линейно независимы. Отсюда получаем общее решение уравнения (4.4.2):

$$f = (1 + z^2)^{3/2}\, \Phi\left(x^2 + y^2, \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} - \operatorname{arc\,tg} z\right), \tag{4.4.3}$$

где Φ — произвольная функция двух переменных.

Интерпретация. Равенство (4.4.2) выражает тот факт, что дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

инвариантно относительно группы вращений вокруг начала координат [в плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами x, y]. Формула (4.4.3) показывает, что такое уравнение всегда имеет следующий вид:

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \Phi\left(x^2 + y^2, \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \operatorname{arctg} y'\right).$$

Читателю рекомендуется найти геометрическую интерпретацию этого факта.

УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 1. Пусть E — банахово пространство. Для A, $B \in \mathscr{L}(E;\ E)$ положим $[A,\ B] = B \circ A - A \circ B$.

Доказать, что если

$$[A,\ [A,\ B]] = [B,\ [A,\ B]] = 0,$$

то

$$\exp(A+B) = \exp(A) \circ \exp(B) \circ \exp\left(\frac{1}{2}[A,\ B]\right) =$$
$$= \exp(B) \circ \exp(A) \circ \exp\left(\frac{1}{2}[B,\ A]\right).$$

(a) Пусть x_0 — фиксированная точка. Положим

$$x_1(t) = \exp(tA) \cdot x_0,$$
$$x_2(t) = \exp(tB) \cdot x_1,$$
$$x_3(t) = \exp(-t(A+B)) \cdot x_2.$$

Показать, что

$$\frac{dx_3}{dt} = \exp(-t(A+B)) \circ \varphi(t) \circ \exp(tB) \circ \exp(tA) \cdot x_0,$$

где

$$\varphi(t) = -A + \exp(tB) \circ A \circ \exp(-tB).$$

(b) Вычислить $\varphi'(t)$. Сначала установить, что $x_3 = \exp\left(\frac{t^2}{2}[A,\ B]\right) \cdot x_0$, а затем получить отсюда искомый результат.

Упражнение 2. Найти собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и соответствующие собственные подпространства E_i. Выразить решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot x$$

через функцию $\exp(tA_i)$, где A_i — сужение отображения A на пространство E_i.

Упражнение 3. Положим для $x \in \mathbb{R}$

$$u(x) = \int_0^\infty e^{-t} \sin tx \frac{dt}{\sqrt{t}},$$

$$v(x) = \int_0^\infty e^{-t} \cos tx \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Показать, что функции u и v принадлежат к классу C^1 и являются решениями некоторой системы дифференциальных уравнений первого порядка. Найти эту систему и, исходя из нее, значения функций u и v.

Упражнение 4. Найти резольвенту системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=x+y,$$

$$\frac{dy}{dt}=2x.$$

[Указание. Найти выражение для матрицы

$$\exp(tA), \quad \text{где } A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}. \;]$$

Упражнение. 5. Пусть дана последовательность действительных функций y_n, определенная рекурентными соотношениями

$$y_0(x)=1,$$

$$y_n(x)=1+\int_0^x [y_{n-1}(t)]^2\,dt.$$

Показать, что y_n — полином степени 2^n-1, коэффициенты которого заключены между 0 и 1. Показать, что при $|x|<1$ последовательность $y_n(x)$ стремится к пределу при $n\to\infty$ и этот предел есть решение дифференциального уравнения $y'=y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$.

Упражнение 6. Пусть $V_1(x), \ldots, V_n(x)$ суть n векторных полей класса C^1 в окрестности начала координат в $\mathbb{R}$ и $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$— фиксированная точка $\mathbb{R}^n$. Пусть $\varphi(t, \alpha)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\alpha_1V_1(x)+\ldots+\alpha_nV_n(x), \qquad x=(x_1, \ldots, x_n), \tag{1}$$

которое обращается в нуль при $t=0$.

(a) Показать, что если точка α достаточна близка к началу координат, то решение $\varphi(t, \alpha)$ определено в любом круге $|t|\leqslant h$, $h<1$.

(b) Показать, что $\varphi(t, \alpha)$ зависит только от произведений $\alpha_1t, \ldots, \alpha_nt$.

[Указание. Сначала рекомендуется показать, что

$$\Delta(t)=t\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_i}=0.$$

Для этого, в свою очередь, следует установить, что $\Delta(t)$ является решением некоторого надлежащим образом подобранного дифференциального уравнения.]

(c) Пусть n векторов $V_1(0), \ldots, V_n(0)$ линейно независимы; показать, что тогда отображение $\alpha\to\varphi(1, \alpha)$ есть C^1-диффеоморфизм окрестности точки нуль на окрестность точки нуль.

(d) В предположениях пункта (c) показать, что если ψ— обратный диффеоморфизм для диффеоморфизма φ, то решение системы (1), обращающееся в нуль в начале координат, записывается в виде

$$\varphi(t, \alpha)=\psi(t\alpha)$$

для достаточно малых t.

Упражнение 7. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=A\cdot x, \tag{1}$$

где неизвестная функция x действительного переменного t принимает значения, лежащие в комплексном банаховом пространстве E, и A — заданный элемент пространства $\mathscr{L}_{\mathbb{C}}(E; E)$. Показать, что если уравнение (1) имеет своим решением функцию

$$x=e^{r_1t}u_1+e^{r_2t}u_2, \qquad -\infty<t<+\infty$$

(где $u_1\in E$, $u_2\in E$, $r_1\in\mathbb{C}$, $r_2\in\mathbb{C}$, $r_1\neq r_2$), то и каждая из функций $e^{r_1t}u_1$ и $e^{r_2t}u_2$ есть решение. Если уравнение (1) имеет своим решением функцию

$$x=e^{rt}(u+tv), \qquad -\infty<t<+\infty$$

(где $u\in E$, $v\in E$, $r\in\mathbb{C}$), то какой вывод можно сделать отсюда? Показать, что если в последнем случае $v\neq 0$, то u непропорционально v, а ядро эндоморфизма $(A-r\cdot 1_E)^2$, т. е. векторное подпространство пространства E, образованное векторами, на которых этот эндоморфизм обращается в нуль, имеет размерность, большую или равную двум.

Упражнение 8. Дана система дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\alpha\frac{dx}{dt}+\beta\frac{dy}{dt}+\gamma x+\delta y,\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=\alpha_1\frac{dx}{dt}+\beta_1\frac{dy}{dt}+\gamma_1x+\delta_1y,\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

где α, β, . . ., δ_1 — постоянные (комплексные) коэффициенты, а $x(t)$ и $y(t)$ — неизвестные функции, принимающие комплексные значения. Выберем коэффициенты α, . . ., δ_1 таким образом, чтобы система (2) имела два частных решения

$$\begin{aligned}x&=\cos t,\\ y&=\sin t\end{aligned} \qquad \text{и} \qquad \begin{aligned}x&=e^t,\\ y&=te^t.\end{aligned}$$

Показать, что такие коэффициенты определяются однозначно, и найти (для этих значений коэффициентов) все решения системы (2).

[Указание: если мы хотим избежать прямого вычисления коэффициентов α, . . ., δ_1, то можно воспользоваться результатами предыдущего упражнения.]

Упражнение 9. Пусть $t\to A(t)$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}$ в пространство $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, и пусть $X(t)$ — решение уравнения

$$\frac{dX}{dt}=A(t)\circ X.$$

Предположим, что матрица $A(t)$ антисимметрична для любого $t\in\mathbb{R}$. Какому уравнению удовлетворяет произведение ${}^tX\circ X$? Вывести отсюда, что если $X(t_0)$ — ортогональная матрица, то $X(t)$ — ортогональная матрица для любого t.

Упражнение 10. Пусть E — банахово пространство и A — непрерывное обладающее периодом ω отображение пространства $\mathbb{R}$ в пространство $\mathscr{L}(E; E)$. Обозначим через $R(t, t_0)$ резольвенту дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\cdot x. \tag{1}$$

(a) Показать, что $R(t+\omega,\ t_0+\omega)=R(t,\ t_0)$.

(b) Пусть x_0 — собственный вектор $R(\omega,\ 0)$, соответствующий собственному значению λ. Показать, что решение $x(t)$ уравнения (1), принимающее значение x_0 при $t=0$, удовлетворяет соотношению

$$x(t+\omega)=\lambda x(t).$$

Упражнение 11. Пусть E — банахово пространство, $F=\mathscr{L}(E;\ E)$ и $I=(a,\ b)$ — открытый интервал в $\mathbb{R}$. Будем обозначать через $A,\ B,\ C,\ D$ непрерывные отображения I в F.

(a) Доказать, что решение $U(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt}=A(t)\circ x,$$

равное тождественному отображению E в E при $t=t_0\in I$, обратимо при любом t.

[Указание: показать, что обратное для него отображение есть решение дифференциального уравнения $dY/dt=-Y\circ A(t)$.]

(b) Пусть U и V — решения уравнений $dX/dt=A(t)\circ X$ и $dX/dt=$ $=B(t)\circ X$ соответственно, равные тождественному отображению при $t=t_0$. Показать, что решение уравнения

$$\frac{dX}{dt}=A(t)\circ X+X\circ B(t),$$

принимающее значение X_0 при $t=t_0$, равно $U\circ X_0\circ V$.

(c) Пусть $(U,\ V)$ — решение системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt}=A(t)\circ X+B(t)\circ Y,$$

$$\frac{dY}{dt}=C(t)\circ X+D(t)\circ Y.$$

Показать, что если V обратимо в I, то $W=U\circ V^{-1}$ является решением уравнения Риккати

$$\frac{dZ}{dt}=B(t)+A(t)\circ Z-Z\circ D(t)-Z\circ C(t)\circ Z.$$

Сформулировать обратное утверждение.

Упражнение 12. Пусть f — дифференцируемое отображение открытого множества Ω банахова пространства E в банахово пространство F. Предположим, что $f'(x)\in \mathrm{Isom}(E;\ F)$ для любого $x\in\Omega$ и что производное отображение $x\to f'(x)$ удовлетворяет условию Липшица. Положим $(f'(x))^{-1}=$ $=L(x)$, и пусть $a\in\Omega,\ b=f(a)$.

(a) Рассмотрим для фиксированного y из множества Ω дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt}=L(x(t))\cdot(y-b).$$

Показать, что если норма $\|y-b\|$ достаточно мала, то это дифференциальное уравнение имеет такое решение $\varphi(t;\ y)$, определенное при $|t|<2$, что $\varphi(0;\ y)=0$.

[Указание. Использовать уточнение, данное вслед за формулировкой теоремы 1.7.2.]

(b) Показать, что $(d/dt)\,\varphi(t;\ y)=y-b$, и найти значение функции $f(\varphi(t))$. Показать, что функция $y\to\varphi(1;\ y)$ в некоторой окрестности точки b принадлежит к классу C^1 и является обратной функцией для f в этой окрестности.

Замечание. Отсюда можно получить доказательство теоремы о локальном обращении, но в более ограничительных предположениях, чем в § 4 гл. 1.

Упражнение 13. Пусть E и F — банаховы пространства, $I = (a, b)$ — интервал в $\mathbb{R}$, $t \to A(t)$ и $t \to B(t)$ — непрерывные отображения I в $\mathscr{L}(E; E)$ и в $\mathscr{L}(E; F)$ соответственно.

(a) Какой системе дифференциальных уравнений (2) должна удовлетворять функция $B(t)$ для того, чтобы функция $\varphi(t, x) = B(t)\cdot x$ была первым интегралом (со значениями в пространстве F) дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\cdot x. \tag{1}$$

(b) Показать, что существует решение системы (2), принимающее заданное значение B_0 в данной точке $t_0 \in I$. Выразить это решение через B_0 и ядро резольвенты уравнения (1).

(c) Предположим, что $E = \mathbb{R}^n$, $F = \mathbb{R}$. Обозначим через $a_{ij}(t)$ коэффициенты матрицы A. Показать, что поставленная задача эквивалентна отысканию таких числовых функций $y_i(t)$, что сумма $\varphi(t, x) = \Sigma\, y_i(t)\, x_i$ является первым интегралом уравнения (1). Записать систему дифференциальных уравнений (3), эквивалентную в этом случае системе (2), которой должны удовлетворять функции $y_i(t)$.

(d) В предположениях пункта (c) показать, что изложенный выше метод позволяет получить n независимых первых интегралов уравнения (1).

Применить эти результаты к интегрированию уравнения в частных производных

$$(y-z)\, f'_x + (z-x)\, f'_y + (x-y)\, f'_z + f'_t = 0.$$

Упражнение 14. Пусть E — банахово пространство, $F = \mathscr{L}(E; E)$. Через I будет обозначать тождественное отображение E в E.

(a) Для $A \in F$ рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dX}{dt} = -X \circ A \circ X.$$

Показать, что это уравнение имеет единственное решение, которое мы будем обозначать $\varphi(t, A)$, определенное в окрестности $t = 0$ и такое, что $X(0) = I$. Показать, что $\varphi(t, A)$ — функция класса C^1 пары (t, A).

(b) Используя уточнение, данное вслед за условием теоремы 1.7.2, показать, что функция $\varphi(t, A)$ определена при $|t| \leqslant 1/\|A\|$.

(c) Показать, что $\varphi(t, A) = (I + tA)^{-1}$. Вывести отсюда, что каждый элемент V пространства F, достаточно близкий к I, имеет обратный элемент и что отображение $X \to X^{-1}$ принадлежит к классу C^∞ на множестве своего определения.

Упражнение 15. (a) Показать, что дифференциальное уравнение

$$x(x-1)\, y'' + 3y' - 6y = 0 \tag{1}$$

имеет в окрестности начала координат решение, являющееся полиномом третьей степени, и решение $1/(1-x)^2$.

(b) Написать резольвенту $R(x, x_0)$ при $x \neq x_0$ для системы дифференцальных уравнений первого порядка.

$$\begin{aligned} y' &= u, \\ u' &= \frac{3u-6y}{x(1-x)}, \end{aligned} \tag{2}$$

соответствующую уравнению (1).

К такому пределу стремится резольвента при $x_0 \to 0$?

Изучить поведение решений уравнения (1) в окрестности точки $(0, y_0)$. Показать, в частности, что разность двух таких решений есть $o(x^3)$.

(c) Показать (используя резольвенту уравнения), что решение уравнения

$$x(x-1)y'' + 3y' - 6y = 20x^4, \tag{3}$$

обращающееся вместе с первой производной в нуль при $x = x_0$, имеет вид

$$y(x, x_0) = \frac{1}{(1-x)^2} \int_{x_0}^{x} (4x^5 - 5x^4 - 4t^5 + 5t^4)\, dt.$$

Показать, что $y(x, 0)$ существует и является решением уравнения (3), таким, что $f(0) = f'(0) = 0$. Показать, что это единственное решение уравнения (3), такое, что $f^{(i)}(0) = 0$ для $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

Упражнение 16. Рассмотрим векторное поле $x \to f(x)$ класса C^1 на открытом подмножестве Ω пространства $\mathbb{R}^n$ и образующую однопараметрической группы, определенную решениями $\varphi_t(u) = \varphi(t, u)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

и принимающую значение u при $t = 0$.

Записать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет матрица $M_t = (\partial\varphi/\partial u)(t, u)$. Показать, что φ_t сохраняет объемы тогда и только тогда, когда $\det(M_t) = 1$.

Вывести отсюда, что φ_t сохраняет объемы тогда и только тогда, когда след $f'(x)$ равен нулю.

[Указание. Использовать тот факт, что если матрица X дифференцируема по параметру t, то ее определитель удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Delta}{dt} = \Delta \cdot \operatorname{Tr}\left(\frac{dX}{dt} \cdot X^{-1}\right)\Bigg].$$

Упражнение 17. Проинтегрировать следующие дифференциальные уравнения:

$$\cos x \cdot \cos y \frac{\partial u}{\partial x} - \sin x \cdot \sin y \frac{\partial u}{\partial y} + \sin x \cdot \cos y \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

$$yz \frac{\partial u}{\partial x} + zx \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} + xyz = 0,$$

$$x(cz - by) \frac{\partial z}{\partial x} + y(ax - cy) \frac{\partial z}{\partial y} = z(by - ax),$$

$$a(a^2 + xy)\left(x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}\right) + (x^2 + y^2) z^2 = 0.$$

Упражнение 18. (a) Найти кривые на плоскости переменных (x, y), на которых уравнение

$$(xy' - y)^2 - 2xy(1 + y'^2) = 0,$$

рассматриваемое как уравнение относительно y', имеет двойной корень (существуют три такие прямые).

(b) Найти особое решение этого дифференциального уравнения.

(c) Проинтегрировать данное уравнение (например, переходя к полярным координатам) и показать, что его особые решения соответствуют кривым, определяемым в п. (a).

Какую роль играет третья прямая из п. (a)?

Упражнение 19. (а) Найти первый интеграл уравнения второго порядка

$$(x-t)\frac{d^2x}{dt^2}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+1=0.$$

Проинтегрировать уравнение, полагая $u=\mathrm{Arc\,tg}\,(dx/dt)$.

(b) Проинтегрировать уравнение в частных производных

$$y(x-t)\frac{\partial t}{\partial x}-(1+y^2)\frac{\partial t}{\partial y}+t-x=0$$

Упражнение 20. Проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=x+z,$$

$$\frac{dy}{dt}=2x-y,$$

$$\frac{dz}{dt}=x-y+\frac{z}{2}.$$

Найти решение уравнения

$$(x+z)\frac{dz}{\partial x}+(2x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y+\frac{z}{2}.$$

Часть II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ К ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ, ТЕОРИИ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

3 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

§ 1. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ ПОЛИЛИНЕЙНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1.1. Определение знакопеременных полилинейных отображений

Значительная часть излагаемой ниже теории не выходит за рамки чистой алгебры и пригодна для векторных пространств над любым коммутативным полем K (без ограничений на характеристику поля). Но мы в нашем изложении ограничимся случаем нормированных векторных пространств над полями $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. Для большей определенности примем за основное поле $\mathbb{R}$.

Пусть E и F — два нормированных векторных пространства. Мы уже встречались (п. I.1.8) с нормированным векторным пространством $\mathscr{L}_p(E;\ F)$ непрерывных p-линейных отображений $E^p \to F$. Для $p = 1$ это просто $\mathscr{L}(E;\ F)$. Для $p = 0$ положим $\mathscr{L}_0(E;\ F) = F$. Мы также знакомы с векторным подпространством пространства $\mathscr{L}_p(E;\ F)$, состоящим из *симметрических* p-линейных отображений. Теперь мы рассмотрим в $\mathscr{L}_p(E;\ F)$ другое подпространство $\mathscr{A}_p(E;\ F)$.

Определение. Отображение $f \in \mathscr{L}_p(E;\ F)$ называется *знакопеременным*, если его значение $f(x_1, \ldots, x_p)$ обращается в *нуль* всякий раз, когда $x_i = x_{i+1}$ хотя бы для одного индекса i $(1 \leqslant i < p)$ [условимся, для $p = 1$ всякое линейное отображение $E \to F$ считать знакопеременным].

Очевидно, знакопеременные p-линейные отображения образуют векторное подпространство пространства $\mathscr{L}_p(E;\ F)$. Мы обозначаем его через $\mathscr{A}_p(E;\ F)$. Таким образом, $\mathscr{A}_1(E;\ F) = \mathscr{L}(E;\ F)$; по определению $\mathscr{A}_0(E;\ F) = F$.

Векторное подпространство $\mathscr{A}_p(E,\ F)$ *замкнуто* в $\mathscr{L}_p(E;\ F)$. Действительно, пусть $f \in \mathscr{L}_p(E;\ F)$ — предел последовательности векторов $f_n \in \mathscr{A}_p(E;\ F)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \| f - f_n \| = 0$ и потому при фиксированных $x_1, \ldots, x_p \in E$ последовательность $f_n(x_1, \ldots, x_p)$ стремится к пределу $f(x_1, \ldots, x_p)$. Следовательно, если $x_i = x_{i+1}$, то

$$f(x_1, \ldots, x_p) = \lim_n f_n(x_1, \ldots, x_p) = 0, \quad \text{ч. т. д.}$$

Для того чтобы сформулировать другие свойства знакопеременных полилинейных отображений, нам необходимы некоторые простые сведения о группах перестановок.

1.2. Группы перестановок

Пусть Σ_p — группа всех перестановок множества $\{1, \ldots, p\}$ первых p целых чисел > 0. Она содержит $p!$ элементов. Перестановка $\sigma \in \Sigma_p$ называется *транспозицией*, если существует такая пара различных чисел i и j $(1 \leqslant i \leqslant p,\ 1 \leqslant j \leqslant p)$, что

$$\sigma(i) = j,$$
$$\sigma(j) = i,$$
$$\sigma\ )k = k \text{ для любого } k, \text{ отличного от } i \text{ и } j.$$

(Попросту говоря, σ переставляет i и j.) Очевидно, что σ^2 — тождественная подстановка. Известно, что всякая перестановка $\sigma \in \Sigma_p$ разлагается в произведение транспозиций, каждая из которых переставляет два *последовательных* числа. Кроме того, можно показать (как, например, это делается при любом изложении теории определителей), что четность числа транспозиций, входящих в разложение σ, не зависит от выбора разложения.

Назовем *сигнатурой* перестановки σ и обозначим через $\varepsilon(\sigma)$ целое число, равное $+1$, если σ — произведение четного числа транспозиций, и -1, если σ — произведение нечетного числа транспозиций. Таким образом:

Отображение $\sigma \to \varepsilon(\sigma)$ группы Σ_p в мультипликативную группу из двух элементов $+1$ и -1 есть гомоморфизм групп. Если σ — транспозиция, то $\varepsilon(\sigma) = -1$.

Пусть теперь E и F — произвольные множества и f — отображение $\underbrace{E \times \ldots \times E}_{p \text{ раз}} \to F$. Для $\sigma \in \Sigma_p$ обозначим через σf отображение $E \times \ldots \times E \to F$, определенное формулой

$$(\sigma f)(x_1, \ldots, x_p) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}). \tag{1.2.1}$$

(Попросту говоря, σf получается из f перестановкой переменных.) Ясно, что если σ — единичная подстановка, то $\sigma f = f$. Далее, имеем

$$(\tau\sigma) f = \tau(\sigma f) \quad \text{для} \quad \sigma \in \Sigma_p,\ \tau \in \Sigma_p. \tag{1.2.2}$$

Действительно, положим $\sigma f = g$. Тогда

$$(\tau g)(x_1, \ldots, x_p) = g(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(p)}).$$

Пусть $y_i = x_{\tau(i)}$. В силу (1.2.1)

$$g(y_1, \ldots, y_p) = f(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(p)}),$$

и так как $y_{\sigma(i)} = x_{\tau\sigma(i)}$, мы видим, что $\tau(\sigma f)$ есть функция

$$(x_1, \ldots, x_p) \to f(x_{\tau\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau\sigma(p)}),$$

откуда и следует соотношение (1.2.2).

Это соотношение выражает тот факт, что *группа Σ_p действует слева на множестве функций $E^p \to F$.*

1.3. Свойства знакопеременных полилинейных отображений

Пусть E и F снова обозначают два нормированных векторных пространства.

Предложение 1.3.1. *Пусть $f \in \mathcal{L}_p(E, F)$ — знакопеременное полилинейное отображение. Тогда*

(i) *если $x_i = x_j$ для пары различных индексов (i, j), то*

$$f(x_1, \ldots, x_p) = 0;$$

(ii) *для любой перестановки σ множества $\{1, \ldots, p\}$ имеем*

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_p), \tag{1.3.1}$$

где $\varepsilon(\sigma) = \pm 1$ есть сигнатура перестановки σ.

Прежде чем доказывать наши утверждения, дадим небольшое пояснение: свойство (i) обобщает свойство, служащее *определением* знакопеременного отображения, и выражает тот факт, что отображение $f(x_1, \ldots, x_n)$ обращается в нуль, если *значения любых двух переменных совпадают.*

Доказательство. Докажем прежде утверждение (ii). Начнем со случая, когда σ — *транспозиция*, переставляющая два *последовательных* индекса i и $i+1$. Мы должны показать, что

$$g(x_{i+1}, x_i) = -g(x_i, x_{i+1}), \tag{1.3.2}$$

где для простоты записи мы положим

$$g(x_i, x_{i+1}) = f(x_1, \ldots, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_p).$$

Очевидно, g — знакопеременная билинейная функция, поэтому

$$g(x_i + x_{i+1}, x_i + x_{i+1}) = g(x_i, x_i) + g(x_{i+1}, x_{i+1}) + g(x_i, x_{i+1}) + g(x_{i+1}, x_i).$$

Так как первые три члена этого равенства равны нулю, то соотношение (1.3.2) доказано.

Докажем теперь равенство (1.3.1) для общего случая. Для этого запишем это равенство в обозначениях, введенных в п. 1.2:

$$\sigma f = \varepsilon(\sigma) f. \tag{1.3.3}$$

Так как $(\sigma_1\sigma_2) f = \sigma_1(\sigma_2 f)$ и $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$, мы видим, что если равенство (1.3.3) имеет место для $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$, то оно имеет место и для $\sigma = \sigma_1\sigma_2$. Поскольку оно имеет место в случае, когда σ — транспозиция, переставляющая два последовательных индекса, то оно имеет место для любого конечного произведения таких транспозиций. Но любая перестановка записывается в виде такого произведения, значит, равенство верно для любой перестановки $\sigma \in \Sigma_p$. Этим доказано утверждение (ii).

Остается доказать утверждение (i). Пусть $x_i = x_j$ ($i \neq j$). Существует такая перестановка σ, что $\sigma(1) = i$, $\sigma(2) = j$. Так как f — знакопеременная функция, то

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = 0,$$

а так как она равна $\pm f(x_1, \ldots, x_p)$, то $f(x_1, \ldots, x_p) = 0$, ч. т. д.

З а м е ч а н и е. Все сказанное выше применимо к векторным пространствам над любым полем. Но если характеристика поля K отлична от двух (как это, разумеется, имеет место в случаях $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), то *свойство* (ii) *для полилинейного отображения влечет его знакопеременность*. Действительно, из равенства (1.3.1) вытекает, что если σ — транспозиция, переставляющая i и j, и $x_i = x_{i+1}$, то

$$f(x_1, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_p),$$

откуда

$$2f(x_1, \ldots, x_p) = 0,$$

так что если мы можем делить на два, то $f(x_1, \ldots, x_p) = 0$.

Полилинейное отображение f, удовлетворяющее свойству (ii), называется *кососимметрическим*. Коротко это свойство записывается так: $\sigma f = \varepsilon(\sigma) f$.

Таким образом, в случае, который нас интересует ($K = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), пространство $\mathscr{A}_p(E; F)$ знакопеременных полилинейных отображений совпадает с пространством полилинейных кососимметрических отображений.

1.4. Умножение знакопеременных полилинейных отображений

Пусть $f \in \mathscr{A}_p(E; F)$ и $g \in \mathscr{A}_q(E; G)$. Для того чтобы задать умножение между g и f, нужно задать сначала непрерывное билинейное отображение

$$\Phi\colon\ F \times G \to H$$

(со значениями в некотором нормированном векторном пространстве H). Такое билинейное отображение позволяет сопоставить f и g отображение $h\colon E^{p+q} \to H$, а именно:

$$h(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \Phi(f(x_1, \ldots, x_p), g(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})). \quad (1.4.1)$$

Очевидно, отображение h полилинейно и непрерывно. Но оно, вообще говоря, не знакопеременно: оно лишь принадлежит пространству $(p+q)$-линейных отображений, знакопеременных по p первым переменным $x_1, \ldots, x_p$ и q последним переменным $x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}$. Обозначим это пространство через $\mathscr{A}_{p,q}(E; H)$.

Опишем теперь канонический процесс, который каждому $h \in \mathscr{A}_{p,q}(E; H)$ сопоставляет $\tilde{h} \in \mathscr{A}_{p+q}(E; H)$. Более точно, определим сейчас линейное непрерывное отображение

$$\varphi_{p,q}\colon \mathcal{A}_{p,q}(E;\, H) \to \mathcal{A}_{p+q}(E;\, H).$$

По определению, $\varphi_{p,q}(h)$ — это полилинейное отображение

$$\tilde{h} = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)(\sigma h), \tag{1.4.2}$$

где сумма берется по всем перестановкам σ множества $\{1, \ldots, p+q\}$, таким, что

$$\sigma(1) < \ldots < \sigma(p) \quad \text{и} \quad \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q). \tag{1.4.3}$$

Дадим наглядное пояснение того, как действует такая перестановка. Возьмем две колоды карт, и пусть в первой колоде p карт, а во второй q (карты первой колоды пронумерованы номерами от 1 до p, а второй — от $p+1$ до $p+q$). Перетасуем карты один раз. Карты первой колоды займут места где-то между картами второй, но порядок следования карт первой колоды сохранится. То же верно и для второй колоды. В результате мы получаем перестановку σ, которая удовлетворяет условию (1.4.3). Легко видеть, что и, обратно, всякая такая перестановка может быть реализована на нашей модели. Можно показать, что число таких перестановок равно

$$\frac{(p+q)!}{p!\,q!}.$$

Нам осталось доказать, что отображение $\tilde{h}$, определенное равенством (1.4.2), есть действительно *знакопеременное* отображение. Пусть дана последовательность векторов $x_1, \ldots, x_{p+q} \in E$, в которой некоторые два последовательных вектора равны: $x_i = x_{i+1}$. Покажем, что $\tilde{h}(x_1, \ldots, x_{p+q})$ равно нулю, т. е.

$$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, h(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) = 0. \tag{1.4.4}$$

Для этого разделим все подстановки, удовлетворяющие условию (1.4.3), на два класса:

1) Первый класс состоит из таких σ, для которых индексы $\sigma^{-1}(i)$ и $\sigma^{-1}(i+1)$ либо оба $\leqslant p$, либо оба $\geqslant p$. В первом случае x_i и x_{i+1} стоят на первых p местах в $h(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)})$, поэтому соответствующие им члены в (1.4.4) равны нулю (h *знакопеременно* по первым p аргументам). Во втором случае соответствующие члены равны нулю по аналогичным соображениям.

2) Второй класс делится на два подкласса: таких σ, для которых $\sigma^{-1}(i) \leqslant p$, а $\sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1$, и таких σ, для которых $\sigma^{-1}(i) \geqslant p+1$, а $\sigma^{-1}(i+1) \leqslant p$. Пусть τ — *транспозиция*, переставляющая i и $i+1$. Тогда, если σ лежит в первом подклассе, то $\tau\sigma$ лежит во втором, и обратно. Мы можем теперь *сгруппировать по два* все оставшиеся члены в (1.4.4). Для каждого σ, такого, что

$\sigma^{-1}(i) \leqslant p$ и $\sigma^{-1}(i+1) \geqslant p+1$, мы возьмем пару

$$\varepsilon(\sigma)\, h(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) - \varepsilon(\sigma)\, h(x_{\tau\sigma(1)}, \ldots, x_{\tau\sigma(p+q)}). \tag{1.4.5}$$

Покажем, что эта разность равна нулю, завершив тем самым доказательство равенства (1.4.4). Последовательность $\tau\sigma(1), \ldots, \tau\sigma(p+q)$ отличается от последовательности $\sigma(1), \ldots, \sigma(p+q)$ взаимной заменой i на $i+1$, но так как $x_i = x_{i+1}$, то разность (1.4.5) равна нулю. Таким образом, мы определили формулой (1.4.2) каноническое линейное отображение

$$\varphi_{p,q} = \mathcal{A}_{p,q}(E;\, H) \to \mathcal{A}_{p+q}(E;\, H)$$

и можем дать наконец

Определение. Элемент $\varphi_{p,q}(h) \in \mathcal{A}_{p+q}(E;\, H)$ называется *внешним произведением* отображений $f \in \mathcal{A}_p(E;\, F)$ и $g \in \mathcal{A}_q(E;\, G)$ относительно $\Phi\colon F \times G \to H$ и обозначается через

$$f \wedge_\Phi g,$$

где h — элемент из $\mathcal{A}_{p,q}(E;\, H)$, определенный равенством (1.4.1). Раскроем эту формулу:

$$(f \wedge_\Phi g)(x_1, \ldots, x_{p+q}) =$$
$$= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, \Phi(f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}),\, g(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)})), \tag{1.4.6}$$

где σ пробегает множество перестановок $\{1, \ldots, p+q\}$, удовлетворяющих условию (1.4.3) (вспомните колоды карт!).

Примеры. Рассмотрим случай, когда $p = 1$, $q = 1$, т. е. $f \in \mathcal{L}(E;\, F)$ и $g \in \mathcal{L}(E;\, G)$ — просто *линейные* отображения. Тогда $f \wedge_\Phi g \in \mathcal{A}_2(E,\, H)$ есть билинейное отображение

$$(x_1, x_2) \to \Phi(f(x_1),\, g(x_2)) - \Phi(f(x_2),\, g(x_1)). \tag{1.4.7}$$

В этом простейшем случае мы сразу видим, что отображение *знакопеременно*, ибо правая часть обращается в нуль, если $x_1 = x_2$.

Более общим образом, пусть $p = 1$, а q произвольно. Тогда

$$(f \wedge_\Phi g)(x_0, x_1, \ldots, x_q) =$$
$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i\, \Phi(f(x_i),\, g(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_q)). \tag{1.4.8}$$

Ниже мы будем использовать обозначение

$$g(x_0, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_q)$$

для указания того, что в последовательности $x_0, \ldots, x_i, \ldots, x_q$ пропущен член с индексом i.

Рассмотрим более простой случай, когда $p = 0$ и q произвольно. Тогда

$$(f \wedge_\Phi g)(x_1, \ldots, x_q) = \Phi(f, g(x_1, \ldots, x_q)),$$

ибо $f \in F$ есть константа.

Мы будем использовать умножение $f \wedge_\Phi g$ чаще всего тогда, когда $G = \mathbb{R}$, $H = F$ и отображение Φ: $F \times \mathbb{R} \to F$ — это просто умножение векторов пространства F на скаляры. В этом случае мы будем опускать символ Φ в обозначении $f \wedge g$. В том частном случае, когда $F = \mathbb{R}$, произведение $f \wedge g$ знакопеременных полилинейных форм есть снова знакопеременная полилинейная форма.

Еще более частный случай: пусть $f \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ и $g \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ — *линейные формы.* Тогда их произведение $f \wedge g$ есть элемент пространства $\mathscr{A}_2(E; \mathbb{R})$, задаваемый, согласно (1.4.7), формулой

$$(f \wedge g)(x_1, x_2) = f(x_1)\, g(x_2) - f(x_2)\, g(x_1). \tag{1.4.9}$$

Рассмотрим отображение

$$(f, g) \to f \wedge g$$

произведения $\mathscr{L}(E; \mathbb{R}) \times \mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ в $\mathscr{A}_2(E; \mathbb{R})$. Оно *знакопеременно и билинейно*; билинейность очевидна, а знакопеременность следует из (1.4.9): при $g = f$ имеем $f \wedge f = 0$, ибо в силу коммутативности умножения скаляров

$$f(x_1)\, f(x_2) - f(x_2)\, f(x_1) = 0.$$

1.5. Свойства внешнего умножения

Отображение $(f, g) \to f \wedge_\Phi g$ *билинейно*: если мы фиксируем g, то $f \wedge_\Phi g$ линейно зависит от f, и если мы фиксируем f, то $f \wedge_\Phi g$ линейно зависит от g. Это сразу видно из формулы (1.4.6).

Предложение 1.5.1. *Пусть $f \in \mathscr{A}_p(E; \mathbb{R})$ и $g \in \mathscr{A}_q(E; \mathbb{R})$ — знакопеременные полилинейные формы* (со скалярными значениями). *Тогда*

$$g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g \tag{1.5.1}$$

(это свойство выражают, говоря, что внешнее умножение знакопеременных форм *антикоммутативно*).

Доказательство. Имеем

$$(g \wedge f)(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \\ = \sum_\tau \varepsilon(\tau)\, g(x_{\tau(1)}, \ldots, x_{\tau(q)})\, f(x_{\tau(q+1)}, \ldots, x_{\tau(p+q)}), \tag{1.5.2}$$

где τ пробегает множество перестановок последовательности $\{1, \ldots, p+q\}$, таких, что

$$\tau(1) < \ldots < \tau(q) \quad \text{и} \quad \tau(q+1) < \ldots < \tau(q+p). \tag{1.5.3}$$

Рассмотрим перестановку α, переводящую последовательность $\{1, \ldots, p+q\}$ в последовательность

$$\{q+1, \ldots, q+p, 1, \ldots, q\}.$$

Для $1 \leqslant i \leqslant q$ имеем $\tau(i) = \tau\alpha(p+i)$, а для $q+1 \leqslant j \leqslant p+q$ $\tau(j) = \tau\alpha(j-q)$.

Положим $\tau\alpha = \sigma$. В силу (1.5.3) σ удовлетворяет условию (1.4.3). Обратно, если σ удовлетворяет условию (1.4.3), то для $\tau = \sigma\alpha^{-1}$ выполнено условие (1.5.3). Далее, $\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma)\,\varepsilon(\alpha)$ и $\varepsilon(\alpha) = (-1)^{pq}$, так как чтобы осуществить α, нужно последовательно переставлять $1, \ldots, q$ с $q+1, \ldots, q+p$, что составляет pq транспозиций. Поэтому равенство (1.5.2) запишется так:

$$(g \wedge f)(x_1, \ldots, x_{p+q}) =$$
$$= (-1)^{pq} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, g(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)})\, f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}),$$

где σ пробегает множество перестановок, удовлетворяющих условию (1.4.3). Поскольку умножение скаляров коммутативно, мы можем в каждом произведении в правой части равенства переставить

$$g(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}) \quad \text{с} \quad f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}).$$

Тогда правая часть примет вид

$$(-1)^{pq}(f \wedge g)(x_1, \ldots, x_{p+q}),$$

и равенство (1.5.1) доказано.

Предложение 1.5.2. *Внешнее умножение знакопеременных полилинейных форм ассоциативно.* Иначе говоря, если $f \in \mathcal{A}_p(E; \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{A}_q(E; \mathbb{R})$ и $h \in \mathcal{A}_r(E; \mathbb{R})$, то

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h). \tag{1.5.4}$$

Для доказательства нам понадобится следующая лемма:

Лемма 1.5.3. *Пусть p, q, r — три целых положительных числа, и пусть $\mathcal{A}_{p,q,r}(E; F)$ — подпространство в $\mathcal{L}_{p+q+r}(E; F)$, состоящее из отображений, знакопеременных по p первым переменным, знакопеременных по q вторым переменным и знакопеременных по r третьим переменным. Рассмотрим диаграмму*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}_{p,q,r}(E; F) & \xrightarrow{\varphi_{p,q}} & \mathcal{A}_{p+q,r}(E; F) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{q,r}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_{p+q,r}} \\
\mathcal{A}_{p,q+r}(E; F) & \xrightarrow{\varphi_{p,q+r}} & \mathcal{A}_{p+q+r}(E; F).
\end{array}$$

В этой диаграмме $\varphi_{p,q}$ переводит $u \in \mathcal{A}_{p,q,r}(E; F)$ в знакопеременную по $p+q$ первым переменным форму $\tilde{u}$ (не затрагивая r

последних переменных), а именно:

$$\tilde{u}(x_1, \ldots, x_{p+q+r}) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) u(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q+r)}),$$

где сумма берется по всем перестановкам σ, оставляющим на месте $p+q+1, \ldots, p+q+r$ и удовлетворяющим условию (1.4.3). Аналогично определяем $\varphi_{q,r}$ (при помощи перестановок σ, оставляющих на месте $1, \ldots, p$). *Указанная диаграмма коммутативна. Иначе говоря,*

$$\varphi_{p+q,\,r} \circ \varphi_{p,\,q} = \varphi_{p,\,q+r} \circ \varphi_{q,\,r}.$$

[Это и составляет утверждение леммы.]

Доказательство. Покажем, что если $u \in \mathcal{A}_{p,q,r}(E; F)$, то оба знакопеременных отображения

$$\varphi_{p+q,\,r}(\varphi_{p,\,q}(u)) \quad \text{и} \quad \varphi_{p,\,q+r}(\varphi_{q,\,r}(u))$$

совпадают с отображением v, определенным следующим образом:

$$v(x_1, \ldots, x_{p+q+r}) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma) u(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q+r)}),$$

где σ пробегает множество перестановок последовательности $\{1, \ldots, p+q+r\}$, таких, что

$$\begin{aligned} &\sigma(1) < \ldots < \sigma(p), \\ &\sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q), \\ &\sigma(p+q+1) < \ldots < \sigma(p+q+r). \end{aligned} \tag{1.5.5}$$

Чтобы сделать наше утверждение интуитивно очевидным, привлечем опять на помощь игральные карты. Возьмем теперь три колоды из p, q и r карт соответственно. Операция $\varphi_{p,\,q}$ состоит в перетасовке первых двух колод; операция $\varphi_{p+q,\,r}$ состоит в перетасовке результата первой тасовки с третьей колодой. С другой стороны, операция $\varphi_{q,r}$ заключается в перетасовке последних колод, а $\varphi_{p,\,q+r}$ — в перетасовке результата предыдущей тасовки с первой колодой. Так двумя различными способами мы получаем *перетасовку трех колод*, и очевидно, что соответствующая перестановка обладает свойством (1.5.5). Мы ограничиваемся этим указанием и предоставляем читателю возможность провести подробные вычисления.

Применим теперь лемму 1.5.3 для доказательства предложения 1.5.2. Чтобы получить $(f \wedge g) \wedge h$, рассмотрим полилинейную функцию

$$\begin{aligned} u&(x_1, \ldots, x_{p+q+r}) = \\ &= (f(x_1, \ldots, x_p)\, g(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}))\, h(x_{p+q+1}, \ldots, x_{p+q+r}), \end{aligned}$$

принадлежащую $\mathscr{A}_{p,\,q,\,r}$, и применим к ней операцию $\varphi_{p+q,\,r}\circ\varphi_{p,\,q}$. Чтобы получить $f \wedge (g \wedge h)$, рассмотрим функцию

$$u_1(x_1, \ldots, x_{p+q+r}) = \\ = f(x_1, \ldots, x_p)\,(g(x_{p+1}, \ldots, x_{p+q})\,h(x_{p+q+1}, \ldots, x_{p+q+r}))$$

и применим к ней операцию $\varphi_{p,\,q+r}\circ\varphi_{q,\,r}$. Но $u_1 = u$ в силу *ассоциативности умножения скаляров*, и так как по лемме $\varphi_{p+q,\,r}\circ\varphi_{p,\,q} = \varphi_{p,\,q+r}\circ\varphi_{q,\,r}$, равенство (1.5.4) наконец доказано.

1.6. Внешнее произведение n линейных форм

Ассоциативность внешнего умножения дает возможность рассматривать любое конечное произведение $f_1 \wedge f_2 \wedge \ldots \wedge f_n$.

Изучим более подробно случай, когда $f_1, \ldots, f_n$ суть элементы пространства $\mathscr{A}_1(E; \mathbb{R}) = \mathscr{L}(E; \mathbb{R})$.

Предложение 1.6.1. *Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — линейные формы. Тогда*

$$(f_1 \wedge \ldots \wedge f_n)(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, f_1(x_{\sigma(1)}) \ldots f_n(x_{\sigma(n)}), \qquad (1.6.1)$$

где суммирование проводится по всем $n!$ перестановкам последовательности $\{1, \ldots, n\}$.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Наше утверждение тривиально для $n = 1$ и уже доказано для $n = 2$ (соотношение (1.4.7)). Дальнейшее проведение индукции предоставляем читателю в виде упражнения.

Рассмотрим матрицу из n строк и n столбцов (строки нумеруются индексом i, столбцы — индексом j) с элементами $f_i(x_j)$. Обозначим ее через $\{f_i(x_j)\}$. Правая часть равенства (1.6.1) — не что иное, как *определитель* этой матрицы. Тем самым мы получаем *важное соотношение*:

$$(f_1 \wedge \ldots \wedge f_n)(x_1, \ldots, x_n) = \det\{f_i(x_j)\}. \qquad (1.6.2)$$

Заметим, что если фиксировать $x_1, \ldots, x_n \in E$, то обе стороны равенства (1.6.2) становятся *знакопеременными* n-линейными функциями от $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Действительно, $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$ обращается в нуль при $f_i = f_{i+1}$ ибо, как мы видели в п. 1.4, $f \wedge f = 0$.

Упражнение. Для того чтобы n элементов $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R}) = E^*$ были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n = 0$. Идея доказательства: 1) если $f_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} \lambda_i f_i$, то $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n = 0$; 2) если $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы, то существуют n векторов $x_1, \ldots, x_n \in E$, таких, что $f_i(x_j) = \delta_{ij}$ (символ Кронекера); иначе говоря, матрица $\{f_i(x_j)\}$ — единичная.

Так как ее определитель равен 1, то

$$(f_1 \wedge \ldots \wedge f_n)(x_1, \ldots, x_n) = 1,$$

т. е. знакопеременная n-линейная форма $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n$ не обращается в нуль тождественно.

1.7. Случай, когда пространство E конечномерно

Пусть E — пространство размерности k. Тогда, выбрав в E какой-нибудь базис, можно отождествить пространство E с $\mathbb{R}^k$. Для $i = 1, \ldots, k$ обозначим через u_i: $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ i-ую координатную форму.

Теорема 1.7.1. *Всякое p-линейное знакопеременное отображение $f \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^k, F)$ однозначно записывается в виде*

$$f = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq k} c_{i_1, \ldots, i_p} u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_p}, \tag{1.7.1}$$

где константы $c_{i_1, \ldots, i_p}$ суть элементы пространства F.

В правой части равенства каждый член является произведением константы $c_{i_1, \ldots, i_p} \in F$ и знакопеременной p-линейной формы $u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_p}$ — внешнего произведения p линейных форм.

Доказательство. Прежде всего, f — полилинейное отображение (напомним, что, поскольку $E = \mathbb{R}^k$ конечномерно, всякое полилинейное отображение непрерывно). Поэтому, согласно сказанному в п. 1.6.2, мы можем написать

$$f(x^1, \ldots, x^p) = \sum_{i_1, \ldots, i_p} c_{i_1, \ldots, i_p} x^1_{i_1} \ldots x^p_{i_p}, \tag{1.7.2}$$

где символы $x^1, \ldots, x^p$ означают векторы, $x^i_1, \ldots, x^i_k$ — координаты i-го вектора x^i и суммирование ведется по всем наборам индексов $i_1, \ldots, i_p$, независимо друг от друга пробегающих все целые числа от 1 до k.

Форма f определяет «коэффициенты» $c_{i_1, \ldots, i_p} \in F$ однозначно. Ввиду того факта, что коэффициенты определены однозначно, условие знакопеременности

$$f(x^{\sigma(1)}, \ldots, x^{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x^1, \ldots, x^p)$$

можно переписать так:

$$c_{i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(p)}} = \varepsilon(\sigma) c_{i_1, \ldots, i_p}; \tag{1.7.3}$$

в частности, (коэффициент) $c_{i_1, \ldots, i_p}$ обращается в нуль, если какие-нибудь два из индексов $i_1, \ldots, i_p$ совпадают. Условия (1.7.3) необходимы и достаточны для того, чтобы p-линейная форма с коэффициентами $c_{i_1, \ldots, i_p}$ была *знакопеременной*.

Сгруппируем в правой части равенства (1.7.2) слагаемые в группы из $p!$ членов, отличающиеся друг от друга лишь перестановкой элементов одного и того же множества $i_1, \ldots, i_p$ *различных* индексов. Получим

$$f(x^1, \ldots, x^p) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} c_{i_1, \ldots, i_p} \Big(\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) x_{i_1}^{\sigma(1)} \ldots x_{i_p}^{\sigma(p)} \Big),$$

где коэффициенты $c_{i_1, \ldots, i_p}$ для $i_1 < \ldots < i_p$ можно выбирать произвольно. Так записывается произвольная *знакопеременная* p-линейная форма. Суммы, стоящие в скобках,

$$\sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) x_{i_1}^{\sigma(1)} \ldots x_{i_p}^{\sigma(p)},$$

— это в силу (1.6.1) не что иное, как значения внешних произведений $u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_p}$ координатных форм $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$ для векторов $x^1, \ldots, x^p$. Тем самым (1.7.1) доказано.

Следствие 1.7.2. *Если $p > k$, то векторное пространство $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$ нулевое.* [Действительно, не существует строго возрастающей последовательности $i_1 < \ldots < i_p$, состоящей из p целых чисел $\geqslant 1$ и $\leqslant k$.]

Если $p = k$, то каждый элемент из $\mathcal{A}_k(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$ имеет вид

$$\boxed{c u_1 \wedge \ldots \wedge u_k,} \quad \text{где } c \in F.$$

Следствие 1.7.3. *Для $F = \mathbb{R}$ базис векторного пространства $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$ образуют элементы*

$$u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_p},$$

соответствующие всем строго возрастающим последовательностям $i_1 < \ldots < i_p$ целых чисел $\geqslant 1$ и $\leqslant k$. Этот базис пуст для $p > k$ и состоит из одного элемента для $p = k$.

Упражнение. Вычислить размерность векторного пространства $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$ для $p < k$.

§ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

2.1. Определение дифференциальных форм

Всюду далее U — открытая окрестность нуля в банаховом пространстве E и F — банахово пространство. Заметим, что $\mathcal{A}_p(E; F)$ (пространство *знакопеременных* непрерывных p-линейных отображений $E^p \to F$) банахово, ибо оно является *замкнутым* подпространством банахова пространства $\mathcal{L}_p(E; F)$ (см. п. 1.1).

Определение. *Дифференциальной формой степени p, определенной на U и принимающей значения в F*, называется отображение

$$\omega\colon U \to \mathcal{A}_p(E;\, F). \tag{2.1.1}$$

[Мы будем говорить для простоты: *дифференциальная p-форма* на U со значениями в F.] Говорят, что дифференциальная p-форма ω принадлежит к классу C^n, если отображение (2.1.1) принадлежит к классу C^n; здесь n — целое число $\geqslant 0$ или ∞.

Частные случаи. Дифференциальная форма степени нуль — это не что иное, как *функция* $U \to F$. Дифференциальная форма степени 1 — это отображение $U \to \mathcal{L}(E;\, F)$.

Обозначение. Символ $\Omega_p^{(n)}(U,\, F)$ будет обозначать множество всех дифференциальных p-форм класса C^n на U со значениями в F. Ясно, что это *векторное пространство*.

Для $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U,\, F)$, $x \in U$ и $\xi_1, \ldots, \xi_p \in E$ обозначим через

$$\omega(x)\cdot(\xi_1, \ldots, \xi_p) \in F$$

значение отображения $\omega(x) \in \mathcal{A}_p(E;\, F)$ на последовательности векторов $\xi_1, \ldots, \xi_p$. Иногда мы будем это же значение записывать так:

$$\omega(x;\, \xi_1, \ldots, \xi_p).$$

Для фиксированного x это знакопеременная полилинейная функция от $\xi_1, \ldots, \xi_p$.

Пример. Пусть $f\colon U \to F$ — отображение класса C^n, $n \geqslant 1$. Тогда производное отображение $f'\colon U \to \mathcal{L}(E;\, F)$ можно рассматривать как дифференциальную форму степени 1 класса C^{n-1} на U со значениями в F.

2.2. Операции над дифференциальными формами

В § 1 мы определили внешнее умножение знакопеременных полилинейных отображений. Это умножение индуцирует *внешнее умножение дифференциальных форм*. Поясним это.

Пусть F, G, H — банаховы пространства и $\Phi\colon F \times G \to H$ — непрерывное билинейное отображение. Пусть, кроме того,

$$\alpha \in \Omega_p^{(n)}(U,\, F), \qquad \beta \in \Omega_q^{(n)}(U,\, G).$$

Для любого $x \in U$, $\alpha(x)$ есть элемент пространства $\mathcal{A}_p(E;\, F)$, а $\beta(x)$ — элемент пространства $\mathcal{A}_q(E;\, G)$. Поэтому их внешнее произведение

$$\alpha(x) \wedge_\Phi \beta(x) \in \mathcal{A}_{p+q}(E;\, H).$$

Отображение

$$x \to \alpha(x) \wedge_\Phi \beta(x)$$

множества U в $\mathcal{A}_{p+q}(E;\ H)$ есть отображение класса C^n, так как оно представляет собой композицию отображения

$$x \to (\alpha(x),\ \beta(x))$$

класса C^n и непрерывного билинейного отображения

$$\mathcal{A}_p(E;\ F) \times \mathcal{A}_q(E;\ G) \to \mathcal{A}_{p+q}(E;\ H),$$

определяемого внешним умножением.

Определение. *Внешним произведением* $\alpha \wedge_\Phi \beta$ *дифференциальных форм* α *и* β называется дифференциальная форма

$$x \to \alpha(x) \wedge_\Phi \beta(x).$$

Если α и β — формы класса C^n, то их внешнее произведение $\alpha \wedge_\Phi \beta$ — форма класса C^n. Тем самым определено билинейное отображение

$$\Omega_p^{(n)}(U,\ F) \times \Omega_q^{(n)}(U,\ G) \to \Omega_{p+q}^{(n)}(U,\ H).$$

Раскрыв наше определение с помощью (1.4.6), получим

$$(\alpha \wedge_\Phi \beta)(x;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_{p+q}) =$$
$$= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\,\Phi\,(\alpha(x;\ \xi_{\sigma(1)},\ \ldots,\ \xi_{\sigma(p)}),\ \beta(x;\ \xi_{\sigma(p+1)},\ \ldots,\ \xi_{\sigma(p+q)})), \qquad (2.2.1)$$

где суммирование ведется по всем перестановкам σ последовательности $\{1,\ \ldots,\ p+q\}$, таким, что

$$\sigma(1) < \ldots < \sigma(p), \qquad \sigma(p+1) < \ldots < \sigma(p+q).$$

Примеры. Пусть $f\colon U \to F$ — функция и $\omega\colon U \to \mathcal{A}_n(E;\ \mathbb{R})$ — дифференциальная n-форма со скалярными значениями. Положим $G = \mathbb{R}$, $H = F$ и возьмем в качестве Φ отображение $F \times \mathbb{R} \to F$, определяемое векторной структурой пространства F. Тогда произведение $f \wedge_\Phi \omega$, которое мы будем обозначать просто через $f \cdot \omega$, есть дифференциальная форма, определенная равенством

$$(f \cdot \omega)(x;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n) = f(x) \cdot \omega(x;\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n). \qquad (2.2.2)$$

Рассмотрим другой пример. Пусть α и β — дифференциальные формы степени 1 со скалярными значениями и $\Phi\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — умножение скаляров. Тогда форма $\alpha \wedge_\Phi \beta$, которую мы обозначим просто через $\alpha \wedge \beta$, определяется формулой

$$(\alpha \wedge \beta)(x;\ \xi_1,\ \xi_2) = \alpha(x;\ \xi_1)\,\beta(x;\ \xi_2) - \alpha(x;\ \xi_2)\,\beta(x;\ \xi_1). \qquad (2.2.3)$$

Внешнее умножение дифференциальных форм обладает всеми свойствами умножения знакопеременных полилинейных отображений:

Предложение 2.2.1. *Внешнее умножение дифференциальных форм, принимающих скалярные значения:*

$$(\alpha, \beta) \to \alpha \wedge \beta,$$

антикоммутативно: $\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta$, *где* p — *степень формы* α, *а* q — *степень формы* β. *Кроме того, оно ассоциативно:* $(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$.

Это очевидное следствие предложений 1.5.1 и 1.5.2.

Предложение 2.2.2. *Пусть* $\omega_1, \ldots, \omega_p \in \Omega_1^{(n)}(U, \mathbb{R})$ *суть* 1-*формы класса* C^n, *принимающие скалярные значения. Тогда* $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p \in \Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$ *есть знакопеременная полилинейная функция от* $\omega_1, \ldots, \omega_p$ *и*

$$(\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_p)(x; \xi_1, \ldots, \xi_p) = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\, \omega_1(x; \xi_{\sigma(1)}) \ldots \omega_n(x; \xi_{\sigma(p)}) = \\ = \det(\omega_i(x; \xi_j)). \qquad (2.2.4)$$

Это непосредственное следствие предложения 1.6.1.

Замечание. Для любого целого числа n рассмотрим векторное пространство $\bigoplus_{p \geq 0} \Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$ — прямую сумму векторных пространств $\Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$ по всем значениям p. Внешнее умножение

$$\Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R}) \times \Omega_q^{(n)}(U, \mathbb{R}) \to \Omega_{p+q}^{(n)}(U, \mathbb{R}),$$

продолженное по линейности, превращает это векторное пространство

$$\Omega^{(n)}(U, \mathbb{R}) = \bigoplus_{p \geq 0} \Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$$

в *алгебру*. Ее называют *градуированной алгеброй*, так как произведение элемента степени p (т. е. элемента, лежащего в $\Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$), и элемента степени q есть элемент степени $p+q$. Эта алгебра *ассоциативна* и *антикоммутативна*.

2.3. Операция внешнего дифференцирования

Теперь мы переходим к описанию очень важной операции, не имеющей аналога в теории знакопеременных отображений. Мы хотим сопоставить каждой форме $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$ $(n \geq 1)$ некоторую $(p+1)$-форму, обозначаемую через $d\omega$,

$$d\omega \in \Omega_{p+1}^{(n-1)}(U, F),$$

и называемую *внешним дифференциалом* формы ω.

Пусть

$$\omega \to \mathcal{A}_p(E; F)$$

— отображение класса C^n ($n \geqslant 1$). Рассмотрим производное отображение, которое принадлежит к классу C^{n-1}:

$$\omega': U \to \mathcal{L}(E; \mathcal{A}_p(E; F)).$$

Для каждого $x \in U$

$$(\omega'(x)\cdot\xi_0)\cdot(\xi_1, \ldots, \xi_p) \in F$$

— непрерывная полилинейная функция от $\xi_0, \ldots, \xi_p \in E$. Кроме того, она *знакопеременна* по $\xi_1, \ldots, \xi_p$. Иначе говоря, $\omega'(x)$ можно рассматривать как элемент пространства $\mathcal{A}_{1,p}(E; F)$ (мы используем обозначение п. 1.4). В том же п. 1.4 было построено непрерывное линейное отображение

$$\varphi_{1,p}: \mathcal{A}_{1,p}(E; F) \to \mathcal{A}_{p+1}(E; F).$$

Определение. *Внешний дифференциал* $d\omega$ есть композиция отображений

$$U \xrightarrow{\omega'} \mathcal{A}_{1,p}(E; F) \xrightarrow{\varphi_{1,p}} \mathcal{A}_{p+1}(E; F).$$

Запишем это явным образом:

$$\boxed{d(\omega)(x; \xi_0, \ldots, \xi_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i(\omega'(x)\cdot\xi_i)\cdot(\xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p).} \tag{2.3.1}$$

Такова явная формула для дифференциальной $(p+1)$-формы $d\omega$. Если ω — форма класса C^n, то $d\omega$ — форма класса C^{n-1}.

Примеры. 1) Возьмем в качестве ω функцию $f: U \to F$. Тогда

$$(df)(x; \xi) = f'(x)\cdot\xi,$$

т. е. $df: U \to \mathcal{L}(E; F)$ есть не что иное, как *производное* отображение f'.

2) Для $p = 1$ имеем

$$(d\omega)(x; \xi_1, \xi_2) = (\omega'(x)\cdot\xi_1)\cdot\xi_2 - (\omega'(x)\cdot\xi_2)\cdot\xi_1. \tag{2.3.2}$$

Отсюда вытекает

Предложение 2.3.1. *Пусть $\omega \in \Omega_1^{(n)}(U, F)$, $n \geqslant 1$. Для того чтобы $d\omega = 0$, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in U$ билинейное отображение*

$$(\xi_1, \xi_2) \to (\omega'(x)\cdot\xi_1)\cdot\xi_2$$

было симметрическим.

2.4. Свойства операции внешнего дифференцирования

Предложение 2.4.1. *Если f — функция класса C^1 и ω — p-форма класса C^1, то*

$$d(f\cdot\omega) = (df) \wedge \omega + f\cdot(d\omega). \tag{2.4.1}$$

[Здесь стоит отметить два случая: 1) f принимает значения в F, а ω — форма, принимающая скалярные значения; тогда значения формы $d(f\cdot\omega)$ принадлежат пространству F; 2) f — скалярная функция, а ω — форма со значениями F; тогда значения формы $d(f\cdot\omega)$ тоже принадлежат пространству F.]

Доказательство. В общем случае функция f принимает значения в пространстве F, форма ω — в пространстве G и $\Phi: F\times G \to H$ — произвольное непрерывное билинейное отображение. В этом случае $f\cdot\omega$ есть отображение

$$x \to \Phi(f(x), \omega(x))$$

множества U в $\mathcal{A}_p(E; H)$. Известно (см. ч. I, гл. 1, (2.5.5)), что производная этого отображения по x принимает на векторе $\xi \in E$ значение

$$\Phi(f'(x)\cdot\xi, \omega(x)) + \Phi(f(x), \omega'(x)\cdot\xi).$$

Ограничиваясь для простоты случаем, когда Φ есть отображение $F\times\mathbb{R}\to F$ или отображение $\mathbb{R}\times F\to F$, мы можем написать

$$(f\cdot\omega)'(x)\cdot\xi = (f'(x)\cdot\xi)\cdot\omega(x) + f(x)\cdot(\omega'(x)\cdot\xi). \tag{2.4.2}$$

Используя (2.3.1) и заменяя ω на $f\cdot\omega$, получаем

$$d(f\cdot\omega)\cdot(x; \xi_0, \ldots, \xi_p) = \sum_{i=0}^{p}(-1)^i((f\cdot\omega)'(x)\cdot\xi_i)\cdot(\xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p).$$

Распишем правую часть с помощью формулы (2.4.2):

$$\sum_{i=0}^{p}(-1)^i(f'(x)\cdot\xi_i)\cdot\omega(x)\cdot(\xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p) + \\ + \sum_{i=0}^{p}(-1)^i f(x)\cdot(\omega'(x)\cdot\xi_i)\cdot(\xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p).$$

Первая сумма есть значение внешнего произведения $(df)\wedge\omega$ на $(\xi_0, \ldots, \xi_p)$. Вторая сумма есть значение произведения $f\cdot(d\omega)$ на $(\xi_0, \ldots, \xi_p)$, ч. т. д.

Теорема 2.4.2. *Пусть $\alpha \in \Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$ и $\beta \in \Omega_q^{(n)}(U, \mathbb{R})$ — дифференциальные формы класса C^n, $n \geqslant 1$. Тогда*

$$d(\alpha\wedge\beta) = (d\alpha)\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge(d\beta.) \tag{2.4.3}$$

Доказательство. Формула для производной билинейной функции от двух функций (см. гл. 1, (2.5.4)) показывает, что если

$x \in U$ и $\xi \in E$, то

$$(\alpha \wedge \beta)'(x)\cdot\xi = (\alpha'(x)\cdot\xi) \wedge \beta(x) + \alpha(x) \wedge (\beta'(x)\cdot\xi).$$

[Это равенство между элементами пространства $\mathcal{A}_{p+q}(E; F)$.]

Для простоты будем писать α', β, α, β', $(\alpha \wedge \beta)'$ вместо $\alpha'(x)$, $\beta(x)$, ... и т. д., понимая под этими символами значения соответствующих функций в рассматриваемой точке x. Перепишем предыдущее равенство в виде

$$(\alpha \wedge \beta)'\cdot\xi = (\alpha'\cdot\xi) \wedge \beta + \alpha \wedge (\beta'\cdot\xi). \qquad (2.4.4)$$

Так как внешнее умножение антикоммутативно, то

$$(\alpha \wedge \beta)'\cdot\xi = (\alpha'\cdot\xi) \wedge \beta + (-1)^{pq}(\beta'\cdot\xi) \wedge \alpha. \qquad (2.4.5)$$

Положим

$$u(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = ((\alpha'\cdot\xi_0) \wedge \beta)\cdot(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}),$$
$$v(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = ((\beta'\cdot\xi_0) \wedge \alpha)\cdot(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}),$$
$$w(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = ((\alpha \wedge \beta)'\cdot\xi_0)\cdot(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}).$$

Это элементы из $\mathcal{A}_{1,p+q}(E; \mathbb{R})$ (для фиксированного x), и в силу (2.4.5)

$$w = u + (-1)^{pq} v.$$

Нам нужно вычислить знакопеременную $(p+q+1)$-линейную функцию $d(\alpha \wedge \beta)$, которая по определению является образом формы w при каноническом отображении

$$\varphi_{1,\,p+q}\colon \mathcal{A}_{1,\,p+q}(E; \mathbb{R}) \to \mathcal{A}_{p+q+1}(E; \mathbb{R}).$$

Имеем

$$d(\alpha \wedge \beta) = \varphi_{1,\,p+q}(u) + (-1)^{pq}\varphi_{1,\,p+q}(v). \qquad (2.4.6)$$

Далее, u есть внешнее произведение, которое мы получаем, применяя к

$$((\alpha'\cdot\xi_0)\cdot(\xi_1, \ldots, \xi_p))\cdot\beta(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q}),$$

как к элементу из $\mathcal{A}_{p,q}(E; \mathbb{R})$ [для фиксированного ξ_0], отображение

$$\varphi_{p,q}\colon \mathcal{A}_{p,q}(E; \mathbb{R}) \to \mathcal{A}_{p+q}(E; \mathbb{R}).$$

Наконец, $\varphi_{1,p+q}(u)$ есть образ элемента

$$(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) \to ((\alpha'\cdot\xi_0)\cdot(\xi_1, \ldots, \xi_p))\cdot\beta(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q}) \qquad (2.4.7)$$

из $\mathcal{A}_{1,p,q}(E; \mathbb{R})$ при отображении $\varphi_{1,p+q} \circ \varphi_{p,q}$. Но по лемме 1.5.3

$$\varphi_{1,\,p+q} \circ \varphi_{p,\,q} = \varphi_{1+p,\,q} \circ \varphi_{1,\,p}.$$

Применяя отображение $\varphi_{1,p}$ к полилинейной форме (2.4.7), получаем форму

$$(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) \to ((d\alpha)\cdot(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p))\cdot\beta\,(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_{p+q}).$$

Если мы применим к полученной форме отображение $\varphi_{1+p,q}$, то получим значение внешнего произведения $d\,(\alpha \wedge \beta)$ на системе векторов $(\xi_0, \ldots, \xi_{p+q})$.

Таким образом,

$$\varphi_{1,\,p+q}(u) = (d\alpha) \wedge \beta.$$

По тем же соображениям

$$\varphi_{1,\,p+q}(v) = (d\beta) \wedge \alpha.$$

Равенство (2.4.6) дает теперь

$$d\,(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{pq}\,(d\beta) \wedge \alpha.$$

Из антикоммутативности внешнего умножения следует, что

$$(d\beta) \wedge \alpha = (-1)^{p(q+1)}\,\alpha \wedge (d\beta),$$

и мы приходим наконец к соотношению

$$d\,(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{p}\,\alpha \wedge (d\beta),$$

чем и завершается доказательство.

2.5. Основное свойство внешнего дифференцирования

Теорема 2.5.1. *Если* $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$ — *дифференциальная форма класса* C^n, $n \geqslant 2$, *то*

$$\boxed{d\,(d\omega) = 0.}$$

[Операция d, повторенная два раза, дает нуль.]

Доказательство. Для данного значения $x \in U$ (которое во всех дальнейших рассмотрениях считается фиксированным) $d\omega$ есть знакопеременная полилинейная функция от $\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}$, являющаяся образом полилинейного отображения

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}) \to \omega'(\xi_1)\cdot(\xi_2, \ldots, \xi_{p+1})$$

при отображении $\varphi_{1,p}\ \mathcal{A}_{1,p}(E; F) \to \mathcal{A}_{p+1}(E; F)$. Поэтому для фиксированного ξ_0, $(d\omega)'\cdot\xi_0$ есть знакопеременная полилинейная функция от $\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}$. Она представляет собой образ при отображении $\varphi_{1,p}$ полилинейного отображения

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{p+1}) \to ((\omega''\cdot\xi_0)\cdot\xi_1)\cdot(\xi_2, \ldots, \xi_{p+1}),$$

которое мы можем записать также как

$$\omega''(\xi_0, \xi_1)\cdot(\xi_2, \ldots, \xi_{p+1}). \tag{2.5.1}$$

Здесь под ω'' понимается билинейная функция со значениями в $\mathcal{A}_p(E; F)$. Рассмотрим ее как полилинейную функцию от ξ_0, ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{p+1}. Это элемент из $\mathcal{A}_{1,1,p}(E; F)$. Операция $\varphi_{1,p}$, примененная к функции (2.5.1), рассматриваемой как функция от ξ_1, ..., ξ_{p+1} (при фиксированном ξ_0), дает нам элемент из $\mathcal{A}_{1,p+1}(E; F)$, который представляет собой попросту $(d\omega)'$, рассматриваемое как полилинейная функция от ξ_0, ξ_1, ..., ξ_{p+1}. Далее, применяя отображение $\varphi_{1,p+1}$ к $(d\omega)'$, мы получаем знакопеременную $(p+2)$-линейную функцию $d\,(d\omega)$. Иначе говоря, $d\,(d\omega)$ получается как образ полилинейной функции (2.5.1) при отображении $\varphi_{1,p+1} \circ \varphi_{1,p}$.

По лемме 1.5.3

$$\varphi_{1,\,p+1} \circ \varphi_{1,\,p} = \varphi_{2,\,p} \circ \varphi_{1,\,1}.$$

Отображение $\varphi_{1,1}$, примененное к полилинейной функции (2.5.1), дает

$$\omega''(\xi_0, \xi_1)\cdot(\xi_2, \ldots, \xi_{p+1}) - \omega''(\xi_1, \xi_0)\cdot(\xi_2, \ldots, \xi_{p+1}).$$

Полученное выражение равно *нулю*, так как вторая производная ω'' есть *симметрическая* билинейная функция от ξ_0 и ξ_1 (ч. I, гл. 1, теорема 5.1.1). Тем самым мы показали, что $d\,(d\,(\omega)) = 0$, ч. т. д.

2.6. Дифференциальные формы на конечномерном пространстве

Пусть пространство E конечномерно. Выбор базиса в E позволяет отождествить E с $\mathbb{R}^k$. Пусть $u_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$ есть i-я координатная функция, рассматриваемая как *линейная форма*. Зададимся каким-нибудь открытым множеством $U \subset \mathbb{R}^k$ и обозначим через x_i сужение формы u_i на U, рассматриваемое на этот раз как дифференцируемое отображение x_i: $U \to \mathbb{R}$.

Лемма 2.6.1. *Дифференциал dx_i функции x_i есть постоянное отображение $U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$, значением которого является элемент $u_i \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$.*

Действительно, функция x_i линейна, а согласно предложению 2.4.2 из гл. 1, производное отображение для такой функции постоянно, причем его значением служит элемент из $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R})$, равный рассматриваемой линейной функции.

Теорема 2.6.2. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^k$. Тогда любая дифференциальная форма $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$ однозначно записывается в виде*

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} c_{i_1, \ldots, i_p}(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}, \qquad (2.6.1)$$

где «коэффициенты» $c_{i_1, \ldots, i_p}$ суть функции $U \to F$ класса C^n и суммирование ведется по всем возможным наборам индексов $i_1 < \ldots < i_p$, каждый из которых $\geqslant 1$ и $\leqslant k$.

Доказательство. Воспользуемся теоремой 1.7.1, дающей каноническое представление элементов пространства $\mathcal{A}_p(\mathbb{R}^k; F)$. Форма ω — это, по определению, следующее отображение класса C^n:

$$\omega\colon U \to \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^k; F).$$

Для $x \in U$ элемент $\omega(x) \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R}^k; F)$ однозначно записывается в виде

$$\sum_{i_1<\ldots<i_p} c_{i_1,\ldots,i_p} u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_p},$$

где $u_{i_1}, \ldots, u_{i_p}$ — значения в точке $x \in U$ постоянных функций $dx_{i_1}, \ldots, dx_{i_p}$ (предыдущая лемма), «коэффициенты» же $c_{i_1,\ldots,i_p}$ зависят от x. Очевидно, функция

$$x \to \sum_{i_1<\ldots<i_p} c_{i_1,\ldots,i_p}(x)\, u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_p}$$

есть функция класса C^n в том и только том случае, когда $c_{i_1,\ldots,i_p}$ суть функции класса C^n. Подставив функции dx_i вместо их значений u_i во внешнее произведение, мы получим формулу (2.6.1) и тем самым докажем теорему 2.6.2.

В дальнейшем мы будем правую часть равенства (2.6.1) называть *канонической записью* дифференциальной формы ω (на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^k$).

Теорема 2.6.2 справедлива, в частности, для $F = \mathbb{R}$ (формы со скалярными значениями). В этом случае коэффициенты $c_{i_1,\ldots,i_p}$ — это просто числовые функции. Можно сказать, что $\Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R})$ есть *модуль над кольцом* $\Omega_0^{(n)}(U, \mathbb{R})$ числовых функций класса C^n, причем элементы

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \in \Omega_p^{(n)}(U, \mathbb{R}),$$

где $i_1 < \ldots < i_p$ — возрастающие последовательности целых чисел $\geqslant 1$ и $\leqslant k$, образуют *базис* этого модуля.

Частный случай: $p = 1$. В этом случае любая дифференциальная 1-форма $\omega \in \Omega_1^{(n)}(U, F)$ однозначно записывается в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{k} c_i(x)\, dx_i, \tag{2.6.2}$$

где c_i — отображения $U \to F$ класса C^n. Мы узнаем здесь обычную запись дифференциальных форм степени 1.

Проведем одно важное вычисление: найдем значение $\omega(x; \xi)$ дифференциальной формы, определенной равенством (2.6.2), в точке $x \in U$ на векторе $\xi \in \mathbb{R}^k$. Для этого вспомним, что по лемме 2.6.1 значение функции dx_i в $(x; \xi)$ не зависит от x и равно $u_i(\xi)$ — значению i-й координаты на векторе ξ. Таким образом,

$$\omega(x; \xi) = \sum_{i=1}^{p} c_i(x)\, \xi_i, \qquad (2.6.3)$$

где ξ_i — это i-я координата вектора $\xi \in \mathbb{R}^k$.

Предложение 2.6.3. *Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^k$. Если $f\colon U \to F$ — функция класса C^1, то ее дифференциал df записывается в следующем каноническом виде:*

$$\boxed{df = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i.} \qquad (2.6.4)$$

Действительно, $df\colon U \to \mathscr{L}(\mathbb{R}^k; F)$ есть не что иное, как производное отображение f'. Если ξ — вектор с координатами $\xi_1, \ldots, \xi_k$, то по формуле (2.6.1) из гл. 1

$$f'(x)\cdot\xi = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, \xi_i.$$

Следовательно,

$$(df)(x; \xi) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, \xi_i.$$

В силу равенства (2.6.3) это в точности соотношение (2.6.4).

2.7. Операции над дифференциальными формами в канонической записи

В этом пункте символ U обозначает открытое подмножество в $\mathbb{R}^h$. Мы будем пользоваться здесь *канонической записью* дифференциальных форм (теорема 2.6.2). Пусть α и β — дифференциальные формы степеней p и q соответственно. Мы хотим найти каноническую запись произведения $\alpha \wedge \beta$, зная канонические записи форм α и β.

Дистрибутивность внешнего умножения по отношению к сложению форм позволяет нам ограничиться случаем, когда α и β — одночлены:

$$\alpha = a(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p},$$
$$\beta = b(x)\, dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}.$$

Мы ищем произведение $\alpha \wedge \beta$ относительно непрерывного билинейного отображения

$$\Phi\colon\quad F \times G \to H$$

(F — пространство значений формы α, т. е. функции $a(x)$, и G — пространство значений формы β, т. е. функции $b(x)$). Используя ассоциативность и антикоммутативность умножения, получаем

$$\alpha \wedge_{\Phi} \beta = \Phi(a(x),\ b(x))\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \ \ldots \ dx_{j_q},$$

где $\Phi(a, b)$ —«произведение» функций a и b относительно Φ [например, если a и b — числовые функции и Φ: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — умножение скаляров, то $\Phi(a, b)$ есть обычное произведение функций a и b]. Остается найти *каноническую запись для произведения*

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}.$$

Могут иметь место *два случая*: 1) целые числа $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q$, не все различны — в этом случае наше произведение равно нулю; 2) все эти числа различны — в этом случае существует перестановка σ, превращающая эту последовательность в строго возрастающую:

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_{p+q}.$$

Таким образом,

$$dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q} = \varepsilon(\sigma)\, dx_{k_1} \wedge \ldots \wedge dx_{k_{p+q}}.$$

Каноническая запись формы $\alpha \wedge_{\Phi} \beta$ получена.

Итак, мы умеем теперь находить каноническую запись внешнего произведения. Посмотрим, как получить каноническую запись *внешнего дифференциала* $d\omega$ от дифференциальной формы ω. Снова достаточно провести вычисление для одночленов

$$\omega = c(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}; \tag{2.7.1}$$

здесь «коэффициент» c — это отображение $U \to F$ класса C^1. Применим результаты п. 2.4, позволяющие найти $d(\alpha \wedge \beta)$. По индукции, если форма ω есть внешнее произведение

$$\omega = \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_n$$

дифференциальных форм ω_i степени p_i, то

$$d\omega = d\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_n + (-1)^{p_1} \omega_1 \wedge (d\omega_2) \wedge \ldots \wedge \omega_n + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{p_1+p_2+\ldots+p_{n-1}} \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_{n-1} \wedge (d\omega_n). \tag{2.7.2}$$

Применим эту формулу к форме ω вида (2.7.1):

$$d\omega = dc \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} + c\, d(dx_{i_1}) \wedge dx_{i_2} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} + \ldots$$
$$\ldots \pm c\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_{p-1}} \wedge d(dx_{i_p}).$$

Но (см. п. 2.5)

$$d(dx_{i_1}) = 0, \ \ldots, \ d(dx_{i_p}) = 0,$$

значит, остается только один член

$$\boxed{d\omega = dc \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.} \tag{2.7.3}$$

Эту простую формулу легко (и важно!) запомнить.

Равенство (2.7.3) не дает еще канонической записи $d\omega$ (для форм ω вида (2.7.1)). Однако получить ее теперь уже нетрудно. Действительно, заменим в правой части равенства (2.7.3) dc на

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial c}{\partial x_j} dx_j$$

(см. предложение 2.6.3). Получим

$$d\omega = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial c}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Нам осталось только записать в каноническом виде форму $dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$. Как мы уже объяснили выше, она равна нулю, если j совпадает с одним из целых чисел $i_1, \ldots, i_p$, и равна $\varepsilon(\sigma)\, dx_{k_1} \wedge \ldots \wedge dx_{k_{p+1}}$ в противном случае, где σ — перестановка последовательности $\{j, i_1, \ldots, i_p\}$, превращающая ее в строго возрастающую последовательность $\{k_1, \ldots, k_{p+1}\}$.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами x, y, z рассмотрим форму

$$\omega = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

коэффициенты которой суть функции класса C^1 от x, y, z. Простое вычисление показывает, что форма

$$d\omega = dP \wedge dx + dQ \wedge dy + dR \wedge dz$$

имеет следующую каноническую запись:

$$d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \\ + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Упражнение. Используя каноническую запись, проверим, что $d(d\omega) = 0$ для любой дифференциальной формы ω класса C^2 (см. теорему 2.5.1). Прежде всего покажем, что $d(df) = 0$ для любой функции f класса C^2. Согласно предложению 2.6.3,

$$df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j,$$

откуда

$$d(df) = \sum_j d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) \wedge dx_j.$$

Далее,

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx_i,$$

откуда

$$d(df) = \sum_{i,\, j} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j,$$

где индексы i и j пробегают независимо друг от друга целые числа от 1 до k. Член с $i=j$ равен нулю, так как $dx_i \wedge dx_i = 0$. Для $i \neq j$ сгруппируем в пары члены с индексами (i, j) и (j, i):

$$d(df) = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}\, dx_i \wedge dx_j + \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}\, dx_j \wedge dx_i\right).$$

Так как по теореме Шварца (ч. I, гл. 1, предложение 5.2.2)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}$$

и так как, с другой стороны, $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$, то

$$d(df) = 0.$$

Для проверки равенства $d(d\omega) = 0$ в общем случае достаточно рассмотреть одночленные формы вида

$$\omega = c\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Имеем

$$d\omega = (dc) \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

По формуле (2.7.2) (в которой надо заменить ω на $d\omega$) $d(d\omega)$ есть сумма членов, в каждом из которых встречается в качестве множителя либо $d(dc)$, либо $d(dx_{i_1})$, . . ., либо $d(dx_{i_p})$. Поскольку каждый из этих множителей равен нулю, то $d(d\omega) = 0$. Таким образом, каноническая запись позволила нам получить новое доказательство [пригодное, правда, лишь для (открытых подмножеств) пространства $\mathbb{R}^k$] теоремы 2.5.1: $d(d\omega) = 0$.

2.8. Замена переменных в дифференциальных формах

Вернемся к общему случаю, когда U — открытое подмножество банахова пространства E. Пусть

$$\omega: U \to \mathcal{A}_p(E, F)$$

— дифференциальная p-форма класса C^n, $n \geqslant 0$, и пусть задано отображение

$$\varphi\colon \quad U' \to U$$

открытого подмножества U' банахова пространства E' в U. Предположим, что φ — отображение класса C^{n+1}. Определим некоторую p-форму класса C^n:

$$U' \longrightarrow \mathscr{A}_p(E'; F),$$

которую мы будем обозначать через $\varphi^*(\omega)$ или просто $\varphi^*\omega$ и называть *дифференциальной формой, получающейся из формы* ω *при помощи замены переменных*

$$\varphi\colon \quad U' \to U.$$

Прежде чем давать точное определение формы $\varphi^*\omega$, укажем, чего мы от нее хотим. Мы хотим определить эту форму так, чтобы ее значение в точке $y \in U'$ на системе векторов $\eta_1, \ldots, \eta_p \in E'$ давалось формулой

$$(\varphi^*\omega)(y; \; \eta_1, \ldots, \eta_p) = \omega(\varphi(y); \; \varphi'(y)\cdot\eta_1, \ldots, \varphi'(y)\cdot\eta_p) \tag{2.8.1}$$

[напомним, что $\varphi'(y)$ — элемент из $\mathscr{L}(E'; E)$]. Мы должны доказать, что формула (2.8.1) корректно определяет $\varphi^*\omega$ как отображение класса C^n множества U' в $\mathscr{A}_p(E'; F)$.

Начнем со случая $p = 0$. В этом случае ω —просто функция $f\colon U \to F$ класса C^n. Равенство (2.8.1) принимает вид

$$(\varphi^*f)(y) = f(\varphi(y)).$$

Иначе говоря, $\varphi^*f\colon U' \to F$ есть, *по определению, композиция функций* $f \circ \varphi$. В этом случае ($p = 0$) достаточно потребовать, чтобы φ была функцией класса C^n. Тогда композиция $f \circ \varphi$ будет функцией класса C^n (ч. I, гл. 1, теорема 5.4.2), и отображение

$$f \to f \circ \varphi = \varphi^*(f)$$

будет линейным отображением $\Omega_0^{(n)}(U, F) \to \Omega_0^{(n)}(U', F)$.

Рассмотрим теперь случай $p > 0$. В этом случае мы должны будем потребовать, чтобы φ была функцией класса C^{n+1}. Формула (2.8.1) показывает, что $\varphi^*\omega$ как отображение $U' \to \mathscr{A}_p(E'; F)$ есть композиция следующих двух отображений:

1) отображения $U' \to \mathscr{A}_p(E; F) \times \mathscr{L}(E'; E)$, у которого первая компонента есть $\omega \circ \varphi\colon U' \to \mathscr{A}_p(E; F)$, а вторая $\varphi'\colon U' \to \mathscr{L}(E'; E)$;

2) отображения $\lambda_p\colon \mathscr{A}_p(E; F) \times \mathscr{L}(E'; E) \to \mathscr{A}_p(E'; F)$, которое паре $f \in \mathscr{A}_p(E; F)$, $g \in \mathscr{L}(E'; E)$ сопоставляет такой элемент из $\mathscr{A}_p(E'; F)$:

$$(\eta_1, \ldots, \eta_p) \to f(g(\eta_1), \ldots, g(\eta_p)).$$

Легко видеть, что отображение λ_p принадлежит классу C^∞ (и даже полиномиально, будучи линейным по f и однородным полиномом степени p по g). Так как ω — форма класса C^n, а φ — функция класса C^{n+1}, то $\omega \circ \varphi$ и φ' суть отображения класса C^n, а значит, и отображение 1) есть отображение класса C^n. Поэтому отображение $\varphi^*\omega$ как композиция отображений 1) и 2) есть отображение класса C^n.

Таким образом, мы доказали

Предложение 2.8.1. *Если φ — отображение класса C^{n+1}, то формула замены переменных* (2.8.1) *сопоставляет каждой дифференциальной форме $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$ дифференциальную форму $\varphi^*\omega \in \Omega_p^{(n)}(U', F)$. При этом φ^* — линейное отображение*

$$\varphi^*: \Omega_p^{(n)}(U, F) \to \Omega_p^{(n)}(U', F).$$

(*Для $p = 0$ достаточно предполагать, что φ — функция класса C^n.*)

2.9. Свойства отображения φ^*

Теорема 2.9.1. *Отображение φ^* сохраняет внешнее произведение: если $\alpha \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$, $\beta \in \Omega_q^{(n)}(U, G)$ и задано непрерывное билинейное отображение Φ: $F \times G \to H$ то*

$$\varphi^*(\alpha \wedge_\Phi \beta) = (\varphi^*\alpha) \wedge_\Phi (\varphi^*\beta). \tag{2.9.1}$$

Доказательство состоит по-существу в простой выкладке, в которой непосредственно используется определение внешнего умножения. Проведем эту выкладку. Для простоты будем писать φ' вместо $\varphi'(y)$. Имеем

$$(\varphi^*\alpha \wedge {}_\Phi\varphi^*\beta)(y;\ \eta_1, \ldots, \eta_{p+q}) =$$
$$= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\Phi((\varphi^*\alpha)(y;\ \eta_{\sigma(1)}, \ldots, \eta_{\sigma(p)}),\ (\varphi^*\beta)(y;\ \eta_{\sigma(p+1)}, \ldots, \eta_{\sigma(p+q)})), \tag{2.9.2}$$

где суммирование ведется по всем перестановкам σ последовательности $\{1, \ldots, p+q\}$, удовлетворяющим условию (1.4.3). Эта сумма равна

$$\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\,\Phi(\alpha(\varphi(y);\ \varphi'\cdot\eta_{\sigma(1)}, \ldots, \varphi'\cdot\eta_{\sigma(p)}),$$
$$\beta(\varphi(y);\ \varphi'\cdot\eta_{\sigma(p+1)}, \ldots, \varphi'\cdot\eta_{\sigma(p+q)})),$$

что совпадает очевидным образом с $(\varphi^*\omega)(y;\ \eta_1, \ldots, \eta_{p+q})$, где дифференциальная форма ω есть отображение $U \to \mathcal{A}_{p+q}(E; F)$, определенное равенством

$$\omega(x;\ \xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) =$$
$$= \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\,\Phi(\alpha(x;\ \xi_{\sigma(1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p)});\ \beta(x;\ \xi_{\sigma(p+1)}, \ldots, \xi_{\sigma(p+q)})).$$

Мы видим, что

$$\omega = \alpha \wedge_\Phi \beta,$$

т. е. левая часть равенства (2.9.2) равна значению формы $\varphi^*(\alpha \wedge_\Phi \beta)$ в точке y на системе векторов $\eta_1, \ldots, \eta_{p+q} \in E'$. Равенство (2.9.1) доказано.

Теорема 2.9.2. *Если* φ: $U' \to U$ *и* f: $U \to F$ — *отображения класса* C^1, *то*

$$\varphi^* (df) = d(\varphi^* f) \tag{2.9.3}$$

[заметим, что $\varphi^* f$: $U' \to F$ — отображение класса C^1]. *Если* φ: $U' \to U$ — *отображение класса* C^2 *и*

$$\omega: \quad U \to \mathcal{A}_p(E;\ F)$$

— *форма класса* C^1, *то*

$$\varphi^* (d\omega) = d(\varphi^* \omega) \tag{2.9.4}$$

[заметим, что $\varphi^* \omega$ и $d\omega$ — формы класса C^1].

Короче говоря, операция φ^* перестановочна с операцией внешнего дифференцирования.

Доказательство. Докажем равенство (2.9.3). Так как

$$(df)(x;\ \xi) = f'(x) \cdot \xi, \tag{2.9.5}$$

то

$$(\varphi^* (df))(y;\ \eta) = f'(\varphi(y)) \cdot \varphi'(y) \cdot \eta = (f'(\varphi(y)) \circ \varphi'(y)) \cdot \eta.$$

Поскольку (по правилу дифференцирования сложной функции)

$$f'(\varphi(y)) \circ \varphi'(y) = (f \circ \varphi)'(y) = (\varphi^* f)'(y),$$

равенство (2.9.5) переписывается так:

$$(\varphi^* f)'(y) \cdot \eta = (d(\varphi^* f))(y;\ \eta),$$

откуда и следует (2.9.3).

Доказательство равенства (2.9.4) подлиннее, но и оно получается простой выкладкой. Мы предоставляем его читателю в качестве упражнения. Для частного случая $E = \mathbb{R}^k$ мы ниже дадим доказательство, использующее каноническую запись дифференциальных форм.

2.10. Операция φ^* в канонической записи

Мы знаем, что любая форма $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U,\ F)$ на открытом подмножестве U пространства $\mathbb{R}^k$ представима в виде суммы дифференциальных форм вида

$$c(x)\, dx_{i_{p1}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}.$$

Вычислим $\varphi^* \omega$ для $\omega = c(x)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$. В силу теоремы 2.9.1 (о согласованности операции φ^* с внешним умножением) и равенства (2.9.3)

$$\varphi^*(\omega)=\varphi^*(c)\,d(\varphi^*x_{i_1})\wedge\ldots\wedge d(\varphi^*x_{i_p}).$$

Но $\varphi^*x_i=x_i\circ\varphi$: $U'\to\mathbb{R}$ — это функция φ_i, выражающая i-ю координату точки $\varphi(y)$ как функцию от $y\in U$. Поэтому

$$\varphi^*\omega=c(\varphi(y))(d\varphi_{i_1})\wedge\ldots\wedge(d\varphi_{i_p}). \qquad (2.10.1)$$

Для получения канонической записи формы $\varphi^*\omega$ нам осталось подставить выражения

$$d\varphi_i=\sum_j\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_j}\,dy_j$$

в правую часть равенства (2.10.1) и развернуть это выражение, как мы это уже делали в п. 2.7.

Практическое правило. Записываем преобразование φ, выражая координаты $x_1,\ldots,x_k$ точки $\varphi(y)$ как функции от координат $y_1,\ldots,y_h$ точки y (в предположении, что U' — открытое множество в $\mathbb{R}^h$):

$$x_i=\varphi_i(y_1,\ldots,y_h).$$

Затем в $c(x)\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}$ заменяем x на $\varphi(y)$, dx_{i_1} на $d\varphi_{i_1}$ и т. д. Расписывая дифференциалы $d\varphi_{i_1},\ldots$ как линейные комбинации дифференциалов $dy_1,\ldots,dy_h$, получаем требуемую каноническую запись.

Выведем теперь равенство (2.9.4). Проведем вычисление для случая, когда

$$\omega=c(x)\,dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}\varphi^*(d\omega)&=\varphi^*(dc\wedge dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p})=\\&=d(c\circ\varphi)\wedge d\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\varphi_{i_p}=\\&=d((c\circ\varphi)\,d\varphi_{i_1}\wedge\ldots\wedge d\varphi_{i_p})=\\&=d(\varphi^*\omega),\ \text{ч. т. д.}\end{aligned}$$

Упражнение. Пусть $k=h=p$; дифференциальная форма ω степени p на $U\subset\mathbb{R}^p$ имеет вид

$$\omega=c(x)\,dx_1\wedge\ldots\wedge dx_p$$

(т. е. является одночленом) и отображение φ: $U'\to U$ определяется заданными p функциями от p переменных:

$$x_i=\varphi_i(y_1,\ldots,y_p).$$

Проверить, что

$$dx_1\wedge\ldots\wedge dx_p=J\,dy_1\wedge\ldots\wedge dy_p,$$

где J — *якобиан* преобразования φ:

$$J = \det\left(\left\{\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\right\}\right),$$

который мы будем часто обозначать через

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)}.$$

Таким образом, мы установили, что

$$\boxed{\varphi^*\omega = c(\varphi(y))\frac{\partial(x_1, \ldots, x_p)}{\partial(y_1, \ldots, y_p)}dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_p.} \tag{2.10.2}$$

2.11. Транзитивность замены переменных

Пусть E, E', E'' — банаховы пространства, U, U', U'' — открытые множества в E, E', E'' соответственно и

$$\varphi:\ U' \to U, \qquad \psi:\ U'' \to U'$$

— отображения класса C^{n+1}. Как известно, тогда $\varphi \circ \psi$: $U'' \to U$ — отображение класса C^{n+1}. Замена переменных определяет линейные отображения

$$\varphi^*:\ \Omega_p^{(n)}(U, F) \to \Omega_p^{(n)}(U', F),$$

$$\psi^*:\ \Omega_p^{(n)}(U', F) \to \Omega_p^{(n)}(U''. F).$$

Предложение 2.11.1. *Отображение*

$$(\varphi\circ\psi)^*:\ \Omega_p^{(n)}(U, F) \to \Omega_p^{(n)}(U'', F)$$

совпадает с композицией отображений φ^* *и* ψ^*:

$$\boxed{(\varphi\circ\psi)^* = \psi^*\circ\varphi^*.} \tag{2.11.1}$$

[Внимание: буквы φ и ψ стоят в левой и в правой частях равенства в различном порядке.]

Доказательство. Начнем со случая $p = 0$. В этом случае достаточно предполагать, что φ и ψ — отображения класса C^n. Равенство (2.11.1) означает, что для любого отображения f: $U \to E$ класса C^n

$$f\circ(\varphi\circ\psi) = (f\circ\varphi)\circ\psi,$$

что очевидно. В общем случае, пусть $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$. Для $y \in U'$ и $\eta_1, \ldots, \eta_p \in E'$ имеем

$$(\varphi^*\omega)(y; \eta_1, \ldots, \eta_p) = \omega(\varphi(y); \varphi'(y)\cdot\eta_1, \ldots, \varphi'(y)\cdot\eta_p).$$

Поэтому для $z \in U''$, $\xi_1, \ldots, \xi_p \in E''$

$$(\psi^* (\varphi^* (\omega))(z; \xi_1, \ldots, \xi_p) = \omega (\varphi (\psi (z)); \varphi' (\psi (z) \cdot \psi' (z) \cdot \xi_1 \ \ldots)). \tag{2.11.2}$$

Но

$$\varphi' (\psi (z)) \cdot \psi' (z) = (\varphi \circ \psi)' (z)$$

по теореме о дифференцировании сложной функции. Правая часть равенства (2.11.2) принимает, следовательно, вид

$$\omega ((\varphi \circ \psi) (z); (\varphi \circ \psi)' (z) \cdot \xi_1, \ldots, (\varphi \circ \psi)' (z) \cdot \xi_p), \quad \text{ч. т. д.}$$

2.12. Условия, при которых дифференциальная форма имеет вид $d\alpha$

Задача заключается в следующем: пусть дана дифференциальная форма

$$\omega: \quad U \to \mathcal{A}_p (E; F), \qquad p \geqslant 1.$$

При каких условиях существует дифференциальная форма α: $U \to \mathcal{A}_{p-1}(E; F)$, такая, что $d\alpha = \omega$?

Если потребовать, чтобы α была формой класса C^2, то ω *должна* быть формой класса C^1 и должно выполняться равенство $d\omega = 0$, так как $d(d\alpha) = 0$. Мы докажем частичное обращение этого утверждения при условии, что на открытое множество U наложены некоторые ограничения (см. определение ниже).

Определение. Подмножество U пространства E называется *звездным* относительно одной из своих точек a, если для любой другой точки $x \in U$ отрезок $[a, x]$, состоящий из точек вида $(1 - t)\, a + tx$ (где $0 \leqslant t \leqslant 1$), содержится в U. Очевидно, что всякое звездное множество *связно* и что всякое *выпуклое* множество звездно.

Теорема 2.12.1 (теорема Пуанкаре). *Пусть E и F — банаховы пространства и U — открытое подмножество в E, звездное относительно одной из своих точек. Если форма*

$$\omega \in \Omega_p^{(n)} (U, F) \qquad (n \geqslant 1, \ p \geqslant 1)$$

удовлетворяет условию $d\omega = 0$, то существует форма $\alpha \in \Omega_{p-1}^{(n)} (U, F)$ такая, что $d\alpha = \omega$.

Доказательство будет дано немного позднее. Напомним сначала, как обстоит дело для $p = 0$: если функция $f \in \Omega_0^1 (U, F)$ удовлетворяет равенству $df = 0$, то f *постоянна* на U, если U *связно* (и в частности, если U звездно).

Нам понадобится следующая лемма, которая не относится к теории дифференциальных форм.

Лемма 2.12.2 (о дифференцировании под знаком интеграла). *Пусть E и F — два банаховых пространства, I — отрезок* $[0, 1]$ *и*

$$\varphi:\quad U \times I \to F$$

— некоторое непрерывное отображение. Для $x \in U$ положим

$$\psi(x) = \int_0^1 \varphi(x, t)\, dt.$$

Тогда отображение ψ: $U \to F$ непрерывно. Если, кроме того, частная производная φ'_x существует во всех точках $(x, t) \in U \times I$ и определяет непрерывное отображение $U \times I \to \mathscr{L}(E; F)$, то ψ есть отображение класса C^1 и

$$\psi'(x) = \int_0^1 \varphi'_x(x, t)\, dt. \tag{2.12.1}$$

Доказательство. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Для каждой точки $(x, t) \in U \times I$ существует такое число $\eta(x, t)$, что

$$\|\varphi(x', t') - \varphi(x, t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } \|x' - x\| \leqslant \eta(x, t), \ |t' - t| \leqslant \eta(x, t).$$

В частности,

$$\|\varphi(x, t') - \varphi(x, t)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ при } |t' - t| \leqslant \eta(x, t).$$

Сравнивая два эти неравенства, получаем

$$\|\varphi(x', t') - \varphi(x, t')\| \leqslant \varepsilon \text{ при } \|x' - x\| \leqslant \eta(x, t),$$
$$|t' - t| \leqslant \eta(x, t).$$

Каждому числу $t \in I$ сопоставим открытый интервал, состоящий из всех таких чисел $t' \in I$, что

$$|t' - t| < \eta(x, t)$$

(x фиксировано). В силу своей компактности отрезок I покрывается *конечным* числом таких интервалов, например с центрами в точках t_i. Пусть $\eta(x)$ — наименьшее из чисел $\eta(x, t_i)$. Для любого $t' \in I$ существует t_i, такое, что $|t' - t_i| < \eta(x, t_i)$. Следовательно,

$$\|\varphi(x', t') - \varphi(x, t')\| \leqslant \varepsilon \text{ при } \|x' - x\| \leqslant \eta(x) \tag{2.12.2}$$

для любой точки $t' \in I$. Иначе говоря, функция φ непрерывна в точке x *равномерно по* t. Далее,

$$\psi(x') - \psi(x) = \int_0^1 (\varphi(x', t) - \varphi(x, t))\, dt,$$

откуда

$$\| \psi (x') - \psi (x) \| \leqslant \int_0^1 \| \varphi (x', t) - \varphi (x, t) \| \, dt,$$

так как норма от интеграла функции не превышает интеграла от нормы этой функции. Из равенства (2.11.2) вытекает, что

$$\| \psi (x') - \psi (x) \| \leqslant \int_0^1 \varepsilon \, dt = \varepsilon \quad \text{при} \quad \| x' - x \| \leqslant \eta (x).$$

Но это и означает, что функция ψ: $U \to F$ *непрерывна*.

Предположим теперь, что существует φ'_x и что отображение $U \times I \to \mathscr{L}(E; F)$ непрерывно. По только что доказанному функция

$$\lambda (x) = \int_0^1 \varphi'_x (x, t) \, dt$$

непрерывна. Остается доказать, что функция ψ дифференцируема и что $\psi'(x) = \lambda (x)$. Для этого нам надо показать, что при всяком фиксированном $x \in U$

$$\| \psi (x + h) - \psi (x) - \lambda (x) \cdot h \| = o (\| h \|). \tag{2.12.3}$$

Используя *непрерывность* отображения φ'_x, мы можем по любому $\varepsilon > 0$ найти такое $\eta > 0$ (зависящее от x), что

$$\| \varphi'_x (x + h, t) - \varphi'_x (x, t) \| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad \| h \| \leqslant \eta$$

для *любого* $t \in I$. Действительно, применим к φ'_x вместо φ соотношение (2.12.2). По теореме о конечных приращениях

$$\| \varphi (x + h, t) - \varphi (x, t) - \varphi'_x (x, t) \cdot h \| \leqslant \varepsilon \| h \| \quad \text{при} \quad \| h \| \leqslant \eta.$$

Поэтому для $\| h \| \leqslant \eta$

$$\| \psi (x + h) - \psi (x) - \lambda (x) \cdot h \| = \left\| \int_0^1 (\varphi (x + h, t) - \varphi (x, t) - \varphi'_x (x, t) \cdot h) \, dt \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \| \varphi (x + h, t) - \varphi (x, t) - \varphi'_x (x, t) \cdot h \| \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \varepsilon \| h \| \, dt = \varepsilon \| h \|,$$

т. е. имеет место (2.12.3). Лемма полностью доказана.

Следствие 2.12.3. *В предположениях предыдущей леммы, если n-я производная $\partial^n\varphi/\partial x^n$ существует и является непрерывной функцией $U \times I \to \mathscr{L}_n(E; F)$, то ψ есть функция класса C^n и*

$$\psi^{(n)}(x) = \int_0^1 \frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}(x, t)\,dt.$$

Это очевидным образом доказывается по индукции.

2.13. Доказательство теоремы Пуанкаре

Пусть U звездно относительно начала координат. Мы всегда можем свести дело к этому случаю при помощи сдвига. Докажем теорему 2.12.1 в случае $p = 1$ $(n \geqslant 1)$. Пусть

$$\omega \in \Omega_1^{(n)}(U, F)$$

есть 1-форма класса C^n. Положим

$$\boxed{f(x) = \int_0^1 \omega(tx; x)\,dt.} \tag{2.13.1}$$

Докажем прежде всего, что f: $U \to F$ — отображение класса C^n. Положим $\varphi(x, t) = \omega(tx; x)$. Согласно лемме 2.12.2 и следствию 2.12.3, достаточно показать, что для одного фиксированного t функция φ принадлежит к классу C^n и что отображения φ, $\varphi'_x, \ldots, \frac{\partial^n\varphi}{\partial x^n}$ произведения $U \times I$ в пространства F, $\mathscr{L}(E; F), \ldots$ $\ldots, \mathscr{L}_n(E; F)$ соответственно непрерывны. Для этого достаточно установить, что φ: $U \times I \to F$ — отображение класса C^n. Но φ есть композиция следующих отображений:

1) отображения $U \times I \to U \times E$, которое переводит (x, t) в (tx, x); определение корректно, так как множество U звездно *относительно* точки 0; это отображение класса C^∞;

2) отображения $U \times E \to \mathscr{L}(E; F) \times E$, которое переводит (x, ξ) в $(\omega(x), \xi)$; оно так же, как и ω, принадлежит к классу C^n;

3) отображения $\mathscr{L}(E; F) \times E \to F$, которое переводит (f, ξ) в $f(\xi)$; это — непрерывное билинейное отображение и, следовательно, отображение класса C^∞.

Таким образом, φ как композиция трех отображений класса C^n само принадлежит этому классу, и значит, функция f (определенная формулой (2.13.1)) есть функция класса C^n.

Предложение 2.13.1. *В предыдущих предположениях, если $d\omega = 0$, то $df = \omega$.* [Это — теорема Пуанкаре для $p = 1$.]

Доказательство. По лемме 2.12.2

$$f'(x)=\int_0^1 \varphi'_x(x,\ t)\,dt,$$

где $\varphi(x,\ t)=\omega(tx;\ x)=\omega(tx)\cdot x$. Вычисляя φ'_x как производную сложной функции, получаем, что для $\xi\in E$

$$\varphi'_x\cdot\xi=t\,(\omega'_x(tx)\cdot\xi)\cdot x+\omega(tx)\cdot\xi.$$

Предположение $d\omega=0$ означает, что $(\omega'_x\cdot\xi_1)\cdot\xi_2$ есть *симметрическая* билинейная функция от ξ_1 и ξ_2. Поэтому

$$\varphi'_x\cdot\xi=t\,(\omega'_x(tx)\cdot x)\cdot\xi+\omega(tx)\cdot\xi;$$

иначе говоря,

$$\varphi'_x=t\omega'_x(tx)\cdot x+\omega(tx).$$

Правая часть этого равенства, как нетрудно проверить, есть производная по t от функции

$$t\omega(tx).$$

Следовательно, функция

$$f'(x)=\int_0^1 \frac{d}{dt}(t\omega(tx))\,dt$$

равна $g(1)-g(0)$, где $g(t)=t\omega(tx)$, т. е.

$$f'(x)=\omega(x).$$

Но это и означает, что ω совпадает с дифференциальной формой df, ч. т. д.

Пример. Рассмотрим случай $E=\mathbb{R}^n$. В канонической записи

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} c_i(x)\,dx_i,$$

где $c_i: U\to F$ — функции класса C^n. Предположение $d\omega=0$ означает, что

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_j}=\frac{\partial c_j}{\partial x_i}\quad \text{для}\quad 1\leqslant i,\ j\leqslant n.$$

Равенство (2.13.1) дает функцию

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1 x_i c_i(tx)\,dt.$$

Это функция класса C^n и $df=\omega$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=c_i\quad \text{для}\quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

Теперь докажем *теорему Пуанкаре в общем случае* (для произвольного p). Определим для данного p линейное отображение

$$k\colon \Omega_p^{(n)}(U, F) \to \Omega_{p-1}^{(n)}(U, F)$$

следующим образом: для $p=0$ положим $k(f)=0$ для любой функции $f \in \Omega_0^{(n)}(U, F)$; это равносильно соглашению, что векторное пространство $\Omega_{-1}^{(n)}(U, F)$ сводится к нулю. Для $p \geqslant 1$ и $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$ определим $k(\omega)$ как дифференциальную форму $\alpha \in \Omega_{p-1}^{(n)}(U, F)$, задаваемую равенством

$$\boxed{\alpha(x; \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) = \int_0^1 t^{p-1}\omega(tx; x, \xi_1, \ldots, \xi_p)\,dt.} \tag{2.13.2}$$

Естественно, прежде всего надо проверить, что это действительно дифференциальная $(p-1)$-форма $\alpha\colon U \to \mathscr{A}_{p-1}(E; F)$ класса C^n. Это делается так же, как и для $p=1$. Обозначим через $\omega(tx; x)$ знакопеременное $(p-1)$-линейное отображение

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \to \omega(tx; x, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1}).$$

Правая часть равенства (2.13.2), рассматриваемая как знакопеременная полилинейная функция от $\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}$, есть

$$\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx; x)\,dt.$$

Иначе говоря, это элемент $\alpha(x) \in \mathscr{A}_{p-1}(E; F)$. Для того чтобы убедиться в том, что α принадлежит классу C^n, достаточно в силу леммы 2.12.2 и следствия 2.12.3 показать, что отображение

$$(x, t) \to t^{p-1}\omega(tx; x)$$

принадлежит классу C^n. Но это снова композиция трех отображений:

1) отображения $U \times I \to U \times I \times E$, которое переводит (x, t) в (tx, t, x); определение корректно, так как U звездно относительно начала координат; это — отображение класса C^∞;

2) отображения $U \times I \times E \to \mathscr{A}_p(E; F) \times E$, которое переводит (x, t, ξ) в $(t^{p-1}\omega(x), \xi)$; как и ω, оно принадлежит классу C^n;

3) отображения $\mathscr{A}_p(E; F) \times E \to \mathscr{A}_{p-1}(E; F)$, которое переводит (f, ξ) в следующий элемент пространства $\mathscr{A}_{p-1}(E; F)$:

$$(\xi_1, \ldots, \xi_{p-1}) \to f(\xi, \xi_1, \ldots, \xi_{p-1});$$

это отображение класса C^∞.

Таким образом, формула (2.13.2) действительно определяет дифференциальную $(p-1)$-форму α класса C^n.

Предложение 2.13.2. *В предыдущих предположениях* (U *звездно*):

(a) *если* $\omega \in \Omega_p^{(n)}(U, F)$, $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, *то*

$$\boxed{d(k(\omega)) + k(d\omega) = \omega;} \tag{2.13.3}$$

(b) *если* $f \in \Omega_0^{(n)}(U, F)$, $n \geqslant 1$, *то*

$$\boxed{k(df) = f - f_0,} \tag{2.13.4}$$

где f_0 — *постоянная функция* $U \to F$, *значение которой равно* $f(0)$.

Прежде чем доказывать это предложение, покажем, как из него следует теорема Пуанкаре 2.12.1. Если $d\omega = 0$, то (2.13.3) дает

$$\omega = d(k(\omega)).$$

Таким образом, оператор k порождает форму $k(\omega) = \alpha$, такую, что $d\alpha = \omega$. Заметим еще, что из (b) заново вытекает, что если $df = 0$, то функция f постоянна.

Доказательство. Утверждение (b) очевидно. Действительно, форма $k(df)$ есть функция

$$x \to \int_0^1 (f'(tx) \cdot x)\, dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(tx)) = f(x) - f(0).$$

Остальная часть доказательства может быть пропущена той частью читателей, которая страшится вычислений. Мы приводим ее для более любознательных читателей. Обратимся к утверждению (a) ($p \geqslant 1$). Напомним, что $(d\omega)(x; \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_p) = (\omega'(x) \cdot \xi_0)(\xi_1, \ldots, \xi_p) +$

$$+ \sum_{i=1}^{p} (-1)^i (\omega'(x) \cdot \xi_i) \cdot (\xi_0, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p). \tag{2.13.5}$$

Отсюда

$$d(\omega)(tx; x, \xi_1, \ldots, \xi_p) = (\omega'(tx) \cdot x) \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_p) + \\ + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i (\omega'(tx) \cdot \xi_i) \cdot (x, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p).$$

Следовательно, форма $k(d\omega) = \beta$ задается равенством

$$\beta(x; \xi_1, \ldots, \xi_p) = \int_0^1 t^p (\omega'(tx) \cdot x) \cdot (\xi_1, \ldots, \xi_p)\, dt + \\ + \sum_{i=1}^{p} (-1)^i \int_0^1 t^p (\omega'(tx) \cdot \xi_i) \cdot (x, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p)\, dt. \tag{2.13.6}$$

С другой стороны, дифференциальная $(p-1)$-форма $k(\omega)=\alpha$ задается равенством (2.13.2). Дифференцируя под знаком интеграла, получаем

$$(\alpha'(x)\cdot\xi_1)\cdot(\xi_2, \ldots, \xi_p)=\int_0^1 t^p(\omega'(tx)\cdot\xi_1)\cdot(x, \xi_2, \ldots, \xi_p)\,dt+$$
$$+\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)\,dt, \qquad (2.13.7)$$

откуда

$$(d\alpha)(x; \xi_1, \ldots, \xi_p)=$$
$$=\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}\int_0^1 t^p(\omega'(tx)\cdot\xi_i)\cdot(x, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p)dt+$$
$$+\sum_{i=1}^{p}(-1)^{i-1}\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx; \xi_i, \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_i, \ldots, \xi_p)\,dt. \qquad (2.13.8)$$

Поскольку ω — *знакопеременная* функция от $\xi_1, \ldots, \xi_p$, второе слагаемое в правой части равенства равно

$$p\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx; \xi_1, \ldots, \xi_p)\,dt.$$

Теперь мы в состоянии вычислить левую часть равенства (2.13.3). В наших обозначениях дифференциальная форма $d(k(\omega))+k(d\omega)$ равна $d\alpha+\beta$. Складывая почленно равенства (2.13.6) и (2.13.8) и приводя подобные члены, получаем

$$\beta(x; \xi_1, \ldots, \xi_p)+d\alpha(x; \xi_1, \ldots, \xi_p)=$$
$$=\int_0^1 t^p(\omega'(tx)\cdot x)\cdot(\xi_1, \ldots, \xi_p)\,dt+p\int_0^1 t^{p-1}\omega(tx; \xi_1, \ldots, \xi_p)\,dt,$$

что более просто можно записать так:

$$\beta(x)+d\alpha(x)=\int_0^1 [t^p(\omega'(tx)\cdot x)+pt^{p-1}\omega(tx)]\,dt \qquad (2.13.9)$$

[равенство между элементами пространства $\mathscr{A}_p(E; F)$]. Но

$$t^p(\omega'(tx)\cdot x)+pt^{p-1}\omega(tx)=\frac{d}{dt}(t^p\omega(tx)),$$

поэтому правая часть равенства (2.13.9) равна разности значений функции $t^p\omega(tx)$ при $t=1$ и при $t=0$. А это и есть $\omega(x)$. Тем самым равенство (2.13.3) доказано.

Таким образом, мы доказали предложение 2.13.2, а с ним и теорему Пуанкаре.

Пример. Рассмотрим случай $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}$. Пусть

$$\alpha = P\,dx + Q\,dy + P\,dz$$

— дифференциальная форма класса C^n, $n \geqslant 1$, так что P, Q, R суть действительные функции класса C^n на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^3$. Имеем

$$d\alpha = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Функции P, Q, R можно рассматривать как координаты *векторного поля* на U (т. е. как отображение $U \to \mathbb{R}^3$). Поле

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

называется *вихрем* (*ротацией*, *ротором*) поля (P, Q, R). Обратно, пусть задана 2-форма

$$\omega = A\,dy \wedge dz + B\,dz \wedge dx + C\,dx \wedge dy$$

класса C^n. При каких условиях на поле (A, B, C) существует поле (P, Q, R) класса C^n, для которого (A, B, C) является вихрем? При том условии, что существует 1-форма α класса C^n, для которой $d\alpha = \omega$. Для этого *необходимо* (во всяком случае при $n \geqslant 2$), чтобы $d\omega = 0$. Теорема Пуанкаре утверждает, что этого и *достаточно*, если U — *звездное* множество. Поскольку

$$d\omega = \left(\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz,$$

то условие $d\omega = 0$ означает, что функция

$$\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z},$$

называемая *дивергенцией* поля (A, B, C), тождественно равна нулю.

§ 3. КРИВОЛИНЕЙНЫЙ ИНТЕГРАЛ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМЫ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

Всюду в дальнейшем символ U будет обозначать открытое подмножество банахова пространства E (интересен случай, когда $E = \mathbb{R}^n$ или $E = \mathbb{C}^n$).

3.1. Пути класса C^1

Мы уже определили (см. ч. I, гл. 1, п. 3.3) понятие *пути* в топологическом пространстве X. Сейчас у нас $X = U$, и путь в U есть *непрерывное* отображение

$$\gamma\colon\ [a, b] \to U,$$

где $[a, b]$ — компактный интервал $a \leqslant t \leqslant b$ действительной прямой $\mathbb{R}$. [В п. 3.3 мы рассматривали лишь пути, параметризованные с помощью отрезка $[0, 1]$.]

Определение. Путь γ называется *путем класса* C^1, если отображение γ принадлежит классу C^1, иначе говоря, если γ обладает производной $\gamma'(t)$, непрерывно зависящей от $t \in [a, b]$.

[З а м е ч а н и е. Строго говоря, понятие отображения класса C^1 имеет смысл лишь для отображений, определенных на *открытом* подмножестве банахова пространства. Поэтому в нашем случае надо было бы рассматривать отображения, определенные на *открытом* интервале в $\mathbb{R}$. Для *замкнутого* интервала $[a, b]$ производная $\gamma'(a)$ будет по определению правой производной отображения γ в точке a, а $\gamma'(b)$ — левой производной в точке b. Нетрудно видеть, что если γ: $[a, b] \to U$ путь класса C^1 в этом новом смысле, то существуют такой *открытый* интервал I, содержащий $[a, b]$, и такое отображение γ_1: $I \to U$ класса C^1, что γ есть его сужение.]

Определение. Путь γ: $[a, b] \to U$ называется *кусочно гладким класса* C^1, если существует такое конечное разбиение отрезка $[a, b]$ с помощью точек

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b, \tag{3.1.1}$$

что сужение γ на любой отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ $(0 \leqslant i < n)$ есть путь класса C^1.

Таким образом, левая производная $\gamma'_{\text{л}}(t_i)$ и правая производная $\gamma'_{\text{п}}(t_i)$ $(0 < i < n)$ обе существуют, но не обязательно равны. Разумеется, для кусочно гладкого пути класса C^1 может существовать много разбиений с указанным свойством. Если одно из них задается точками (3.1.1), а другое — точками

$$a = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_p = b, \tag{3.1.2}$$

то можно сопоставить им третье разбиение, про которое говорят, что оно получено *наложением двух данных разбиений*:

$$a = t''_0 < t''_1 < \ldots < t''_q = b. \tag{3.1.3}$$

По определению, этот набор чисел есть объединение наборов

$$(t''_0, \ldots, t''_q) \quad \text{и} \quad (t_0, \ldots, t_n) \quad [\text{так что } q \leqslant n + p - 1].$$

3.2. Криволинейный интеграл

Пусть ω — дифференциальная форма степени 1 и класса C^0 на U со значениями в F. Иначе говоря, ω есть *непрерывное* отображение

$$\omega\colon \quad U \to \mathscr{L}(E; F).$$

Для $x \in U$ мы будем, как и раньше, обозначать через $\omega(x) \cdot \xi$ или $\omega(x; \xi)$ значение отображения $\omega(x) \in \mathscr{L}(E; F)$ на элементе $\xi \in E$; это значение есть элемент банахова пространства F.

Определение *интеграла* $\int\limits_\gamma \omega$ *для пути* γ: $[a, b] \to U$ *класса* C^1 *в* U:

$$\int\limits_\gamma \omega = \int\limits_a^b f(t)\, dt, \tag{3.2.1}$$

где $f(t)\,dt$ — дифференциальная форма $\gamma^*(\omega)$, т. е. дифференциальная форма на $[a, b]$, получающаяся из формы ω с помощью замены переменных γ класса C^1. Функция $t \to f(t)$ непрерывна, и по определению замены переменных (см. п. 2.8)

$$f(t) = \omega(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \tag{3.2.2}$$

(где $\gamma'(t)$ рассматривается как элемент пространства E, в котором лежит U). В правой части равенства (3.2.1) стоит обычный интеграл (в смысле Коши — Римана) от *непрерывной* функции по компактному интервалу.

В силу классических свойств интеграла для фиксированного пути γ (класса C^1) $\int\limits_\gamma \omega$ есть *линейная* функция от ω. Далее, если задано разбиение (3.1.1) отрезка $[a, b]$ и γ_i — путь, получающийся сужением γ на отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ $(0 \leqslant i < n)$, то

$$\int\limits_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{\gamma_i} \omega \tag{3.2.3}$$

по той простой причине, что

$$\int\limits_a^b f(t)\, dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} f(t)\, dt.$$

Мы хотим теперь определить $\int\limits_\gamma \omega$ в случае, когда γ — *кусочно гладкий путь* класса C^1. Выберем разбиение (3.1.1) так, чтобы сужение γ_i пути γ на отрезок $[t_i, t_{i+1}]$ было путем класса C^1 для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Положим *по определению*

$$\int\limits_\gamma \omega = \sum_i \int\limits_{\gamma_i} \omega$$

(правая часть равенства уже имеет смысл). Для корректности этого определения нам надо проверить, что 1) значение правой части не зависит от выбора разбиения и что 2) в том частном случае, когда γ — путь класса C^1, это новое определение $\int\limits_{\gamma}\omega$ совпадает с прежним.

Очевидно, что если 1) уже установлено, то 2) следует из соотношения (3.2.3). Докажем утверждение 1). Рассмотрим какое-нибудь другое разбиение (3.1.2), для которого сужение γ на любой отрезок $[t'_j, t'_{j+1}]$ есть путь класса C^1 $(0 \leqslant j < p)$. Образуем разбиение (3.1.3), получающееся наложением разбиений. Обозначим через $\bar{\gamma}_j$ сужение γ на $[t'_j, t'_{j+1}]$ и через $\bar{\bar{\gamma}}_k$ — сужение γ на $[t''_k, t''_{k+1}]$. Рассмотрим сумму

$$\sum_{k=0}^{q-1}\int\limits_{\bar{\bar{\gamma}}_k}\omega.$$

Ясно, что сгруппировав члены подходящим образом, мы получим

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{\gamma_i}\omega,$$

а сгруппировав их другим способом, получим

$$\sum_{j=0}^{p-1}\int\limits_{\bar{\gamma}_j}\omega.$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{n-1}\int\limits_{\gamma_i}\omega=\sum_{j=0}^{p-1}\int\limits_{\bar{\gamma}_j}\omega,$$

и корректность данного нами определения установлена.

Замечание. В предыдущих предположениях имеем

$$\gamma_i^*(\omega)=f_i(t)\,dt,$$

где f_i — непрерывная функция на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$. Набор f_i определяет функцию f на $[a, b]$ всюду, за возможным исключением точек t_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, где f терпит разрывы. Короче, f есть то, что называется *кусочно непрерывной* функцией, и $\int\limits_{\gamma}\omega$ равен интегралу $\int\limits_a^b f(t)\,dt$ от кусочно непрерывной функции f. Используя это понятие, мы можем сказать, что если γ — кусочно гладкий путь класса C^1, то форма $\gamma^*(\omega)$ имеет вид $f(t)\,dt$, где f — кусочно непрерывная функция (значения которой в точках разрыва не определены). Таким образом, равенство (3.2.1), служащее определением $\int\limits_\gamma \omega$, когда γ — путь класса C^1, может служить определением этого интеграла и тогда, когда γ — кусочно гладкий путь класса C^1.

3.3. Замена параметра

Пусть $\varphi\colon [a', b'] \to [a, b]$ — некоторый C^1-*диффеоморфизм* отрезка $[a', b']$ на отрезок $[a, b]$. Производная $\varphi'(u)$ везде отлична от нуля и, следовательно, сохраняет знак. Возможны два случая:

1) $\varphi'(u) > 0$ для любого u; тогда $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$;

2) $\varphi'(u) < 0$ для любого u; тогда $\varphi(a') = b$, $\varphi(b') = a$.

В первом случае говорят, что φ *сохраняет* ориентацию, во втором случае — что φ *меняет* (или *обращает*) ориентацию.

Заметим, что если $\gamma\colon [a, b] \to U$ — кусочно гладкий путь класса C^1, то

$$\gamma\circ\varphi\colon\ [a', b'] \to U$$

есть кусочно гладкий путь класса C^1. Говорят, что путь $\gamma\circ\varphi$ получается из пути γ *заменой параметра* φ.

Предложение 3.3.1. *В предыдущих обозначениях*

$$\int\limits_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int\limits_\gamma \omega, \quad \textit{если } \varphi \textit{ сохраняет ориентацию}, \tag{3.3.1}$$

$$\int\limits_{\gamma\circ\varphi} \omega = -\int\limits_\gamma \omega, \quad \textit{если } \varphi \textit{ обращает ориентацию}. \tag{3.3.2}$$

Доказательство достаточно провести для случая, когда γ — путь класса C^1. Действительно, общий случай сводится к этому частному: если мы разобьем отрезок $[a, b]$ на куски и рассмотрим прообраз этого разбиения относительно φ, то получим разбиение отрезка $[a', b']$. Предположим поэтому, что γ — путь класса C^1. По определению

$$\int\limits_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int\limits_{a'}^{b'} (\gamma\circ\varphi)^*\omega.$$

Но (по предложению 2.11.1) $(\gamma\circ\varphi)^*\omega = \varphi^*(\gamma^*\omega)$. Положив

$$\gamma^*\omega = f(t)\,dt,$$

получим

$$\varphi^*(\gamma^*\omega) = f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du,$$

откуда

$$\int_{\gamma\circ\varphi} \omega = \int_{a'}^{b'} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du.$$

Если φ сохраняет ориентацию, то $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$ и классическая формула замены переменных в определенном интеграле (см. ниже) дает

$$\int_{a'}^{b'} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = \int_{a}^{b} f(t)\,dt,$$

чем и доказано равенство (3.3.1). Если же φ меняет ориентацию, то $\varphi(a') = b$, $\varphi(b') = a$ и та же формула дает

$$\int_{a'}^{b'} f(\varphi(u))\,\varphi'(u)\,du = \int_{b}^{a} f(t)\,dt = -\int_{a}^{b} f(t)\,dt,$$

чем доказано (3.3.2).

Замечание. Ниже мы напомним доказательство формулы замены переменных в определенном интеграле (см. замечание после следствия 3.4.2).

3.4. Случай, когда ω — дифференциал функции

Пусть g: $U \to F$ — отображение класса C^1. Возьмем в качестве формы ω дифференциал dg.

Предложение 3.4.1. *Если γ: $[a, b] \to U$ — кусочно гладкий путь класса C^1, то*

$$\boxed{\int_{\gamma} dg = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).} \tag{3.4.1}$$

[Правая часть есть разность значений функции g в конце и начале пути γ.]

Доказательство. Достаточно ограничиться случаем, когда γ — путь класса C^1, ибо общий случай сводится к этому при помощи надлежащего разбиения отрезка $[a, b]$. По определению

$$\int_{\gamma} dg = \int_{a}^{b} \gamma^*(dg) = \int_{a}^{b} d(\gamma^*(g)) = \int_{a}^{b} d(g\circ\gamma).$$

Пусть $g \circ \gamma = h$. Тогда h: $[a, b] \to F$ — функция класса C^1. Имеем $dh = h'(t)\, dt$. Отсюда следует, что

$$\int_\gamma dg = \int_a^b h'(t)\, dt.$$

Как известно, правая часть равна $h(b) - h(a)$. [Напомним доказательство этого факта. Так как h' — непрерывная функция, то

$$\int_a^\tau h'(t)\, dt$$

есть функция от τ, производная от которой равна $h'(\tau)$; поэтому функция

$$\int_a^\tau h'(\tau)\, dt - h(\tau)$$

постоянна (как функция, производная которой равна нулю) и, следовательно, принимает одинаковые значения при $\tau = a$ и $\tau = b$, так что

$$\int_a^b h'(t)\, dt = h(b) - h(a).]$$

Заменяя здесь h на $g \circ \gamma$, получаем искомую формулу (3.4.1).

Следствие 3.4.2. *Если ω — дифференциал функции g, принадлежащей классу C^1, то интеграл $\int_\gamma \omega$ зависит только от начала $\gamma(a)$ и конца $\gamma(b)$ пути γ.*

Замечание. Всякая непрерывная функция f: $[a, b] \to F$ равна производной h' от функции h, определяемой формулой

$$h(t) = \int_a^t f(u)\, du.$$

При замене переменных φ: $[a', b'] \to [a, b]$ класса C^1, для которой $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$, имеем

$$\int_a^b f(t)\, dt = h(b) - h(a) = h(\varphi(b')) - h(\varphi(a')) = \int_{a'}^{b'} (h \circ \varphi)'(u)\, du.$$

Но $(h \circ \varphi)'(u) = h'(\varphi(u)) \circ \varphi'(u) = f(\varphi(u)) \circ \varphi'(u)$. Таким образом, мы доказали формулу замены переменных, использованную в п. 3.3.

Определение. Пусть задана 1-форма ω: $U \to \mathcal{L}(E; F)$. *Примитивной функцией* формы ω называется любая функция f: $U \to F$ класса C^1, такая, что $df = \omega$.

В общем случае дифференциальная форма первой степени не имеет примитивной функции (см. п. 2.12). Если множество U связно, то разность двух примитивных f_1 и f_2 формы ω есть постоянная функция, ибо $d(f_1 - f_2) = 0$.

Прежде чем формулировать следующую теорему, введем соответствующую терминологию. *Цикл* — это путь, у которого начало и конец совпадают. *Ломаный цикл* — это цикл, представляющий собой ломаную линию (см. ч. I, гл. 1, п. 3.3).

Теорема 3.4.3. *Пусть U — открытое связное подмножество банахова пространства E. Для дифференциальной формы ω: $U \to \mathcal{L}(E; F)$ класса C^0 следующие свойства эквивалентны:*

(a) ω *имеет примитивную функцию на* U;

(b) $\int\limits_\gamma \omega = 0$ *для любого кусочно гладкого цикла γ в U класса C^1*;

(c) $\int\limits_\gamma \omega = 0$ *для любого ломаного цикла γ в U.*

Если множество U звездно относительно точки $x_0 \in U$, то предыдущие условия эквивалентны следующему:

(d) $\int\limits_\gamma \omega = 0$ *для любого треугольника γ в U,*

одна из вершин которого совпадает с вершиной в x_0.

Пояснения к (d). Под треугольником с вершиной x_0 мы понимаем периметр треугольника, то есть цикл с началом и концом в x_0, который образуют три стороны треугольника. Мы предполагаем, что стороны треугольника лежат в U, но не предполагаем, что там же лежит часть плоскости, которую они ограничивают.

Доказательство. Условие (b) следует из (a) в силу предложения 3.4.1. Действительно, если в этом предложении положим $\gamma(b) = \gamma(a)$, то получим $\int\limits_\gamma dg = 0$.

То, что из (b) следует (c), очевидно: ломаный цикл — это частный случай кусочно гладкого цикла. Докажем, что из (c) следует (a); отсюда будет следовать эквивалентность (a), (b) и (c). Пусть условие (c) выполнено. Выберем какую-нибудь точку $x_0 \in U$. Любую точку $x \in U$ можно соединить с точкой x_0 ломаной линией γ, лежащей в U, так как множество U связно (см. ч. I, гл. 1, предложение 3.3.5). Для данной точки x интеграл $\int\limits_\gamma \omega$ не зависит от выбора γ:

если γ_1 и γ_2 — две ломаные, соединяющие x_0 с x, то разность

$$\int\limits_{\gamma_1}\omega-\int\limits_{\gamma_2}\omega$$

равна интегралу от ω вдоль цикла, получаемого прохождением сначала пути γ_1 в прямом направлении, а затем пути γ_2 в обратном направлении, т. е. равна нулю в силу (c). Пусть $f(x)$ — общее значение интегралов $\int\limits_{\gamma}\omega$ вдоль всех путей, соединяющих x_0 с x. Покажем, что так определенная функция $f\colon U\to F$ имеет производную $f'(x)$, равную ω, откуда и будет следовать (a).

Пусть $[x, x+h]$ — прямолинейный отрезок, соединяющий точки x и $x+h$. Он содержится в U, если норма $\|h\|$ достаточно мала. Это следует из того, что множество U открыто и, значит, содержит некоторый шар с центром в x. Обозначим через

$$\int\limits_{x}^{x+h}\omega$$

интеграл от ω вдоль этого отрезка. Имеем

$$f(x+h)=f(x)+\int\limits_{x}^{x+h}\omega, \tag{3.4.2}$$

так как если соединить ломаной линией x_0 с x, а затем x с $x+h$ прямолинейным отрезком $[x, x+h]$, то мы получим ломаную линию, соединяющую x_0 с $x+h$.

Для вычисления интеграла $\int\limits_{x}^{x+h}\omega$ произведем замену переменных

$$\gamma(t)=x+th \qquad (0\leqslant t\leqslant 1).$$

Используя (3.2.2), находим

$$f(x+h)-f(x)=\int\limits_{0}^{1}g(t)\,dt, \tag{3.4.3}$$

$$g(t)=\omega(x+th)\cdot h. \tag{3.4.4}$$

Поскольку отображение $\omega\colon U\to\mathscr{L}(E;F)$ непрерывно, для любого $\varepsilon>0$ можно найти такое $\eta>0$, что

$$\|\omega(x+th)-\omega(x)\|\leqslant\varepsilon \quad \text{при} \quad \|h\|\leqslant\eta,$$

каково бы ни было $t\in[0, 1]$. Отсюда следует, что

$$\|g(t)-g(0)\|\leqslant\varepsilon\|h\| \quad \text{при} \quad \|h\|\leqslant\eta$$

для любого $t \in [0, 1]$. Так как

$$f(x+h)-f(x)-\omega(x)\cdot h=\int_0^1 (g(t)-g(0))\,dt,$$

то

$$\| f(x+h)-f(x)-\omega(x)\cdot h \| \leqslant \varepsilon \| h \| \quad \text{при} \quad \| h \| \leqslant \eta,$$

откуда

$$\| f(x+h)-f(x)-\omega(x)\cdot h \| = o(\| h \|),$$

а это и означает, что функция f дифференцируема, причем производная $f'(x)$ равна $\omega(x)$. Этим завершается доказательство импликации (c) $\Rightarrow$ (a).

Предположим теперь, что множество U *звездно* относительно точки x_0. Очевидно, из (c) следует (d), и если мы покажем, что из (d) следует (a), то мы докажем эквивалентность условий (a), (b), (c) условию (d). Так как множество U звездно, то мы можем *определить* функцию f равенством

$$f(x)=\int_{x_0}^{x} \omega, \tag{3.4.5}$$

где интеграл берется по прямолинейному отрезку, соединяющему x_0 с x. Для достаточно малых $\| h \|$ имеем

$$f(x+h)-f(x)=\int_{x}^{x+h} \omega,$$

где интеграл берется по отрезку, соединяющему x с $x+h$. Используя свойство (d), как и выше, получаем, что функция f дифференцируема, $f'=\omega$, чем и доказано (a).

Тем самым доказательство теоремы 3.4.3 закончено.

Замечание. Пусть множество U звездно относительно начала координат. Тогда формула (3.4.5) (с $x_0=0$) дает

$$f(x)=\int_0^1 (\omega(tx)\cdot x)\,dt, \tag{3.4.6}$$

а это не что иное, как формула (2.13.1), которую мы использовали для доказательства теоремы Пуанкаре. Таким образо, эта формула справедлива (в случае множеств U, звездных относительно точки 0) для *любой дифференциальной формы* ω *класса* C^0, *обладающей примитивной*. [В теореме Пуанкаре мы предполагали, что ω — форма класса C^1, и доказывали, что если $d\omega=0$, то ω обладает примитивной функцией. Обратно, если ω — форма класса C^1, обладающая примитивной функцией f, то f принадлежит классу C^2 и $d(df)=0$, т. е. $d\omega=0$.]

3.5. Замкнутые дифференциальные формы первой степени

Определение. Дифференциальная 1-форма ω: $U \to \mathscr{L}(E, F)$ (где U — открытое подмножество банахова пространства E) называется *замкнутой*, если у любой точки $x_0 \in U$ существует открытая окрестность V, в которой ω обладает *примитивной* функцией. Короче говоря, мы требуем, чтобы ω *локально обладала примитивной функцией.*

Предложение 3.5.1. *Для того чтобы дифференциальная форма ω была замкнутой, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $x_0 \in U$ обладала такой открытой окрестностью V, звездной относительно x_0, что*

$$\int_{\gamma} \omega = 0 \tag{3.5.1}$$

для любого треугольника γ, содержащегося в V. [Короче говоря, интеграл (3.5.1) должен обращаться в нуль *на любом достаточно малом треугольнике*, лежащем в U.]

Это сразу следует из определения и из свойства (d) теоремы 3.4.3.

Теорема 3.5.2. *Пусть ω — форма класса C^1. Тогда для того чтобы эта форма была замкнута, необходимо и достаточно, чтобы $d\omega = 0$.*

Действительно, мы только что видели, что в звездной открытой области условие $d\omega = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы форма ω класса C^1 обладала примитивной функцией.

Напомним, что если U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, то форма ω записывается в виде

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} c_i(x)\, dx_i,$$

где коэффициенты c_i суть функции класса C^1. Условие $d\omega = 0$ выражается в этом случае равенствами

$$\frac{\partial c_i}{\partial x_j} = \frac{\partial c_j}{\partial x_i}.$$

Таким образом, выполнение этих равенств является необходимым и достаточным условием для того, чтобы форма ω была замкнутой, т. е. *локально* обладала примитивной функцией.

Внимание! Замкнутая 1-форма ω на открытом множестве $U \subset E$ (даже если она класса C^0) не всегда обладает примитивной функцией на всем U (см., однако, теорему 3.8.1). Например, пусть $E = \mathbb{C}$ и

$$U = \mathbb{C} - \{0\}$$

— дополнение к нулевой точке. Обозначим через z комплексную координату точки на $\mathbb{C}$. Это функция на U, нигде не обращающаяся в нуль. Положим

$$\omega = \frac{1}{z} dz.$$

Это дифференциальная 1-форма класса C^∞ на U. Она *замкнута*, ибо

$$d\omega = d\left(\frac{1}{z}\right) \wedge dz = -\frac{1}{z^2} dz \wedge dz = 0,$$

поскольку $dz \wedge dz = 0$. Для того чтобы установить, что ω не обладает примитивной на U, достаточно показать, что не выполнено условие (a) теоремы 3.4.3. Сейчас мы укажем такой *цикл* γ на U, что $\int\limits_\gamma \omega \neq 0$. Это окружность радиуса 1 с центром в точке 0, состоящая из точек вида

$$z = e^{it} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi). \tag{3.5.2}$$

[Мы предполагаем, что читатель знаком с комплексной экспонентой.] Заменой переменных (3.4.7) форма $\omega = \left(\frac{1}{z}\right) dz$ приводится к виду

$$e^{-it}(ie^{it}\,dt) = i\,dt,$$

откуда

$$\int\limits_\gamma \frac{dz}{z} = \int\limits_0^{2\pi} i\,dt = 2\pi i \neq 0, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Положим $z = x + iy$. Тогда

$$\frac{dz}{z} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + i\,\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2},$$

так что

$$\int\limits_\gamma \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = 2\pi.$$

3.6. Примитивная от замкнутой формы вдоль пути

Пусть $\omega\colon U \to \mathscr{L}(E;\ F)$ — *замкнутая* дифференциальная 1-форма класса C^0.

Определение. Для любого пути $\gamma\colon [a,\ b] \to U$ (мы предполагаем, что этот путь *непрерывен*, но не обязательно кусочно гладок класса C^1) *примитивной функцией формы* ω *вдоль пути* γ называется всякая *непрерывная* функция

$$f\colon [a,\ b] \to F,$$

удовлетворяющая следующему условию: для любой точки $t_c \in [a, b]$ найдутся открытая окрестность V точки $\gamma(t_c)$ в U и примитивная функция F формы ω на V, такие, что

$$F(\gamma(t)) = f(t)$$

для всех точек $t \in [a, b]$, достаточно близких к t_0.

Замечание. В этом определении мы, конечно, предполагаем, что $V \subset U$ и что окрестность V *связна*, так что все примитивные функции формы ω на V имеют вид $F + \mathrm{const}$.

Теорема 3.6.1. *Если ω — замкнутая дифференциальная 1-форма на U и γ — непрерывный путь в U, то примитивная функция f формы ω вдоль пути γ существует и определена однозначно с точностью до аддитивной константы.*

Доказательство. Докажем сначала *единственность*. Пусть f_1 и f_2 — две примитивные функции. Для всякого $t_0 \in [a, b]$ существуют связная окрестность V точки $\gamma(t_0)$ и на V две примитивные функции F_1 и F_2 формы ω, такие, что

$$f_1(t) = F_1(\gamma(t)), \quad f_2(t) = F_2(\gamma(t))$$

для t, достаточно близких к t_0. Так как $F_2 - F_1 = \mathrm{const}$, то разность $f_2(t) - f_1(t)$ *постоянна в некоторой окрестности* t_0. Тем самым $f_2 - f_1$ есть функция, непрерывная на $[a, b]$ и *локально постоянная*. Так как $[a, b]$ — связное топологическое пространство, то $f_2 - f_1$ постоянна на $[a, b]$ (ч. I, гл. 1, лемма из п. 3.3).

Докажем теперь *существование* примитивной функции вдоль пути γ. По определению каждая точка t_0 содержится в некотором открытом (относительно $[a, b]$) интервале, на котором искомая примитивная функция существует. Так как интервал $[a, b]$ компактен, мы можем покрыть его конечным множеством интервалов. Упорядочим эти интервалы в последовательность $I_1, \ldots, I_n$ так, чтобы каждый интервал I_k пересекался с объединением предыдущих. По предположению на каждом интервале I_k существует примитивная функция f_k. Тогда в пересечении $I_2 \cap I_1$ разность $f_2 - f_1$ постоянна по уже доказанному свойству единственности. Вычитая из f_2 константу, можно добиться того, чтобы $f_2 = f_1$ на $I_1 \cap I_2$. Пусть g_2 — функция на интервале $I_1 \cup I_2$, равная f_1 на I_1 и f_2 на I_2. Она является примитивной функцией на $I_1 \cup I_2$. Далее, на $(I_1 \cup I_2) \cap I_3$ функция $f_3 - g_2$ постоянна. Вычитая из f_3 константу, мы можем добиться того, чтобы $f_3 = g_2$ на $(I_1 \cup I_2) \cap I_3$, а это даст нам примитивную функцию g_3 на $I_1 \cup I_2 \cup I_3$. Продолжая этот процесс, мы получим примитивную функцию на $[a, b]$. Тем самым теорема доказана.

Замечание 1. Если отображение γ *постоянно*, то, очевидно, что всякая примитивная функция f вдоль γ есть *константа*.

Замечание 2. Пусть в предыдущей теореме γ — путь класса C^1, и пусть

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

— такое разбиение отрезка $[a, b]$, что на каждом интервале $[t_i, t_{i+1}]$

$$f(t) = F_i(\gamma(t)) \quad \text{при } t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1},$$

где F_i — примитивная функция формы ω на открытой окрестности $V_i \subset U$ (такой, что $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subset V_i$). Имеем

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\gamma_i} \omega,$$

где γ_i — сужение γ: $[a, b] \to U$ на $[t_i, t_{i+1}]$. Поскольку $\omega = dF_i$ на V_i, то $\gamma^*(\omega) = d(\gamma^* F_i) = df$. Отсюда следует, что

$$\int_{\gamma_i} \omega = \int_{t_i}^{t_{i+1}} df = f(t_{i+1}) - f(t_i).$$

Окончательно

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n-1} (f(t_{i+1}) - f(t_i)) = f(b) - f(a).$$

Этот результат верен не только для путей класса C^1, но и для кусочно гладких путей класса C^1: берем соответствующее разбиение и применяем уже полученный результат к каждому куску. Таким образом, справедливо

Предложение 3.6.2. *Пусть γ — кусочно гладкий путь класса C^1, ω — замкнутая форма и f — примитивная функция формы ω вдоль пути γ. Тогда*

$$\boxed{\int_\gamma \omega = f(b) - f(a).} \tag{3.6.1}$$

В общем случае, когда путь γ лишь *непрерывен*, *примитивная* функция существует и единственна с точностью до аддитивной константы (теорема 3.6.1). Следовательно, выражение $f(b) - f(a)$ имеет смысл. Это дает возможность *определить* интеграл $\int_\gamma \omega$ от *замкнутой* 1-формы ω как разность $f(b) - f(a)$ значений в точках a и b примитивной функции f формы ω вдоль пути γ. Если путь γ является постоянным, то $\int_\gamma \omega = 0$. Если γ — кусочно гладкий путь, это новое определение, согласно предложению 3.6.2, совпадает со старым. Но старое определение годится и тогда, когда форма ω не замкнута; не идет и речи о том, чтобы определить *интеграл* $\int\limits_\gamma \omega$ *в случае, когда форма* ω *незамкнута, а путь* γ *предполагается лишь непрерывным.*

3.7. Гомотопия двух путей

Для простоты мы будем рассматривать лишь непрерывные пути, параметризованные с помощью отрезка $[0, 1]$ (мы можем всегда прийти к этому случаю, заменив параметр).

Определение. Два пути

$$\gamma_0\colon [0, 1] \to U, \qquad \gamma_1\colon [0, 1] \to U$$

называются *гомотопными*, если существует такое *непрерывное* отображение δ квадрата

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

(компактного подмножества действительной плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами t и u) в множество U, что

$$\delta(t, 0) = \gamma_0(t), \quad \delta(t, 1) = \gamma_1(t) \quad \text{для} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{3.7.1}$$

Отображение δ называется *гомотопией* пути γ_0 в γ_1. Ясно, что каждая точка $u \in [0, 1]$ определяет путь

$$\gamma_u\colon \quad [0, 1] \to U,$$

где

$$\gamma_u(t) = \delta(t, u).$$

Иногда говорят, что семейство путей γ_u определяет *непрерывную деформацию* пути γ_0 в путь γ_1.

Отношение «пути γ_0 и γ_1 гомотопны» есть отношение эквивалентности на множестве путей в U. [Упражнение: проверьте это.]

Гомотопия с фиксированными началом и концом. Пусть пути γ_0 и γ_1 имеют одно и то же начало $\gamma(0) = \gamma_1(0)$ и один и тот же конец $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. В этом случае отображение δ называется *гомотопией с фиксированными началом и концом*, если выполнены соотношения (3.7.1) и если

$$\delta(0, u) = \gamma_0(0), \quad \delta(1, u) = \gamma_0(1) \tag{3.7.2}$$

для всех $u \in [0, 1]$. Иначе говоря, мы требуем, чтобы для любого u путь γ_u имел то же начало, что и γ_0 с γ_1, и тот же конец, что и γ_0 с γ_1.

Теорема 3.7.1. *Пусть* ω — *замкнутая дифференциальная 1-форма на открытом множестве* $U \subset E$, *и пусть*

$$\gamma_0 \colon [0,\ 1] \to U, \quad \gamma_1 \colon [0,\ 1] \to U$$

— *два непрерывных пути с общим началом и общим концом. Если пути* γ_0 *и* γ_1 *гомотопны с фиксированными началом и концом, то*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega \tag{3.7.3}$$

(где «интегралы» понимаются в смысле, описанном в конце п.3.6).

Эта теорема следует из другой теоремы, касающейся существования примитивной от формы ω относительно непрерывного отображения прямоугольника (см. следующее определение).

Определение. Пусть δ — непрерывное отображение прямоугольника R

$$a \leqslant t \leqslant b, \qquad a' \leqslant u \leqslant b'$$

в открытое множество $U \subset E$, и пусть дифференциальная 1-форма ω *замкнута* в U. *Примитивной функцией формы* ω *относительно отображения* δ называется такое непрерывное отображение $f \colon \delta \to F$, что для любой точки $(t_0,\ u_0)$ прямоугольника R существуют такая содержащаяся в U связная открытая окрестность V точки $\delta\,(t_0,\ u_0)$ и на V такая примитивная функция F формы ω, что

$$F\,(\delta\,(t,\ u)) = f\,(t,\ u)$$

для всех точек $(t,\ u) \in R$, достаточно близких к $(t_0,\ u_0)$.

Как мы видим, это определение навеяно определением примитивной от формы ω вдоль пути.

Теорема 3.7.2 (аналог теоремы 3.6.1.) *В предыдущих предположениях существует примитивная функция* f *формы* ω *относительно отображения* δ. *Эта примитивная функция определена однозначно с точностью до аддитивной константы.*

Эту теорему мы докажем немного позже. Сначала же выведем как следствие из нее теорему 3.7.1. Пусть γ_0 и γ_1 — два пути в U с общим началом и общим концом. Предположим, что γ_0 и γ_1 гомотопны с фиксированными началом и концом. Тогда существует непрерывное отображение δ квадрата

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

в множество U, удовлетворяющее соотношениям (3.7.1) и (3.7.2). По теореме 3.7.2 (которую мы считаем доказанной) существует примитивная функция f формы ω относительно отображения δ. Поэтому отображения

$$f_0\,(t) = f\,(t,\ 0), \quad f_1\,(t) = f\,(t,\ 1)$$

суть, очевидно, примитивные от формы ω вдоль путей γ_0 и γ_1 соответственно (достаточно применить *определение* примитивной вдоль пути). Соотношение (3.7.3) запишется поэтому так:

$$f(1,\ 0)-f(0,\ 0)=f(1,\ 1)-f(0,\ 1),$$

или

$$f(0,\ 1)-f(0,\ 0)=f(1,\ 1)-f(1,\ 0). \tag{3.7.4}$$

Покажем, что на самом деле в обеих частях равенства (3.7.4) стоят величины, равные нулю. Действительно, функция $u \longrightarrow f(0,\ u)$ есть примитивная от формы ω вдоль пути $u \longrightarrow \delta(0,\ u)$. Но, согласно (3.7.2), этот путь постоянен, так что

$$f(0,\ 1)-f(0,\ 0)=0.$$

Аналогично проверяется, что

$$f(1,\ 1)-f(1,\ 0)=0.$$

Таким образом, теорема 3.7.1 есть следствие из теоремы 3.7.2.

Доказательство теоремы 3.7.2 аналогично доказательству теоремы 3.6.1, но чуть посложнее. Прежде всего, если f_1 и f_2 — две примитивные от формы ω относительно δ, то разность f_1-f_2 постоянна на прямоугольнике R. Чтобы доказать это, мы, как и в теореме 3.6.1, покажем, что разность f_2-f_1 *локально постоянна*, а затем заметим, что прямоугольник R связен (как произведение двух связных интервалов).

Остается доказать существование примитивной функции f относительно δ. (По определению примитивной у любой точки $(t_0,\ u_0) \in R$ найдется окрестность, в которой примитивная существует. Так как R — компакт, существует такое разбиение R на прямоугольники, определяемое разбиениями

$$a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b,$$
$$a'=u_0<u_1<\ldots<u_p=b',$$

что в некоторой окрестности каждого прямоугольника

$$t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1},\quad u_j \leqslant u \leqslant u_{j+1} \qquad (0 \leqslant i<n,\ 0 \leqslant j<p)$$

существует примитивная функция f_{ij} формы ω относительно δ. Мы можем выбрать теперь число $\varepsilon>0$ (не зависящее от i и j) так, чтобы примитивные функции f_{ij} были определены в прямоугольниках, задаваемых неравенствами

$$t_i-\varepsilon<t<t_{i+1}+\varepsilon,\quad u_j-\varepsilon<u<u_{j+1}+\varepsilon.$$

Фиксируем сначала $j=0$ и будем изменять i от 0 до $n-1$. Последовательно вычитая из $f_{0,0},\ f_{1,0},\ \ldots,\ f_{n-1,0}$ подходящие константы, мы определим функцию g_0 на прямоугольнике

$$a \leqslant t \leqslant b,\quad a' \leqslant u<u_1+\varepsilon.$$

Таким же образом мы можем определить примитивную функцию g_1 на прямоугольнике

$$a \leqslant t \leqslant b, \quad u_1 - \varepsilon < u < u_2 + \varepsilon$$

и т. д. В итоге мы получим последовательность примитивных функций $g_0, g_1, \ldots, g_{p-1}$ и, вновь последовательно вычитая из них подходящие константы, получим примитивную функцию f уже на всем прямоугольнике R, ч. т. д.

Докажем теперь при помощи теоремы 3.7.2 теорему, аналогичную теореме 3.7.1. Прежде всего дадим такое

Определение. Пусть γ_0 и γ_1 — два *цикла* в U (т. е. $\gamma_0(0) = \gamma_0(1)$, $\gamma_1(0) = \gamma_1(1)$). Говорят, что эти циклы *гомотопны*, если существует непрерывное отображение δ квадрата

$$0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant u \leqslant 1$$

в множество U, удовлетворяющее, помимо соотношений (3.7.1), еще и условию

$$\delta(0, u) = \delta(1, u) \text{ для всех } u \in [0, 1]. \tag{3.7.5}$$

Последнее условие означает, что для любого u путь $\gamma_u(t) = \delta(t, u)$ есть *цикл*, иначе говоря, что его начало совпадает с его концом.

Пусть снова ω — замкнутая 1-форма. Применим теорему 3.7.2 к предыдущему отображению δ. Пусть f — примитивная от формы ω относительно δ. Пути

$$u \to \delta(0, u) \quad \text{и} \quad u \to \delta(1, u)$$

совпадают, так что

$$f(0, 1) - f(0, 0) = f(1, 1) - f(1, 0),$$

т. е. равенство (3.7.4) справедливо в этом случае. Отсюда, как и выше, следует, что

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему, аналогичную теореме 3.7.1:

Теорема 3.7.3. *Пусть ω — замкнутая дифференциальная 1-форма на открытом множестве $U \subset E$. Если два цикла γ_0 и γ_1 в U гомотопны, то*

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega.$$

П о я с н е н и е. Гомотопия есть отношение эквивалентности на множестве циклов в U. Если ω — замкнутая форма на U и γ —

цикл в U, то, как мы видели (в конце п. 3.4), вполне может быть, что $\int_\gamma \omega \neq 0$. Теорема 3.7.3 утверждает лишь, что значение $\int_\gamma \omega$ зависит только от *гомотопического класса цикла* γ. В частности, если цикл γ гомотопен *точке*, то $\int_\gamma \omega = 0$ для любой замкнутой 1-формы ω. [Точка есть цикл, определяемый постоянным отображением.]

3.8. Односвязные открытые множества

Определение. Топологическое пространство X называется *односвязным*, если 1) для любой пары (x_0, x_1) точек из X существует непрерывный путь γ: $[0, 1] \to X$, соединяющий x_0 с x_1, и 2) всякий цикл в X гомотопен точке.

Ясно, что если два топологических пространства X и Y гомеоморфны, то односвязность одного из них влечет односвязность другого.

В случае открытого подмножества U банахова пространства E условие 1) означает просто, что *U связно* (ч. I, гл. 1, предложение 3.3.5). Если U удовлетворяет еще и условию 2), то $\int_\gamma \omega = 0$ для любого цикла γ в U и любой замкнутой 1-формы ω на U (по теореме 3.7.3). Используя теорему 3.4.3 (эквивалентность условий (a) и (b)), получаем следующий результат:

Теорема 3.8.1. *Пусть* ω: $U \to \mathscr{L}(E; F)$ — *замкнутая дифференциальная* 1-*форма. Если множество* U *односвязно, то* ω *имеет примитивную функцию на* U.

Примеры открытых односвязных множеств. Всякое открытое звездное множество односвязно. Действительно, пусть для определенности U звездно относительно точки 0. Если x_0 и x_1 — какие-либо две точки из U, то ломаная, образованная отрезками $[x_0, 0]$ и $[0, x_1]$, есть путь, соединяющий x_0 с x_1. Значит, U удовлетворяет условию 1) (т. е. фактически связно). Далее. пусть γ: $[0, 1] \to U$ — некоторый цикл. Положим $\delta(t, u) = u \cdot \gamma(t)$ (произведение вектора $\gamma(t) \in E$ на скаляр $u \in [0, 1]$). Тогда $\delta(t, u) \in U$, так как U звездно относительно нуля. Отображение δ непрерывно; следовательно, цикл

$$t \to \delta(t, 1) = \gamma(t)$$

гомотопен точке

$$t \to \delta(t, 0) = 0.$$

В частности, всякая открытая *выпуклая* область односвязна (поскольку она звездна относительно любой своей точки).

Из сказанного выше следует, что всякое открытое множество $U \subset E$, *гомеоморфное* звездному, является односвязным.

Для иллюстрации противоположного случая возьмем $E = \mathbb{C}$ и $U = \mathbb{C} - \{0\}$. Множество U *неодносвязно* (хотя и связно), ибо, как мы видели (в конце п. 3.5), дифференциальная форма $(1/z)dz$ замкнута, но не имеет примитивной на U.

Упражнение. Покажите, что для топологического пространства X, удовлетворяющего условию 1), следующие четыре свойства эквивалентны:

(a) X односвязно;

(b) любое непрерывное отображение окружности $|z| = 1$ (z — комплексная координата в $\mathbb{C}$) в X продолжается до непрерывного отображения диска $|z| \leqslant 1$ в X;

(c) всякое непрерывное отображение границы квадрата в X продолжается до непрерывного отображения всего квадрата в X;

(d) если два пути в X имеют общее начало и общий конец, то они гомотопны с фиксированными началом и концом (п. 3.7).

§ 4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМ СТЕПЕНИ, БОЛЬШЕЙ 1

4.1. Дифференцируемое разбиение единицы

Мы хотим доказать следующую теорему:

Теорема 4.1.1. *Пусть K — компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ и $(U_i)_{i \in I}$ — конечное покрытие компакта K открытыми множествами $U_i \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существуют функции*

$$f_i\colon \mathbb{R}^n \to [0, 1] \quad (i \in I)$$

класса C^∞, такие, что

(i) $\operatorname{supp} f_i \subset U_i$;

[символ $\operatorname{supp} f_i$ обозначает *носитель* функции f_i, т. е. замыкание множества точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $f_i(x) \neq 0$; дополнение к $\operatorname{supp} f_i$ есть наибольшее открытое множество, на котором функция f_i тождественно равна нулю].

(ii) $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) \leqslant 1$ *для всех* $x \in \mathbb{R}^n$;

(iii) $\sum\limits_{i \in I} f_i(x) = 1$ *для всех* $x \in K$.

Пояснение. Условия (ii) и (iii) выражают словами, говоря, что функции f_i определяют «дифференцируемое разбиение единицы»; условие (i) выражают словами, говоря, что разбиение (f_i) *подчинено* открытому покрытию (U_i).

Укажем один важный частный случай теоремы 4.1.1. Это случай, когда множество I состоит из одного элемента.

Следствие 4.1.2. *Пусть K — компакт в $\mathbb{R}^n$ и U — открытое множество, содержащее K. Тогда существует функция*

$$f\colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$$

класса C^∞, такая, что

$$\operatorname{supp} f \subset U \quad \text{и} \quad f(x) = 1 \text{ при } x \in K.$$

В приводимом далее доказательстве теоремы 4.1.1 важную роль играет следующая функция (определенная на $\mathbb{R}^n$ и принимающая значения в $[0, 1]$):

$$\lambda(x) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{\|x\|^2 - 1}\right) & \text{при } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{при } \|x\| \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.1.1}$$

Здесь $\|x\|$ обозначает евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. Покажем, что функция λ принадлежит классу C^∞. Это очевидно для $\|x\| > 1$ и для $\|x\| < 1$, так как $\|x\|^2$ — функция класса C^∞ (сумма квадратов координат точки x). Остается показать, что если $a \in \mathbb{R}^n$ и $\|a\| = 1$, то функция $\lambda(x)$ бесконечно дифференцируема в точке a.

Покажем индукцией по k, что k-я производная в точке a существует и равна *нулю*. Это тривиально для $k = 0$, так как по определению $\lambda(a) = 0$ для $\|a\| = 1$. Предположим, что это верно для $k - 1$ $(k \geqslant 1)$. Утверждение, что $\lambda^{(k)}(a)$ существует и равна нулю, эквивалентно утверждению

$$\|\lambda^{(k-1)}(x)\| = o(\|x - a\|) \tag{4.1.2}$$

(так как $\lambda^{(k-1)}(a) = 0$). Соотношение (4.1.2) очевидно при $\|x\| \geqslant 1$, потому что в этом случае $\lambda^{(k-1)}(x) = 0$: для $\|x\| > 1$ это верно, поскольку по определению (4.1.1) функция $\lambda(x)$ тождественно равна нулю при $\|x\| > 1$, а для $\|x\| = 1$ это верно по предположению индукции. Остается доказать, что соотношение (4.1.2) имеет место, когда x стремится к a, так что все время $\|x\| < 1$. В этом случае мы можем (по крайней мере теоретически) вычислить все нужные производные функции λ, задаваемой верхней строчкой соотношения (4.1.1). Пусть читатель проверит в качестве упражнения (используя индукцию по k), что при $\|x\| < 1$ элемент

$$\lambda^{(k-1)}(x) \in \mathscr{L}_{k-1}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$$

имеет норму

$$\|\lambda^{(k-1)}(x)\| \leqslant \frac{m_k}{(1 - \|x\|^2)^{2k-2}} \exp\left(\frac{1}{\|x\|^2 - 1}\right),$$

где m_k не зависит от x. Отсюда видно, что

$$\|\lambda^{(k-1)}(x)\| = o(1 - \|x\|^2).$$

Но

$$1 - \| x \|^2 = \| a \|^2 - \| x \|^2 \leqslant 2 (\| a \| - \| x \|) \leqslant 2 \| x - a \|,$$

откуда и следует соотношение (4.1.2), ч. т. д.

Таким образом, формула (4.1.1) определяет функцию, бесконечно дифференцируемую в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$. Во всех точках открытого диска $\| x \| < 1$ имеем $\lambda(x) > 0$; во всех точках диска $\| x \| \leqslant r$ $(r < 1)$ функция $\lambda(x)$ ограничена снизу числом $m(r) > 0$, а именно

$$m(r) = \exp\left(\frac{1}{r^2 - 1}\right). \tag{4.1.3}$$

Выберем произвольно точку $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и число $r > 0$. Функция

$$x \to \lambda\left(\frac{x - x_0}{r}\right)$$

обращается в нуль вне шара $\| x - x_0 \| \leqslant r$, строго положительна внутри этого шара и принадлежит классу C^∞.

После проведенной подготовки докажем теперь несколько лемм, которые в конце концов приведут нас к доказательству теоремы 4.1.1.

Лемма 1. *Существует функция класса* C^∞

$$\mu\colon \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$$

со следующими свойствами:

$$\mu(0) = 0, \qquad \mu(t) = 1 \quad \textit{при} \quad t \geqslant 1.$$

[$\mathbb{R}^+$ обозначает полупрямую $t \geqslant 0$.]

Доказательство. В качестве такой функции можно взять

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 - \exp\dfrac{t^2}{t^2 - 1} & \text{при } t < 1, \\ 1 & \text{при } t \geqslant 1. \end{cases} \tag{4.1.4}$$

Это функция класса C^∞, ибо

$$\mu(t) = 1 - e \cdot \lambda(t).$$

Лемма 2. *В предположениях теоремы* 4.1.1 *для компакта* K *и его покрытия* $(U_i)_{i \in I}$ *найдутся функции*

$$g_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$$

класса C^∞, *такие, что*

(a) $\operatorname{supp} g_i \subset U_i$;

(b) $\sum\limits_{i \in I} g_i(x) \geqslant 1$ *для любого* $x \in K$.

Доказательство. Каждой точке $x \in K$ сопоставим такой индекс $i = i(x) \in I$, что $x \in U_i$. Пусть радиус $r(x) > 0$ таков, что замкнутый шар этого радиуса с центром в точке x содержится в U_i. Поскольку открытые шары $B\left(x, \frac{1}{2} r(x)\right)$, $x \in K$, покрывают *компакт* K, мы можем выбрать *конечное* множество шаров, покрывающих этот компакт, скажем, с центрами в точках x_α (индексы α пробегают конечное множество A). Положим $r(x_\alpha) = r_\alpha$. Итак,

1) открытые шары $B\left(x_\alpha, \frac{1}{2} r_\alpha\right)$ покрывают компакт K;

2) каждый замкнутый шар радиуса r_α с центром в точке x_α содержится в открытом множестве $U_{i(x_\alpha)}$.

Обозначим через λ_α функцию

$$x \to \frac{1}{m\left(\frac{1}{2}\right)} \lambda\left(\frac{x - x_\alpha}{r_\alpha}\right).$$

Это функция класса C^∞ со значениями в $\mathbb{R}^+$. Ее носитель содержится в $U_{i(x_\alpha)}$, и она $\geqslant 1$ в открытом шаре $B\left(x_\alpha, \frac{1}{2} r_\alpha\right)$. Поэтому для любой точки $x \in K$ найдется по крайней мере один такой индекс α, что $\lambda_\alpha(x) \geqslant 1$. Очевидно, сумма

$$\sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(x)$$

представляет собой функцию, которая $\geqslant 1$ в каждой точке компакта K. Пусть A_i (для каждого индекса $i \in I$) — множество тех индексов $\alpha \in A$, для которых $i(x_\alpha) = i$. Очевидно, множества A_i, $i \in I$, образуют *разбиение* множества A. Положим для $x \in \mathbb{R}^n$

$$g_i(x) = \sum_{\alpha \in A_i} \lambda_\alpha(x). \tag{4.1.5}$$

Носитель функции g_i содержится в объединении носителей функций λ_α с индексами $\alpha \in A_i$. Поскольку носитель каждой из этих функций содержится в U_i, то

$$\operatorname{supp} g_i \subset U_i.$$

Далее, $\sum_{i \in I} g_i(x) = \sum_{\alpha \in A} \lambda_\alpha(x) \geqslant 1$ для любой точки $x \in K$. Тем самым лемма 2 доказана.

Мы можем теперь дать

Доказательство теоремы 4.1.1. Сначала докажем следствие 4.1.2. Пусть даны компакт K и множество U со свойствами, указанными в формулировке этого следствия. Применим лемму 2, взяв в качестве множества I множество, состоящее из одного элемента. Мы получим такую функцию

$$g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$$

класса C^∞, что

$$\operatorname{supp} g \subset U \quad \text{и} \quad g(x) \geqslant 1 \text{ при } x \in K.$$

Возьмем теперь функцию μ из леммы 1 и образуем композицию

$$f = \mu \circ g \colon \mathbb{R}^n \to [0, 1].$$

Очевидно, что эта функция удовлетворяет всем свойствам, указанным в следствии 4.1.2, которое тем самым и доказано.

Перейдем теперь к *общему случаю* теоремы 4.1.1. Сопоставим элементам покрытия $(U_i)_{i\in I}$ функции g_i из леммы 2 и положим

$$g(x) = \sum_{i\in I} g_i(x).$$

Множество U тех точек $x \in \mathbb{R}^n$, для которых $g(x) > 0$, содержит K и *открыто* (в силу непрерывности функции g). В силу уже доказанного следствия 4.1.2 существует функция

$$f \colon \mathbb{R}^n \to [0, 1]$$

класса C^∞, такая, что

$$\operatorname{supp} f \subset U \quad \text{и} \quad f(x) = 1 \text{ при } x \in K.$$

Положим для каждого $i \in I$

$$f_i(x) = \begin{cases} \dfrac{g_i(x)}{g(x)} f(x) & \text{при } x \in U, \\ 0 & \text{при } x \notin U. \end{cases} \tag{4.1.6}$$

Это определение имеет смысл, так как $g(x) \neq 0$ для $x \in U$. Остается доказать, что каждая функция f_i принадлежит классу C^∞ и что набор функций f_i удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii).

В окрестности каждой точки $x_0 \in U$ функция f_i представляет собой отношение двух функций класса C^∞ (знаменатель всюду >0) и потому принадлежит классу C^∞. В окрестности всякой точки $x_0 \notin U$ функция f_i тождественно равна нулю, ибо в этом случае $x_0 \notin \operatorname{supp} f$ и, следовательно, в некоторой окрестности точки x_0 функция f тождественно равна нулю, а тогда и $f_i(x)$ тождественно равно нулю в этой окрестности (независимо от того, принадлежит ли x к U или не принадлежит).

Таким образом, f_i — функция класса C^∞ на всем $\mathbb{R}^n$, причем, очевидно, $f_i(x) \geqslant 0$ для всех точек $x \in \mathbb{R}^n$. Свойство (i) имеет место, так как $\operatorname{supp} f_i \subset \operatorname{supp} g_i$. Выполнение свойства (ii) очевидно, ибо для точек $x \in U$ имеем

$$\sum_{i\in I} f_i(x) = f(x),$$

поскольку $\sum_{i\in I} g_i(x) = g(x)$. Наконец, если $x \in K$, то $f(x) = 1$, т. е. выполняется условие (iii). Тем самым теорема 4.1.1 полностью доказана.

4.2. Компакт с краем в плоскости $\mathbb{R}^2$

Обозначим через x и y координаты в $\mathbb{R}^2$.

Определение. *Компактное* множество $L \subset \mathbb{R}^2$ называется *кривой класса* C^1, если каждая точка $(x_0, y_0) \in L$ обладает такой открытой окрестностью U, что множество $L \cap U$ точек компакта L, лежащих в U, определяется уравнением вида

$$y = \varphi(x)$$

(где φ — функция класса C^1 в окрестности x_0 и $\varphi(x_0) = y_0$) *или* уравнением вида

$$x = \psi(y)$$

(где ψ — функция класса C^1 в окрестности y_0 и $\psi(y_0) = x_0$).

Упражнение. Покажите, что это определение эквивалентно следующему: существует такой *путь класса* C^1 (см. п. 3.1)

$$\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^2,$$

что 1) производная $\gamma'(t)$ отлична от нуля во всех точках $t \in [a, b]$; 2) всякая точка (x_0, y_0) есть образ $\gamma(t_0)$ некоторой точки $t_0 \in (a, b)$ и 3) для некоторого открытого $U \ni (x_0, y_0)$ множество точек из образа γ, содержащихся в U, совпадает с $L \cap U$.

Эквивалентность этих двух определений является простым следствием теоремы о неявных функциях. Заметим, что условие $\gamma'(t_0) \neq 0$ показывает, что отображение γ инъективно для точек t, достаточно близких к t_0.

Предложение 4.2.1. *Пусть $L \subset \mathbb{R}^2$ — кривая класса C^1. Тогда в окрестности каждой своей точки (x_0, y_0) кривая L делит плоскость на две части.*

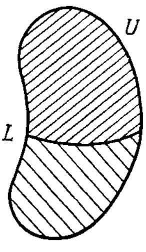

Рис. 5.

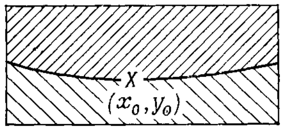

Рис. 6.

Более точно, мы можем выбрать окрестность $V \subset U$ точки (x_0, y_0) так, что *V связно*, а *$V - V \cap L$ имеет две связные компоненты*. Пусть для определенности L определяется в окрестности (x_0, y_0) уравнением $y = \varphi(x)$. Выберем числа $\varepsilon > 0$ и $\eta > 0$ настолько малыми, чтобы: 1) открытый прямоугольник $|x - x_0| < \varepsilon$,

$|y - y_0| < \eta$ содержался в U; 2) $|\varphi(x) - y_0| < \eta$ для всех x с $|x - x_0| < \varepsilon$. Обозначим этот открытый прямоугольник через V. Тогда V связно, а $V - V \cap L$ имеет две связные компоненты: множество тех точек $(x, y) \in V$, для которых $y < \varphi(x)$, и множество тех точек $(x, y) \in V$, для которых $y > \varphi(x)$.

Определение. Компактное множество $L \subset \mathbb{R}^2$ называется *кусочно гладкой кривой класса* C^1, если каждая точка $(x_0, y_0) \in L$ обладает такой окрестностью U, что множество $L \cap U$ совпадает с лежащей в U частью пути

$$\gamma \colon [a, b] \to \mathbb{R}^2,$$

где γ — *кусочно гладкий путь класса* C^1 (см. п. 3.1), удовлетворяющий следующим требованиям: отображение γ инъективно и на каждом замкнутом интервале, на котором γ принадлежит классу C^1, его производная $\gamma'(t)$ отлична от нуля.

Точки $(x_0, y_0) \in L$, в которых L *теряет гладкость*, называются *угловыми точками* кривой L (см. рис. 7). Эти точки изолированы, и, значит, множество их *конечно*, ибо L — компакт. Остальные точки кривой L называются *регулярными*. Кривая L называется кривой класса C^1, если все ее точки регулярны.

Определение. *Компактное* подмножество $K \subset \mathbb{R}^2$ называется *компактом с краем*, если оно обладает следующими свойствами:

(a) множество точек границы ∂K компакта K есть кусочно гладкая кривая класса C^1;

(b) у всякой *регулярной* точки $(x_0, y_0) \in \partial K$ существует такая связная открытая окрестность V, что множество $V - (V \cap \partial K)$ имеет *две* компоненты, одна из которых состоит из *внутренних* точек компакта K, а другая — из точек дополнения к K.

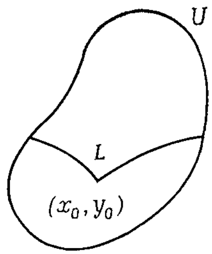

Рис. 7.

Коротко говоря, условие (b) означает, что в окрестности всякой регулярной точки границы компакта K точки самого K лежат по одну сторону *края* ∂K, а точки дополнения $\complement K$ — по другую сторону края ∂K.

Замечание. Край ∂K не обязательно является связным, даже если компакт K связен.

Вот некоторые *примеры компактов с краем*:

Ориентация края. Край ∂K в окрестности каждой своей регулярной точки совпадает с образом некоторого пути класса C^1. Но всякий путь может быть ориентирован двумя различными способами (см. п. 3.3). Напомним, что каждая параметризация определяет ориентацию; две различные параметризации определяют одну и ту же ориентацию, если переход от одной параметризации к другой осуществляется с помощью строго возрастающей функции; параметризации определяют различные ориентации, если функция, с помощью которой осуществляется замена параметра, является строго убывающей. Согласно условию (b), в окрестности любой регулярной точки края ∂K множество K лежит по одну сторону края ∂K. Выберем ориентацию (или направление обхода) так, чтобы при движении по ∂K само K оставалось *слева*. Более точно, это означает, что касательный вектор $\gamma'(t_0)$ к кривой ∂K, параметризованной с помощью параметра t в окрестности t_0 (причем $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$),

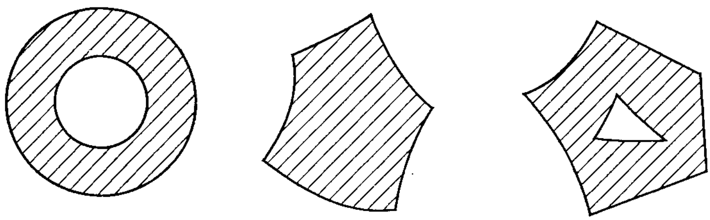

Рис. 8.

обладает тем свойством, что всякий вектор, образующий с $\gamma'(t_0)$ угол $\pi/2$, направлен в ту сторону, где лежат внутренние точки компакта K. Поясним это для того случая, когда в окрестности точки (x_0, y_0) край ∂K задается уравнением

$$y = \varphi(x).$$

В этом случае если часть внутренности компакта K, лежащая в окрестности точки (x_0, y_0), определяется неравенством $y > \varphi(x)$,

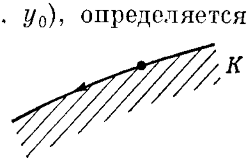

Рис. 9.

то ориентация края ∂K (в окрестности точки (x_0, y_0)) соответствует направлению возрастания x (иначе говоря, мы берем x в качестве параметра). Если же, наоборот, внутренность K лежит с той стороны, где $y < \varphi(x)$, то мы берем $-x$ в качестве параметра и ориентация ∂K определяется направлением убывания x. Поступим таким образом с каждой регулярной точкой края ∂K. Мы видим, что ∂K представим в виде конечного объединения *ориентированных путей*. Поэтому мы можем определить криволинейный интеграл $\int_{\partial K} \omega$

от всякой дифференциальной формы ω первой степени. Край ∂K, снабженный указанной ориентацией, называется *ориентированным краем* компакта K.

4.3. Интеграл дифференциальной 2-формы по компакту с краем

Пусть ω — дифференциальная 2-форма класса C^0 на открытом множестве $U \supset K$ со значениями в банаховом пространстве F:

$$\omega \in \Omega_2^{(0)}(U, F).$$

Замечание. В окрестности компакта K форма ω совпадает с некоторой дифференциальной формой, определенной на всей плоскости $\mathbb{R}^2$. Действительно, в силу следствия 4.1.2 существует функция λ: $\mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ класса C^∞ (и, значит, заведомо непрерывная), которая равна 1 в некоторой окрестности компакта K и носитель которой содержится в U. Мы можем взять поэтому в качестве α дифференциальную форму, равную $\lambda\omega$ на U и 0 на дополнении к носителю функции λ.

Как всегда, координаты в $\mathbb{R}^2$ мы обозначаем через x и y. Дифференциальная форма ω имеет следующую каноническую запись:

$$\omega = f(x, y)\, dx \wedge dy,$$

где f — непрерывное отображение $U \to F$. Пусть $\bar{f}(x, y)$ — функция $\mathbb{R}^2 \to F$, определяемая формулой

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{при } (x, y) \in K, \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin K. \end{cases} \tag{4.3.1}$$

Функция $\bar{f}$ обладает компактным носителем и интегрируема по Лебегу. Действительно, характеристическая функция χ_K всякого компакта K интегрируема по Лебегу, а значит, и произведение $\chi_K f = \bar{f}$ интегрируемо по Лебегу. Можно показать, что на самом деле функция χ_K интегрируема по Риману, *ибо K — компакт с краем*. Поэтому и функция $\bar{f}$ интегрируема по Риману.

Тем самым определен интеграл

$$\int\int \bar{f}(x, y)\, dx \wedge dy$$

относительно элемента площади $dx \wedge dy$. Мы полагаем *по определению*

$$\int\int \bar{f}(x, y)\, dx \wedge dy = \iint_K f(x, y)\, dx \wedge dy = \iint_K \omega.$$

Значение этого интеграла является элементом пространства F.

Приведем без доказательства несколько свойств таких интегралов:

(i) При фиксированном K отображение $\omega \to \int\int_K \omega$ есть *линейная* функция от $\omega \in \Omega_2^{(0)}(U, F)$.

(ii) Если K' — компакт с краем, содержащийся в K, и

$$(\operatorname{supp} \omega) \cap K \subset K', \tag{4.3.2}$$

то

$$\int\int_K \omega = \int\int_{K'} \omega. \tag{4.3.3}$$

[Здесь $\operatorname{supp} \omega$ — это *носитель* формы $\omega = f\,dx \wedge dy$, т. е. носитель функции f; это — *замкнутое* подмножество в U; его пересечение с K компактно. Равенство (4.3.3) очевидным образом следует из (4.3.2), так как, по определению, функция $\bar{f}$ равна f на K' и 0 вне K'.]

(iii) Интеграл

$$\int\int \bar{f}(x, y)\,dx \wedge dy$$

можно вычислять как повторный интеграл: при фиксированном y вычисляем сначала

$$\int \bar{f}(x, y)\,dx$$

(этот интеграл существует в смысле Лебега). Получаем интегрируемую по Лебегу функцию $g(y)$, интеграл от которой $\int g(y)\,dy$ равен $\int\int \bar{f}(x, y)\,dx \wedge dy$. Вот формула, выражающая это правило:

$$\int\int \bar{f}(x, y)\,dx \wedge dy = \int dy \left(\int \bar{f}(x, y)\,dx \right). \tag{4.3.4}$$

По тем же соображениям

$$\int\int \bar{f}(x, y)\,dx \wedge dy = \int dx \left(\int \bar{f}(x, y)\,dy \right). \tag{4.3.5}$$

(iv) Если

$$x = x_0 + u \cos\theta - v \sin\theta = a(u, v),$$
$$y = y_0 + u \sin\theta - v \cos\theta = b(u, v)$$

— *собственное евклидово движение* (т. е. композиция поворота и сдвига), то

$$\int\int \bar{f}(x, y)\,dx \wedge dy = \int\int \bar{f}(a(u, v), b(u, v))\,du \wedge dv. \tag{4.3.6}$$

Обозначая через φ отображение

$$(u, v) \to (a(u, v), b(u, v))$$

плоскости $\mathbb{R}^2$ на себя и через K' — компакт $\varphi^{-1}(K)$, мы можем переписать предыдущее равенство в виде

$$\iint_K \omega = \iint_{K'} \varphi^*(\omega). \tag{4.3.7}$$

Указанное соотношение — частный случай формулы «замены переменных»; общую формулу мы выведем позже. Заметим, что в нашем случае

$$\varphi^*(dx \wedge dy) = du \wedge dv,$$

так как якобиан $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ (определитель поворота).

Свойство (iv) сразу следует из инвариантности элемента площади на плоскости относительно евклидовых движений.

4.4. Теорема Стокса на плоскости

Она формулируется так:

Теорема 4.4.1. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — компакт с краем и α — дифференциальная 1-форма класса C^1 на открытом множестве $U \supset K$ со значениями в банаховом пространстве F. Тогда*

$$\boxed{\iint_K d\alpha = \int_{\partial K} \alpha,} \tag{4.4.1}$$

где криволинейный интеграл $\int_{\partial K} \alpha$ берется вдоль ориентированного края компакта K (способ согласования ориентаций K и ∂K указан в конце п. 4.2).

Распишем формулу (4.4.1). В канонической записи форма α имеет вид

$$\alpha = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy,$$

где P и Q — функции класса C^1 на U со значениями в F. Далее,

$$d\alpha = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Поэтому соотношение (4.4.1) переписывается так:

$$\boxed{\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy = \int_{\partial K} P\,dx + Q\,dy.} \tag{4.4.2}$$

Эту формулу обычно называют *формулой Грина — Римана.*

Доказательство мы проведем в несколько этапов в следующем пункте. А пока введем одно полезное вспомогательное понятие.

Определение. Прямоугольник R в плоскости $\mathbb{R}^2$ [под прямоугольником мы понимаем не «периметр», а замыкание внутренности, так что прямоугольник — это частный случай компакта с краем] называется *K-специальным*, если он удовлетворяет одному из следующих условий:

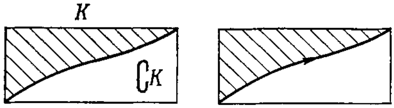

Рис. 10.

(a) R не пересекается с краем ∂K;

(b) пересечение $R \cap (\partial K)$ есть кривая класса C^1, соединяющая две противоположные вершины прямоугольника R и обладающая следующим свойством: существует такой поворот плоскости $\mathbb{R}^2$, после которого прямоугольник R совмещается с прямоугольником, стороны которого параллельны координатным осям, а пересечение $R \cap (\partial K)$ — с кривой, определяемой уравнением вида

$$y = \varphi(x), \quad \text{или } x = \psi(y)$$

(где функции φ и ψ строго возрастают и принадлежат классу C^1), причем пересечение $R \cap K$ определяется неравенством

$$y \geqslant \varphi(x), \quad \text{или } x \leqslant \psi(y).$$

Следующее предложение служит оправданием данного нами определения.

Предложение 4.4.2. *Для любой точки $(x_0, y_0) \in K$, не являющейся угловой точкой края ∂K, существует K-специальный прямоугольник R, содержащий (x_0, y_0) в качестве внутренней точки.*

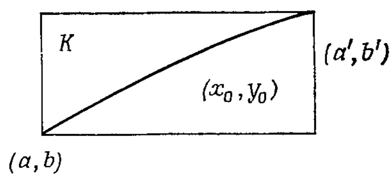

Рис. 11.

Доказательство. Если $(x_0, y_0) \notin \partial K$, то утверждение очевидно: существует прямоугольник с центром (x_0, y_0), не пересекающийся с ∂K. Пусть (x_0, y_0) — *регулярная* точка края ∂K. В этой точке кривая ∂K имеет *ориентированную касательную* (так как сама кривая ∂K ориентирована). Мы можем сделать такой поворот, что ориентированная касательная составит (в новых координатах (x, y)) с осью x угол > 0 и $< \pi/2$. В этих координатах кривая ∂K будет задаваться в окрестности (x_0, y_0) уравнением

$$y = \varphi(x), \quad \text{или } x = \psi(y),$$

где φ и ψ — функции класса C^1 и $\varphi'(x_0) > 0$, $\psi'(y_0) > 0$. Если мы возьмем на ∂K по обе стороны от точки (x_0, y_0) две достаточно близкие точки (a, b) и (a', b'), то прямоугольник R с вершинами в точках (a, b), (a, b'), (a', b) и (a', b') будет удовлетворять условию (b) и, значит, будет K-специальным, ч. т. д.

4.5. Доказательство теоремы 4.4.1 (теоремы Стокса)

Первый этап. *Случай, когда носитель 1-формы α содержится в K-специальном прямоугольнике R.*

Рассуждения, проведенные в начале п. 4.3, позволяют нам предположить, что форма α класса C^1 определена на всей плоскости. В силу свойства (iv) двойного интеграла (п. 4.3) мы можем считать, что стороны прямоугольника R параллельны координатным осям. Если R не пересекается с краем ∂K (случай (a)), то форма α тождественно равна нулю в некоторой окрестности границы ∂K и потому интеграл $\int\limits_{\partial K} \alpha$ равен нулю. Нам нужно доказать, что в этом случае также и $\int\limits_{\partial K} d\alpha = 0$, откуда и будет следовать утверждение (4.4.1). Для этого достаточно показать, что имеют место равенства

$$\iint\limits_K \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \wedge dy = 0, \qquad \iint\limits_K \frac{\partial P}{\partial y}\, dx \wedge dy = 0.$$

Докажем, например, первое из них. По формуле (4.3.3)

$$\iint\limits_K \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \wedge dy = \iint\limits_{K \cap R} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \wedge dy.$$

Мы пользуемся здесь тем, что поскольку носитель Q содержится в R, то носитель $\partial Q/\partial x$ и подавно содержится в R (так как он содержится в $\operatorname{supp} Q$). По формуле (4.3.4)

$$\iint\limits_{K \cap R} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \wedge dy = \int\limits_a^{b'} dy \left(\int\limits_a^{a'} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \right).$$

Но носитель Q не пересекается с краем прямоугольника R, поэтому

$$\int\limits_a^{a'} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = Q(a', y) - Q(a, y) = 0, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Предположим теперь, что K-специальный прямоугольник R (содержащий, по предположению, носители функций P и Q) имеет тип (b) из п. 4.4. Как и раньше, мы можем считать, что стороны прямоугольника R параллельны осям. Нам достаточно доказать равенства

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \wedge dy = \int_{\partial K} Q\, dy, \tag{4.5.1}$$

$$-\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}\, dx \wedge dy = \int_{\partial K} P\, dx. \tag{4.5.2}$$

Докажем, например, первое из них. При наших предположениях относительно носителя Q достаточно установить, что

$$\iint_{K \cap R} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \wedge dy = \int_{(\partial K) \cap R} Q\, dy.$$

Используя (4.3.3) и обозначения из условия (b), находим

$$\iint_{K \cap R} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \wedge dy = \int_a^{b'} dy \left(\int_a^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\, dx \right).$$

Так как функция Q равна нулю на крае прямоугольника R, то

$$\int_a^{\psi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = Q(\psi(y), y) - Q(a, y) = Q(\psi(y), y).$$

Поэтому

$$\iint_{K \cap R} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \wedge dy = \int_b^{b'} Q(\psi(y), y)\, dy;$$

правая часть последнего равенства — это значение криволинейного интеграла

$$\int_{(\partial K) \cap R} Q\, dy$$

(где y рассматривается как параметр, возрастающий от b до b'). Таким образом, утверждение (4.5.1) доказано.

Аналогично доказывается, что

$$-\iint_K \frac{\partial P}{\partial y}\, dx \wedge dy = -\iint_{K \cap R} \frac{\partial P}{\partial y}\, dx \wedge dy =$$

$$= -\int_a^{a'} dx \int_{\varphi(x)}^{b'} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy = \int_a^{a'} P(x, \varphi(x))\, dx.$$

Последнее выражение — это криволинейный интеграл

$$\int_{(\partial K) \cap R} P\, dx.$$

Второй этап. *Докажем равенство* (4.4.1) *в случае, когда носитель* 1-*формы* α *не содержит угловых точек края* ∂K (число таких точек конечно).

Мы можем всегда предполагать, что $\operatorname{supp} \alpha$ — *компакт* (этого можно добиться, умножая α^∞ на функцию класса C^∞ с компактным носителем, равную 1 в окрестности K). По предложению 4.4.2 каждая точка компакта $\operatorname{supp} \alpha$ есть внутренняя точка некоторого K-специального прямоугольника. В силу компактности носителя $\operatorname{supp} \alpha$ найдется конечное его покрытие $(U_i)_{i \in I}$ открытыми множествами U_i, каждое из которых есть внутренность K-специального прямоугольника. Множества U_i покрывают даже некоторую компактную окрестность K' множества $\operatorname{supp} \alpha$. По теореме 4.4.1 существует дифференцируемое разбиение единицы $(f_i)_{i \in I}$ на K', согласованное с покрытием U_i. Очевидно, что

$$\alpha = \sum_{i \in I} (f_i \alpha).$$

Носитель каждой формы $f_i \alpha$ содержится внутри специального прямоугольника. Мы можем поэтому применить утверждение, доказанное на «первом этапе». В результате получим

$$\iint_K d(f_i \alpha) = \int_{\partial K} f_i \alpha.$$

Суммируя эти равенства по всем индексам $i \in I$, приходим к равенству (4.4.1).

Третий и последний этап. *Общий случай.*

Используя разбиение единицы, мы можем свести все к случаю формулы Стокса для формы α, *носитель которой содержит только одну угловую точку края* ∂K. Пусть $z_0 = (x_0, y_0)$ — такая точка. Умножим форму α на числовую функцию, равную нулю в окрестности точки z_0; тогда мы придем к случаю, рассмотренному на втором этапе доказательства. Более точно, возьмем функцию

$$\nu \colon \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$$

класса C^∞, обладающую следующими свойствами:

$$\nu(z) = \begin{cases} 0 & \text{при } \|z\| \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{при } \|z\| \geqslant 1 \end{cases}$$

(норма евклидова). Существование такой функции непосредственно вытекает из следствия 4.1.2. Для любого числа $r > 0$ положим

$$\nu_r(z) = \nu\left(\frac{z - z_0}{r}\right).$$

Тогда 1-форма $\nu_r\alpha$ совпадает с α вне диска $\|z-z_0\|<r$ и тождественно равна нулю на диске $\|z-z_0\|<r/2$.

Используя результат второго этапа, получаем

$$\iint_K d(\nu_r\alpha)=\int_{\partial K}\nu_r\alpha. \tag{4.5.3}$$

Если мы докажем, что

$$\int_{\partial K}\alpha=\lim_{r\to 0}\int_{\partial K}\nu_r\alpha \tag{4.5.4}$$

и

$$\iint_K d\alpha=\lim_{r\to 0}\iint_K d(\nu_r\alpha), \tag{4.5.5}$$

то соотношение (4.4.1) получится переходом к пределу в равенстве (4.5.3). Значит, остается только доказать (4.5.4) и (4.5.5). Имеем

$$\int_{\partial K}\nu_r\alpha=\int_{\partial K}(\nu_rP)\,dx+(\nu_rQ)\,dy.$$

В каждой точке $(x, y)\neq(x_0, y_0)$

$$\begin{gathered}\lim_{r\to 0}\nu_r(x, y)\,P(x, y)=P(x, y),\\ \lim_{r\to 0}\nu_r(x, y)\,Q(x, y)=Q(x, y).\end{gathered} \tag{4.5.6}$$

При этом функции $|\nu_rP|$ и $|\nu_rQ|$ ограничены некоторой константой. Поэтому в силу известной теоремы Лебега (о переходе к пределу под знаком интеграла) из (4.5.6) следует (4.5.4). По аналогичным соображениям

$$\iint_K d\alpha=\lim_{r\to 0}\iint_K\nu_r(d\alpha)$$

и

$$d(\nu_r\alpha)=(d\nu_r)\wedge\alpha+\nu_r(d\alpha).$$

Таким образом, соотношение (4.5.5) будет доказано, если мы покажем, что

$$\lim_{r\to 0}\iint_K(d\nu_r)\wedge\alpha=0. \tag{4.5.7}$$

Имеем

$$(d\nu_r)\wedge\alpha=\left(Q\frac{\partial\nu_r}{\partial K}-P\frac{\partial\nu_r}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

Пусть M — верхняя грань для норм $\|P(x, y)\|$ и $\|Q(x, y)\|$ на K, а m_r — верхняя грань для норм $\left\|\frac{\partial \nu_r}{\partial x}\right\|$ и $\left\|\frac{\partial \nu_r}{\partial y}\right\|$ на K. Так как функция ν_r постоянна вне диска $\|z-z_0\|\leqslant r$, то

$$\iint_K (d\nu_r)\wedge\alpha = \iint_{\|z-z_0\|\leqslant r}\left(Q\frac{\partial \nu_r}{\partial x}-P\frac{\partial v_r}{\partial y}\right)dx\wedge dy.$$

Последнее выражение ограничено по норме числом

$$M\cdot m_r\cdot(\pi r^2),$$

так как площадь диска радиуса r равна πr^2. Остается вычислить m_r. Производные $\frac{\partial \nu}{\partial x}$ и $\frac{\partial \nu}{\partial y}$ суть непрерывные функции с компактным носителем. Поэтому существует такое число $m>0$, что

$$\left\|\frac{\partial \nu}{\partial x}\right\|\leqslant m, \quad \left\|\frac{\partial \nu}{\partial y}\right\|\leqslant m$$

для любой точки $z\in\mathbb{R}^2$. Так как $\nu_r(z)=\nu((z-z_0)/r)$, то

$$\frac{\partial \nu_r}{\partial x}=\frac{1}{r}\frac{\partial \nu}{\partial x}, \quad \frac{\partial \nu_r}{\partial y}=\frac{1}{r}\frac{\partial \nu}{\partial y},$$

и, следовательно, мы можем положить

$$m_r=\frac{m}{r}.$$

Окончательно

$$\left\|\iint_K (d\nu_r)\wedge\alpha\right\|\leqslant \pi M m_r.$$

Тем самым равенство (4.5.7) доказано. Доказательство теоремы 4.4.1 наконец завершено.

4.6. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть K — компакт с краем в плоскости $\mathbb{R}^2$, причем край его является кусочно гладкой кривой класса C^1 (см. п. 4.2). Если φ — некоторый C^1-диффеоморфизм открытого множества U, содержащего K, на открытое множество $U'\subset\mathbb{R}^2$, то $K'=\varphi(K)$ — компакт с кусочно гладким краем класса C^1. Это сразу вытекает из определений.

Поскольку φ есть C^1-диффеоморфизм, линейное отображение $\varphi'(z)$ (для $z\in U$) есть *изоморфизм* $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$. Поэтому его определитель отличен от нуля для любой точки $z\in U$. Напомним, что этот определитель называется *якобианом* преобразования φ и обозначается через

$$\frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}$$

(здесь x', y' — координаты точки $\varphi(x, y)$ — образа относительно φ точки z с координатами x и y). *Знак* этого якобиана — локально постоянная функция; поэтому если множество U *связно* (для простоты мы это будем далее всюду предполагать), то якобиан C^1-диффеоморфизма φ имеет постоянный знак.

Определение. Если якобиан отображения φ положителен, то φ называется диффеоморфизмом, *сохраняющим ориентацию*. Если якобиан отрицателен, то φ называется *диффеоморфизмом, обращающим (или изменяющим) ориентацию.*

Выведем теперь следующую *формулу для замены переменных*:

Теорема 4.6.1. *В предыдущих предположениях и обозначениях пусть* ω — *дифференциальная 2-форма класса* C^0 *на открытом множестве* U'. *Тогда*

$$\iint_{\varphi(K)} \omega = \varepsilon \iint_{K} \varphi^*(\omega), \tag{4.6.1}$$

где $\varepsilon = +1$, *если* φ *сохраняет ориентацию, и* $\varepsilon = -1$, *если* φ *изменяет ориентацию.*

Раскроем соотношение (4.6.1). В канонической записи форма ω имеет вид

$$\omega = f(x', y')\, dx' \wedge dy',$$

где x' и y' — координаты точки в $U' = \varphi(U)$, а функция f непрерывна на U'. Поэтому

$$\varphi^*(\omega) = f(x'(x, y), y'(x, y)) \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)}\, dx \wedge dy,$$

где $x'(x, y)$, $y'(x, y)$ — функции, определяющие C^1-диффеоморфизм φ. С учетом значения $\varepsilon = \pm 1$ в (4.6.1) соотношение (4.6.1) можно переписать так:

$$\iint_{\varphi(K)} f(x', y')\, dx' \wedge dy' = \iint_{K} f(x'(x, y), y'(x, y)) \left| \frac{\partial(x', y')}{\partial(x, y)} \right| dx \wedge dy. \tag{4.6.2}$$

Это равенство и нужно доказать.

По определению интеграл

$$\iint_{\varphi(K)} f(x', y')\, dx' \wedge dy'$$

равен интегралу по всей плоскости

$$\iint \bar{f}(x', y')\, dx' \wedge dy',$$

где $\bar{f}$ — функция, равная f на $\varphi(K)$ и нулю вне $\varphi(K)$. Носитель функции $\bar{f}$ содержится в $\varphi(U)$, так что определена композиция

$\bar{f}\circ\varphi$ (равная $\bar{f}\circ\varphi$ на U и нулю вне U). Формула (4.6.2), которую мы доказываем, запишется в виде

$$\int\int \bar{f}\,dx'\wedge dy' = \int\int \bar{f}\circ\varphi \left|\frac{\partial(x',\,y')}{\partial(x,\,y)}\right| dx\wedge dy,$$

где интегралы берутся уже по всей плоскости $\mathbb{R}^2$.

Таким образом теорема 4.6.1 есть частный случай следующей теоремы (в формулировке которой $\bar{f}$ заменено на f):

Теорема 4.6.2. *Пусть φ есть C^1-диффеоморфизм открытого множества $U\subset\mathbb{R}^2$ на открытое множество $U'\subset\mathbb{R}^2$, и пусть f — интегрируемая по Лебегу функция с компактным носителем, содержащимся в U'. Тогда*

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f\,dx'\wedge dy' = \int\int_{\mathbb{R}^2} f\circ\varphi \left|\frac{\partial(x',\,y')}{\partial(x,\,y)}\right| dx\wedge dy. \qquad (4.6.3)$$

[То обстоятельство, что якобиан $\dfrac{\partial(x',\,y')}{\partial(x,\,y)}$ определен только на U, не имеет значения, так как носитель функции $f\circ\varphi$ содержится в U.]

Доказательство. (a) Сначала мы докажем равенство (4.6.3) в случае, когда f — гладкая функция *класса* C^1 и φ — C^2-*диффеоморфизм* открытого множества U на открытое множество U', содержащее компактный носитель функции f. В этом случае существует компакт с краем K', содержащий $\operatorname{supp} f$ и содержащийся в U'. Действительно, мы можем замостить $\mathbb{R}^2$ одинаковыми квадратами, столь малыми, что если какой-нибудь из них пересекается с $\operatorname{supp} f$, то он содержится в U. В качестве K' можно взять теперь объединение квадратов, пересекающихся с $\operatorname{supp} f$. Пусть $K=\varphi^{-1}(K')$. Тогда

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f\,dx'\wedge dy' = \int\int_{K'} \omega, \quad \text{где} \quad \omega = f\,dx'\wedge dy',$$

$$\int\int_{\mathbb{R}^2} f\circ\varphi\left|\frac{\partial(x',\,y')}{\partial(x,\,y)}\right| dx\wedge dy = \varepsilon\int\int_{K}\varphi^*(\omega).$$

Тем самым соотношение (4.6.3) переписано в виде (4.6.1), и мы должны доказать (4.6.1) для того частного случая, когда ω — форма класса C^1 и φ — C^2-диффеоморфизм.

Так как ω — форма класса C^1, $d\omega$ существует; более того, $d\omega=0$, так как это форма степени 3 на двумерном пространстве $\mathbb{R}^2$. Поскольку плоскость $\mathbb{R}^2$ звездна относительно начала координат, мы можем применить к ω *теорему Пуанкаре* (теорема 2.12.1). В результате получим, что существует такая дифференциальная 1-форма α класса C^1 на $\mathbb{R}^2$, что $d\alpha=\omega$. Но тогда по теореме Стокса

(теорема 4.4.1)

$$\iint\limits_{\varphi(K)} \omega = \iint\limits_{\varphi(K)} d\alpha = \int\limits_{\partial\varphi(K)} \alpha. \tag{4.6.4}$$

У нас уже есть формула замены переменных для криволинейного интеграла (см. п. 3.3). Край $\partial(\varphi(K))$ — это образ края ∂K при отображении φ; надо только еще посмотреть, сохраняется или изменяется ориентация при отображении φ края ∂K в край $\partial(\varphi(K))$. Я утверждаю, что если отображение $\varphi\colon U \to U'$ сохраняет ориентацию (т. е. якобиан φ положителен), то φ переводит *ориентированный* край ∂K в *ориентированный* край $\partial(\varphi(K))$ и что, наоборот, если отображение φ меняет ориентацию, то оно переводит ориентированный край ∂K в край $\partial(\varphi(K))$ с *противоположной* ориентацией. Это непосредственно вытекает из *определения* ориентации края ∂K (см. п. 4.2).

Из сказанного вытекает, что

$$\int\limits_{\partial\varphi(K)} \alpha = \varepsilon \int\limits_{\partial K} \varphi^*(\alpha) = \varepsilon \int\limits_{\partial K} \varphi^*(d\omega). \tag{4.6.5}$$

Но по теореме 2.9.2, $\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*(\omega))$, так как φ — отображение класса C^2; форма $\varphi^*(\omega)$ принадлежит классу C^1, и потому $d(\varphi^*(\omega))$ имеет смысл. Следовательно, равенство (4.6.5) дает

$$\int\limits_{\partial\varphi(K)} \alpha = \varepsilon \int\limits_{\partial K} d(\varphi^*(\omega)),$$

и, снова применяя теорему Стокса, получаем

$$\int\limits_{\partial\varphi(K)} \alpha = \varepsilon \iint\limits_{K} \varphi^*(\omega). \tag{4.6.6}$$

Отсюда и из (4.6.4) и следует соотношение (4.6.1).

(b) Итак, мы доказали теорему 4.6.2 в том частном случае, когда f принадлежит классу C^1 и φ есть C^2-диффеоморфизм. Утомленный читатель вполне может принять на веру, что теорема верна и в общей формулировке. Для выносливого читателя мы проведем доказательство в общем случае. Воспользуемся функцией λ класса C^∞, определенной в п. 4.1:

$$\lambda(x, y) = \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2+y^2-1}\right) & \text{при } x^2+y^2<1, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 \geqslant 1. \end{cases}$$

Для каждого числа $r > 0$ введем функцию $\lambda_r(x, y) = \lambda(x/r, y/r)$ с носителем, лежащим в диске $x^2 + y^2 \leqslant r^2$; существует такая константа $c_r > 0$, что

$$\iint c_r \lambda_r(x, y)\, dx \wedge dy = 1.$$

Положим $c_r\lambda_r = \mu_r$. Для любой интегрируемой функции f с компактным носителем можно определить *свертку* $\mu_r * f$ с помощью равенства

$$(\mu_r * f)(x, y) = \int\int f(x-u, y-v)\,\mu_r(u, v)\,du \wedge dv.$$

Эта свертка интегрируема и имеет компактный носитель. Она представляет собой среднее значение функции $f(x-u, y-v)$ при изменении точки (u, v) в круге $(x-u)^2 + (y-v)^2 \leqslant r^2$. Таким образом, если r достаточно мало, то свертка $\mu_r * f$ *достаточно близка* к f в смысле, который можно уточнить; например, если f непрерывна (а значит, и равномерно непрерывна), то функции $\mu_r * f$ *равномерно* сходятся к f, когда r стремится к 0. В теории интеграла Лебега доказывается, что свертки $\mu_r * f$ сходятся к f по норме пространства L^1, т. е.

$$\int\int \| f(x, y) - (\mu_r * f)(x, y) \|\,dx \wedge dy$$

стремится к нулю вместе с r. Отсюда следует, что

$$\int\int f(x, y)\,dx \wedge dy = \lim_{r \to 0} \int\int (\mu_r * f)(x, y)\,dx \wedge dy. \qquad (4.6.7)$$

С другой стороны, свертка $\mu_r * f$ — *это функция класса* C^∞ так же, как и функция μ_r. Действительно,

$$(\mu_r * f)(x, y) = \int\int \mu_r(x-u, y-v)\,f(u, v)\,du \wedge dv.$$

В силу правила дифференцирования под знаком интеграла Лебега производная от свертки $\mu_r * f$ равна

$$(\mu_r * f)' = \mu_r' * f.$$

Иначе говоря,

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu_r * f) = \frac{\partial \mu_r}{\partial x} * f,$$

и этот процесс дифференцирования можно продолжать до бесконечности.

Рассмотрим еще свертку $\mu_r * \varphi$, которая тоже является отображением класса C^∞. Она определена если и не на всем множестве U, то на всяком открытом множестве U_r, состоящем из тех точек (x, y), для которых диск радиуса r с центром в (x, y) целиком содержится в множестве U. На множестве U_r функция $\mu_r * \varphi$: $U_r \to \mathbb{R}^2$ является функцией класса C^∞ и тем более класса C^2. Легко показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}(\mu_r * \varphi) = \mu_r * \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu_r * \varphi) = \mu_r * \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Таким образом, функция $\mu_r * \varphi = \varphi_r$ и ее частные производные *равномерно* сходятся к φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ соответственно. Отсюда следует, что на каждом компакте, содержащемся в U, функция φ_r для достаточно малых r определена и принадлежит классу C^1, а якобиан отображения φ_r имеет во всех точках этого компакта тот же знак, что и якобиан отображения φ. Более тонкими рассуждениями можно доказать, что у любого компакта, содержащегося в U, имеется такая открытая окрестность $V \subset U$, что (для достаточно малых r) отображение φ_r есть C^2-диффеоморфизм множества V на его образ $\varphi_r(V)$, причем носитель функции $\lambda_r * f$ содержится в $\varphi_r(V)$. Поэтому для достаточно малых r мы можем применить уже доказанную часть (а):

$$\int\int (\mu_r * f)\, dx' \wedge dy' = \int\int (\mu_r * f) \circ \varphi_r \,|\, J(\varphi_r) \,|\, dx \wedge dy, \qquad (4.6.8)$$

где $J(\varphi_r)$ — якобиан отображения φ_r. Наконец, применяем теорему Лебега о переходе к пределу под знаком двойного интеграла. Мы не будем уточнять всех деталей. Когда r стремится к 0, левая часть равенства (4.6.7) стремится к левой части равенства (4.6.3), а правая часть равенства (4.6.7) — к правой части (4.6.3), чем равенство (4.6.3) и доказано.

4.7. Многообразия в пространстве $\mathbb{R}^n$

Предложение 4.7.1. *Пусть даны два целых числа $k \geqslant 1$ и $p \geqslant 1$. Для заданных подмножества $M \subset \mathbb{R}^n$ и точки $a \in M$ с координатами $a_1, \ldots, a_n$ следующие три свойства эквивалентны:*

(i) *Существуют открытая окрестность V точки a и C^k-диффеоморфизм f окрестности V на открытое множество $W \subset \mathbb{R}^n$, такие, что $f(a) = 0$ и множество $f(M \cap V)$ есть пересечение W с подпространством размерности p, задаваемым уравнениями $y_{p+1} = 0, \ldots, y_n = 0$* (где y_i, $i = 1, \ldots, n$,— координаты точки из W).

(ii) *После подходящей перестановки координат $x_1, \ldots, x_n$ объемлющего пространства $\mathbb{R}^n \supset M$ в окрестности точки $(a_1, \ldots, a_p)$ найдутся такие $(n-p)$ числовых функций $\varphi_{p+1}(x_1, \ldots, x_p), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_p)$ класса C^k, что $\varphi_i(a_1, \ldots, a_p) = a_i$ (для $p+1 \leqslant i \leqslant n$), причем координаты точек $x_1, \ldots, x_n$ из M, лежащих в достаточно малой окрестности V точки a, удовлетворяют уравнениям*

$$x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_p) \text{ для } p + 1 \leqslant i \leqslant n.$$

(iii) *Существуют открытая окрестность V точки a в $\mathbb{R}^n$, открытая окрестность Ω точки 0 в $\mathbb{R}^p$ и гомеоморфизм g окрестности Ω на $M \cap V$, такие, что g* (как функция со значениями в $\mathbb{R}^n$) *есть функция класса C^k и $g'(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ имеет ранг p.*

Доказательство. Сначала о терминологии. Если отображение $g: \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса C^1 таково, что $g'(t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ — отображение ранга h в точке $t \in \Omega$, то говорят просто, что отображение g *имеет ранг* h *в точке* t. Таким образом, свойство (iii) утверждает, что отображение g имеет ранг p в точке 0.

Еще одно замечание к пункту (iii). Пусть $t = (t_1, \ldots, t_p)$ — некоторая точка из Ω. Координаты $x_1, \ldots, x_n$ точки $g(t) = g(t_1, \ldots, t_p)$ суть, по предположению, функции $g_1, \ldots, g_n$ класса C^k ($k \geqslant 1$), и матрица

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(t_1, \ldots, t_p)\right)$$

имеет, по предположению, ранг p в точке $t_1 = \ldots = t_p = 0$. По соображениям непрерывности она имеет тот же *ранг* и для всех точек t из некоторой достаточно малой окрестности Ω' точки 0 ($\Omega' \subset \Omega$). Заменяя в случае необходимости Ω на Ω', мы можем в (iii) предполагать, что $g'(t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ имеет ранг p для всех точек $t \in \Omega$. В этом случае говорят, что g есть *параметризация* (*класса* C^k) *множества* M *в окрестности точки* a.

Приступим теперь к доказательству предложения 4.7.1. Покажем сначала, что из (iii) следует (ii). Если условие (iii) выполнено, то мы можем сделать такую перестановку координат $x_1, \ldots, x_n$, что квадратная матрица

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial t_j}(0, \ldots, 0)\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

будет иметь ранг p. По теореме о локальном обращении (ч. I, гл. 1, п. 4.6) преобразование

$$x_i = g_i(t_1, \ldots, t_p) \quad (1 \leqslant i \leqslant p) \tag{4.7.1}$$

является C^k-диффеоморфизмом открытой окрестности Ω' точки 0 на открытую окрестность точки $(a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{R}^p$. Пусть

$$t_i = h_i(x_1, \ldots, x_p)$$

— обратное отображение. Заменяя Ω на Ω' и V на такое открытое множество V', что $g(\Omega') = M \cap V'$, мы видим, что точки пересечения $M \cap V'$ — это те точки $(x_1, \ldots, x_n) \in V$, для которых

$$\begin{gathered} x_{p+1} = g_{p+1}(h_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, h_p(x_1, \ldots, x_p)), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = g_n(h_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, h_p(x_1, \ldots, x_p)). \end{gathered}$$

Правые части этих равенств суть функции $\varphi_{p+1}(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_p)$ класса C^k, откуда и следует свойство (ii).

Покажем теперь, что из (ii) следует (i). Пусть (ii) имеет место. Положим

$$\begin{aligned} y_i &= x_i - a_i && \text{для } 1 \leqslant i \leqslant p, \\ y_j &= x_j - \varphi_j(x_1, \ldots, x_p) && \text{для } p+1 \leqslant j \leqslant n. \end{aligned} \tag{4.7.2}$$

Это отображение есть C^k-диффеоморфизм открытой окрестности V точки a в $\mathbb{R}^n$ на окрестность W точки 0 в $\mathbb{R}^n$; обратный диффеоморфизм задается уравнениями

$$x_i = y_i + a_i \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant p,$$

$$x_j = y_j + \varphi_j(y_1 + a_1, \ldots, y_p + a_p) \quad \text{для} \quad p+1 \leqslant j \leqslant n.$$

Очевидно, C^k-диффеоморфизм (4.7.2) отображает множество $M \cap V$ на множество тех точек $y \in W$, для которых

$$y_{p+1} = 0, \ldots, y_n = 0.$$

Следовательно, свойство (i) имеет место.

Докажем, наконец, что из (i) следует (iii). Пусть выполняется свойство (i) и k: $W \to V$ есть C^k-диффеоморфизм, обратный к f. Пересечение W с подпространством, определяемым равенствами $y_{p+1} = 0, \ldots, y_n = 0$, можно отождествить с открытым множеством $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ (с координатами $y_1, \ldots, y_p$), содержащим точку $0 \in \mathbb{R}^p$. Сужение g функции f на Ω есть отображение класса C^k, образ которого в точности совпадает с пересечением $M \cap V$. Далее, $g(0) = a$; линейное отображение $g'(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}^n)$ есть сужение линейного отображения $h'(0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ на векторное подпространство $\mathbb{R}^p$, определяемое уравнениями $y_{p+1} = 0, \ldots, y_n = 0$. Так как $h'(0)$ — изоморфизм $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то его сужение на $\mathbb{R}^p$ имеет ранг p. Таким образом, $g'(0)$ имеет ранг p, и свойство (iii) выполняется.

Доказательство предложения 4.7.1 закончено.

Определение. Если подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ и точка $a \in M$ удовлетворяют одному из трех (эквивалентных) условий предложения 4.7.1, то говорят, что *M в окрестности точки a является p-мерным многообразием класса C^k*. Заметим, что обязательно $p \leqslant n$.

Определение. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *p-мерным многообразием класса C^k*, если для любой точки $a \in M$ множество M является в окрестности этой точки многообразием размерности p и класса C^k.

В случае $p = 1$ часто говорят, что M есть *кривая* класса C^k. В случае $p = 2$ часто говорят, что M есть *поверхность* класса C^k. Например, при $n = 3$, $p = 2$, для того чтобы в окрестности точки $a \in M$ множество $M \subset \mathbb{R}^3$ было поверхностью класса C^k, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два (эквивалентные) условия:

(ii) С точностью до перестановки координат x_1, x_2, x_3 в окрестности точки $a = (a_1, a_2, a_3)$ множество M задается уравнением

$$x_3 = \varphi(x_1, x_2),$$

где φ — функция класса C^k в окрестности точки (a_1, a_2) и $\varphi(a_1, a_2) = a_3$.

(iii) В окрестности точки a множество M допускает параметризацию класса C^k:

$$x_i = g_i(t_1, t_2), \quad 1 \leqslant i \leqslant 3, \quad g_i(0, 0) = a_i,$$

причем хотя бы один из трех определителей

$$\frac{\partial(g_2, g_3)}{\partial(t_1, t_2)}, \quad \frac{\partial(g_3, g_1)}{\partial(t_1, t_2)}, \quad \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(t_1, t_2)}$$

отличен от нуля для всех точек (t_1, t_2), достаточно близких к точке $(0, 0)$.

Вернемся к общему случаю (произвольных p и n). Свойство (iii) приводит нас к понятию *параметризации* g (класса C^k) p-мерного многообразия M класса C^k в окрестности точки $x \in M$. С другой стороны, рассмотрим C^k-диффеоморфизм f из свойства (i). Композиция $f \circ g$ определена в некоторой окрестности точки 0 в $\mathbb{R}^p$ и биективно отображает эту окрестность на окрестность точки 0 p-мерного подпространства $\{y_{p+1} = 0, \ldots, y_n = 0\}$ пространства $\mathbb{R}^n$. Координаты $y_1, \ldots, y_p$ точки $(f \circ g)(t)$ суть функции класса C^k от параметров $t_1, \ldots, t_p$, и якобиан этих функций отличен от нуля в окрестности начала координат. Это отображение есть C^k-диффеоморфизм.

Рассмотрим другую параметризацию h (класса C^k). Обозначим через $u_1, \ldots, u_p$ параметры (в окрестности нуля). Композиция $f \circ h$ определяет $y_1, \ldots, y_p$ как функции от $u_1, \ldots, u_p$ класса C^k с отличным от нуля якобианом. Поэтому h (в окрестности нуля) разлагается в композицию C^k-диффеоморфизма

$$t_i = \lambda_i(u_1, \ldots, u_p) \qquad (1 \leqslant i \leqslant p)$$

и параметризации g. Иначе говоря, если мы имеем *две параметризации (класса C^k) множества M в окрестности точки a, то одна получается из другой при помощи C^k-диффеорморфизма пространства параметров.*

Предложение 4.7.2. *Пусть g — параметризация (класса C^k) многообразия M в окрестности точки a, и пусть $g(0) = a$. Тогда образ линейного отображения*

$$g'(0)\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$$

есть векторное подпространство размерности p, не зависящее от выбора параметризации.

Это пространство называется *касательным пространством* к многообразию M (размерности p) в точке $a \in M$ и обозначается через $T_a(M)$

Доказательство. Пусть h — другая параметризация. Тогда $h = g \circ \lambda$, где λ — некоторый C^k-диффеоморфизм пространства параметров. Имеем

$$h'(0) = g'(0) \circ \lambda'(0),$$

и так как $\lambda'(0)$ — *линейный изоморфизм* $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, то отображения $g'(0)$ и $h'(0)$ имеют один и тот же образ.

Пример. В пространстве $\mathbb{R}^3$ рассмотрим поверхность

$$x_3 = \varphi(x_1, x_2),$$

где φ — функция класса C^k $(k \geqslant 1)$ в окрестности точки $(0, 0)$ и $\varphi(0, 0) = 0$. Мы можем параметризовать поверхность с помощью x_1 и x_2:

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = \varphi(x_1, x_2).$$

Матрица производного отображения в этом случае имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0, 0) \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0, 0) \end{pmatrix};$$

образом этого линейного отображения служит плоскость, определяемая уравнением

$$x_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(0, 0)\cdot x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}(0, 0)\cdot x_2.$$

Пусть теперь U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, M — многообразие размерности p (и класса C^k) в U и ω — дифференциальная форма степени q на U. Функция $\omega(x; \xi_1, \ldots, \xi_q)$ определена при $x \in U$ и $\xi_1, \ldots, \xi_q \in \mathbb{R}^n$. Нас интересуют ее значения на векторах касательного пространства:

$$x \in M \text{ и } \xi_1, \ldots, \xi_q \in T_x(M). \tag{4.7.3}$$

Говорят, что форма ω *индуцирует нулевую форму на многообразии* M, если $\omega(x; \xi_1, \ldots, \xi_q) = 0$ для значений $x, \xi_1, \ldots, \xi_q$, удовлетворяющих условиям (4.7.3). Если f — локальная параметризация многообразия M в окрестности точки a, то «замена переменных» f определяет q-форму $f^*(\omega)$ на пространстве параметров $t_1, \ldots, t_p$. *Для того чтобы форма ω индуцировала нулевую форму на M в окрестности точки a, необходимо и достаточно, чтобы форма $f^*(\omega)$ была тождественным нулем.* [Доказательство этого утверждения весьма просто, и мы предоставляем его читателю в качестве упражнения.]

4.8. Ориентация многообразия

Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^n$ в окрестности точки $a \in M$ является многообразием размерности p и класса C^k ($k \geqslant 1$). По определению две различные параметризации g_1 и g_2 многообразия M в окрестности точки a задают *одинаковую ориентацию* многообразия M (в окрестности точки a), если замена параметров определяется C^k-диффеоморфизмом, якобиан которого >0. Если же замена параметров определяется C^k-диффеоморфизмом, якобиан которого <0, то говорят, что параметризации задают *противоположные ориентации* многообразия M. Таким образом, локальные параметризации многообразия M (в окрестности точки a) разделяются на *два* класса. По определению, каждый из них определяет *ориентацию* многообразия M в окрестности точки a.

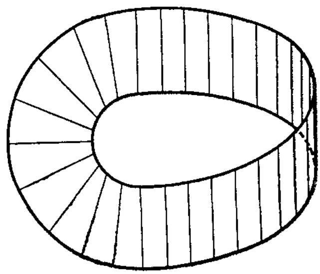

Рис. 12.

Заметим, что если g — некоторая параметризация, то образ линейного отображения $g'(0)$ есть касательное пространство $T_a(M)$. Если мы выберем в пространстве параметров *прямой репер*, т. е. последовательность из p векторов $\tau_1, \ldots, \tau_p$ с определителем большим нуля), то его образ относительно отображения $g'(0)$ будет *базисом* касательного пространства $T_a(H)$, который мы также называем *репером* в пространстве $T_a(M)$. Мы видим, что ориентация многообразия M в окрестности точки a определяется *выбором репера* в векторном пространстве $T_a(M)$. Два репера определяют одну и ту же ориентацию тогда и только тогда, когда один переводится в другой линейным преобразованием пространства $T_a(M)$ с положительным определителем.

Данное многообразие M (размерности p и класса C^k) в $\mathbb{R}^n$ мы можем покрыть открытыми множествами V_i (открытыми в M), для каждого из которых существует параметризация

$$f_i\colon \Omega_i \to V_i$$

с образом V_i. Выбор f_i определяет *ориентацию* M в каждой точке множества V_i. Говорят, что f_i определяют *ориентацию* M, если для любой пары (i, j) функции f_i и f_j задают одну и ту же ориентацию многообразия M в каждой точке из $V_i \cap V_j$.

Многообразие M называется *ориентируемым*, если оно допускает локальные параметризации f_i, ориентирующие M (как это было описано выше). Не всякое многообразие M ориентируемо, даже если оно связно. Типичный пример неориентируемой поверхности — это так называемый «лист Мёбиуса» (рис. 12). Далее мы рассмотрим и примеры ориентируемых многообразий.

4.9. Интегрирование дифференциальной 2-формы на двумерном ориентируемом компактном многообразии класса C^1

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — двумерное *компактное* многообразие класса C^1, причем на M задана *ориентация*, и пусть $\omega \in \Omega_2^{(0)}(U, F)$ — дифференциальная форма степени 2 и класса C^0 в некоторой открытой окрестности U многообразия M. Мы хотим определить интеграл

$$\iint\limits_M \omega \in F.$$

Начнем с того *частного случая*, когда $M \cap (\operatorname{supp} \omega)$ (пересечение M с носителем ω) содержится в связном открытом множестве $V \subset M$ (открытом в топологии M), для которого определена параметризация класса C^1

$$\varphi\colon \Omega \to V,$$

где Ω — связная открытая окрестность нуля в $\mathbb{R}^2$ (с координатами t_1 и t_2). Выберем параметризацию φ так, чтобы она была согласована с заданной *ориентацией* M. Заметим, что $\operatorname{supp} \omega \cap M$ — *компакт*, содержащийся в V. Поэтому $\varphi^{-1}(\operatorname{supp} \omega \cap M)$ — компакт, содержащийся в Ω. Рассмотрим на Ω дифференциальную форму $\varphi^*(\omega)$. Она запишется в виде

$$f(t_1, t_2)\, dt_1 \wedge dt_2,$$

где f — непрерывная функция на Ω с *компактным носителем*. Положим по определению

$$\iint\limits_M \omega = \iint\limits_\Omega f(t_1, t_2)\, dt_1 \wedge dt_2 = \int\limits_\Omega \varphi^*(\omega). \tag{4.9.1}$$

Для того чтобы это определение было корректным, надо доказать, что $\iint\limits_\Omega \varphi^*(\omega)$ *не зависит от выбора параметризации* φ.

Пусть дана другая параметризация

$$\psi\colon \Omega' \to V'$$

открытого множества $V' \subset M$, содержащего компакт $M \cap (\operatorname{supp} \omega)$, и пусть

$$V_1 = V \cap V', \qquad \Omega_1 = \varphi^{-1}(V_1) \subset \Omega, \qquad \Omega_1' = \psi^{-1}(V_1) \subset \Omega'.$$

Тогда

$$\iint\limits_\Omega \varphi^*(\omega) = \iint\limits_{\Omega_1} \varphi^*(\omega), \tag{4.9.2}$$

так как носитель формы $\varphi^*(\omega)$ содержится в Ω_1. Далее,

$$\iint\limits_{\Omega'} \psi^*(\omega) = \iint\limits_{\Omega_1'} \psi^*(\omega). \tag{4.9.3}$$

Но на Ω_1' мы имеем $\psi = \varphi \circ \lambda$, где λ — некоторый C^1-диффеоморфизм $\Omega_1' \to \Omega_1$, *сохраняющий ориентацию* (т. е. с положительным якобианом). Отсюда следует, что

$$\psi^*(\omega) = \lambda^*(\varphi^*(\omega)).$$

По теореме о замене переменных под знаком двойного интеграла (п. 4.6) имеем

$$\iint\limits_{\Omega_1'} \psi^*(\omega) = \iint\limits_{\Omega_1} \varphi^*(\omega)$$

и, значит, ввиду (4.9.2) и (4.9.3),

$$\iint\limits_{\Omega'} \psi^*(\omega) = \iint\limits_{\Omega} \varphi^*(\omega),$$

чем и доказана корректность определения (4.9.1).

Если имеются две такие формы ω_1 и ω_2, что $M \cap (\operatorname{supp} \omega_1)$ и $M \cap (\operatorname{supp} \omega_2)$ содержатся в *одной и той же* открытой окрестности $V \subset M$, обладающей параметризацией класса C^1, то, очевидно,

$$\iint\limits_{M} (\omega_1 + \omega_2) = \iint\limits_{M} \omega_1 + \iint\limits_{M} \omega_2.$$

Это замечание позволяет нам распространить определение $\iint\limits_{M} \omega$ на общий случай, когда на носитель формы ω не налагается столь строгих ограничений.

Перейдем к этому общему случаю. Компактность многообразия M позволяет покрыть его конечным числом открытых (в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$) множеств U_i, причем каждое многообразие $V_i = M \cap U_i$ допускает параметризацию. Поэтому существует компактная окрестность K многообразия M, которая также покрывается множествами U_i. По теореме 4.1.1 на компакте K существует разбиение единицы (f_i), подчиненное покрытию U_i. Имеем

$$\operatorname{supp} f_i \subset U_i,$$
$$\sum_i f_i(x) = 1 \text{ для } x \in K.$$

Таким образом, в окрестности многообразия M форма ω может быть представлена в виде суммы форм

$$\omega_i = f_i \omega,$$

где $M \cap (\operatorname{supp} (\omega_i)) \subset M \cap U_i = V_i$. Поэтому каждая форма ω_i удовлетворяет предположениям «частного случая», изученного выше. Тем самым определен каждый интеграл $\iint\limits_{M} \omega_i$. Положим *по опре-*

делению

$$\iint_M \omega = \sum_i \left(\iint_M \omega_i \right) = \sum_i \left(\iint_M f_i \omega \right). \tag{4.9.4}$$

Корректность этого определения будет установлена, если мы докажем, что правая часть равенства (4.9.4) не зависит от выбора разбиения единицы (f_i). Пусть (g_j) — другое разбиение единицы, подчиненное покрытию (U'_j), и пусть I и J — (конечные) множества индексов i и j соответственно. При любом i имеем $f_i(x) = \sum_{i \in I} f_i(x) g_j(x)$ для всех x из подходящей окрестности на многообразии M. Поэтому дифференциальная форма $f_i\omega$ в некоторой окрестности на многообразии M равна сумме

$$\sum_{j \in J} f_i g_j \omega.$$

Все носители этих форм на многообразии M содержатся в множестве V_i. Поэтому (см. частный случай)

$$\iint_M f_i \omega = \sum_{j \in J} \iint_M f_i g_j \omega.$$

Суммируя по i, получаем

$$\sum_{i \in I} \iint_M f_i \omega = \sum_{i \in I, j \in J} \iint_M f_i g_j \omega.$$

Аналогичным образом

$$\sum_{j \in J} \iint_M g_j \omega = \sum_{i \in I, j \in J} \iint_M f_i g_j \omega.$$

Сравнивая эти два равенства, находим

$$\sum_{i \in I} \iint_M f_i \omega = \sum_{j \in J} \iint_M g_j \omega, \quad \text{ч. т. д.}$$

Итак, интеграл $\iint_M \omega$ определен корректно. Очевидно, он является линейной функцией от ω.

Обобщение. Мы хотим иметь возможность интегрировать по компакту с краем на ориентированном многообразии размерности 2. Более точно: пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — ориентированное многообразие размерности 2 класса C^1, и пусть K — *компакт*, лежащий на многообразии M; обозначим через ∂K границу компакта K на многообразии M (внимание: не следует смешивать эту границу с границей компакта K в пространстве $\mathbb{R}^n$, которая совпадает с K, если $n > 2$).

Определение. Компакт $K \subset M$ называется *компактом с краем класса* C^1, если

(a) ∂K является в $\mathbb{R}^n$ кусочно гладкой кривой класса C^1 (эта кривая, конечно, лежит на многообразии M; она имеет *конечное*, (возможно, пустое) множество угловых точек);

(b) всякая точка $a \in \partial K$, отличная от угловой, имеет такую открытую окрестность V на многообразии M, что $V \cap \complement(\partial K)$ распадается на две связные компоненты: одна из них состоит из точек $V \cap \complement K$, а другая — из точек V, принадлежащих компакту K.

В общем это определение совершенно такое же, как данное нами выше для случая, когда M есть плоскость $\mathbb{R}^2$ (см. п. 4.2). Как и в том случае, мы сопоставляем ориентации многообразия M ориентацию гладких дуг края ∂K. А именно, в каждой неугловой точке $a \in \partial K$ рассмотрим репер (в касательной плоскости $T_a(H)$), первый вектор которого направлен по касательной к ∂K (в сторону, определяемую ориентацией края ∂K), а второй вектор направлен в ту сторону, где лежат внутренние точки компакта K. Построенный таким образом репер — это прямой репер, определяющий ориентацию касательной плоскости $T_a(M)$.

Если ω — дифференциальная 2-форма, заданная в некоторой окрестности компакта K, то $\iint\limits_K \omega$ определяется при помощи разбиения единицы, как это делалось выше.

Теперь теорема Стокса (теорема 4.4.1) обобщается следующим образом.

Теорема 4.9.1. *Если K — компакт с краем класса C^1 на ориентированном двумерном многообразии M (класса C^1) и α — дифференциальная 1-форма класса C^1, заданная в некоторой окрестности компакта K, то*

$$\iint\limits_K d\alpha = \int\limits_{\partial K} \alpha \tag{4.9.5}$$

(*где край ∂K ориентирован описанным выше способом*).

Н а б р о с о к   д о к а з а т е л ь с т в а. При помощи разбиения единицы мы можем свести доказательство равенства (4.9.5) к случаю, когда носитель α в компакте K содержится в некотором открытом множестве $V \subset M$, обладающем параметризацией $\varphi\colon \Omega \to V$. В этом случае левая и правая части равенства (4.9.5) равны соответственно

$$\iint\limits_{\varphi^{-1}(K)} \varphi^*(d\alpha) \quad \text{и} \quad \iint\limits_{\varphi^{-1}(\partial K)} \varphi^*(\alpha).$$

Кроме того, $\varphi^*(d\alpha) = d\varphi^*(\alpha)$ [на самом деле здесь возникает небольшая трудность, если φ не есть форма класса C^2, но мы на ней не останавливаемся]. Положим, $\varphi^*(\alpha)=\beta$ (дифференциальная форма на Ω с компактным носителем). Нам нужно доказать, что

$$\iint\limits_{\varphi^{-1}(K)} d\beta = \int\limits_{\partial(\varphi^{-1}(K))} \beta.$$

Это «почти» формула Стокса: «почти» потому, что множество $\varphi^{-1}(K)$ не компактно. Но это не мешает нам, так как носитель формы β компактен.

Пример. Пусть $n=3$, x, y, z — координаты объемлющего пространства $\mathbb{R}^3$, M — ориентированная *поверхность* в $\mathbb{R}^3$ и K — компакт с краем на поверхности M. Если $\alpha = Pdx + Qdy + Rdz$ (где P, Q, R — функции от x, y, z класса C^1 на некоторой окрестности компакта K), то равенство (4.9.5) переписывается так:

$$\boxed{\iint\limits_K \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\wedge dz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\wedge dx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy = \int\limits_{\partial K} P\,dx+Q\,dy+R\,dz.}$$

4.10. n-кратные интегралы

Мы дадим лишь набросок теории. На плоскости $\mathbb{R}^2$ мы рассматривали компакты с кусочно гладким «краем» класса C^1. Если край ∂K не имеет угловых точек, то мы получаем *компакт с краем класса* C^1. Это последнее понятие мы и обобщим на случай произвольной размерности n. Если бы мы допустили «угловые точки», теория оказалась бы слишком сложной.

Определение. Компакт K в $\mathbb{R}^n$ называется *компактом с краем класса* C^1, если он удовлетворяет следующим двум условиям:

(a) множество его граничных точек ∂K есть (компактное) многообразие размерности $n-1$;

(b) если $a\in\partial K$, то существует такой C^1-диффеоморфизм φ некоторой открытой окрестности V точки a на открытый шар B, что

1) $\varphi(a)=0$;

2) $\varphi(K\cap V)$ есть множество тех точек B, для которых первая координата $x_1\leqslant 0$;

3) $\varphi((\partial K)\cap V)$ есть множество тех точек B, для которых $x_1=0$.

Для $n=2$ это определение совпадает с уже данным.

Ориентацию многообразия ∂K размерности $n-1$ мы определим следующим образом. Для всякой точки $a\in\partial K$ выберем такой репер $(e_1, \ldots, e_n)$ (базис в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$), что

(i) этот репер *прямой* (его определитель >0);

(ii) вектор e_1 направлен в сторону *внешних* точек компакта K, а $e_2, \ldots, e_n$ суть *касательные* векторы к краю ∂K.
Тогда $(e_2, \ldots, e_n)$ является тем базисом касательного пространства $T_a(\partial K)$, который это пространство *ориентирует*. Легко проверить, что выбранная ориентация определена корректно. Ясно, если в условии (b) взять диффеоморфизм φ с положительным якобианом, то он индуцирует C^1-диффеоморфизм подпространства $x_1 = 0$ (ориентированного координатами $x_2, \ldots, x_n$, в этом порядке) на $(\partial K) \cap V$, определяющий ориентацию ∂K в окрестности a.

Замечание. Отсюда следует, что край компакта с краем всегда является ориентируемым многообразием.

Упражнение. Проверить, что для $n = 2$ только что данное определение ориентации совпадает с определением из п. 4.2.

Нам нужно теперь как-то записывать n-кратные интегралы. Для того чтобы не писать n раз подряд знак $\int$, будем писать просто $\int\limits^{(n)}$. Пусть ω — дифференциальная n-форма класса C^0 в некоторой окрестности компакта K. Тогда

$$\omega = f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где функция f непрерывна в окрестности компакта K. Как и в случае $n = 2$, положим по определению

$$\int\limits_K^{(n)} \omega = \int\limits_{\mathbb{R}^n}^{(n)} \bar f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где $\bar f$ обозначает функцию, равную f на K и 0 вне K. Эта функция интегрируема по Лебегу и даже по Риману, если K — компакт с краем. Введенный интеграл обладает всеми классическими свойствами, которые формулируются аналогично свойствам (i), (ii), (iii), (iv) из п. 4.3.

Теперь приведем две основные теоремы нашей теории.

Теорема I$_n$ (замена переменных). *Пусть φ — некоторый C^1-диффеоморфизм связной открытой окрестности $U \supset K$ на открытую окрестность $U' \subset \mathbb{R}^n$. Если ω — дифференциальная n-форма класса C^0 на U', то*

$$\int\limits_{\varphi(K)}^{(n)} \omega = \varepsilon \int\limits_K^{(n)} \varphi^*(\omega),$$

где $\varepsilon = +1$, если φ сохраняет ориентацию (якобиан > 0), и $\varepsilon = -1$ в противном случае.

Как только эта теорема доказана, для всякого ориентированного компактного многообразия M размерности n класса C^1 в пространстве $\mathbb{R}^p$ $(p > n)$ и всякой n-формы ω на некоторой окрестности многообразия M можно определить интеграл

$$\overset{(n)}{\int_M} \omega.$$

Для этого, так же как и в п. 4.9, достаточно воспользоваться разбиением единицы. Заметим, что если носитель формы ω пересекается с M по компакту, содержащемуся в некотором открытом множестве $V \subset M$, для которого существует параметризация, то интеграл

$$\overset{(n)}{\int_M} \omega$$

определяется при помощи этой параметризации и *не зависит от выбора параметризации* (именно здесь используется теорема I_n).

Теорема II_n (формула Стокса). *Пусть K — компакт с краем класса C^1 в пространстве $\mathbb{R}^n$ и α — дифференциальная $(n-1)$-форма класса C^1 на некоторой окрестности компакта K. Тогда*

$$\boxed{\overset{(n)}{\int_K} d\alpha = \overset{(n-1)}{\int_{\partial K}} \alpha,}$$

где ориентация ∂K определена, как указано выше.

Мы не будем доказывать эти теоремы. Укажем только схему доказательства. Пусть теорема I_{n-1} уже доказана (теорема I_1 хорошо известна). Тогда теорема II_n получается точно так же, как в п. 4.5 из I_1 получается II_2. А именно, нужно воспользоваться разбиением единицы и провести вычисления для форм вида

$$\alpha = P dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Получив II_n, нужно доказывать I_n точно так же, как в п. 4.6 мы доказывали теорему 4.6.2 при помощи формулы Стокса. Мы опускаем детали доказательства, которые довольно скучны.

Можно обобщить теорему II_n на *компакты с краем* на многообразии M (размерности n) в пространстве $\mathbb{R}^p$ $(p > n)$. При этом мы получим теорему, которая в случае $n = 2$ сводится к теореме 4.9.1.

Пример. Рассмотрим теорему II_n для $n = 3$. Пусть K — компакт с краем в $\mathbb{R}^3$. Тогда ∂K — *поверхность* (размерности 2) класса C^1. Пусть α есть 2-форма

$$\alpha = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy,$$

где A, B, C — функции от x, y, z класса C^1 на окрестности компакта K. Тогда

$$\boxed{\iiint\limits_K \left(\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz = \iint\limits_{\partial K} A\, dy \wedge dz + B\, dz \wedge dx + C\, dx \wedge dy}$$

(эту формулу иногда называют формулой Остроградского).

4.11. Дифференциальные формы на многообразии $M \subset \mathbb{R}^n$

По определению дифференциальная форма ω степени q на многообразии M размерности p и класса C^k $(k \geqslant 1)$ — это функция

$$\omega(x;\ \xi_1, \ldots, \xi_q)$$

от точки $x \in M$ и векторов $\xi_1, \ldots, \xi_q$, принадлежащих к касательному пространству $T_x(M)$, причем для любого $x \in M$ отображение

$$(\xi_1, \ldots, \xi_q) \to \omega(x;\ \xi_1, \ldots, \xi_q)$$

есть *знакопеременная полилинейная* функция на векторном пространстве $T_x(M)$.

Очевидно, если на открытом множестве $U \supset M$ задана дифференциальная q-форма α, то она «индуцирует» на M дифференциальную q-форму в только что указанном смысле. Действительно, функция $\alpha(x;\ \xi_1, \ldots, \xi_q)$ определена для точек $x \in U$ и векторов $\xi_1, \ldots, \xi_q \in \mathbb{R}^n$; она является знакопеременной полилинейной функцией от $\xi_1, \ldots, \xi_q$; форма ω получается сужением этой функции α.

Пусть V — открытое множество, содержащееся в M, и $\varphi\colon \Omega \to V$ — параметризация класса C^k (Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^p$). Если ω — дифференциальная q-форма на M, то функция

$$\omega(\varphi(t);\ \varphi'(t\cdot\tau_1, \ldots, \varphi'(t)\cdot\tau_q),$$

где $t \in \Omega$ и $\tau_1, \ldots, \tau_q$ — векторы пространства $\mathbb{R}^p$, есть, очевидно, дифференциальная q-форма на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^p$. Мы будем обозначать эту форму через $\varphi^*(\omega)$. Если $\varphi^*(\omega)$ — форма класса C^h $(h < k)$, то это же верно и для любой другой параметризации класса C^k. [Упражнение. Доказать это утверждение при помощи замены параметров.] Говорят, что q-форма ω *на многообразии M есть форма класса C^h*, если каждая точка многообразия M обладает открытой (в M) окрестностью V, сужение на которую формы ω является формой класса C^h. Заметим, что *понятие дифференциальной*

q-формы класса C^h на многообразии M не имеет смысла, если само многообразие не принадлежит по крайней мере классу C^{h+1}.

Очевидным образом определяется *сумма* двух дифференциальных форм степени q на M. Мы можем также определить понятие *внешнего произведения* форм α и β, воспользовавшись понятием внешнего произведения двух знакопеременных полилинейных форм, введенным в п. 2.2. Равным образом мы можем определить дифференциал $d\omega$ от дифференциальной формы ω класса C^h $(h \geqslant 1)$.

Мы не будем здесь развивать эту теорию.

Пусть M — многообразие класса C^1 размерности p и ω — дифференциальная p-форма на M класса C^0 с компактным носителем. Предположим, что задана *ориентация* многообразия M (так что M ориентируемо). Тогда с помощью способа, указанного в п. 4.10, мы можем определить интеграл $\int\limits_M^{(p)} \omega$. А именно, используя разбиение единицы, мы сводим все к случаю, когда носитель формы ω пересекается с M по компакту, содержащемуся в открытом множестве $V \subset M$, допускающем параметризацию $\varphi\colon \Omega \to V$, которая сохраняет ориентацию многообразия M, а затем полагаем

$$\int\limits_M^{(p)} \omega = \int\limits_\Omega^{p} \varphi^*(\omega);$$

правая часть этого равенства не зависит от выбора параметризации φ.

4.12. Элемент p-мерного обьема на многообразии M размерности p $(M \subset \mathbb{R}^h)$

Пусть M — *ориентируемое* многообразие размерности p и класса C^1. Определим на M дифференциальную p-форму ω класса C^0, называемую *элементом p-мерного объема*. В объемлющем пространстве $\mathbb{R}^n$ имеется известная фундаментальная квадратичная форма (сумма квадратов координат). С ее помощью определяется (евклидова) длина каждого вектора и вводится условие *ортогональности* двух векторов. Пусть теперь x — точка на многообразии M. Касательное пространство $T_x(M)$ есть подпространство размерности p пространства $\mathbb{R}^n$. Выберем *ортонормированный базис* $(e_1, \ldots, e_p)$ в пространстве $T_x(M)$, т. е. базис, образованный попарно ортогональными векторами единичной длины. Выберем этот репер так, чтобы определяемая им ориентация пространства $T_x(M)$ совпадала с заданной ориентацией многообразия M. [Напомним, что ориентация многообразия M определяется в каждой его точке ориентацией касательного пространства.] Если $(e'_1, \ldots, e'_p)$ — другой ортонормированный репер в касательном пространстве с той же ориентацией, то определитель набора векторов $e'_1, \ldots, e'_p$ относительно репера $(e_1, \ldots, e_p)$ равен $+1$.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_p$ — векторы в пространстве $T_x(M)$, и пусть $\det(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ — определитель этой системы относительно базиса $(e_1, \ldots, e_p)$. Модуль этого определителя не зависит от выбора ортонормированного репера: при изменении ориентации на M определитель умножается на -1. Мы можем теперь определить дифференциальную форму ω степени p (*элемент p-мерного объема*), положив

$$\omega(x;\ \xi_1, \ldots, \xi_p) = \det(\xi_1, \ldots, \xi_p) \qquad (4.12.1)$$

для $\xi_1, \ldots, \xi_p \in T_x(M)$. Легко видеть, что эта форма принадлежит к классу C^0, т. е. для параметризации φ класса C^1 форма $\varphi^*(\omega)$ имеет *непрерывные* коэффициенты. Вычисление $\det(\xi_1, \ldots, \xi_p)$ можно проводить следующим образом. Выберем ортонормированный репер $(e_{p+1}, \ldots, e_n)$ в подпространстве размерности $n-p$ пространства $\mathbb{R}^n$, ортогональном к пространству $T_x(M)$, так, чтобы набор векторов

$$(e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$$

имел определитель $+1$ относительно канонического репера в пространстве $\mathbb{R}^n$. Тогда элемент p-мерного объема на многообразии M относительно канонического репера в пространстве $\mathbb{R}^n$ задается равенством

$$\omega(x;\ \xi_1, \ldots, \xi_p) = \det(\xi_1, \ldots, \xi_p, e_{p+1}, \ldots, e_n). \qquad (4.12.2)$$

Объем относительно компактного открытого множества V на многообразии M определяется с помощью интеграла

$$\int\limits_V^{(p)} \omega,$$

где ω — элемент p-мерного объема. Если V допускает параметризацию φ, то этот объем равен

$$\int\limits_\Omega^{(p)} \varphi^*(\omega),$$

где $\varphi^*(\omega)$ имеет вид $f(t_1, \ldots, t_p)\, dt_1 \wedge \ldots \wedge dt_p$. Легко видеть, что всегда

$$f(t_1, \ldots, t_p) > 0.$$

[Мы проверим это на примерах.] Поэтому p-мерный объем всякого непустого открытого множества V строго положителен.

Пример. Пусть $n = 3$, $p = 2$, M — ориентированная *поверхность* в пространстве $\mathbb{R}^3$. Обозначим через x, y, z координаты в $\mathbb{R}^3$. В окрестности каждой точки поверхности M рассмотрим параметризацию φ, определяемую с помощью трех функций класса C^1

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

от двух переменных u и v. Утверждение, что ранг параметризации φ равен 2, эквивалентно условию, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \tag{4.12.3}$$

равен 2. Таким образом, по крайней мере одна из трех величин

$$p=\frac{\partial (y, z)}{\partial (u, v)}; \quad q=\frac{\partial (z, x)}{\partial (u, v)}; \quad r=\frac{\partial (x, y)}{\partial (u, v)}$$

отлична от нуля во всех точках открытого множества Ω на плоскости (u, v).

В точке $(x, y, z) \in M$, соответствующей точке $(u, v) \in \Omega$, *единичный вектор*, *нормальный* к многообразию M,— это вектор e_3 с компонентами

$$\frac{\varepsilon p}{\sqrt{p^2+g^r+r^2}}; \quad \frac{\varepsilon q}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}; \quad \frac{\varepsilon r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}},$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Выберем знак ε так, чтобы репер, образованный векторами (4.12.3) и вектором e_3, был прямым репером, иначе говоря, чтобы определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\varepsilon p}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} & \frac{\varepsilon q}{\sqrt{p^2+q^r+r^2}} & \frac{\varepsilon r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} \end{vmatrix}$$

был >0. Этот определитель равен

$$\varepsilon \frac{p^2+q^2+r^2}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \varepsilon \sqrt{p^2+q^2+r^2}.$$

Мы должны, следовательно, взять $\varepsilon = +1$, и для элемента *2-мерного объема* (или *элемента площади*) ω имеем

$$\varphi^* (\omega) = \sqrt{p^2+q^2+r^2}\, du \wedge dv, \tag{4.12.4}$$

где φ — параметризация данной поверхности.

Предложение 4.12.1. *Если в каждой точке ориентированной поверхности M единичный нормальный вектор имеет компоненты* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, *то форма* ω, *задающая элемент площади, равна*

$$\cos\alpha\, dy \wedge dz + \cos\beta\, dz \wedge dx + \cos\gamma\, dx \wedge dy. \tag{4.12.5}$$

Доказательство. Утверждение следует из того факта, что $dy \wedge dz = p\, du \wedge dv$, $dz \wedge dx = q\, du \wedge dv$, $dx \wedge dy = r\, du \wedge dv$.

Другой пример. Пусть $n = 3$, $p = 1$, так что речь идет об *ориентированной кривой* C в пространстве $\mathbb{R}^3$. Элемент 1-мерного объема называется *элементом длины* кривой. Это дифференциальная 1-форма на кривой. Если координаты x, y, z точек кривой суть функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ класса C^1, производные от которых $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ нигде не обращаются в нуль одновременно, то элемент длины равен

$$\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

в предположении, что ориентация соответствует возрастанию параметра t.

Если кривая C лежит на поверхности M (параметризованной параметрами u и v), то эта кривая определяется заданием u и v как функций от параметра t. Элемент длины приобретает в этом случае вид

$$\sqrt{Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2}\, dt,$$

где

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2.$$

Заметим, что если мы знаем функции E, F и G, то мы можем вычислить элемент площади $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}\, du \wedge dv$, воспользовавшись соотношением

$$\boxed{p^2 + q^2 + r^2 = EG - F^2,} \tag{4.12.6}$$

которое следует из тождества Лагранжа

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2 =$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2.$$

Таким образом, знание элемента длины на поверхности дает возможность определить и элемент площади (с точностью до знака).

§ 5. МАКСИМУМ И МИНИМУМ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ НА МНОГООБРАЗИИ

Мы отсылаем читателя к ч. I, гл. 1, § 8, где определено понятие локального минимума действительной функции f, заданной на открытом подмножестве банахова пространства E. В настоящем параграфе всюду $E = \mathbb{R}^n$.

5.1. Условия первого порядка

Пусть M — многообразие класса C^1 в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $f\colon U \to \mathbb{R}$ — функция класса C^1 на открытом множестве U, содержащем многообразие M. Рассмотрим функцию $g\colon M \to \mathbb{R}$, получающуюся *сужением* функции f, и рассмотрим вопрос, имеет ли функция g в точке $a \in M$ *локальный минимум*, иначе говоря, имеет ли место соотношение

$$f(x) \geqslant f(a)$$

для любой точки $x \in M$ из достаточно малой окрестности точки a. Функция g имеет *строгий локальный минимум*, если существует такая окрестность V точки a, что

$$f(x) > f(a)$$

для любой точки $x \in M \cap V$, отличной от точки a. Мы установим далее три утверждения, аналогичных соответственно предложению 8.1.1, теореме 8.2.1 и теореме 8.3.3 из гл. 1 ч. I.

Предложение 5.1.1. *Если сужение g функции f на многообразие M имеет локальный минимум в точке $a \in M$, то производная*

$$f'(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$$

обращается в нуль на касательном пространстве $T_a(M) \subset \mathbb{R}^n$ [*необходимое* условие локального минимума].

Доказательство. Пусть $\varphi\colon \Omega \to M$ — параметризация класса C^1 некоторой окрестности точки a на многообразии M, причем $\varphi(0) = a$. Для того чтобы функция $f \circ \varphi$ имела локальный минимум в точке 0, необходимо (см. ч. I, гл. 1, предложение 8.1.1), чтобы

$$(f \circ \varphi)'(0) = 0,$$

т. е. чтобы

$$f'(a) \circ \varphi'(0) = 0.$$

Следовательно, $f'(a) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ обращается в нуль на образе отображения $\varphi'(0)$, который в точности совпадает с касательным пространством $T_a(M)$, ч. т. д.

5.2. Условия второго порядка

Далее мы будем предполагать, что M — многообразие класса C^2, а f — функция класса C^2. Билинейная форма $f''(a)$ индуцирует билинейное симметрическое отображение.

$$T_a(M) \times T_a(M) \to \mathbb{R}.$$

Но нас будет интересовать другая билинейная симметрическая форма

$$\Phi\colon T_a(M) \times T_a(M) \to \mathbb{R}.$$

Для того чтобы определить ее, напомним прежде всего, что если φ — параметризация $\Omega \to M$ класса C^1, такая, что $\varphi(0) = a$ (здесь Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^p$, содержащее начало координат), то $\varphi'(0)$ есть линейный изоморфизм пространства $\mathbb{R}^p$ на касательное пространство $T_a(M)$. Пусть φ — отображение класса C^2. Определим форму Φ для $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}^p$ равенством

$$\Phi(\varphi'(0)\cdot\tau_1,\ \varphi'(0)\cdot\tau_2) = (f\circ\varphi)''(0)\cdot(\tau_1,\ \tau_2). \tag{5.2.1}$$

Мы утверждаем, что определенная таким образом форма Φ *не зависит от выбора параметризации* φ. Действительно, заменим φ на $\psi = \varphi\circ\lambda$, где λ — некоторый C^2-диффеоморфизм окрестности нуля (в $\mathbb{R}^p$) на окрестность нуля (в $\mathbb{R}^p$). Тогда $\psi'(0) = \varphi'(0)\circ\lambda'(0)$, и нам надо показать, что

$$\Phi(\varphi'(0)\circ\lambda'(0))\,\tau_1,\ \varphi'(0)\cdot\lambda'(0)\cdot\tau_2) = (f\circ\varphi\circ\lambda)''(0)\cdot(\tau_1,\ \tau_2). \tag{5.2.2}$$

Положим для простоты $f\circ\varphi = h$. По формуле (7.5.1) из гл. 1 ч. I (для вычисления второй производной от сложной функции) имеем

$$(h\circ\lambda)''(0)\cdot(\tau_1,\ \tau_2) = h''(0)\cdot(\lambda'(0)\cdot\tau_1,\ \lambda'(0)\cdot\tau_2) + h'(0)\cdot(\lambda''(0)\cdot(\tau_1,\ \tau_2)).$$

Но так как функция $f\circ\varphi = h$ имеет локальный минимум в начале координат, то $h'(0) = 0$. Поэтому правая часть равенства (5.2.2) равна

$$h''(0)\cdot(\lambda'(0)\cdot\tau_1,\ \lambda'(0)\cdot\tau_2).$$

В силу формулы (5.2.1), в которой мы заменяем τ_1 на $\lambda'(0)\cdot\tau_1$ и τ_2 на $\lambda'(0)\cdot\tau_2$, это выражение равно левой части равенства (5.5.2). Тем самым это равенство доказано, и, следовательно, билинейная форма Φ не зависит от выбора параметризации φ.

Замечание. Если применить к правой части равенства (5.2.1) формулу (7.5.1) из гл. 1, то мы получим для $\xi_1 \in T_a(M)$ и $\xi_2 \in T_a(M)$

$$\Phi(\xi_1,\ \xi_2) = f''(a)\cdot(\xi_1,\ \xi_2) + f'(a)\cdot(\varphi''(0)\cdot(\varphi'(0)^{-1}\,\xi_1,\ \varphi'(0)^{-1}\,\xi_2)). \tag{5.2.3}$$

Поэтому *не надо смешивать форму Φ с билинейной формой, индуцированной на $T_a(M)$ отображением $f''(a)$.*

Предложение 5.2.1. *Для того чтобы сужение функции f на многообразие M имело локальный минимум в точке $a \in M$, необходимо, чтобы*

$$\Phi(\xi,\ \xi) \geqslant 0 \quad \textit{для всех} \quad \xi \in T_a(M).$$

Доказательство. Это условие эквивалентно условию

$$(f\circ\varphi)''(0)\cdot(\tau,\ \tau) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad \tau \in \mathbb{R}^p,$$

а как мы знаем (гл. 1, теорема 8.2.1), это условие *необходимо* для того, чтобы функция $f \circ \varphi$ имела локальный минимум в начале координат, ч. т. д.

Предложение 5.2.2. *Для того чтобы сужение функции f на многообразие M имело строгий локальный минимум в точке $a \in M$, достаточно, чтобы*

$\Phi(\xi, \xi) > 0$ *для всех отличных от нуля векторов* $\xi \in T_a(M)$.

Доказательство. Это условие означает, что билинейная форма $(f \circ \varphi)''(0)$ *положительно определена и невырожденна.* Но мы знаем (гл. 1, теорема 8.3.3), что это условие *достаточно* для того, чтобы функция $f \circ \varphi$ имела *строгий* локальный минимум в начале координат, ч. т. д.

§ 6. ТЕОРЕМА ФРОБЕНИУСА

6.1. Постановка задачи

В главе 2 мы изучали дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x),$$

где t — действительная переменная и x — неизвестная функция от t со значениями в банаховом пространстве E.

Теперь мы заменим переменную $t \in \mathbb{R}$ на переменную $x \in E$ (где E — банахово пространство); y будет теперь неизвестной функцией от x со значениями в банаховом пространстве F. Таким образом, мы рассматриваем «дифференциальное уравнение» вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{6.1.1}$$

В этом случае производная $\partial y/\partial x$ функции y по x — это функция со значениями в пространстве $\mathscr{L}(E; F)$, так что значения заданной функции $f(x, y)$ должны принадлежать к пространству $\mathscr{L}(E; F)$. Более точно, пусть U — открытое множество в произведении $E \times F$ и

$$f\colon U \to \mathscr{L}(E; F)$$

— функция класса C^1. Тогда *решением* уравнения (6.1.1) мы назовем всякую функцию $y = \varphi(x)$ класса C^1 на открытом множестве $V \subset E$ со значениями в F, такую, что

(i) пара $(x, \varphi(x)) \in U$ для всех $x \in V$;

(ii) $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ для всех $x \in V$.

Пример. Пусть $F = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^n$. Тогда уравнение (6.1.1) принимает вид

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = f_i(x_1, \ldots, x_n, y), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{6.1.2}$$

где n скалярных функций f_i заданы на некотором открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и принадлежат к классу C^1. Решение — это такая скалярная функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, что

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n, \varphi)\, dx_i.$$

Поэтому мы можем записать уравнение (6.1.2) в виде

$$dy = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n, y)\, dx_i. \tag{6.1.3}$$

Его решения — это функции $y(x_1, \ldots, x_n)$, обращающие в нуль дифференциальную форму $dy - \sum_{i=1}^{n} f_i\, dx_i$. Уравнения вида (6.1.3) часто называют «уравнениями в полных дифференциалах».

Вернемся к общему уравнению (6.1.1). Неизвестная функция $y = \varphi(x)$ должна обращать в нуль дифференциальную форму

$$dy - f(x, y)\cdot dx. \tag{6.1.4}$$

Форма (6.1.4) — это дифференциальная форма степени 1 на открытом множестве $U \subset E \times F$ со значениями в F, сопоставляющая точке $(x, y) \in U$ и вектору $(\xi, \eta) \in E \times F$ вектор

$$\eta - f(x, y)\cdot\xi \in F.$$

При помощи «замены переменных»

$$x = x, \quad y = \varphi(x) \tag{6.1.5}$$

она определяет дифференциальную форму

$$\varphi'(x)\cdot dx - f(x, \varphi(x))\cdot dx$$

на открытом множестве $V \subset E$ со значениями в F. Функция $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (6.1.1) в том и только том случае, если дифференциальная форма, которая получается из формы (6.1.4) при замене переменных (6.1.5), есть *нулевая* форма.

Это подсказывает нам следующее обобщение понятия «решения» уравнения (6.1.1): решением будет всякая система из двух функций $x(t)$, $y(t)$ от переменной t (пробегающей открытое подмножество W некоторого банахова пространства G), такая, что замена переменных

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

приводит дифференциальную форму (6.1.4) к нулевой форме. Иначе говоря, должно иметь место равенство

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(x(t), y(t)) \circ \frac{dx}{dt} \tag{6.1.6}$$

[это равенство двух функций со значениями в пространстве $\mathcal{L}(G; F)$].

В частности, если t — действительное переменное, то множество точек

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

называется *интегральной кривой* уравнения (6.1.1), если эти функции удовлетворяют равенству (6.1.6) [равенство двух функций со значениями в F].

6.2. Первая теорема существования

Мы сохраняем все обозначения предыдущего параграфа. Возьмем точку $(x_0, y_0) \in U$ и рассмотрим вопрос о том, когда в некоторой окрестности V точки $x_0 \in E$ существует решение $y = \varphi(x)$, такое, что $y_0 = \varphi(x_0)$ [решение с начальным значением y_0 при $x = x_0$]. Мы увидим сейчас, что *такое решение существует далеко не всегда.*

Теорема 6.2.1. *Для каждой точки $(x_0, y_0) \in U$ существует такое (достаточно малое) число $r > 0$, что в шаре $\| x - x_0 \| < r$ существует одна и только одна функция $\varphi(x)$ класса C^1 со значениями в пространстве F, удовлетворяющая условиям*

$$\varphi(x_0) = y_0, \tag{6.2.1}$$

$$\boxed{\varphi'(x)\cdot(x - x_0) = f(x, \varphi(x))\cdot(x - x_0)} \tag{6.2.2}$$

для всех x из шара $\| x - x_0 \| < r$.

Пояснение. Условие (6.2.2) значительно слабее, чем условие $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$. Выполнение условия (6.2.2) означает только, что для заданной точки x функции $\varphi'(x)$ и $f(x, \varphi(x))$ суть элементы пространства $\mathscr{L}(E; F)$, принимающие одинаковые значения на векторах пространства E, *пропорциональных* вектору $x - x_0$. Отсюда, конечно, никак не следует, что они принимают одинаковые значения на *всех* векторах пространства E, как это имеет место в случае, когда функция φ является решением.

Функция φ, удовлетворяющая условию (6.2.2), называется *псевдорешением* уравнения (6.1.1). Теорема 6.2.1 утверждает, что для любых начальных данных (x_0, y_0) существует одно и *только одно* псевдорешение в окрестности точки x_0.

Доказательство. Фиксируем ненулевой вектор $\xi \in E$ и рассмотрим в пространстве E прямую

$$x = x_0 + t\xi, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Будем искать интегральную кривую (см. конец п. 6.1) в виде

$$x = x_0 + t\xi, \quad y = \psi(t), \tag{6.2.3}$$

где $\psi(0) = y_0$. Так как $dx/dt = \xi$, то условие, что (6.2.3) есть интегральная кривая, принимает вид

$$\psi'(t) = f(x_0 + t\xi, \psi(t)) \cdot \xi. \tag{6.2.4}$$

Иначе говоря, функция $y = \psi(t)$ является (в окрестности точки $t = 0$) решением (обыкновенного) дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dt} = f(x_0 + t\xi, y) \cdot \xi \tag{6.2.5}$$

с начальным значением y_0 при $t = 0$.

Если $\| \xi \| \leqslant a$ (где число $a > 0$ достаточно мало), то такое решение $\psi(t)$ существует на всем интервале $-1 \leqslant t \leqslant +1$. Действительно, так как f — функция класса C^1, то существуют числа $\rho > 0$, $r > 0$, k и $M > 0$, такие, что

$$\| f(x, y \| \leqslant M \quad \text{и} \quad \| f'_y(x, y) \| \leqslant k \quad \text{для} \quad \| x - x_0 \| \leqslant r, \ \| y - y_0 \| \leqslant \rho.$$

Мы можем считать (уменьшив, если надо, число ρ), что $\rho \leqslant Mr$. Возьмем $a = \rho/M$. Тогда при $\| \xi \| \leqslant a$

$$\| f(x_0 + t\xi, y) \cdot \xi \| \leqslant Ma \quad \text{для} \quad | t | \leqslant 1, \ \| y - y_0 \| \leqslant \rho.$$

Отсюда следует существование решения $y = \psi(t)$ (с $\psi(0) = y_0$ в интервале $| t | \leqslant \rho/(Ma) = 1$.

Далее мы везде будем обозначать через $\psi(t, \xi)$ решение уравнения (6.2.5) с начальным значением y_0 при $t = 0$. Эта функция зависит от вектора $\xi \in E$. Так как функция $f(x_0 + t\xi, y) \cdot \xi$ принадлежит к классу C^1 в точке (t, ξ, y), то и функция $\psi(t, \xi)$ принадлежит к этому же классу (ч. I, гл. 2, теорема 3.6.1). Далее, если мы заменим t на λt, а ξ на $(1/\lambda)\,\xi$ (где λ — действительное число $\neq 0$), то уравнение (6.2.5) не изменится. Поэтому функция $\psi(t, \xi)$ *зависит только от произведения* $t\xi$:

$$\psi(t, \xi) = \psi(1, t\xi).$$

Для $x = x_0 + t\xi$ (ξ фиксировано, t меняется) соотношение (6.2.2) эквивалентно (при $t \neq 0$) соотношению

$$\varphi'(x_0 + t\xi) \cdot \xi = f(x_0 + t\xi, \varphi(x_0 + t\xi)) \cdot \xi.$$

Сравнивая это равенство с равенством (6.2.4), мы видим, что

$$\varphi(x_0 + t\xi) = \psi(1, t\xi).$$

Иначе говоря,

$$\boxed{\varphi(x) = \psi(1, x - x_0).} \tag{6.2.6}$$

Это равенство определяет функцию φ, и тем самым доказательство теоремы 6.2.1 закончено.

6.3. Вторая теорема существования

Остается решить следующий вопрос: каким условиям должно удовлетворять дифференциальное уравнение (6.1.1) для того, чтобы его псевдорешение $\varphi(x)$, существование которого утверждается теоремой 6.2.1, являлось настоящим решением, иначе говоря, чтобы

$$\varphi'(x)\cdot\eta = f(x, \varphi(x))\cdot\eta$$

для любого $\eta \in E$ и любого x, достаточно близкого к x_0.

Теорема 6.3.1. *Для того чтобы псевдорешение φ было настоящим решением, необходимо и достаточно, чтобы функция f удовлетворяла следующему условию: для любого x (из некоторой окрестности точки x_0) элемент*

$$f'_x(x, \varphi(x)) + f'_y(x, \varphi(x)) \circ f(x, \varphi(x)) \in \mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$$

должен определять симметрический элемент пространства $\mathcal{L}_2(E; F)$ [при каноническом отождествлении пространств $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ и $\mathcal{L}_2(E; F)$].

Иначе говоря, для любых ξ и $\eta \in E$ должно иметь место равенство

$$((f'_x + f'_y \circ f)\cdot\xi)\cdot\eta = ((f'_x + f'_y \circ f)\cdot\eta)\cdot\xi \tag{6.3.1}$$

[значения функций f, f'_x, f'_y берутся в точке $(x, \varphi(x))$].

Пояснение. Для каждой точки $(x, \varphi(x))$ значение f'_x принадлежит пространству $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$, значение f — пространству $\mathcal{L}(E; F)$, значение f'_y — пространству $\mathcal{L}(F; \mathcal{L}(E; F))$ и значение $f'_y \circ f$ — пространству $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$ как композиция

$$E \xrightarrow{f(x, \varphi(x))} F \xrightarrow{f'_y(x, \varphi(x))} \mathcal{L}(E, F).$$

Так как значение $f'_x + f'_y \circ f$ в точке $(x, \varphi(x))$ есть элемент пространства $\mathcal{L}(E; \mathcal{L}(E; F))$, то значение

$$(f'_x + f'_y \circ f)\cdot\xi$$

есть элемент пространства $\mathcal{L}(E; F)$. Мы можем применить это отображение к вектору $\eta \in E$ и получить вектор пространства F: этот вектор как раз и стоит в левой части равенства (6.3.1). Аналогично интерпретируется правая часть.

Доказательство. (1) *Условие* (6.3.1) *необходимо для того, чтобы функция φ была решением.* Действительно, пусть

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)).$$

Так как функции $f(x, y)$ и $\varphi(x)$ принадлежат к классу C^1, то из последнего равенства вытекает, что функция φ принадлежит к классу C^2 и

$$\varphi''(x)\cdot\xi = (f'_x + f'_y \circ \varphi')\cdot\xi.$$

Отсюда, заменяя $\varphi'(x)$ на $f(x, \varphi(x))$, получаем

$$\varphi''(x)\cdot\xi = (f'_x + f'_y \circ f)\cdot\xi$$

и, следовательно,

$$(\varphi''(x)\cdot\xi)\cdot\eta = ((f'_x + f'_y \circ f)\cdot\xi)\cdot\eta.$$

Поскольку левая часть этого равенства *симметрична* по ξ и η (ч. I, гл. 1, теорема 5.1.1), то и правая часть тоже симметрична, откуда и следует равенство (6.3.1), ч. т. д.

Следующий пункт посвящен доказательству того факта, что условие (6.3.1) *достаточно* для того, чтобы функция φ являлась решением.

6.4. Завершение доказательства второй теоремы существования (теоремы 6.3.1)

Остается доказать, что (2) *условие* (6.3.1) *достаточно для того, чтобы псевдорешение* $\varphi(x)$ *было настоящим решением.*

Напомним, что в силу условия (6.2.2)

$$\varphi'(x_0 + t\xi)\cdot\xi = f(x_0 + t\xi, \ \varphi(x_0 + t\xi))\cdot\xi \tag{6.4.1}$$

для любого $\xi \in E$ с $\|\xi\| \leqslant a$ и любого $t \in \mathbb{R}$ с $|t| \leqslant 1$. Мы должны показать, что при тех же предположениях относительно ξ и t

$$\varphi'(x_0 + t\xi)\cdot\eta = f(x_0 + t\xi, \ \varphi(x_0 + t\xi))\cdot\eta \tag{6.4.2}$$

для любого вектора $\eta \in E$. Фиксируем векторы ξ и η и рассмотрим функцию

$$H(t) = t\varphi'(x_0 + t\xi)\cdot\eta - tf(x_0 + t\xi, \ \varphi(x_0 + t\xi))\cdot\eta, \quad |t| \leqslant 1,$$

со значениями в банаховом пространстве F. Достаточно доказать, что $H(t) = 0$ для любого t. Действительно, для $t \neq 0$ равенство $H(t) = 0$ влечет за собой равенство (6.4.2), которое будет справедливо и для $t = 0$ по непрерывности.

Чтобы установить равенство $H(t) = 0$, покажем, что функция $H(t)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению. Так как $H(0) = 0$, то отсюда будет следовать, что функция H тождественно равна нулю.

Докажем прежде всего, что функция $H(t)$ дифференцируема. Для этого напомним, что (см. п. 6.2)

$$\varphi(x_0 + t\xi) = \psi(t, \ \xi),$$

где ψ (как функция от t) есть решение дифференциального уравнения (6.2.4):

$$\frac{dy}{dt} = f(x_0 + t\xi, \ y)\cdot\xi$$

(последнее принадлежит к классу C^1 по переменному ξ). Следовательно, решение этого уравнения $\psi(t, \xi)$ принадлежит к классу C^1 по параметру ξ, а производная $\partial\psi/\partial\xi$ дифференцируема по t, причем

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial\xi}[f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\xi]$$

(ч. I, гл. 2, теорема 3.6.1). Так как

$$H(t)=\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cdot\eta-tf(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\eta, \tag{6.4.3}$$

то производная dH/dt существует и равна

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial}{\partial\xi}[f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\xi]\cdot\eta-$$
$$-f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\eta-t((f'_x+f'_y\circ\varphi')\cdot\xi)\cdot\eta. \tag{6.4.4}$$

Здесь f'_x обозначает величину

$$f'_x(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi)),$$

f'_y обозначает величину

$$f'_y(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi)),$$

а φ' обозначает величину $\varphi'(x_0+t\xi)$. В силу соотношения (6.4.1) мы можем в правой части равенства (6.4.4) заменить $(f'_y\circ\varphi')\cdot\xi$ на $(f'_y\circ f)\cdot\xi$. С другой стороны, по формуле производной билинейной функции имеем

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\xi]\cdot\eta=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\xi}[f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\eta]\cdot\xi+f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\eta.$$

Подставляя это выражение в (6.4.4), получаем после некоторых упрощений

$$\frac{dH}{dt}=\frac{\partial}{\partial\xi}[f(\ldots)\cdot\eta]\cdot\xi-t((f'_x+f'_y\circ f)\cdot\xi)\cdot\eta \tag{6.4.5}$$

Далее,

$$\frac{\partial}{\partial\xi}[f(x_0+t\xi, \varphi(x_0+t\xi))\cdot\eta]=t(f'_x+f'_y\circ\varphi')\cdot\eta.$$

С другой стороны, *по предположению* (см. формулировку теоремы 6.3.1)

$$((f'_x+f'_y\circ f)\cdot\xi)\cdot\eta=((f'_x+f'_y\circ f)\cdot\eta)\cdot\xi.$$

Окончательно,

$$\frac{dH}{dt}=t[(f'_y\circ(\varphi'-f))\cdot\eta]\cdot\xi=[(f'_y\circ(t\varphi'-tf))\cdot\eta]\cdot\xi, \tag{6.4.6}$$

и так как по определению $(t\varphi' - tf)\cdot\eta = H(t)$, получаем

$$\boxed{\frac{dH}{dt} = (f'_y \circ H)\cdot\xi.} \tag{6.4.7}$$

Правая часть уравнения (6.4.7), очевидно, линейна и непрерывна по H [напомним, что значения $H(t)$ лежат в банаховом пространстве F, значения $f'_y \circ H$ — в пространстве $\mathscr{L}(E;\ F)$, как и значения функции f; правая часть равенства (6.4.7) есть элемент пространства F, а именно значение функции $f'_y \circ H$ на векторе $\xi \in E$].

Таким образом, как мы и утверждали, $H(t)$ удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению (6.4.7), причем $H(0) = 0$. Отсюда следует, что функция $H(t)$ тождественно равна нулю, ч. т. д.

Тем самым доказательство теоремы 6.3.1 закончено.

6.5. Основная теорема

Из теоремы 6.3.1 вытекают интересные следствия. Всюду ниже остаются в силе предположения п. 6.1: рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x,\ y), \tag{6.5.1}$$

где $f\colon U \to \mathscr{L}(E;\ F)$ — функция класса C^1. Будем искать ответ на вопрос: *для каких точек* $(x_0,\ y_0) \in U$ это уравнение имеет (настоящее) решение $y = \varphi(x)$, определенное для точек x, лежащих в некоторой окрестности точки x_0, и удовлетворяющее начальному условию

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Короче говоря, ставится вопрос, когда уравнение (6.5.1) имеет локальное решение *для произвольных начальных данных* $(x_0,\ y_0) \in U$.

Основная теорема 6.5.1. *Для того чтобы так было, необходимо и достаточно, чтобы для любой точки* $(x,\ y) \in U$ *элемент* $f'_x(x,\ y) + f'_y(x,\ y)\circ f(x,\ y) \in \mathscr{L}(E;\ \mathscr{L}(E;\ F))$ *определял симметрический элемент из* $\mathscr{L}_2(E;\ F)$, *иначе говоря, чтобы равенство*

$$((f'_x(x,\ y) + f'_y(x,\ y)\circ f(x,\ y))\cdot\xi)\cdot\eta = ((f'_x(x,\ y) + f'_y(x,\ y)\circ f(x,\ y))\cdot\eta)\cdot\xi \tag{6.5.2}$$

имело место для любых векторов $\xi,\ \eta \in E$ *и любых точек* $(x,\ y) \in U$.

Это очевидное следствие теоремы 6.3.1.

Определение. Если выполнено условие (6.5.2), то уравнение (6.5.1) называется *вполне интегрируемым*.

З а м е ч а н и е. Если пространство E имеет размерность 1, то уравнение (6.5.1) всегда вполне интегрируемо (так как в этом случае ξ и η пропорциональны). Уравнение (6.5.1) в этом случае — это обыкновенное дифференциальное уравнение.

Д о п о л н е н и е к о с н о в н о й т е о р е м е (без доказательства). Фиксируем точку x_0 и будем варьировать точку y_0. Пусть

$$y = \varphi(x, y_0) \tag{6.5.3}$$

— решение, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$. Можно показать, что в этом случае $\varphi(x, y_0)$ есть функция класса C^1, причем $(\partial\varphi/\partial y_0)(x, y_0) \in \mathrm{Isom}(F, F)$. Следовательно, можно разрешить уравнение (6.5.3) относительно y_0 (теорема о неявных функциях):

$$y_0 = \psi(x, y), \tag{6.5.4}$$

причем ψ будет функцией класса C^1. Таким образом, функция $\psi(x, y)$ со значениями в F *постоянна* на любом решении $y = \varphi(x)$ уравнения (6.5.1) в предположении, что последнее вполне интегрируемо.

П р и м е р. Пусть $E = \mathbb{R}^p$, $F = \mathbb{R}^{n-p}$, U — открытое множество в пространстве $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$. Функция

$$\psi(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_{n-p})$$

принимает значения в пространстве $\mathbb{R}^{n-p}$ и ее $n - p$ скалярных компонент $\psi_j(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_{n-p})$ постоянны на любом решении уравнения (6.5.1)

$$y_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_p) \quad (1 \leqslant j \leqslant n - p).$$

Это так называемые «первые интегралы» уравнения (6.5.1).

6.6. Интерпретации в терминах дифференциальных форм

Мы сохраняем обозначения п. 6.1. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\omega = dy - f(x, y)\cdot dx.$$

Это дифференциальная форма первой степени, определенная на открытом множестве $U \subset E \times F$ и принимающая значения в пространстве F. Ее внешний дифференциал равен

$$d\omega = -df \wedge_\Phi dx,$$

где Φ — каноническое билинейное отображение

$$\mathscr{L}(E; F) \times E \to F;$$

которое сопоставляет паре (f, u) значение отображения $f \in \mathscr{L}(E; F)$ на векторе $u \in E$. Распишем внешний дифференциал:

$$d\omega = -\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) \wedge_\Phi dx - \left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) \wedge_\Phi dx$$

и заменим в этом выражении dy на $f(x, y) \cdot dx$. Мы получим дифференциальную форму степени 2

$$\Omega = -\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ f\right) \cdot dx\right) \wedge_{\Phi} dx$$

со значениями в F. Значение формы Ω на паре векторов $(\xi, \eta) \in E \times E$ равно (см. п. 2.2)

$$-\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ f\right) \cdot \xi\right) \cdot \eta + \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \circ f\right) \cdot \eta\right) \cdot \xi.$$

Условие полной интегрируемости (6.5.2) означает, что оно равно нулю. Отсюда следует

Теорема 6.6.1. *Для того чтобы уравнение*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы дифференциальная 2-форма Ω (получающаяся заменой в форме $d\omega$ дифференциала dy на $f(x, y)\, dx$) *была тождественно равна нулю.*

Распишем это условие в случае, когда пространства E и F имеют конечную размерность. Пусть $E = \mathbb{R}^p$ и $x_1, \ldots, x_p$ — координаты точек в пространстве E. Пусть далее $F = \mathbb{R}^{n-p}$ и $x_{p+1}, \ldots, x_n$ — координаты точек в пространстве F. Тогда $x_1, \ldots, x_n$ будут координатами точек в пространстве $E \times F = \mathbb{R}^n$. Рассмотрим открытое множество $U \subset \mathbb{R}^n$. Отображение $f\colon U \to \mathscr{L}(E; F)$ определяется матрицей $\{f_{ij}(x)\}$, состоящей из числовых функций $f_{ij}(x_1, \ldots, x_n)$ класса C^1 на множестве U, и дифференциальная форма ω (со значениями в F) определяется $n - p$ дифференциальными формами со скалярными значениями

$$\boxed{\omega_i = dx_i - \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x)\, dx_j, \quad p+1 \leqslant i \leqslant n.} \tag{6.6.1}$$

Решение $y = \varphi(x)$ определяется $n - p$ функциями класса C^1

$$x_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_p), \qquad p+1 \leqslant i \leqslant n. \tag{6.6.2}$$

Замена переменных, определяемая равенствами (6.6.2), обращает в нуль $n - p$ форм ω_i. Иначе говоря, функции φ_i удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} = f_{ij}(x_1, \ldots, x_p, \varphi_{p+1}(x_1, \ldots, x_p), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_p)) \tag{6.6.3}$$

$(1 \leqslant j \leqslant p;\ p+1 \leqslant i \leqslant n)$. Такая система *вполне интегрируема* в том и только том случае, если дифференциальные 2-формы $d\omega_i$

обращаются в нуль при замене dx_i на

$$\sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x)\,dx_j$$

для $i = p+1, \ldots, n$; это в точности совпадает с утверждением теоремы 6.6.1. Мы хотим теперь расписать это условие в явном виде.

Присоединим к формам $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$ такие p форм $\omega_1, \ldots, \omega_p$, чтобы система

$$\omega_1, \ldots, \omega_p, \omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$$

образовывала *базис* для дифференциальных 1-форм (т. е. чтобы любая 1-форма однозначным образом представлялась в виде $\sum_{i=1}^{p} a_i(x)\,\omega_i$, где коэффициенты $a_i(x)$ суть некоторые функции). Например, в качестве таких форм можно взять $\omega_1 = dx_1, \ldots, \omega_p = dx_p$ (читатель проверит сам, что формы $dx_1, \ldots, dx_p, \omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$ образуют базис для дифференциальных 1-форм). Тогда всякая дифференциальная 2-форма Ω однозначно записывается в виде

$$\Omega = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_{ij}(x)\,\omega_i \wedge \omega_j,$$

где коэффициенты b_{ij} суть функции от $x_1, \ldots, x_n$ [это доказывается так же, как и теорема 2.6.2, с помощью теоремы 1.7.1]. Для того чтобы форма Ω обращалась в нуль в результате замены dx_i на $\sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x)\,dx_j$ (при $i = p+1, \ldots, n$), иначе говоря, при замене ω_i на 0 при $p+1 \leqslant i \leqslant n$, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты $b_{ij}(x)$ были тождественно равны нулю для любых i и j, не превосходящих p. Применим этот результат к формам $d\omega_i$ $(p+1 \leqslant i \leqslant n)$. Очевидно, что

$$d\omega_i = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} c_{ijk}(x)\,\omega_j \wedge \omega_k,$$

и *условия полной интегрируемости выражаются равенствами*

$$\boxed{c_{ijk}(x) = 0 \quad \text{для} \quad i > p,\ j \leqslant p,\ k \leqslant p.}$$

Укажем элегантную запись этих условий. Для этого вычислим внешние произведения $(d\omega_i) \wedge \omega_{p+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n$ (для $i > p$). Мы получим:

$$(d\omega_i) \wedge \omega_{p+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant p} c_{ijk}(x)\,\omega_j \wedge \omega_{p+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n,$$

так как если хотя бы один из индексов j, k больше p, то внешнее произведение $\omega_j \wedge \omega_k \wedge \omega_{p+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n$ равно нулю (будут два одинаковых множителя). Условия полной интегрируемости записываются поэтому в виде

$$\boxed{(d\omega_i) \wedge \omega_{p+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n = 0 \quad \text{для} \quad p+1 \leqslant i \leqslant n.} \qquad (6.6.4)$$

Действительно, любая дифференциальная $(n-p+2)$-форма однозначно записывается в виде линейной комбинации форм

$$\omega_{k_1} \wedge \omega_{k_2} \wedge \ldots \wedge \omega_{k_{n-p+2}} \quad (1 \leqslant k_1 < \ldots < k_{n-p+2} \leqslant n)$$

с коэффициентами, являющимися функциями от x. Для того чтобы такая форма тождественно равнялась нулю, необходимо и достаточно, чтобы все ее коэффициенты равнялись нулю.

Напомним, что в условиях (6.6.4) символы ω_i обозначают дифференциальные формы

$$dx_i - \sum_{j=1}^{p} f_{ij}(x)\, dx_j \qquad (p+1 \leqslant i \leqslant n).$$

Предположим теперь, что мы произвели над формами $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n$ линейное преобразование

$$\alpha_i = \sum_{j=p+1}^{n} u_{ij}(x)\, \omega_j,$$

матрица которого $\{u_{ij}(x)\}$ имеет для любого x отличный от нуля определитель. Тогда система

$$\omega_i = 0 \quad (p+1 \leqslant i \leqslant n)$$

эквивалентна системе

$$\alpha_i = 0 \quad (p+1 \leqslant i \leqslant n).$$

Мы утверждаем, что *условия полной интегрируемости эквивалентны равенствам*

$$d\alpha_i \wedge \alpha_{p+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_n = 0 \quad \text{для} \quad p+1 \leqslant i \leqslant n. \qquad (6.6.5)$$

Действительно,

$$\alpha_{p+1} \wedge \ldots \wedge \alpha_n = \det(u_{ij}(x))\, \omega_{p+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Следовательно, условия (6.6.5) равносильны условиям

$$d\alpha_i \wedge \omega_{p+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n = 0.$$

Но

$$d\alpha_i = \sum_j u_{ij}\, d\omega_j + \sum_j (du_{ij}) \wedge \omega_j,$$

так что

$$d\alpha_i \wedge \omega_{p+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n = \sum_{j>p} u_{ij} \cdot d\omega_j \wedge \omega_{p+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n.$$

Следовательно, из (6.6.4) вытекает (6.6.5). Те же рассуждения проходят и в обратном порядке, ч. т. д.

Подытожим полученные результаты (мы пишем ω_i вместо α_i):

Теорема 6.6.2. *Пусть* $(\omega_{p+1}, \ldots, \omega_n)$ — *система из* $n-p$ *дифференциальных форм степени* 1 *класса* C^1 *на открытом множестве* $U \subset \mathbb{R}^n$, *такая, что для любой точки* $x \in U$ *ранг системы* $(\omega_{p+1}, \ldots$ $\ldots, \omega_n)$ *равен* $n-p$. *Система дифференциальных уравнений*

$$\omega_i = 0 \quad (p+1 \leqslant i \leqslant n)$$

(система «уравнений в полных дифференциалах») *вполне интегрируема в том и только том случае, когда дифференциальные формы*

$$d\omega_i \wedge \omega_{p+1} \wedge \ldots \wedge \omega_n \quad (p+1 \leqslant i \leqslant n)$$

равны нулю («условие Фробениуса»).

Пример. Пусть ω — дифференциальная форма степени 1 и класса C^1,

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx_i,$$

коэффициенты которой $a_i(x)$ не обращаются в нуль одновременно. *Для того чтобы уравнение* $\omega = 0$ *было вполне интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\omega \wedge d\omega = 0.$$

[Упражнение. Докажите, что это условие является также достаточным для того, чтобы форма ω допускала интегрирующий множитель, т. е. чтобы существовала такая функция $\mu(x) \neq 0$, что 1-форма $\mu(x)\cdot\omega$ была бы замкнута.] В частности, для $n=3$ (координаты точек в пространстве $\mathbb{R}^3$ обозначим через x, y, z)

$$\omega = P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz,$$

и для того чтобы уравнение $\omega = 0$ было вполне интегрируемым, необходимо и достаточно, чтобы

$$P\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + Q\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 0. \qquad (6.6.6)$$

[Векторное поле (P, Q, R) должно быть ортогональным к своему «вихрю».] Действительно, левая часть равенства (6.6.6) есть коэффициент при $dx \wedge dy \wedge dz$ в канонической записи формы $\omega \wedge d\omega$.

УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 1. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$, $p \leqslant n$, суть p линейно независимых форм на пространстве $\mathbb{R}^n$. Покажите, что для линейной формы α на $\mathbb{R}^n$ соотношение

$$\alpha \wedge \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p = 0$$

выполняется в том и только в том случае, когда форма α принадлежит к векторному пространству, порожденному формами $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Докажите, что если это имеет место и $\alpha \neq 0$, то существует такая знакопеременная $(p-1)$-линейная форма β, что

$$\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p = \alpha \wedge \beta.$$

Упражнение 2. Пусть на пространстве $\mathbb{R}^n$ задана дифференциальная 2-форма

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

Вычислите $\overset{n}{\bigwedge} \omega$ — внешнее произведение n экземпляров формы ω (n-я «внешняя степень»).

Упражнение 3. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — линейно независимые формы на пространстве $\mathbb{R}^n$, и пусть из них составлена знакопеременная билинейная форма

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j-1} a_{ij}\alpha_i \wedge \alpha_j,$$

где a_{ij}, $i < j$, суть C_n^2 заданных действительных чисел.

(a) Докажите, что если $a_{12} \neq 0$, то существуют две такие линейные формы β_1 и β_2, что n линейных форм $\beta_1, \beta_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ линейно независимы и форма $\omega - \beta_1 \wedge \beta_2$ может быть выражена через одни только формы $\alpha_3, \ldots, \alpha_n$.

Докажите по индукции, что существуют $2r$ линейно независимых форм, где $r \leqslant n/2$, если n четно, и $r \leqslant (n-1)/2$, если n нечетно, таких, что

$$\omega = \beta_1 \wedge \beta_2 + \beta_3 \wedge \beta_4 + \ldots + \beta_{2r-1} \wedge \beta_{2r}.$$

(b) Рассмотрим антисимметрическую матрицу $A = (A_{ij})$ с $A_{ij} = a_{ij}$ при $i < j$. Докажите, что число $2r$, введенное в (a), равно рангу матрицы A и что этот ранг не зависит от выбора базисных форм $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

(c) Докажите, что r — наименьшее число, для которого

$$\overset{r+1}{\bigwedge} \omega = 0.$$

Выведите отсюда, что $\omega \wedge \omega = 0$ в том и только том случае, когда форма ω есть внешнее произведение двух линейных форм.

Упражнение 4. Пусть $\omega \neq 0$ — линейная форма на $\mathbb{R}^n$ и α — знакопеременная q-линейная форма на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что условие $\omega \wedge \alpha = 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы существовала знакопеременная $(q-1)$-линейная форма β, такая, что

$$\alpha = \omega \wedge \beta.$$

Упражнение 5. Пусть α — дифференциальная 1-форма в $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha = y\,dx - x\,dy + dz$$

(a) Каким условиям (C) должны удовлетворять функции $u(x, y, z)$ и $v(x, y, z)$ класса C^1 для того, чтобы форма

$$\alpha - v\,du$$

была замкнута? Докажите, что функции u и v не должны в этом случае зависеть от z.

(b) Можно ли функцию $v = v(x, y)$ выбирать произвольно?

(c) Докажите, что если функции u и v удовлетворяют условиям (C), то дифференциальные формы du, dv и $\alpha - v\,du$ линейно независимы в каждой точке.

Упражнение 6. Пусть

$$\omega = a dy \wedge dz + b dz \wedge dx + c dx \wedge dy$$

— дифференциальная форма класса C^∞ на $\mathbb{R}^3$, M_0 — какая-нибудь точка в пространстве $\mathbb{R}^3$, в которой форма ω не обращается в нуль, и f — функция класса C^∞ в окрестности точки M_0.

(a) Докажите, что для того чтобы форма ω в окрестности точки M_0 была представима в виде $\alpha \wedge df$, где α — дифференциальная 1-форма класса C^∞ в окрестности точки M_0, необходимо и достаточно, чтобы форма df не обращалась в нуль в точке M_0 и чтобы функция f была решением некоторого дифференциального уравнения в частных производных, которое и напишите.

(b) Пусть $\alpha = \lambda\, dx + \mu\, dy + \nu\, dz$. Выразите λ, μ, ν как функции от a, b, c, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ в предположении, что $\alpha \wedge df = \omega$.

Упражнение 7. Пусть f — действительная функция класса C^2 в некоторой окрестности Ω точки $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Пусть, далее, $u_i(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x)$ и φ — отображение

$$x \to u = (u_1, \ldots, u_n).$$

При выполнении каких условий существует такая окрестность V точки $x^{(0)}$, что φ является диффеоморфизмом V на $U = \varphi(V)$?

Пусть эти условия выполнены для всякой точки $u \in \varphi(v)$; положим $x = \varphi^{-1}(u)$. Покажите, что дифференциальная форма

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} x_i\, du_i$$

замкнута. Выведите отсюда, что в окрестности V точки $u^{(0)} = \varphi(x^{(0)})$ существует такая функция g класса C^2, что $x_i = \partial g/\partial u_i$.

Покажите, что если f — однородная функция степени $p \neq 1$, то на $\varphi^{-1}(U)$ имеет место равенство

$$g \circ \varphi = (p - 1) f + \mathrm{const},$$

где g — однородная функция степени $p/(p - 1)$.

Определите $g(u)$ для $f(x) = x_1 x_2 x_3$.

Упражнение 8. Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, звездное относительно начала координат.

(a) Пусть $n = 3$ и

$$\omega = A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy$$

— дифференциальная 2-форма класса C^q, $q \geqslant 1$, на U. Найдите явную формулу для оператора k из предложения 2.13.2 и такие функции P, Q, R, что

$$k(\omega) = P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

(b) Пусть ω — дифференциальная p-форма класса C^q на U:

$$\omega = c(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p.$$

Покажите, что дифференциальная $(p - 1)$-форма $k(\omega)$ имеет в канонической записи вид

$$k(\omega) = a(x) \sum_{i=1}^{p} (-1)^{i-1} x_i\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_p,$$

где

$$a(x) = \int_0^1 t^{p-1} c(tx)\, dt.$$

Упражнение 9. Рассмотрим на пространстве $\mathbb{R}^n$ с выколотым началом координат дифференциальную $(n-1)$-форму

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{x_i}{r^\alpha} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

где

$$r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

(a) Как надо выбрать α для того, чтобы $d\omega = 0$? После того как этот выбор будет сделан, представьте интеграл от формы ω по единичной сфере в $\mathbb{R}^n$ (с обычной ориентацией) в виде интеграла по $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

Вычислите этот интеграл для $n = 2$ и $n = 3$.

(b) Пусть $n = 3$ и α — число, которое требовалось вычислить в предыдущей задаче. Примените формулу из предыдущего упражнения для нахождения примитивной от формы ω на открытом множестве, звездном относительно точки $(0, 0, 1)$.

Упражнение 10. Пусть U — открытое множество, звездное относительно начала координат в $\mathbb{R}^n$ и $X = (X_1, \ldots, X_n)$ — векторное поле класса C^1 на U. Сопоставим каждой p-форме класса C^1 на U

$$\omega = \sum a_{i_1, \ldots, i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$$

форму $i(X)\cdot\omega$, которая равна

$$\sum a_{i_1, \ldots, i_p} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k-1} X_{i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_{i_k}} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p} \text{ при } p \geqslant 1,$$

и равна 0 при $p = 0$.

(a) Покажите, что $i(X)\cdot i(X) = 0$ и что

$$i(X)\cdot(\alpha \wedge \beta) = (i(X)\cdot\alpha) \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge i(X)\cdot\beta$$

для любой p-формы α.

Положим

$$X \circ \omega = i(X)\cdot d\omega + d(i(X)\cdot\omega).$$

Покажите, что

$$X \circ i(X) = i(X) \circ X,$$

$$X \circ d = d \circ X,$$

$$X\cdot(\alpha \wedge \beta) = (X\cdot\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (X\cdot\beta).$$

(b) В дальнейшем нас будет интересовать оператор X_0, определяющий векторное поле $X_0(x) = x$. Покажите, что

$$X_0\cdot(a\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p) = \left(pa + \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial a}{\partial x_i}\right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p.$$

Покажите, что уравнение в частных производных

$$pf+\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}=h,$$

где h — заданная функция, имеет на множестве U единственное решение класса C^1, а именно

$$h^*(x)=\int_0^1 h(tx_1, \ldots, tx_n)\, t^{p-1}\, dt.$$

Выведите отсюда, что для данной формы ω_1 степени $\geqslant 1$ на U существует единственная форма ω, такая, что $X_0 \cdot \omega = \omega_1$.

Пусть $\omega = X_0^{-1} \cdot \omega_1$. Докажите, что

$$X_0^{-1}(i(X_0) = i(X_0) \circ X_0^{-1},$$
$$d \circ X_0^{-1} = X_0^{-1} \circ d.$$

(c) Положим

$$k(\omega)=\begin{cases} (i(X_0)\circ X_0^{-1})\cdot\omega & \text{при } p \geqslant 1, \\ 0 & \text{при } p=0. \end{cases}$$

Докажите, что

$$d(k(\omega)) + k(d\omega) = \omega \quad \text{для} \quad p \geqslant 1,$$

и проверьте, что k — тот самый оператор, который был введен в предложении 2.13.2. Передокажите теорему Пуанкаре.

Упражнение 11. Вычислите площадь поверхности и объем тора, заданного параметрически уравнениями

$$x = (a+R\cos\theta)\cos\varphi,$$
$$y = (a+R\cos 0)\sin\varphi,$$
$$z = R\sin\theta,$$

где $0 < R < a$.

Упражнение 12. В случае пространства $\mathbb{R}^3$ сформулируйте и докажите теорему Стокса для цилиндра, образующие которого параллельны оси z, а основание является краем ∂K компакта с краем K в $\mathbb{R}^2$.

Упражнение 13. Пусть $g=(g_1, \ldots, g_n)$ — отображение класса C^2 некоторой окрестности замкнутого единичного шара в $\mathbb{R}^n$ на единичную сферу S.

Вычислите интегралы

$$\int_S g_1\, dg_2 \wedge \ldots \wedge dg_n \quad \text{и} \quad \int_S x_1\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

(сфера S снабжена стандартной ориентацией). Докажите, что не существует отображения g, сужение которого на S является тождественным отображением.

Упражнение 14. Обозначим через P, Q, R три числовые функции класса C^1 на открытом множестве U в $\mathbb{R}^3$, не обращающиеся в нуль одновременно, и положим

$$\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy.$$

(a) Докажите, что в окрестности каждой точки множества U существует такая пара функций u, v, что

$$du \wedge \omega = 0, \quad dv \wedge \omega = 0; \quad du \wedge dv \neq 0.$$

Докажите, что если u, v — подобная пара функций, то существует функция λ, удовлетворяющая соотношению

$$\omega = \lambda \, du \wedge dv.$$

Выведите отсюда, что $d\omega = 0$ в том и только том случае, когда в окрестности каждой точки множества U существуют такие две числовые функции g и h, что $\omega = dg \wedge dh$.

(b) Пусть f — числовая функция класса C^1 на U, частные производные которой не обращаются в нуль одновременно, и пусть V_a — многообразие (поверхность), определяемое уравнением $f(x, y, z) = a$. Установите, что

$$df \wedge \omega = 0 \quad \text{влечет} \quad \iint\limits_{V_a \cap \Omega} \omega = 0$$

для любого числа $a \in f(U)$ и любого достаточно малого открытого множества Ω. Верно ли обратное утверждение?

Упражнение 15. Пусть заданы константы a, b и c. Определите все линейные преобразования пространства $\mathbb{R}^3$, сохраняющие дифференциальную форму

$$\omega = a\,dy \wedge dz + b\,dz \wedge dx + c\,dx \wedge dy.$$

Упражнение 16. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ дифференциальную форму

$$\omega = x\,dy \wedge dz - 2zf(y)\,dx \wedge dy + y f(y)\,dz \wedge dx,$$

где f — отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ класса C^1, для которого $f(1) = 1$.

(a) Определите те отображения f, для которых $d\omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Для таких f вычислите интеграл $\int\limits_S \omega$, где S — сферическая «шапочка»

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \qquad z \geqslant \sqrt{2}/2,$$

ориентация которой определяется выбором *внешней* нормали.

(b) Определите те отображения f, для которых $d\omega = 0$; вычислите для таких f интеграл $\int\limits_S \omega$.

(c) Определите те отображения f, для которых существует форма $\omega_1 = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy$, обладающая следующими свойствами:

$$P(x, y, 0) = Q(x, y, 0) = 0$$

и

$$d\omega_1 = \omega;$$

вычислите $\int\limits_C \omega_1$, где C — окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z = \sqrt{2}/2,$$

ориентированная как край сферической шапочки S (ориентация последней указана выше).

Упражнение 17. В окрестности точки 0 в $\mathbb{R}^3$ задана дифференциальная форма класса C^3

$$\omega = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz,$$

причем

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \neq 0.$$

(a) Найдите в окрестности нуля поверхности

$$(S) \quad z = f(x, y)$$

класса C^2, на которых форма ω индуцирует *замкнутую* форму [индуцированная форма получается из ω при замене переменных $(x, y, z) \to (x, y, f(x, y))$]. Найдите дифференциальное уравнение в частных производных, для которого функция f является решением. Обозначим характеристики этого уравнения через (Г).

(b) Покажите, что в достаточно малой окрестности нуля можно построить такой C^2-диффеоморфизм, при котором эти характеристики (Г) переходят в прямые линии $y = \text{const}$, $z = \text{const}$.

Пусть характеристики (Г) — прямые линии $y = \text{const}$, $z = \text{const}$ и ω принадлежит к классу C^2. Каковы в этом случае поверхности S? Покажите, что существуют такая окрестность нуля и на ней такая функция $T(y, z)$ класса C^1, обращающаяся в нуль в начале координат, что

$$d\omega = \frac{\partial T}{\partial y}\, dy \wedge dz, \quad \text{причем} \quad \frac{\partial T}{\partial y}(0, 0) \neq 0.$$

Выведите отсюда, что существует функция $U(x, y, z)$ класса C^1, обращающаяся в нуль в начале координат и такая, что

$$\omega = dU + T(y, z)\, dz. \tag{1}$$

(c) Пусть теперь форма ω задается формулой (1), где T и U удовлетворяют всем перечисленным выше условиям. Докажите, что если $\partial U/\partial x \neq 0$, то уравнение $\omega = 0$ не является вполне интегрируемым.

В предположении, что $\partial U/\partial x \neq 0$, докажите, что существует C^1-диффеоморфизм некоторой окрестности начала координат

$$x = \lambda(X, Y, Z), \qquad y = \mu(Y, Z), \qquad z = Z,$$

такой, что форма ω при этой замене переменных переходит в форму $dX + YdZ$.

Упражнение 18. Пусть $U \subset \mathbb{R}^3$ — открытое множество, состоящее из точек (x, y, z), для которых $xyz \neq 0$. Рассмотрим на U форму

$$\omega = \frac{1}{yz}\, dx + \frac{1}{xz}\, dy + \frac{1}{xy}\, dz.$$

(a) Докажите, что уравнение $\omega = 0$ вполне интегрируемо.

(b) Определите интегрирующий множитель формы ω, т. е. функцию f класса C^1 на U, такую, что $d(f\omega) = 0$. [В уравнении в частных производных для функции f перейдите к неизвестной функции $\varphi = \log f$.]

Упражнение 19. Пусть a и b — функции класса C^1 от $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2$. При каких условиях (назовем их условиями (2)) система

$$\begin{aligned} dz_1 &= a\, dx_1 + b\, dx_2, \\ dz_2 &= a\, dy_1 + b\, dy_2 \end{aligned} \tag{1}$$

вполне интегрируема?

Проинтегрируйте систему (2) [выразите z_1 и z_2 как функции от a, b, x_1, x_2, y_1, y_2 и докажите, что эти функции линейны по x_1, x_2, y_1, y_2].

Упражнение 20. Пусть P и Q — две функции класса C^1 от четырех переменных x, y, u, v. При каких условиях система

$$dx = P\,du - Q\,dv,$$
$$dy = Q\,du + P\,dv$$

вполне интегрируема?

Положим $z = x + iy$, $\omega = u + iv$, $f(z, \omega) = P + iQ$. Докажите, что предыдущие условия выполняются в частности тогда, когда функция $f(z, \omega)$ является голоморфной функцией от переменных z и ω.

Упражнение 21. *Предварительное замечание.* Векторное поле на открытом подмножестве Ω банахова пространства E — это отображение множества Ω в E. Его производная в данной точке, если она существует, является, следовательно, линейным отображением E в E.

Далее Ω — это открытый шар радиуса r с центром в точке x_0.

(a) Пусть U — векторное поле класса C^1 на Ω и $\varphi(t, x_0)$ — решение уравнения $dx/dt = U(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(0, x_0) = x_0$.

Докажите, что разложение функции φ в ряд в окрестности точки $t = 0$ имеет с точностью до членов третьего порядка вид

$$\varphi(t, x_0) = x_0 + tU(x_0) + \frac{t^2}{2} U'(x_0)\cdot U(x_0) + o(t^2).$$

(b) Пусть U и V — два векторных поля класса C^1 на Ω, таких, что $\| U(x) \| \leqslant M$ и $\| V(x) \| \leqslant M$ при $x \in \Omega$. Для

$$\theta \in \left(-\frac{r}{4M},\ +\frac{r}{4M}\right)$$

пусть x_1 — значение при $t = \theta$ решения уравнения $dx/dt = U(x)$, равного x_0 при $t = 0$; x_2 — значение при $t = \theta$ решения уравнения $dx/dx = V(x)$, равного x_1 при $t = 0$; x_3 — значение при $t = \theta$ решения уравнения $dx/dt = -U(x)$, равного x_2 при $t = 0$; x_4 — значение при $t = \theta$ решения уравнения $dx/dt = -V(x)$, равного x_3 при $t = 0$. Используя разложения для x_i, покажите, что

$$x_4 = x_0 + \theta^2 (V'(x_0)\cdot U(x_0) - U'(x_0)\cdot V(x_0)) + o(\theta^2).$$

Найдите касательную в точке x_0 к кривой, которую описывает точка x_4, когда θ пробегает указанный интервал.

(c) Предположим, что $[U, V](x) = V'(x)\cdot U(x) - U'(x)\cdot V(x) = 0$ для всех $x \in \Omega$. Используя теорему Фробениуса, докажите, что существует такая функция $F(u, v)$ класса C^2 в окрестности начала координат со значениями в Ω, что

$$F(0, 0) = x_0, \quad \frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = U(F(u, v)), \quad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = V(F(u, v)).$$

Запишите значения x_1, x_2, x_3, x_4 с помощью этой функции F и докажите, что $x_4 = x_0$.

4 ЭЛЕМЕНТЫ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Пространство кривых класса C^1

Пусть $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ — компактный интервал. Кривая в пространстве $\mathbb{R}^n$ (параметризованная с помощью параметра $t \in I$) — это отображение

$$\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n.$$

Кривая принадлежит к классу C^k, если отображение φ принадлежит к этому классу. Рассмотрим более общим образом кривые в банаховом пространстве E (над $\mathbb{R}$). Кривая класса C^1 — это, по определению, отображение

$$\varphi\colon I \to E$$

класса C^1. Множество кривых очевидным образом наделяется структурой *векторного пространства* (над $\mathbb{R}$). Обозначим это векторное пространство через V (в этом обозначении никак не отражено пространство E, поскольку мы считаем его заданным раз и навсегда).

Мы хотим ввести в пространстве V структуру *банахова пространства*. Для этого надо определить на V *норму* и доказать, что пространство V *полно* относительно этой нормы.

Определение. Для кривой $\varphi\colon I \to E$ класса C^1 полагаем

$$\|\varphi\| = \sup_{t \in I} \|\varphi(t)\| + \sup_{t \in I} \|\varphi'(t)\|. \tag{1.1.1}$$

Это *конечное* число $\geqslant 0$, так как $t \to \|\varphi(t)\|$ и $t \to \|\varphi'(t)\|$, будучи непрерывными функциями (с неотрицательными значениями), ограничены на компакте I. Читатель проверит сам, что $\|\varphi\|$ действительно является нормой на V.

Предложение 1.1.1. *Векторное пространство V с нормой* (1.1.1) *полно.*

Доказательство. Пусть (φ_n) — последовательность Коши. Так как

$$\sup_{t \in I} \|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)\| \leqslant \|\varphi_m - \varphi_n\|,$$

то последовательность (φ_n) также является последовательностью Коши относительно нормы равномерной сходимости. Поэтому последовательность (φ_n) равномерно сходится к некоторой *непрерывной* функции $\varphi\colon I \to E$ (ибо пространство E полно). Остается доказать, что φ принадлежит к классу C^1 и является пределом последовательности (φ_n) относительно нормы пространства V.

Последовательность производных φ_n' также является последовательностью Коши относительно нормы равномерной сходимости, так как

$$\sup_{t \in I} \| \varphi_m'(t) - \varphi_n'(t) \| \leqslant \| \varphi_m' - \varphi_n' \|.$$

Поэтому последовательности (φ_n') равномерно сходятся к некоторой непрерывной функции ψ. По теореме 3.6.1, гл. 1, ч. I, функция φ имеет производную φ', равную ψ. Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{t \in I} \| \varphi_n(t) - \varphi(t) \| = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{t \in I} \| \varphi_n'(t) - \varphi'(t) \| = 0$$

и потому

$$\lim_{n\to\infty} \| \varphi_n - \varphi \| = 0,$$

чем и завершается доказательство.

1.2. Функционал, определяемый кривой

Пусть на открытом множестве $U \subset \mathbb{R} \times E \times E$ задана функция

$$F\colon U \to \mathbb{R}$$

класса C^k. Обозначим через $F(t, x, y)$ ее значение в точке $(t, x, y) \in U$.

Если кривая $\varphi\colon I \to E$ класса C^1 удовлетворяет условию

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in U \quad \text{для} \quad t \in I, \tag{1.2.1}$$

то мы можем сопоставить ей действительное число

$$\int_a^b F(t, \varphi(t), \varphi'(t))\, dt.$$

Это число, зависящее от φ, мы обозначим через $f(\varphi)$:

$$f(\varphi) = \int_a^b F(t, \varphi(t), \varphi'(t))\, dt. \tag{1.2.2}$$

Обозначим через Ω множество всех кривых $\varphi \in V$, удовлетворяющих условию (1.2.1). Таким образом, с помощью функции F мы определили отображение

$$f\colon \Omega \to \mathbb{R}.$$

Это функция, определенная на множестве функций, или (как иногда говорят) «функционал» на множестве Ω. В дальнейшем мы будем заниматься подробным изучением отображения f.

Предложение 1.2.1. *Ω — открытое множество в банаховом пространстве V.*

Доказательство. Пусть $\varphi_0 \in \Omega$. Мы хотим доказать, что любое отображение $\varphi \in V$, для которого норма $\| \varphi - \varphi_0 \|$ достаточно мала, принадлежит Ω. Пусть $K \subset U$ — образ интервала I при непрерывном отображении

$$t \to (t, \varphi_0(t), \varphi_0'(t));$$

K — компакт, так как I — компакт. Поэтому существует такое число $\rho > 0$, что любая точка $(t, x, y) \in I \times E \times E$, для которой

$$\| x - \varphi_0(t) \| \leqslant \rho, \quad \| y - \varphi_0'(t) \| \leqslant \rho,$$

принадлежит U (можно, если угодно, дать прямое доказательство, использующее компактность самого интервала I). Пусть теперь кривая $\varphi \in V$ такова, что $\| \varphi - \varphi_0 \|_V \leqslant \rho$. По определению нормы в V имеем

$$\| \varphi(t) - \varphi_0(t) \|_E \leqslant \rho \quad \text{и} \quad \| \varphi'(t) - \varphi_0'(t) \|_E \leqslant \rho \quad \text{для всех } t \in I.$$

Но тогда

$$(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in U \quad \text{для всех} \quad t \in I, \quad \text{ч. т. д.}$$

Таким образом, отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ определено на открытом подмножестве банахова пространства. Это дает право поставить вопрос о том, к какому классу C^k это отображение принадлежит.

Предложение 1.2.2. *Если функция $F\colon U \to \mathbb{R}$ принадлежит к классу C^k $(k \geqslant 1)$, то и отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$, определяемое формулой (1.2.2), принадлежит к классу C^k. Производная от f задается формулой*

$$f'(\varphi)\cdot u = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\cdot u(t)\, dt + \int_a^b \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\cdot u'(t)\, dt, \quad (1.2.3)$$

где $u \in V$.

Пояснение. Напомним, что для всякой кривой $\varphi \in \Omega$ производная $f'(\varphi)$ — это элемент пространства $\mathscr{L}(V; \mathbb{R})$. Всякий элемент u пространства V — это функция $I \to E$ класса C^1; u' — это ее производное отображение, и для $t \in I$ $u(t)$ и $u'(t)$ являются элементами пространства $\mathscr{L}(E; \mathbb{R})$. Далее, $(\partial F/\partial x)(t, \varphi(t), \varphi'(t))$ —

это элемент пространства $\mathscr{L}(E; \mathbb{R})$; правая часть равенства (1.2.3) — это значение указанного элемента на векторе $u(t) \in E$. Аналогично, $(\partial F/\partial y)(t, \varphi(t), \varphi'(t))$ — элемент пространства $\mathscr{L}(E; \mathbb{R})$, и мы берем его значение на векторе $u'(t) \in E$.

Доказательство. Покажем прежде всего, что если F — функция класса C^1, то f имеет производную f', задаваемую формулой (1.2.3). Из этой формулы сразу видно, что отображение $\varphi \to f'(\varphi)$ множества Ω в пространство $\mathscr{L}(V; \mathbb{R})$ *непрерывно* [упражнение: проверьте это], т. е. функция f принадлежит классу C^1.

Для доказательства воспользуемся леммой о дифференцировании под знаком интеграла (гл. 3, лемма 2.12.2). Рассмотрим отображение

$$\lambda\colon \Omega \times I \to \mathbb{R},$$

определенное формулой

$$\lambda(\varphi, t) = F(t, \varphi(t), \varphi'(t)).$$

Имеем

$$f(\varphi) = \int_a^b \lambda(\varphi, t)\, dt.$$

Справа стоит интеграл от функции λ, зависящей от «параметра» φ, изменяющегося в открытом множестве Ω банахова пространства V. По лемме 2.12.2, если производная $\partial\lambda/\partial\varphi$ существует и является непрерывной функцией от $(\lambda, t) \in \Omega \times I$, то существует f' и

$$f'(\varphi) = \int_a^b \frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}(\varphi, t)\, dt,$$

или, что то же самое,

$$f'(\varphi)\cdot u = \int_a^b \left(\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}(\varphi, t)\cdot u\right) dt \quad \text{для всех } u \in V. \tag{1.2.4}$$

Установим теперь существование производной $\partial\lambda/\partial\varphi$ прямым вычислением. Отображение λ разлагается в композицию

$$\Omega \times I \xrightarrow{\mu} U \xrightarrow{F} \mathbb{R},$$

где $\mu(\varphi, t) = (t, \varphi(t), \varphi'(t))$. По предположению функция F принадлежит к классу C^1; поэтому достаточно доказать, что существует производная $\partial\mu/\partial\varphi$, и вычислить ее. Из трех компонент вектора $\mu(\varphi, t)$ первая, t, не зависит от φ. Вторая компонента равна $\varphi(t)$; это непрерывная линейная функция от $\varphi \in V$; поэтому ее производная есть константа, некоторый элемент из $\mathscr{L}(V; \mathbb{R})$; значение этого элемента на векторе $u \in V$ равно $u(t)$. Наконец, третья компонента $\varphi'(t)$ — это линейная непрерывная функция от $\varphi \in V$ (в силу выбора нормы в пространстве V); поэтому ее производная есть постоянный элемент пространства $\mathscr{L}(V; \mathbb{R})$; значение этого элемента на векторе $u \in V$ равно $u'(t)$. По формуле для производной от сложной функции имеем

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varphi}(\varphi, t)\cdot u = \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\cdot u(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\cdot u'(t). \quad (1.2.5)$$

Это равенство показывает, что $(\partial\lambda/\partial\varphi)(\varphi, t) \in \mathscr{L}(V; \mathbb{R})$ есть *непрерывная* функция от пары $(\varphi, t) \in \Omega \times I$. Таким образом, формула (1.2.3) доказана — ее справедливость следует из (1.2.4) и (1.2.5).

По той же лемме о дифференцировании под знаком интеграла, если функция $\lambda(\varphi, t)$ k раз дифференцируема по φ и ее производные суть непрерывные функции от (φ, t), то $\int_a^b \lambda(\varphi, t)\,dt$ есть функция класса C^k по «параметру» φ.

Этим доказательство предложения 1.2.2 завершено.

1.3. Пример

Приведем сейчас один очень простой пример (потом нам встретятся и другие). Пусть $E = \mathbb{R}^n$. Положим $U = I \times \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n - \{0\})$ и

$$F(t, x, y) = \sqrt{(y_1)^2 + \ldots + (y_n)^2}$$

(где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ и $y_1, \ldots, y_n$ — координаты точки $y \in \mathbb{R}^n$). Функция F принадлежит классу C^∞ (так как мы исключили точку $y = 0$). Множество Ω состоит из кривых $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ класса C^1, таких, что $\varphi'(t) \neq 0$ для любого $t \in I$, и

$$f(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \ldots + \varphi_n'(t)^2}\,dt.$$

Значение $f(\varphi)$ есть просто *длина дуги кривой* φ. Это — функция класса C^∞ от $\varphi \in \Omega$ (пространство V снабжено нормой, описанной в п. 1.1).

1.4. Задача на минимум

Множество кривых $\varphi\colon I \to E$, таких, что

$$\varphi(a) = \alpha, \quad \varphi(b) = \beta$$

(где $\alpha \in E$ и $\beta \in E$ фиксированы) образует *аффинное подпространство* $W(\alpha, \beta)$ банахова пространства V. Это подпространство имеет коразмерность 2, ибо оно наделяется тем условием, что на нем принимает заданное значение α (соответственно β) непрерывная линейная форма

$$\varphi \to \varphi(a) \quad (\text{соответственно } \varphi \to \varphi(b)).$$

Если мы выберем некоторое $\varphi_0 \in W(\alpha, \beta)$, то всякий элемент аффинного подпространства $W(\alpha, \beta)$ можно будет записать в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \psi,$$

где $\psi \in W(0, 0)$; $W(0, 0)$ является *векторным подпространством* пространства V. Таким образом, φ_0 определяет биекцию пространства $W(0, 0)$ на $W(\alpha, \beta)$. Эта биекция определяется сдвигом

$$\psi \to \varphi_0 + \psi.$$

Итак, $W(\alpha, \beta)$ — это пространство кривых $\varphi: I \to E$ класса C^1 с фиксированным началом (a, α) и концом (b, β). В метрике, индуцированной нормой пространства V, подпространство $W(\alpha, \beta)$ *полно*. Представляет интерес пересечение

$$W(\alpha, \beta) \cap \Omega = \Omega(\alpha, \beta),$$

которое является *открытым* множеством в $W(\alpha, \beta)$. Рассмотрим сужение функции $f: \Omega \to \mathbb{R}$ на $\Omega(\alpha, \beta)$. Если $F: U \to \mathbb{R}$ — функция класса C^k, то f — тоже функция класса C^k (предложение 1.2.2) и, следовательно, ее сужение на открытое множество $\Omega(\alpha, \beta)$ аффинного пространства $W(\alpha, \beta)$ тоже принадлежит к классу C^k.

[Замечание. Дифференцирование функций, определенных на открытом подмножестве замкнутого аффинного подпространства банахова пространства V, имеет смысл, так как с помощью сдвига это подмножество можно перевести в открытое подмножество замкнутого векторного подпространства пространства V, уже являющегося банаховым пространством.]

Рассмотрим какую-нибудь кривую $\varphi_0 \in W(\alpha, \beta)$. Можно спросить, является ли φ_0 точкой локального минимума для сужения функции f на $W(\alpha, \beta)$, иначе говоря, имеет ли место неравенство

$$f(\varphi) \geqslant f(\varphi_0)$$

для любой кривой $\varphi \in W(\alpha, \beta)$, достаточно близкой к φ_0. Мы укажем сейчас *необходимое условие* такого минимума. Мы знаем, что сужение $f_{\alpha, \beta}$ функции f на $W(\alpha, \beta)$ дифференцируемо. Для любой точки $\varphi_0 \in W(\alpha, \beta)$ производная $f_{\alpha, \beta}$ — это линейная функция от «приращения» u функции φ, где $u \in W(0, 0)$. Очевидно, что

$$f'_{\alpha, \beta}(\varphi_0) \cdot u = f'(\varphi_0) \cdot u \quad \text{для } u \in W(0, 0).$$

Иначе говоря, производная $f'_{\alpha, \beta}(\varphi_0)$ — это элемент пространства $\mathscr{L}(W(0, 0); \mathbb{R})$, который получается сужением функции $f'(\varphi_0) \in \in \mathscr{L}(V; \mathbb{R})$ на подпространство $W(0, 0)$ пространства V.

По предложению 8.1.1 из гл. 1, ч. I, для того чтобы функция $f_{\alpha,\beta}$ имела локальный минимум в точке $\varphi_0 \in W_{\alpha,\beta}$, *необходимо*, чтобы

$$f'(\varphi_0)\cdot u = 0 \quad \text{для любого} \quad u \in W(0, 0).$$

Иначе говоря, производная $f'(\varphi_0)$ должна *обращаться в нуль на любом векторе* $u \in V$, *таком, что* $u(a) = 0$ *и* $u(b) = 0$.

Определение. Если это выполняется, то говорят, что кривая φ_0 реализует *экстремум* функции $f_{\alpha,\beta}$. В этом случае говорят также, что кривая φ_0 является *экстремалью* для интеграла

$$\int_a^b F(t, \varphi(t), \varphi'(t))\,dt$$

в классе кривых $\varphi\colon I \to E$, для которых $\varphi(a) = \alpha$ и $\varphi(b) = \beta$.

Мы не будем здесь затрагивать вопрос, при каких условиях экстремаль действительно реализует локальный *минимум*.

Равенство (1.2.3) позволяет нам сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.4.1. *Для того чтобы кривая* $\varphi \in W(\alpha, \beta)$ *была экстремалью, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\cdot u(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\cdot u'(t)\right] dt = 0 \qquad (1.4.1)$$

для любой функции $u\colon I \to E$ *класса* C^1, *для которой* $u(a) = 0$ *и* $u(b) = 0$.

1.5. Другой вид условий экстремума

Мы хотим придать условиям теоремы 1.4.1 другой вид. Для заданной функции φ функции $(\partial F/\partial x)(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = A(t)$ и $(\partial F/\partial y)(t, \varphi(t), \varphi'(t)) = B(t)$ *непрерывны* и их значения принадлежат пространству $\mathscr{L}(E; \mathbb{R})$. Задача заключается в следующем: каким условиям должны удовлетворять непрерывные функции $A(t)$ и $B(t)$ для того, чтобы имело место равенство

$$\int_a^b (A(t)\cdot u(t) + B(t)\cdot u'(t))\,dt = 0 \qquad (1.5.1)$$

для любой функции $u\colon I \to E$ *класса* C^1, *обращающейся в нуль при* $t = a$ *и* $t = b$?

Вот ответ:

Теорема 1.5.1. *Для того чтобы так было, необходимо и достаточно, чтобы функция* $B(t)$ *имела производную* $B'(t)$, *равную* $A(t)$.

Эту теорему мы докажем немного позже, а сейчас применим ее в интересующем нас случае, когда

$$A(t)=\frac{\partial F}{\partial x}(t,\ \varphi(t),\ \varphi'(t)),\quad B(t)=\frac{\partial F}{\partial y}(t,\ \varphi(t),\ \varphi'(t)).$$

Получается

Теорема 1.5.2. *Для того чтобы кривая* $\varphi \in W(\alpha,\ \beta)$ *была экстремалью, необходимо и достаточно, чтобы функция* $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)(t,\ \varphi(t),\ \varphi'(t))$ *была дифференцируема по* t *и*

$$\boxed{\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}(t,\ \varphi(t),\ \varphi'(t))=\frac{\partial F}{\partial x}(t,\ \varphi(t),\ \varphi'(t))} \tag{1.5.2}$$

для всех $t \in [a,\ b]$.

Уравнение (1.5.2) носит название *уравнения Эйлера.* Именно оно используется для нахождения экстремалей.

Перейдем к доказательству теоремы 1.5.1. Очевидно, что условие $A(t) = B'(t)$ *достаточно*, так как

$$\int_a^b (B'(t)\cdot u(t)+B(t)\cdot u'(t))\,dt=$$

$$=\int_a^b \frac{d}{dt}(B(t)\cdot u(t))\,dt=B(b)\cdot u(b)-B(a)\cdot u(a)=0,$$

ибо $u(a) = 0$, $u(b) = 0$. Остается доказать, что это условие и *необходимо.*

Мы дадим два доказательства необходимости этого условия. Первое более простое, но не совсем удовлетворительное, так как мы будем в нем предполагать заранее, что производная dB/dt существует. Во втором мы докажем, что производная dB/dt действительно существует.

Первое доказательство. Если производная $B'(t)$ существует, то и функция $t \to B(t)\cdot u(t)$ дифференцируема. Левую часть равенства (1.5.1) можно поэтому преобразовать с помощью интегрирования по частям. В результате получим

$$[B(t)\cdot u(t)]_a^b+\int_a^b (A(t)-B'(t))\cdot u(t)\,dt=0,$$

где

$$[B(t)\cdot u(t)]_a^b=B(b)\cdot u(b)-B(a)\cdot u(a).$$

Эта величина равна нулю, так как по предположению функция $u\colon I \to E$ обращается в нуль при $t = a$ и $t = b$. Итак, условие (1.5.1) приобретает такой вид:

$$\int_a^b (A(t) - B'(t)) \cdot u(t)\, dt = 0 \tag{1.5.3}$$

для любой функции u: $I \to E$ *класса* C^1, *такой, что* $u(a) = u(b) = 0$. Поэтому нам достаточно доказать следующую лемму:

Лемма 1.5.3. *Пусть* C: $I \to \mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ — *непрерывная функция, такая, что*

$$\int_a^b C(t) \cdot u(t)\, dt = 0$$

для любой функции u: $I \to E$ *класса* C^1, *обращающейся в нуль при* $t = a$ *и* $t = b$. *Тогда функция* C *тождественно равна нулю.*

Доказательство леммы 1.5.3. Будем доказывать эту лемму от противного. Пусть C не равна тождественно нулю. Тогда существует такая точка t_0, что

$$a < t_0 < b \quad \text{и} \quad C(t_0) \neq 0.$$

Поскольку $C(t_0) \in \mathscr{L}(E; \mathbb{R})$ и $\neq 0$, то существует такой вектор $u_0 \in E$, что $C(t_0) \cdot u_0 \neq 0$. Пусть для определенности

$$C(t_0) \cdot u_0 > 0$$

(если эта величина отрицательна, надо заменить u_0 на $-u_0$). Так как функция $C(t)$ непрерывна по t, то

$$C(t) \cdot u_0 > 0$$

и при $|t - t_0| \leqslant \varepsilon$ (где $\varepsilon > 0$ — подходящее число, такое, что $a \leqslant t_0 - \varepsilon \leqslant t_0 + \varepsilon \leqslant b$). Возьмем функцию λ: $I \to \mathbb{R}^+$ класса C^∞ с носителем, содержащимся в $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$, строго положительную на интервале $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ (см. лемму 1 из п. 4.1 гл. 1). Возьмем в качестве u: $I \to E$ функцию, определяемую равенством $u(t) = \lambda(t)\, u_0$ (произведение вектора $u_0 \in E$ на скаляр $\lambda(t)$). Очевидно, что

$$C(t) \cdot u(t) \geqslant 0 \quad \text{при всех} \quad t \in I$$

и

$$C(t) \cdot u(t) > 0 \quad \text{при} \quad t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon.$$

Но тогда $\int_a^b C(t) \cdot u(t)\, dt > 0$, что противоречит нашему предположению. Лемма 1.5.3 доказана.

Второе доказательство (полное). Пусть $A_1(t)$ — примитивная для $A(t)$, обращающаяся в нуль при $t=0$:

$$A_1(t)=\int_0^1 A(\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$A(t)\cdot u(t)=A_1'(t)\cdot u(t)=\frac{d}{dt}(A_1(t)\cdot u(t))-A_1(t)\cdot u'(t)),$$

откуда

$$\int_a^b (A(t)\cdot u(t)+B(t)\cdot u'(t))\,dt=[A_1(t)\cdot u(t)]_a^b+\int_a^b (B(t)-A_1(t))\,u'(t)\,dt.$$

Нам надо доказать, что это выражение равно нулю для любой функции $u\colon I\to E$ класса C^1, обращающейся в нуль при $t=a$ и $t=b$. Но производная u' такой функции является *непрерывной* функцией $v\colon I\to E$, для которой

$$\int_a^b v(t)\,dt=0. \tag{1.5.4}$$

Обратно, всякая подобная функция v является производной от функции u, такой, что $u(a)=0$ и $u(b)=0$. Таким образом, нам достаточно доказать, что

$$\int_a^b (B(t)-A_1(t))\cdot v(t)\,dt=0 \tag{1.5.5}$$

для всякой непрерывной функции $v\colon I\to E$, удовлетворяющей условию (1.5.4). Воспользуемся следующей леммой.

Лемма 1.5.4. *Пусть $D\colon I\to\mathcal{L}(E;\,\mathbb{R})$ — непрерывная функция, обладающая тем свойством, что*

$$\int_a^b D(t)\cdot v(t)=0$$

для любой непрерывной функции $v\colon I\to E$, такой, что $\int_a^b v(t)\,dt=0$.

Тогда функция $D(t)$ постоянна.

Из этой леммы в нашем случае вытекает, что

$$A_1(t)=B(t)+\text{const}.$$

Но это и означает, что $B(t)$ имеет производную, равную $A(t)=A_1'(t)$, чем и завершается второе доказательство теоремы 1.5.1.

Остается доказать лемму 1.5.4. Опять будем рассуждать от противного. Если функция $D(t)$ не постоянна, то существуют такие числа t_1 и t_2, что

$$a < t_1 < t_2 < b, \qquad D(t_1) \neq D(t_2).$$

Пусть вектор $u_0 \in E$ таков, что $D(t_1)\cdot u_0 \neq D(t_2)\cdot u_0$. Для определенности будем считать, что $D(t_1)\cdot u_0 > D(t_2)\cdot u_0$. Выберем α_1 и $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ так, чтобы $D(t_1) > \alpha_1 > \alpha_2 > D(t_2)\cdot u_0$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} D(t)\cdot u_0 > \alpha_1 \quad &\text{при} \quad |t - t_1| \leqslant \varepsilon, \\ D(t)\cdot u_0 < \alpha_2 \quad &\text{при} \quad |t - t_2| \leqslant \varepsilon. \end{aligned} \tag{1.5.6}$$

Мы можем предположить, что число $\varepsilon > 0$ настолько мало, что

$$a \leqslant t_1 - \varepsilon \leqslant t_1 + \varepsilon \leqslant t_2 - \varepsilon \leqslant t_2 + \varepsilon \leqslant b.$$

Пусть $\lambda\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — функция класса C^∞, равная нулю при $t \leqslant -\varepsilon$ и $t \geqslant \varepsilon$ и такая, что $\lambda(t) > 0$ для $-\varepsilon < t < \varepsilon$ (см. п. 4.1 гл. 3). Тогда для функции

$$\mu(t) = \lambda(t - t_1) - \lambda(t - t_2)$$

класса C^∞ имеет место равенство

$$\int_a^b \mu(t)\,dt = 0.$$

Эта функция больше нуля при $t_1 - \varepsilon < t < t_1 + \varepsilon$, меньше нуля при $t_2 - \varepsilon < t < t_2 + \varepsilon$ и равна нулю во всех остальных точках. Положим

$$v(t) = \mu(t)\cdot u_0.$$

Очевидно, что v — непрерывная функция $I \to E$ и

$$\int_a^b v(t)\,dt = 0.$$

Далее,

$$\int_a^b D(t)\cdot v(t)\,dt = \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \lambda(t-t_1)\,(D(t)\cdot u_0)\,dt - \int_{t_2-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} \lambda(t-t_2)\,(D(t)\cdot u_0)\,dt.$$

Из неравенства (1.5.5) вытекает, что

$$\int_a^b D(t)\cdot v(t)\,dt > \alpha_1 \int_{t_1-\varepsilon}^{t_1+\varepsilon} \lambda(t-t_1)\,dt - \alpha_2 \int_{t_2-\varepsilon}^{t_2+\varepsilon} \lambda(t-t_2)\,dt >$$

$$> (\alpha_1 - \alpha_2) \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \lambda(t)\,dt > 0,$$

вопреки нашему предположению. Требуемое противоречие получено. Лемма 1.5.4 доказана. Теорема 1.5.1 доказана.

1.6. Вычисление $f'(\varphi)\cdot u$ для экстремалей

В предыдущем пункте мы получили *уравнение Эйлера*, характеризующее экстремальные кривые φ и выражающее тот факт, что

$$f'(\varphi)\cdot u = 0$$

для любой функции $u\colon I \to E$ класса C^1, *обращающейся в нуль при* $t = a$ *и* $t = b$.

Отбросим теперь предположение о том, что $u(a) = 0$ и $u(b) = 0$. В обозначениях п. 1.5 имеем

$$f'(\varphi)\cdot u = \int_a^b (A(t)\cdot u(t) + B(t)\cdot u'(t))\,dt.$$

Мы видели, что для экстремали $A(t) = B'(t)$. Поэтому

$$f'(\varphi)\cdot u = B(b)\cdot u(b) - B(a)\cdot u(a)$$

(это выражение, конечно, обращается в нуль при $u(a) = 0$ и $u(b) = 0$). Таким образом,

$$\boxed{f'(\varphi)\cdot u = \frac{\partial F}{\partial y}(b, \varphi(b), \varphi'(b))\cdot u(b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a, \varphi(a), \varphi'(a))\cdot u(a)} \qquad (1.6.1)$$

для всякой экстремали $\varphi\colon I \to E$. Эта формула показывает, как выражение $f'(\varphi)\cdot u$ зависит от функции u: оно зависит лишь от значений этой функции при $t = a$ и $t = b$.

Если же φ не является экстремалью, то при вычислении $f'(\varphi)\cdot u$, вообще говоря, существенны значения функции $u(t)$ при всех $t \in [a, b]$. А именно, как показывают вычисления п. 1.5,

$$f'(\varphi)\cdot u = \frac{\partial F}{\partial y}(b, \varphi(b)\cdot\varphi'(b))\cdot u(b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a, \varphi(a), \varphi'(a))\cdot u(a) +$$

$$+ \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\right]\cdot u(t)\,dt, \qquad (1.6.2)$$

по крайней мере для тех функций $\varphi\colon I \to E$, для которых функция $(\partial F/\partial y)(t, \varphi(t), \varphi'(t))$ от переменной t имеет непрерывную производную.

§ 2. ИЗУЧЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА. СУЩЕСТВОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЕЙ. ПРИМЕРЫ

2.1. Уравнение Эйлера в случае $E = \mathbb{R}^n$

В этом случае точка x (соответственно y) $\in E$ определяется n действительными координатами $x_1, \ldots, x_n$ (соответственно $y_1, \ldots, y_n$). Функция

$$F(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

принадлежит к классу C^k ($k \geqslant 1$) на открытом множестве $U \subset \mathbb{R}^{2n+1}$. Кривая $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ класса C^1 определяется n числовыми функциями $\varphi_i(t)$ класса C^1; φ принадлежит открытому множеству Ω, если

$$(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t)) \in U$$

для любого $t \in I$. Каждой кривой φ сопоставляется интеграл

$$f(\varphi) = \int_a^b F(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \varphi_1'(t)), \ldots, \varphi_n'(t))\, dt.$$

Уравнение Эйлера (1.5.2), характеризующее экстремальные кривые, записывается в этом случае в виде системы n скалярных уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial F}{\partial x_i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2.1.1}$$

где $\partial F/\partial x_i$ обозначает функцию

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t), \varphi_1'(t), \ldots, \varphi_n'(t))$$

и аналогичный смысл имеет символ $\partial F/\partial y_i$.

Мы исследуем эту систему уравнений *в предположении, что функция F принадлежит к классу C^2 и экстремаль φ является кривой класса C^2*. Как мы увидим позднее (см. предложение 2.1.1), на самом деле при соответствующих предположениях относительно функции F *любая* экстремаль принадлежит к классу C^2.

Так как $\partial F/\partial y_i$ — сложная функция от t (x_i заменяем на $\varphi_i(t)$ и y_i на $\varphi_i'(t)$), то в силу теоремы о дифференцировании сложной функции

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial y_i}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j\, \partial y_i}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \cdot \varphi_j'(t) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial y_j\, \partial y_i}(r, \varphi(t), \varphi'(t)) \cdot \varphi_j''(t).$$

Мы видим, что уравнение Эйлера записывается как следующая система n дифференциальных уравнений второго порядка с n неизвестными функциями $x_1, \ldots, x_n$ от t (мы пишем x_i' вместо y_i):

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t\, \partial x_i'}(t, x, x') + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j\, \partial x_i'}(t, x, x') \cdot x_j' +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j'\, \partial x_i'}(t, x, x') \cdot x_j'' = \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x, x'), \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{2.1.2}$$

Предположим, что

$$\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i'\, \partial x_j'}(t, x, x')\right) \neq 0 \tag{2.1.3}$$

при $(t, x, x') \in U$. Тогда система (2.1.2) приводится к виду

$$x_i'' = G_i(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n'), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где G_i — функции класса C^{k-2}, если F — функции класса C^k.

Предложение 2.1.1. *Если определитель* (2.1.3) *отличен от нуля и функция F принадлежит к классу C^2, то всякая экстремаль*

$$x_i = \varphi_i(t)$$

принадлежит к классу C^2.

Доказательство. Положим

$$z_i = \frac{\partial F}{\partial y_i}(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \qquad 1 \leqslant i \leqslant u. \tag{2.1.4}$$

Якобиан функций $z_1, \ldots, z_n$ относительно $y_1, \ldots, y_n$ равен $\det\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_i\, \partial y_j}\right)$ и по предположению отличен от нуля. Поэтому для некоторой окрестности точки $(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ мы можем применить теорему о неявных функциях. В результате получим

$$y_i = G_i(t, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{2.1.5}$$

где G_i — функции класса C^1. Для того чтобы составить уравнения Эйлера, мы должны записать, что y_i — производные от функций x_i по t и что

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\right) = \frac{\partial F}{\partial x_i}.$$

Таким образом, экстремали суть решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= G_i(t, x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_n), \\ \frac{dz_i}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial x_i}(t, x_1, \ldots, x_n, G_1(t, x, z), \ldots, G_n(t, x, z)), \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

т. е. решения системы дифференциальных уравнений класса C^1 с $2n$ неизвестными функциями x_i и z_i от переменной t. Для всякой экстремали x_i и z_i суть функции класса C^1 по t. Согласно (2.1.5) y_i суть функции класса C^1 по t, и так как $y_i = \partial x_i/dt$, то $x_i\,(t)$ суть функции класса C^2 для любой экстремали, ч. т. д.

Всюду далее мы будем предполагать, что F — функция класса C^2 и что определитель (2.1.3) не равен нулю, так что можно применить теорему о существовании и единственности решения системы дифференциальных уравнений к системе (2.1.6). В результате мы получим, что *через любую точку* $(t, x_1, \ldots, x_n)$ *проходит одна и только одна экстремаль, такая, что* dx_i/dt *принимают заданные значения при* $t = t_0$.

2.2. Примеры

Предварительное замечание. В условиях предыдущего пункта (т. е. при $E = \mathbb{R}^n$) предположим дополнительно, что функция $F\,(t, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$ для какого-то *одного* i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *не зависит от* x_i, т. е. $\partial F/\partial x_i = 0$. Уравнение Эйлера (2.1.1) тогда утверждает, что на *любой экстремали функция* $(\partial F/\partial y_i)\,(i, \varphi\,(t), \varphi'\,(t))$ *постоянна*. Иначе говоря, функция $(\partial F/\partial y_i)\,(t, x, y)$ есть *первый интеграл* системы дифференциальных уравнений для экстремалей.

Первый пример. Пусть $F = \sqrt{(y_1)^2 + \ldots + (y_n)^2}$. Эта задача о кривых в $\mathbb{R}^n$, *экстремальных по длине*, так как

$$\int_a^b \sqrt{\varphi_1'\,(t)^2 + \ldots + \varphi_n'\,(t)^2}\,dt$$

— это длина дуги кривой $\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n$ класса C^1. В этом примере $\partial F/\partial x_i = 0$ для любого i. Поэтому для любого i функция

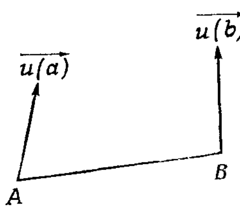

Рис. 13.

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{y_i}{\sqrt{(y_1)^2 + \ldots + (y_n)^2}}$$

постоянна на каждой экстремали. Иначе говоря, *направляющие косинусы* вектора, касательного к экстремали, постоянны. Это означает, что касательные к экстремали имеют постоянное направление. Отсюда сразу видно, что *экстремали — это прямые в пространстве* $\mathbb{R}^n$. Мы можем применить формулу (1.6.1) для вычисления «инфинитезимальной вариации» длины отрезка прямой как функции от «инфинитезимальных вариаций» ее концов: в этой формуле векторы $u\,(a)$ и $u\,(b)$ определяют инфинитезимальные сдвиги концов A и B отрезка прямой (соответствующих значениям a и b параметра t). Правая часть равенства (1.6.1) равна разности ортогональных проекций на отрезок $\overline{AB}$ векторов $\overrightarrow{u(b)}$ и $\overrightarrow{u(a)}$ («формула Жозефа Бертрана»).

Второй пример. Рассмотрим несколько более общий случай. Пусть

$$F = \alpha(x)\sqrt{(y_1)^2 + \ldots + (y_n)^2},$$

где $\alpha(x)$ — функция от $x_1, \ldots, x_n$ класса C^k (где k достаточно велико). Если функция α не зависит от какой-нибудь *одной* переменной, скажем от x_i, то функция

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} = \alpha(x)\frac{y_i}{\sqrt{(y_1)^2 + \ldots + (y_n)^2}}$$

постоянна на каждой экстремали: проекция на i-ю координатную ось вектора длины $\alpha(x)$, направленного по касательной к экстремали, постоянна. Подобная задача вариационного исчисления возникает при нахождении траекторий, по которым распространяется свет в *изотропной* среде. Изотропность означает, что в каждой точке скорость распространения света одна и та же во всех направлениях, она обратно пропорциональна *коэффициенту преломления* среды в этой точке. Этот коэффициент есть функция точки (с положительными значениями), которую мы предполагаем достаточное число раз дифференцируемой и *не зависящей от времени*. Интеграл $\int F dt$ сводится тогда к интегралу $\int \frac{ds}{v}$, где ds — элемент длины кривой и v — скорость света в рассматриваемой точке среды. Таким образом, наш интеграл равен *времени прохождения*. Согласно принципу Ферма свет движется по траекториям, время прохождения которых минимально. Следовательно, эти траектории суть экстремали нашей вариационной задачи. Закон, полученный нами выше, утверждает, что если коэффициент преломления среды не зависит, например, от x_1, то проекция на ось x_1 вектора, направленного по касательной к траектории света и равного *коэффициенту преломления* в рассматриваемой точке, постоянна вдоль этой траектории. Зная это, легко получить (с помощью предельного перехода) *закон преломления* Декарта для случая, когда среда состоит из двух однородных тел, разделенных плоскостью P: если n_1 и n_2 — два постоянных коэффициента преломления, i_1 и i_2 — углы, образуемые лучами света с плоскостью P, то (рис. 14)

$$\frac{1}{n_1}\cos i_1 = \frac{1}{n^2}\cos i_2.$$

Рассмотрим интересный частный случай, относящийся ко второму примеру. Пусть $n = 2$ и

$$\alpha(x) = (x_2)^k \tag{2.2.1}$$

на *полуплоскости* $x_2 > 0$ (координаты точек плоскости обозначены через x_1 и x_2), где k — некоторый показатель. Тогда функция

$$(x_2)^k \frac{x_1'}{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}} = \text{const}$$

на каждой экстремали. Это позволяет найти явный вид экстремалей. Рекомендуем читателю разобрать самостоятельно несколько частных случаев.

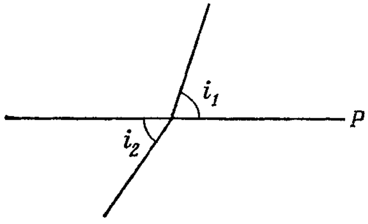

Рис. 14.

Случай $k = -1$. В этом случае речь идет об интеграле $\int \frac{ds}{x_2}$ на полуплоскости $x_2 > 0$. Это — метрика Лобачевского на «полуплоскости Пуанкаре». Экстремалями являются полуокружности с центрами на оси x_1. Они действительно реализуют *минимум* интеграла (1.2.2).

Случай $k = +1$. В этом случае мы имеем дело с интегралом $\int x_2\, ds$. Экстремалями являются цепные линии

$$x_2 = a \operatorname{ch}\left(\frac{x_1}{a} + \text{const}\right).$$

Этот интеграл возникает в задаче о нахождении поверхности вращения наименьшей площади.

Случай $k = -\frac{1}{2}$. В этом случае речь идет об интеграле $\int \frac{ds}{\sqrt{x_2}}$. Этот интеграл появляется при отыскании на полуплоскости $x_2 > 0$ такой кривой C, чтобы точечная масса, двигаясь по этой кривой без трения под действием силы тяжести, направленной по оси x_2 со скоростью $v = \sqrt{2gx_2}$, прошла ее за минимальное время. Экстремалями в этом случае являются дуги *циклоиды*, точки возврата которых лежат на оси x_1.

Случай $k = \frac{1}{2}$. В этом случае мы имеем дело с интегралом $\int \sqrt{x_2}\, ds$. Этот интеграл возникает при нахождении параболы, по которой движется снаряд под действием силы тяжести, направленной по оси x_2, если начальная скорость равна $\sqrt{2gx_2}$.

2.3. Уравнения Лагранжа в механике

Рассмотрим физическую систему, которая может принимать различные положения, описываемые конечным числом (скалярных) параметров $q_1, \ldots, q_n$. Примером может служить система, состоящая из конечного числа свободных материальных точек. Более общим образом, система может состоять из конечного числа твердых тел, подчиняющихся так называемым *голономным связям*. [Положение системы, состоящей из конечного числа твердых тел, определяется конечным числом параметров. Если между этими телами существуют какие-нибудь «связи», то они определяют некоторые «соотношения» между параметрами. Это могут быть дифференциальные уравнения, равенства или неравенства между функциями от параметров. Система называется *голономной*, если связи устроены так, что локально определенные параметры являются заданными функциями от остальных параметров, уже независимых между собой.]

Если параметры q_i являются дифференцируемыми функциями от времени t, то *кинетическая энергия* $2T$ системы в момент времени t выражается как функция от t, $q_1, \ldots, q_n$ и от производных $q_i' = dq_i/dt$. При фиксированных значениях t, $q_1, \ldots, q_n$ — это полином второй степени от $q_1', \ldots, q_n'$. В «хороших» случаях эта функция является *однородным* полиномом второй степени от q_i'. В общем случае

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

где T_2 — однородный полином степени 2, T_1 — (однородная) линейная функция, а T_0 не зависит от q_i'.

Предположим, что в каждый момент времени наша физическая система находится под воздействием системы сил, имеющей *потенциал* $U(t, q_1, \ldots, q_n)$. Это означает, что если мы зафиксируем систему приложенных сил в момент времени t, то *работа*, которую совершит эта система при перемещении нашей физической системы из положения $(q_1^0, \ldots, q_n^0)$ в положение $(q_1^1, \ldots, q_n^1)$, равна $U(t, q_1^1, \ldots, q_n^1) - U(t, q_1^0, \ldots, q_n^0)$. Основной принцип механики утверждает, что *эволюция физической системы во времени описывается кривой*

$$t \to (q_1(t), \ldots, q_n(t)),$$

которая является экстремалью для интеграла

$$\int (T+U)\,dt.$$

Этот интеграл называется *интегралом действия*, а сам принцип носит название *принципа наименьшего действия Гамильтона*.

Таким образом, уравнения движения материальной системы записываются в виде уравнений Эйлера для указанной вариационной задачи. Здесь $F = T + U$, а роль переменных $x_1, \ldots, x_n$ играют $q_1, \ldots, q_n$. Учитывая, что U не зависит от $q_1', \ldots, q_n'$, уравнения Эйлера можно переписать так:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right)=\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}, \qquad 1\leqslant i\leqslant n.} \tag{2.3.1}$$

Это — классические *уравнения Лагранжа* в механике.

2.4. Возвращение к общему случаю: случай, когда $F(t, x, y)$ не зависит от t

Будем искать экстремали интеграла $\int F(x, y)\,dt$, где F — функция класса C^1 на открытом множестве $U\subset E\times E$.

Теорема 2.4.1. *Если функция F не зависит от t, то функция $(\partial F/\partial y)\cdot y-F$ (со значениями в $\mathbb{R}$) постоянна на экстремалях.*

Доказательство. Как всегда, $(\partial F/\partial y)(x, y)\cdot y$ — это значение элемента $(\partial F/\partial y)(x, y)\in\mathscr{L}(E;\ \mathbb{R})$ на векторе $y\in E$. Мы должны проверить, что производная по t от сложной функции

$$\frac{\partial F}{\partial y}(\varphi(t),\ \varphi'(t))\cdot\varphi'(t)-F(\varphi(t),\ \varphi'(t))$$

равна нулю, если $t\to\varphi(t)$ — экстремальная кривая. Формула для производной от билинейной функции (примененная к $(\partial F/\partial y)\cdot y$ как билинейной функции от $\partial F/\partial y$ и y) дает нам

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y\right)-\frac{dF}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)\cdot y+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}-\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}-\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}, \tag{2.4.1}$$

где x надо заменить на $\varphi(t)$, а y — на $dx/dt=\varphi'(t)$. С другой стороны, уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)=\frac{\partial F}{\partial x}\quad\text{(уравнение Эйлера)}$$

показывает, что левая часть равенства (2.4.1) равна нулю, ч. т. д.

Если F — однородный полином степени n от y (для любого x), то

$$\frac{\partial F}{\partial y}\cdot y=nF. \tag{2.4.2}$$

Это классическое тождество Эйлера, которое получается следующим образом: надо в равенстве

$$F(x,\ \lambda y)=\lambda^n F(x,\ y),$$

продифференцировать обе части по λ и затем положить $\lambda=1$.

Пример. В механике, если U и T *не зависят* от t и если функция T задана в виде

$$T=T_2+T_1+T_0,$$

где T_2 — однородная функция степени 2 по q'_i, T_1 — однородная функция степени 1 по q'_i и T_0 не зависит от q'_i, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial q'_i} q'_i - F = (2T_2 + T_1) - (T_2 + T_1 + T_0 + U) = T_2 - T_0 - U.$$

Отсюда получаем *теорему о сохранении энергии* (в обобщенной форме, принадлежащей Пенлеве): *если функции T и U не зависят от t, то величина $T_2 - T_0 - U$ постоянна вдоль каждой траектории.*

2.5. Случай, когда функция $F(x, y)$ есть однородный полином второй степени от y

Теорема 2.4.1 утверждает, что функция $F(\varphi(t), \varphi'(t))$ *постоянна на каждой экстремали.* Предположим теперь, что для каждого x функция $F(x, y)$ есть *невырожденная положительно определенная квадратичная форма от y* (ч. I, гл. 1, § 8). Тогда мы можем рассмотреть функцию $G(x, y) = \sqrt{F(x, y)}$. Если функция F принадлежит к классу C^k, то и функция $G(x, y)$ принадлежит к тому же классу в любой точке (x, y) с $y \neq 0$. Поэтому мы можем наряду с вариационной задачей для интеграла $\int F(x, y)\, dt$ рассмотреть вариационную задачу для интеграла $\int \sqrt{F(x, y)}\, dt$. Мы хотим сравнить экстремали этих двух задач.

Прежде всего необходимо подчеркнуть различие между «параметризованными кривыми» и «геометрическими кривыми». *Параметризованная кривая* в пространстве E — это просто функция

$$\varphi\colon I \to E$$

действительной переменной $t \in I = [a, b]$, которая, по предположению, принадлежит классу C^1. Мы предполагаем также, что $\varphi'(t) \neq 0$ для любого $t \in I$. Иначе говоря, точка $(\varphi(t), \varphi'(t))$ принадлежит открытому множеству U, которое в силу нашего предположения не содержит точек вида $(x, 0)$. Для такой параметризованной кривой мы можем сделать замену параметра

$$t = \lambda(u),$$

где λ — строго возрастающее отображение класса C^1 отрезка $[a, b]$ на себя с производной $\lambda'(u)$, отличной от нуля для любого u. Мы получаем новую параметризованную кривую $u \to \varphi(\lambda(u))$. По определению *геометрическая кривая* — это класс параметризованных кривых, получающихся одна из другой с помощью описанной выше замены параметра.

Очевидно, что для всех параметризованных кривых из одного и того же класса интеграл

$$\int_a^b \sqrt{F(\varphi(t),\ \varphi'(t))}\,dt$$

имеет одно и то же значение, поскольку

$$\sqrt{F(x,\ \xi y)} = \xi\sqrt{F(x,\ y)} \quad \text{для всех} \quad \xi > 0.$$

Таким образом, интеграл

$$\int_a^b \sqrt{F(\varphi(t),\ \varphi'(t))}\,dt$$

в действительности зависит только от выбора *геометрической* кривой. Значит, экстремали на самом деле — это геометрические кривые: выбор параметризации для них не важен. Заметим, что это, разумеется, уже неверно для интеграла $\int_a^b F(\varphi(t),\ \varphi'(t))\,dt$. Следующие два предложения полностью выясняют связь между экстремалями двух наших задач.

Предложение 2.5.1. *Всякая экстремаль для интеграла* $\int F dt$ *является экстремалью для интеграла* $\int \sqrt{F} dt$.

Действительно, экстремали первой задачи — это решения системы уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{\partial F}{\partial x}, \tag{2.5.1}$$

тогда как экстремали второй задачи — это решения системы уравнений

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\sqrt{F}}\frac{\partial F}{\partial y}\right) = \frac{1}{\sqrt{F}}\frac{\partial F}{\partial x}. \tag{2.5.2}$$

Но на каждой экстремали системы (2.5.1) функция F постоянна, и, значит, эта экстремаль удовлетворяет и системе (2.5.2), ч. т. д.

Предложение 2.5.2. *Всякая геометрическая экстремаль для* $\int \sqrt{F}\,dt$ *допускает единственную параметризацию (с помощью параметра* $t \in [a,\ b]$*), такую, что величина* $F(\varphi(t),\ \varphi'(t))$ *постоянна на ней. Эта параметризованная кривая является экстремалью для* $\int F\,dt$.

Доказательство. Возьмем произвольную экстремаль

$$x = \psi(u)$$

для интеграла $\int \sqrt{F}\,dt$. Выберем $u = \lambda(t)$ так, чтобы выражение

$$\sqrt{F(\psi(\lambda(t)),\ \psi'(\lambda(t))\cdot\lambda'(t)}$$

не зависело от t. Но последнее выражение равно

$$\lambda'(t)\cdot\sqrt{F(\psi(u),\ \psi'(u))},\quad \text{где}\quad u = \lambda(t).$$

Функция $\sqrt{F(\psi(u),\ \psi'(u))}$ — это известная непрерывная положительная функция от u; обозначим ее через f. Мы получаем уравнение

$$\frac{du}{dt}\cdot f(u) = \text{const},$$

откуда $t = \left(\frac{1}{c}\right)\int f(u)\,du + k$, где k — некоторая константа. Определим c и k из соотношений $t = a$ при $u = a$ и $t = b$ при $u = b$. Таким образом, t оказывается известной функцией от u с положительной производной. Обратная функция $u = u(t)$ и есть та функция, с помощью которой производится искомая замена параметра. Параметризованная кривая $x = \varphi(t) = \psi(\lambda(t))$ является решением системы (2.5.2), и так как F постоянна на этой кривой, то она является также решением системы (2.5.1), ч. т. д.

2.6. Геодезические кривые на многообразиях

Мы определили в п. 4.12 гл. 3 элемент длины кривой, лежащей на некоторой поверхности в $\mathbb{R}^3$. Обобщим это понятие. Пусть M — многообразие размерности p и класса C^k в пространстве $\mathbb{R}^n$. Если мы воспользуемся локальной параметризацией многообразия M, то координаты $x_1, \ldots, x_n$ точки выразятся как функции класса C^2 от p параметров $u_1, \ldots, u_p$, где точка $u = (u_1, \ldots, u_p)$ принадлежит некоторому открытому множеству $U \subset \mathbb{R}^p$, причем матрица из производных $\partial x_i/\partial u_j$ имеет ранг p в каждой точке множества U. Если $u_1, \ldots, u_p$ суть функции класса C^1 от параметра $t \in [a, b]$, причем производные $u_i'(t)$ не обращаются в нуль одновременно, то сложные функции

$$x_i(u_1(t), \ldots, u_p(t)) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

определяют кривую класса C^1 в пространстве $\mathbb{R}^n$; элемент ее длины равен

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{dx_n}{dt}\right)^2}\,dt.$$

Вычисляя dx_i/dt с помощью теоремы о дифференцировании сложной функции, получаем

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p}\frac{\partial x_i}{\partial u_j}u'_j\right)^2 \quad \left(\text{где} \quad u'_j = \frac{du_j}{dt}\right) =$$

$$= F(u_1, \ldots, u_p, u'_1, \ldots, u'_p),$$

где F — однородная положительно определенная невырожденная квадратичная форма от $u'_1, \ldots, u'_p$, коэффициенты которой суть функции класса C^{k-1} от переменных $u_1, \ldots, u_p$. Таким образом, элемент длины параметризованной кривой, лежащей на многообразии M, равен

$$\sqrt{F(u_1, \ldots, u_p, u'_1, \ldots, u'_p)}\,dt, \tag{2.6.1}$$

где u_i надо заменить на функции $u_i(t)$, определяющие эту кривую. и u'_i — производные от этих функций.

По определению *геодезическими кривыми* на многообразии M называются *экстремали* для интеграла

$$\int \sqrt{F(u_1, \ldots, u_p, u'_1, \ldots, u'_p)}\,dt;$$

это — «геометрические» кривые, так как последний интеграл равен длине дуги кривой и не зависит от выбора параметра t.

Применим к геодезическим кривым результаты предыдущего пункта. Мы видим, что вопрос сводится к исследованию экстремалей для интеграла

$$\int F(u_1, \ldots, u_p, u'_1, \ldots, u'_p)\,dt, \tag{2.6.2}$$

который зависит от выбора параметризации на геометрической кривой. Экстремали интеграла (2.6.2) являются геодезическими кривыми с таким параметром t, что функция $F(u_1, \ldots, u_p, u'_1, \ldots, u'_p)$ постоянна на этой кривой. Иначе говоря, *этот параметр t должен изменяться пропорционально длине дуги рассматриваемой кривой.* Таким образом, *экстремали интеграла* (2.6.2) — *это геодезические кривые, параметризованные с помощью параметра, пропорционального длине дуги.*

Для нахождения геодезических кривых удобнее искать экстремали для интеграла (2.6.2): в этом случае не нужно извлекать корня. и, кроме того, мы получаем кривую, заданную с помощью параметра, с точностью до коэффициента пропорциональности равного длине дуги.

Выпишем уравнения Эйлера для интеграла (2.6.2). Для этого воспользуемся векторными обозначениями. Пусть u обозначает функцию $I \to \mathbb{R}^p$ класса C^1, u' — ее производную, $F(u, u')$ — функцию $F(u_1, \ldots, u_p, u'_1, \ldots, u'_p)$. Тогда уравнения Эйлера принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial u'}\right)=\frac{\partial F}{\partial u},$$

или иначе

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial u'}\cdot u'+\frac{\partial^2 F}{\partial u'\,\partial u'}\cdot u''=\frac{\partial F}{\partial u}, \tag{2.6.3}$$

где u' и u'' обозначают соответственно первую и вторую производные от неизвестной функции u по t. Соотношение (2.6.3) выражает равенство элементов пространства $\mathscr{L}(\mathbb{R}^p;\ \mathbb{R})$, сопряженного к пространству $E=\mathbb{R}^p$, которому принадлежат значения функции $u(t)$. Здесь нужна некоторая осторожность, поскольку значения производной $\partial^2 F/\partial u\,\partial u'$ принадлежат пространству билинейных отображений $E\times E\to\mathbb{R}$, и обозначение $\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial u'}\cdot u'$ неоднозначно, ибо можно двумя различными способами сопоставить вектору $u'\in E$ и билинейному отображению $E\times E\to\mathbb{R}$ линейное отображение $E\to\mathbb{R}$. Для устранения этой неоднозначности достаточно напомнить, что через $\frac{\partial^2 F}{\partial u\,\partial u'}\cdot u'$ обозначается значение производной $\partial/\partial u$ от функции $\partial F/\partial u'$ на векторе u' [которое не надо смешивать со значением на u' производной $\partial/\partial u'$ от функции $\partial F/\partial u$].

Заметим далее, что F — однородная функция степени 2 от u', $\partial F/\partial u'$ — однородная функция степени 1 от u', равно как и ее производная $(\partial/\partial u)(\partial F/\partial u')$. Далее, $\partial^2 F/(\partial u'\cdot\partial u')$ — однородная функция степени 0, т. е. вовсе не зависит от u', а $\partial F/\partial u$ — однородная функция степени 2 от u'. Окончательно дифференциальное уравнение для параметризованных геодезических кривых запишется следующим образом:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u'\,\partial u'}(u)\cdot u''=G(u,\ u'), \tag{2.6.4}$$

где G — функция класса C^{k-1} по u, однородная степени 2 по u', со значениями в $\mathscr{L}(E;\ \mathbb{R})$.

Так как F — квадратичная невырожденная функция от u', отображение

$$\xi\to\frac{\partial^2 F}{\partial u'\,\partial u'}(u)\cdot\xi$$

для каждого u есть *изоморфизм* пространства E на сопряженное пространство $\mathscr{L}(E;\ \mathbb{R})$. Пусть $\sigma(u)\colon \mathscr{L}(E;\ \mathbb{R})\to E$ — обратный изоморфизм, который принадлежит к классу C^k по u. Применяя изоморфизм $\sigma(u)$ к обеим частям равенства (2.6.4), мы получаем уравнение, эквивалентное (2.6.4):

$$u''=\sigma(u)\cdot G(u,\ u'). \tag{2.6.5}$$

Правая часть этого равенства $H(u,\ u')$ есть однородная функция степени 2 по u' класса C^{k-1} по u и со значениями в E. Таково дифференциальное уравнение для геодезических кривых, параметризованных с помощью параметра, пропорционального длине дуги.

Применим теперь к уравнению (2.6.5) *локальную теорему существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений второго порядка.* Однако прежде убедимся в том, что если $u(t)$ — решение, то $u(ct)$ — тоже решение для любой константы c; это можно предвидеть, поскольку, как мы знаем, параметр t на геодезической кривой однозначно, с точностью до постоянного множителя, определяется условием пропорциональности длине дуги геодезической. И действительно, это легко следует из уравнения (2.6.5), ибо его правая часть $H(u, u')$ — однородная функция второй степени по u'. Отсюда вытекает, что для заданных начального значения $u(0)$ и начального значения производной $u'(0)$ существует одна и только одна геодезическая $u(t)$ (на некотором интервале $-\varepsilon \leqslant t \leqslant +\varepsilon$), соответствующая этим начальным данным. Если мы умножим $u'(0)$ на положительную константу, то найденная геометрическая кривая не изменится. Поэтому *существует единственная геометрическая геодезическая, проходящая через данную точку и имеющая данную касательную.*

Далее, применим к уравнению (2.6.5) теорему 3.8.1 из гл. 2, справедливую для любого дифференциального уравнения второго порядка класса C^1. Для этого мы должны предположить, что квадратичная форма $F(u, u')$ принадлежит к классу C^2 по u и что параметризованные геодезические кривые являются решениями уравнения

$$u'' = H(u, u'),$$

где функция $H(u, u')$ принадлежит к классу C^1 по u. Применим упомянутую теорему 3.8.1 из гл. 2, заменив в ее формулировке x на u и x' на u'. Мы получим решение, соответствующее нашим начальным данным:

$$u(t) = a\ (=\text{const}).$$

На основании сказанного в пояснении к теореме 3.8.1 мы можем сделать следующий вывод.

Пусть даны две точки b и $c \in \mathbb{R}^p$, достаточно близкие к точке a. Тогда найдется одна и только одна (близкая к нулю) начальная скорость $u'(0)$, для которой при $|t| \leqslant 1$ существует геодезическая $u(t)$, удовлетворяющая условиям $u(0) = b$ и $u(1) = c$. Короче говоря, *через любые две точки b и c, достаточно близкие к точке a, проходит одна и только одна геодезическая.*

2.7. Задачи на экстремум для кривых, лежащих на многообразии

Предположим для простоты, что $E = \mathbb{R}^n$. Пусть S — многообразие класса C^p (где p достаточно велико) в пространстве $\mathbb{R}^n$ (см. п. 4.7 гл. 3). Многообразие S будем считать фиксированным и в дальнейшем будем рассматривать только кривые класса C^1

$$\varphi\colon I \to \mathbb{R}^n,$$

такие, что $\varphi(t) \in S$ для $t \in I = [a, b]$. Мы будем говорить, что такие кривые лежат на многообразии S. Они образуют подмножество V_S в банаховом пространстве V всех кривых класса C^1 (см. п. 1.1). Наделим V_S топологией, индуцированной из V. Разумеется, V_S не является *векторным* подпрострaнством.

Пусть, как и раньше, нам задана числовая функция класса C^k на открытом множестве $U \subset \mathbb{R} \times E \times E$. Обозначим через Ω *открытсе* множество в пространстве V, образованное кривыми, такими, что $(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in U$ для любого $t \in I$. Тогда $V_S \cap \Omega$ — открытое множество в топологическом пространстве V_S.

Задача на минимум. Пусть $\Omega_S(\alpha, \beta)$ — множество кривых $\varphi \in V_S \cap \Omega$, для которых $\varphi(a) = \alpha$ и $\varphi(b) = \beta$. Это топологическое пространство; предположим, что оно *не пусто* [так что точки $\alpha \in \mathbb{R}^n$ и $\beta \in \mathbb{R}^n$ принадлежат одной и той же связной компоненте многообразия S]. Пусть $\varphi_0 \in \Omega_S(\alpha, \beta)$. Поставим вопрос: когда на кривой φ_0 достигается *локальный минимум* функционала

$$f(\varphi) = \int_a^b F(t, \varphi(t), \varphi'(t))\,dt, \tag{2.7.1}$$

где $\varphi \in \Omega_S(\alpha, \beta)$. Иначе говоря, когда имеет место неравенство

$$f(\varphi) \geqslant f(\varphi_0)$$

для любых кривых $\varphi \in \Omega_S(\alpha, \beta)$ из некоторой окрестности кривой φ_0 (в топологии $\Omega_S(\alpha, \beta)$)?

Докажем следующую теорему

Теорема 2.7.1. *Для того чтобы функция* φ_0 *реализовывала локальный минимум интеграла* (2.7.1) *для* $\varphi \in \Omega(\alpha, \beta)$, *необходимо, чтобы*

$$f'(\varphi_0)\cdot u = 0 \tag{2.7.2}$$

для всех функций $u\colon I \to \mathbb{R}^n$ *класса* C^1, *обладающих таким свойством:*

P(S): $u(a) = 0$, $u(b) = 0$ *и для любого* $t \in I$ *вектор* $u(t) \in \mathbb{R}^n$ *является касательным к многообразию* S *в точке* $\varphi_0(t)$ [по поводу определения касательного вектора см. гл. 1, предложение 4.7.2. Как мы знаем, касательные векторы к S в точке $x \in S$ образуют касательное векторное пространство $T_x(S)$.]

Пояснение. Необходимое условие минимума, найденное в п. 1.4, заключалось в требовании, чтобы $f'(\varphi_0)\cdot u = 0$ для любой функции $u\colon I \to \mathbb{R}^n$ класса C^1, такой, что $u(t) = 0$ при $t = a$ и $t = b$. В теореме 2.7.1 множество рассматриваемых функций u беднее. Поэтому условие (2.7.2) на кривую φ_0 слабее аналогичного условия из п. 1.4. Это и хорошо, ибо, например, в задаче на минимум длины дуги кривой из условий п. 2.1 следовало бы, что кривая минимальной длины обязательно должна быть отрезком прямой, а в нашем случае, когда кривая должна лежать на многообразии S, весьма мало надежды на то, что многообразие S содержит вместе с двумя точками и соединяющий их отрезок прямой.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 2.7.1, напомним, что

$$f'(\varphi_0)\cdot u = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,\ \varphi_0(t),\ \varphi_0'(t))\cdot u(t) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial F}{\partial y}(t,\ \varphi_0(t),\ \varphi_0'(t))\cdot u'(t)\right] dt \qquad (2.7.3)$$

(см. равенство (1.2.3)).

Доказательство. Всякая функция $\psi(t,\ \lambda)$ от двух действительных переменных t и λ класса C^1, определенная при

$$t \in I, \qquad |\lambda| \leqslant \varepsilon \quad (\text{где } \varepsilon > 0 \text{ достаточно мало})$$

и принимающая значения в S, определяет семейство кривых $\varphi_\lambda\colon I \to S$, параметризованное с помощью параметра λ, а именно:

$$\varphi_\lambda(t) = \psi(t,\ \lambda).$$

Предположим, что кривая $\psi(t,\ 0)$ совпадает с кривой $\varphi_0(t)$ и $\varphi_\lambda(a) = a$, $\varphi_\lambda(b) = b$ для любого λ. Тогда $\varphi_\lambda \in \Omega_S(\alpha,\ \beta)$ для всех достаточно малых значений $|\lambda|$. Предположим далее, что функции ψ и $\partial\psi/\partial t$ имеют частные производные по λ:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(t,\ \lambda) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,\ \lambda),$$

причем эти производные непрерывны по $(t,\ \lambda)$. Тогда

$$f(\varphi_\lambda) = \int_a^b F\left(t,\ \psi(t,\ \lambda),\ \frac{\partial \psi}{\partial t}(t,\ \lambda)\right) dt$$

есть дифференцируемая функция от переменного λ. По лемме о дифференцировании под знаком интеграла производная от этой функции по λ при $\lambda = 0$ равна

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(t,\ \varphi_0(t),\ \varphi_0'(t))\cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}(t,\ 0) + \frac{\partial F}{\partial y}(t,\ \varphi_0(t),\ \varphi_0'(t))\cdot \frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,\ 0)\right]. \qquad (2.7.4)$$

Если φ_0 реализует локальный минимум функции $f(\varphi)$, то производная $f(\varphi_\lambda)$ по λ обращается в нуль при $\lambda = 0$. Поэтому выражение (2.7.4) равно нулю. Отсюда и будет следовать теорема 2.7.1, если только мы докажем лемму:

Лемма 2.7.2. *Пусть* $u\colon I \to \mathbb{R}^n$ — *функция класса* C^1, *удовлетворяющая условию* P(S). *Тогда существует функция* $\psi(t, \lambda)$ *описанного выше типа со значениями на многообразии* S, *такая, что*

$$\psi(t, 0) = \varphi_0(t), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t}(t, 0) = u(t), \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial t}(t, 0) = u'(t). \quad (2.7.5)$$

[Интуитивно это означает, что мы можем включить кривую φ в такое семейство кривых φ_λ, лежащих на S, что для каждого значения $t \in I$ «бесконечно малое приращение» $\psi(t, \lambda)$ в точке $(t, 0)$ при бесконечно малых приращениях λ есть вектор $u(t)$, касательный к многообразию S в точке $\varphi_0(t)$.]

Мы укажем лишь идею доказательства леммы, не вникая в детали. Предположим, что многообразие S принадлежит к классу C^3 и что ds^2 на этом многообразии есть функция класса C^2 от параметров, локально параметризующих S. Тогда дифференциальные уравнения для геодезических на многообразии S принадлежат к классу C^1, и мы можем применить к ним общие теоремы существования и зависимости от начальных условий. В каждой точке $x \in S$ каждому касательному вектору $y \in T_x(S)$ соответствует геодезическая

$$\lambda \to g(x, y, \lambda)$$

с параметром, пропорциональным длине дуги кривой, такая, что $g(x, y, 0) = x$ и $(\partial g/\partial\lambda)(x, y, 0) = y$; это геодезическая определена при достаточно малых $\|\lambda y\|$. Тем самым определена функция $g(x, y, \lambda)$, принадлежащая к классу C^1. Заменим x на $\varphi_0(t)$ и y на $u(t)$ в функции $g(x, y, \lambda)$. Тогда $g(\varphi_0(t), u(t), \lambda)$ и будет функцией $\psi(t, \lambda)$, удовлетворяющей условиям (2.7.5).

Определение. Кривая $\varphi_0\colon I \to S$, удовлетворяющая необходимому условию из теоремы 2.7.1, называется *экстремалью* для интеграла $\int_a^b F(t, \varphi(t), \varphi'(t))\,dt$, лежащей на многообразии S.

Будем писать φ вместо φ_0. Мы видим, что *кривая* $\varphi\colon I \to S$ *является экстремалью в том и только том случае, когда*

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\cdot u(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t))\cdot u'(t)\right] dt = 0 \quad (2.7.6)$$

для любой функции $u\colon I \to \mathbb{R}^n$ *класса* C^1, *удовлетворяющей условию* P(S).

2.8. Преобразование предыдущего условия

Будем действовать так же, как в п. 1.5. Но здесь мы для простоты *предположим*, что функция от t

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t))$$

дифференцируема, если кривая φ является экстремалью. Так же, как и в п. 1.5, положим

$$A(t) = \frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)), \qquad B(t) = \frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)).$$

Интегрирование по частям дает

$$\int_a^b (A(t)\cdot u(t) + B(t)\cdot u'(t))\,dt = \int_a^b (A(t) - B'(t))\cdot u(t)\,dt,$$

так как $u(a)=0$ и $u(b)=0$. Поэтому условие, что кривая φ является экстремалью, состоит в том, что

$$\int_a^b (A(t) - B'(t))\cdot u(t)\,dt = 0$$

для любой функции $u\colon I \to \mathbb{R}^n$ класса C^1, удовлетворяющей условию P(S). Так же, как в доказательстве леммы 1.5.3, можно показать, что в нашем случае для любого $t \in I$ линейная форма $A(t) - B'(t) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ *должна обращаться в нуль на каждом векторе, касательном к S в точке $\varphi(t)$*. Мы предоставляем эту возможность читателю в качестве упражнения. Разумеется, наше необходимое условие является также и достаточным. В итоге получается

Теорема 2.8.1. *Для того чтобы кривая $\varphi\colon I \to S$ была экстремалью (в предположении, что функция*

$$\frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t))$$

дифференцируема по t), необходимо и достаточно, чтобы для любого $t \in I$ элемент

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial y}(t, \varphi(t), \varphi'(t)) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$$

обращался в нуль на всех векторах касательного пространства $T_x(S)$ в точке $x = \varphi(t)$.

Это условие заменяет уравнение Эйлера из теоремы 1.5.2.

Пример. Пусть $n = 3$, $S \subset \mathbb{R}^3$ — *поверхность* в трехмерном евклидовом пространстве и

$$F(t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2}.$$

Тогда интеграл $\int F(t, \varphi(t), \varphi'(t))\,dt$ дает длину дуги кривой и его экстремали суть *геодезические* на поверхности S. Мы будем рассматривать их как кривые в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^3$. Распишем условия теоремы 2.8.1. Коэффициенты $\partial F/\partial y_1$, $\partial F/\partial y_2$, $\partial F/\partial y_3$ линейной формы $\partial F/\partial y$ равны

$$\frac{\partial F}{\partial y_i}=\frac{y_i}{\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}.$$

Это направляющие косинусы касательной к кривой φ. Поэтому функции $(d/dt)(\partial F/\partial y_i)$ суть компоненты производной (по t) единичного касательного вектора к кривой φ. Они пропорциональны компонентам единичного вектора, направленного по *главной нормали* к кривой φ. Теорема 2.8.1 означает, следовательно, что главная нормаль к кривой φ в точке $\varphi(t)$ ортогональна ко всем касательным векторам к поверхности S в точке $\varphi(t)$. Иначе говоря, *геодезические на S — это кривые, обладающие следующим свойством: главная нормаль к кривой совпадает с нормалью к поверхности S в каждой точке кривой.*

§ 3. ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

До сих пор мы изучали «вариации» простого интеграла $\int_a^b F(t, \varphi(t), \varphi'(t))\,dt$, сопоставляемого кривой $\varphi\colon I\to E$. Дадим набросок теории вариаций *двойного интеграла*.

3.1. Постановка задачи

Вместо отрезка $I\subset\mathbb{R}$ мы рассмотрим *компакт с краем* $K\subset\mathbb{R}^2$. Координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$ обозначим через t_1 и t_2. По поводу понятия компакта с краем класса C^1 см. п. 4.2 гл. 3.

Говорят, что отображение

$$\varphi\colon K\to E$$

(где E — банахово пространство) принадлежит к классу C^1, если оно является сужением на K отображения класса C^1 некоторой открытой окрестности компакта K. Отображения $\varphi\colon K\to E$ класса C^1 образуют векторное пространство V. Введем на V следующую норму:

$$\|\varphi\|=\sup_K\|\varphi(t_1, t_2)\|+\sup_K\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t_1, t_2)\right\|+\sup_K\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t_1, t_2)\right\|.$$

Можно проверить, что V *полно* в этой норме (в доказательстве встречаются небольшие трудности, на которых мы не будем останавливаться). Таким образом, V есть банахово пространство.

Далее, пусть в открытом множестве $U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times E\times E\times E$ задана числовая функция $F(t_1, t_2, x, y_1, y_2)$ класса C^k $(k\geqslant 1)$.

Отображения $\varphi\in V$, такие, что

$$\left[t_1, t_2, \varphi(t_1, t_2), \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t_1, t_2), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t_1, t_2)\right]\in U$$

для любой точки $(t_1, t_2) \in K$, образуют *открытое* подмножество Ω банахова пространства V (доказательство аналогично доказательству предложения 1.2.1; все основано на компактности K). Для $\varphi \in \Omega$ определен «функционал»

$$f(\varphi) = \iint\limits_K F\left[t_1, t_2, \varphi(t_1, t_2), \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t_1, t_2), \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t_1, t_2)\right] dt_1 \wedge dt_2.$$

Легко видеть, что отображение $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ принадлежит к классу C^k (как и F) и что для любого вектора $u \in V$

$$f'(\varphi)\cdot u = \iint\limits_K \left\{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot u(t_1, t_2) + \frac{\partial F}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial t_1}(t_1, t_2) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial F}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t_2}(t_1, t_2)\right\} dt_1 \wedge dt_2, \qquad (3.1.1)$$

где в

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y_1} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y_2}$$

надо заменить x на $\varphi(t_1, t_2)$, y_1 — на $\partial u/\partial t_1$ и y_2 — на $\partial u/\partial t_2$.

В п. 1.4 мы рассматривали задачу на минимум для кривых $\varphi(t)$, таких, что $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$ принимают заданные значения. Здесь роль концевых точек a и b отрезка I играет *край* ∂K нашего компакта K. Поэтому мы ограничиваемся рассмотрением таких отображений $\varphi\colon K \to E$, для которых сужение φ на ∂K совпадает с *заданным* отображением $\psi\colon \partial K \to E$ класса C^1. Такие отображения φ образуют аффинное подпространство $W(\psi)$ банахова пространства V. Данное отображение $\varphi_0 \in W(\psi)$ определяет биективное отображение $W(\psi)$ на $W(0)$:

$$\varphi \to \varphi - \varphi_0$$

(отображение $\varphi - \varphi_0$ обращается в нуль на крае ∂K).

Для данного отображения $\varphi_0 \in \Omega$ можно поставить вопрос, при каких условиях φ_0 реализует *минимум* функционала $f(\varphi)$ среди всех отображений φ, достаточно близких к φ_0 и имеющих *то же сужение на ∂K, что и* φ_0. Необходимое условие минимума заключается в том, что производная $f'(\varphi_0)$ должна обращаться в нуль на всех векторах u векторного подпространства $W(0)$. Такие отображения φ_0 называются *экстремалями* для интеграла

$$\iint\limits_K F\left(t_1, t_2, \varphi(t_1, t_2), \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right) dt_1 \wedge dt_2.$$

Таким образом, учитывая соотношение 3.1.1 и заменяя φ_0 на φ, мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.1.1. *Для того чтобы отображение* $\varphi\colon K\to E$, *принадлежащее* Ω, *было экстремалью, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\iint\limits_K \left\{\frac{\partial F}{\partial x}\cdot u(t_1,\ t_2)+\frac{\partial F}{\partial y_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial t_1}(t_1,\ t_2)+\frac{\partial F}{\partial y_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t_2}(t_1,\ t_2)\right\}dt_1\wedge dt_2=0 \tag{3.1.2}$$

для любой функции $u\colon K\to E$ *класса* C^1, *обращающейся в нуль на крае* ∂K. [В левой части (3.1.2) $\partial F/\partial x$ означает

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(t_1,\ t_2,\ \varphi(t_1,\ t_2),\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right);$$

то же относится и к $\partial F/\partial y_1$ и $\partial F/\partial y_2$.]

Эта теорема является аналогом теоремы 1.4.1.

3.2. Преобразование условия экстремума

Положим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x}\left(t_1,\ t_2,\ \varphi(t_1,\ t_2),\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right)=A(t_1,\ t_2),\\
&\frac{\partial F}{\partial y_1}\left(t_1,\ t_2,\ \varphi(t_1,\ t_2),\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right)=B_1(t_1,\ t_2),\\
&\frac{\partial F}{\partial y_2}\left(t_1,\ t_2,\ \varphi(t_1,\ t_2),\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1},\ \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}\right)=B_2(t_1,\ t_2).
\end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Это непрерывные функции на K со значениями в $\mathcal{L}(E;\ \mathbb{R})$.

Предположим, что B_1 и B_2 — функции класса C^1, и при этом дополнительном ограничении докажем следующую лемму.

Лемма 3.2.1. *Для того чтобы интеграл*

$$\iint\limits_K \left(A(t_1,\ t_2)\cdot u(t_1,\ t_2)+B_1(t_1,\ t_2)\cdot\frac{\partial u}{\partial t_1}+B_2(t_1,\ t_2)\cdot\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt_1\wedge dt_2 \tag{3.2.2}$$

обращался в нуль для любой функции $u\colon K\to E$ *класса* C^1, *равной нулю на крае* ∂K, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$A=\frac{\partial B_1}{\partial t_1}+\frac{\partial B_2}{\partial t_2}. \tag{3.2.3}$$

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а. Пусть задана функция $u\colon K\to E$. Рассмотрим дифференциальную форму первой степени от двух переменных t_1 и t_2:

$$\omega=[B_1(t_1,\ t_2)\cdot u(t_1,\ t_2)]\,dt_2-[B_2(t_1,\ t_2)\cdot u(t_1,\ t_2)]\,dt_1.$$

Имеем

$$\left(B_1(t_1,\ t_2)\cdot\frac{\partial u}{\partial t_1}+B_2(t_1,\ t_2)\cdot\frac{\partial u}{\partial t_2}\right)dt_1\wedge dt_2=$$
$$=d\omega-\left[\left(\frac{\partial B_1}{\partial t_1}+\frac{\partial B_2}{\partial t_2}\right)\cdot u(t_1,\ t_2)\right]dt_1\wedge dt_2.$$

Поэтому интеграл (3.2.2) равен

$$\iint\limits_K\left(A-\frac{\partial B_1}{\partial t_1}-\frac{\partial B_2}{\partial t_2}\right)\cdot u(t_1,\ t_2)\,dt_1\wedge dt_2+\iint\limits_K d\omega.$$

Но по теореме Стокса

$$\iint\limits_K d\omega=\int\limits_{\partial K}\omega,$$

последний же интеграл равен нулю, так как форма ω равна 0 на крае ∂K [ибо $u(t_1,\ t_2)=0$ в каждой точке $(t_1,\ t_2)\in\partial K$].

Таким образом, для любой функции u класса C^1, равной нулю на ∂K, интеграл (3.2.2) равен

$$\iint\limits_K\left(A-\frac{\partial B_1}{\partial t_1}-\frac{\partial B_2}{\partial t_2}\right)\cdot u(t_1,\ t_2)\,dt_1\wedge dt_2.$$

Для того чтобы этот интеграл был равен нулю для любой функции u, обращающейся в нуль на ∂K, необходимо (и, очевидно, достаточно), чтобы функция $A-\frac{\partial B_1}{\partial t_1}-\frac{\partial B_2}{\partial t_2}$ была *тождественно равна нулю*. Это утверждение доказывается так же, как лемма 1.5.3, и мы предоставляем читателю провести подробное доказательство. Итак, условие (3.2.3) необходимо и достаточно, ч. т. д.

Применяя лемму к A, B_1, B_2, задаваемым формулами (3.2.1), получаем следующую теорему.

Теорема 3.2.2. *Для того чтобы отображение $\varphi\colon K\to E$, принадлежащее Ω, было экстремалью, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial F}{\partial y_2}\right).}\qquad(3.2.4)$$

Здесь предполагается, что в $\partial F/\partial x$, равно как и в $\partial F/\partial y_1$ и $\partial F/\partial y_2$, x заменено на $\varphi(t_1,\ t_2)$, y_1 на $\partial\varphi/\partial t_1$ и y_2 на $\partial\varphi/\partial t_2$. [Это уравнение заменяет в разбираемом случае уравнение Эйлера.]

Замечание. Это уравнение выведено нами лишь в предположении, что $\partial F/\partial y_1$ и $\partial F/\partial y_2$ суть функции класса C^1 от t_1 и t_2.

Равенство (3.2.4) означает, что

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial x}\, dt_1 \wedge dt_2 = d\left(\frac{\partial F}{\partial y_1}\, dt_2 - \frac{\partial F}{\partial y_2}\, dt_1\right).} \tag{3.2.5}$$

Это — другая запись уравнения для экстремалей.

В случае, когда функция $F(t_1, t_2, x, y_1, y_2)$ не зависит от x, условие (3.2.5) выражает просто тот факт, что дифференциальная форма

$$\frac{\partial F}{\partial y_1}\left(t_1, t_2, \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right) dt_2 - \frac{\partial F}{\partial y_2}\left(t_1, t_2, \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}\right) dt_1$$

замкнута (т. е. что внешний дифференциал равен нулю).

Пример. Пусть x, y, z — координаты в пространстве $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим поверхность $z = \varphi(x, y)$. Положим $E = \mathbb{R}$ и заменим в полученных выше формулах t_1 на x, t_2 на y, x на z, $\partial\varphi/\partial t_1$ на $\partial z/dx$ и $\partial\varphi/\partial t_2$ на $\partial z/\partial y$. Кроме того, будем использовать классические обозначения: p для $dz/\partial x$ и q для $\partial z/\partial y$.

Пусть задана функция $F(p, q)$, не зависящая от x, y, z. Рассмотрим функционал

$$\iint_K F(p, q)\, dx \wedge dy,$$

где интеграл берется по куску поверхности $z = \varphi(x, y)$, где $(x, y) \in K$. Экстремальные поверхности — это те поверхности, для которых *замкнута* дифференциальная форма

$$\frac{\partial F}{\partial p}\, dy - \frac{\partial F}{\partial q}\, dx$$

(где p и q надо заменить на $\partial\varphi/\partial x$ и $\partial\varphi/\partial y$).

Возьмем, в частности,

$$F(p, q) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Тогда

$$\sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx \wedge dy$$

есть *элемент площади* поверхности $z = \varphi(x, y)$. Экстремальные поверхности для интеграла

$$\iint \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx \wedge dy$$

называются *минимальными поверхностями* [ибо для достаточно малого куска такая поверхность имеет наименьшую площадь среди всех достаточно близких к ней поверхностей с тем же краем]. В силу соотношения (3.2.4) минимальные поверхности суть решения уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0. \qquad (3.2.6)$$

Это уравнение в частных производных второго порядка от неизвестной функции z, зависящей от двух переменных x и y. После некоторых преобразований его можно записать в виде

$$(1+q^2)\,r-2pqs+(1+p^2)\,t=0, \qquad (3.2.7)$$

где r, s, t обозначают соответственно $\partial^2 z/\partial x^2$, $\partial^2 z/\partial x\,\partial y$, $\partial^2 z/\partial y^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

Упражнение 1. Введем на пространстве кривых класса C^2, заданных на интервале $[a, b]$ и принимающих значения в банаховом пространстве E, норму

$$\|x\|=\sup_{t\in[a,\,b]}(\|x(t)\|+\|x'(t)\|+\|x''(t)\|).$$

Пусть $F(t, x, y, z)$ — функция класса C^1. Положим

$$f(x)=\int_a^b F(t,\ x(t),\ x'(t),\ x''(t))\,dt.$$

Покажите, что f — дифференцируемая функция от x и что ее производная дается формулой

$$f'(x)\cdot u=\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial x}\cdot u+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\ u'+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot u''\right)dt$$

для простоты записи мы полагаем

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,\ x(t),\ x'(t),\ x''(t))\cdot u(t)=\frac{\partial F}{\partial x}\cdot u$$

и т. д.) Преобразуйте эту производную при помощи интегрирования по частям

Упражнение 2. Определите экстремали интегралов

$$\int_a^b tx'y'\,dt, \qquad \int_a^b (x'+y)(x+y')\,dt, \qquad \int_a^b x(x'+y'+t)\,dt.$$

Вообще, что можно сказать об экстремалях интеграла

$$I(f)=\int F(t,\ f,\ f')\,dt,$$

если функция F линейна или аффинна по третьей переменной?

Упражнение 3. Рассмотрим интеграл вида

$$I(x)=\int_a^b F(t,\ x')\,dt,$$

где F — числовая функция класса C^1 на всей плоскости. Рассмотрим такую его экстремаль $x_0(t)$, если она существует, для которой $x_0(a) = \alpha$, $x_0(b) = \beta$. Пусть $x(t)$ — другая функция класса C^1, такая, что $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$.

Докажите, что

$$I(x) - I(x_0) = \int_a^b \left[F(t, x') - F(t, x_0') - (x' - x_0') \frac{\partial F}{\partial x'}(t, x_0'(t)) \right] dt.$$

Выведите отсюда, что если F — функция, выпуклая по второй переменной, то x_0 реализует глобальный минимум (воспользуйтесь упр. 8 из гл. 1 ч. I).

Упражнение 4. Выясните вопрос о существовании и единственности экстремалей интеграла

$$\int_a^b (x^2 - x'^2)\, dt,$$

удовлетворяющих условиям $x(a) = \alpha$, $x(b) = \beta$.

Упражнение 5. Пусть λ — данная константа, и пусть ищутся экстремали интеграла

$$I_\lambda(x) = \int_{-1}^{+1} (t^2 + \lambda^2)\, x'^2\, dt.$$

(a) Докажите, что при $\lambda \neq 0$ существует одна и только одна экстремаль, проходящая через точки $(-1, a)$ и $(1, b)$, где $a \neq b$, и реализующая глобальный минимум интеграла $I_\lambda(x)$.

(b) Покажите, что при $\lambda = 0$ не существует экстремалей класса C^1. Докажите, что интеграл $I_0(x_0)$ нигде не обращается в нуль, но для надлежащим образом подобранных функций $x(t)$ принимает сколь угодно малые значения.

Упражнение 6. (a) *Подготовительная часть.* Пусть Ω — открытое подмножество банахова пространства E, f и g — действительные функции класса C^1 на Ω.

Пусть C — данная константа. Рассмотрим множество $V \subset \Omega$ точек x, для которых $g(x) = C$. Пусть a — точка, принадлежащая множеству V, причем $g'(a) \neq 0$. Докажите, что коразмерность ядра N отображения $g'(a)$ равна 1.

Пусть $u \in N$, $u \neq 0$. Докажите, что существует кусок одномерного многообразия класса C^1, лежащий в V, содержащий точку a и касающийся вектора u. [Найдите пересечение V с двумерной плоскостью, определяемой уравнением $x = a + \lambda u + \mu v$, где v фиксировано, $v \notin N$. Используя теорему о неявных функциях, докажите, что это пересечение в пределах некоторой окрестности точки a и представляет собой кусок искомого одномерного многообразия.]

Выведите отсюда, что если сужение f на V имеет экстремум в точке a, то $f'(a) \cdot u = 0$ для любого $u \in N$. Далее докажите, что $f'(a)$ пропорционально $g'(a)$ (докажите, что если $v \notin N$, то

$$f'(a) - \frac{f'(a) \cdot v}{g'(a) \cdot v}\, g'(a) = 0).$$

(b) Приложение. Пусть I — интервал $[a, b]$, $F(t, x, y)$ и $G(t, x, y)$ — функции класса C^1 на $I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, α, β и C — данные числа. Положим

$$f(x) = \int_a^b F(t,\ x(t),\ x'(t))\,dt,$$

$$g(x) = \int_a^b G(t,\ x(t),\ x'(t))\,dt$$

и будем искать среди функций $x(t)$ класса C^1 на интервале $[a, b]$ функции, удовлетворяющие соотношениям

$$x(a) = \alpha,$$
$$x(b) = \beta,$$
$$y(x) = C,$$

т. е., функции, для которых $f(x)$ принимает экстремальное значение.

Докажите, что если такая функция $x_0(t)$ существует и $g'(x_0) \neq 0$, то можно найти такое число λ, что $x_0(t)$ будет экстремалью $y_0(t, \lambda)$ для интеграла $f(x) - \lambda g(x)$. Это число λ определяется условием

$$g(y_0(\lambda)) = C.$$

Пример. Найдите на плоскости $\mathbb{R}^2$ кривую Γ минимальной длины, соединяющую начало координат с точкой $(1, 0)$ и удовлетворяющую условию $\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = C$, где (P, Q) — векторное поле класса C^1 на $\mathbb{R}^2$. [Параметризуйте Γ с помощью длины дуги s и напишите систему дифференциальных уравнений второго порядка для $x(s)$ и $y(s)$.]

Докажите, что если величина $P'_y - Q'_x$ постоянна на плоскости $\mathbb{R}^2$, то Γ есть дуга окружности, и укажите, как найти λ.

Упражнение 7. Используя первую часть предыдущего упражнения, определите функцию $r(u)$ класса C^1, реализующую минимум интеграла

$$\int_0^{2\pi} (r^2 + r'^2)^{1/2}\,du$$

среди функций, удовлетворяющих соотношениям $\int_0^{2\pi} r^2 du = C$ и $r(0) = r(2\pi) = 0$ (где C — заданная положительная константа). [Это эквивалентно следующей задаче: найти в полярных координатах замкнутую кривую минимальной длины, ограничивающую данную площадь.]

Упражнение 8. Обозначим через $\Sigma(f)$ поверхность вращения, определенную в цилиндрических координатах (r, θ, z) соотношениями $r = f(z)$, $a \leqslant z \leqslant b$ (где f — положительная функция класса C^1).

(a) Представьте площадь $A(f)$ этой поверхности в виде (одинарного) интеграла по отрезку $[a, b]$ и определите функции f, на которых достигается экстремальное значение этого интеграла [найдите сначала функцию, обратную к f].

(b) Для $a \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant b$ обозначим через $V(z_1, z_2, f)$ объем области в пространстве $\mathbb{R}^3$, определенной неравенствами $0 \leqslant r \leqslant f(z)$, $z_1 \leqslant z \leqslant z_2$, и через $A(z_1, z_2, f)$ — площадь куска поверхности $\Sigma(f)$, заключенного между плоскостями $z = z_1$ и $z = z_2$.

Докажите, что экстремальные поверхности из пункта (a) и круговые цилиндры являются единственными поверхностями вращения вокруг оси z, для которых отношение

$$\frac{V(z_1, z_2, f)}{A(z_1, z_2, f)}$$

не зависит от z_1 и z_2.

Упражнение 9. Пусть $f(t, x, y)$ — числовая функция класса C^2, определенная в области $\Omega \times \mathbb{R}$, где Ω—выпуклая открытая область плоскости. Рассмотрим функции f, удовлетворяющие условию

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial t\, \partial y} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0. \tag{D}$$

Пусть A и B — две точки области Ω с абсциссами соответственно a и b, $a \neq b$. Рассмотрим

$$\int_a^b f(t, x, x')\, dt.$$

(a) Докажите, что условие (D) выполняется, если все прямолинейные отрезки, лежащие в Ω, являются экстремалями.

(b) Обозначим через $X(t)$ линейную функцию, график которой соединяет точки A и B.

Проинтерпретируйте условие (D) в случае, когда функция f линейно зависит от y, и установите, что тогда

$$\int_a^b f(t, x, x')\, dt = \int_a^b f(t, X, X')\, dt$$

для любой функции $x(t)$ класса C^2, график которой соединяет A и B в области Ω.

(c) Докажите, что если функция f выпукла по y, то

$$\int_a^b f(t, x, x')\, dt \geqslant \int_a^b f(t, X, X')\, dt$$

(обозначения предыдущего пункта).

Упражнение 10. Используя неравенство Шварца, докажите два следующих утверждения (аналогичных предложениям 2.5.1 и 2.5.2 соответственно):

(1) Если параметризованная кривая $x = \varphi(t)$ реализует *локальный минимум* интеграла

$$\int_a^b F(\varphi(t), \varphi'(t))\, dt$$

(среди кривых класса C^1, параметризованных с помощью параметра $t \in [a, b]$ и достаточно близких к кривой $\varphi(t)$ в топологии пространства V), то она реализует и локальный минимум интеграла

$$\int_a^b \sqrt{F(\varphi(t), \varphi'(t))}\, dt.$$

(2) Если геометрическая кривая реализует *локальный минимум* интеграла

$$\int_a^b \sqrt{F(\varphi(t), \varphi'(t))}\, dt$$

и если рассматривается та ее параметризация, при которой $F(\varphi(t), \varphi'(t))$ постоянна на этой кривой (см. доказательство предложения 2.5.2), то на этой кривой реализуется локальный минимум интеграла

$$\int_a^b F(\varphi(t), \varphi'(t))\,dt.$$

Упражнение 11. Вместо того, чтобы предполагать, как в п. 2.5, что $F(x, y)$ — однородная квадратичная функция по y, предположим, более общим образом, что

$$F = F_2 + F_0,$$

где $F_2(x, y)$ — невырожденная однородная квадратичная функция по y, а F_0 не зависит от y. Тогда по теореме 2.4.1 функция $F_2 - F_0$ постоянна на каждой экстремали интеграла $\int F\,dt$. Рассмотрим экстремаль, для которой

$$F_2 - F_0 = h,$$

где h — заданная константа. Пусть $\varphi'(t) \neq 0$ для всех t. Тогда величина $(F_0 + h) F_2$ положительна в любой точке этой экстремали, поскольку $F_2(x, y) \neq 0$ при $y \neq 0$. Для всякой кривой, достаточно близкой к кривой $\varphi(t)$ (в смысле топологии V), должно, следовательно, выполняться неравенство $(F_0 + h) F_2 > 0$. Ограничимся открытой областью U_h, состоящей из тех точек (x, y), для которых

$$(F_0(x) + h) F_2(x, y) > 0,$$

и рассмотрим вариационную задачу для интеграла

$$\int_a^b \sqrt{(F_0 + h) F_2}\,dt.$$

Докажите следующие два утверждения, аналогичные предложениям 2.5.1 и 2.5.2: любая экстремаль интеграла $\int F\,dt$, для которой $F_2 - F_0 = h$, является экстремалью и для интеграла

$$\int \sqrt{(F_0 + h) F_2}\,dt,$$

и обратно, если геометрическая кривая является экстремалью для интеграла

$$\int \sqrt{(F_0 + h) F_2}\,dt,$$

то существует такая ее параметризация, что $F_2 = F_0 + h$, и параметризованная таким образом кривая является экстремалью для интеграла $\int F dt$.

Упражнение 12. Определите геодезические на поверхности, заданной параметрически с помощью уравнений

$$x = \operatorname{th} u \cos v,$$
$$y = \operatorname{th} u \sin v,$$
$$z = \frac{1}{\operatorname{ch} u} + \log\left(\operatorname{th}\frac{u}{2}\right).$$

Упражнение 13. Пусть

$$F(u, u') = \sum_{i,j} g_{ij}(u)\, u_i' u_j' \qquad (g_{ij} = g_{ji})$$

(мы используем обозначения п. 2.6). Проверьте, что формула (2.6.4) в этом случае записывается так:

$$\sum_j g_{ij}(u)\,u_j'' = \frac{1}{2}\sum_{j,\,k}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial u_j}\right) u_j' u_k'.$$

Покажите, что если обозначить через $(g^{ij}(u))$ матрицу, обратную к $(g_{ij}(u))$, то уравнение (2.6.5) запишется так:

$$\boxed{u_i'' + \sum_{j,\,k}\Gamma^i_{j,k}(u)\,u_j' u_k' = 0,}$$

где *символы Римана — Кристоффеля* $\Gamma^i_{j,k}$ определяются равенствами:

$$\Gamma^i_{j,k} = \frac{1}{2}\sum_h g^{ih}\left(-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u_h} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial u_k} + \frac{\partial g_{hk}}{\partial u_j}\right).$$

Упражнение 14. Выпишите символы Римана — Кристоффеля $\Gamma^i_{j,k}$ (см. предыдущее упражнение) для квадратичной формы

$$\Phi(x,\ y,\ x',\ y') = E(x,\ y)\,x'^2 + 2F(x,\ y)\,x'y' + G(x,\ y)\,y'^2.$$

(a) Докажите, что для того чтобы кривая $y = \mathrm{const}$ была геодезической, необходимо и достаточно, чтобы

$$F\frac{\partial E}{\partial x} + E\frac{\partial E}{\partial y} = 2G\frac{\partial F}{\partial x}.$$

(b) Докажите, что если, кроме того, $F = 0$, то форму Φ можно записать в виде

$$\Phi = u'^2 + H(u,\ v)\,v'^2.$$

Пример. Определите геодезические, в случае когда $\Phi = u'^2 + e^{2u}v'^2$.

Упражнение 15. Пусть

$$F(a,\ b,\ c,\ d,\ e) = -\frac{a^2}{d^3e^3} + \frac{bc}{d^2e^2}.$$

Это функция от пяти действительных переменных, определенная для $de \neq 0$. Рассмотрим на плоскости $\mathbb{R}^2$ открытое множество D, такое, что $\overline{D}$ — компакт с краем, не имеющий общих точек с координатными осями.

(a) Пусть f — функция класса C^2 в некоторой окрестности компакта $\overline{D}$. Докажите, что необходимым и достаточным условием для того чтобы f была экстремалью интеграла

$$I(f) = \iint_D F(f,\ f'_{t_1},\ f'_{t_2},\ t_1,\ t_2)\,dt_1\,dt_2,$$

является равенство

$$f - t_1 f'_{t_1} - t_2 f'_{t_2} + t_1 t_2 f''_{t_1 t_2} = 0. \tag{1}$$

(b) Докажите, что если f — функция класса C^3, то функция $g(t_1,\ t_2) = f''_{(t_1)^2}(t_1,\ t_2)$ удовлетворяет равенству

$$g - t_2 g'_{t_2} = 0. \tag{2}$$

Проинтегрируйте равенство (2) и получите отсюда, что общее решение уравнения (1) записывается в виде

$$f(t_1,\ t_2) = t_1\varphi(t_2) + t_2\,\psi(t_1),$$

где φ и ψ — произвольные функции.

(c) Определите решения уравнения (1), которые на прямой $t_1 = t_2$ удовлетворяют условиям

$$f(t_1,\ t_2) = t_2^2, \qquad f'_{t_1}(t_1,\ t_2) = t_2.$$

5 ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДВИЖНОГО РЕПЕРА В ТЕОРИИ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 1. ПОДВИЖНЫЙ РЕПЕР

1.1. Определение дифференциальных форм ω_i и ω_{ij}

Мы будем рассматривать пространство $\mathbb{R}^n$. Любое преобразование T из *группы аффинных линейных* преобразований определяется заданием: (1) точки $M \in \mathbb{R}^n$, в которую оно переводит начало координат $0 \in \mathbb{R}^n$; 2) набором векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$, в которые однородное линейное преобразование, ассоциированное с T, переводит соответственно векторы $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ канонического базиса в $\mathbb{R}^n$.

При этом должно выполняться единственное условие

$$\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) \neq 0, \qquad (1.1.1)$$

где в левой части стоит определитель матрицы, образованной координатами векторов $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ относительно канонического базиса. Набор

$$(M, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n),$$

удовлетворяющий условию (1.1.1), называется *аффинным репером*; точка M называется *началом репера*. Если отбросить условие (1.1.1), то множество наборов $(M, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ можно отождествить с произведением

$$\underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{n+1 \text{ раз}} = \mathbb{R}^{n(n+1)},$$

так как каждый из элементов набора $M, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ принимает значения в $\mathbb{R}^n$. Условию (1.1.1) удовлетворяют те точки произведения $\mathbb{R}^{n(n+1)}$, которые не принадлежат *замкнутому* множеству, определяемому уравнением

$$\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = 0.$$

Следовательно, *аффинные реперы образуют открытое множество* $U \subset \mathbb{R}^{n(n+1)}$ и $M, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ суть функции $u \to \mathbb{R}^n$ (индуцированные $n+1$ проекциями произведения $(\mathbb{R}^n)^{n+1}$ на свои сомножители). Очевидно, что эти функции дифференцируемы.

Мы можем рассмотреть репер $r \in U$, который зависит от одного или нескольких действительных параметров. В частном случае эти параметры могут быть просто координатами точки $U \subset \mathbb{R}^{n(n+1)}$; иначе говоря, в этом случае мы рассматриваем репер r как функцию от себя самого, т. е. от точки $r \in U$. В общем случае репер, зависящий от параметров, называется *подвижным репером*. Отсюда название теории, начала которой мы собираемся здесь изложить.

В случае, когда на открытом подмножестве U банахова пространства (здесь пространства $\mathbb{R}^{n(n+1)}$) задана дифференцируемая функция f со значениями в банаховом пространстве E (здесь в $\mathbb{R}^n$), можно рассмотреть *дифференциал* df: это дифференциальная форма первой степени на U со значениями в E (см. п. 2.1, гл. 3). В нашем случае мы получаем $n+1$ дифференциальных форм на открытом множестве U, а именно

$$dM,\ d\vec{e}_1,\ \ldots,\ d\vec{e}_n;$$

это дифференциальные формы со значениями в $\mathbb{R}^n$. Каждая из них имеет n компонент со значениями в $\mathbb{R}$, являющихся дифференциальными формами со скалярными значениями.

Основная идея теории подвижного репера заключается в следующем. Дифференциальные формы dM, $d\vec{e}_1, \ldots, d\vec{e}_n$ суть функции ω от 2 переменных r и ξ $(r \in U,\ \xi \in \mathbb{R}^{n(n+1)})$, линейные по ξ при каждом фиксированном $r \in U$, со значениями в $\mathbb{R}^n$. Но для каждого фиксированного r векторы $\vec{e}_1(r), \ldots, \vec{e}_n(r)$ образуют *базис* в пространстве $\mathbb{R}^n$. Поэтому значение функции $\omega(r, \xi)$ единственным образом записывается в виде линейной комбинации $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\vec{e}_i(r)$. Скаляры a_i (для данного r) суть линейные формы от ξ. Поэтому функции $a_i(r, \xi)$ со значениями в $\mathbb{R}$ можно рассматривать как *дифференциальные формы первой степени на U со скалярными значениями*. Следовательно, мы можем написать

$$dM = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \vec{e}_i, \tag{1.1.2}$$

$$d\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij} \vec{e}_j, \tag{1.1.3}$$

договорившись, что для всякого фиксированного репера $r \in U$ символ $\vec{e}_i$ обозначает значение $\vec{e}_i(r)$ i-го вектора репера r. Мы определили таким образом $n(n+1)$ *дифференциальных форм первой степени на U со скалярными значениями*, а именно

$$\boxed{\omega_i \quad \text{и} \quad \omega_{ij}} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n, \quad 1 \leqslant j \leqslant n).$$

Можно сказать, что эти формы определяют «бесконечно малый сдвиг» подвижного репера $r \in U$ при его движении.

1.2. Соотношения, которым удовлетворяют формы ω_i и ω_{ij}

Как мы знаем, если f — дифференцируемая функция (с векторными значениями), то $d(df) = 0$ (см. теорему 2.5.1 из гл. 3). Мы хотим проинтерпретировать соотношения

$$d(dM) = 0, \qquad d(d\vec{e_i}) = 0.$$

Что касается первого из них, возьмем дифференциал от правой части равенства (1.1.2), используя формулу дифференцирования произведения. Мы получим

$$d(\omega_i \vec{e_i}) = (d\omega_i)\,\vec{e_i} - \omega_i \wedge d\vec{e_i},$$

так как ω_i — форма первой степени. Принимая во внимание равенство (1.1.3), мы можем записать соотношение $d(d(M)) = 0$ следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} (d\omega_j)\,\vec{e_j} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \wedge \Big(\sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}\vec{e_j}\Big).$$

В этом векторном равенстве коэффициенты при $\vec{e_j}$ в обеих частях должны быть равны, ибо для каждого репера r векторы $\vec{e_j}(r)$ образуют базис пространства $\mathbb{R}^n$. Это означает, что

$$\boxed{d\omega_j = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \wedge \omega_{ij}, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.} \tag{1.2.1}$$

Аналогично, равенство $d(d\vec{e_i}) = 0$ дает

$$\boxed{d\omega_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n.} \tag{1.2.2}$$

1.3. Ортонормированные реперы

Пусть задан репер $r = (M, \vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$. Для того чтобы аффинное линейное преобразование T, определяемое репером r, было (евклидовым) *движением*, необходимо и достаточно, чтобы однородное линейное преобразование, ассоциированное с T, было преобразованием из *ортогональной группы* (группы однородных линейных преобразований, сохраняющих скалярное произведение). Для этого, как хорошо известно, необходимо и достаточно, чтобы базис $(\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n})$ был *ортонормированным*, иначе говоря, чтобы векторы $\vec{e_1}, \ldots, \vec{e_n}$ были *единичными* (евклидовой длины 1) и попарно *ортогональными*. Эти условия можно записать так:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \ (1 \text{ при } i = j, \ 0 \text{ при } i \neq j), \qquad (1.3.1)$$

где символ $\vec{a} \cdot \vec{b}$ обозначает скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Легко видеть [упражнение!], что реперы, удовлетворяющие условиям (1.3.1), образуют *многообразие* в открытом множестве U всех аффинных реперов. Обозначим это многообразие через O.

Дифференциальные формы ω_i и ω_{ij}, как говорят, «индуцируют» дифференциальные формы на многообразии O. Более точно: ω_i, например,— это функция $\omega_i(r, \xi)$ со значениями в $\mathbb{R}$, где $r \in U$, $\xi \in \mathbb{R}^{n(n+1)}$; для фиксированного r — это линейная функция от ξ; форма, индуцируемая ω_i,— это сужение указанной функции на реперы $r \in O$ и векторы ξ, принадлежащие касательному пространству к многообразию O в точке r [см. п. 4.11 из гл. 3].

Разумеется, формы, индуцированные на многообразии O формами ω_i и ω_{ij}, продолжают удовлетворять соотношениям (1.2.1) и (1.2.2). Мы будем их обозначать теми же символами ω_i и ω_{ij}, так как в дальнейшем будем иметь дело только с многообразием O ортонормированных реперов. Как мы сейчас увидим, формы ω_{ij} на O удовлетворяют дополнительным соотношениям, которые получаются дифференцированием соотношений (1.3.1). Имеем

$$\vec{e}_i \cdot d\vec{e}_j + \vec{e}_j \cdot d\vec{e}_i = 0.$$

Заменяя $d\vec{e}_i$ и $d\vec{e}_j$ их значениями из (1.1.3), получаем,

$$\vec{e}_i \cdot \Big(\sum_k \omega_{jk}\vec{e}_k\Big) + \vec{e}_j \cdot \Big(\sum_k \omega_{ik}\vec{e}_k\Big) = 0.$$

Так как $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_k = \delta_{ik}$, то

$$\boxed{\omega_{ji} + \omega_{ij} = 0} \qquad (1.3.2)$$

для любых i и j. В частности,

$$\boxed{\omega_{ii} = 0 \quad \text{для любого } i.} \qquad (1.3.3)$$

Этим условиям удовлетворяют «бесконечно малые» движения *ортонормированного* репера.

Как хорошо известно, если $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — единичные попарно ортогональные векторы в $\mathbb{R}^n$, то

$$\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = \pm 1.$$

[Напомним коротко, почему: для того чтобы матрица A с n столбцами и n строками определяла преобразование из ортогональной группы $O(n)$, необходимо и достаточно, чтобы произведение матрицы A на транспонированную матрицу ${}^tA$ было единичной матрицей. Поскольку $\det({}^tA) = \det A$, отсюда следует, что $(\det(A))^2 = 1$, или что $\det(A) = \pm 1$.] Ортонормированные реперы, для которых $\det(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n) = +1$, называются *прямыми* реперами; они определяют *прямое движение*. Множество прямых реперов обозначаются через SO. Это одна из связных компонент многообразия O всех ортонормированных реперов. В дальнейшем нас будет интересовать лишь многообразие SO и дифференциальные формы ω_i и ω_{ij}, индуцированные на SO. Мы будем говорить просто «репер» вместо «прямой ортонормированный репер».

1.4. Репер Френе ориентированной кривой в $\mathbb{R}^3$

Исследуем на двух конкретных примерах кривые, лежащие на многообразии реперов SO. Иначе говоря, мы собираемся рассмотреть семейства прямых ортонормированных реперов, гладким образом зависящих от *одного* параметра t. Тогда ω_i и ω_{ij} будут дифференциальными формами от переменной t. В этом случае уравнения (1.2.1) и (1.2.2) неинтересны, так как все дифференциальные формы второй степени от одной переменной t тождественно равны нулю.

Первый пример, который и является темой настоящего пункта, таков. Мы сопоставляем каждой дифференцируемой кривой [1] C в пространстве $\mathbb{R}^3$ однопараметрическое семейство ортонормированных реперов в этом пространстве. Кривая C определяется некоторой дифференцируемой функцией $M(t)$ от действительного параметра t со значениями в $\mathbb{R}^3$. Каждому значению параметра t мы сопоставим следующий репер: его началом является точка $M(t)$ на кривой C; вектор $\vec{e}_1(t)$ — это единичный касательный вектор к кривой C в точке $M(t)$; он ориентирован в направлении возрастания параметра t. Если мы укажем, как выбирать вектор $\vec{e}_2(t)$, то вектор $\vec{e}_3(t)$ определится однозначно, ибо искомый репер — прямой ортонормированный.

В силу сказанного

$$dM = \omega_1 \vec{e}_1, \tag{1.4.1}$$

так как векторы dM/dt и $\vec{e}_1$ пропорциональны (мы предполагаем, что $dM/dt \neq 0$ ни для одного значения t). Иначе говоря, формы ω_2 и ω_3 в формуле (1.1.2) равны нулю. С другой стороны, если только

[1]) Под дифференцируемой кривой мы понимаем кривую класса C^k, где k достаточно велико.

вектор $\vec{e}_2$ — дифференцируемая функция от параметра t, то

$$d\vec{e}_1 = \omega_{12}\vec{e}_2 - \omega_{31}\vec{e}_3 \tag{1.4.2}$$

(поскольку $\omega_{11} = 0$, $\omega_{13} + \omega_{31} = 0$) и, следовательно, вектор $d\vec{e}_1/dt$ *ортогонален* вектору $\vec{e}_1$. Мы предположим дополнительно, что $d\vec{e}_1/dt \neq 0$, и возьмем в качестве вектора $\vec{e}_2(t)$ единичный вектор, пропорциональный вектору $d\vec{e}_1/dt$ [это можно сделать двумя способами; но если выбор уже сделан для какого-нибудь одного значения t, то по непрерывности вектор $\vec{e}_2(t)$ однозначно определен везде]. Таким образом, каждому значению t мы сопоставили прямой ортонормированный репер $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Он называется *репером Френе* кривой C в точке t. Итак, каждая кривая C в $\mathbb{R}^3$ определяет семейство реперов с параметром t.

В силу нашего выбора вектора $\vec{e}_2$ из соотношения (1.4.2) следует, что $\omega_{31} = 0$. Поэтому уравнения движения репера имеют вид

$$d\vec{e}_1 = \omega_{12}\vec{e}_2, \qquad d\vec{e}_2 = -\omega_{12}\vec{e}_1 + \omega_{23}\vec{e}_3, \qquad d\vec{e}_3 = -\omega_{23}\vec{e}_2. \tag{1.4.3}$$

Форма ω_1 a priori записывается в виде $a(t)\,dt$. Согласно (1.4.1)

$$\frac{dM}{dt} = a(t)\,\vec{e}_1,$$

следовательно, коэффициент $a(t) > 0$ и равен длине вектора dM/dt. Это означает, что форма $a(t)\,dt$ равна дифференциалу ds *длины дуги* s кривой C. (Эта длина меняется вместе с t.) Возьмем в качестве параметра на кривой C длину дуги s (определенную однозначно с точностью до аддитивной константы). Тогда дифференциальные формы ω_{12} и ω_{23} запишутся в виде $b(s)\,ds$ и $c(s)\,ds$ соответственно. Тем самым определяются две функции b и c на кривой C. Они называются *кривизной* и *кручением* кривой и обозначаются соответственно через $1/\rho$ и $1/\tau$. В этих обозначениях уравнения движения репера Френе принимают вид

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{dM}{ds} = \vec{e}_1,\\ \frac{d\vec{e}_1}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{e}_2, \qquad \frac{d\vec{e}_2}{ds} = -\frac{1}{\rho}\vec{e}_1 + \frac{1}{\tau}\vec{e}_3, \qquad \frac{d\vec{e}_3}{ds} = -\frac{1}{\tau}\vec{e}_2.\end{gathered}} \tag{1.4.4}$$

Эти соотношения являются классическими.

1.5. Репер Дарбу ориентированной кривой C, лежащей на ориентированной поверхности S в $\mathbb{R}^3$

Ориентировать дифференцируемую кривую — это значит в каждой точке $M \in C$ выбрать одно из двух возможных направлений единичного касательного вектора к C в точке M (так, чтобы этот вектор изменялся непрерывно вместе с M). Для того чтобы «ориентировать» поверхность $S \subset \mathbb{R}^3$ (которая предполагается связной и принадлежащей к классу C^k, где k достаточно велико), нужно, как мы знаем, ориентировать в каждой точке $M \in S$ касательную плоскость к S. Задание упорядоченной пары единичных ортогональных векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, касательных к S в точке M, определяет ориентацию поверхности S в окрестности точки M. Если мы имеем такую пару $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, то существует единственный единичный вектор $\vec{e}_3$, ортогональный к $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, такой, что $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = +1$. Обратно, выбор единичной нормали $\vec{e}_3$ к поверхности S в точке $M \in S$ определяет ориентацию на S в окрестности точки M: надо выбрать $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ так, чтобы $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$. Подытожим сказанное: *для того чтобы ориентировать поверхность S, достаточно выбрать в каждой точке $M \in S$ одну из двух единичных нормалей к S, причем выбранная нормаль должна непрерывно меняться вместе с M.* Далее мы везде будем предполагать, что поверхность S *ориентирована* (и тем самым «ориентируема»).

Пусть C — ориентированная кривая, лежащая на ориентированной поверхности S в $\mathbb{R}^3$. Сопоставим каждой точке $M \in C$ прямой ортонормированный репер с началом в точке M, который называется *репером Дарбу* (кривой C относительно поверхности S). В качестве $\vec{e}_1$ возьмем, как и в случае репера Френе, единичный касательный вектор к кривой C в точке M. В качестве $\vec{e}_2$ возьмем единичный вектор, касательный к поверхности S в точке M, ортогональный к $\vec{e}_1$ и такой, что $\det(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = +1$, где $\vec{e}_3$ — единичная нормаль, определяющая ориентацию поверхности S. Таким образом, кривая C на поверхности S определяет однопараметрическое семейство реперов (т. е. кривую и на многообразии SO). Уравнения движения репера записываются так:

$$dM = \omega_1 \vec{e}_1,$$

$$d\vec{e}_1 = \omega_{12}\vec{e}_2 + \omega_{13}\vec{e}_3, \quad d\vec{e}_2 = -\omega_{12}\vec{e}_1 + \omega_{23}\vec{e}_3, \tag{1.5.1}$$

$$d\vec{e}_3 = -\omega_{13}\vec{e}_1 - \omega_{23}\vec{e}_2.$$

Если в качестве параметра взять длину дуги на кривой C, то $\omega_1 = ds$, $\omega_{12} = a\,ds$, $\omega_{13} = b\,ds$, $\omega_{23} = c\,ds$, где a, b, c — некоторые функции на C. Их называют соответственно

геодезической кривизной,
нормальной кривизной,
геодезическим кручением

кривой C (смысл этих названий выяснится несколько позже). Итак,

$$\begin{aligned} &\text{геодезическая кривизна} = \frac{\omega_{12}}{ds}, \\ &\text{нормальная кривизна} = \frac{\omega_{13}}{ds}, \\ &\text{геодезическое кручение} = \frac{\omega_{23}}{ds}. \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

Предложение 1.5.1. *Если обратить ориентацию на кривой C, то нормальная кривизна и геодезическое кручение не изменятся, а геодезическая кривизна изменит знак.*

Действительно, $\omega_1 = ds$ умножится на -1, так же как $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, а $\vec{e}_3$ не изменится. Из равенств (1.5.1) вытекает поэтому, что ω_{12} не изменяется, а ω_{13} и ω_{23} умножатся на -1, откуда и следует наше утверждение.

Предложение 1.5.2. *Если две кривые на поверхности S, проходящие через точку $M \in S$, касаются друг друга в этой точке, то они имеют одинаковую нормальную кривизну и одинаковое геодезическое кручение.* [Иначе говоря, нормальная кривизна и геодезическое кручение кривой определяются направлением касательной к поверхности S в точке M.]

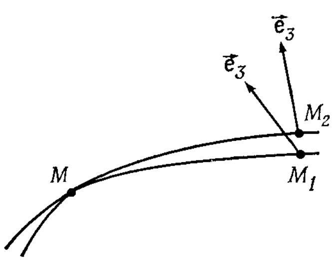

Рис. 15.

Доказательство. Для двух касающихся друг друга кривых C_1 и C_2 значения вектора $\vec{e}_1$ (соответственно $\vec{e}_2$) совпадают между собой в точке M, равно как и значения вектора $d\vec{e}_3/ds$ (ибо векторы $\vec{e}_3$, нормальные к поверхности S в точках $M_1 \in C_1$ и $M_2 \in C_2$, соответствующих одному и тому же значению длины s, отсчитываемому от точки M, совпадают между собой с точностью до бесконечно малых второго порядка: их разность является бесконечно малой высшего порядка по отношению к s; это вытекает из того факта, что расстояние между точками M_1 и M_2 есть бесконечно малая второго порядка, а нормальный вектор $\vec{e}_3$ к точке поверхности S является дифференцируемой функцией этой точки). Поэтому последнее из соотношений (1.5.1)

$$\frac{d\vec{e}_3}{ds} = -\frac{\omega_{13}}{ds}\vec{e}_1 - \frac{\omega_{23}}{ds}\vec{e}_2$$

показывает, что формы ω_{13}/ds и ω_{23}/ds для кривых C_1 и C_2 совпадают в точке M, ч. т. д.

Замечание. Геодезическая кривизна у двух касающихся в точке M кривых на S, вообще говоря, *не одинакова*. Например, если S — *плоскость*, то, как легко видеть, геодезическая кривизна кривой есть ее обычная кривизна. Но хорошо известно, что две плоские кривые, касающиеся в данной точке, могут иметь в этой точке различную кривизну.

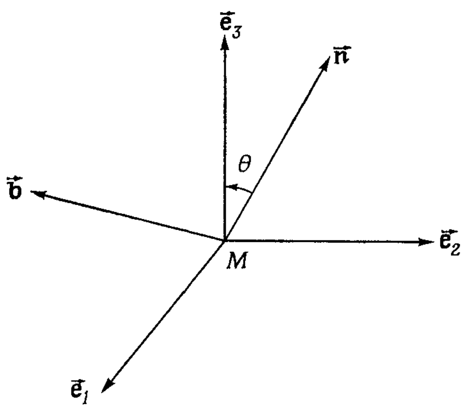

Рис. 16.

1.6. Вычисление геодезической кривизны, нормальной кривизны и геодезического кручения

Пусть C — ориентированная кривая на ориентированной поверхности S в пространстве $\mathbb{R}^3$ и $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — репер Дарбу в точке $M \in C$. Обозначим через $(\vec{e}_1, \vec{n}, \vec{b})$ репер Френе кривой C в точке M: единичный вектор $\vec{n}$ направлен по «главной нормали» к кривой C, а вектор $\vec{b}$ — по «бинормали». Обозначим через θ угол $(\vec{n}, \vec{e}_3)$ между нормалью к поверхности $\vec{e}_3$ и вектором $\vec{n}$.

Очевидно,

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \vec{e}_2 \sin\theta + \vec{e}_3 \cos\theta, \\ \vec{b} &= -\vec{e}_2 \cos\theta + \vec{e}_3 \sin\theta, \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

откуда

$$\begin{aligned} \vec{e}_2 &= \vec{n} \sin\theta - \vec{b} \cos\theta, \\ \vec{e}_3 &= \vec{n} \cos\theta + \vec{b} \sin\theta. \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

Уравнения движения репера Френе дают нам

$$\frac{d\vec{e}_1}{ds} = \frac{1}{\rho}\vec{n} = \frac{\sin\theta}{\rho}\vec{e}_2 + \frac{\cos\theta}{\rho}\vec{e}_3.$$

Сравнивая это с (1.5.1), получаем

$$\boxed{\begin{aligned}\text{геодезическая кривизна} &= \frac{\sin\theta}{\rho},\\ \text{нормальная кривизна} &= \frac{\cos\theta}{\rho}\end{aligned}} \qquad (1.6.3)$$

(здесь ρ — радиус кривизны кривой C).

Остается вычислить геодезическое кручение ω_{23}/ds. Согласно (1.5.1)

$$\frac{\omega_{23}}{ds} = \vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds} = (\vec{n}\cos\theta + \vec{b}\sin\theta)\cdot\frac{d}{ds}(\vec{n}\sin\theta - \vec{b}\cos\theta).$$

Раскроем полученное выражение, используя уравнения движения репера Френе

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho}\vec{e}_1 + \frac{1}{\tau}\vec{b}, \qquad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{1}{r}\vec{n}.$$

Получаем

$$\vec{e}_3 \cdot \frac{d\vec{e}_2}{ds} = \frac{1}{\tau} + \frac{d\theta}{ds}.$$

Таким образом,

$$\boxed{\text{геодезическое кручение} = \frac{1}{\tau} + \frac{d\theta}{ds}.} \qquad (1.6.4)$$

Упражнение. Теорема Менье. Мы установили, что «нормальная кривизна» $(\cos\theta)/\rho$ зависит только от касательной к кривой C в точке $M \in C$. Докажите, что

(1) Если две кривые на поверхности S, проходящие через точку M, имеют в этой точке одну и ту же касательную и одну и ту же соприкасающуюся плоскость, то они имеют одинаковый радиус кривизны [ибо $\cos\theta$ и $(\cos\theta)/\rho$ имеют одни и те же значения для этих двух кривых].

(2) Если плоскость P вращается вокруг прямой D, касающейся поверхности S в точке $M \in S$, то центры кривизны (в точке M) кривых, получающихся в пересечении поверхности S с плоскостью P, описывают окружность, проходящую через точку M.

Замечания. (i) Пересечем поверхность S плоскостью, проходящей через нормаль к поверхности S в точке $M \in S$. Пусть C — кривая пересечения. Для этой кривой $\theta = 0$ и, следовательно, кривизна $1/\rho$ кривой C равна «нормальной кривизне», соответствующей направлению касательной к кривой C в точке M. Таким образом, нормальная кривизна — это *кривизна нормального сечения* (сечения поверхности S нормальной плоскостью, проходящей через рассматриваемую касательную).

(ii) Как мы знаем, через каждую точку $M \in S$ проходит единственная геодезическая кривая с данной касательной (которая касается и поверхности S). Для геодезической $\theta = 0$ или π и поэтому $d\theta/ds = 0$. Следовательно, *геодезическое кручение геодезической кривой равно* $1/\tau$. Итак, *геодезическое кручение, соответствующее данному касательному направлению к поверхности S в точке $M \in S$, равно кручению геодезической кривой, направленной по этой касательной.*

(iii) Кривая является геодезической в том и только в том случае, если $\sin\theta = 0$. Таким образом, *геодезические кривые — это кривые с нулевой геодезической кривизной.*

(iv) *Если S* — плоскость, а C — кривая на этой плоскости, то $\theta = \pi/2$ (при надлежащем выборе вектора $\vec{n}$); следовательно, $(\sin\theta)/\rho = 1/\rho$, т. е. геодезическая кривизна совпадает с кривизной кривой C.

§ 2. ТРЕХПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ СЕМЕЙСТВО РЕПЕРОВ, СВЯЗАННОЕ С ПОВЕРХНОСТЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^3$

2.1. Многообразие реперов ориентированной поверхности

Пусть $S \subset \mathbb{R}^3$ — *ориентированная* поверхность класса C^k (где k достаточно велико), и пусть $R(S)$ — множество всех прямых ортонормированных реперов с началами в точках M, лежащих на поверхности S, у которых вектор $\vec{e}_3$ совпадает с нормалью к поверхности S (направление нормали определяется ориентацией поверхности S). Если каждому реперу сопоставить его начало, то мы получим непрерывное, и, очевидно, сюръективное отображение

$$p\colon\ R(S) \to S.$$

Слой в точке $M \in S$, т. е. прообраз этой точки $p^{-1}(M)$, состоит из всех реперов с началом в точке M. Каждый такой репер определяется выбором единичного вектора $\vec{e}_1$, касательного к поверхности S в точке M (ибо если известны $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_3$, то $\vec{e}_2$ определяется однозначно требованием, что векторы $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ образуют прямой репер). Любой репер с началом в M получается из другого вращением вокруг вектора $\vec{e}_3$. Более точно, рассмотрим группу $SO(2)$ вращений плоскости вокруг начала координат (группу линейных ортогональных преобразований действительного двумерного пространства с определителем $+1$). Каждый элемент этой группы определяется *углом* φ (который измеряется действительным числом по модулю 2π). Группа $SO(2)$ *действует в пространстве реперов* $R(S)$: если репер $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ повернуть вокруг вектора $\vec{e}_3$ на угол φ, то мы получим другой репер $(M', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$, определяемый равенствами

$$\begin{aligned} M' &= M, \\ \vec{e}_1{}' &= \vec{e}_1 \cos\varphi + \vec{e}_2 \sin\varphi, \\ \vec{e}_2{}' &= -\vec{e}_1 \sin\varphi + \vec{e}_2 \cos\varphi, \\ \vec{e}_3{}' &= \vec{e}_3. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

Мы видим, что *слои* отображения p: $R(S) \to S$ — это *орбиты* группы $SO(2)$, действующей в $R(S)$, и что группа $SO(2)$ действует *просто транзитивно* в каждом слое (для двух реперов с одинаковым началом существует одно и только одно вращение, которое переводит один в другой).

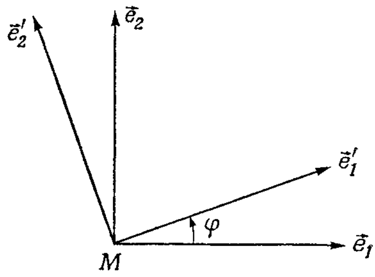

Рис. 17.

Отображение p: $R(S) \to S$ служит примером так называемых *расслоенных пространств*. Мы не будем здесь развивать теорию расслоенных пространств и даже не станем приводить точного определения.

Покажем теперь, как можно параметризовать множество тех реперов из $R(S)$, начала которых M достаточно близки к некоторой заданной точке $M_0 \in S$. Предположим для большей ясности, что вертикаль в $\mathbb{R}^3$, проходящая через точку M_0, не является касательной к поверхности S в точке M_0, так что в некоторой окрестности точки M_0 можно задать поверхность S уравнением

$$z = f(x, y) \qquad [f \text{ класса } C^k]$$

(где x, y, z — координаты в $\mathbb{R}^3$). Тогда в каждой точке M, близкой к точке M_0, существует единственный единичный вектор, касательный к поверхности S, проекция которого на плоскость $z = 0$ параллельна вектору $(1, 0, 0)$. Этот вектор $\vec{e}_1(M)$ является функцией класса C^{k-1} от M. Таким образом, каждой точке $M \in S$, близкой к точке M_0, мы сопоставили ортонормированный репер с началом в точке M. Тем самым определено непрерывное отображение

$$\sigma\colon \quad S \to R(S),$$

такое, что композиция $p \circ \sigma$ равна тождественному отображению поверхности S на себя. Отображение σ — это пример того, что называют *сечением* расслоенного пространства реперов.

Итак, каждый репер $r \in R(S)$ с началом в точке M, близкой к точке M_0, определяется двумя данными:

(1) точкой $M \in S$; (2) углом φ, на который надо повернуть репер

$$(M_1, \vec{e}_1(M), \vec{e}_2(M), \vec{e}_3(M)),$$

для того, чтобы он совпал с репером r. Иначе говоря, пространство реперов с началами в точках M, принадлежащих некоторой достаточно малой окрестности V точки M_0, можно представить как прямое произведение $V \times SO(2)$. Следовательно, совокупность этих реперов зависит от трех действительных параметров. Можно показать, что эти реперы образуют *подмногообразие* размерности 3 класса C^{k-1} в пространстве *всех* реперов (ортонормированных или нет) в $\mathbb{R}^3$ (последнее, в свою очередь, является открытым множеством в пространстве $\mathbb{R}^{12}$; см. § 1). [Проверку всех этих утверждений мы предоставляем читателю в качестве упражнения.] Отображение p: $R(S) \to S$ принадлежит к классу C^{k-1}; определенное выше сечение σ: $S \to R(S)$ также принадлежит к классу C^{k-1}.

Если α — некоторая дифференциальная форма на поверхности S, то $p^*(\alpha)$ есть дифференциальная форма на многообразии $R(S)$. Напомним, что дифференциальная форма на $R(S)$ — это функция $\omega(r, \tau)$ [где $r \in R(S)$ и τ — вектор, касательный к многообразию $R(S)$ в точке $r \in R(S)$], линейная по τ для каждого фиксированного значения r. Для того чтобы эта дифференциальная форма была представима в виде $p^*(\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы (1) для каждого репера r форма $\omega(r, \tau)$ зависела только от проекции $\xi = p(\tau)$ вектора τ, являющейся касательным вектором к поверхности S в точке $M = p(r)$; (2) форма $\omega(r, \xi)$ зависела только от начала $M = p(r)$ репера r. В этом случае говорят для краткости, что ω есть *дифференциальная форма на поверхности* S.

Все эти понятия мы проиллюстрируем попозже на примерах.

2.2. Уравнения движения репера, связанного с ориентированной поверхностью

Для семейства ортонормированных реперов $R(S)$, зависящего от трех параметров, уравнения движения этих реперов (см. (1.1.2), (1.1.3), (1.3.2) и (1.3.3)) определяют на многообразии $R(S)$ дифференциальные формы ω_1, ω_2, ω_3, ω_{12}, ω_{13}, ω_{23}. Поскольку дифференциальная форма dM принимает для каждого репера $r = (M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ значения, лежащие в касательной плоскости к поверхности S, порожденной векторами $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ репера r, форма $\omega_3 = 0$. Поэтому уравнения движения имеют вид:

$$dM = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2, \tag{2.2.1}$$

$$\left.\begin{aligned} d\vec{e}_1 &= \omega_{12}\vec{e}_2 + \omega_{13}\vec{e}_3, \\ d\vec{e}_2 &= -\omega_{12}\vec{e}_1 + \omega_{23}\vec{e}_3, \\ -d\vec{e}_3 &= \omega_{13}\vec{e}_1 + \omega_{23}\vec{e}_2. \end{aligned}\right\} \tag{2.2.2}$$

С другой стороны, условия интегрируемости (см. (1.2.1) и (1.2.2)) дают (с учетом того факта, что $\omega_3 = 0$):

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}, \qquad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}, \tag{2.2.3}$$

$$\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0, \tag{2.2.4}$$

$$d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23}. \tag{2.2.5}$$

Интерпретация форм ω_1 и ω_2. Напомним, что дифференциал dM есть 1-форма со значениями в $\mathbb{R}^3$, которая каждому вектору $\vec{\xi}$ сопоставляет сам этот вектор $\vec{\xi}$. Поэтому если r — репер, принадлежащий многообразию $R(S)$ и $\vec{e}_1(r)$ и $\vec{e}_2(r)$ — первые два вектора этого репера, то дифференциальные 1-формы $\omega_1(r, \xi)$ и $\omega_2(r, \xi)$ суть линейные формы, которые каждому вектору $\vec{\xi}$, касающемуся поверхности S в начале репера $M(r)$, сопоставляют его координаты относительно базиса $\vec{e}_1(r)$, $\vec{e}_2(r)$. Рассматриваемые как дифференциальные формы на многообразии реперов $R(S)$, ω_1 и ω_2 являются функциями от $r \in R(s)$, которые для каждого фиксированного r зависят только от вектора ξ, касательного к поверхности S в точке $M(r) \in S$:

$$\vec{\xi} = \omega_1(r, \xi)\vec{e}_1(r) + \omega_2(r, \xi)\vec{e}_2(r). \tag{2.2.6}$$

Квадрат длины вектора $\vec{\xi}$, касательного к поверхности S в точке $M(r)$, равен поэтому

$$|\vec{\xi}|^2 = (\omega_1(r, \xi))^2 + (\omega_2(r, \xi))^2.$$

Естественно ввести обозначение $(\omega_1)^2$ для *квадрата* дифференциальной формы ω_1. Это не дифференциальная 2-форма в рассматривавшемся до сих пор смысле [т. е. функция от r со значениями в пространстве *знакопеременных билинейных форм* на касательном пространстве к поверхности S в точке $M(r)$], а функция от r со значениями в пространстве *квадратичных форм* на этом касательном пространстве: $(\omega_1(r, \xi))^2$ — это квадрат линейной формы $\omega_1(r, \xi)$.

Определение. Квадратичная дифференциальная форма $(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2$ называется *первой основной квадратичной формой* поверхности S. В каждой точке $M \in S$ она сопоставляет вектору $\vec{\xi}$, касательному к поверхности S в точке M, квадрат его длины. Ее значения никак не зависят от выбора репера с началом в M, а зависят лишь от самого этого начала.

Первая основная квадратичная форма на поверхности часто обозначается символом ds^2. Причина этого заключается в том, что если мы рассмотрим ориентированную кривую C на поверхности S, то форма, индуцированная на C, будет квадратом дифференциальной 1-формы ds для кривой C. Если координаты x, y, z точек поверхности S представлены как функции от двух параметров u и v, то

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + 2F(u, v)\, du\, dv + G(u, v)\, dv^2,$$

где

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

2.3. Элемент площади поверхности

На ориентированной поверхности S элемент площади — это дифференциальная 2-форма (см. п. 4.12 гл. 3) а именно, форма, которая паре векторов ξ_1 и ξ_2, касательных к поверхности S в точке $M \in S$, сопоставляет число

$$\det(\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{e}_3).$$

Согласно (2.2.6) это число равно

$$\omega_1(\xi_1)\, \omega_2(\xi_2) - \omega_1(\xi_2)\, \omega_2(\xi_1).$$

Но это значение, принимаемое на паре векторов (ξ_1, ξ_2) дифференциальной формой

$$\omega_1 \wedge \omega_2$$

— внешним произведением форм ω_1 и ω_2. Таким образом, имеет место

Предложение 2.3.1. *Форма $\omega_1 \wedge \omega_2$ есть элемент площади поверхности.*

В гл. 3 мы установили (формула (4.12.6), что эта дифференциальная форма равна $\sqrt{EG - F^2}\, du \wedge dv$, где E, F, G — коэффициенты квадратичной формы ds^2 поверхности S, параметризованной с помощью параметров u и v в соответствии с ориентацией поверхности S.

В отличие от квадратичной формы $\omega_1^2 + \omega_2^2$ форма $\omega_1 \wedge \omega_2$ является дифференциальной 2-формой на поверхности S (см. конец п. 2.1).

2.4. Вторая основная квадратичная форма поверхности S

В каждой точке $M \in S$ дифференциальные формы $d\vec{M}$ и $-d\vec{e}_3$ (со значениями в $\mathbb{R}^3$) — это линейные функции от вектора $\vec{\xi}$, касательного к поверхности S в точке M. Их *скалярное произведение*

$$(d\vec{M})\cdot(-d\vec{e}_3)$$

— это квадратичная форма от вектора ξ, принадлежащего касательному пространству к S. Она называется *второй основной квадратичной формой* поверхности S.

Из формул (2.2.1) и (2.2.2) легко следует, что

$$\boxed{(d\vec{M})\cdot(-d\vec{e}_3) = \omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23}.} \tag{2.4.1}$$

[В правой части этого равенства произведение $\omega_1\omega_{13}$ *не надо смешивать с внешним произведением* $\omega_1 \wedge \omega_{13}$. Произведение $\omega_1\omega_{13}$ для каждого репера $r \in R(S)$ и каждого вектора τ, касательного к многообразию $R(S)$ в точке r, равно

$$\omega_1(r, \tau)\,\omega_{13}(r, \tau),$$

тогда как форма $\omega_1 \wedge \omega_{13}$ равна для каждого репера $r \in R(S)$ и каждой пары (τ_1, τ_2) разности

$$\omega_1(r, \tau_1)\,\omega_{13}(r, \tau_2) - \omega_1(r, \tau_2)\,\omega_{13}(r, \tau_1).$$

Аналогичное замечание относится и к произведению $\omega_2\omega_{23}$.]

Интерпретация второй основной квадратичной формы при помощи нормальной кривизны. Пусть C — ориентированная кривая, лежащая на поверхности S и параметризованная длиной дуги s. Из уравнений движения репера Дарбу (см. (1.5.1)) вытекает, что скалярное произведение

$$\left(\frac{d\vec{M}}{ds}\right)\cdot\left(-\frac{d\vec{e}_3}{ds}\right)$$

равно *нормальной кривизне* кривой C в точке $M \in C$. Это означает, что значение второй основной квадратичной формы $d\vec{M}\cdot(-d\vec{e}_3)$ на векторе $\vec{\xi}$, касательном к кривой C, равно произведению $|\vec{\xi}|^2$ на нормальную кривизну кривой C. Отсюда следует

Предложение 2.4.1. *Значение второй основной квадратичной формы на векторе $\vec{\xi} \neq 0$, касательном к поверхности S в точке $M \in S$, равно произведению $|\vec{\xi}|^2$ на нормальную кривизну в направлении вектора $\vec{\xi}$.*

2.5. Вычисление нормальной кривизны и геодезического кручения в данном направлении

Соотношение (2.2.4) после внешнего умножения на форму ω_1 дает

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0.$$

Это означает, что для каждого репера $r \in R(S)$ линейные формы ω_1, ω_2, ω_{23} (на касательном пространстве к $R(S)$) линейно зависимы. Так как формы ω_1 и ω_2 линейно независимы, что следует из равенства (2.2.6), то форма ω_{23} является линейной комбинацией форм ω_1 и ω_2:

$$\omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2,$$

где b и c — некоторые функции от репера r. В частности, для каждого репера r форма ω_{23} линейна на касательном пространстве к поверхности S в точке $M(r)$. Аналогично получаем, что

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b'\omega_2,$$

где a и b' — некоторые функции от r. Подставляя это в (2.2.4), находим

$$b'\omega_1 \wedge \omega_2 + b\omega_2 \wedge \omega_1 = 0.$$

Поскольку $\omega_1 \wedge \omega_2$ — ненулевая форма, отсюда вытекает, что

$$\boxed{b = b'.}$$

Окончательно имеем

$$\boxed{\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2.} \tag{2.5.1}$$

Мы получили *три функции a, b, c, определенные на пространстве реперов $R(S)$*. Выясним их смысл.

Прежде всего из (2.4.1) следует, что *вторая основная квадратичная форма равна*

$$\boxed{\omega_1\omega_{13} + \omega_2\omega_{23} = a(\omega_1)^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c(\omega_2)^2.} \tag{2.5.2}$$

Если вектор $\vec{\xi}$, касательный к поверхности S в точке $M(r)$, образует угол φ с вектором $\vec{e}_1$ репера r, то, очевидно,

$$\omega_1(r, \vec{\xi}) = |\vec{\xi}|\cos\varphi, \quad \omega_2(r, \vec{\xi}) = |\vec{\xi}|\sin\varphi.$$

Таким образом, значение второй основной квадратичной формы на векторе $\vec{\xi}$ равно $|\vec{\xi}|^2 (a\cos^2\varphi + 2b\sin\varphi\cos\varphi + c\sin^2\varphi)$. Из предложения 2.4.1 вытекает теперь

Предложение 2.5.1. *Нормальная кривизна в направлении вектора, образующего угол φ с вектором $\vec{e}_1$ репера r, равна*

$$\boxed{a(r)\cos^2\varphi + 2b(r)\sin\varphi\cos\varphi + c(r)\sin^2\varphi.} \tag{2.5.3}$$

Следствие. $a(r)$ — *это нормальная кривизна в направлении вектора $\vec{e}_1$ репера r; $c(r)$ — это нормальная кривизна в направлении вектора $\vec{e}_2$ репера r.*

Так интерпретируются функции a и c. Остается выяснить геометрическое значение функции b. Для этого вычислим *геодезическое кручение* в направлении, составляющем угол φ с вектором $\vec{e}_1$ репера r. Рассмотрим кривую C на поверхности S, параметризованную длиной дуги s. Пусть $M\in C$, $r=(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ — репер с началом в точке M, φ — угол между единичным вектором $\vec{e}_1'$, касательным к кривой C, и вектором $\vec{e}_1$, а $\vec{e}_2'$ — единичный касательный вектор, образующий с вектором $\vec{e}_1'$ угол $+\pi/2$. Из уравнений движения репера Дарбу $(M, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3)$ кривой C следует, что геодезическое кручение кривой C равно коэффициенту при $\vec{e}_2'$ в правой части равенства

$$-\frac{d\vec{e}_3}{ds} = \alpha\vec{e}_1' + \beta\vec{e}_2'.$$

В третьем из равенств (2.2.2) заменим $\vec{e}_1$ на $\vec{e}_1'\cos\varphi - \vec{e}_2'\sin\varphi$ и $\vec{e}_2$ на $\vec{e}_1\sin\varphi + \vec{e}_2'\cos\varphi$ [см. (2.1.1)]. Мы получим, что

$$\beta = -\frac{\omega_{13}}{ds}\sin\varphi + \frac{\omega_{23}}{ds}\cos\varphi.$$

Далее, заменяя ω_{13} и ω_{23} их значениями (2.5.1), а также заменяя ω_1 на $ds\cos\varphi$ и ω_2 на $ds\sin\varphi$, заключаем, что

$$\beta = -(a\cos\varphi + b\sin\varphi)\sin\varphi + (b\cos\varphi + c\sin\varphi)\cos\varphi =$$
$$= b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + (c-a)\sin\varphi\cos\varphi.$$

Отсюда следует

Предложение 2.5.2. *Геодезическое кручение в направлении, образующем угол φ с вектором $\vec{e}_1$ репера r, равно*

$$\boxed{b\cos 2\varphi + \frac{c-a}{2}\sin 2\varphi.} \tag{2.5.4}$$

Следствие. *Функция $b(r)$ — это геодезическое кручение в направлении вектора $\vec{e}_1$ репера r. Геодезическое кручение в направлении вектора $\vec{e}_2$ равно $-b(r)$* [возьмите $\varphi = \pi/2$].

Более общим образом, замена φ на $\varphi + \pi/2$ в выражении (2.5.4) дает следующий результат

Предложение 2.5.3. *Для любой точки $M \in S$ значения геодезического кручения в двух ортогональных направлениях в касательной плоскости равны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

Вернемся к формуле (2.5.3). Замена φ на $\varphi + \pi/2$ показывает, что *сумма нормальных кривизн в направлениях φ и $\varphi + \pi/2$ не зависит от* φ. Иначе говоря, имеет место

Предложение 2.5.4. *Сумма $a(r) + c(r)$ нормальных кривизн в направлениях векторов $\vec{e}_1(r)$ и $\vec{e}_2(r)$ репера r зависит лишь от начала M репера r.*

Определение. Величина $a(r) + c(r)$ называется *средней кривизной* поверхности S в точке M.

2.6. Главные направления. Линии кривизны

Для того чтобы геодезическое кручение было равно *нулю* во всех касательных направлениях к S в точке M, необходимо и достаточно, чтобы для какого-нибудь репера r с началом в точке M две величины $b(r)$ и $c(r) - a(r)$ были равны нулю; это следует из формулы (2.5.4) для геодезического кручения. Если эти условия выполнены, то точка M называется *омбилической* точкой поверхности S. В этом случае в силу соотношения (2.5.3) нормальная кривизна кривой одинакова во всех касательных направлениях в точке M.

Упражнение. Докажите, что и обратно, если нормальная кривизна одинакова по всем касательным направлениям в точке M, то точка M омбилическая.

Предложение 2.6.1. *Если M — не омбилическая точка поверхности S, то в касательной плоскости существуют ровно два касательных направления, для которых геодезическое кручение равно нулю. Эти направления взаимно перпендикулярны.*

Это вытекает из формулы (2.5.4): для того чтобы геодезическое кручение было равно нулю в направлении φ, необходимо и достаточно, чтобы

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2b}{a - c},$$

так что значение tg 2φ (конечное или бесконечное) всегда определено, ибо b и $a - c$ одновременно не обращаются в нуль. Отсюда и следует наше утверждение.

Определение. Два (взаимно ортогональных) направления, для которых геодезическое кручение равно нулю, называются *главными направлениями* (в рассматриваемой точке $M \in S$). В омбилических точках условимся считать все направления главными.

В окрестности точки $M_0 \in S$, не являющейся омбилической, главные направления в точках M образуют два векторных поля касательных направлений.

Определение. *Линией кривизны* поверхности S называется кривая C (на поверхности S), касательная к которой в каждой точке $M \in C$ имеет главное направление.

Если поверхность S принадлежит к классу C^k (где k достаточно велико), то поля касательных направлений принадлежат к классу C^1. Поэтому можно применить результаты теории дифференциальных уравнений, и мы видим, что *через каждую (не омбилическую) точку M_0 проходят две взаимно ортогональные линии кривизны.*

Очевидно, геодезическое кручение линий кривизны в каждой точке равно нулю. В обозначениях п. 1.6 (формула (1.6.4)) это записывается в виде равенства

$$\frac{1}{r}+\frac{d\theta}{ds}=0, \tag{2.6.1}$$

где $1/\tau$ — кручение линии кривизны и θ — угол между нормалью к поверхности $\vec{e}_3$ и главной нормалью линии кривизны.

Упражнение. Докажите, используя соотношение (2.6.1), что когда точка M пробегает линию кривизны C, нормали к поверхности S в точках кривой C образуют «обертывающую поверхность» (т. е. все эти нормали касаются некоторой фиксированной кривой).

Обозначим через $1/R_1$ и $1/R_2$ значения нормальной кривизны (в точке $M \in S$) в двух главных направлениях в точке M. [Мы не знаем, какое из них R_1, а какое R_2.] Числа $1/R_1$ и $1/R_2$ называются *главными кривизнами* в точке M. Для омбилической точки условимся считать, что $1/R_1$ и $1/R_2$ равны между собой и совпадают со значением нормальной кривизны по любому направлению. Предложение 2.5.4 гласит, таким образом, что *сумма нормальных кривизн в двух взаимно ортогональных направлениях равна* $1/R_1 + 1/R_2$ (средней кривизне в точке M).

Рассмотрим в точке M репер, у которого направления векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ совпадают с главными направлениями. Согласно формуле (2.5.3) нормальная кривизна в направлении, образующем с вектором $\vec{e}_1$

угол φ, равна

$$\boxed{\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi+\frac{1}{R_2}\sin^2\varphi}$$

(где $1/R_1$ — нормальная кривизна в направлении $\vec{e}_1$ и $1/R_2$ — нормальная кривизна в направлении $\vec{e}_2$). Если r — репер, полученный поворотом предыдущего на угол φ, то [согласно (2.5.4)]

$$a(r)=\frac{1}{R_1}\cos^2\varphi+\frac{1}{R_2}\sin^2\varphi,$$
$$c(r)=\frac{1}{R_1}\sin^2\varphi+\frac{1}{R_2}\cos^2\varphi,$$
$$b(r)=\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_1}\right)\sin\varphi\cdot\cos\varphi.$$

Отсюда получаем, что

$$a(r)\,c(r)-b(r)^2=\frac{1}{R_1R_2}.$$

Итак, имеет место

Предложение 2.6.2. *Величина $ac-b^2$, связанная с каждым репером r, зависит только от начала M этого репера и равна произведению главных кривизн.*

Эта величина называется *полной кривизной* поверхности S в точке M.

2.7. Дифференциальная форма геодезической кривизны

Вернемся к дифференциальной форме ω_{12}. Напомним, что если C — кривая на поверхности S и Γ — кривая на многообразии $R(S)$, определяемая реперами Дарбу кривой C, то форма ω_{12} индуцирует на Γ форму, равную ds/ρ_g, где ds — длина дуги на кривой C и $1/\rho_g$ — геодезическая кривизна кривой C. Кривая Γ называется *каноническим поднятием* кривой C в $R(S)$.

Теорема 2.7.1. *Форма геодезической кривизны ω_{12} — это единственная дифференциальная форма первой степени на $R(S)$, удовлетворяющая уравнениям* (2.2.3):

$$d\omega_1=-\omega_2\wedge\omega_{12},\qquad d\omega_2=\omega_1\wedge\omega_{12}.$$

Доказательство. Если существует другая форма ω_{12}', удовлетворяющая тем же уравнениям, то форма $\alpha=\omega_{12}-\omega_{12}'$ удовлетворяет уравнениям

$$\omega_2\wedge\alpha=0,\qquad \omega_1\wedge\alpha=0.$$

Это означает, что форма α пропорциональна формам ω_2 и ω_1. Но ω_1 и ω_2 не пропорциональны. Следовательно, $\alpha=0$, ч. т. д.

Покажем теперь, что *геодезическая кривизна* кривой C на поверхности S есть инвариант квадратичной формы ds^2 этой поверхности. Более точно, имеет место

Предложение 2.7.2. *Пусть* f: $S \to S'$ *— диффеоморфизм поверхности* S *на поверхности* S'. *Предположим, что* f *сохраняет длину* (т. е. переводит форму ds^2 поверхности S в такую же форму поверхности S'). *Тогда если* C *— ориентированная кривая на поверхности* S *и* $C' = f(C)$, *то геодезическая кривизна кривой* C *в точке* $M \in C$ *равна геодезической кривизне кривой* C' *в точке* $f(M)$.

Доказательство. Каждому ортонормированному реперу, принадлежащему многообразию $R(S)$, с помощью отображения f сопоставляется ортонормированный репер, принадлежащий многообразию $R(S')$. А именно, производное отображение f' переводит касательный вектор к поверхности S в касательный вектор к поверхности S', и притом вектор *той же длины* (по предположению). Замена переменных f переводит формы ω_1' и ω_2' (на $R(S')$) в формы ω_1 и ω_2 (на $R(S)$). Эта замена переменных переводит $d\omega_1'$ в $d\omega_1$ и $d\omega_2'$ в $d\omega_2$. Отсюда, в силу теоремы единственности 2.7.1, следует, что ω_{12}' переходит в ω_{12}, ч. т. д.

Если мы теперь заменим в равенстве (2.2.5) ω_{13} и ω_{23} их значениями (2.5.1), то получим

$$d\omega_{12} = -(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge (b\omega_1 + c\omega_2) = -(ac - b^2)\,\omega_1 \wedge \omega_2.$$

Как мы видели, $\omega_1 \wedge \omega_2$ — это *элемент площади* поверхности. Мы будем далее обозначать его через $d\sigma$ (это дифференциальная форма второй степени). С другой стороны, $ac - b^2$ — это не что иное, как *полная кривизна* (предложение 2.6.2). Таким образом, справедлива

Теорема 2.7.3. *Внешний дифференциал* $d\omega_{12}$ *от формы геодезической кривизны равен дифференциальной 2-форме* — $d\sigma/R_1R_2$, *произведению элемента площади на полную кривизну, взятому со знаком минус.*

2.8. Использование поля реперов

Предположим, что на поверхности S существует «поле реперов», т. е. что существует достаточное число раз дифференцируемое сечение r: $S \to R(S)$ (см. п. 2.1). Репер $r(M)$, соответствующий точке $M \in S$, определяется единичным вектором $\vec{e}_1(M)$, касательным к поверхности S в точке M (вектор $\vec{e}_2(M)$ репера $r(M)$ образует с вектором $\vec{e}_1(M)$ угол $+\pi/2$). Наличие поля реперов позволяет нам отождествить многообразие $R(S)$ с прямым произведением $S \times SO(2)$ (ср. п. 2.1): каждый репер r определяется своим началом $M \in S$

и углом φ между первым вектором $\vec{e}_1$ репера r и вектором поля $\vec{e}_1\,(M)$.

Заметим, что поле реперов заведомо существует, если возможна параметризация поверхности S, т. е. если существует диффеоморфизм Φ открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (с координатами u и v) на поверхность S. Действительно, тогда производное отображение $\Phi'\,(u, v)$ переводит вектор $(1, 0)$ плоскости (u, v) в вектор $\vec{\xi}$, касательный к поверхности S в точке $M = \Phi\,(u, v)$. Вектор $\vec{\xi}$ не равен нулю и потому однозначно определяет единичный вектор $\vec{e}_1\,(M)$, пропорциональный $\vec{\xi}$ (с положительным коэффициентом пропорциональности).

Наличие поля реперов позволяет отождествить поверхность S с подмногообразием пространства $R\,(S) = S \times SO\,(2)$, сопоставив каждой точке поверхности S соответствующий репер поля. Пусть $\overline{\omega}_1$, $\overline{\omega}_2$ и $\overline{\omega}_{12}$ — дифференциальные формы на поверхности S, индуцированные формами ω_1, ω_2 и ω_{12}. Согласно (2.2.3) имеем

$$d\overline{\omega}_1 = -\overline{\omega}_2 \wedge \overline{\omega}_{12}, \qquad d\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_{12}. \tag{2.8.1}$$

В п. 2.11 мы покажем, как с помощью этих соотношений можно, зная $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, определить $\overline{\omega}_{12}$.

Лемма 2.8.1. *Имеет место равенство*

$$\boxed{\omega_{12} = \overline{\omega}_{12} + d\varphi.}$$

Доказательство. Это легко следует из формул

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_1\,(M) \cos\varphi + \vec{e}_2\,(M) \sin\varphi,$$
$$\vec{e}_2 = -\vec{e}_1\,(M) \sin\varphi + \vec{e}_2\,(M) \cos\varphi,$$
$$\omega_{12} = \vec{e}_2 \cdot d\vec{e}_1,$$
$$\overline{\omega}_{12} = e_2\,(M) \cdot d\vec{e}_1\,(M) = -\vec{e}_1\,(M) \cdot d\vec{e}_2\,(M).$$

В качестве следствия из этой леммы получаем

$$d\overline{\omega}_{12} = d\omega_{12} = -\frac{d\sigma}{R_1 R_2}. \tag{2.8.2}$$

2.9. Параллельный перенос вдоль кривой

Всюду далее мы будем считать выполненными предположения п. 2.8 (о существовании поля реперов). Пусть Γ — ориентированная кривая класса C^1 на многообразии $R\,(S)$. Она определяется: 1) заданием ориентированной кривой C на S, а именно той, которую составляют начала реперов; 2) заданием для каждой точки $M \in C$ угла φ между первым вектором репера кривой Γ и первым вектором репера поля репера $(\vec{e}_1(M), \vec{e}_2(M))$ в точке M.

Параметризуем кривую C с помощью длины дуги s. Тогда и кривая $\Gamma \subset R(S) \approx S \times SO(2)$ будет параметризована тем же параметром s. Пользуясь леммой 2.8.1, легко вычислить дифференциальную форму, индуцированную на кривой Γ дифференциальной формой ω_{12}; это будет сумма форм, индуцированных формами $\overline{\omega}_{12}$ и $d\varphi$.

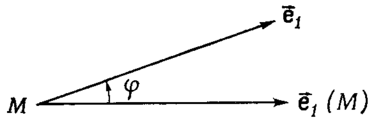

Рис. 18.

Если задана кривая C, то форма, которую индуцирует форма $\overline{\omega}_{12}$, известна. Она имеет вид $a(s)\,ds$, где a — некоторая известная функция. Спрашивается, можно ли выбрать функцию φ от s так, чтобы форма ω_{12} *индуцировала на* Γ *нулевую форму*. Условием для этого, очевидно, служит равенство

$$d\varphi + a(s)\,ds = 0. \qquad (2.9.1)$$

Следовательно, для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $\varphi(s)$ была примитивной для функции $-a(s)$. Поэтому поставленная задача имеет решение, причем функция $\varphi(s)$ определена однозначно с точностью до аддитивной константы.

Определение. Если функция φ удовлетворяет условию (2.9.1), то поле векторов $\vec{e}_1$ в точках кривой C называется *полем векторов, параллельных вдоль кривой* C. Из сказанного выше вытекает, что поле векторов, параллельных вдоль кривой C, определяется (произвольным) выбором единичного вектора, касательного к кривой C в точке $M_0 \in C$. При этом говорят, что вектор поля в произвольной точке $M \in C$ получен *параллельным переносом вдоль кривой* C вектора, заданного в точке M_0.

Понятие параллельного переноса позволяет дать простую интерпретацию *геодезической кривизны* ориентированной кривой C. Для каждой точки $M \in C$ обозначим через θ угол между единичным касательным вектором к кривой C в точке M и вектором $\vec{e}_1(M)$ поля реперов. Этот касательный вектор является вектором из репера Дарбу кривой C. Реперы Дарбу образуют кривую в $R(S)$ («каноническое поднятие» кривой C в $R(S)$). Форма ω_{12} индуцирует на этой кривой форму

$$\overline{\omega}_{12} + d\theta = a(s)\,ds + d\theta = d(\theta - \varphi),$$

где угол φ определяется, как и выше, *параллельным переносом* вдоль кривой C. Но мы знаем, что ω_{12} индуцирует на каноническом образе кривой C форму ds/ρ_g, где $1/\rho_g$ — геодезическая кривизна кривой C.

Отсюда вытекает, что

$$\boxed{\frac{1}{\rho_g} = \frac{d(\theta - \varphi)}{ds}.} \qquad (2.9.2)$$

Геодезическая кривизна кривой C равна производной по длине дуги s от угла $\theta - \varphi$ между ориентированным касательным вектором к кривой C и вектором из поля векторов, параллельных вдоль кривой C.

В частности, *геодезические — это те кривые C, у которых поле единичных касательных векторов параллельно вдоль кривой C.*

2.10. Связь между полной кривизной и параллельным переносом

Мы по-прежнему предполагаем существование на S поля реперов. Возьмем в качестве кривой C *цикл* (т. е. кривую C, конец которой совпадает с ее началом M_0). Выберем единичный касательный вектор к поверхности S в точке M_0 и перенесем его параллельно вдоль цикла C. Вектор, который мы получим в результате этого переноса, *не обязательно совпадет с исходным вектором, даже если цикл C гомотопен точке.* Более точно, пусть γ — кусочно гладкий цикл класса C^1, который является *ориентированным краем компакта* δ. [NB.: можно показать, что в этом случае компакт δ гомеоморфен компактному кругу (но мы не будем здесь этого делать), и, следовательно, цикл γ гомотопен точке.] Если φ — угол между начальным вектором и вектором, получающимся в результате его параллельного переноса вдоль цикла C, то, как следует из результатов п. 2.9,

$$\int_\gamma d\varphi = -\int_\gamma \bar{\omega}_{12}.$$

По теореме Стокса этот интеграл равен

$$-\iint_\delta d\bar{\omega}_{12},$$

а значит, в силу (2.8.2) он равен

$$\iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2}.$$

Мы получили важное равенство

$$\boxed{\int_\gamma d\varphi = \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2}.} \qquad (2.10.1)$$

Левая часть этого равенства — это *полный угол, на который поворачивается вектор при параллельном переносе вдоль цикла* γ (угол φ измеряется в каждый момент по отношению к реперу из нашего поля реперов). Таким образом, можно сказать, что при *параллельном переносе вектора вдоль цикла γ этот вектор поворачивается на угол, равный двойному интегралу по компакту δ от полной кривизны $1/R_1R_2$*, причем интеграл берется относительно элемента площади $d\sigma$.

Пусть, как и в п. 2.9, θ — угол между единичным касательным вектором к кривой γ в точке M и вектором $\vec{e}_1(M)$ поля реперов. По формуле (2.9.2)

$$d\varphi = d\theta - \frac{ds}{\rho_g}.$$

Подставляя это выражение в (2.10.1), получаем

$$\int_\gamma \frac{ds}{\rho_g} = \int_\gamma d\theta - \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1R_2}. \tag{2.10.2}$$

Записывая это равенство, мы неявно предполагаем, что γ — это кривая класса C^2. В случае, когда цикл γ состоит из конечного числа дуг γ_i класса C^2, разделенных угловыми точками P_i, где единичный касательный вектор к кривой γ скачком поворачивается на угол θ_i, равенство (2.10.2) должно быть заменено следующим:

$$\sum_i \int_{\gamma_i} \frac{ds}{\rho_g} = \sum_i \int_{\gamma_i} d\theta - \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1R_2}. \tag{2.10.3}$$

Мы используем здесь без доказательства следующую лемму, которая касается лишь топологических свойств плоскости:

Лемма 2.10.1. *В предыдущих обозначениях*

$$\sum_i \int_{\gamma_i} d\theta + \sum_i \theta_i = 2\pi.$$

Интуитивно, левая часть равенства — это *полный угол, на который поворачивается единичный касательный вектор к кривой* γ. Этот угол подсчитывается в каждой точке M относительно вектора $\vec{e}_1(M)$ данного поля реперов. Очевидно, что левая часть должна быть числом, кратным 2π, ибо в каждой точке угол θ определен по модулю 2π. Лемма утверждает, что он в точности равен 2π.

Читатель проверит сам, что наше утверждение верно, когда S — плоскость, δ — круг и γ — ориентированная окружность, ограничивающая круг δ: касательная к окружности повернется на угол 2π после обхода окружности по направлению, соответствующему ее ориентации. Доказательство в общем случае сводится к этому частному случаю при помощи надлежащих деформаций.

Из леммы 2.10.1 и равенства (2.10.3) следует

Теорема 2.10.2 (формула Гаусса — Боне). *При сделанных выше предположениях*

$$\boxed{\sum_i \int_{\gamma_i} \frac{ds}{\rho_g} + \sum_i \theta_i = 2\pi - \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2}.} \qquad (2.10.4)$$

Частный случай. Пусть γ — геодезический треугольник, т. е. цикл, состоящий из трех дуг геодезических γ_1, γ_2, γ_3. Обозначим через α_1, α_2, α_3 *углы* этого треугольника (заключенные между 0 и 2π). Очевидно,

$$\theta_i = \pi - \alpha_i.$$

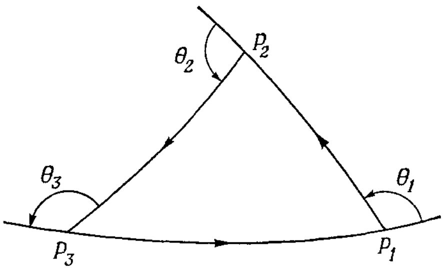

Рис. 19.

Далее,

$$\int_{\gamma_i} \frac{ds}{\rho_g} = 0,$$

так как геодезическая кривизна кривых γ_i равна нулю. Поэтому (2.10.4) принимает вид

$$3\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) = 2\pi - \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2},$$

или

$$\boxed{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + \iint_\delta \frac{d\sigma}{R_1 R_2},} \qquad (2.10.5)$$

т. е. справедливо такое

Следствие 2.10.3. *Сумма углов геодезического треугольника больше π на интеграл от полной кривизны по внутренности треугольника.*

Пример. Сферические треугольники. Пусть S_2 — единичная сфера в пространстве $\mathbb{R}^3$. Полная кривизна сферы S_2 в каждой точке равна 1 (все ее точки омбилические, с кривизной 1). По определению *сферический треугольник* — это геодезический треугольник на S_2: его стороны — *это дуги больших окружностей*. На сферическом треугольнике всегда существует поле реперов (действительно, на S_2 существует точка P, лежащая вне нашего треугольника, и стереографическая проекция с полюсом в этой точке переводит плоскость в $S_2 - \{P\}$, а какое-нибудь не обращающееся в нуль векторное поле на плоскости — в векторное поле $S_2 - \{P\}$, не обращающееся в нуль. Поэтому применимо следствие 2.10.3, и, значит, *сумма углов сферического треугольника больше π на площадь этого треугольника.*

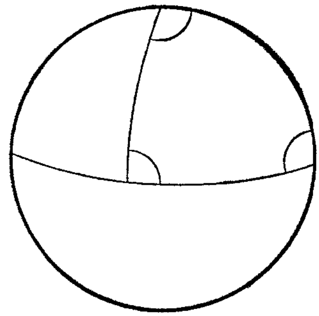

Рис. 20.

Этот результат можно доказать и элементарными методами (см., например, Ж. Адамар, *Элементарная геометрия*, ч. 2. Учпедгиз, Москва, 1952, Дополнение, глава 2).

Для примера рассмотрим на сфере треугольник, высекаемый тремя взаимно ортогональными плоскостями, проходящими через центр сферы. У этого треугольника все углы прямые. Следовательно, его площадь равна $\pi/2$. Это согласуется с тем, что вся сфера S_2 есть объединение *восьми* таких треугольников.

2.11. Вычисление полной кривизны поверхности с помощью первой основной формы

Мы по-прежнему предполагаем существование поля векторов и используем обозначения п. 2.8. Так как дифференциальные формы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$ линейно независимы в каждой точке поверхности S, то форма $\overline{\omega}_{12}$ однозначно записывается в виде

$$\overline{\omega}_{12} = \lambda_1\overline{\omega}_1 + \lambda_2\overline{\omega}_2. \tag{2.11.1}$$

Вычислим функции λ_1 и λ_2. Формулы (2.11.1) и (2.8.1) дают

$$d\overline{\omega}_1 = \lambda_1\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2, \qquad d\overline{\omega}_2 = \lambda_2\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2. \tag{2.11.2}$$

Если известны формы $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$, то можно вычислить $d\overline{\omega}_1$ и $d\overline{\omega}_2$; тогда λ_1 и λ_2 (функции на S) можно найти по формулам (2.11.2). Далее, зная $\overline{\omega}_{12}$, мы можем вычислить $d\overline{\omega}_{12}$ и тем самым получить полную кривизну, ибо

$$d\overline{\omega}_{12} = -\frac{1}{R_1R_2}\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2 \tag{2.11.3}$$

[см. (2.8.2)]. Таким образом, все сводится к вычислению дифференциальных форм $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_2$. Это функции $\overline{\omega}_i(M, \vec{\xi})$, $i = 1, 2$, где $\vec{\xi}$ — вектор, касательный к поверхности S в точке M; для данной точки M значения форм $\overline{\omega}_1(M, \vec{\xi})$ и $\overline{\omega}_2(M, \vec{\xi})$ — это координаты вектора $\vec{\xi}$ в базисе $(\vec{e}_1(M), \vec{e}_2(M))$.

Проведем вычисления полностью для случая, когда нам дано такое параметрическое представление поверхности S с помощью параметров u и v, что

$$ds^2 = (A\,du)^2 + (B\,dv)^2, \tag{2.11.4}$$

где A и B — функции от параметров u, v, принимающие положительные значения.

Рассмотрим на поверхности S векторное поле, которое соответствует постоянному векторному полю $(1, 0)$ на плоскости (u, v). Тогда

$$\overline{\omega}_1 = A\,du, \qquad \overline{\omega}_2 = B\,dv$$

и

$$d\overline{\omega}_1 = -\frac{\partial A}{\partial v}\,du \wedge dv, \qquad d\overline{\omega}_2 = \frac{\partial B}{\partial u}\,du \wedge dv,$$

$$\overline{\omega}_1 \wedge \overline{\omega}_2 = AB\,du \wedge dv.$$

Сравнивая с (2.11.2), получаем

$$\lambda_1 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial v}, \qquad \lambda_2 = \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial u}.$$

Далее, из равенства (2.11.1) вытекает, что

$$\overline{\omega}_{12} = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v}\,du + \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u}\,dv,$$

откуда

$$d\overline{\omega}_{12} = \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u}\right)\right] du \wedge dv,$$

и формула (2.11.3) дает, наконец,

$$\boxed{\frac{1}{R_1R_2} = -\frac{1}{AB}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial v}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial u}\right)\right].} \tag{2.11.5}$$

Такова формула для полной кривизны в случае, когда ds^2 имеет вид (2.11.4).

УПРАЖНЕНИЯ

Упражнения на метод подвижного репера

Мы пользуемся здесь обозначениями последней главы. Всюду далее под поверхностью S понимается двумерное связное дифференцируемое многообразие класса C^k $(k \geqslant 2)$, погруженное в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Упражнение 1. Докажите, что нормальная кривизна в направлении вектора $\vec{u}$, касательного к поверхности S в точке M, определяется формулой

$$\rho_n = \frac{1}{R_n} = \frac{a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2},$$

где значения форм ω_1 и ω_2 взяты на векторе $\vec{u}$.

Покажите, что главные направления в точке M — это те направления, в которых нормальные кривизны $1/R_n$ имеют экстремальные значения. Выведите отсюда, что если $\vec{u}$ — главное направление в точке M, то

$$\frac{1}{R}=\frac{a\omega_1+b\omega_2}{\omega_1}=\frac{b\omega_1+c\omega_2}{\omega_2},$$

где $1/R$ — главная кривизна в направлении $\vec{u}$ и значения форм ω_1 и ω_2 взяты на векторе $\vec{u}$.

Установите, используя этот факт, что дифференциальное уравнение для линий кривизны на поверхности S имеет следующий вид:

$$b(\omega_1^2-\omega_2^2)+(c-a)\,\omega_1\omega_2=0.$$

Упражнение 2. Какой вид будут иметь уравнения подвижного репера в случае, когда векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ имеют главные направления в точке M? *В дальнейших упражнениях систематически используются именно такие реперы.* Символы a, b, c далее обозначают функции на семействе подобных реперов, или, что то же самое, на поверхности S.

Упражнение 3. Точка M на поверхности S, в которой $a=b=c=0$, называется *точкой уплощения*. Докажите, что замкнутая поверхность S, у которой все точки являются точками уплощения, есть плоскость.

Упражнение 4. Используя реперы из упражнения 2, рассмотрите поверхности S, у которых полная кривизна $K=ac-b^2$ равна нулю.

Докажите, что в этом случае либо форма ω_{13}, либо форма ω_{23} равна нулю. Пусть для определенности $\omega_{23}\neq 0$ и $\omega_{13}=0$. Докажите, что на поверхности S локально существует функция u, такая, что $\omega_{23}=du$, и исследуйте движение подвижного репера вдоль линий $u=\mathrm{const}$. Выведите отсюда, что S — развертывающаяся поверхность. Докажите, что в том частном случае, когда $\omega_{12}=0$, поверхность S есть цилиндр.

Упражнение 5. Напомним, что точка M на поверхности S, для которой $a=c=\rho\neq 0$ и $b=0$, называется омбилической. Пусть S — поверхность, все точки которой омбилические. Докажите, что $d\rho\wedge\omega_1=d\rho\wedge\omega_2=0$, и выведите отсюда, что поверхность S — сфера радиуса $1/|\rho|$.

Упражнение 6. Докажите, что замкнутая поверхность S, у которой средняя кривизна $H=a+c$ равна 1, а полная кривизна $K=ac-b^2$ равна нулю, является прямым круговым цилиндром радиуса 1. Согласно указаниям, сделанным в упражнениях 2 и 4, в этом случае следует положить $\omega_{13}=0$.

Докажите, что на поверхности S локально существуют две такие независимые функции u и v, что

$$\begin{aligned}
d\vec{M}&=du\vec{e}_1+dv\vec{e}_2,\\
d\vec{e}_1&=0,\\
d\vec{e}_2&=dv\vec{e}_3,\\
d\vec{e}_3&=-dv\vec{e}_3.
\end{aligned}$$

Рассмотрите вытекающие отсюда следствия.

Упражнение 7. Докажите, что на компактной поверхности S существует такая точка M, что в ней полная кривизна $K=ac-b^2$ строго положительна. Для этого рассмотрите на поверхности S точку M, максимально удаленную от начала координат пространства $\mathbb{R}^3$, и докажите, что в точке M вторая основная форма поверхности S отрицательно определена.

Если средняя кривизна $H = a + c$ равна нулю во всех точках, то поверхность S называется *минимальной поверхностью*. Может ли минимальная поверхность быть компактной?

Упражнение 8. Используя реперы из упражнения 2, докажите, что если в точке M $da = dc = 0$, то в этой точке либо $a = c$, либо $\omega_{12} = 0$. Выведите отсюда, что на поверхности S с постоянной строго положительной полной кривизной K главные кривизны не могут достигать локального максимума или локального минимума в точке, не являющейся омбилической.

Упражн ние 9. Используя результаты упражнений 8 и 5 докажите, что компактная поверхность постоянной строго положительной кривизны является сферой

Упражнение 10. Если замкнутая поверхность S не имеет омбилических точек и кривизны $H = a + c$, $K = ac - b^2$ постоянны, то поверхность S — прямой круговой цилиндр. Существуют ли минимальные поверхности постоянной строго отрицательной кривизны? Используйте результаты упражнений 8 и 6.

Упражнение 11. *Сферическое отображение.* Каждой точке M на поверхности S сопоставим точку μ на сфере Σ радиуса 1 с центром в точке 0, такую, что $\overrightarrow{0\mu} = \vec{e}_3$. Отображение f: $S \to \Sigma$, определяемое равенством $f(M) = \mu$, называется *сферическим отображением* поверхности S в Σ.

(a) Поскольку касательные плоскости $T_M(S)$ в точке M к поверхности S и $T_\mu(\Sigma)$ в точке μ к сфере Σ параллельны, то первая основная форма на сфере Σ в точке μ индуцирует квадратичную форму на $T_M(S)$. Вычислите эту квадратичную форму как функцию от a, b, c, ω_1, ω_2. Полученная таким образом квадратичная форма называется *третьей основной квадратичной формой* поверхности S в точке M.

(b) Производная f' отображения f в точке M естественным образом индуцирует линейное отображение L касательной плоскости $T_M(S)$ в себя. Это отображение L называется *отображением Вейнгартена* для поверхности S в точке M. Используя формулы для $d\vec{M}$ и $d\vec{e}_3$, вычислите матрицу отображения L в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ касательной плоскости $T_M(S)$, как функцию от a, b, c. Выведите отсюда, что L — симметрический оператор для первой основной квадратичной формы поверхности S в точке M.

(c) Вычислите собственные значения, собственные векторы, след и определитель отображения L. Дайте полученным результатам геометрическую интерпретацию. Выведите условия для того, чтобы f было локальным диффеоморфизмом поверхности S на сферу Σ.

(d) Обозначим через I, II и III соответственно первую, вторую и третью основные формы поверхности S в точке M. Докажите, что для любых векторов $\vec{X}$, $\vec{Y} \in T_M(S)$

$$\mathrm{II}(\vec{X}, \vec{Y}) = -\mathrm{I}(L\cdot\vec{X}, \vec{Y}) = -\mathrm{I}(\vec{X}, L\cdot\vec{Y}),$$

$$\mathrm{III}(\vec{X}, \vec{Y}) = \mathrm{I}(L^2\cdot\vec{X}, \vec{Y}) = \mathrm{I}(L\cdot\vec{X}, L\cdot\vec{Y}) = \mathrm{I}(\vec{X}, L^2\cdot\vec{Y})$$

(проинтерпретируйте формулы, выражающие II и III как функции от a, b, c, ω_1, ω_2).

(e) Пусть $H = a + c$ и $K = ac - b^2$ — соответственно средняя и полная кривизна поверхности S в точке M. Докажите, что

$$L^2 + HL + K\cdot\mathrm{id} = 0$$

(id означает тождественное отображение плоскости $T_M(S)$ на себя). Выведите отсюда, что $\mathrm{III} - H\cdot\mathrm{II} + K\cdot\mathrm{I} = 0$.

Упражнение 12 (продолжение предыдущего). Сферическое отображение $f\colon S \to \Sigma$ *строго конформно*, если для любых векторов $\vec{X}, \vec{Y} \in T_M(S)$ существует такая строго положительная функция $u(M)$ на S, что

$$\mathrm{I}(L\cdot\vec{X}, L\cdot\vec{Y}) = \mathrm{III}, \qquad (\vec{X}, \vec{Y}) = u(M)\,\mathrm{I}(\vec{X}, \vec{Y}).$$

Докажите, что если для поверхности S сферическое отображение строго конформно, то: если поверхность S компактна, то она является сферой, если поверхность S не компактна, то она является минимальной поверхностью с постоянной строго отрицательной кривизной, равной $-u(M)$. [Проинтерпретируйте соотношения между a, b, c, используя результаты упражнений 5 и 7.]

Упражнение 13 (продолжение предыдущего). Докажите, что если $\mathrm{I} = \mathrm{II}$ или $\mathrm{I} = \mathrm{III}$ и поверхность S замкнута, то S — сфера радиуса 1, и обратно. [Докажите, что если $\mathrm{II} = \mathrm{III}$ и поверхность S замкнута, то она представляет собой либо сферу радиуса 1, либо плоскость, либо прямой круговой цилиндр радиуса 1.]

Упражнение 14. *Параллельные поверхности.* Для данной поверхности S рассмотрим поверхность S_r, состоящую из точек вида $\varphi(M) = M_r = M + r\vec{e}_3$, где $M \in S$ и r — некоторая константа.

(a) Рассмотрим репер $(M_r, \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$, получающийся из репера $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ сдвигом на $r\vec{e}_3$. Вычислите формы $\overline{\omega}_i$ и $\overline{\omega}_{ij}$ для этого нового репера на поверхности S_r как функции от форм ω_i и ω_{ij}, вычисленных для $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

(b) Докажите, что можно связать H, K и r таким соотношением, что характеристики поверхности S_r в точке M_r: главные направления, главные кривизны, среднюю кривизну, полную кривизну и три основные формы поверхности S_r в точке M_r — можно найти, если известны соответствующие характеристики поверхности S в точке M.

(c) Поскольку касательные плоскости $T_M(S)$ и $T_{M_r}(S_r)$ параллельны, то производное отображение φ' для отображения φ в точке M естественным образом индуцирует линейное отображение F касательного пространства $T_M(S)$ в себя. Требуется найти матрицу этого автоморфизма в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ как функцию от a, b, c и r. Проинтерпретируйте в терминах преобразования F соотношение, которое надо найти в пункте (b). Докажите, что если это соотношение выполнено, то φ — локальный диффеоморфизм поверхности S на поверхность S_r.

Автоморфизм Вейнгартена (упражнение 11) для поверхности S_r в точке M_r также индуцирует естественным образом линейное отображение пространства $T_M(S)$. Пусть L — отображение Вейнгартена для поверхности S в точке M; докажите, что $L_r\cdot F = F\cdot L_r = L$ и получите, используя этот факт, более простое доказательство результатов пункта (b).

Упражнение 15. Докажите, что если отображение $\varphi\colon S \to S_r$ (упражнение 14) строго конформно и поверхность S замкнута, то S — либо сфера, либо плоскость, либо поверхность без омбилических точек с постоянной средней кривизной $H = 2/r$.

Упражнение 16. *Триортогональная система поверхностей* в открытом множестве U пространства $\mathbb{R}^3$ определяется как такое семейство поверхностей, что через каждую точку $M \in U$ проходит ровно три поверхности семейства, нормали которых попарно ортогональны между собой. Докажите, что поверхности триортогонального семейства пересекаются друг с другом по линиям кривизны. Для этого нужно изучить движение подвижного ортонормированного репера $(M, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, где $M \in U$ и $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$—нормали соответственно к поверхностям S_1, S_2, S_3, проходящим через точку M.

Положим, как в п. 1.1,

$$d\vec{M} = \sum_{i=1}^{3} \omega_i \vec{e}_i, \qquad d\vec{e}_i = \sum_{j=1}^{3} \omega_{ij} \vec{e}_j \quad (i = 1, 2, 3).$$

Докажите, что

$$\omega_{23} = a_{11}\omega_1 + a_{12}\omega_2 + a_{13}\omega_3,$$
$$\omega_{31} = a_{21}\omega_1 + a_{22}\omega_2 + a_{23}\omega_3,$$
$$\omega_{12} = a_{31}\omega_1 + a_{32}\omega_2 + a_{33}\omega_3.$$

Покажите далее, что если точка M перемещается по поверхности S_3, то $a_{11} = -a_{22}$. Выведите отсюда, что $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$, и, воспользовавшись результатом упражнения 2, докажите, что векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ направлены по главным направлениям поверхностей S_1, S_2, S_3.

Упражнение 17. Покажите, что семейство концентрических сфер может быть естественным образом включено в бесконечное множество триортогональных систем. Выведите отсюда, что всякий конформный диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^3$ переводит сферу в сферу.

Упражнения на интегрирование

Упражнение 18. Используя уравнения (1.4.4), докажите, что если кручение и кривизна кривой C в пространстве $\mathbb{R}^3$ пропорциональны (т. е. $\rho/\tau = k$, где $k = \mathrm{const}$), то кривая C представляет собой спираль с направляющим вектором $\vec{u}$. Найдите этот направляющий вектор $\vec{u}$. [Говорят, что спираль имеет направляющий вектор $\vec{u}$, если ее касательные векторы составляют с вектором $\vec{u}$ постоянный угол.]

Частный случай. Пусть $\rho = \tau = (1+s)\sqrt{2}$. Докажите, что в этом случае кривая C определена однозначно с точностью до сдвига, и найдите ее уравнение для следующих начальных данных при $s = 0$:

$$e_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right); \quad e_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right); \quad e_3 = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Упражнение 19. Докажите, используя реперы из упражнения 2, что если $\omega_1 = du$, т. е. если кривые $v = \mathrm{const}$ являются одновременно и линиями кривизны и геодезическими (см. упражнение 14 к гл. 4), то эти кривые плоские. [Докажите, что форма ω_{12} пропорциональна форме ω_2.]

Исследуйте, в частности, поверхности вращения и докажите, что для них a и c зависят только от u.

Обратно, пусть $\omega_1 = du$, $a = \varphi(u)$, $c = \psi(u)$ на поверхности S. Докажите, что тогда параметр v можно выбрать так, чтобы $\omega_2 = H(u)\,dv$, где H зависит только от u. Докажите, что

$$\omega_{12} = \frac{H'(u)}{H(u)}\,\omega_2 \qquad \text{и} \qquad H'^2 + c^2H^2 = \mathrm{const}.$$

Проинтегрируйте систему уравнений $de_i = \sum_j \omega_{ij} e_j$, затем $dM = \sum_i \omega_i e_i$ и докажите, что S — поверхность вращения.

Упражнение 20. Используя тот же метод, что и в предыдущем упражнении, найдите поверхность S, для которой $\omega_1 = du$, $a = \varphi(u)$, $c = \psi(u)$, где $\varphi(u) + \psi(u) = 0$.

Докажите, что меридианами этой поверхности вращения являются цепные линии.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ К ВАРИАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ, ТЕОРИИ КРИВЫХ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

АНРИ КАРТАН

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ