

517.8

К 28

УДК 519.24/27

**Обработка результатов наблюдений**, К а с с а н д р о в а О. Н., Лебедев В. В., «Наука», Главная редакция физ.-мат. литературы, 1970 г.

Элементарное руководство по обработке результатов наблюдений. В нем изложены основы современных методов оценки ошибок результатов измерений и даются практические указания по применению этих методов в физических лабораториях и практикумах. Написано на уровне, доступном для студентов младших курсов вузов, и является полезным дополнением к уже имеющимся описаниям конкретных задач в физических практикумах.

Табл. 24, рис. 17, библиогр. 27 назв.

*Ольга Николаевна Кассандрова,  
Виктор Всеволодович Лебедев*

Обработка результатов наблюдений  
М., 1970 г., 104 стр. с илл.

Редактор В. Н. Руденко

Техн. редактор Л. А. Пыжова

Корректор Г. С. Смоликова

---

Стано в набор 1/IV 1970 г. Подписано к печати 7/VII 1970 г. Бумага 84×108<sup>1/2</sup>. Физ. печ. л. 3,25. Условн. печ л. 5,46. Уч.-изд. л. 5,14.  
Тираж 85000 экз. Т-09794. Цена книги 18 коп. Заказ № 327

---

Издательство «Наука»  
Главная редакция физико-математической литературы  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

---

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10.

## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	4
§ 1. Введение . . . . .	7
§ 2. Оценка случайной погрешности прямых измерений . . . . .	12
§ 3. Определение величины дисперсии распределения из экспериментальных данных . . . . .	36
§ 4. Выявление и исключение промахов из серии измерений . . . . .	48
§ 5. Погрешности косвенных измерений . . . . .	53
§ 6. Нахождение параметров эмпирической зависимости методом наименьших квадратов . . . . .	70
§ 7. Заключение . . . . .	86
Приложения . . . . .	91
I. Оценка среднего квадрата погрешности, распределенной по нормальному закону . . . . .	91
II. Вывод формулы (45) . . . . .	92
III. Вывод формул (56) и (59) . . . . .	92
IV. Элементарный вывод соотношений (72) и (75) . . . . .	93
V. Элементарный вывод выражения для погрешности объема параллелепипеда . . . . .	94
VI. Элементарный вывод выражения для погрешности объема круглого цилиндра . . . . .	94
VII. Коэффициенты Стьюдента $t_\alpha$ . . . . .	95
VIII. Коэффициенты $\gamma_1^2$ и $\gamma_2^2$ , определяющие доверительный интервал для дисперсии: $\gamma_1^2 \Delta S_n^2 \leq \sigma^2 \leq \gamma_2^2 \Delta S_n^2$ . . . . .	96
IX. Значения $v_{\max}$ при разных значениях числа измерений $n$ для разных надежностей $\alpha$ . . . . .	99
X. Четырехзначные мантиссы логарифмов . . . . .	100
Литература . . . . .	103

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В физических практикумах университета и высших технических учебных заведений студенты проводят измерения различных физических величин.

Известно, что измерения этих величин могут быть произведены с различной степенью точности, и оценка этой точности является неотъемлемой частью любого эксперимента. Эта оценка может производиться различными методами в соответствии с различными способами обработки результатов наблюдений. До сего времени студенты большинства высших учебных заведений, выполняя лабораторные работы, оценивали точность эксперимента путем подсчета средней арифметической погрешности.

Однако средняя арифметическая погрешность недостаточно полно отражает влияние больших по величине погрешностей на точность результата измерений. Современная теория показывает, что более точной оценкой является так называемая средняя квадратичная погрешность.

В настоящей работе все изложение теории погрешностей ведется на основе вычисления средней квадратичной погрешности как отдельного измерения, так и результата серии измерений. Для определения средней квадратичной погрешности  $\Delta S_n$  необходимо знать величины самих измерений.

Для оценки точности результата измерений необходимо знать две характеристики: среднюю квадратичную погрешность  $\Delta S_n$  и надежность  $\alpha$  — вероятность попадания истинного значения измеряемой величины в определенный доверительный интервал. Границы доверительного интервала обычно определяются через дисперсию, которая является параметром закона нормального распределения случайных величин. При малом числе измере-

ний этот параметр можно найти с малой точностью, поэтому границы доверительного интервала в этом случае следует определять с помощью коэффициентов Стьюдента.

Настоящая работа представляет собой попытку научить студентов правильному подходу к оценке точности измерений на современном уровне теории погрешностей. Она знакомит читателя с основными понятиями теории вероятности, используемыми в теории погрешностей, с законами распределения этих погрешностей, с понятиями надежности результата измерений, дисперсией и доверительным интервалом.

В работе приведен ряд иллюстраций (графиков), облегчающих понимание физического смысла теоретических положений. Весь теоретический материал иллюстрирован также большим числом конкретных примеров расчета погрешностей измерений различных функциональных зависимостей, взятых непосредственно из описания лабораторных работ, вошедших в «Физический практикум» под редакцией проф. В. И. Ивероновой и др.

Большинство этих примеров доведены до численного результата. Дан рецепт по определению промахов, описан метод наименьших квадратов, получивший в настоящее время широкое применение и дающий возможность определить параметры эмпирической зависимости.

Для преподавателей, излагающих материал по теории погрешностей на семинарских занятиях или в практикумах студентам (слушателям), имеющим недостаточно основательную математическую подготовку, в приложениях приводятся упрощенные выводы некоторых положений и формул, рассматриваемых в работе.

Данная работа не претендует на оригинальность. Она создана под влиянием книги А. Н. Зайделя «Элементарные оценки ошибок измерений» [1], подчеркнувшего, что методы обработки результатов эксперимента, излагаемые до настоящего времени студентам большинства вузов, являются устаревшими.

Настоящая работа может служить практическим руководством по обработке результатов эксперимента как студентам, так и научным сотрудникам и инженерам. Окажется ли данное практическое руководство полезным для указанных товарищей, судить трудно, как трудно было и описать практическое применение основных принципов теории вероятности в теории погрешностей без

использования серьезных математических выкладок. Поэтому авторы будут очень признательны, если читатели, использующие данное руководство, поделятся с ними своими мнениями.

Основные положения настоящей работы излагались студентам при проведении занятий по определению погрешностей эксперимента в физическом практикуме и на некоторых семинарах физического факультета МГУ и Московского института нефтехимической и газовой промышленности имени И. М. Губкина.

В заключение приносим глубокую признательность проф. В. Б. Брагинскому, проф. В. Г. Зубову, проф. В. И. Ивероновой, проф. М. М. Кусакову и проф. В. И. Родичеву за ознакомление с рукописью и ряд ценных замечаний, а также доц. З. К. Григораш, доц. А. Ю. Кошевнику и доц. Р. А. Лукацкой за товарищеские советы и указания, которые значительно помогли при написании работы.

*Авторы*

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Каждая из лабораторных работ физического практикума посвящена изучению определенного физического явления, измерению той или иной величины, характеризующей данное явление или свойства тела, воспроизведению опытов по установлению основных законов природы. Как правило, всякое такое исследование состоит из одного или нескольких измерений.

Под *измерением* понимается сравнение измеряемой величины с другой величиной, принятой за единицу измерения. Измерения разделяют на *прямые* и *косвенные*.

При прямых измерениях определяемая величина сравнивается с единицей измерения непосредственно или при помощи измерительного прибора, проградуированного в соответствующих единицах. К этим измерениям относятся измерения длины линейкой, штангенциркулем, плитками Иогансона \*) и т. п.; измерения масс на рычажных весах с помощью набора разновесов; измерения промежутков времени при помощи часов или секундомера; измерения температуры термометром, силы электрического тока амперметром и т. п. Значение измеряемой величины отсчитывается при этом по шкале прибора или подсчитывается число и значение мер, разновесов и т. д.

При косвенных измерениях измеряемая величина определяется (вычисляется) из результатов прямых измерений других величин, которые связаны с измеряемой величиной определенной функциональной зависимостью. Примерами косвенных измерений могут служить измере-

---

\*) Плитка Иогансона представляет собой хорошо отполированную плоскопараллельную пластинку определенной толщины (концевая мера). Складывая эти пластинки друг с другом, получают разные эталоны толщины.

ния скорости равномерного (или равноускоренного) движения по измерениям длины пройденного пути и промежутков времени; измерения плотности тела по измерениям массы и объема тела и т. п.

При измерении любой физической величины обыкновенно приходится выполнять три последовательные операции:

- 1) проверку и установку приборов,
- 2) наблюдение их показаний и отсчет,
- 3) вычисление искомой величины из результатов измерений и оценку погрешности.

При измерении любой величины мы никогда не получаем истинного значения этой величины, т. е. результат измерения дает лишь приближенное значение. Это объясняется как принципиально ограниченной возможностью точности измерения, так и природой самих измеряемых объектов.

Развитие измерительной техники привело к появлению разнообразных приборов, отличающихся своей точностью. Точность прибора — это свойство измерительного прибора, характеризующее степень приближения показаний данного измерительного прибора к действительным значениям измеряемой величины. Она связана с физическим явлением, на основе которого построен метод измерения, и с допусками при изготовлении отдельных частей прибора. Точность прибора либо задается классом точности прибора, либо указана в паспорте, прилагаемом к прибору. Погрешность, вносимая прибором при каждом отдельном измерении (*приборная погрешность*), связана с точностью прибора. Эта погрешность равна той доле деления шкалы прибора, до которой с уверенностью в правильности результата можно производить отсчет. Обычно, если нет оговорок в паспорте прибора, она равна доле наименьшего деления шкалы (точнее,  $\pm 0,5$  цены наименьшего деления). Естественно, чем точнее прибор, тем меньше погрешность прибора. Повышая точность отсчета по шкале данного прибора, мы принципиально не можем изменить (увеличить) точность самого прибора. Например, производя измерения длины карандаша с помощью линейки (грубого прибора), разделенной на сантиметры, мы не изменим точности линейки, если будем рассматривать ее шкалу с помощью лупы. Действительно, несмотря на то, что отсчет с помощью лупы будет содержать большее число значащих цифр, точность результата измерения длины карандаша останется прежней,

так как точность линейки не изменилась. (Штрихи линейки нанесены через один сантиметр, но середины штрихов при изготовлении могут быть несколько смещены.)

Точность измерений обратно пропорциональна так называемой относительной погрешности измерений, определение которой будет дано ниже. Так как точность измерений всегда бывает ограниченной, то результат измерений дает нам не истинное значение измеряемой величины, а лишь приближенное.

Погрешности результата измерений определяются разностью измеренной и истинной величин и будут зависеть от многих причин \*). Обычно стараются произвести измерения с наибольшей достижимой точностью \*\*), т. е. сделать погрешность измерения по возможности малой.

Следует иметь в виду, что чем точнее мы хотим измерить ту или иную величину, тем труднее это сделать, тем больше времени потребуют эти измерения. Так, например, измерение толщины пластинки штангенциркулем можно производить с погрешностью 0,1 мм; измерение этой же толщины винтовым микрометром можно производить с погрешностью 0,005 мм. Применение компаратора — прибора, применяемого при измерении положения спектральных линий, — позволяет уменьшить погрешность измерений до 0,001 мм. Интерференционные методы позволяют производить измерения с погрешностью до 0,1λ, т. е. при применении зеленого света до 0,0005 мм. Однако применение компаратора требует постоянства температуры измеряемого тела и самого компаратора — их приходится помещать в термостат, иначе тепловое расширение при изменении температуры даст большее изменение длины, чем может чувствовать прибор, и, таким образом, будут искажены результаты измерений. Применение интерферометров требует кроме термостатирования тщательной полировки поверхности предмета, жесткости основания установки (обычно монтаж производится на бетонном или чугунном основании) и т. д. Таким образом, проведение измерений с высокой точностью

---

\*) Подробнее на этом остановимся ниже.

\*\*) Часто в литературе и в обиходе встречаются терминологические неправильные выражения: «Измерения проведены с точностью до 0,1 мм» или «Прибор позволяет измерять с точностью до 0,1 мм». В обоих случаях понимается не точность измерений или прибора, а погрешности измерений или прибора.



связано с большими экспериментальными трудностями, а следовательно, с затратами времени и труда. Поэтому не следует требовать ст измерений большей точности, чем это необходимо. Инженер также не должен несобоснованно уменьшать допуски на изготовление деталей и т. п.

Повторные измерения одной и той же величины дают в общем случае результаты, несколько отличающиеся друг от друга даже тогда, когда они производились одним и тем же лицом, одним и тем же способом, посредством одних и тех же приборов. Любые измерения всегда производятся с какими-то погрешностями (ошибками). Погрешности разделяются на две группы: систематические и случайные \*).

*Систематические погрешности* — погрешности, связанные с ограниченной точностью изготовления прибора (погрешностью прибора), неправильным выбором метода измерений, неправильной установкой прибора. Они также появляются, если пренебречь действием некоторых внешних факторов.

Например, они могут возникнуть, если не учитывать теплового расширения при измерениях объема жидкости или газа, производимых при медленно изменяющейся температуре; при измерении массы — если не учитывать действия выталкивающей силы воздуха на взвешиваемое тело и на разновесы; при калориметрических измерениях — если не учитывать теплообмена прибора с внешней средой и т. п. Шкала линейки может быть нанесена неточно (неравномерно), положение нуля термометра может не соответствовать нулевой температуре; капилляр термометра в разных участках может иметь разное сечение; при отсутствии электрического тока через амперметр стрелка прибора может не стоять на нуле и т. д. Округляя численную величину до какого-либо приближенного значения, например, полагая  $\pi = 3$ ;  $\pi = 3,1$ ;  $\pi = 3,14$ ;  $\pi = 3,142$ ;  $\pi = 3,1416$  и т. п. вместо  $\pi = 3,14159265\dots$ , мы допускаем систематическую погрешность.

Таким образом, систематические погрешности вызываются вполне определенными причинами, величина их либо при всех повторных измерениях остается постоянной (как в случаях округления или смещения нуля шкалы прибора и т. п.), либо изменяется по определенному зако-

\*) При этом мы не рассматриваем погрешностей, вызванных неисправностью прибора или небрежностью или невнимательностью экспериментатора (промахи),

ну (как в случаях неравномерности шкалы, неравномерности сечения капилляра термометра и т. п.). Так как причины, вызывающие систематические погрешности, в большинстве случаев известны, то эти погрешности в принципе могут быть исключены (изменением метода измерений, введением поправок к показаниям приборов, сравнением показаний приборов с показаниями эталонных приборов, учетом систематического влияния внешних факторов и т. д.), хотя на практике этого не всегда легко добиться.

*Случайные погрешности* вызываются большим числом случайных причин, действие которых на каждое измерение различно и не может быть заранее учтено. Типичным примером подобных погрешностей может служить так называемая ошибка параллакса (рис. 1), которая состоит в следующем. Для отсчета делений шкалы прибора необходимо, строго говоря, расположить глаз наблюдателя на перпендикуляре к шкале, проходящем через конец стрелки прибора или через край измеряемого предмета. Однако глаз человека не всегда может быть расположен точно на перпендикуляре. Поэтому при отсчетах мы будем получать либо завышенные, либо заниженные значения (рис. 2).

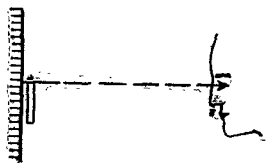


Рис. 1. Правильное положение глаза при отсчете делений шкалы.

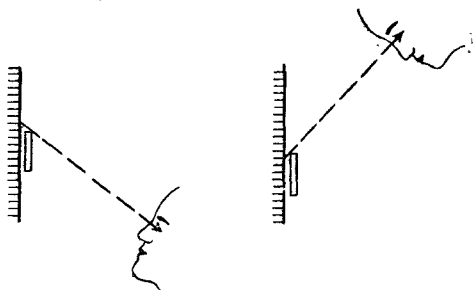


Рис. 2. Ошибка параллакса при отсчете делений шкалы.

Случайные погрешности вызываются также сотрясениями фундамента здания, влиянием незначительного движения воздуха и т. п.

Хотя исключить случайные погрешности отдельных измерений невозможно, математическая теория случайных

явлений позволяет уменьшить влияние этих погрешностей на окончательный результат измерений и установить разумное значение погрешностей. Ниже будет показано, что для этого необходимо произвести не одно, а несколько измерений, причем чем меньше значение погрешности мы хотим получить, тем больше измерений нужно произвести.

Упомянутая выше (см. стр. 8) *приборная погрешность*, или погрешность прибора, содержит в себе как систематические, так и случайные погрешности. К систематическим погрешностям можно отнести погрешности, связанные со смещением начала отсчета шкалы, с неравномерностью нанесения штрихов шкалы и т. п. Из случайных погрешностей в состав приборной погрешности входят погрешности, возникшие под действием сил трения в отдельных частях прибора, из-за движения частей прибора в зазорах (люфт) и т. п. Эти погрешности обычно не подчиняются закону нормального распределения (см. стр. 15).

Следует иметь в виду, что если случайная погрешность, полученная из данных измерений, окажется значительно меньше погрешности, определяемой точностью прибора, то очевидно, что нет смысла пытаться еще уменьшить величину случайной погрешности — все равно результаты измерений не станут от этого точнее.

Наоборот, если случайная погрешность больше приборной (систематической), то измерения следует произвести несколько раз, чтобы уменьшить значение случайной погрешности для данной серии измерений и сделать эту погрешность меньше или одного порядка с погрешностью прибора.

## § 2. ОЦЕНКА СЛУЧАЙНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Перейдем теперь к рассмотрению основ теории случайных погрешностей, позволяющей оценить величину погрешности для серии измерений.

В основе теории погрешностей лежат два предположения, подтверждаемых опытом.

1. При большом числе измерений случайные погрешности одинаковой величины, но разного знака, т. е. погрешности как в сторону уменьшения, так и в сторону увеличения, встречаются одинаково часто.

2. Большие (по абсолютной величине) погрешности встречаются реже, чем малые, т. е. вероятность появления погрешности уменьшается с ростом величины погрешности.

Допустим, что мы произвели  $n$  прямых (непосредственных) измерений некоторой физической величины, истинное значение которой (нам неизвестное) обозначим через  $a$ . Обозначим через  $a_1, a_2, \dots, a_n$  результаты отдельных измерений, а через

$$\Delta a_i^* = a - a_i$$

— истинную абсолютную погрешность  $i$ -го измерения\*). Тогда результаты измерений можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_1 &= a - \Delta a_1^*, \\ a_2 &= a - \Delta a_2^*, \\ &\dots \dots \dots \\ a_n &= a - \Delta a_n^*. \end{aligned} \quad (1)$$

Естественно, что абсолютные погрешности  $\Delta a_1^*, \Delta a_2^*, \dots, \Delta a_n^*$  могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Суммируя левую и почленно правую стороны равенств (1), получаем

$$\sum_{i=1}^n a_i = na - \sum_{i=1}^n \Delta a_i^*. \quad (2)$$

Если ввести понятие *среднеарифметической величины*

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad (3)$$

то, разделив обе стороны равенства (2) на число измерений  $n$ , получаем после перестановки членов:

$$a = \bar{a} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta a_i^*. \quad (4)$$

Если число  $n$  измерений достаточно велико (строго говоря, при  $n \rightarrow \infty$ ), то согласно предположению 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta a_i^* = 0, \quad (5)$$

---

\*) Абсолютную погрешность для систематической погрешности можно определить аналогичным образом.

так как в серии из большого числа измерений всякой положительной погрешности можно сопоставить равную ей по абсолютной величине отрицательную погрешность.

Из (4) следует, что

$$a = \bar{a} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (6)$$

т. е. при бесконечно большом числе измерений истинное значение измеряемой величины равно среднеарифметическому значению  $\bar{a}$  всех результатов произведенных измерений \*). Однако при ограниченном числе измерений ( $n \neq \infty$ ) среднеарифметическое значение  $\bar{a}$  будет отличаться от истинного значения  $a$ , т. е. равенство (6) будет не точным, а приближенным:

$$a \approx \bar{a}, \quad (7)$$

и нам необходимо оценить величину этого расхождения.

Появление того или иного значения  $a_i$  в процессе измерения является случайным событием. Существует некоторая вероятность появления этого значения  $a_i$  в интервале  $a_i - \frac{1}{2} da_i$ ,  $a_i + \frac{1}{2} da_i$ , а следовательно, и появления соответствующего значения абсолютной погрешности  $\Delta a_i$ .

За вероятность  $y(a_i)da_i$  появления величины  $a_i$  в интервале  $da_i$  принимают относительную частоту появления значений  $a_i$  в интервале  $da_i$ , т. е. отношение числа всех значений  $a_i$ , попадающих в интервал  $da_i$ , к числу всех значений  $a_i$  (при  $n \rightarrow \infty$ ).

Эта вероятность, как показывается в теории вероятностей, определяется законом нормального распределения Гаусса (рис. 3а)

$$y(a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(a_i-a)^2}{2\sigma^2}} **), \quad (8)$$

\*) Напомним, что при этом предполагается отсутствие систематических погрешностей.

\*\*\*) Это распределение впервые было получено французским математиком А. М. Муавром в 1733 г., затем немецким оптиком И. Г. Ламбертом в 1765 г. и детально изучено французским математиком П. С. Лапласом в 1795 г. и немецким математиком К. Ф. Гауссом в 1821 г.

где  $e$  — основание натуральных логарифмов,  $\sigma^2$  — постоянная величина, называемая дисперсией распределения.

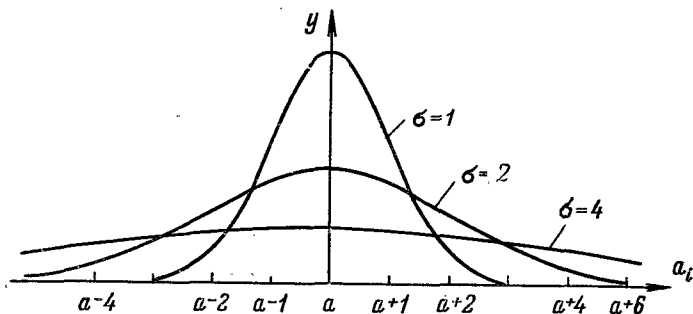


Рис. 3а. Кривые  $y(a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(a_i - a)^2}{2\sigma^2}}$  для разных значений  $\sigma$ . По оси абсцисс отложены единицы подходящим образом выбранного масштаба. Значения  $\sigma$  — в тех же единицах.

Аналогичным образом можно записать распределение истинных погрешностей  $\Delta a_i^*$  (рис. 3б)

$$y(\Delta a_i^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\Delta a_i^*)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\Delta a_i^* - 0)^2}{2\sigma^2}}. \quad (9)$$

Индекс  $i$ , оставленный у  $\Delta a_i^*$ , означает, что речь идет о распределении вероятностей появления погрешности отдельного измерения.

Функция  $y(a_i)$  (или  $y(\Delta a_i^*)$  соответственно) называется *плотностью распределения вероятностей* \*).

Как видно из (9), нормальное распределение характеризуется двумя параметрами: 1) *генеральным средним* значением случайной величины и 2) *дисперсией* (или дисперсией генеральной совокупности).

Генеральное среднее значение представляет собой то значение, относительно которого происходит разброс

\*) В какой-то мере понятие плотности вероятности можно сопоставить с понятием плотности массы: как по распределению плотности массы можно определить полную массу тела, так и по распределению плотности вероятности можно найти полную вероятность.

случайных величин. Другими словами, генеральное среднее значение определяется абсциссой оси симметрии кривой нормального распределения. Так, например, в случае распределения отдельных результатов измерений  $a_i$  генеральным средним значением будет «истинное» значение  $a$  (см. рис. 3а). В случае распределения истинных абсолютных погрешностей  $\Delta a_i^*$  это генеральное среднее равно нулю (см. рис. 3б).

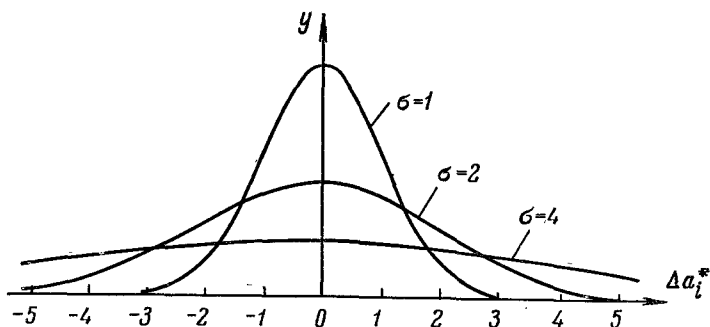


Рис. 3б. Кривые  $y(\Delta a_i^*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\Delta a_i^*)^2}{2\sigma^2}}$  для тех же значений  $\sigma$ . По оси абсцисс отложены единицы выбранного масштаба. Значения  $\sigma$  — в тех же единицах.

Дисперсия  $\sigma^2$  характеризует быстроту уменьшения вероятности появления погрешности  $\Delta a_i$  с ростом величины этой погрешности.

Под *генеральной совокупностью* подразумевается все множество *возможных* значений измерений  $a_i$  или возможных значений погрешностей  $\Delta a_i^*$ .

На рис. 3а и 3б приведены кривые  $y = f(a_i)$  и  $y = f(\Delta a_i^*)$  для трех значений  $\sigma$ :  $\sigma = 1$ ,  $\sigma = 2$  и  $\sigma = 4$ . Мы видим, что при малых значениях  $\sigma$  кривые  $y = f(a_i)$  и  $y = f(\Delta a_i^*)$  идут более круто и имеют большее значение  $y_{\max}$ , чем при больших значениях  $\sigma$ . При этом площади под кривыми  $y = f(a_i)$  и  $y = f(\Delta a_i^*)$  с различными значениями  $\sigma$  одинаковы. Кривые  $y = f(a_i)$  и  $y = f(\Delta a_i^*)$  симметрично расположены относительно ординаты, на

которой

$$y = y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}, \quad \Delta a_i^* = 0 \text{ и } a = \bar{a}.$$

Распределение (9) получается при рассмотрении относительных частот появления абсолютных погрешностей  $\Delta a_i^*$  в бесконечно узких интервалах

$$\Delta a_i^* - \frac{1}{2} d(\Delta a_i^*), \quad \Delta a_i^* + \frac{1}{2} d(\Delta a_i^*),$$

где  $d(\Delta a_i^*)$  — бесконечно малая величина.

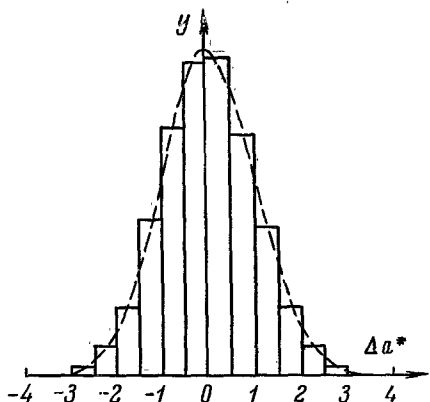


Рис. 4. Гистограмма.

На практике обычно задается величина интервала  $d(\Delta a_i^*)$ , которая, естественно, является конечной. В этом случае относительные частоты попадания  $\Delta a_i^*$  в интервал  $d(\Delta a_i^*)$  описываются ступенчатой кривой (гистограммой), изображенной на рис. 4.

Остановимся несколько подробнее на связи между истинным значением  $a$  измеряемой величины и средней величиной  $\bar{a}$ . На рис. 5 приведены положения  $a$  и  $\bar{a}$ , полученного из некоторых измеренных значений  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ .

Мы видим, что даже при фиксированных значениях  $a_1$  и  $a_2$  различные значения  $a_3$  приводят к различному положению  $\bar{a}$  относительно  $a$ . Так как вероятность появления разных значений  $a_3 = a - \Delta a_3^*$  различна



( $\Delta a_3^*$  подчиняется нормальному закону (9)), то и вероятность появления разных значений  $\bar{a}$  также различна — с увеличением величины  $|\bar{a} - a|$  она уменьшается.

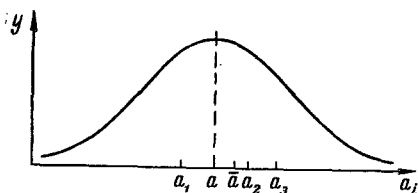


Рис. 5. Взаимное расположение истинного значения  $a$  и среднего значения  $\bar{a}$ , полученных из трех измерений  $a_1, a_2$  и  $a_3$ .

Таким образом, поскольку результаты отдельных измерений носят случайный характер, отклонение

$$\widetilde{\Delta a} = a - \bar{a}, \quad (10)$$

т. е. величина абсолютной погрешности результата серии измерений, также имеет случайный характер, так как оно зависит от вероятности появления того или иного значения  $\bar{a}$ .

При малом числе измерений  $n$  величина отдельного измерения, например  $a_3$ , довольно сильно влияет на величину  $\bar{a}$ . Так же сильно влияют на эту величину  $a$  и значения других измерений ( $a_1$  и  $a_2$ ). Однако при большом числе  $n$  измерений влияние величины отдельного измерения, например  $a_n$ , на величину  $\bar{a}$  становится значительно слабее, и отклонение  $\widetilde{\Delta a}$  можно рассматривать как случайную величину, составленную из малых влияний величин отдельных измерений. Центральная предельная теорема\*)

\*) Центральная предельная теорема Ляпунова [8—17] гласит: Если мы имеем достаточно большое число  $N$  независимых случайных величин, то сумма их будет подчиняться закону нормального распределения даже тогда, когда слагаемые случайные величины не подчиняются нормальному распределению. При этом предполагается, что ни одна из этих слагаемых случайных величин не доминирует над остальными, т. е. не играет преобладающей роли в образовании суммарной случайной величины.

Абсолютная погрешность измерений как раз и является такой случайной величиной, которая состоит из множества других случайных величин (флуктуаций), обусловленных различными причинами.

в этом случае показывает, что распределение случайной величины  $\widetilde{\Delta a}$  — абсолютной погрешности результата серии измерений — описывается нормальным законом (9) с иным значением дисперсии  $\sigma_{\bar{a}}$  \*):

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\bar{a}}}} e^{-\frac{(\widetilde{\Delta a})^2}{2\sigma_{\bar{a}}^2}}. \quad (11)$$

Вместо приближенного равенства (7) можно записать

$$\bar{a} - \Delta a \leq a \leq \bar{a} + \Delta a \quad (12)$$

или

$$a = \bar{a} \pm \Delta a, \quad (13)$$

но величина  $\Delta a$  — оценка абсолютной погрешности результата — остается пока неопределенной.

Следует различать  $\widetilde{\Delta a}$  — случайную величину (возможное значение  $\widetilde{\Delta a}$ ) и  $\Delta a$  — частное значение этой величины, проявившееся в данной серии измерений или заданное для получения определенного значения надежности.

Назовем *доверительным интервалом* интервал

$$(\bar{a} - \Delta a, \bar{a} + \Delta a), \quad (14)$$

в который по определению попадает истинное значение  $a$  измеряемой величины с заданной вероятностью.

*Надежностью* результата серии измерений называется вероятность  $\alpha$  того, что истинное значение  $a$  измеряемой величины попадает в данный доверительный интервал. Эта величина  $\alpha$  выражается или в долях единицы, или в процентах.

Чем больше величина доверительного интервала  $(\bar{a} - \Delta a, \bar{a} + \Delta a)$ , т. е. чем больше задаваемая погрешность результата измерений  $\Delta a$ , тем с большей надежностью искомая величина  $a$  попадает в этот интервал.

Естественно, что величина надежности  $\alpha$  будет зависеть от числа  $n$  произведенных измерений, а также от величины задаваемой погрешности  $\Delta a$ . Так, например, при  $n \geq 30$ , выбирая  $\Delta a$  равным значению  $\sigma_{\bar{a}}$ , мы получаем величину надежности  $\alpha \approx 0,68$  (точнее, 0,68269). На рис. 6, а

\* ) Связь между величинами  $\sigma_{\bar{a}}^2$  и  $\sigma^2$  будет показана ниже.

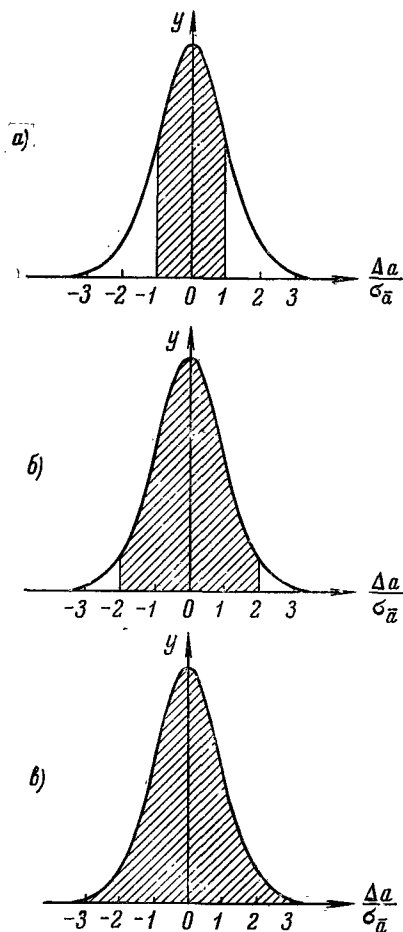


Рис. 6. Значения надежности  $\alpha$  (заштрихованная площадь) при разных

значениях  $k = \frac{\Delta a}{\sigma_{\bar{a}}}$ :

- а)  $k = 1$ ,  $\alpha = 0,68$ ; б)  $k = 2$ ,  $\alpha = 0,95$ ; в)  $k = 3$ ,  $\alpha = 0,997$ .

эта величина надежности изображена заштрихованной площадью под кривой нормального распределения (вся площадь под кривой, как указывалось выше, равна единице). Другими словами, за пределы доверительного интервала  $(\bar{a} - \sigma_{\bar{a}}, \bar{a} + \sigma_{\bar{a}})$  при повторении серий по  $n$  измерений попадет  $(1 - \alpha)$  доля от числа всех серий, т. е. примерно в 32% всех серий  $|\widetilde{\Delta a}|$  будет больше  $\Delta a$ . Аналогично, выбирая  $\Delta a$  равным значению  $2\sigma_{\bar{a}}$ , мы получаем значение надежности, равное  $\alpha = 0,95$  (точнее, 0,95450), за пределы доверительного интервала  $(\bar{a} - 2\sigma_{\bar{a}}, \bar{a} + 2\sigma_{\bar{a}})$  выпадет 5% результатов всех серий (рис. 6, б). Наконец, выбирая  $\Delta a$  равным значению  $3\sigma_{\bar{a}}$ , мы получим для надежности значение  $\alpha \approx 0,997$  (точнее, 0,99730), т. е. за пределы доверительного интервала  $(\bar{a} - 3\sigma_{\bar{a}}, \bar{a} + 3\sigma_{\bar{a}})$  выпадет 0,3% результатов всех серий (рис. 6, в).

Приведем еще один пример, иллюстрирующий связь размера доверительного интервала с надежностью. При обработке деталей на станках в устойчивом технологическом режиме распределение погрешностей подчиняется нормальному закону [16, 17]. В этом случае, если величину  $\widetilde{\Delta a}$  в (11) принять за допускаемую погрешность (допуск) при обработке деталей (ср. рис. 6, в, где  $\Delta a = = 3\sigma$ ), то, повышая требования к точности обработки некоторого количества особо ответственных деталей (т. е. уменьшая величину допуска  $\Delta a$ , например, до  $\Delta a = \sigma$ , ср. рис. 6, а) при сохранении технологии обработки, мы уменьшаем надежность обработки и увеличиваем процент деталей, идущих в брак (или во 2-й сорт). Наоборот, понижение требований к точности обработки увеличивает надежность и уменьшает процент брака \*).

Перейдем теперь к рассмотрению  $\Delta a$  — оценки погрешности результата серии измерений, оставшейся до сих пор неопределенной. Из рис. 6 видно, что величина  $\Delta a$  может быть представлена в виде  $\Delta a = k_{\alpha}\sigma_{\bar{a}}$ , где  $k_{\alpha}$  — некоторый численный коэффициент, зависящий от надежности  $\alpha$ . Этот коэффициент может быть принят за меру, характеризующую величину доверительного интервала, а следовательно, и величину  $\Delta a$  абсолютной погрешности

\*) Это обстоятельство еще раз подчеркивает, как важно уметь правильно сформулировать требования, предъявляемые к точности изготовления деталей, приборов и т. п. (ср. примечания на стр. 9 и 10).

результата измерений при заданной надежности  $\alpha$ . Остается установить, как выражается величина  $\sigma_{\bar{a}}$  через измеряемые величины.

В случае большого числа измерений ( $n \rightarrow \infty$ ) величина дисперсии  $\sigma^2$ , входящая в закон (9), оказывается равной так называемому среднему квадрату погрешности отдельного измерения  $\Delta S_n^{*2}$  \*)

$$\Delta S_n^{*2} = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a_i^*)^2}{n}. \quad (15)$$

Это выражение нуждается в некотором преобразовании. Дело в том, что, как правило, точное значение искомой величины  $a$  нам неизвестно, и поэтому погрешности  $\Delta a_i^*$  не могут быть вычислены. Вместо погрешностей  $\Delta a_i^*$  находят обычно «измеряемые» абсолютные погрешности  $\Delta a_i$ , равные

$$\Delta a_i = \bar{a} - a_i. \quad (16)$$

Все множество возможных значений  $\Delta a_i$  (т. е. генеральная совокупность) распределено по закону, аналогичному закону (9):

$$y(\Delta a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\bar{a}-a_i)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(\Delta a_i)^2}{2\sigma^2}}. \quad (17)$$

Значение дисперсии  $\sigma^2$  в этом законе совпадает со значением дисперсии в законе (9).

Следует отметить, однако, что если при конечном числе  $n$  измерений все значения  $\Delta a_i^*$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) являются независимыми (поскольку все измерения  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) полагаются независимыми), то из  $n$  величин  $\Delta a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) независимыми являются лишь  $n - 1$  величин, так как среднееарифметическое значение  $\bar{a}^{**}$ ), входящее в определение погрешностей  $\Delta a_i$  (см. (16)),

\*) Это строго доказывается в курсах по теории вероятностей, например [8—17]. См. также Приложение I.

\*\*\*) При конечном числе  $n$  величина  $\bar{a}$  называется *выборочным средним* или *средним выборки* (в отличие от генерального среднего, получающегося при  $n = \infty$ ). Выборка означает, что из бесконечного множества (генеральной совокупности) возможных значений  $a_i$  берется наугад  $n$  значений.

само определяется из этих же  $n$  измерений  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ), и поэтому погрешности  $\Delta a_i$  подчиняются очевидному тождеству

$$\sum_{i=1}^n \Delta a_i \equiv 0. \quad (18)$$

Действительно, по определению погрешностей  $\Delta a_i$  имеем

$$\begin{aligned} \Delta a_1 &= \bar{a} - a_1, \\ \Delta a_2 &= \bar{a} - a_2, \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta a_n &= \bar{a} - a_n; \end{aligned}$$

суммируя левые и правые части этих равенств, получаем

$$\sum_{i=1}^n \Delta a_i = n\bar{a} - \sum_{i=1}^n a_i,$$

и по определению среднеарифметического значения (3)

$$\sum_{i=1}^n \Delta a_i = \sum_{i=1}^n a_i - \sum_{i=1}^n a_i \equiv 0.$$

В силу этого, когда истинное значение  $a$  неизвестно, оценкой дисперсии  $\sigma^2$  является так называемая *выборочная дисперсия* или дисперсия выборки \*)  $\Delta S_n^2$ :

$$\Delta S_n^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a_i)^2}{n-1}. \quad (19)$$

Подчеркнем, что при ограниченном числе  $n$  величина  $\Delta S_n^2$  является лишь оценкой дисперсии  $\sigma^2$ , а не равна ей. Здесь следует отметить также, что из измерений мы можем непосредственно определить лишь величину  $\Delta S_n^2$ , а не  $\sigma^2$ .

Корень квадратный из выборочной дисперсии определяет так называемую *среднеквадратичную погрешность*

---

\*) См. сноску на предыдущей странице.

отдельного измерения

$$\Delta S_n = + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a_i)^2}{n-1}}. \quad (20)$$

Покажем теперь, как найти оценку погрешности результата всей серии из  $n$  измерений, т. е. величину

$$\Delta a = a - \bar{a} \quad (10)$$

с заданным значением надежности  $\alpha$ .

Для этого найдем прежде всего, как связаны между собой дисперсии  $\sigma_{\bar{a}}^2$  и  $\sigma^2$ , т. е. дисперсии распределений погрешностей результата серии измерений и погрешностей отдельных измерений.

Для этой цели преобразуем соотношение (15):

$$\begin{aligned} \Delta S_n^{**} &= \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a_i^*)^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a - a_i)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a - \bar{a} + \bar{a} - a_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\widetilde{\Delta a} + \Delta a_i)^2 = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \widetilde{\Delta a}^2 + \frac{2\widetilde{\Delta a}}{n} \sum_{i=1}^n \Delta a_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta a_i^2 = \\ &= \widetilde{\Delta a}^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta a_i^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$\Delta S_n^{*2} = \widetilde{\Delta a}^2 + \frac{n-1}{n} \Delta S_n^2, \quad (21)$$

где  $\Delta S_n^2$  определяется соотношением (19). При этом мы учитываем соотношение (18).

Допустим, что, повторяя серии измерений по  $n$  измерений в каждой  $N$  раз, мы получили средние значения  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_N$  и погрешности результатов измерений:

$$(\Delta a)_1 = (a - \bar{a}_1), \quad (\Delta a)_2 = (a - \bar{a}_2), \dots, (\Delta a)_N = (a - \bar{a}_N).$$

Сравнивая распределения (11) и (9), мы можем записать

$$\Delta S_a^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta a)_j^2 = \overline{(\Delta a)^2}^*.$$

При большом числе  $N$  серий величина  $\Delta S_a^2 \rightarrow \sigma_a^2$ :

$$\sigma_a^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta S_a^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\Delta a)_j^2$$

аналогично тому, как при большом числе  $n$   $\Delta S_n^2 \rightarrow \sigma^2$  (см. стр. 22), и, усредняя равенство (21) по большому числу  $N$  серий, получаем

$$\Delta S_a^2 = \overline{(\Delta a)^2} = \overline{\Delta S_n^{*2}} - \frac{n-1}{n} \overline{\Delta S_n^2}. \quad (22)$$

Как отмечалось выше, при большом числе измерений  $n$  в каждой серии

$$\Delta S_n^{*2} \rightarrow \sigma^2 \text{ и } \Delta S_n^2 \rightarrow \sigma^2$$

для любой из  $N$  серий, и поэтому, переходя в (22) к пределам  $n \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$ , получаем связь между дисперсиями  $\sigma_a^2$  и  $\sigma^2$ :

$$\sigma_a^2 = \sigma^2 - \frac{n-1}{n} \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad (23)$$

т. е. дисперсия  $\sigma_a^2$  результата серии из  $n$  измерений в  $n$  раз меньше дисперсии  $\sigma^2$  отдельных измерений.

При ограниченном числе  $n$  измерений приближенным выражением  $\sigma_a^2$  будет  $\Delta S_a^2$ :

$$\Delta S_a^2 = \frac{\Delta S_n^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta a_i^2}{n(n-1)}. \quad (24)$$

Отсюда *среднеквадратичная погрешность результата серии измерений* равна

$$\Delta S_a = \sqrt{\Delta S_a^2} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (25)$$

\*) Черта сверху означает усреднение по всем  $N$  сериям.



Оценки дисперсий  $\sigma^2$ , полученные в (15) и (19), и дисперсии  $\sigma_a^2$ , полученные в (24), являются предельными, справедливыми лишь при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. при больших  $n$ .

При малых значениях  $n$  эти оценки  $\Delta S_n^2$  и  $\Delta S_a^2$ , сами являющиеся случайными величинами, в лучшем случае определяют лишь порядок величины дисперсий. (Подробнее об этом см. в § 3.)

Поэтому при нахождении границ доверительного интервала для величины  $a$  при малых значениях  $n$  мы не можем пользоваться коэффициентом  $k_\alpha = \frac{\Delta a}{\sigma_a}$  (см. стр. 21), поскольку величина  $\sigma_a$  нам неизвестна.

Для того чтобы получить оценки границ доверительного интервала для  $a$  в этом случае (при малых  $n$ ), приходится ввести новый коэффициент  $t_\alpha$ . Этот коэффициент был предложен в 1908 г. английским математиком и химиком В. С. Госсетом, публиковавшим свои работы под псевдонимом «Стьюдент» — студент, и получил впоследствии название *коэффициента Стьюдента*.

Рассмотрим случайную величину  $t$ , равную отношению случайных величин  $\widetilde{\Delta a}$  и  $\Delta S_a$ :

$$t = \frac{\widetilde{\Delta a}}{\Delta S_a} = \frac{a - \bar{a}}{\Delta S_a},$$

где  $\Delta S_a$  — среднеквадратичная погрешность результата серии измерений, определяемая соотношением (25). При этом предполагается, что случайная величина  $\widetilde{\Delta a}$  распределена по нормальному закону (11).

Если обозначить вероятность появления того или иного значения  $t$  в пределах  $t - \frac{1}{2} dt$ ,  $t + \frac{1}{2} dt$  через  $f(t) dt$ , то, как строго доказывается в курсах по теории вероятностей и математической статистики [4, 6, 9—16], плотность распределения вероятности появления величины  $t$  имеет вид

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \sqrt{n-1} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{n/2}}. \quad (26)$$

Это распределение названо распределением Стьюдента. Здесь  $\Gamma(x)$  — гамма-функция, являющаяся обобщением

понятия факториала и обладающая рекуррентным свойством:  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ . Для целых чисел  $n$   $\Gamma(n+1) = n!$ . Для полуцелых значений аргумента:  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  и т. д. Множители при  $\frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{n/2}}$  в  $f(t)$  выбраны так, чтобы площади под любой кривой  $f(t)$  равнялись единице.

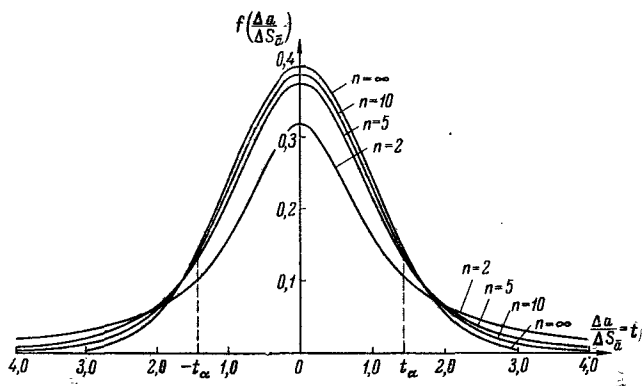


Рис. 7. Кривые распределения Стьюдента для различных значений  $n$ :  $n = 2, 5, 10$  и  $\infty$ . Здесь же нанесены границы доверительного интервала —  $t_\alpha, t_\alpha$  для некоторого значения  $\alpha$  (различного для разных кривых).

На рис. 7 приведены распределения Стьюдента для разных значений  $n$ . При  $n \rightarrow \infty$  (практически при  $n \geq 20$ ) распределение Стьюдента (26) переходит в нормальное распределение (11) с единичной дисперсией.

Распределение Стьюдента позволяет оценить величину надежности  $\alpha$  по заданному значению  $\Delta a$  или, наоборот, по заданной величине надежности  $\alpha$  результата найти величину погрешности результата  $\Delta a$ .

Действительно, если взять на оси  $t$  некоторое значение  $t_\alpha$ , то величина надежности  $\alpha$  будет определяться площадью, ограниченной осью  $t$ , ординатами  $-t_\alpha$  и  $t_\alpha$  и кривой  $f(t)$ , аналогично тому как определялась надежность на стр. 21.

Следовательно, при недостаточно большом числе измерений (практически при  $n < 20$ ) при расчете  $\Delta a$  при

заданной надежности  $\alpha$  необходимо вводить вместо коэффициентов  $k_\alpha$ , рассмотренных на стр. 21, коэффициенты *Стьюдента*  $t_\alpha$ , зависящие от числа произведенных измерений  $n$  и от величины надежности  $\alpha$ :

$$t_\alpha(n) = \frac{\Delta a}{\Delta S_{\bar{a}}} = \frac{\Delta a}{\Delta S_n / \sqrt{n}}, \quad (27)$$

где  $\Delta S_{\bar{a}}$  определяется соотношением (25), а  $\Delta S_n$  — соотношением (20). При  $n \rightarrow \infty$  коэффициенты  $t_\alpha$  переходят в коэффициенты  $k_\alpha$ .

В табл. 1 приведены значения коэффициентов Стьюдента  $t_\alpha$  для разных значений надежности  $\alpha$  при разных значениях  $n$  (более полная таблица приведена в Приложении VII).

Таблица 1  
Значения коэффициентов Стьюдента  $t_\alpha$

$n \backslash \alpha$	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	6,31	12,71	31,82	63,66	636,62
3	2,92	4,30	6,96	9,92	31,60
4	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	2,02	2,57	3,36	4,03	6,86
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	1,90	2,36	3,00	3,50	5,40
9	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78

Задавая вероятность того, что истинное значение измеряемой величины  $a$  попадает в данный доверительный интервал, т. е., другими словами, задавая надежность  $\alpha$ , равную определенной величине (например,  $\alpha = 0,95$ ), по числу проведенных измерений  $n$  (например,  $n = 7$ ) определяем по табл. 1 значение коэффициента Стьюдента  $t_\alpha$  для этих данных. Оно равно  $t_\alpha = 2,45$ . Тогда, определив предварительно  $\Delta S_{\bar{a}}$ , используя формулу (25), найдем погрешность  $\Delta a$ :

$$\Delta a = t_\alpha \cdot \Delta S_{\bar{a}}.$$

После этого результат измерений можно записать в виде

$$\bar{a} - \Delta a \leq a \leq \bar{a} + \Delta a$$

или

$$a = \bar{a} \pm \Delta a,$$

что означает, что истинное значение величины  $a$  попадает в доверительный интервал  $(\bar{a} - \Delta a, \bar{a} + \Delta a)$  с надежностью, равной  $\alpha$ .

Рассмотрим применение табл. 1 на конкретном примере.

Пусть, проведя пять измерений толщины пластины микрометром, мы получили

$$x = 2,16 \text{ мм и } \Delta S_n = 0,05 \text{ мм.}$$

Тогда

$$\Delta S_a = \frac{\Delta S_n}{\sqrt{n}} = \frac{0,05}{2,24} = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

Задавая  $\alpha = 0,95$ , мы получаем из табл. 1 значение  $t_\alpha$  при  $n = 5$  и  $\alpha = 0,95$ , равное 2,78. Тогда

$$\Delta x = t_\alpha \cdot \Delta S_a = 2,78 \cdot 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ мм} = 6 \cdot 10^{-2} \text{ мм}$$

и

$$(2,16 - 0,06) \text{ мм} < x < (2,16 + 0,06) \text{ мм} *$$

или

$$2,10 \text{ мм} < x < 2,22 \text{ мм при } \alpha = 0,95.$$

Следует отметить, что величина абсолютной погрешности  $\Delta a$  результата измерений сама по себе еще не определяет точности измерений. Пусть, например, измеряя длину карандаша рулеткой, разделенной на сантиметры, мы получили, что эта длина равна  $l = (18,0 \pm 0,5) \text{ см}$  ( $\pm 0,5 \text{ см}$  составляет погрешность ленты рулетки). Если при помощи этой же рулетки мы измерим диаметр карандаша, то получим  $d = (0,5 \pm 0,5) \text{ см}$ . Хотя абсолютная погрешность измерений одинакова, точность измерений различна. Если в первом случае измерения достаточно точны, то во втором случае измерения позволяют судить лишь о порядке величины.

Для оценки точности измерений вводится понятие относительной погрешности  $\varepsilon$ , равной отношению абсолютной погрешности  $\Delta a$  результата измерений к результату измерений  $\bar{a}$ :

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta a}{\bar{a}}. \quad (28)$$

\*) Так как погрешность микрометра меньше 0,005 мм.

Обычно эта погрешность выражается в процентах

$$\varepsilon = \pm \frac{\Delta a}{\bar{a}} \cdot 100\% . \quad (29)$$

За меру точности измерения принимают величину, обратную  $\varepsilon$ . Следовательно, чем меньше относительная погрешность  $\varepsilon$ , тем выше точность измерений.

Для облегчения расчетов среднего значения  $\bar{a}$  и погрешностей  $\Delta S_n$  и  $\Delta S_{\bar{a}}$  следует применять следующие соотношения:

$$\bar{a} \equiv a_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_0) \quad (30)$$

и

$$\Delta S_a^2 \equiv \frac{1}{n(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^n (a_i - a_0)^2 - n(\bar{a} - a_0)^2 \right], \quad (31)$$

где  $a_0$  — произвольное число, выбираемое таким образом, чтобы разности  $a_i - a_0$  содержали в основном не более двух значащих цифр.

Соотношения (30) и (31) легко доказать. Действительно,

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_0 + a_i - a_0) = \frac{na_0}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - a_0)$$

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \Delta S_a^2 &= \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{a} - a_i)^2}{n(n-1)} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (\bar{a} - a_0 + a_0 - a_i)^2 = \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n [(\bar{a} - a_0)^2 + 2(\bar{a} - a_0)(a_0 - a_i) + (a_0 - a_i)^2] = \\ &= \frac{1}{n(n-1)} \left[ n(\bar{a} - a_0)^2 + 2(\bar{a} - a_0) \sum_{i=1}^n (a_0 - a_i) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n (a_0 - a_i)^2 \right] \end{aligned}$$

и, так как

$$2(\bar{a} - a_0) \sum_{i=1}^n (a_0 - a_i) = 2(\bar{a} - a_0) \left( \sum_{i=1}^n a_0 - \sum_{i=1}^n a_i \right) = \\ = -2n(\bar{a} - a_0)^2,$$

получаем искомую формулу (31).

Рассмотрим на числовом примере применение выведенных выше формул и влияние числа измерений на точность результата. Для этого сравним погрешности результата измерений, полученные с учетом ограниченного числа измерений, т. е. рассчитанные с помощью коэффициента Стьюдента, с результатами, рассчитанными с помощью нормального распределения, полагая, что в последнем можно применять предельное соотношение  $\Delta S_n^2 = \sigma^2$ .

**Обработка измерений диаметра цилиндра.** Проведем ее для двух значений надежности  $\alpha = 0,95$  и  $\alpha = 0,99$ . Десять значений диаметра цилиндра приведены в табл. 2. Измерения проводились микрометром с ценой деления 0,01 мм.

Таблица 2

$i$	$d_i$ , мм	$i$	$d_i$ , мм
1	14,85	6	14,81
2	14,80	7	14,80
3	14,84	8	14,85
4	14,81	9	14,84
5	14,79	10	14,80

1. Возьмем пять первых измерений из табл. 2 и найдем среднее значение диаметра и границы доверительного интервала из этих измерений. Выберем произвольное число  $d_0$ , удобное для расчетов (пусть  $d_0 = 14,80$  мм); вычислим разности  $d_i - d_0$  и квадраты этих разностей. Результаты приведены в табл. 3.

Найдем среднее значение  $\bar{d}$ :

$$\bar{d} = d_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - d_0) = 14,80 + \frac{0,09}{5} = 14,818 \text{ мм}, \\ \bar{d} - d_0 = 0,018 \text{ мм}.$$

Таблица 3

$i$	$d_i, \text{ мм}$	$d_i - d_0, \text{ мм}$	$(d_i - d_0)^2, \text{ мм}^2$
1	14,85	0,05	0,0025
2	14,80	0,00	0,0000
3	14,84	0,04	0,0016
4	14,81	0,01	0,0001
5	14,79	-0,01	0,0001
Сумма		0,09	0,0043

Средний квадрат погрешности серии из пяти измерений равен

$$\begin{aligned} \Delta S_{\bar{d}}^2 &= \frac{1}{n(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^n (d_i - d_0)^2 - n(\bar{d} - d_0)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{5 \cdot 4} (0,0043 - 5 \cdot 0,000324) = \frac{27}{20} \cdot 10^{-4} = 1,35 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^2 \end{aligned}$$

Извлекая квадратный корень из  $\Delta S_{\bar{d}}^2$ , получим

$$\Delta S_{\bar{d}} = 1,16 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

Для надежности  $\alpha = 0,95$  и  $n = 5$  из табл. 1 находим значение коэффициента Стьюдента  $t_\alpha = 2,78$  и вычисляем абсолютную погрешность результата измерений

$$\Delta d_{\bar{d}} = t_\alpha \cdot \Delta S_{\bar{d}} = 2,78 \cdot 0,0116 = 0,0322 \text{ мм.}$$

Тогда результат измерения можно представить в виде

$$(14,818 - 0,032) \text{ мм} \leq d \leq (14,818 + 0,032) \text{ мм.}$$

Или, сохраняя в величине погрешности одну значащую цифру,

$$(14,82 - 0,03) \text{ мм} \leq d \leq (14,82 + 0,03) \text{ мм}^*),$$

т. е.

$$14,79 \text{ мм} \leq d \leq 14,85 \text{ мм}$$

\*) При этом мы предполагаем, что погрешность микрометра меньше 0,03 мм.

или

$$d = (14,82 \pm 0,03) \text{ мм.} \quad (\text{а})$$

Относительная погрешность

$$\varepsilon_d = \pm \frac{0,03}{14,82} \cdot 100\% \approx \pm \frac{3}{15}\% = \pm 0,2\%.$$

Теперь найдем абсолютную и относительную погрешности для тех же пяти измерений при другом значении надежности:  $\alpha = 0,99$ . По табл. 1 находим для  $n = 5$  и  $\alpha = 0,99$  значение  $t_\alpha = 4,60$ . Тогда

$$\Delta d_{\bar{d}} = t_\alpha \cdot \Delta S_{\bar{d}} = 4,60 \cdot 1,16 \cdot 10^{-2} = 5,34 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

Следовательно,

$$d = (14,82 \pm 0,05) \text{ мм}$$

и

$$\varepsilon_d = \pm \frac{0,05}{14,82} \cdot 100\% \approx \pm \frac{5}{15}\% = \pm 0,3\%. \quad (\text{б})$$

Сравнив результат (б) и (а), мы видим, что границы доверительного интервала при увеличении надежности от  $\alpha = 0,95$  до  $\alpha = 0,99$  возросли.

2. Проведем расчет погрешностей для этих же пяти измерений, незаконно полагая, что  $\sigma^2 = \Delta S_n^2$  (что, конечно, при  $n = 5$  является ошибочным). Для этого воспользуемся кривыми рис. 6. Отношение заштрихованной площади под кривой Гаусса к площади под всей кривой дает величину  $\alpha$ . Полагая величину  $\alpha = 0,95$ , можно найти значение абсциссы, равное  $k_\alpha = \frac{\Delta d_{\bar{d}}}{\Delta S_{\bar{d}}}$ , в нашем случае  $k_\alpha = 1,96$ .

Это дает возможность определить значение абсолютной погрешности результата

$$\begin{aligned} \Delta d &= k_\alpha \cdot \Delta S_{\bar{d}} = 1,96 \cdot 1,16 \cdot 10^{-2} \text{ мм} = 2,27 \cdot 10^{-2} \text{ мм} \approx \\ &\approx 2 \cdot 10^{-2} \text{ мм,} \quad (\text{в}) \end{aligned}$$

где  $\Delta S_{\bar{d}}$  для данного случая было получено в п. 1.

Сравнивая полученный результат (в) с результатом (а), видим, что погрешность получилась меньше примерно на 30%. Принимая данную величину погрешности результата измерения (в), можно найти величину надежности. Для этого положим  $t_\alpha = k_\alpha$  и из табл. 1 получим  $\alpha = 0,87$



вместо заданной величины  $\alpha = 0,95$ . Следовательно при малом числе измерений  $n$  применение закона нормального распределения с  $\sigma^2 = \Delta S_n^2$  вместо распределения Стьюдента при определении абсолютной погрешности результата приводит к уменьшению надежности результата измерений. Полагая  $\alpha = 0,99$ , получаем

$$k_\alpha = 2,58 \text{ и } \Delta d = k_\alpha \cdot \Delta S_{\bar{d}} = 3 \cdot 10^{-2} \text{ мм вместо}$$

$$\Delta d = t_\alpha \cdot \Delta S_d = 5 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

Значение надежности в этом случае понижается до  $\alpha = 0,95$ .

3. Найдем теперь средние значения и погрешности из следующих пяти измерений (6—10), приведенных в табл 2

Таблица 4

$i$	$d_i, \text{ мм}$	$d_i - d_0, \text{ мм}$	$(d_i - d_0)^2, \text{ мм}^2$
1	14,81	+0,01	0,0001
2	14,80	0	0
3	14,85	+0,05	0,0025
4	14,84	+0,04	0,0016
5	14,80	0	0
Сумма		+0,10	+0,0042

$$d_0 = 14,80 \text{ мм,}$$

$$\bar{d} = d_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - d_0) = 14,80 + \frac{0,10}{5} = 14,82 \text{ мм,}$$

$$\bar{d} - d_0 = 0,02 \text{ мм,}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{\bar{d}}^2 &= \frac{1}{n(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^n (d_i - d_0)^2 - n(\bar{d} - d_0)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{20} (0,0042 - 5 \cdot 0,0004) = 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ мм}^2, \end{aligned}$$

$$\Delta S_{\bar{d}} = 1,05 \cdot 10^{-2} \text{ мм.}$$

При  $\alpha = 0,95$  имеем

$$\Delta d_{\bar{d}} = t_{\alpha} \cdot \Delta S_{\bar{d}} = \pm 2,78 \cdot 1,05 \cdot 10^{-2} = 2,92 \cdot 10^{-2} \text{ мм} \simeq \simeq \pm 3 \cdot 10^{-2} \text{ мм},$$

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d_{\bar{d}}}{\bar{d}} \cdot 100\% = \pm \frac{0,03}{14,82} \cdot 100\% = \pm 0,2\%$$

и

$$d = (14,82 \pm 0,03) \text{ мм.}$$

При  $\alpha = 0,99$  получаем

$$\Delta d_{\bar{d}} = t_{\alpha} \cdot \Delta S_{\bar{d}} = \pm 4,60 \cdot 1,05 \cdot 10^{-2} = \pm 4,83 \cdot 10^{-2} \text{ мм} \simeq \simeq \pm 5 \cdot 10^{-2} \text{ мм},$$

$$\varepsilon_d = \frac{\Delta d_{\bar{d}}}{\bar{d}} \cdot 100\% = \pm \frac{0,05}{14,82} \cdot 100\% = \pm 0,3\%$$

и

$$d = (14,82 \pm 0,05) \text{ мм.}$$

Результаты практически не отличаются от результатов, полученных из данных табл. 3 (см. стр. 32 и 33).

Таблица 5

	$d_i - d_0,$ мм	$(d_i - d_0)^2,$ мм <sup>2</sup>
Сумма	+0,19	0,0085

Найдем теперь погрешность результата всей серии из десяти измерений, приведенных в табл. 3 и 4. В этом случае имеем табл. 5, полученную суммированием последних строчек табл. 3 и 4.

$$d_0 = 14,80 \text{ мм},$$

$$\bar{d} = d_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (d_i - d_0) = 14,80 + \frac{1}{10} \cdot 0,19 = 14,819 \text{ мм},$$

$$\bar{d} - d_0 = 0,019 \text{ мм},$$

$$\Delta S_{\bar{d}}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^n (d_i - d_0)^2 - n(\bar{d} - d_0)^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{90} (0,0085 - 10 \cdot 0,000361) = \frac{49}{90} \cdot 10^{-4} = 54 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2,$$

$$\Delta S_{\bar{d}} = 7,35 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

При  $\alpha = 0,95$  имеем

$$\Delta d_{\bar{a}} = t_{\alpha} \cdot \Delta S_{\bar{a}} = \pm 2,26 \cdot 7,35 \cdot 10^{-3} = \pm 1,66 \cdot 10^{-2} \text{ мм} = \\ = \pm 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ мм},$$

$$\varepsilon_d = \pm \frac{1,7 \cdot 10^{-2}}{14,82} \cdot 100 \% = \pm 0,11 \%,$$

$$d = (14,819 \pm 0,017) \text{ мм}.$$

При  $\alpha = 0,99$  получаем

$$\Delta d_{\bar{a}} = t_{\alpha} \cdot \Delta S_{\bar{a}} = \pm 3,25 \cdot 7,35 \cdot 10^{-3} = \pm 2,39 \cdot 10^{-2} \text{ мм} = \\ = \pm 2,4 \cdot 10^{-2} \text{ мм},$$

$$\varepsilon_d = \pm \frac{2,4 \cdot 10^{-2}}{14,82} \cdot 100 \% = \pm 0,16 \%,$$

$$d = (14,819 \pm 0,024) \text{ мм}.$$

Мы видим, что абсолютная и относительная погрешности результата десяти измерений стали почти в два раза меньше погрешностей пяти измерений.

Применение нормального распределения с  $\sigma^2 = \Delta S_{\bar{a}}^2$  дает в случае  $\alpha = 0,95$   $k_{\alpha} = 1,96$  и  $\Delta d_{\bar{a}} = 1,4 \cdot 10^{-2}$  мм, а величина надежности понижается до  $\alpha = 0,91$ ; в случае  $\alpha = 0,99$  получаем  $k_{\alpha} = 2,58$  и  $\Delta d_{\bar{a}} = 1,9 \cdot 10^{-2}$  мм, а величина надежности понижается до  $\alpha = 0,97$ .

Как видно из этих примеров, с ростом числа измерений различие между результатами, вычисленными по распределению Стьюдента и по нормальному распределению уменьшается (см. также рис. 7).

### § 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕЛИЧИНЫ ДИСПЕРСИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В некоторых случаях приходится определять не среднее значение измеряемой величины, а разброс отдельных измерений относительно этой средней величины, характеризуемый величиной дисперсии распределения  $\sigma^2$ .

Немецкий оптик Э. Аббе в 1863 г. получил закон распределения величины  $\chi^2$ , связанной с дисперсией. Это закон получил название  $\chi^2$ -распределения (хи — квадрат распределения). Работа Аббе осталась незамеченной

и в 1900 г.  $\chi^2$ -распределение было вновь открыто английским математиком и биологом К. Пирсоном.

Если обозначить через

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i - \bar{a}}{\sigma} \right)^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \Delta S_n^2, \quad (32)$$

то величина  $\chi^2$ , связанная с дисперсией  $\sigma^2$ , будет распределяться по следующему закону:

$$\varphi(\chi^2) = \frac{1}{2^{f/2} \Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \cdot (\chi^2)^{\frac{f-2}{2}} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} \quad (0 \leq \chi^2 < \infty), \quad (33)$$

где  $f$  — «число степеней свободы» этого распределения;  $f = n - 1$ , если  $\Delta S_n$  определяется соотношением (20).

Аналогично, если определить  $\chi^2$  иным образом:

$$\chi^{*2} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i - a}{\sigma} \right)^2 = \frac{n \Delta S_n^{*2}}{\sigma^2}, \quad (34)$$

где  $\Delta S_n^{*2}$  определяется соотношением (15), то и эта величина  $\chi^{*2}$  будет распределяться по закону (33) с  $f = n$ .

На рис. 8а приведены кривые  $\varphi(\chi^2)$  для разных значений  $f$ . Эти кривые асимметричны, причем асимметрия особенно резко выражена при малых значениях параметра  $f$ . При  $f = 1$  кривая уходит в бесконечность при  $\chi^2 = 0$ ; при  $f = 2$  кривая при  $\chi^2 = 0$  достигает максимального значения, равного 0,5; при  $f > 2$  кривые имеют максимум при  $\chi_{\max}^2 = (f - 2)$ . При больших значениях  $f$   $\chi^2$ -распределение переходит в нормальное распределение

$$y(V\sqrt{2\chi^2}) = \frac{1}{V\sqrt{2\pi}\sigma_\chi} \cdot e^{-\frac{(V\sqrt{2\chi^2} - V\sqrt{2f-1})^2}{2\sigma_\chi^2}}$$

со средним значением  $\sqrt{2f-1}$  и дисперсией  $\sigma_\chi^2 = 1$ .

Применяя соотношения (32) или (34), можно записать

$$\sigma^2 = \frac{f}{\chi^2} \Delta S_n^2 = \gamma^2 \Delta S_n^2,$$

где

$$\gamma^2 = \frac{f}{\chi^2},$$

но и после этого величина  $\sigma^2$  остается неизвестной, так как значение  $\chi^2$ , входящей в это равенство, а следовательно и значение коэффициента  $\gamma^2$  остаются неизвестными. Тем не менее с помощью  $\chi^2$ -распределения можно найти границы доверительного интервала для  $\sigma^2$ . Для этой цели на

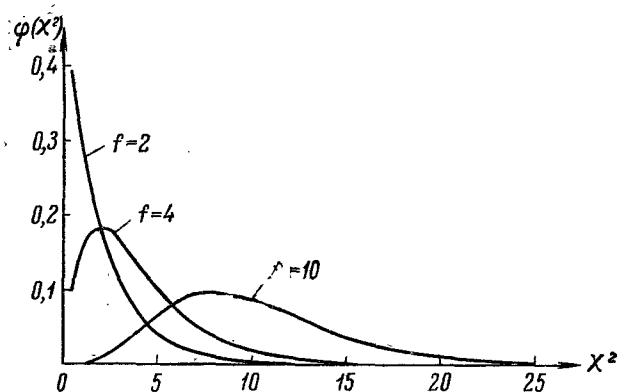


Рис. 8а. Кривые  $\chi^2$ -распределения для разных степеней свободы  $f$ .

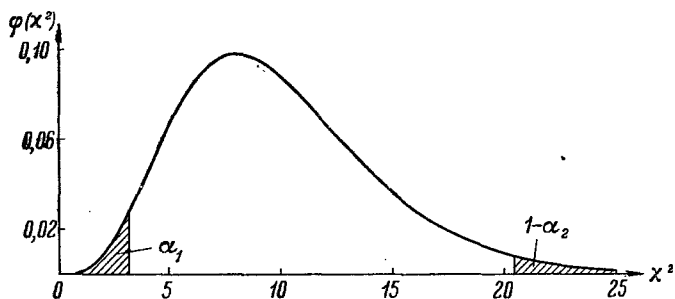


Рис. 8б. Определение границ доверительного интервала для оценки дисперсии  $\sigma^2$  при значении надежности  $\alpha = 1-2\alpha_1$ .

необходимо определить такие значения  $\chi_2^2(f)$  и  $\chi_1^2(f)$ , которые выделяют  $\alpha$ -долю площади под соответствующей  $\varphi(\chi^2)$  кривой (рис. 8б). Эти значения  $\chi_2^2(f)$  и  $\chi_1^2(f)$  определяют величины соответствующих им  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_2^2$ . Таким образом получаем два неравенства, обуславливающих один

ковую надежность определения границ доверительного интервала для  $\sigma^2$  с двух сторон (слева и справа):

$$\chi^2 = \frac{f \Delta S_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_1^2 = \frac{f}{\gamma_2^2}$$

с надежностью

$$\alpha_1 = \frac{1 - \alpha}{2}, \quad (35)$$

$$\chi^2 = \frac{f \Delta S_n^2}{\sigma^2} \leq \chi_2^2 = \frac{f}{\gamma_1^2}$$

с надежностью

$$\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = 1 - \frac{1 - \alpha}{2} = \frac{1 + \alpha}{2}. \quad (36)$$

Из неравенств (35) и (36) получаем, что вероятность попадания  $\chi^2$  в интервал  $(\chi_1^2, \chi_2^2)$

$$\chi_1^2 \leq \chi^2 \leq \chi_2^2,$$

т. е.

$$\frac{1}{\gamma_2^2} \leq \frac{\Delta S_n^2}{\sigma^2} \leq \frac{1}{\gamma_1^2}$$

или

$$\gamma_1^2 \leq \frac{\sigma^2}{\Delta S_n^2} \leq \gamma_2^2,$$

равна разности вышеупомянутых площадей  $\alpha_2 - \alpha_1 = \alpha$ . Таким образом, мы находим, что неравенство

$$\gamma_1^2 \Delta S_n^2 \leq \sigma^2 \leq \gamma_2^2 \Delta S_n^2 \quad (37)$$

выполняется с надежностью  $\alpha$ .

Неравенство (37) можно переписать в виде

$$\gamma_1 \Delta S_n \leq \sigma \leq \gamma_2 \Delta S_n$$

с этой же надежностью  $\alpha$ .

Аналогичным образом можно оценить и дисперсию окончательного результата. Так как

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \Delta S_a^2 = \frac{\Delta S_n^2}{n},$$

Таблица 6

$f$	$\alpha = 0,90$		$\alpha = 0,95$		$\alpha = 0,99$	
	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$
1	0,260	254	0,199	1018	0,127	25464
2	0,334	19,5	0,271	39,5	0,189	199
3	0,384	8,53	0,321	13,9	0,234	41,8
4	0,422	5,63	0,359	8,26	0,269	19,3
5	0,452	4,36	0,390	6,02	0,299	12,1
6	0,476	3,67	0,415	4,85	0,324	8,88
7	0,498	3,23	0,437	4,14	0,345	7,08
8	0,516	2,93	0,456	3,67	0,364	5,95
9	0,532	2,71	0,473	3,33	0,382	5,19
10	0,546	2,54	0,488	3,08	0,397	4,64

ТО

$$\gamma_1^2 \Delta S_{\bar{a}}^2 \leq \sigma_a^2 \leq \gamma_2^2 \Delta S_{\bar{a}}^2$$

и

$$\gamma_1 \Delta S_{\bar{a}} \leq \sigma_a \leq \gamma_2 \Delta S_{\bar{a}}.$$

В табл. 6 приведены значения коэффициентов  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_2^2$  для различных значений параметра  $f$  и надежности  $\alpha$ \*) Более полная таблица приведена в Приложении VIII

Приведем пример, иллюстрирующий, как пользоваться таблицей. В серии из десяти измерений диаметра было получено значение  $\Delta S_{\bar{a}}^2 = 5,4 \cdot 10^{-5} \text{ мм}^2$ . Найдем величину дисперсии  $\sigma^2$ . Из табл. 6 находим при  $f = n - 1 = 9$  для  $\alpha = 0,90$   $\gamma_1^2 = 0,532$  и  $\gamma_2^2 = 2,71$ . Следовательно,

$$0,532 \cdot 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2 \leq \sigma^2 \leq 2,71 \cdot 5,4 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2,$$

т. е.

$$28,7 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2 \leq \sigma^2 \leq 146 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2.$$

Отсюда

$$5,4 \cdot 10^{-3} \text{ мм} \leq \sigma \leq 12,1 \cdot 10^{-3} \text{ мм}.$$

Аналогично для  $\alpha = 0,95$  получаем  $\gamma_1^2 = 0,473$ ,  $\gamma_2^2 = 3,33$  и

$$25,5 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2 \leq \sigma^2 \leq 180 \cdot 10^{-6} \text{ мм}^2$$

\*) Коэффициенты  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_2^2$  рассчитаны по соответствующим значениям  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$ , приведенным в таблицах [21]. Большие значения  $\gamma_2^2$  уточнены при помощи таблиц [22].

и

$$5,05 \cdot 10^{-3} \text{ мм} \leq \sigma \leq 13,4 \cdot 10^{-3} \text{ мм.}$$

Примером, иллюстрирующим применение полученных выше формул для определения разброса результатов отдельных измерений (дисперсии), может служить обработка результатов наблюдений броуновского движения частицы.

### Обработка результатов наблюдений броуновского движения частицы

Броуновским движением называется движение взвешенной в жидкости частицы малых размеров под действием ударов молекул этой жидкости. Поскольку тепловое

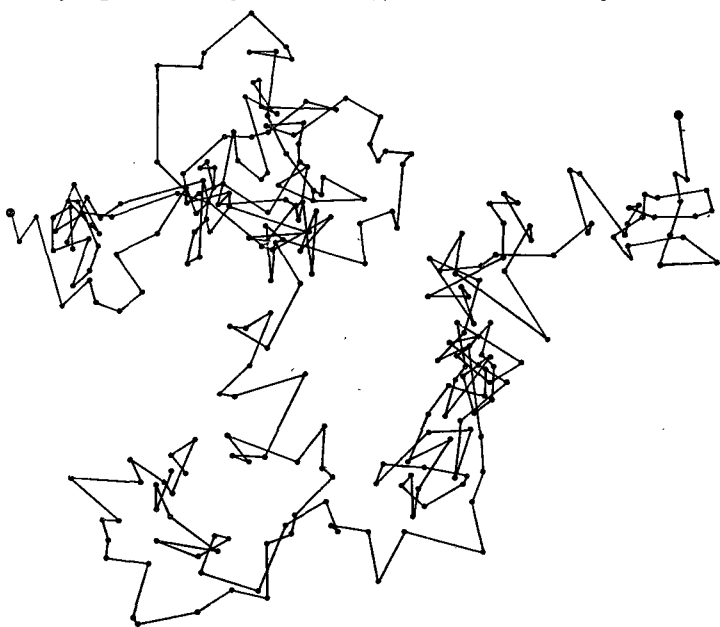


Рис. 9. Последовательные положения броуновской частицы через равные промежутки времени. Точки соединены отрезками прямых.

движение молекул является хаотичным, то суммарная сила ударов молекул о броуновскую частицу, а вместе с ней и движение броуновской частицы также будут хаотичными.



А. Эйнштейн в 1905 г. установил связь между средним квадратом проекции перемещения броуновской частицы на любое направление в горизонтальной плоскости  $\overline{\Delta x^2}$  \*) за время  $\Delta t$ , коэффициентом диффузии  $D$  и интервалом

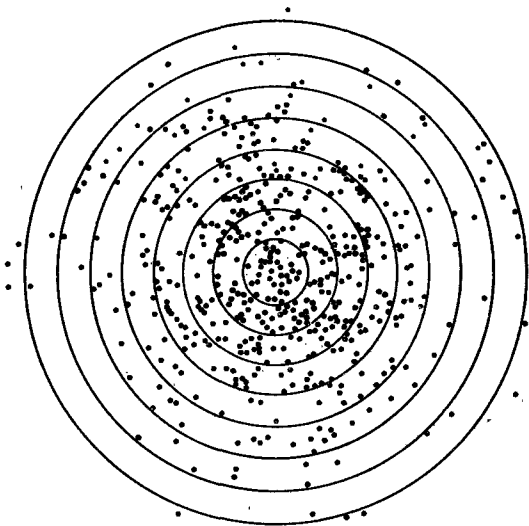


Рис. 10. Положения концов векторов перемещений, соответствующих рис. 9. Начало отсчета для всех векторов совмещено с центром круга.

времени  $\Delta t$  между двумя последовательными положениями частицы:

$$D = \frac{\overline{\Delta x^2}}{2\Delta t}. \quad (38)$$

Эту же зависимость можно записать в виде

$$D = \frac{\overline{\Delta R^2}}{4\Delta t}, \quad (39)$$

где

$$\overline{\Delta R^2} = \overline{\Delta x^2} + \overline{\Delta y^2} = 2 \cdot \overline{\Delta x^2}$$

— средний квадрат перемещения частицы в горизонтальной плоскости. Величина коэффициента диффузии  $D$  характеризует подвижность броуновской частицы.

\*) Черта сверху обозначает, как обычно, операцию усреднения в данном случае по всем перемещениям частицы,

На рис. 9 изображены точками положения броуновской частицы через одинаковые промежутки времени [19]. Перенося начала всех плоских векторов перемещения в одну точку (в начало координат), мы получаем для концов векторов перемещения, изображенных точками, картину, напоминающую мишень, обстрелянную хорошим стрелком (рис. 10).

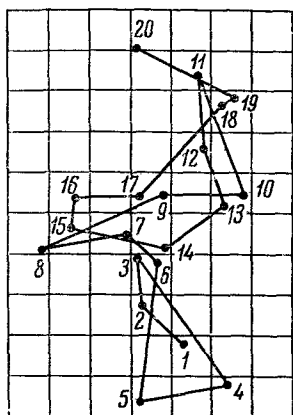


Рис. 11а. Последовательные положения броуновской частицы по данным табл. 7.

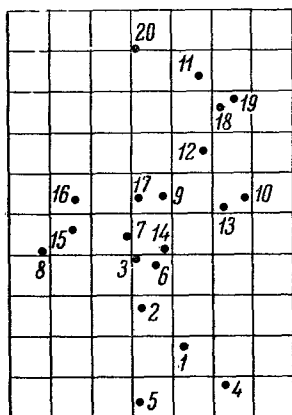


Рис. 11б. Те же положения, что и на рис. 11а, без соединений.

Мы видим, что в этом случае среднеарифметическое значение перемещения при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. «истинное» значение перемещения  $\Delta R$ , тождественно равно нулю (по построению графика рис. 10), а значение  $\overline{\Delta R^2}$  при  $n \rightarrow \infty$  равно  $2\sigma_x^2 = \sigma_R^2$ , где  $\sigma_x^2$  — дисперсия распределения проекций  $\Delta x$ , а  $\sigma_R^2$  — дисперсия распределения плоских перемещений  $\Delta R$ .

Таким образом, по последовательным положениям броуновской частицы (точнее, по горизонтальным проекциям этих положений) можно определить  $\overline{\Delta R^2}$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. определить величину дисперсии  $\sigma_R^2$  и установить границы доверительного интервала для нее.

На рис. 11а приведен график последовательных положений броуновской частицы, измеренных в классических опытах Ж. Перрена [19], который опытным путем проверял

соотношение Эйнштейна (39). Масштаб сетки соответствует 50 *мкм* в 16 делениях шкалы. Положения частицы фиксировались через каждые 30 *сек* ( $\Delta t = \tau = 30 \text{ сек}$ ). На рис. 116 приведены 20 последовательных положений броуновской частицы, взятых с рис. 11а.

Таблица 7

i	$\Delta t = \tau$		$\Delta t = 2\tau$		$\Delta t = 3\tau$	
	$\Delta R_{i,i+1}$ <i>мкм</i>	$\Delta R_{i,i+1}^2$	$\Delta R_{i,i+2}$ <i>мкм</i>	$\Delta R_{i,i+2}^2$	$\Delta R_{i,i+3}$ <i>мкм</i>	$\Delta R_{i,i+3}^2$
1	4,48	20,07	7,60	57,76	4,32	18,66
2	3,68	13,54	8,64	74,65	7,28	53,00
3	11,76	138,30	10,80	116,64	1,68	2,82
4	6,72	45,16	10,64	113,21	13,60	184,96
5	10,56	111,51	12,64	159,77	13,44	180,63
6	3,20	10,24	8,88	78,85	5,20	27,04
7	6,64	44,09	4,08	16,65	9,44	89,11
8	10,16	103,23	16,04	257,28	17,84	318,27
9	6,32	39,94	9,36	87,61	4,64	21,53
10	9,68	93,70	4,60	21,16	1,80	3,24
11	5,60	31,36	9,92	38,41	13,28	176,36
12	4,40	19,36	8,04	64,64	19,68	387,30
13	5,52	30,47	11,68	136,42	11,36	129,05
14	7,12	50,69	7,80	60,84	4,16	17,31
15	2,48	6,15	5,84	34,11	15,04	226,20
16	5,04	25,40	13,48	181,71	14,28	203,92
17	9,44	89,11	10,16	103,23	11,52	132,71
18	0,80	0,64	8,08	65,29	—	—
19	8,40	70,56	—	—	—	—
	$\sum_{i=1}^{19} \Delta R_{i,i+1}^2 = 943,52 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ $\overline{\Delta R_{i,i+1}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{19} \Delta R_{i,i+1}^2}{19} = 49,66 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$		$\sum_{i=1}^{18} \Delta R_{i,i+2}^2 = 1728,23 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ $\overline{\Delta R_{i,i+2}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{18} \Delta R_{i,i+2}^2}{18} = 96,01 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$		$\sum_{i=1}^{17} \Delta R_{i,i+3}^2 = 2172,11 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ $\overline{\Delta R_{i,i+3}^2} = \frac{\sum_{i=1}^{17} \Delta R_{i,i+3}^2}{17} = 127,77 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$	

В табл. 7 приведены величины  $\Delta R_{i,i+1}$  в микрометрах и соответствующие им  $\Delta R_{i,i+1}^2$ , измеренные по графику

рис. 11б. Наряду с перемещениями броуновской частицы за интервалы времени  $\Delta t = \tau$  в табл. 7 приведены значения перемещений (и квадратов перемещений) этой частицы за интервалы времени  $\Delta t = 2\tau$  и  $\Delta t = 3\tau$ . Приведены также суммы квадратов перемещений и значения среднего квадрата перемещений для каждой серии \*).

Перейдем теперь к обработке полученных результатов.

Обычно, как отмечалось выше, истинное значение измеряемой величины нам бывает неизвестно, и поэтому приходится рассматривать отклонения измерений от среднестатистического значения.

В данном случае положим «истинное» значение измеряемой величины  $\Delta R$  равным нулю в силу хаотичности теплового движения. Следовательно, для определения среднего квадрата перемещений, т. е. отклонений от «истинного» значения  $\Delta R = 0$ , следует применять формулу (15):

$$\Delta S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\Delta R_i - \Delta R)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta R_i^2 **).$$

Далее нас интересует не данное значение среднего квадрата, полученное в той или иной серии измерений, а предел, к которому стремится этот средний квадрат при безграничном увеличении числа измерений в серии (при  $n \rightarrow \infty$ ), т. е. величина дисперсии  $\sigma_R^2$ . Так как число проводимых нами измерений конечно, то мы не сможем определить точное значение этой дисперсии, но мы можем определить доверительный интервал для нее согласно соотношению (37). Из Приложения VIII при  $\alpha = 0,95$  находим значения коэффициентов  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_2^2$ :

$$\begin{aligned} f = n = 19, & \quad \gamma_1^2 = 0,578, \quad \gamma_2^2 = 2,13, \\ f = n = 18, & \quad \gamma_1^2 = 0,571, \quad \gamma_2^2 = 2,19, \\ f = n = 17, & \quad \gamma_1^2 = 0,563, \quad \gamma_2^2 = 2,25. \end{aligned}$$

\*) Схема записи результатов измерений взята из [7].

\*\*) Здесь величина  $\Delta R_i$  соответствует величине  $\Delta a_i^*$ , входящей в формулу (15).

Поэтому доверительные интервалы для  $\sigma_R^2 = \overline{\Delta R_{\Delta t}^2}$  оказываются равными

$$\Delta t = \tau \quad 0,578 \cdot 49,7 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \leq \overline{\Delta R_{\tau}^2} \leq 2,13 \cdot 49,7 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$\Delta t = 2\tau \quad 0,571 \cdot 96,0 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \leq \overline{\Delta R_{2\tau}^2} \leq 2,19 \cdot 96,0 \times \\ \times 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$\Delta t = 3\tau \quad 0,563 \cdot 127,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \leq \overline{\Delta R_{3\tau}^2} \leq 2,25 \cdot 127,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

т. е.

$$\Delta t = \tau \quad 28,7 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \leq \overline{\Delta R_{\tau}^2} \leq 106 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$\Delta t = 2\tau \quad 54,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \leq \overline{\Delta R_{2\tau}^2} \leq 210 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$\Delta t = 3\tau \quad 72,0 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2 \leq \overline{\Delta R_{3\tau}^2} \leq 288 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

или

$$\Delta t = \tau \quad \overline{\Delta R_{\tau}^2} = \left( 50 \mp \frac{21}{56} \right) \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$\Delta t = 2\tau \quad \overline{\Delta R_{2\tau}^2} = \left( 96 \mp \frac{41}{114} \right) \cdot 10^{-12} \text{ м}^2,$$

$$\Delta t = 3\tau \quad \overline{\Delta R_{3\tau}^2} = \left( 128 \mp \frac{56}{160} \right) \cdot 10^{-12} \text{ м}^2.$$

Как и следовало ожидать, границы доверительных интервалов получились резко асимметричными (эта асимметрия является следствием асимметрии  $\chi^2$ -распределения) и возрастающими с увеличением  $\Delta t$ . Для наглядности эти средние квадраты вместе со своими доверительными интервалами изображены на рис. 12.

Теперь найдем величину коэффициента диффузии  $D$ . Нетрудно убедиться в том, что случайные значения  $D_i$ , полученные в той или иной серии измерений, ведут себя как средние квадраты перемещений, т. е. также подчиняются  $\chi^2$ -распределению. Отнесем все измеренные квадраты перемещений к одному и тому же промежутку времени  $\tau$ . Тогда

$$\overline{D} = \frac{1}{4\tau \cdot N} \left[ \sum_{i=1}^{19} \Delta R_{i,i+1}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{18} \Delta R_{i,i+2}^2 + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{17} \Delta R_{i,i+3}^2 \right]. \quad (40)$$

Здесь в знаменателе стоит  $N$  — полное число измерений, равное в нашем случае  $19 + 18 + 17 = 54$ , поскольку

мы считаем, что измерения отдельных серий, так же как и измерения внутри каждой серии, являются независимыми и проведенными в одних и тех же условиях \*). Подстав-

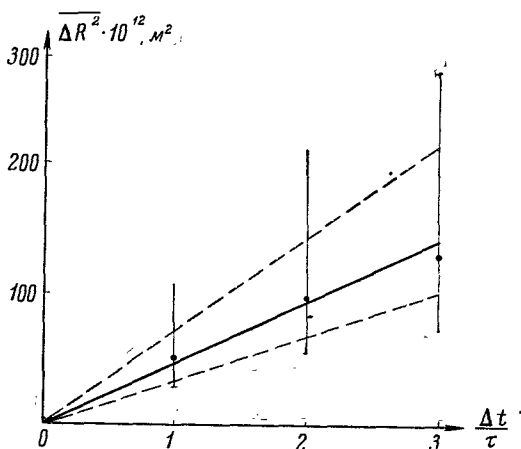


Рис. 12. Определения значений средних квадратов отклонений  $\overline{\Delta R^2}$  для разных интервалов времени  $\Delta t$  (помечены точками). Вертикальные прямые — доверительные интервалы. Пунктиры — границы доверительного интервала для  $\overline{\Delta R^2}$ , полученные при учете всех трех серий измерений.

ляя в (40) численные значения сумм квадратов из табл. 7 и  $\tau = 30$  сек, получаем

$$\overline{D} = \frac{10^{-12}}{4 \cdot 30 \cdot 54} [944 + 864 + 724] \text{ м}^2/\text{сек} = 3,91 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{сек}.$$

Из Приложения VIII при  $\alpha = 0,95$  для  $f = N = 54$  находим значения  $\gamma_1^2 = 0,709$  и  $\gamma_2^2 = 1,52$  и получаем доверительный интервал для  $D$

$$0,709 \cdot 3,91 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{сек} \leq D \leq 1,52 \cdot 3,91 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{сек},$$

т. е.

$$2,8 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{сек} \leq D \leq 5,9 \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{сек}$$

\*) В общем случае вопрос о возможности объединения серий решается с помощью специальных критериев согласия, например критерия Фишера [11].

или

$$D = \left( 3,9 \mp \begin{matrix} 1,1 \\ 2,0 \end{matrix} \right) \cdot 10^{-13} \text{ м}^2/\text{сек.}$$

На рис. 12 приведены также прямые, построенные с помощью вычисленного среднего значения  $\bar{D}$  согласно соотношению  $\Delta R_{\Delta t}^2 = 4\Delta t \cdot \bar{D}$  (сплошная прямая) и с помощью границ доверительного интервала для  $D$  (пунктирные прямые). Эти прямые убедительно показывают, как уменьшается доверительный интервал для каждого значения  $\Delta R_{\Delta t}^2$  после обработки всего объема информации о перемещениях броуновской частицы.

#### § 4. ВЫЯВЛЕНИЕ И ИСКЛЮЧЕНИЕ ПРОМАХОВ ИЗ СЕРИИ ИЗМЕРЕНИЙ

Если серия из небольшого числа измерений содержит грубую погрешность — промах, то наличие этого промаха может сильно исказить как среднее значение измеряемой величины, так и границы доверительного интервала. Поэтому из окончательного результата необходимо исключить этот промах. Обычно промах имеет резко отличающееся от других измерений значение. Однако это отклонение от значений других измерений не дает еще права исключить это измерение как промах, пока не проверено, не является ли это отклонение следствием статистического разброса.

Из рис. 6 видно, что появление при измерении значения, отклоняющегося от истинного значения (или от среднего значения) на величину, превышающую  $2\sigma$  или тем более  $3\sigma$ , маловероятно. Вероятность  $\beta_1$  появления такого отклонения при одном измерении равна  $\beta_1 = 1 - \alpha = 0,05$  и  $0,003$ , соответственно ( $\alpha$  — задаваемая величина надежности). Эта вероятность  $\beta$  возрастает при увеличении числа измерений  $n$ . Действительно, если надежность нахождения значения одного измерения в доверительном интервале ( $-k_\alpha\sigma$ ,  $+k_\alpha\sigma$ ) равна  $\alpha^*$ ), то при  $n$ -кратном

\*) Здесь в отличие от предыдущего мы рассматриваем доверительный интервал и надежность не в отношении распределения результата серии измерений (11), а в отношении распределения отдельных измерений (8), которое за исключением того, что случайной величиной является  $a_i$ , а не  $\bar{a}$ , дисперсия равна  $\sigma^2$ , а не  $\frac{\sigma_a^2}{n} = \sigma^2/n$ , аналогично распределению (11),

повторении измерений надежность нахождения значений в с е х  $n$  измерений внутри доверительного интервала  $(-k_x\sigma, +k_x\sigma)$  уменьшается до  $\alpha^n$ . (Вероятность одновременного появления независимых событий равна произведению вероятностей отдельных событий.) Отсюда получаем, что вероятность появления при одном измерении значения (измерения), выходящего за пределы доверительного интервала  $(-k_x\sigma, +k_x\sigma)$ , равна  $\beta_1 = 1 - \alpha$ , а при  $n$  измерениях

$$\beta = (1 - \alpha^n) = [1 - (1 - \beta_1)^n] = 1 - 1 + n\beta_1 - \dots = n\beta_1, \quad (41)$$

т. е. при малых  $\beta_1$  вероятность  $\beta$  возрастает в  $n$  раз по сравнению с  $\beta_1$ , т. е.  $\beta = n\beta_1$ .

Однако при проведении измерений величина  $\sigma$  неизвестна, и ее приходится определять по результату всей серии измерений. Как мы видели (см. § 3), это определение величины  $\sigma$  по находимой непосредственно величине  $\Delta S_n^2$  связано при малом числе измерений  $n$  с большой погрешностью. Поэтому более целесообразно при выявлении промахов применять критерии, не связанные с величиной  $\sigma$ . Такой критерий получается, если вместо распределения случайной величины  $\Delta a/\sigma$  рассматривать распределение другой случайной величины

$$v = \frac{a_{(n)} - \bar{a}}{\sqrt{\frac{n-1}{n} \Delta S_n}} \quad \text{или} \quad \frac{\bar{a} - a_{(1)}}{\sqrt{\frac{n-1}{n} \Delta S_n}}, \quad (42)$$

где  $\Delta S_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \Delta a_i^2}$ ,  $a_{(n)}$  — наибольшее значение измерений в серии из  $n$  измерений,  $a_{(1)}$  — наименьшее значение в этой же серии \*).

Это распределение имеет вид

$$\varphi(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi(n-1)}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(1 - \frac{v^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}, \quad |v| < \sqrt{n-1}, n \geq 3. \quad (43)$$

\*) Индексы в скобках величин  $a_{(i)}$  соответствуют расположению измерений в порядке возрастания величины.



В табл. 8 приведены значения  $v_{\max}$  — максимальные возможные значения  $v_{(n)}$ , возникающие вследствие статистического разброса, соответствующие заданной надежности  $\alpha$ . (Более полная таблица  $v_{\max}$  приведена в Приложении IX\*.)

Таблица 8

$n$	$\alpha = 0,90$ $\beta = 0,10$	$\alpha = 0,95$ $\beta = 0,05$	$\alpha = 0,99$ $\beta = 0,01$
3	1,41	1,41	1,41
4	1,64	1,69	1,72
5	1,79	1,87	1,96
6	1,89	2,00	2,13
7	1,97	2,09	2,26
8	2,04	2,17	2,37
9	2,10	2,24	2,46
10	2,15	2,29	2,54

Как видно из табл. 8, значения  $v_{\max}$  возрастают с увеличением надежности  $\alpha$ , т. е. с уменьшением  $\beta$ , и с увеличением числа измерений  $n$ . Это означает, что вероятность появления больших отклонений, возникающих вследствие статистического разброса, растет при увеличении числа измерений.

Если резко выделяющееся значение измерения  $a_{(n)}$  полученное в серии из  $n$  измерений, соответствует величине  $v_{(n)} > v_{\max}$  при заданном значении надежности  $\alpha = 1 - \beta$ , то это означает, что данное значение  $a_{(n)}$  не совместимо с исходным предположением о нормальном законе распределения и его можно рассматривать как промах. Это измерение следует исключить из серии  $n$  измерений и определить новые значения  $\bar{a}$  и  $\Delta a$  для серии из оставшихся  $n - 1$  измерений.

Если же величина  $v_{(n)}$ , соответствующая значению  $a_{(n)}$  меньше  $v_{\max}$  для этого же числа  $n$  при заданной надежности  $\alpha$ , то это резко выделяющееся измерение  $a_{(n)}$  является следствием статистического разброса и нет оснований считать его промахом.

\*) Табл. 8 и Приложение IX получены путем округления данных, приведенных в соответствующей таблице сборника [20].

Следует отметить, что таблица  $r^2$ -распределения, приведенная в книге Арлея и Буха [6], непригодна для оценки  $a_{(n)}$ , так как в ней не учитывается связь  $\beta = n\beta_1$ .

Приведем пример применения табл. 8. Пусть при измерении длины стержня штангенциркулем были получены следующие значения, приведенные во втором столбце табл. 9.

Таблица 9

$i$	$l_i$ , мм	$l_i - l_0$ , мм	$(l_i - l_0)^2$ , мм <sup>2</sup>
1	153,4	-1,6	2,56
2	154,6	-0,4	0,16
3	154,7	-0,3	0,09
4	155,0	0	0
5	164,3	+9,3	86,49
6	154,5	-0,5	0,25
Сумма		+6,5	89,55

Возьмем  $l_0 = 155,0$  мм и вычислим величины  $l_i - l_0$  и  $(l_i - l_0)^2$ . (Эти значения приведены соответственно в третьем и четвертом столбцах табл. 9.)

Тогда

$$\bar{l} = l_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i - l_0) = 155,0 + \frac{6,5}{6} = 155,0 + 1,08 = 156,08 \text{ мм.}$$

Отсюда

$$\bar{l} - l_0 = 1,08 \text{ мм.}$$

Проверим, не является ли значение  $l_5 = 164,3$  мм, полученное при пятом измерении, промахом, так как оно сильно отличается от других значений. (Возможно, что это значение появилось вследствие описки экспериментатора при записи 164,3 мм вместо 154,3 мм). Для этой цели найдем величину  $\frac{n-1}{n} \Delta S_n^2$ :

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} \Delta S_n^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i - \bar{l})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(l_i - l_0)^2 - n(\bar{l} - l_0)^2] = \\ &= \frac{1}{6} [89,55 - 6 \cdot 1,08^2] = 14,925 - 1,166 = 13,76 \text{ мм}^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sqrt{\frac{n-1}{n} \Delta S_n} = \sqrt{13,76} = 3,71 \text{ мм.}$$

Подсчитаем теперь величину  $v_{(6)}$ :

$$v_{(6)} = \frac{l_{(6)} - \bar{l}_0}{\sqrt{\frac{n-1}{n} \Delta S_n}} = \frac{164,3 - 156,08}{3,71} = \frac{8,22}{3,71} = 2,22$$

$(l_{(6)})$  — наибольшее значение  $l_i$  в серии из шести измерений. В нашем случае  $l_{(6)} = l_5$ .

Из табл. 8 находим при  $n = 6$  для надежности  $\alpha = 0,95$  значение  $v_{\max} = 2,00$ . Мы видим, что  $v_{(6)} > v_{\max}$ . Это означает, что измерение  $l_5 = 164,3$  мм является промахом и его следует исключить из серии измерений.

После исключения получаем, полагая  $l_0 = 154,0$  мм следующие данные (табл. 10).

Таблица 10

$i$	$l_i, \text{ мм}$	$l_i - l_0, \text{ мм}$	$(l_i - l_0)^2, \text{ мм}^2$
1	153,4	-0,6	0,36
2	154,6	+0,6	0,36
3	154,7	+0,7	0,49
4	155,0	+1,0	1,00
5	154,5	+0,5	0,25
Сумма		+2,2	2,46

Отсюда получаем

$$\bar{l} = l_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (l_i - l_0) = 154,0 + \frac{1}{5} \cdot 2,2 = 154,0 + 0,44 = 154,44 \text{ мм.}$$

и

$$\bar{l} - l_0 = 0,44 \text{ мм,}$$

$$\begin{aligned} \Delta S_{\bar{l}}^2 &= \frac{1}{n(n-1)} \left[ \sum_{i=1}^n (l_i - l_0)^2 - n(\bar{l} - l_0)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{5 \cdot 4} [2,46 - 5 \cdot 0,44^2] = 0,123 - 0,048 = 0,075 \text{ мм}^2 \end{aligned}$$

$$\Delta S_{\bar{l}} = \sqrt{0,075} = 0,274 \text{ мм.}$$

Из Приложения VII находим коэффициент Стьюдента  $t_\alpha$  при  $n = 5$  для  $\alpha = 0,95$ . Он равен  $t_\alpha = 2,78$ . Следовательно, погрешность серии из пяти измерений равна

$$\Delta l = t_\alpha \cdot \Delta S_{\bar{l}} = 2,78 \cdot 0,274 = 0,761 \text{ мм} \simeq 0,8 \text{ мм}.$$

Таким образом, окончательный результат можно представить в виде

$$l = \bar{l} \pm \Delta l = (154,4 \pm 0,8) \text{ мм}.$$

Сохранение промаха в серии из шести измерений привело бы к значению

$$l = (156,1 \pm 3,4) \text{ мм},$$

т. е. резко изменило бы как среднее значение измеряемой величины, так и погрешность результата измерения.

Аналогичным образом следует исключать и резко выделяющееся в сторону занижения значение  $a_{(1)}$ , пользуясь критерием:

$$v_{(1)} = \frac{\bar{a} - \bar{a}_{(1)}}{\sqrt{\frac{n-1}{n} \Delta S_n}}.$$

## § 5. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Прежде чем рассматривать погрешности результата косвенных измерений, отметим, что эти погрешности, подсчитанные по рекомендациям, изложенным в данном параграфе, носят ориентировочный характер. Они будут оправдываться тем лучше, чем больше число измерений и чем выше точность отдельных измерений. В наиболее ответственных случаях при определении надежности результата косвенных измерений необходимо применять распределение вероятности данной конкретной функции случайных величин и обратиться к более сложным разделам математической статистики (дисперсионный анализ, проверка гипотез и др.).

Здесь мы остановимся лишь на несколько упрощенной трактовке. Пусть искомая величина  $z$  определяется из прямых измерений величины  $a$ , причем

$$z = f(a). \quad (44)$$

Обозначим точное значение результата косвенных измерений через  $z = \bar{z} \pm \Delta z = f(\bar{a} \pm \Delta a)$ , где  $a = \bar{a} + \Delta a$ ,  $\bar{z} = f(\bar{a})$ . Полагая величину абсолютной погрешности прямых измерений  $\Delta a$  очень малой по сравнению с  $\bar{a}$  можно для определения погрешности косвенных измерений

$$\Delta z_z = \sqrt{[f(a) - f(\bar{a})]^2} = f(a) - f(\bar{a})$$

воспользоваться связью дифференциала функции  $df$  бесконечно малым изменением аргумента

$$df(a) = \frac{df}{da} da.$$

Абсолютная погрешность результата косвенных измерений в этом случае равна \*)

$$\Delta z_z = df(a) = f(\bar{a} + \Delta a) - f(\bar{a}) = \frac{df}{da}(\bar{a}) \Delta a, \quad (45)$$

где  $\Delta a$  определяется соотношениями (27) и (25).

Относительная погрешность равна

$$\epsilon_z = \frac{f'(\bar{a})}{f(\bar{a})} \cdot \Delta a \cdot 100\% \quad (46)$$

или, полагая  $\Delta a \sim da$  и  $\Delta z \sim dz$ ,

$$\epsilon_z = \frac{df(a)}{f(a)} = d(\ln a), \quad (47)$$

где знак  $d$  после дифференцирования следует заменить на  $\Delta$ .

Рассмотрим теперь случай, когда искомая величина является функцией двух переменных  $a$  и  $b$ , значения которых определяются непосредственно из серий  $k$  и  $m$  измерений соответственно:

$$z = f(a, b). \quad (48)$$

Остановимся сначала на простейшем случае:

$$z = a + b, \quad (49)$$

\*) Этот результат можно получить строго с помощью разложения функции  $f(a)$  в ряд Тейлора (см. Приложение II). При этом мы пренебрегаем членами, содержащими  $\Delta a^2$  и более высокие степени  $\Delta a$ .

причем величина  $a$  определяется из серии  $k$  измерений  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), а величина  $b$  — из серии  $m$  измерений  $b_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ).

Истинные значения  $a$  и  $b$  связаны со средними значениями  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  соотношениями (см. (10))

$$a = \bar{a} + \widetilde{\Delta a}, \quad b = \bar{b} + \widetilde{\Delta b}. \quad (50)$$

Если обозначить среднее значение функции через  $\bar{z} = \bar{a} + \bar{b}$ , то средний квадрат отклонения  $z$  от  $\bar{z}$  равен \*)

$$\begin{aligned} \Delta z^2 &= \overline{(z - \bar{z})^2} = \overline{(a - \bar{a} + b - \bar{b})^2} = \overline{(\widetilde{\Delta a} + \widetilde{\Delta b})^2} = \\ &= \overline{\widetilde{\Delta a}^2} + 2\overline{\widetilde{\Delta a} \cdot \widetilde{\Delta b}} + \overline{\widetilde{\Delta b}^2} = \Delta a^2 + \Delta b^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Здесь черта сверху означает усреднение по распределению соответствующих случайных величин. Член  $2\overline{\widetilde{\Delta a} \widetilde{\Delta b}}$  равен нулю в силу симметрии кривых распределения величин  $\widetilde{\Delta a}$  и  $\widetilde{\Delta b}$ .

Аналогично, если

$$z = Q \cdot a + R \cdot b, \quad (52)$$

где  $Q$  и  $R$  — постоянные, получаем

$$\Delta z^2 = Q^2 \cdot \Delta a^2 + R^2 \cdot \Delta b^2. \quad (53)$$

В самом общем случае, когда

$$z = f(a, b), \quad (54)$$

можно показать \*\*), что

$$\Delta z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 \quad (55)$$

и, следовательно,

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2}. \quad (56)$$

Здесь  $\frac{\partial f}{\partial a}$  и  $\frac{\partial f}{\partial b}$  — частные производные функции  $f(a, b)$  по переменным  $a$  и  $b$  соответственно. Напомним, что частная производная функций многих переменных  $f$  по одной

\*) При этом мы предполагаем, что  $\Delta a \ll \bar{a}$  и  $\Delta b \ll \bar{b}$ .

\*\*\*) См. Приложение III,

переменной, скажем  $a$ , является обычной производной функции  $f$  по  $a$ , причем другая переменная  $b$  считается постоянным параметром. Все производные в выражении (56) вычисляются при значениях  $a = \bar{a}$  и  $b = \bar{b}$ .

В настоящее время нет универсального способа оценки границ доверительного интервала при заданной надежности для результата косвенных измерений. Даже для оценки границ доверительного интервала разности двух величин в литературе имеются противоречивые рекомендации [20, 23]. Поэтому мы здесь даем простой, хотя и недостаточно строгий рецепт получения оценки  $\alpha$  при косвенных измерениях (см. также [24—26]).

Если  $k < 20$  и  $m < 20$ , то погрешности  $\Delta a$  и  $\Delta b$  определяются с помощью коэффициентов Стьюдента для одного и того же значения надежности  $\alpha$ .

Относительная погрешность равна

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z}, \quad (57)$$

где  $\Delta z$  определяется соотношением (56).

Аналогично для

$$z = f(a, b, c, \dots) \quad (58)$$

получаем \*)

$$\Delta z = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2 + \dots} \quad (59)$$

Относительная погрешность равна также

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta z}{z}, \quad (60)$$

и так как

$$\frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a} \ln f, \quad \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \ln f, \quad \frac{1}{f} \cdot \frac{\partial f}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \ln f, \dots$$

то

$$\varepsilon_z^2 = \left(\frac{\Delta z}{z}\right)^2 = \left(\frac{\partial}{\partial a} \ln f\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial}{\partial b} \ln f\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial}{\partial c} \ln f\right)^2 \Delta c^2 + \dots \quad (61)$$

\*) См. Приложение III.

В частности, если

$$z = f(a, b, c, \dots) = a^\beta \cdot b^\gamma \cdot c^\delta, \quad (62)$$

где  $\beta, \gamma, \delta, \dots$  могут принимать как положительные, так и отрицательные значения, то  $\ln f = \beta \ln a + \gamma \ln b + \delta \ln c$ ,

$$\frac{\partial}{\partial a} \ln f = \frac{\beta}{a}, \quad \frac{\partial}{\partial b} \ln f = \frac{\gamma}{b}, \quad \frac{\partial}{\partial c} \ln f = \frac{\delta}{c}$$

и

$$\varepsilon_z^2 = \beta^2 \cdot \frac{\Delta a^2}{a^2} + \gamma^2 \cdot \frac{\Delta b^2}{b^2} + \delta^2 \cdot \frac{\Delta c^2}{c^2} = \beta^2 \cdot \varepsilon_a^2 + \gamma^2 \cdot \varepsilon_b^2 + \delta^2 \cdot \varepsilon_c^2, \quad (63)$$

т. е.

$$\varepsilon_z = \sqrt{\beta^2 \cdot \varepsilon_a^2 + \gamma^2 \cdot \varepsilon_b^2 + \delta^2 \cdot \varepsilon_c^2}. \quad (64)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

а) Погрешность суммы двух величин:

$$z = a + b, \quad (65)$$

$$\Delta z = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2} \quad *), \quad (66)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}}{\bar{a} + \bar{b}}. \quad (67)$$

б) Погрешность разности двух величин:

$$z = a - b, \quad (68)$$

$$\Delta z = \sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2} \quad *), \quad (69)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sqrt{\Delta a^2 + \Delta b^2}}{\bar{a} - \bar{b}}. \quad (70)$$

Мы видим, что при одной и той же величине абсолютной погрешности  $\Delta z$ , т. е. при одной и той же величине  $\Delta a$  и  $\Delta b$ , относительная погрешность разности может быть значительно больше относительной погрешности суммы при близких значениях  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

\* ) См. вывод (66) и (69) на стр. 54 и 55.



в) Погрешность произведения двух величин:

$$z = a \cdot b, \quad (71)$$

$$\Delta z = \sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2}, \quad (72)$$

$$\varepsilon_z = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}. \quad (73)$$

г) Погрешность отношения двух величин:

$$z = \frac{a}{b}, \quad (74)$$

$$\Delta z = \sqrt{\frac{1}{\bar{b}^2} \cdot \Delta a^2 + \frac{\bar{a}^2}{\bar{b}^4} \cdot \Delta b^2 *}, \quad (75)$$

$$\varepsilon_z = \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2}. \quad (76)$$

Следует отметить, что если косвенные измерения проводятся в невоспроизводимых условиях, то значения функции вычисляются для каждого отдельного измерения, а границы доверительного интервала определяют в результате обработки вычисленных результатов косвенных измерений, т. е. самих функций, так же как это делается для прямых измерений.

**Пример.** При определении коэффициента вязкости жидкости путем изучения движения твердых шариков разного диаметра в этой жидкости получены результаты, представленные в табл. 11.

Поскольку величины, стоящие под табл. 11, известны с большой точностью, то мы будем пренебрегать погрешностями измерений этих величин, а также приборными погрешностями при измерении радиуса шарика и времени. Все величины взяты с тремя значащими цифрами.

Значения коэффициента вязкости вычисляются на основании закона Стокса по формуле

$$\eta = \frac{2}{9} g r_{\text{ш}}^2 \frac{\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}}{v \left(1 + \frac{2,4 r}{R}\right)},$$

учитывающей поправку на влияние конечного диаметра сосуда с жидкостью.

\*) Элементарный вывод этих формул без применения понятия частной производной см. в Приложении IV.

Таблица 11

<i>i</i>	$r_{\text{ш}} \cdot 10^4, \text{ м}$	<i>t, сек</i>	<i>i</i>	$r_{\text{ш}} \cdot 10^4, \text{ м}$	<i>t, сек</i>
1	2,92	27,0	5	2,47	37,5
2	2,81	29,0	6	3,37	20,2
3	3,04	24,8	7	3,26	22,9
4	3,37	20,1			

$\rho_{\text{ж}} = 1,24 \text{ г/см}^3 = 1,24 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_{\text{ш}} = 9,70 \text{ г/см}^3 = 9,70 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ,  $g = 981 \text{ см/сек}^2 = 9,81 \text{ м/сек}^2$ ,  $l = 7,80 \text{ см} = 7,80 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ ,  $R = 1,45 \text{ см} = 1,45 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ .

Здесь  $r_{\text{ш}}$  — радиус твердого шарика,  $t$  — время прохождения шариком расстояния с установившейся скоростью  $v$ ,  $\rho_{\text{ж}}$  — плотность жидкости,  $\rho_{\text{ш}}$  — плотность твердого шарика,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $R$  — радиус сосуда с жидкостью.

Вычислим сначала постоянный множитель

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{9} g (\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{ж}}) &= \frac{2}{9} \cdot 9,81 \cdot 8,46 \cdot 10^3 \text{ м/сек}^2 \text{ кг/м}^3 = \\
 &= 1,844 \cdot 10^4 \text{ н/м}^3,
 \end{aligned}$$

а затем вычислим переменные величины (табл. 12).

Таблица 12

<i>i</i>	$r_{\text{ш}}^2 \cdot 10^8, \text{ м}^2$	$v \cdot 10^3, \text{ м/сек}$	$\frac{r^2}{v} \cdot 10^5, \text{ м/сек}$	$1 + \frac{2,4r}{R}$	$\frac{r^2}{v} \left(1 + \frac{2,4r}{R}\right)^{-1} \times 10^5$	$\eta \cdot 10, \text{ нсек/м}^2$
1	8,53	2,89	2,95	1,05	2,81	5,18
2	7,90	2,69	2,94	1,05	2,80	5,16
3	9,24	3,14	2,94	1,05	2,80	5,16
4	11,4	3,88	2,94	1,05	2,79	5,14
5	6,10	2,08	2,93	1,04	2,82	5,20
6	11,4	3,86	2,94	1,05	2,79	5,14
7	10,6	3,41	3,11	1,05	2,96	5,46

Рассматривая полученные значения коэффициента динамической вязкости, мы видим, что значение седьмого измерения резко выделяется по сравнению с остальными. Поэтому прежде всего следует выяснить, не является ли это измерение промахом. Для этой цели построим табл. 13 отклонений и квадратов отклонений  $\eta_i$  от произвольно выбранного значения  $\eta_0 = 0,520 \text{ н} \cdot \text{сек/м}^2$ .

Таблица 13

$i$	$\eta_i$ , н·сек/м <sup>2</sup>	$\eta_i - \eta_0$	$(\eta_i - \eta_0)^2$
1	0,518	$-2 \cdot 10^{-3}$	$4 \cdot 10^{-6}$
2	0,516	$-4 \cdot 10^{-3}$	$16 \cdot 10^{-6}$
3	0,516	$-4 \cdot 10^{-3}$	$16 \cdot 10^{-6}$
4	0,514	$-6 \cdot 10^{-3}$	$36 \cdot 10^{-6}$
5	0,520	0	0
6	0,514	$-6 \cdot 10^{-3}$	$36 \cdot 10^{-6}$
7	0,546	$+26 \cdot 10^{-3}$	$676 \cdot 10^{-6}$
Сумма		$+4 \cdot 10^{-3}$	$784 \cdot 10^{-6}$

Среднее значение  $\bar{\eta}$ , полученное в результате всей серии из семи измерений, равно

$$\bar{\eta} = \eta_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \eta_0) = 0,520 + \frac{4 \cdot 10^{-3}}{7} = 0,5206 \text{ н} \cdot \text{сек} / \text{м}^2,$$

причем

$$\bar{\eta} - \eta_0 = 6 \cdot 10^{-4} \text{ н} \cdot \text{сек} / \text{м}^2.$$

Далее,

$$\begin{aligned} \frac{n-1}{n} \Delta S_n^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \bar{\eta})^2 = \\ &= \frac{1}{n} \left[ \sum_{i=1}^n (\eta_i - \eta_0)^2 - n(\bar{\eta} - \eta_0)^2 \right] = \\ &= \frac{1}{7} [78400 - 7 \cdot 36] \cdot 10^{-8} = \\ &= 11164 \cdot 10^{-8} \simeq 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ н}^2 \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^4. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sqrt{\frac{n-1}{n}} \Delta S_n = 1,06 \cdot 10^{-2} \text{ н} \cdot \text{сек} / \text{м}^2.$$

Отсюда

$$v_{(7)} = \frac{\eta_{(7)} - \bar{\eta}}{\sqrt{\frac{n-1}{n}} \Delta S_n} = \frac{0,5460 - 0,5206}{1,06 \cdot 10^{-2}} = \frac{2,54}{1,06} = 2,40.$$

Из Приложения IX мы находим значение  $v_{\max}$  при  $n = 7$  для  $\alpha = 0,95$ :  $v_{\max} = 2,09 < v_{(7)}$ . Следовательно, значение  $\eta_7 = 0,546 \text{ н.сек/м}^2$  несовместимо с предположением о нормальном законе распределения значений измерений  $\eta$ , т. е. это измерение является промахом. Исключая это измерение, мы получим серию из шести оставшихся измерений.

Найдем значение коэффициента динамической вязкости из этой серии измерений.

Т а б л и ц а 14

$i$	$\eta_i, \text{ н.сек/м}^2$	$\eta_i - \eta_0, \text{ н.сек/м}^2$	$(\eta_i - \eta_0)^2, \text{ н}^2 \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^4$
1	0,518	$8 \cdot 10^{-3}$	$64 \cdot 10^{-6}$
2	0,516	$6 \cdot 10^{-3}$	$36 \cdot 10^{-6}$
3	0,516	$6 \cdot 10^{-3}$	$36 \cdot 10^{-6}$
4	0,514	$4 \cdot 10^{-3}$	$16 \cdot 10^{-6}$
5	0,520	$10 \cdot 10^{-3}$	$100 \cdot 10^{-6}$
6	0,514	$4 \cdot 10^{-3}$	$16 \cdot 10^{-6}$
Сумма		$38 \cdot 10^{-3}$	$268 \cdot 10^{-6}$

Для этого положим  $\eta_0 = 0,510 \text{ н.сек/м}^2$ , после чего получим данные, представленные в табл. 14

$$\bar{\eta} = \eta_0 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \eta_0) = \left( 5,10 \cdot 10^{-1} + \frac{38 \cdot 10^{-3}}{6} \right) = 5,163 \cdot 10^{-1} \text{ н.сек/м}^2,$$

$$\bar{\eta} - \eta_0 = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ н.сек/м}^2$$

и

$$\Delta S_{\bar{\eta}}^2 = \frac{1}{6 \cdot 5} [268 - 6(6,3)^2] 10^{-6} \text{ н}^2 \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^4 = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ н}^2 \cdot \text{сек}^2 / \text{м}^4,$$

т. е.

$$\Delta S_{\bar{\eta}} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ н.сек/м}^2.$$

Отсюда при  $\alpha = 0,95$  и  $n = 6$  по табл. 1 находим  $t_{\alpha} = 2,57$ ; следовательно

$$\Delta \eta = t_{\alpha} \cdot \Delta S_{\bar{\eta}} = 2,57 \cdot 10^{-3} \text{ н.сек/м}^2 \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ н.сек/м}^2$$

и

$$\eta = (5,16 \pm 0,03) \cdot 10^{-1} \text{ н.сек/м}^2.$$

Как уже указывалось выше, если случайные погрешности результата измерений (или погрешности отдельных измерений) оказываются гораздо меньше, чем погрешность измерительного прибора, определяемая классом точности последнего, то только погрешность прибора определяет погрешность окончательного результата серии как прямых, так и косвенных измерений. Для оценки погрешности результата серии косвенных измерений и в этом случае в качестве первого приближения можно применять соотношения (60), (61), (73) и (76), где  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$ , ... будут представлять собой погрешности измерительных приборов.

Применение этих соотношений для учета влияния погрешностей измерительных приборов может быть в какой-то мере обосновано тем, что эти погрешности задаются максимальным значением (по абсолютной величине) для всей области применения данных приборов. Поэтому появление той или иной величины погрешности и того или иного знака ее носит случайный характер.

Когда случайная погрешность, полученная из разброса отдельных измерений относительно среднего значения, оказывается сравнимой с погрешностью прибора  $\delta$ , то границы доверительного интервала определяются соотношением \*)

$$\Delta a = \sqrt{t_{\alpha}^2(n) \Delta S_{\alpha}^2 + \left(\frac{k_{\alpha}}{3}\right)^2 \delta^2}, \quad (77)$$

где

$$k_{\alpha} \equiv t_{\alpha}(\infty).$$

Соотношение (77) может быть получено из формулы (66), если считать, что приборная погрешность  $\delta$  равна утроенной дисперсии распределения погрешностей прибора  $3\sigma_{\text{приб}}$ , т. е. погрешности, соответствующей надежности  $\alpha = 0,997$ . (Это справедливо как в случае нормального распределения погрешностей прибора, так и в случае равномерного распределения.)

Числовой пример обработки результатов измерения диаметра цилиндра (стр. 31) показывает, что число значащих цифр результата ограничено: оно определяется по

\*) Это соотношение применяется в метрологии [27].

рядком величины абсолютной погрешности. Естественно, если величина абсолютной погрешности составляет сотые доли, т. е. если мы не ручаемся за правильность сотых долей, то и в результате необходимо оставить только сотые доли, округляя результат (ибо нет смысла сохранять тысячные доли, если мы не ручаемся за правильность сотых долей). Отметим, что любое округление чисел представляет собой *систематическую погрешность*.

Поэтому все вычисления окончательного результата следует производить *с числом значащих цифр, превышающих на единицу число значащих цифр, полученных при измерениях* (для последующего округления результата), т. е. при относительной погрешности измерений порядка  $1 \div 10\%$  расчеты можно проводить, пользуясь тремя значащими цифрами; с помощью логарифмической линейки; при относительной погрешности измерений порядка  $0,1 \div 1\%$  можно пользоваться четырехзначными таблицами логарифмов и т. д.

Другими словами, относительная погрешность, получающаяся в результате вычислений, должна быть примерно на порядок (т. е. в 10 раз) меньше погрешности результата косвенных измерений  $\epsilon_z$ . Так, например, округляя трансцендентное число  $\pi$ , т. е. заменяя  $\pi$  на приближенное значение  $\pi_{\text{пр}}$ , мы совершаем относительные погрешности  $\epsilon_\pi = \frac{\Delta\pi}{\pi}$ , где  $\Delta\pi = \pi - \pi_{\text{пр}}$  с определенным знаком, равные:

$$\begin{aligned} \pi_{\text{пр}} = 3; & \quad \Delta\pi \simeq + 0,142; & \quad \epsilon_\pi \approx + 5\%; \\ \pi_{\text{пр}} = 3,1; & \quad \Delta\pi \simeq + 0,0416; & \quad \epsilon_\pi \approx + 1,3\%; \\ \pi_{\text{пр}} = 3,14; & \quad \Delta\pi \simeq + 0,00016; & \quad \epsilon_\pi \approx + 0,05\%; \\ \pi_{\text{пр}} = 3,142; & \quad \Delta\pi \simeq - 0,00041; & \quad \epsilon_\pi \approx - 0,01\%; \\ \pi_{\text{пр}} = 3,1416; & \quad \Delta\pi \simeq - 7,35 \cdot 10^{-6}; & \quad \epsilon_\pi \approx - 2,10^{-4}\% \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Если табличные или экспериментальные данные приводятся без указания погрешности, то обычно считается, что эта погрешность составляет  $\pm 0,5$  последней значащей цифры.

Рассмотрим теперь применение вышеизложенных правил к анализу различных частных случаев косвенных измерений.

## 1. Измерение объема шара

$$V = \frac{4\pi}{3} R^3 = \frac{\pi}{6} d^3,$$

где  $R$  — радиус, а  $d$  — диаметр шара.

$$\bar{V} = \left(\frac{1}{6}\right)_{\text{пр}} \pi_{\text{пр}} \bar{d}^3, \quad (\text{а})$$

$$\Delta V = \frac{\pi_{\text{пр}}}{2} \bar{d}^2 \Delta d, \quad (\text{б})$$

$$\ln V = \ln \frac{1}{6} + \ln \pi + 3 \ln d. \quad (\text{в})$$

Погрешность в определении объема обуславливается в основном случайной погрешностью при измерении диаметра. Поэтому для уменьшения погрешности в определении объема следует уменьшить систематические погрешности в определении  $1/6$  и  $\pi$ , связанные с округлением этих чисел.

Оценим величину допустимых погрешностей при округлении, чтобы они не изменили точности определения объема. Для этой цели положим, что они на порядок меньше погрешности, вносимой погрешностью диаметра, т. е.

$$\varepsilon_V \cong 3\varepsilon_d \cong 10 |\varepsilon_\pi| \cong 10 |\varepsilon_{1/6}|, \quad (\text{г})$$

где

$$\frac{1}{6} = 0,16666 \dots$$

Пусть измерения диаметра шара винтовым микрометром дали значение  $d = (12,050 \pm 0,005)$  мм.

Тогда

$$\varepsilon_d = \frac{0,5}{12} \% = 0,04\%, \quad 3\varepsilon_d = 0,1\%.$$

Отсюда  $\varepsilon_\pi \cong 0,01\%$ , т. е.  $\pi_{\text{пр}} = 3,142$ ;  $\varepsilon_{1/6} \cong 0,01\%$  т. е.

$$\varepsilon_{1/6} = 0,0001 = \frac{0,00003}{0,1667} \quad \text{и} \quad (1/6)_{\text{пр}} = 0,1667.$$

## 2. Измерение объема прямоугольной пластины

$$V = abc,$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — стороны пластины.

$$\bar{V} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}, \quad (a)$$

$$\ln V = \ln a + \ln b + \ln c, \quad (b)$$

$$\varepsilon_V^2 = \varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2, \quad (b)$$

$$\Delta V = \bar{V} \cdot \varepsilon_V = \bar{V} \cdot \sqrt{\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2}^* \quad (r)$$

Если измерения сторон пластины производятся одним и тем же измерительным прибором, то при достаточном числе измерений абсолютная погрешность  $\Delta a = \Delta b = \Delta c$  становится равной погрешности прибора. В этом случае

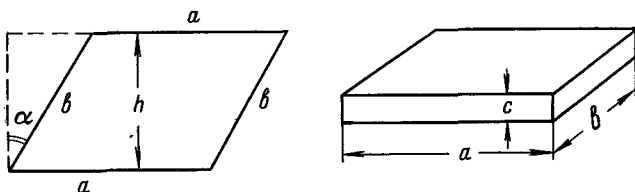


Рис. 13. Систематические погрешности, возникающие из-за неправильного учета формы.

при  $c \ll b \sim a$  погрешность объема  $\varepsilon_V$  будет определяться в основном погрешностью  $\varepsilon_c$ . Действительно, при  $a = b \simeq 3c$   $\varepsilon_a^2 = \varepsilon_b^2 = 1/9\varepsilon_c^2$ , т. е. на порядок меньше  $\varepsilon_c^2$ , и их влиянием можно пренебречь. По этой же причине измерения сторон  $a$  и  $b$  можно производить более грубым прибором — это незначительно увеличит при  $c \ll a \sim b$  относительную погрешность объема.

Следует отметить, что на объем пластины довольно большое влияние оказывает систематическая погрешность, связанная с искажением формы. Если между сторонами  $a$  и  $b$  угол равен не  $\pi/2$ , а  $(\pi/2) - \alpha$ , а угол между стороной  $c$  и плоскостью  $(a, b)$   $(\pi/2) - \beta$ , то площадь поверхности пластины  $S$  равна  $S = ah$ , где  $h = b \cos \alpha$  (рис. 13).

\*) Элементарный вывод соотношения (r) без применения понятия частной производной см. в Приложении V.



Аналогично толщина пластины будет равна  $h_1 = c \cos \beta$ .

При малых значениях  $\alpha$  и  $\beta$  имеем

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \approx 1 - \alpha^2,$$

$$\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta \approx 1 - \beta^2,$$

так как  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\sin \beta \approx \beta$  при малых  $\alpha$  и  $\beta$ . Отсюда

$$\cos \alpha \approx \sqrt{1 - \alpha^2} = (1 - \alpha^2)^{1/2} \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \dots$$

и  $\cos \beta \approx 1 - \frac{1}{2} \beta^2$ . Поэтому

$$V = abc \cos \alpha \cdot \cos \beta.$$

Абсолютная систематическая погрешность при применении формулы  $V = abc$  составляет

$$\begin{aligned} \Delta V &= abc \cos \alpha \cdot \cos \beta - abc = abc (\cos \alpha \cdot \cos \beta - 1) \approx \\ &\approx abc \left[ \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) \left(1 - \frac{\beta^2}{2}\right) - 1 \right] = -abc \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \end{aligned}$$

а относительная погрешность

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta V}{V} = (\cos \alpha \cdot \cos \beta - 1) 100\% = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} 100\%.$$

При  $\alpha = \beta = 1^\circ$ , т. е.  $\alpha = \beta = \frac{2\pi}{360} \text{ рад} = 0,02 \text{ рад}$ ,  $\alpha^2 = \beta^2 = 4 \cdot 10^{-4}$  (радиан<sup>2</sup>). Поэтому систематическая погрешность  $\varepsilon_V = -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \cdot 100\% = -0,04\%$ . Очевидно, что эта величина погрешности будет определять максимальную точность измерений объема, вычисляемого по формуле  $V = abc$ .

### 3. Измерение объема круглого цилиндра

$$V = \frac{\pi}{4} h d^2,$$

где  $h$  — высота,  $d$  — диаметр цилиндра.

$$\bar{V} = \frac{\pi_{\text{пр}}}{4} \bar{h} \cdot \bar{d}^2, \quad (1)$$

$$\ln V = -\ln 4 + \ln \pi + \ln h + 2 \ln d, \quad (2)$$

$$\varepsilon_V^2 = \varepsilon_h^2 + 4\varepsilon_d^2 \approx 100 \varepsilon_\pi^2, \quad (3)$$

так как погрешность в определении  $\pi$  должна быть на порядок меньше погрешности в определении объема:  $\varepsilon_V \cong \cong 10 \varepsilon_\pi$ .

$$\Delta V = \bar{V} \cdot \varepsilon_V = \bar{V} \cdot \sqrt{\varepsilon_h^2 + 4\varepsilon_d^2 *}. \quad (\Gamma)$$

Мы видим, что относительная погрешность измерений диаметра входит в погрешность объема с большим множителем («весом»), чем погрешность измерения высоты (если  $h > d/2$ ). Поэтому для получения большей точности измерения диаметра цилиндра следует производить прибором с меньшей приборной погрешностью.

**4. Измерение ускорения свободного падения при помощи математического маятника.** Из выражения периода колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

получаем

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2},$$

где  $l$  — длина маятника,  $T$  — период его колебаний. Следовательно,

$$\bar{g} = \frac{4\pi^2 \bar{l}}{T^2}, \quad (\alpha)$$

$$\ln g = \ln 4 + 2 \ln \pi + \ln l - 2 \ln T, \quad (\beta)$$

$$\varepsilon_g^2 = \varepsilon_l^2 + 4\varepsilon_T^2 \simeq 400 \varepsilon_\pi^2, \quad (\beta)$$

$$\Delta g = \bar{g} \cdot \varepsilon_g = \bar{g} \cdot \sqrt{\varepsilon_l^2 + 4\varepsilon_T^2}. \quad (\Gamma)$$

Из соотношения (в) видно, что при  $l \geq 30$  см и  $\Delta l = = 0,25$  см необходимо с большой точностью измерить период колебаний. Для этого обычно измеряют не время одного полного колебания  $T$ , а время 50 или 100 полных

\*) Элементарный вывод соотношения (г) без применения понятия частной производной см. в Приложении VI.

колебаний:  $t = 100T$ . В этом случае  $\bar{T} = \bar{t}/100$  и  $\Delta T = \Delta t/100$ .

Зная  $\varepsilon_l$  и  $\varepsilon_T$ , можно по  $\varepsilon^g \simeq 400 \varepsilon_\pi^2$  определить число значащих цифр в  $\pi_{\text{пр}}$  (см. пример 1).

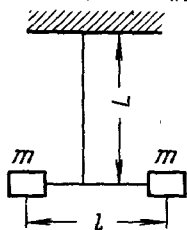


Рис. 14. Схема крутильного маятника.

### 5. Определение модуля сдвига $G$ из колебаний крутильного маятника

$$G = \frac{16 \pi m (l_1^2 - l_2^2)}{r^4 (T_1^2 - T_2^2)} L,$$

где  $r$  — радиус проволоки,  $L$  — длина проволоки,  $m$  — масса одного груза,  $l_1$  и  $l_2$  — расстояния между центрами масс  $m$  в первом и втором опытах,  $T_1$  и  $T_2$  — периоды крутильных колебаний в первом и втором опытах (рис. 14).

$$\bar{G} = \frac{16 \pi_{\text{пр}} m (\bar{l}_1^2 - \bar{l}_2^2)}{r^4 (\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2)} \bar{L}, \quad (a)$$

$$\ln G = \ln 16 + \ln \pi + \ln m + \ln L + \ln (l_1^2 - l_2^2) - 4 \ln r - \ln (T_1^2 - T_2^2), \quad (b)$$

$$\varepsilon_G^2 = \varepsilon_m^2 + \varepsilon_L^2 + 16 \varepsilon_r^2 + \varepsilon_{(l_1^2 - l_2^2)}^2 + \varepsilon_{(T_1^2 - T_2^2)}^2 \simeq 100 \varepsilon_\pi^2, \quad (в)$$

$$\Delta G = \bar{G} \cdot \varepsilon_G, \quad (г)$$

где

$$\varepsilon_{(l_1^2 - l_2^2)}^2 = \frac{4 \bar{l}_1^2 \Delta l_1^2 + 4 \bar{l}_2^2 \Delta l_2^2}{(\bar{l}_1^2 - \bar{l}_2^2)^2},$$

$$\varepsilon_{(T_1^2 - T_2^2)}^2 = \frac{4 T_1^2 \Delta T_1^2 + 4 T_2^2 \Delta T_2^2}{(\bar{T}_1^2 - \bar{T}_2^2)^2}.$$

Выражение для квадрата относительной погрешности  $\varepsilon_G^2$  показывает, что основной вклад в погрешность  $\varepsilon_G$  внесут погрешности  $\varepsilon_r$ ,  $\varepsilon_{(T_1^2 - T_2^2)}$  и  $\varepsilon_{(l_1^2 - l_2^2)}$ . Поэтому радиус проволоки  $r$ , периоды  $T_1$  и  $T_2$  и расстояния  $l_1$  и  $l_2$  следует измерить как можно точнее. После нахождения  $\varepsilon_G$  следует определить число значащих цифр в  $\pi_{\text{пр}}$  (см. пример 1).

**6. Измерение электрического сопротивления катушки.** Рассмотрим теперь оценку точности измерений, когда погрешность прибора задается его классом точности.

При измерении величины электрического сопротивления проволочной катушки приборами класса точности 1\*) были получены следующие значения: сила тока  $I = 17,2 \text{ ма}$ , напряжение  $U = 440 \text{ мв}$ . Необходимо найти сопротивление и оценить точность измерения. Максимальное значение силы тока, измеряемого данным миллиамперметром, равно  $75 \text{ ма}$ , максимальное напряжение  $1,50 \text{ в}$ . Таким образом, приборная погрешность миллиамперметра составляет 1% от  $75 \text{ ма}$ , т. е.  $\Delta I = \pm 75 \cdot 10^{-2} \text{ ма}$ ; приборная погрешность вольтметра равна  $\Delta U = \pm 1,5 \cdot 0,01 = 0,015 \text{ в}$ .

Относительные погрешности равны

$$\varepsilon_I = \pm \frac{0,75}{17,2} = 4,36 \cdot 10^{-2},$$

$$\varepsilon_U = \pm \frac{15 \cdot 10^{-3}}{440 \cdot 10^{-3}} = 3,41 \cdot 10^{-2}.$$

Из закона Ома для участка цепи имеем

$$R = \frac{U}{I}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_R = \sqrt{\varepsilon_I^2 + \varepsilon_U^2} = \sqrt{19,0 + 11,4} \cdot 10^{-2} =$$

$$= \sqrt{30,4} \cdot 10^{-2} = 5,6 \cdot 10^{-2} \simeq 6\%.$$

Поэтому расчет сопротивления  $R$  следует проводить с тремя значащими цифрами:

$$R = \frac{440}{17,2} = 25,6 \text{ ом}$$

и

$$\Delta R = R\varepsilon_R = 25,6 \cdot 5,6 \cdot 10^{-2} = 1,4 \text{ ом}.$$

Таким образом, измерения дают

$$R = (25,6 \pm 1,4) \text{ ом}.$$

Естественно, что по одному измерению судить о надежности измерений невозможно.

\*) Такие приборы позволяют проводить измерения с абсолютной погрешностью в 1% от максимального значения величины, которую можно измерить этим прибором.

## § 6. НАХОЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭМПИРИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

До сих пор мы рассматривали измерения той или иной физической величины, находящейся при проведении всей серии измерений в неизменном состоянии. Однако бывают случаи, когда сама измеряемая величина за время измерений меняется вследствие непостоянства другой величины, связанной с ней. И в этих случаях будет наблюдаться статистический разброс, приводящий к случайным погрешностям. Но этот разброс будет уже проходить не относительно неизменного «истинного» значения или среднего значения измеряемой величины, как рассматривалось ранее, а относительно изменяющегося (например, вследствие изменения времени или температуры) «истинного» значения.

Пусть в результате эксперимента мы получили ряд измерений величины  $y: y_1, y_2, \dots, y_n$ , соответствующих значениям аргумента  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , которые могут быть представлены на графике в виде точек  $(t_1, y_1), (t_2, y_2), \dots, (t_n, y_n)$  (рис. 15), и нам необходимо установить эмпирическую зависимость между  $y$  и  $t$ .

Очевидно, если соединить последовательно все эти точки, то получим ломаную линию, которая ничего общего не будет иметь с искомой зависимостью  $y = f(t)$ . Это следует хотя бы из того, что форма этой ломаной линии не будет воспроизводиться при повторных сериях измерений. Измеренные значения  $y_i$  будут в общем случае смещены относительно искомой кривой  $y = f(t)$  как в сторону больших, так и в сторону меньших значений, вследствие статистического разброса (рис. 16).

Задача состоит в том, чтобы по данным экспериментальным точкам провести кривую (не ломаную), которая проходила бы как можно ближе к истинной функциональной зависимости  $y = f(t)$ . Теория вероятности показывает, что наилучшим приближением будет такая кривая (или прямая) линия, для которой сумма квадратов расстояний по вертикали от точек до кривой будет минимальной. Этот метод и называется методом наименьших квадратов. Сущность этого метода состоит в следующем.

Предположим, что искомая зависимость выражается функцией  $y = f(t, A_1, A_2, \dots, A_m)$ , где  $A_1, A_2, \dots, A_m$  — па-

метры. Значения этих параметров определяются так, чтобы точки  $y_i$  располагались по обе стороны кривой  $y = f(t)$  как можно ближе к последней, т. е. чтобы сумма квадратов отклонений измеренных значений  $y_i$  от функции  $y = f(t)$  была бы наименьшей. Это соответствует предположению, что разброс точек  $y_i$  относительно кривой  $y = f(t)$  подчиняется закону нормального распределения. Как отмечалось выше, мерой этого разброса является дисперсия  $\sigma^2$  или ее приближенное выражение — средний

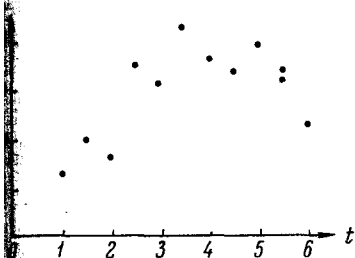


Рис. 15. Положения экспериментальных значений  $(t_i, y_i)$ .

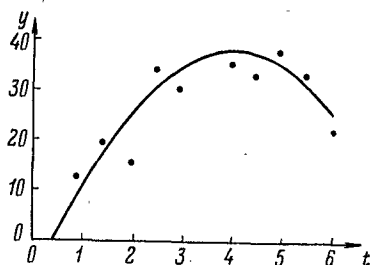


Рис. 16. Кривая  $y = y(t)$ , построенная по значениям  $(t_i, y_i)$  методом наименьших квадратов.

квадрат отклонений

$$\Delta S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - y(t_j))^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - f(t_j))^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \Delta y_j^2, \quad (78)$$

требование минимального разброса соответствует требованию минимального значения этого среднего квадрата.

Как известно, функция  $f(A)$  принимает минимальное значение при  $A = A_{\min}$ , если ее первая производная  $f'(A) = \frac{df}{dA}$  равна нулю, а вторая производная  $f''(A) = \frac{d^2f}{dA^2}$  положительна, при этом значении  $A = A_{\min}$ . Для функции многих переменных эти условия заменяются требованием, чтобы частные производные, т. е. производные по параметру  $A_i$ , удовлетворяли вышеупомянутым условиям, причем все остальные параметры  $A_j$  ( $j \neq i$ ) при вычислении производных считаются постоянными.

Таким образом, из условий минимума мы получаем систему уравнений для определения наилучших значений параметров:

$$\frac{\partial \Delta S_n^2}{\partial A_i} = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n (y_j - f(t_j)) \frac{\partial f(t_j)}{\partial A_i} = 0 \quad (79)$$

$$(i = 1, 2, \dots, m; m < n).$$

Обычно форму зависимости  $y = f(t, A_1, A_2, \dots, A_m)$  задают в виде полинома

$$f(t) = A_0 + A_1(t) + \dots + A_m t^m = \sum_{i=0}^m A_i t^i \quad (m < n - 1) \quad (80)$$

или в виде любой другой системы линейно независимых функций  $\varphi_k(t)$ :

$$f(t) = A_1 \varphi_1(t) + A_2 \varphi_2(t) + \dots + A_m \varphi_m(t) = \sum_{i=1}^m A_i \varphi_i(t) \quad (m < n), \quad (81)$$

достаточно хорошо передающей общий ход зависимости  $y = f(t)$ , который можно установить по расположению точек  $(t_i, y_i)$  на рис. 15.

В случае выбора  $f(t, A_1, \dots, A_m)$  в виде (80) уравнения (79) принимают вид

$$\frac{\partial \Delta S_n^2}{\partial A_i} = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \left( y_j - \sum_{k=0}^m A_k t_j^k \right) t_j^i = 0 \quad (i = 0, 1, \dots, m; m < n - 1),$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^n \left( y_j - \sum_{k=0}^m A_k t_j^k \right) t_j^i = 0$$

или

$$\sum_{k=0}^m A_k \sum_{j=1}^n t_j^{k+i} = \sum_{j=1}^n y_j t_j^i \quad (i = 0, 1, \dots, m; m + 1 < n). \quad (82)$$

В случае выбора разложения  $f(t, A_1, A_2, \dots, A_m)$  в форме (81) уравнения (79) принимают вид

$$\frac{\partial \Delta S_n^2}{\partial A_i} = -\frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \left[ y_j - \sum_{k=1}^m A_k \varphi_k(t_j) \right] \varphi_i(t_j) = 0 \quad (m < n),$$

т. е.

$$\sum_{j=1}^n \left[ y_j - \sum_{k=1}^m A_k \varphi_k(t_j) \right] \varphi_i(t_j) = 0$$

или

$$\sum_{k=1}^m A_k \sum_{j=1}^n \varphi_k(t_j) \varphi_i(t_j) = \sum_{j=1}^n y_j \varphi_i(t_j) \quad (83)$$

( $i = 1, 2, \dots, m; m < n$ ).

Решение этих систем линейных уравнений позволяет однозначно определить коэффициенты  $A_i$  разложения  $y = f(t)$ .

Изложенный выше способ применения метода наименьших квадратов можно обобщить и на некоторые случаи нелинейных зависимостей  $f(t, A_1, A_2, \dots, A_m)$  от параметров, например, для

$$y = f(t, \alpha, \gamma) = \alpha e^{-\gamma t}. \quad (84)$$

В этом случае, однако, целесообразно искать не минимум суммы квадратов отклонений функций  $\sum_{j=1}^n (y_j - y(t_j))^2$ , а минимум суммы квадратов отклонений логарифмов этих же функций

$$\sum_{j=1}^n [\ln y_j - \ln(\alpha e^{-\gamma t_j})]^2,$$

что приводит к уравнениям

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{j=1}^n (\ln y_j - \ln \alpha + \gamma t_j) = 0$$

и

$$\sum_{j=1}^n (\ln y_j - \ln \alpha + \gamma t_j) t_j = 0,$$



т. е. к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} -\gamma \sum_{j=1}^n t_j + n \ln \alpha &= \sum_{j=1}^n \ln y_j, \\ -\gamma \sum_{j=1}^n t_j^2 + \sum_{j=1}^n t_j \ln \alpha &= \sum_{j=1}^n t_j \ln y_j, \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

решение которой дает значения параметров  $\gamma$  и  $\ln \alpha$ :

$$\gamma = \frac{\left(\sum_{j=1}^n t_j\right)\left(\sum_{j=1}^n \ln y_j\right) - n \sum_{j=1}^n t_j \ln y_j}{n \sum_{j=1}^n t_j^2 - \left(\sum_{j=1}^n t_j\right)^2}, \quad (86)$$

$$\ln \alpha = \frac{\left(\sum_{j=1}^n t_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^n \ln y_j\right) - \left(\sum_{j=1}^n t_j\right)\left(\sum_{j=1}^n t_j \ln y_j\right)}{n \sum_{j=1}^n t_j^2 - \left(\sum_{j=1}^n t_j\right)^2}.$$

Рассмотрим применение вышеизложенного метода на конкретных примерах.

Нахождение параметров линейной зависимости вида  $y(t) = a + bt$ . При измерении электрического сопротивления  $R$  проволоки при разной температуре  $t^\circ\text{C}$  были получены следующие результаты, приведенные во втором и третьем столбцах табл. 15.

Таблица 15

$i$	$t_i, ^\circ\text{C}$	$R_i, \text{ом}$	$t_i^2$	$t_i R_i$	$R(t_i)$ выч.	$\Delta R_i$	$\Delta R_i^2 \times 10^4$
1	20,0	86,70	400,0	1734	86,65	+0,05	25
2	24,8	88,03	615,0	2183	88,21	-0,18	324
3	30,2	90,32	912,0	2728	89,97	+0,35	1225
4	35,0	91,15	1225,0	3190	91,53	-0,38	1444
5	40,1	93,26	1608,0	3740	93,18	+0,08	64
6	44,9	94,90	2016,0	4261	94,74	+0,16	256
7	50,0	96,33	2500,0	4816	96,40	-0,07	49
Сумма	245,0	640,69	9276,0	22652	—	+0,01	3387
Среднее	35,0	91,527	1325,1	3236	—	—	—

Найдем температурную зависимость сопротивления волокна. Будем искать ее в виде

$$R = R_0 + at. \quad (87)$$

Применяя метод наименьших квадратов, найдем параметры  $R_0$  и  $a$  этой зависимости.

Потребуем, чтобы сумма квадратов отклонений изменений сопротивлений от вычисленного по соотношению 7) была наименьшей:

$$\sum_{i=1}^n (R_i - R_0 - at_i)^2 = \min. \quad (88)$$

Из этого условия, дифференцируя его сначала по  $R_0$ , а затем по  $a$ , получаем уравнения

$$\begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n (R_i - R_0 - at_i) &= 0, \\ -2 \sum_{i=1}^n (R_i - R_0 - at_i) t_i &= 0, \end{aligned}$$

е.

$$\left. \begin{aligned} n \cdot R_0 + a \sum_{i=1}^n t_i &= \sum_{i=1}^n R_i, \\ \left( \sum_{i=1}^n t_i \right) R_0 + a \sum_{i=1}^n t_i^2 &= \sum_{i=1}^n t_i R_i. \end{aligned} \right\} \quad (89)$$

Из первого уравнения выразим  $R_0$

$$R_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i - \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n t_i = \bar{R} - a \cdot \bar{t}$$

подставляя это выражение для  $R_0$  во второе уравнение, получим соотношение

$$n \cdot \bar{t} (\bar{R} - a \bar{t}) + a \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n t_i R_i$$

из него определим  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n t_i R_i - n \bar{t} \bar{R}}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - n \bar{t}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i R_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \sum_{j=1}^n R_j}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n t_i \right)^2} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n t_i R_i - \bar{t} \sum_{i=1}^n R_i}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - \bar{t} \sum_{i=1}^n t_i}.$$

После этого находим  $R_0$ :

$$R_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i \frac{\sum_{i=1}^n t_i R_i - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n t_i \right) \left( \sum_{j=1}^n R_j \right)}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n t_i \right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^n R_j \right) \left( \sum_{i=1}^n t_i^2 \right) - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n t_i \right) \left( \sum_{j=1}^n t_j R_j \right)}{\sum_{i=1}^n t_i^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n t_i \right)^2}.$$

Подставляя в эти выражения численные значения из табл. 15, получаем

$$\alpha = \frac{22\,652 - 35,0 \cdot 640,69}{9276 - 35,0 \cdot 245,0} = \frac{22\,652 - 22\,424}{9276 - 8575} = \frac{228}{701} = 0,326 \text{ ом/град},$$

$$R_0 = \frac{91,527 \cdot 9276 - 35,0 \cdot 22\,652}{701} = \frac{849\,004 - 792\,820}{701} =$$

$$= \frac{56\,184}{701} = 80,15 \text{ ом}.$$

Таким образом, мы получаем окончательно

$$R = 80,15 + 0,325 \cdot t^\circ = 80,15 (1 + 4,05 \cdot 10^{-3} t^\circ) \text{ ом}. \quad (90)$$

Для сравнения в шестом, седьмом и восьмом столбцах табл. 15 приведены вычисленные значения сопротивления

ний, а также разности  $R_i - R$  и квадраты этих разностей. На рис. 17 изображена зависимость (90) и экспериментальные точки.

Следует отметить, что объем вычислений можно уменьшить, если отсчет температуры и отсчет сопротивлений

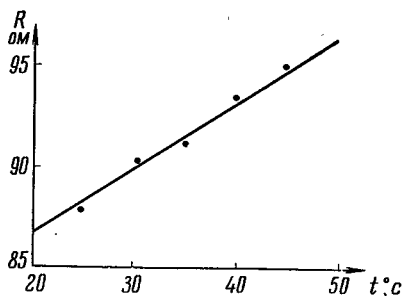


Рис. 17. Эмпирическая зависимость электрического сопротивления от температуры. Точки соответствуют результатам измерений.

производить от средних значений [18], так как в этом случае

$$\sum_{i=1}^n \Delta t_i = \sum_{i=0}^n \Delta R_i = 0^*).$$

Преобразуем выражение суммы квадратов отклонений:

$$\sum_{i=1}^n (R_i - R_0 - at_i)^2 = \sum_{i=1}^n [(R_i - \bar{R}) - (R_0 - \bar{R} + a\bar{t}) - a(t_i - \bar{t})]^2 = \sum_{i=1}^n [\Delta R_i - R^{(0)} - a_1 \Delta t_i]^2 = \min. \quad (91)$$

Здесь  $a_1 = a$  и  $R^{(0)} = R_0 - \bar{R} + a\bar{t}$ . Дифференцируя (91) по  $R^{(0)}$  и  $a_1$  соответственно, получаем вместо (89)

\* ) Чтобы не увеличивать число значащих цифр в  $\Delta R_i$ , можно вместо  $\bar{R}$  за начало отсчета взять любое другое число  ${}_0R$  с числом знаков, равным числу знаков в  $R_i$ , но в этом случае

$$\sum_{i=1}^n \Delta_0 R_i \neq 0, \text{ где } \Delta_0 R_i = R_i - {}_0R.$$

уравнения

$$\left. \begin{aligned} nR^{(0)} &= 0, \\ a_1 \sum_{i=1}^n \Delta t_i^2 &= \sum_{i=1}^n \Delta t_i \Delta R_i. \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

Отсюда

$$R^{(0)} = 0, \\ a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_i \Delta R_i}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i^2},$$

и, возвращаясь к первоначальным параметрам, получаем

$$a = a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta t_i \Delta R_i}{\sum_{i=1}^n \Delta t_i^2}, \\ R_0 = \bar{R} - a_1 \bar{t}.$$

Таблица записи промежуточных данных в этом случае также несколько упрощается (см. табл. 16).

Таблица 16

$i$	$\Delta t_i, \text{ }^\circ\text{C}$	$\Delta R_i, \text{ ом}$	$\Delta t_i^2$	$\Delta t_i \Delta R_i$
1	-15,0	-4,827	225,0	72,40
2	-10,2	-3,497	104,0	35,67
3	-4,8	-1,207	23,0	5,79
4	0	-0,377	0	0
5	+5,1	+1,733	26,0	8,84
6	+9,9	+3,373	98,0	33,39
7	+15,0	+4,803	225,0	72,04
Сумма	0	0	701,0	228,13

После подстановки числовых значений получаем

$$a = \frac{228,13}{701,0} = 0,325 \text{ ом/град},$$

$$R_0 = 91,527 - 0,325 \cdot 35,0 = 80,152 \simeq 80,15 \text{ ом}.$$

Нахождение параметров квадратичной зависимости вида  $y(t) = a + bt + ct^2$ . Требуя, чтобы сумма квадратов отклонений имела минимальное значение

$$\Delta S_n^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2)^2 = \min,$$

дифференцируя это соотношение по  $a$ ,  $b$  и  $c$ , получаем соответственно уравнения

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2) t_i &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - a - bt_i - ct_i^2) t_i^2 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

г. е.

$$\left. \begin{aligned} na + b \sum_{i=1}^n t_i + c \sum_{i=1}^n t_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n t_i + b \sum_{i=1}^n t_i^2 + c \sum_{i=1}^n t_i^3 &= \sum_{i=1}^n t_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n t_i^2 + b \sum_{i=1}^n t_i^3 + c \sum_{i=1}^n t_i^4 &= \sum_{i=1}^n t_i^2 y_i. \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

Из этой системы можно определить значения параметров  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

Если один из параметров зависимости, например  $b$ , равен нулю (по тем или иным соображениям), то система уравнений для этого случая может быть получена из первого и третьего уравнений, полагая в них  $b = 0$ :

$$\left. \begin{aligned} na + c \sum_{i=1}^n t_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i, \\ a \sum_{i=1}^n t_i^2 + c \sum_{i=1}^n t_i^4 &= \sum_{i=1}^n t_i^2 y_i. \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

Отсюда

$$\left. \begin{aligned}
 c &= \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^n t_j^2}{\sum_{i=1}^n t_i^4 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^2}, \\
 a &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i^2 \frac{\sum_{i=1}^n t_i^2 y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sum_{j=1}^n t_j^2}{\sum_{i=1}^n t_i^4 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^2}.
 \end{aligned} \right\} (95)$$

В этом частном случае, если отсчеты  $y_i$  и  $t_i$  вести от средних значений  $\bar{t}$  и  $\bar{y}$ , то это только усложнит расчеты, так как

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n (y_i - a - ct_i^2)^2 &= \sum_{i=1}^n [(y_i - \bar{y}) - (a - \bar{y} + ct_i^2) - \\
 &\quad - 2c\bar{t}(t_i - \bar{t}) - c(t_i - \bar{t})^2]^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^n [\Delta y_i - a_1 - (2\bar{t}\Delta t_i + \Delta t_i^2)c]^2 = \min,
 \end{aligned}$$

где  $a_1 = a - \bar{y} + ct^2$ , и уравнения (94) принимают вид

$$\begin{aligned}
 na_1 + c \sum_{i=1}^n \Delta t_i^2 &= 0, \\
 a_1 \sum_{i=1}^n \Delta t_i^2 + c \left( 4\bar{t}^2 \sum_{i=1}^n \Delta t_i^2 + 4\bar{t} \sum_{i=1}^n \Delta t_i^3 + \sum_{i=1}^n \Delta t_i^4 \right) &= \\
 &= 2\bar{t} \sum_{i=1}^n \Delta t_i \Delta y_i + \sum_{i=1}^n \Delta t_i^2 \Delta y_i.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим применение полученных формул на конкретном примере.

На машине Атвуда с контактным электрическим секундомером измерялось время, необходимое для прохождения различных расстояний. Из пяти серий измерений были определены средние значения  $t_i$  для каждого расстояния  $S_i$ . Эти усредненные значения  $S_i$  и  $t_i$  приве-

дены во втором и третьем столбцах табл. 17. В четвертом, пятом и шестом столбцах приведены значения  $t_i^2$ ,  $t_i^4$  и  $t_i^2 S_i$ . В нижней строке приведены суммы соответствующих величин.

Таблица 17

$i$	$S_i, м$	$t_i, сек$	$t_i^2$	$t_i^4$	$t_i^2 S_i$
1	0,20	1,236	1,5277	2,334	0,3056
2	0,30	1,580	2,4964	6,232	0,7488
3	0,40	1,838	3,3782	11,412	1,3513
4	0,50	2,012	4,0481	16,386	2,0240
5	0,60	2,260	5,1076	26,088	3,0646
6	0,70	2,398	5,7504	33,067	4,0253
7	0,80	2,536	6,4313	41,362	5,1450
Сумма	3,50	13,860	28,7397	136,881	16,6646

Будем искать зависимость пройденного пути  $S$  от времени  $t$  в виде

$$S = S_0 + \frac{wt^2}{2},$$

где  $S_0$  — положение груза в начальный момент времени,  $w$  — ускорение системы. (При этом мы считаем, что начальная скорость  $v_0 \equiv 0$ .) Применяя соотношения (95) при  $a = S_0$ ,  $c = \frac{w}{2}$ , получаем

$$w = \frac{2 \sum_{i=1}^7 t_i^2 S_i - \frac{2}{7} \left( \sum_{i=1}^7 S_i \right) \left( \sum_{j=1}^7 t_j^2 \right)}{\sum_{i=1}^7 t_i^4 - \frac{1}{7} \left( \sum_{i=1}^7 t_i^2 \right)^2} = \frac{33,329 - 1,0 \cdot 28,740}{136,88 - \frac{1}{7} (28,740)^2} = \frac{4,589}{18,88} = 0,2431 \text{ м/сек}^2,$$

$$S_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^7 S_i - \frac{w}{2 \cdot 7} \sum_{i=1}^7 t_i^2 = 0,5000 - \frac{0,1215 \cdot 28,740}{7} = 0,5000 - 0,4988 = 0,0012 \text{ м} = 1,2 \text{ мм}.$$



**Нахождение параметров нелинейной зависимости.**  
 При определении средней теплоты испарения воды были получены значения давления насыщающих паров, представленные в табл. 18.

Таблица 18

<i>i</i>	<i>T</i> , °К	<i>P</i> , мм рт. ст.	<i>i</i>	<i>T</i> , °К	<i>P</i> , мм рт. ст.
1	295	19	14	308	34
2	296	20	15	309	35
3	297	20,5	16	310	36
4	298	21	17	311	38
5	299	22	18	312	40
6	300	23	19	313	42
7	301	24	20	314	44
8	302	25	21	315	46
9	303	27	22	316	47
10	304	28	23	317	48
11	305	30	24	318	49
12	306	32	25	319	51
13	307	33			

При изменении температуры  $T$  в небольшом интервале  $\Delta T$  зависимость давления насыщающих паров жидкости теоретически может быть представлена в виде

$$P = P_0 e^{-\frac{\mu L}{RT}},$$

где  $L$  — удельная теплота испарения воды,  $\mu$  — молярная масса,  $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — абсолютная температура,  $P_0$  — некоторая постоянная.

В действительности теплота испарения сама несколько изменяется с изменением температуры. Но в узком интервале изменения температур ее можно считать постоянной и равной среднему значению для этого интервала температур. В рассматриваемом примере температура изменяется в диапазоне от 22 до 46° С, т. е.  $\Delta T = 24^\circ \text{С}$ , что значительно меньше значений рассматриваемых абсолютных температур ( $\sim 300^\circ \text{К}$ ). Таким образом, теплоту испарения воды в данной задаче можно считать постоянной. Определим ее значение из результатов измерений, представленных в табл. 18.

Так как зависимость давления от температуры и теплоты испарения воды является нелинейной, то метод наименьших квадратов следует применять не к самим давлениям, а к логарифмам. Логарифмируя зависимость  $P = P_0 e^{-\frac{\mu L}{RT}}$ , получим

$$\ln P = \ln P_0 - \frac{\mu L}{R} \frac{1}{T} = \ln P_0 - b \frac{1}{T},$$

где  $b = \frac{\mu L}{R}$ . Из условия минимума суммы

$$\sum_{i=1}^n \left( \ln P_i - \ln P_0 + b \frac{1}{T_i} \right)^2 = \min,$$

после дифференцирования этой суммы по  $\ln P_0$  и  $b$ , получаем уравнения

$$\left. \begin{aligned} n \ln P_0 &= \sum_{i=1}^n \ln P_i + b \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i}, \\ \ln P_0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} &= \sum_{i=1}^n \ln P_i \frac{1}{T_i} + b \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{T_i} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Из первого уравнения получаем

$$\ln P_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln P_i + \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \quad (97)$$

и, подставив это выражение во второе уравнение, получаем уравнение для определения  $b$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \ln P_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right) + \frac{b}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right)^2 &= \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\ln P_i}{T_i} + b \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{T_i} \right)^2. \end{aligned}$$

Отсюда

$$b = \frac{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \ln P_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\ln P_i}{T_i}}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{T_i} \right)^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right)^2}. \quad (98)$$

Подставляя это выражение для  $b$  в формулу (97), можно определить  $\ln P_0$ . Таким образом, эмпирическая зависимость давления насыщающих паров воды от температуры и теплоты испарения будет полностью определена.

Перейдем теперь к конкретному расчету  $L$  по измерениям, приведенным в табл. 18.

Результаты измерений представим в табл. 19.

Таблица 19

$i$	$\ln P_i$	$\frac{1}{T_i} \cdot 10^3$	$\left(\frac{1}{T_i}\right) \cdot 10^7$	$\left(\frac{\ln P_i}{T_i}\right) \cdot 10^3$
1	2,9444	3,390	1,14921	0,9982
2	2,9957	3,378	1,14109	1,0119
3	3,0204	3,367	1,13367	1,0170
4	3,0445	3,356	1,12627	1,0217
5	3,0910	3,344	1,11823	1,0336
6	3,1355	3,333	1,11089	1,0451
7	3,1781	3,322	1,10357	1,0558
8	3,2189	3,311	1,09627	1,0658
9	3,2958	3,300	1,08900	1,0876
10	3,3322	3,289	1,08175	1,0960
11	3,4012	3,279	1,07518	1,1153
12	3,4657	3,268	0,06798	1,1326
13	3,4965	2,257	1,06080	1,1388
14	3,5264	2,247	1,05430	1,1450
15	3,5554	2,236	1,04717	1,1505
16	3,5835	3,226	1,04071	1,1560
17	3,6376	3,215	1,03362	1,1695
18	3,6889	3,205	1,02720	1,1823
19	3,7377	3,195	1,02080	1,1942
20	3,7842	3,185	1,01442	1,2053
21	3,8286	3,175	1,00806	1,2156
22	3,8502	3,165	1,00172	1,2186
23	3,8712	3,155	0,99540	1,2214
24	3,8918	3,145	0,98910	1,2240
25	3,9318	3,135	0,98282	1,2326
Сумма	86,5072	81,478	26,56923	28,1344

Из данных, приведенных в табл. 19, получаем следующие значения параметров:

$$b = \frac{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \ln P_i \right) \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\ln P_i}{T_i}}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{T_i} \right)^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} \right)^2} =$$

$$= \frac{4 \cdot 10^{-2} \cdot 86,5072 \cdot 8,1478 \cdot 10^{-2} - 28,1344 \cdot 10^{-2}}{26,5692 - 4 \cdot 10^{-2} \cdot 66,3866 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= \frac{28,1937 - 28,1344}{26,5692 - 26,5546} = \frac{5,93}{1,46} = 4,06$$

и

$$\ln P_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln P_i + \frac{b}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{T_i} =$$

$$= \frac{86,5072}{25} + \frac{4,06}{25} \cdot 8,1478 \cdot 10^{-2} = 3,4603 + 1,32 \cdot 10^{-2} = 3,4735.$$

Таким образом, получаем

$$\ln P = 3,4735 - \frac{4,06}{T}$$

или

$$P = 32,25e^{-\frac{4,06}{T}}.$$

Наконец, по величине параметра  $b$  определяем среднюю удельную теплоту испарения воды:

$$L = \frac{bR}{\mu} = \frac{4,06 \cdot 8,314}{18} = 18,7 \text{ дж/град} \cdot \text{моль}.$$

(Это соответствует значению 447 кал/град·моль.)

Полученный результат заметно отличается от приводимого обычно в таблицах физических величин, что, по-видимому, может быть объяснено как наличием систематических погрешностей, так и недостаточной точностью приборов, измеряющих температуру (контактный термометр) и давление (U-образный ртутный манометр).

## § 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При обработке результатов измерений мы предлагаем следующий порядок операций:

### А. Для прямых измерений

1. Результаты каждого измерения записываются в таблицу.

2. Вычисляется среднее значение из  $n$  измерений

$$\bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i.$$

3. Находятся погрешности отдельных измерений

$$\Delta a_i = \bar{a} - a_i.$$

4. Вычисляются квадраты погрешностей отдельных измерений  $(\Delta a_i)^2$ .

5. Если одно (или два) измерение резко отличается по своему значению от остальных измерений, то следует проверить, не является ли оно промахом.

6. Определяется средняя квадратичная погрешность результата серии измерений

$$\Delta S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a_i)^2}{n(n-1)}}.$$

7. Задается значение надежности  $\alpha$ .

8. Определяется коэффициент Стьюдента  $t_{\alpha}(n)$  для заданной надежности  $\alpha$  и числа произведенных измерений  $n$  (по таблице Приложения VII).

9. Находятся границы доверительного интервала (погрешность результата измерений)

$$\Delta a = t_{\alpha}(n) \cdot \Delta S_{\bar{a}}.$$

10. Если величина погрешности результата измерений (определяемая в п. 9) окажется сравнимой с величиной погрешности прибора, то в качестве границы доверительного интервала следует взять величину

$$\Delta a = \sqrt{t_{\alpha}^2(n) \Delta S_{\bar{a}}^2 + \left(\frac{k_{\alpha}}{3}\right)^2 \delta^2}, \quad k_{\alpha} \equiv t_{\alpha}(\infty),$$

где  $\delta$  — величина погрешности прибора.

Приближенное определение погрешностей функции  $z$  одного переменного

№ п/п	Вид функции $z = z(a)$	Абсолютная погрешность $\Delta z$	Относительная погрешность $\epsilon = \frac{\Delta z}{z}$
1	$ca, c = \text{const}$	$c\Delta a$	$\frac{\Delta a}{\bar{a}}$
2	$a^n, n \geq 0$	$n\bar{a}^{(n-1)} \Delta a$	$n \frac{\Delta a}{\bar{a}}$
3	$\frac{a}{1+a}$	$\frac{(1+\bar{a}-\bar{a})}{(1+\bar{a})^2} \Delta a =$ $= \frac{\Delta a}{(1+\bar{a})^2}$	$\frac{\Delta a}{\bar{a}(1+\bar{a})}$
4	$\frac{a}{1-a}$	$\frac{(1-\bar{a}+\bar{a})}{(1-\bar{a})^2} \Delta a =$ $= \frac{\Delta a}{(1-\bar{a})^2}$	$\frac{\Delta a}{\bar{a}(1-\bar{a})}$
5	$\sqrt[n]{a}$	$\frac{1}{n} \bar{a}^{\left(\frac{1}{n}-1\right)} \Delta a =$ $= \frac{1}{n} \frac{\sqrt[n]{\bar{a}}}{\bar{a}} \Delta a$	$\frac{1}{n} \frac{\Delta a}{\bar{a}}$
6	$\frac{a}{e^c}, c = \text{const}$	$\frac{\bar{a}}{e^c} \Delta a$ *)	$\frac{\Delta a}{c}$
7	$\frac{a}{A^c}, c = \text{const}$ $A = \text{const}$	$A^{\frac{\bar{a}}{c}} \ln A \frac{\Delta a}{c}$	$\ln A \frac{\Delta a}{c}$
8	$\ln a$	$\frac{\Delta a}{\bar{a}}$	$\frac{\Delta a}{\ln \bar{a} \cdot \bar{a}}$
9	$\sin\left(\frac{a}{c}\right), c = \text{const}$	$\cos\left(\frac{\bar{a}}{c}\right) \frac{\Delta a}{c}$	$\text{ctg}\left(\frac{\bar{a}}{c}\right) \frac{\Delta a}{c}$
10	$\cos\left(\frac{a}{c}\right), c = \text{const}$	$\sin\left(\frac{\bar{a}}{c}\right) \frac{\Delta a}{c}$	$\text{tg}\left(\frac{\bar{a}}{c}\right) \frac{\Delta a}{c}$
11	$\text{tg}\left(\frac{a}{c}\right), c = \text{const}$	$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\bar{a}}{c}\right)} \frac{\Delta a}{c}$	$\frac{2}{\sin\left(\frac{2\bar{a}}{c}\right)} \frac{\Delta a}{c}$
12	$\text{ctg}\left(\frac{a}{c}\right), c = \text{const}$	$\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\bar{a}}{c}\right)} \frac{\Delta a}{c}$	$\frac{2}{\sin\left(\frac{2\bar{a}}{c}\right)} \frac{\Delta a}{c}$

\*) Для достаточно больших значений  $|c|$  ( $\bar{a} \ll |c|$ ). См. [28].

11. Окончательный результат записывается в виде

$$a = \bar{a} \pm \Delta a.$$

12. Оценивается относительная погрешность результата серии измерений

$$\varepsilon = \frac{\Delta a}{\bar{a}} 100\%.$$

Здесь

$$\Delta a = t_{\alpha}(n) \Delta S_{\bar{a}}, \quad \Delta S_{\bar{a}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (a_i - \bar{a})^2},$$

$t_{\alpha}(n)$  — коэффициент Стьюдента для заданной надежности  $\alpha$ ,  
 $\bar{z} - \Delta z \leq z \leq \bar{z} + \Delta z$ .

### Б. Для косвенных измерений

1. Для каждой серии измерений величин, входящих в определение искомой величины, проводится обработка, как описано в пункте А. При этом для всех измеряемых величин задают одно и то же значение надежности  $\alpha$ .

2. Находится выражение для абсолютной и относительной погрешностей искомой величины в соответствии с конкретным видом функциональной зависимости (см. табл. 20 и 21).

3. Оцениваются границы доверительного интервала для результата косвенных измерений

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial c}\right)^2 \Delta c^2 + \dots},$$

где производные  $\frac{\partial f}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial c}$ , ... вычисляются при  $a = \bar{a}$ ,  $b = \bar{b}$ ,  $c = \bar{c}$ , ...

4. Окончательный результат записывается в виде

$$f(a, b, c, \dots) = f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \pm \Delta f.$$

5. Определяется относительная погрешность результата серии косвенных измерений

$$\varepsilon = \frac{\Delta f}{f} 100\%.$$

Приближенное определение погрешностей функции  $z$  нескольких переменных

№ п/п	Вид функции $z = z(a, b, c, \dots)$	Абсолютная погрешность $\Delta z$	Относительная погрешность $\epsilon = \frac{\Delta z}{z}$
1	$Aa + Bb$ ( $A = \text{const}, B = \text{const}$ )	$\sqrt{A^2 \Delta a^2 + B^2 \Delta b^2}$	$\frac{\sqrt{A^2 \Delta a^2 + B^2 \Delta b^2}}{A\bar{a} + B\bar{b}}$
2	$Aa - Bb$ ( $A = \text{const}, B = \text{const}$ )	$\sqrt{A^2 \Delta a^2 + B^2 \Delta b^2}$	$\frac{\sqrt{A^2 \Delta a^2 + B^2 \Delta b^2}}{A\bar{a} - B\bar{b}}$
3	$Pa + Rb + Qc$ ( $P = \text{const}, R = \text{const},$ $Q = \text{const}$ )	$\sqrt{P^2 \Delta a^2 + R^2 \Delta b^2 + Q^2 \Delta c^2}$	$\frac{\sqrt{P^2 \Delta a^2 + R^2 \Delta b^2 + Q^2 \Delta c^2}}{P\bar{a} + R\bar{b} + Q\bar{c}}$
4	$ab$	$\sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2}$	$\frac{\sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2}}{\bar{a} \cdot \bar{b}} =$ $= \sqrt{\frac{\Delta a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\Delta b^2}{\bar{b}^2}}$
5	$abc$	$\sqrt{\bar{b}^2 \bar{c}^2 \Delta a^2 + \bar{c}^2 \bar{a}^2 \Delta b^2 + \bar{a}^2 \bar{b}^2 \Delta c^2}$	$\sqrt{\frac{\Delta a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\Delta b^2}{\bar{b}^2} + \frac{\Delta c^2}{\bar{c}^2}}$
6	$\frac{a}{b}$	$\frac{\sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2}}{\bar{b}^2} = \sqrt{\frac{\Delta a^2}{\bar{b}^2} + \frac{\bar{a}^2 \Delta b^2}{\bar{b}^4}}$	$\sqrt{\frac{\Delta a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\Delta b^2}{\bar{b}^2}}$



Таблица 21 (продолжение)

№ п/п	Вид функции $z = z(a, b, c, \dots)$	Абсолютная погрешность $\Delta z$	Относительная погрешность $\varepsilon = \frac{\Delta z}{z}$
7	$a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}$ $(\alpha = \text{const}, \beta = \text{const}, \gamma = \text{const})$	$(\alpha^2 \bar{b}^{2\beta} \bar{c}^{2\gamma} \bar{a}^{2(\alpha-1)} \Delta a^2 + \beta^2 \bar{c}^{2\gamma} \bar{a}^{2\alpha} \bar{b}^{2(\beta-1)} \Delta b^2 + \gamma^2 \bar{a}^{2\alpha} \bar{b}^{2\beta} \bar{c}^{2(\gamma-1)} \Delta c^2)^{1/2}$	$\sqrt{\alpha^2 \frac{\Delta a^2}{\bar{a}^2} + \beta^2 \frac{\Delta b^2}{\bar{b}^2} + \gamma^2 \frac{\Delta c^2}{\bar{c}^2}}$
8	$\frac{a}{a+b}$	$\sqrt{\frac{\bar{b}^2 \Delta a^2}{(\bar{a} + \bar{b})^4} + \frac{\bar{a}^2 \Delta b^2}{(\bar{a} + \bar{b})^4}} = \frac{\sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2}}{(\bar{a} + \bar{b})^3}$	$\frac{\sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2}}{\bar{a}(\bar{a} + \bar{b})}$
9	$\frac{a}{a-b}$	$\frac{\sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2}}{(\bar{a} - \bar{b})^3}$	$\frac{\sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2}}{\bar{a}(\bar{a} - \bar{b})}$
10	$\frac{a^2}{b} + b$	$\sqrt{\frac{4\bar{a}^2 \Delta a^2}{\bar{b}^3} + \left(1 - \frac{\bar{a}^2}{\bar{b}^2}\right)^2 \Delta b^2}$	$\frac{\sqrt{4\bar{a}^2 \bar{b}^2 \Delta a^2 + (\bar{b}^2 - \bar{a}^2)^2 \Delta b^2}}{\bar{b}(\bar{a}^2 + \bar{b}^2)}$
11	$ab + c$	$\sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2 + \Delta c^2}$	$\frac{\sqrt{\bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2 + \Delta c^2}}{\bar{a}\bar{b} + \bar{c}}$
12	$a(b+c)$	$\sqrt{(\bar{b} + \bar{c})^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 (\Delta b^2 + \Delta c^2)}$	$\frac{\sqrt{(\bar{b} + \bar{c})^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 (\Delta b^2 + \Delta c^2)}}{\bar{a}(\bar{b} + \bar{c})}$

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### I. Оценка среднего квадрата погрешности, распределенной по нормальному закону

Как известно, среднее значение квадратов величин, имеющих разную вероятность («вес»), можно записать в виде

$$\overline{(\Delta a^*)^2} = \sum_{i=1}^n \Delta a_i^{*2} \cdot P_i, \quad \sum_{i=1}^n P_i = 1,$$

где  $P_i$  — вероятность появления величины  $\Delta a_i^*$ .

Для непрерывного изменения величин  $\Delta a_i^{*2}$  роль «веса» играет плотность распределения вероятности  $y$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \overline{(\Delta a^*)^2} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (\Delta a^*)^2 e^{-\frac{(\Delta a^*)^2}{2\sigma^2}} d(\Delta a^*) = \\ &= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-z^2} dz^2 = \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \left[ -z e^{-z^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz \right] = \frac{\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sigma^2. \end{aligned}$$

При этом мы использовали интеграл Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

Таким образом,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta a_i^*)^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta S_n^{**} = \sigma^2$

## II. Вывод формулы (45)

Истинное значение аргумента  $a$  можно представить в виде (см. (10) на стр. 18)

$$a = \bar{a} + \widetilde{\Delta a}. \quad (\text{II.1})$$

Таким образом,

$$z = f(a) = f(\bar{a} + \widetilde{\Delta a}). \quad (\text{II.2})$$

Разложим функцию  $f(a)$  в ряд Тейлора, сохраняя лишь члены с нулевой и первой степенью  $\widetilde{\Delta a}$  (мы считаем при этом, что  $\widetilde{\Delta a} \ll \bar{a}$ ):

$$f(a) = f(\bar{a} + \widetilde{\Delta a}) = f(\bar{a}) + f'(\bar{a}) \widetilde{\Delta a} + \dots, \quad (\text{II.3})$$

где  $f'(\bar{a})$  — производная функция  $f(a)$  по  $a$ , взятая в точке  $\bar{a}$ .

В этом случае средний квадрат абсолютной погрешности  $\Delta z$ , т. е. средний квадрат отклонения истинного значения  $z$  от среднего значения  $\bar{z} = f(\bar{a})$ , равен

$$\Delta z^2 = \overline{(z - \bar{z})^2} = \overline{[f(a) - f(\bar{a})]^2} \approx \overline{[f'(\bar{a}) \widetilde{\Delta a}]^2} \approx [f'(\bar{a})]^2 \Delta a^2. \quad (\text{II.4})$$

Черта сверху означает усреднение по распределению. См. также сноску к Приложению III.

## III. Вывод формул (56) и (59)

Разложим функцию  $f(a, b, c, \dots)$  в ряд Тейлора, сохраняя члены с нулевыми и первыми степенями погрешностей  $\widetilde{\Delta a}$ ,  $\widetilde{\Delta b}$ ,  $\widetilde{\Delta c}$ , ...:

$$\begin{aligned} f(a, b, c, \dots) &= f(\bar{a} + \widetilde{\Delta a}, \bar{b} + \widetilde{\Delta b}, \bar{c} + \widetilde{\Delta c}, \dots) = \\ &= f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) + \frac{\partial f}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \widetilde{\Delta a} + \\ &+ \frac{\partial f}{\partial b}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \widetilde{\Delta b} + \frac{\partial f}{\partial c}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \widetilde{\Delta c} + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta z^2 &= \overline{(z - \bar{z})^2} = \overline{[f(a, b, c, \dots) - f(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots)]^2} = \\ &= \overline{\left[ \frac{\partial f}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \widetilde{\Delta a} + \frac{\partial f}{\partial b}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \widetilde{\Delta b} + \frac{\partial f}{\partial c}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \times \right.} \\ &\quad \left. \times \widetilde{\Delta c} \dots \right]^2} \cong \overline{\left[ \frac{\partial f}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \right]^2 \overline{\Delta a^2} + \left[ \frac{\partial f}{\partial b}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \right]^2 \overline{\Delta b^2} +} \\ &\quad + \overline{\left[ \frac{\partial f}{\partial c}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) \right]^2 \overline{\Delta c^2}} + \dots = \left( \frac{\partial f}{\partial a} \right)^2 \Delta a^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial b} \right)^2 \Delta b^2 + \\ &\quad + \left( \frac{\partial f}{\partial c} \right) \Delta c^2 + \dots \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

Усреднение ведется по соответствующим распределениям. При этом мы пренебрегаем изменением производных  $\frac{\partial f}{\partial a}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial b}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial c}$ , ... в интервалах  $(-\Delta a, +\Delta a)$ ,  $(-\Delta b, +\Delta b)$ ,  $(-\Delta c, +\Delta c)$ , ... Учет этого изменения приведет к появлению членов высшего порядка малости:  $\Delta a^4$ ,  $\Delta a^2 \Delta b^2$ ,  $\Delta b^4$  и т. п.

Действительно, эти производные можно представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots) = \frac{\partial f}{\partial a}(a, b, c, \dots) - \frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a, b, c, \dots) \widetilde{\Delta a} - \\ - \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a, b, c, \dots) \widetilde{\Delta b} - \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c}(a, b, c, \dots) \widetilde{\Delta c} - \dots \text{ и т. п.}$$

Так как  $\frac{\partial f}{\partial a}(a, b, c, \dots)$  является постоянной, то изменение  $\frac{\partial f}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots)$  определяется членами

$$\frac{\partial^2 f}{\partial a^2}(a, b, c, \dots) \widetilde{\Delta a}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial b}(a, b, c, \dots) \widetilde{\Delta b}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial a \partial c}(a, b, c, \dots) \widetilde{\Delta c},$$

которые по исходному предположению (см. разложение Тейлора) мы считаем малыми по сравнению с  $\frac{\partial f}{\partial a}(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots)$ .

Извлекая квадратный корень из (III.2), получим (59). Частным случаем (59) является (56).

#### IV. Элементарный вывод соотношений (72) и (75)

Погрешность произведения двух величин  $a$  и  $b$  определяется отклонением произведения «истинных» значений  $a$  и  $b$  от произведения средних значений  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Выражая истинные значения при помощи соотношений (10) (стр. 18)  $a = \bar{a} + \widetilde{\Delta a}$ ,  $b = \bar{b} + \widetilde{\Delta b}$ , мы можем записать средний квадрат абсолютной погрешности произведения  $z = ab$  в виде

$$\Delta z^2 = \overline{(z - \bar{z})^2} = \overline{(ab - \bar{a}\bar{b})^2} = \overline{[(\bar{a} + \widetilde{\Delta a})(\bar{b} + \widetilde{\Delta b}) - \bar{a}\bar{b}]^2} = \\ = \overline{\bar{b}^2 \widetilde{\Delta a}^2 + 2\bar{a}\bar{b} \widetilde{\Delta a} \widetilde{\Delta b} + \bar{a}^2 \widetilde{\Delta b}^2} \approx \bar{b}^2 \Delta a^2 + \bar{a}^2 \Delta b^2. \quad (72)$$

Усреднение проводится по соответствующим распределениям. Аналогично средний квадрат абсолютной погрешности отношения  $z = \frac{a}{b}$  можно представить в виде

$$\Delta z^2 = \overline{(z - \bar{z})^2} = \overline{\left[ \frac{a}{b} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right]^2} = \overline{\left[ \frac{\bar{a} + \widetilde{\Delta a}}{\bar{b} + \widetilde{\Delta b}} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right]^2} = \\ = \overline{\left[ \frac{(\bar{a} + \widetilde{\Delta a})(\bar{b} - \widetilde{\Delta b})}{\bar{b}^2 - \widetilde{\Delta b}^2} - \frac{\bar{a}}{\bar{b}} \right]^2} = \frac{1}{\bar{b}^4} \overline{(\bar{b} \widetilde{\Delta a} - \bar{a} \widetilde{\Delta b})^2} = \\ = \frac{\Delta a^2}{\bar{b}^2} + \frac{\bar{a}^2 \Delta b^2}{\bar{b}^4}. \quad (75)$$

## V. Элементарный вывод выражения для погрешности объема параллелепипеда

Пусть  $V = abc$  и  $\bar{V} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}$ , причем

$$a = \bar{a} + \widetilde{\Delta a}, \quad b = \bar{b} + \widetilde{\Delta b}, \quad c = \bar{c} + \widetilde{\Delta c}.$$

Тогда средний квадрат абсолютной погрешности объема можно представить в виде

$$\begin{aligned} \Delta V^2 &= \overline{(V - \bar{V})^2} = \overline{(abc - \bar{a}\bar{b}\bar{c})^2} = \\ &= \overline{[(\bar{a} + \widetilde{\Delta a})(\bar{b} + \widetilde{\Delta b})(\bar{c} + \widetilde{\Delta c}) - \bar{a}\bar{b}\bar{c}]^2} = \\ &= \overline{[\widetilde{bc\Delta a} + \widetilde{ac\Delta b} + \widetilde{ab\Delta c}]^2} = \\ &= \overline{\bar{b}^2\bar{c}^2\Delta a^2 + \bar{a}^2\bar{c}^2\Delta b^2 + \bar{a}^2\bar{b}^2\Delta c^2} = \\ &= \bar{a}^2\bar{b}^2\bar{c}^2 \left( \frac{\Delta a^2}{\bar{a}^2} + \frac{\Delta b^2}{\bar{b}^2} + \frac{\Delta c^2}{\bar{c}^2} \right) = \bar{V}^2 (\varepsilon_a^2 + \varepsilon_b^2 + \varepsilon_c^2), \end{aligned}$$

## VI. Элементарный вывод выражения для погрешности объема круглого цилиндра

Пусть

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 h \quad \text{и} \quad \bar{V} = \frac{\pi}{4} \bar{d}^2 \bar{h},$$

причем

$$d = \bar{d} + \widetilde{\Delta d} \quad \text{и} \quad h = \bar{h} + \widetilde{\Delta h}.$$

Средний квадрат абсолютной погрешности объема равен

$$\begin{aligned} \Delta V^2 &= \overline{(V - \bar{V})^2} = \frac{\pi^2}{16} \overline{(d^2 h - \bar{d}^2 \bar{h})^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{16} \overline{[(\bar{d} + \widetilde{\Delta d})^2 (\bar{h} + \widetilde{\Delta h}) - \bar{d}^2 \bar{h}]^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{16} \overline{[2\bar{d}\bar{h}\widetilde{\Delta d} + \bar{d}^2\widetilde{\Delta h}]^2} = \\ &= \frac{\pi^2}{16} \overline{(4\bar{d}^2\bar{h}^2\Delta d^2 + \bar{d}^4\Delta h^2)} = \\ &= \frac{\pi^2}{16} \bar{d}^4 \bar{h}^2 \left( 4 \frac{\Delta d^2}{\bar{d}^2} + \frac{\Delta h^2}{\bar{h}^2} \right) = \bar{V}^2 (4\varepsilon_d^2 + \varepsilon_h^2). \end{aligned}$$

## VII. Коэффициенты Стьюдента $t_\alpha$

$\alpha$  $n-1$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
1	6,31	12,7	31,8	63,7	636,6
2	2,92	4,30	6,96	9,92	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
5	2,02	2,57	3,36	4,03	6,87
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	5,41
8	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
20	1,72	2,09	2,53	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,75
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,73
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,71
27	1,70	2,05	2,47	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,47	2,76	3,67
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,65
32	1,69	2,04	2,45	2,74	3,62
34	1,69	2,03	2,44	2,73	3,60
36	1,69	2,03	2,43	2,72	3,58
38	1,69	2,02	2,43	2,71	3,57
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,55
42	1,68	2,02	2,42	2,70	3,54
44	1,68	2,02	2,41	2,69	3,53
46	1,68	2,01	2,41	2,69	3,52
48	1,68	2,01	2,41	2,68	3,51
50	1,68	2,01	2,40	2,68	3,50
55	1,67	2,00	2,40	2,67	3,48
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,46
65	1,67	2,00	2,39	2,65	3,45

$\alpha$ $n-1$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
70	1,67	1,99	2,38	2,65	3,44
80	1,66	1,99	2,37	2,64	3,42
90	1,66	1,99	2,37	2,63	3,40
100	1,66	1,98	2,36	2,63	3,39
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,37
150	1,66	1,98	2,35	2,61	3,36
200	1,65	1,97	2,35	2,60	3,34
250	1,65	1,97	2,34	2,60	3,33
300	1,65	1,97	2,34	2,59	3,32
400	1,65	1,97	2,34	2,59	3,32
500	1,65	1,96	2,33	2,59	3,31

VIII. Коэффициенты  $\gamma_1^2$  и  $\gamma_2^2$ , определяющие доверительный интервал для дисперсии:

$$\gamma_1^2 \Delta S_n^2 \leq \sigma^2 \leq \gamma_2^2 \Delta S_n^2$$

$f$	$\alpha = 0,90$		$\alpha = 0,95$		$\alpha = 0,99$	
	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$
1	0,260	254	0,199	1018	0,127	25464
2	0,334	19,5	0,271	39,5	0,189	199
3	0,384	8,53	0,321	13,9	0,234	41,8
4	0,422	5,63	0,359	8,26	0,269	19,3
5	0,452	4,36	0,390	6,02	0,299	12,1
6	0,476	3,67	0,415	4,85	0,324	8,88
7	0,498	3,23	0,437	4,14	0,345	7,08
8	0,516	2,93	0,456	3,67	0,364	5,95
9	0,532	2,71	0,473	3,33	0,382	5,19
10	0,546	2,54	0,488	3,08	0,397	4,64
11	0,559	2,40	0,502	2,88	0,411	4,23
12	0,571	2,30	0,514	2,72	0,424	3,90
13	0,581	2,21	0,526	2,60	0,436	3,65
14	0,591	2,13	0,536	2,49	0,447	3,44
15	0,600	2,07	0,546	2,40	0,457	3,26
16	0,608	2,01	0,555	2,32	0,467	3,11
17	0,616	1,96	0,563	2,25	0,476	2,98
18	0,624	1,92	0,571	2,19	0,484	2,87
19	0,630	1,88	0,578	2,13	0,492	2,78
20	0,637	1,84	0,585	2,08	0,500	2,69

Продолжение

f	$\alpha = 0,90$		$\alpha = 0,95$		$\alpha = 0,99$	
	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$
21	0,643	1,81	0,592	2,04	0,507	2,61
22	0,648	1,78	0,598	2,00	0,514	2,55
23	0,654	1,76	0,604	1,97	0,521	2,48
24	0,659	1,73	0,610	1,94	0,527	2,43
25	0,664	1,71	0,615	1,91	0,533	2,38
26	0,669	1,69	0,620	1,88	0,538	2,33
27	0,673	1,67	0,625	1,85	0,544	2,29
28	0,677	1,65	0,630	1,83	0,549	2,25
29	0,681	1,64	0,634	1,81	0,554	2,21
30	0,685	1,62	0,639	1,79	0,559	2,18
31	0,689	1,61	0,643	1,77	0,564	2,14
32	0,693	1,59	0,647	1,75	0,568	2,11
33	0,696	1,58	0,651	1,73	0,572	2,09
34	0,700	1,57	0,654	1,72	0,577	2,06
35	0,703	1,56	0,658	1,70	0,581	2,04
36	0,706	1,55	0,661	1,69	0,585	2,01
37	0,709	1,54	0,665	1,67	0,588	1,99
38	0,712	1,53	0,668	1,66	0,592	1,97
39	0,715	1,52	0,671	1,65	0,596	1,95
40	0,717	1,51	0,674	1,64	0,599	1,93
41	0,720	1,50	0,677	1,63	0,602	1,91
42	0,723	1,49	0,680	1,62	0,606	1,90
43	0,725	1,48	0,683	1,61	0,609	1,88
44	0,728	1,48	0,685	1,60	0,612	1,87
45	0,730	1,47	0,688	1,59	0,615	1,85
46	0,732	1,46	0,691	1,58	0,618	1,84
47	0,734	1,46	0,693	1,57	0,621	1,82
48	0,737	1,45	0,695	1,56	0,624	1,81
49	0,739	1,44	0,698	1,55	0,626	1,80
50	0,741	1,44	0,700	1,55	0,629	1,79
51	0,743	1,43	0,702	1,54	0,632	1,77
52	0,745	1,43	0,705	1,53	0,634	1,76
53	0,747	1,42	0,707	1,52	0,637	1,75
54	0,748	1,42	0,709	1,52	0,639	1,74
55	0,750	1,41	0,711	1,51	0,641	1,73



f	$\alpha = 0,90$		$\alpha = 0,95$		$\alpha = 0,99$	
	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$	$\gamma_1^2$	$\gamma_2^2$
56	0,752	1,41	0,713	1,50	0,644	1,72
57	0,754	1,40	0,715	1,50	0,646	1,71
58	0,755	1,40	0,717	1,49	0,648	1,71
59	0,757	1,39	0,718	1,49	0,650	1,70
60	0,759	1,39	0,720	1,48	0,653	1,69
61	0,760	1,39	0,722	1,48	0,655	1,68
62	0,762	1,38	0,724	1,47	0,657	1,67
63	0,763	1,38	0,726	1,47	0,659	1,66
64	0,765	1,37	0,727	1,46	0,661	1,66
65	0,766	1,37	0,729	1,46	0,663	1,65
66	0,768	1,37	0,730	1,45	0,664	1,64
67	0,769	1,36	0,732	1,45	0,666	1,64
68	0,771	1,36	0,734	1,44	0,668	1,63
69	0,772	1,36	0,735	1,44	0,670	1,62
70	0,773	1,35	0,737	1,44	0,672	1,62
71	0,775	1,35	0,738	1,43	0,673	1,61
72	0,776	1,35	0,740	1,43	0,675	1,61
73	0,777	1,34	0,741	1,42	0,677	1,60
74	0,778	1,34	0,742	1,42	0,678	1,59
75	0,779	1,34	0,744	1,42	0,680	1,59
76	0,781	1,34	0,745	1,41	0,682	1,58
77	0,782	1,33	0,746	1,41	0,683	1,58
78	0,783	1,33	0,748	1,41	0,685	1,57
79	0,784	1,33	0,749	1,40	0,686	1,57
80	0,785	1,32	0,750	1,40	0,688	1,56
81	0,786	1,32	0,752	1,40	0,689	1,56
82	0,787	1,32	0,753	1,39	0,691	1,55
83	0,788	1,32	0,754	1,39	0,692	1,55
84	0,790	1,32	0,755	1,39	0,693	1,54
85	0,791	1,31	0,756	1,38	0,695	1,54
86	0,792	1,31	0,757	1,38	0,696	1,54
87	0,793	1,31	0,759	1,38	0,698	1,53
88	0,794	1,31	0,760	1,38	0,699	1,53
89	0,794	1,30	0,761	1,37	0,700	1,52
90	0,795	1,30	0,762	1,37	0,701	1,52

**IX. Значения  $\sigma_{\max}$  при разных значениях  
числа измерений  $n$  для разных надежностей  $\alpha$**

$n$	$\alpha = 0,90$ $\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,95$ $\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,99$ $\alpha = 0,01$	$n$	$\alpha = 0,90$ $\alpha = 0,10$	$\alpha = 0,95$ $\alpha = 0,05$	$\alpha = 0,99$ $\alpha = 0,01$
3	1,41	1,41	1,41	28	2,58	2,76	3,12
4	1,64	1,69	1,72	29	2,60	2,78	3,14
5	1,79	1,87	1,96	30	2,61	2,79	3,16
6	1,89	2,00	2,13	31	2,62	2,80	3,17
7	1,97	2,09	2,26	32	2,63	2,82	3,18
8	2,04	2,17	2,37	33	2,65	2,83	3,20
9	2,10	2,24	2,46	34	2,66	2,84	3,21
10	2,15	2,29	2,54	35	2,67	2,85	3,22
11	2,19	2,34	2,61	36	2,68	2,86	3,24
12	2,23	2,39	2,66	37	2,69	2,87	3,25
13	2,26	2,43	2,71	38	2,70	2,88	3,26
14	2,30	2,46	2,76	39	2,71	2,89	3,27
15	2,33	2,49	2,80	40	2,72	2,90	3,28
16	2,35	2,52	2,84	41	2,73	2,91	3,29
17	2,38	2,55	2,87	42	2,74	2,92	3,30
18	2,40	2,58	2,90	43	2,74	2,93	3,31
19	2,43	2,60	2,93	44	2,75	2,94	3,32
20	2,45	2,62	2,96	45	2,76	2,95	3,33
21	2,47	2,64	2,98	46	2,77	2,96	3,34
22	2,49	2,66	3,01	47	2,78	2,96	3,35
23	2,50	2,68	3,03	48	2,78	2,97	3,35
24	2,52	2,70	3,05	49	2,79	2,98	3,36
25	2,54	2,72	3,07	50	2,80	2,99	3,37
26	2,55	2,73	3,09	51	2,81	2,99	3,38
27	2,57	2,75	3,11	52	2,81	3,00	3,39

## X. Четырехзначные мантиссы логарифмов

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0924	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6843	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

## ЛИТЕРАТУРА

### Основная

1. А. Н. З а й д е л ь, Элементарные оценки ошибок измерений, «Наука», 1967.
2. В. И. Р о м а н о в с к и й, Основные задачи теории ошибок, Гостехиздат, 1947.
3. Ю. В. Л и н н и к, Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений, Физматгиз, 1962.
4. В. В. Н а л и м о в, Применение математической статистики при анализе вещества, Физматгиз, 1960.
5. Б. М. Щ и г о л е в, Математическая обработка наблюдений, Физматгиз, 1962.
6. Н. А р л е й, К. Б у х, Введение в теорию вероятностей и математическую статистику, ИЛ, 1951.
7. Физический практикум. Механика и молекулярная физика, под ред. В. И. Ивероновой, «Наука», 1967.

### Дополнительная

8. Е. С. В е н т ц е л ь, Теория вероятностей, «Наука», 1965.
9. Г. П. Б о е в, Теория вероятностей, Гостехиздат, 1950.
10. Б. В. Г н е д е н к о, Курс теории вероятностей, Гостехиздат, 1954.
11. Б. Л. В а н д е р В а р д е н, Математическая статистика, ИЛ, 1960.
12. А. Х а л ь д, Математическая статистика с техническими приложениями, ИЛ, 1956.
13. В. И. Р о м а н о в с к и й, Математическая статистика, ГОНТИ, 1938.
14. М. Дж. К е н д а л л, А. С т ь ю а р т, Теория распределений, «Наука», 1966.
15. Г. К р а м е р, Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
16. И. В. Д у н и н - Б а р к о в с к и й, Н. В. С м и р н о в, Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть), Гостехиздат, 1955.
17. Н. В. С м и р н о в, И. В. Д у н и н - Б а р к о в с к и й, Краткий курс математической статистики для технических приложений, Физматгиз, 1959.
18. А. М. Д л и н, Математическая статистика в технике, «Советская наука», 1958.

19. Ж. Перрен, Атомы, Госиздат, 1924.
20. Л. Н. Б о л ь ш е в, Н. В. С м и р н о в, Таблицы математической статистики, «Наука», 1965.
21. Д. Б. О у э н, Сборник статистических таблиц, Изд. ВЦ АН СССР, М., 1966.
22. Таблицы вероятностных функций, т. I, Изд. ВЦ АН СССР, М., 1958.
23. Л. Н. Б о л ь ш е в, Э. А. Л о г и н о в, Интервальные оценки при наличии мешающих параметров, Теория вероятн. и ее применение, т. II, № 1, 94—107 (1966).
24. W. G. C o c h r a n, Approximate significance levels of the Behrens-Fisher Test, Biometrics 20, № 1, 191—195 (1964).
25. J. B o h m, Theorie der gesamten Fehler, Zeits. fur Vermessungswesen, Bd. 92, № 3, 81—92, № 4, 139—149 (1967).
26. R. S. M c C u l l o u g h, J. G u r l a n d and L. R o s e n b e r g, Small sample behaviour of certain test of the hypothesis of equal means under variance heterogeneity, Biometrika 47, № 3—4, 345—353 (1960).
27. Б. Е. Р а б и н о в и ч, Методика суммирования частных погрешностей в области радиотехнических измерений, Сб. «Исследования по методике оценки погрешностей измерений», Труды ВНИИМ, вып. 57 (117), стр. 19—33, Стандартгиз, 1962.
28. H. H. K u, Notes on the Use of Propagation of Error Formulas, J. Res. Nat. Bureau Standards 70C, № 4, 263—273 (1966).