DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

Band 99

AN INTRODUCTION TO THE GEOMETRY OF NUMBERS

by

J. W. S. CASSELS

Fellow of Trinity college, Cambridge

Springer-Verlag
Berlin · Göttingen · Heidelberg
1959

ДЖ. В. С. КАССЕЛС

ВВЕДЕНИЕ В ГЕОМЕТРИЮ ЧИСЕЛ

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
А. Н. АНДРИАНОВА и И. В. БОГАЧЕНКО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ А. В. МАЛЫШЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1965

УДК 513.85

Автор настоящей книги — известный английский математик, знаком советскому читателю по переводу его монографии „Введение в теорию диофантовых приближений“ (ИЛ, 1961). Его новая работа посвящена геометрии чисел — одному из важных разделов современной теории чисел — и является единственной в мировой литературе современной монографией в этой области математики.

Редакция литературы по вопросам математических наук

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга является единственной в мировой литературе современной монографией по геометрии чисел. В геометрии чисел, основанной трудами Эрмита, Минковского и Вороного, геометрические методы систематически, с единой точки зрения, прилагаются к решению задач из различных разделов теории чисел, в первую очередь из теории диофантовых приближений. Не претендуя на энциклопедичность, монография Касселса в то же время дает достаточно полное представление о современном состоянии геометрии чисел и позволяет непосредственно включиться в исследования, интенсивно ведущиеся в этой области. Хорошим дополнением к книге Касселса (особенно в отношении библиографии) может служить обзор Келлера (Keller O. H., Geometrie der Zahlen, Enzykl. math. Wiss., Bd. I_2, H.11_{III}, Leipzig, 1954).

Редактор и переводчики выражают большую благодарность автору этой книги проф. Касселсу за внимание и помощь в работе, в частности за любезно присланный им список погрешностей оригинала.

Введение и главы I, III — V, XI переведены И. В. Богаченко, главы II, VI — X — А. Н. Андриановым.

А. В. Малышев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Составлению многих книг конца не будет,
и много читать утомительно для тела.

Екклезиаст

Когда я впервые заинтересовался геометрией чисел, я обнаружил, что нет ни одной книги, которая излагала бы основное содержание этого предмета в той мере, в какой оно известно специалистам, работающим в данной области. С тех пор в этой области интенсивно велись исследования (о чем можно судить по датам публикации работ, указанных в списке литературы), но необходимая книга так и не появилась. Настоящее издание является попыткой восполнить этот пробел. Его цель — познакомить читателя с главными направлениями, в которых развивается геометрия чисел, так чтобы он мог следить за интересующими его материалами в периодической печати, испытывая лишь удовольствие, но отнюдь не затруднения. Я попытался сделать изложение по возможности замкнутым в себе.

Ссылки обычно указывают более поздние статьи, посвященные отдельным вопросам, или статьи с обширной библиографией. Они приведены главным образом для того, чтобы расширить представление об изложенном материале, и не претендуют на создание верной исторической перспективы. Чтобы дать нечто похожее на приемлемый исторический обзор предмета, потребовались бы значительные дополнительные исследования.

Я весьма признателен проф. Морделлу, который первый привлек мое внимание к геометрии чисел.

Гранки книги были прочитаны проф. Малером, Морделлом и Роджерсом, и я считаю своим приятным долгом поблагодарить их за то, что они исправили отдельные ошибки и неточности, а также предложили ряд улучшений. Д-р Эннола указал мне на несколько ошибок, оставшихся в корректуре.

Я хотел бы также воспользоваться случаем, чтобы поблагодарить проф. Ф. К. Шмидта и издательство Шпрингер за принятие этой книги к опубликованию в известной серии „Grundlehren", а также за готовность пойти навстречу моим полиграфическим прихотям.

Кембридж

Дж. Касселс

ОБОЗНАЧЕНИЯ

Во избежание недоразумений автор для различных типов математических объектов старался использовать разные алфавиты. Нет необходимости полностью описывать принятую систему обозначений, так как она будет ясна из контекста, однако следующие соглашения используются на протяжении всей книги без специальных пояснений.

Прямые жирные латинские буквы (прописные и строчные) всегда обозначают векторы (точки). Размерность обозначается через n (если противное точно не оговорено), и буква n для других целей не используется, исключая одно или два места, где не может возникнуть неясности. Координаты вектора обозначаются соответствующими курсивными буквами с индексами 1, 2, ..., n. Если жирная буква, обозначающая вектор, уже имеет индекс, этот индекс ставится после координатного индекса. Таким образом,

$$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n),$$
$$\mathbf{b}_r = (b_{1r}, \ldots, b_{nr}),$$
$$\mathbf{X}'_s = (X'_{1s}, \ldots, X'_{ns}).$$

Начало координат всегда обозначается через $\mathbf{o}$, длина вектора $\mathbf{x}$ — через

$$|\mathbf{x}| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Прямые греческие прописные буквы, в частности Λ, M, N, Γ, обозначают решетки.

Обозначения $d(\Lambda)$, $\Delta(\mathscr{S})$, $V(\mathscr{S})$ для определителя решетки Λ, критического определителя и объема множества $\mathscr{S}$ соответственно будут стандартными, начиная с того места, где вводятся соответствующие понятия.

Главы подразделены на параграфы, а параграфы для удобства разделены на пункты с обычной нумерацией. Нумерация используемых формул начинается снова в каждом пункте. Во введении использована сквозная нумерация формул.

ВВЕДЕНИЕ

1. Некоторые предложения, почти очевидные при рассмотрении фигур в n-мерном евклидовом пространстве, имеют глубокие следствия в теории чисел. Этим важным замечанием мы обязаны Минковскому. В частности, он упростил теорию единиц полей алгебраических чисел, а также упростил и развил теорию аппроксимации иррациональных чисел рациональными (диофантовы приближения). Это новое направление, названное Минковским „геометрией чисел", развилось в независимый раздел теории чисел, имеющий много приложений в самых различных вопросах и вместе с тем достаточно интересный для самостоятельного изучения.

Здесь мы рассмотрим некоторые понятия и результаты, играющие в дальнейшем основную роль. Рассуждения, которыми мы здесь пользуемся, иногда значительно отличаются от рассуждений в основном тексте книги, так как во введении мы имеем целью, не давая полных доказательств, сделать для простейших случаев геометрическую ситуацию интуитивно ясной, тогда как позднее мы будем вынуждены жертвовать наглядностью ради точности. Доказательства в тексте не зависят от введения, и его можно при желании опустить.

2. Основной и типичной задачей геометрии чисел является следующая задача.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — функция вещественных аргументов, принимающая вещественные значения. Как мал может быть $|f(u_1, \ldots, u_n)|$ при подходящем выборе целых чисел $u_1, \ldots, u_n$? Может встретиться тривиальный случай $f(0, \ldots, 0) = 0$, например, если $f(x_1, \ldots, x_n)$ является однородной формой; в этом случае совокупность значений $u_1 = u_2 = \ldots = u_n = 0$ из рассмотрения исключается („однородная проблема").

Обычно рассматриваются оценки, применимые не только для конкретных функций f, но и для целых классов функций. Так, типичным результатом такого рода является следующее предложение. Пусть

$$f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 \qquad (1)$$

— положительно определенная квадратичная форма. Тогда найдутся такие целые числа u_1, u_2, не равные одновременно нулю, что справедливо неравенство

$$f(u_1, u_2) \leqslant \left(\frac{4D}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2)$$

где $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$ — определитель формы. Ясно, что если этот результат верен, то он является наилучшим. Действительно,

$$u_1^2 + u_1u_2 + u_2^2 \geqslant 1$$

для всех пар целых чисел u_1, u_2, не равных одновременно нулю; здесь $D = \frac{3}{4}$.

Конечно, случай положительно определенных бинарных квадратичных форм крайне прост. Результат, сформулированный выше, был известен задолго до возникновения геометрии чисел. В § 3 гл. II мы изложим его доказательство, не зависящее от методов геометрии чисел. Однако на положительно определенных бинарных квадратичных формах особенно просто проводятся некоторые рассуждения геометрии чисел, так что мы будем эти формы использовать в качестве иллюстрации наших рассуждений.

3. Только что сформулированный результат можно выразить наглядно. Неравенство типа

$$f(x_1, x_2) \leqslant k,$$

где $f(x_1, x_2)$ — форма (1), а k — некоторое положительное число, задает область $\mathscr{R}$ плоскости $\{x_1, x_2\}$, ограниченную эллипсом. Таким образом, наше предложение утверждает, что если $k \geqslant \left(\frac{4D}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$, то область $\mathscr{R}$ содержит точку (u_1, u_2) с целыми координатами u_1 и u_2, не равными одновременно нулю.

Аналогичный, но не столь точный результат немедленно следует из основной теоремы Минковского. В двумерном случае эта теорема утверждает, что область $\mathscr{R}$ всегда содержит точку (u_1, u_2) с целыми координатами, отличную от начала, если эта область удовлетворяет следующим трем условиям:

1) область $\mathscr{R}$ симметрична относительно начала координат; т. е. если точка (x_1, x_2) находится в $\mathscr{R}$, то точка $(-x_1, -x_2)$ также содержится в $\mathscr{R}$;

2) область $\mathscr{R}$ выпукла; т. е. если (x_1, x_2), (y_1, y_2) — две какие-нибудь точки области $\mathscr{R}$, то и весь отрезок

$$\{\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1,\ \lambda x_2 + (1-\lambda) y_2\}, \qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1,$$

соединяющий эти точки, также содержится в $\mathscr{R}$;

3) площадь $\mathscr{R}$ больше 4.

Любой эллипс $f(x_1, x_2) \leqslant k$ удовлетворяет условиям 1) и 2). Так как его площадь равна

$$\frac{k\pi}{(a_{11}a_{22} - a_{12})^{1/2}} = \frac{k\pi}{D^{1/2}},$$

то он удовлетворяет условию 3), если $k\pi > 4D^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, мы имеем результат, аналогичный приведенному выше предложению, если в (2) константу $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ заменить любым числом, бóльшим $\frac{4}{\pi}$.

4. Полезно кратко рассмотреть главные идеи, лежащие в основе доказательства теоремы Минковского, ибо в формальном доказательстве, данном в гл. III, они заслоняются необходимостью получения сильных теорем, имеющих наиболее широкие приложения. Вместо

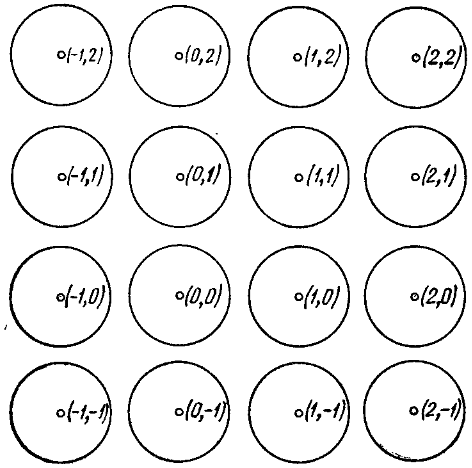

Рис. 1.

области $\mathscr{R}$ Минковский рассматривает область $\mathscr{S} = \frac{1}{2}\mathscr{R}$, состоящую из точек $\left(\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2\right)$, где (x_1, x_2) — точки области $\mathscr{R}$. Таким образом, область $\mathscr{S}$ симметрична относительно начала координат и выпукла, ее площадь равна четверти площади области $\mathscr{R}$ и, следовательно, больше 1. В общем случае Минковский рассматривает совокупность областей $\mathscr{S}(u_1, u_2)$ с центрами в целочисленных точках (u_1, u_2), полученных из тела $\mathscr{S}$ параллельными переносами.

Заметим сначала, что если $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}(u_1, u_2)$ пересекаются, то точка (u_1, u_2) находится в $\mathscr{R}$[1]. Действительно, пусть (ξ_1, ξ_2) — точка,

[1]) Обратное утверждение тривиально. Если точка (u_1, u_2) находится в $\mathscr{R}$, то точка $\left(\frac{1}{2}u_1, \frac{1}{2}u_2\right)$ содержится как в $\mathscr{S}$, так и в $\mathscr{S}(u_1, u_2)$.

лежащая в пересечении. Так как точка (ξ_1, ξ_2) лежит в области $\mathcal{S}(u_1, u_2)$, то точка $(\xi_1 - u_1, \xi_2 - u_2)$ лежит в области $\mathcal{S}$; следовательно, ввиду симметрии области $\mathcal{S}$ точка $(u_1 - \xi_1, u_2 - \xi_2)$ находится в $\mathcal{S}$. Наконец, в силу выпуклости тела $\mathcal{S}$ середина отрезка, соединяющего точку $(u_1 - \xi_1, u_2 - \xi_2)$ с точкой (ξ_1, ξ_2), т. е. точка $\left(\frac{1}{2}u_1, \frac{1}{2}u_2\right)$, лежит в $\mathcal{S}$, а потому точка (u_1, u_2) лежит в $\mathcal{R}$, что и требовалось доказать. Ясно, что область $\mathcal{S}(u_1, u_2)$ тогда и только тогда пересекается с областью $\mathcal{S}(u_1', u_2')$, когда область $\mathcal{S}$ пересекается с областью $\mathcal{S}(u_1 - u_1', u_2 - u_2')$.

Таким образом, чтобы доказать теорему Минковского, достаточно показать, что если области $\mathcal{S}(u_1, u_2)$ не пересекаются, то площадь области $\mathcal{S}(u_1, u_2)$ не превышает 1. Некоторое размышление убеждает, что так должно быть. Формальное доказательство этого факта дано в гл. III. Другое обоснование, возможно интуитивно более ясное, мы получаем, полагая[1]), что область $\mathcal{S}$ целиком содержится в квадрате

$$|x_1| \leqslant X, \quad |x_2| \leqslant X.$$

Пусть U — достаточно большое целое число. Существует $(2U+1)^2$ областей $\mathcal{S}(u_1, u_2)$, координаты центров которых удовлетворяют неравенствам

$$|u_1| \leqslant U, \quad |u_2| \leqslant U.$$

Все эти области целиком находятся в квадрате

$$|x_1| \leqslant U + X, \quad |x_2| \leqslant U + X,$$

площадь которого равна

$$4(U+X)^2.$$

Так как предполагается, что области $\mathcal{S}(u_1, u_2)$ не пересекаются, то имеет место неравенство

$$(2U+1)^2 V \leqslant 4(U+X)^2,$$

где V — площадь области $\mathcal{S}$, а значит, и любой области $\mathcal{S}(u_1, u_2)$. Устремляя теперь U к бесконечности, мы получаем неравенство $V \leqslant 1$, что и требовалось доказать.

5. Преобразование координат в нашем примере с определенной бинарной квадратичной формой приводит к другой точке зрения.

[1]) Ограниченность выпуклой области конечной площади будет доказана в гл. IV. — *Прим. ред.*

Мы можем представить форму $f(x_1, x_2)$ как сумму квадратов двух линейных форм

$$f(x_1, x_2) = X_1^2 + X_2^2, \tag{3}$$

где

$$X_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad X_2 = \gamma x_1 + \delta x_2, \tag{4}$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — некоторые постоянные вещественные числа. Можно, например, положить

$$\alpha = a_{11}^{\frac{1}{2}}, \quad \beta = a_{11}^{-\frac{1}{2}} a_{12},$$

$$\gamma = 0, \quad \delta = a_{11}^{-\frac{1}{2}} D^{\frac{1}{2}}.$$

Обратно, если $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — такие вещественные числа, что $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, и формы X_1, X_2 заданы равенствами (4), то выражение

$$X_1^2 + X_2^2 = \\ = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \alpha^2 + \gamma^2, \\ a_{12} &= \alpha\delta + \beta\gamma, \\ a_{22} &= \beta^2 + \delta^2, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

является положительно определенной квадратичной формой с определителем

$$D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = (\alpha\delta - \beta\gamma)^2. \tag{6}$$

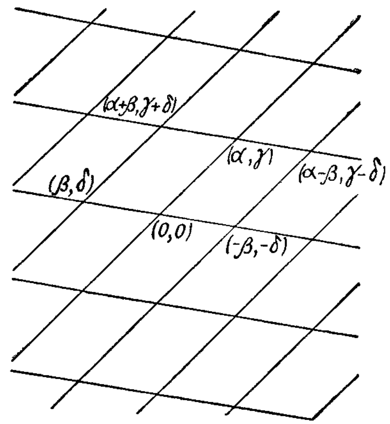

Рис. 2.

Теперь будем рассматривать пару (X_1, X_2) как систему прямоугольных декартовых координат. Тогда говорят, что точки (X_1, X_2), соответствующие целым (x_1, x_2) в выражениях (4), образуют (двумерную) решетку Λ. В векторных обозначениях решетка Λ есть совокупность точек

$$(X_1, X_2) = u_1(\alpha, \gamma) + u_2(\beta, \delta), \tag{7}$$

где u_1, u_2 пробегают все целые числа; точки (векторы) (α, γ) и (β, δ) образуют базис решетки Λ.

Рассмотрим теперь более подробно свойства решеток. Ввиду того что мы рассматриваем решетку Λ просто как множество точек, она может быть описана с помощью различных базисов. Например, пара

$$(\alpha - \beta, \gamma - \delta), \quad (-\beta, -\delta)$$

является другим базисом решетки Λ. Фиксированный базис (α, β), (γ, δ) решетки Λ определяет разбиение плоскости двумя семействами равноудаленных параллельных прямых; первое семейство состоит из тех точек (X_1, X_2), которые имеют координаты вида (7), где u_2 — любое целое число, а u_1 — любое вещественное; для линий второго семейства u_1 и u_2 меняются ролями. Таким образом, плоскость разбивается на параллелограммы, вершинами которого являются как раз точки решетки Λ.

Разумеется, это разбиение зависит от выбора базиса, однако мы покажем, что площадь параллелограммов, именно число

$$|\alpha\delta - \beta\gamma|,$$

не зависит от выбора базиса. Мы можем это сделать, показав, что число $N(X)$ точек решетки в достаточно большом квадрате

$$\mathscr{S}(X): \quad |X_1| \leqslant X, \ |X_2| \leqslant X$$

удовлетворяет соотношению

$$\frac{N(X)}{4X^2} \to \frac{1}{|\alpha\delta - \beta\gamma|} \quad (X \to \infty).$$

Действительно, рассмотрение идей доказательства теоремы Минковского о выпуклом теле, которое было бегло приведено выше, показывает, что число точек решетки Λ в квадрате $\mathscr{S}(X)$, грубо говоря, равно числу параллелограммов, находящихся в этом квадрате, а это число в свою очередь приблизительно равно площади квадрата $\mathscr{S}(X)$, деленной на площадь $|\alpha\delta - \beta\gamma|$ одного параллелограмма. Строго положительное число

$$d(\Lambda) = |\alpha\delta - \beta\gamma| \tag{8}$$

называется определителем решетки Λ. Как мы только что показали, это число не зависит от выбора базиса.

6. Используя эти новые понятия, замечаем, что утверждение о существовании целых решений неравенства $f(x_1, x_2) \leqslant \left(\frac{4D}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$ эквивалентно утверждению о том, что любая решетка Λ в области

$$X_1^2 + X_2^2 \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}} d(\Lambda) \tag{9}$$

имеет точки, отличные от начала координат. В силу однородности это в свою очередь эквивалентно утверждению, что открытый круг

$$\mathscr{D}: \quad X_1^2 + X_2^2 < 1 \tag{10}$$

содержит точку каждой решетки Λ, для которой $d(\Lambda) < \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$. А тот факт, что существуют такие формы, для которых в (2) знак равенства необходим, эквивалентен существованию решетки Λ_c с определителем $d(\Lambda_c) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, не имеющей точек в круге $\mathscr{D}$. Таким образом, наша задача о произвольной определенной бинарной квадратичной форме эквивалентна задаче о фиксированной области $\mathscr{D}$ и произвольной решетке. Аналогично исследование решеток с точками в области

$$|X_1 X_2| < 1$$

дает нам информацию о минимумах $\inf |f(u_1, u_2)|$ неопределенных бинарных квадратичных форм $f(x_1, x_2)$; здесь точная нижняя граница берется по всем целым числам u_1 и u_2, не равным одновременно нулю. Примеры можно продолжить.

Подобные рассмотрения приводят к следующим определениям. Говорят, что решетка Λ допустима для области (точечного множества) $\mathscr{R}$ в плоскости $\{X_1, X_2\}$, если она не содержит никаких других точек $\mathscr{R}$, кроме, может быть, начала координат (если оно является точкой области $\mathscr{R}$). Тогда мы говорим, что эта решетка $\mathscr{R}$-допустима. Точная нижняя грань $\Delta(\mathscr{R})$ определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathscr{R}$-допустимых решеток является константой области $\mathscr{R}$; если $\mathscr{R}$-допустимых решеток не существует, то полагаем $\Delta(\mathscr{R}) = \infty$. Тогда любая решетка Λ, для которой $d(\Lambda) < \Delta(\mathscr{R})$, обязательно содержит точку области $\mathscr{R}$, отличную от начала координат. $\mathscr{R}$-допустимая решетка Λ, для которой $d(\Lambda) = \Delta(\mathscr{R})$, называется критической (для $\mathscr{R}$). Конечно, критические решетки, вообще говоря, существуют не всегда.

Важность критических решеток была замечена уже Минковским. Если Λ_c — критическая решетка области $\mathscr{R}$, а решетка Λ получена из Λ_c небольшой деформацией (т. е. малым изменением пары базисных векторов), то либо решетка Λ имеет точку, отличную от начала координат и лежащую в области $\mathscr{R}$, либо $d(\Lambda) \geqslant d(\Lambda_c)$ (либо то и другое вместе).

В качестве примера снова рассмотрим открытый круг

$$\mathscr{D}: \quad X_1^2 + X_2^2 < 1.$$

Предположим, что Λ_c — критическая решетка области $\mathscr{D}$. Дадим набросок доказательства того, что если критическая решетка существует, то она должна иметь три пары точек $\pm(A_1, A_2)$, $\pm(B_1, B_2)$, $\pm(C_1, C_2)$ на границе $X_1^2 + X_2^2 = 1$ круга $\mathscr{D}$.

Если Λ_c не имеет точек на окружности $X_1^2+X_2^2=1$, то можно получить $\mathscr{D}$-допустимую решетку с меньшим определителем, гомотетически сжимая решетку Λ_c к началу координат, т. е. рассматривая решетку $\Lambda=t\Lambda_c$ точек (tX_1, tX_2), где $(X_1, X_2)\in\Lambda_c$, а t — фиксированное число с условием $0<t<1$. Тогда $d(\Lambda)=t^2d(\Lambda_c)<d(\Lambda_c)$ и, очевидно, Λ будет $\mathscr{D}$-допустимой решеткой, если t достаточно близко к 1. Таким образом, решетка Λ_c содержит пару точек на окружности $X_1^2+X_2^2=1$, координаты которых после надлежащего поворота осей мы можем считать равными $\pm(1, 0)$.

Если бы на окружности $X_1^2+X_2^2=1$ не было бы больше точек решетки Λ_c, то мы смогли бы получить $\mathscr{D}$-допустимую решетку Λ с меньшим определителем, сжимая решетку Λ_c в направлении, перпендикулярном оси X_1, т. е. принимая за Λ решетку точек (X_1, tX_2), где $(X_1, X_2)\in\Lambda_c$, а t достаточно близко к 1.

Наконец, если бы Λ_c имела бы только две пары точек $\pm(1, 0)$, $\pm(B_1, B_2)$ на границе, то решетку можно было бы слегка деформировать так, чтобы точка $(1, 0)$ осталась на месте, а точка (B_1, B_2) продвинулась бы вдоль окружности $X_1^2+X_2^2=1$ ближе к оси X_1 (см. рис. 3).

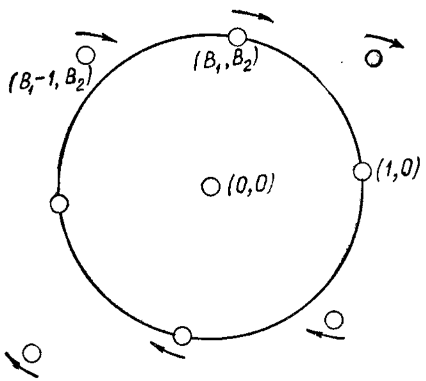

Рис. 3.

Эта операция, как легко проверить, уменьшает определитель (действительно, $(1, 0)$ и (B_1, B_2) можно рассматривать[1]) как базис решетки Λ_c), и при небольших деформациях получающаяся решетка Λ остается $\mathscr{D}$-допустимой. Следовательно, критическая решетка Λ_c (если она существует) должна иметь три пары точек на окружности

[1]) Ибо треугольник с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$, (B_1, B_2), а следовательно, и параллелограмм, отвечающий базису $(1, 0)$, (B_1, B_2), не содержит внутри себя точек Λ_c. — *Прим. ред.*

$X_1^2+X_2^2=1$, и легко видеть, что единственной решеткой, у которой три пары точек лежат на окружности $X_1^2+X_2^2=1$, а одна из пар есть пара $\pm(1, 0)$, является решетка Λ' с базисом

$$(1, 0), \quad \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right).$$

Она содержит вершины правильного шестиугольника

$$\pm(1, 0), \quad \pm\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right), \quad \pm\left(-\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{3}{4}}\right),$$

лежащие на окружности $X_1^2+X_2^2=1$, но не содержит ни одной точки (кроме $(0, 0)$) в круге $X_1^2+X_2^2<1$. Таким образом, мы показали, что если $\mathscr{D}$ имеет критическую решетку, то $\Delta(\mathscr{D})=d(\Lambda')=$ $=\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$. Минковский показал, что критические решетки существуют для довольно широкого класса областей $\mathscr{R}$, показав, грубо говоря, что любую $\mathscr{R}$-допустимую решетку Λ можно постепенно деформировать до тех пор, пока она не станет критической. В дальнейшем (гл. V), используя концепции Малера, мы дадим строгое доказательство существования критической решетки для еще более широкого класса множеств $\mathscr{R}$.

7. Другим общим типом проблемы является следующая типичная „неоднородная задача“. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторая вещественнозначная функция вещественных аргументов $x_1, \ldots, x_n$. Требуется подобрать постоянное число k со следующим свойством: если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — любые вещественные числа, то найдутся такие целые числа $u_1, \ldots, u_n$, что

$$|f(\xi_1-u_1, \ldots, \xi_n-u_n)|\leqslant k.$$

Подобные вопросы естественно возникают, например, в теории алгебраических чисел. И на этот раз имеется простая геометрическая интерпретация. Для наглядности положим $n=2$. Пусть $\mathscr{R}$ — множество таких точек (x_1, x_2) двумерной евклидовой плоскости, что

$$|f(x_1, x_2)|\leqslant k.$$

Пусть u_1, u_2 — любые целые числа; обозначим через $\mathscr{R}(u_1, u_2)$ область, полученную из $\mathscr{R}$ параллельным переносом на вектор (u_1, u_2); иными словами, $\mathscr{R}(u_1, u_2)$ есть множество таких точек x_1, x_2, что

$$|f(x_1-u_1, x_2-u_2)|\leqslant k.$$

2 Зак. 1029

Неоднородная проблема состоит в выборе k таким образом, чтобы области $\mathscr{R}(u_1, u_2)$ покрывали всю плоскость. Желательно выбрать k, а значит и $\mathscr{R}$, наименьшим из всех возможных (но так, чтобы свойство покрывать всю плоскость сохранилось). Здесь мы имеем противоположность постановке однородной задачи в п. 4, где цель состояла в том, чтобы сделать области (обозначенные там символом $\mathscr{S}(u, v)$) наибольшими, но все еще не пересекающимися одна с другой.

В этой книге мы будем главным образом иметь дело с однородной задачей. Только тогда, когда у нас будет достаточно полная теория однородной задачи, мы в гл. XI рассмотрим неоднородную задачу и ее связь с однородной.

ГЛАВА I

РЕШЕТКИ

§ 1. Введение

В этой главе мы введем важнейшее понятие геометрии чисел — понятие решетки — и докажем несколько основных свойств решеток. Материал, изложенный в этой главе, за исключением п. 4 § 2 и всего § 5, является основой для дальнейшего.

В этой книге мы будем иметь дело только с решетками над кольцом целых рациональных чисел. Решеткам над комплексными квадратичными полями посвящен ряд работ (см., например, Мюллендер [1] и Роджерс (K. Rogers) [2]). Большинство понятий переносится на этот случай почти без изменений. Работы по аппроксимации комплексных чисел целыми числами комплексного квадратичного поля (см., например, Мюллендер [1], Касселс, Ледерман и Малер [1], Пуату [1]) и по теории арифметических минимумов эрмитовых форм (когда переменные являются целыми числами квадратичных полей) также можно рассматривать как обобщение геометрии чисел на комплексные квадратичные поля (см. Оппенгейм [1, 3, 9] и Роджерс (K. Rogers) [3]). В этой книге нам больше не представится случая говорить о решетках над комплексными квадратичными полями; мы упомянули о них здесь только ради полноты. По поводу решеток над общими алгебраическими полями см. Роджерс и Суиннертон-Дайер [1].

§ 2. Базисы и подрешетки

1. Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — линейно независимые точки (векторы)[1]) вещественного евклидова пространства, так что единственной системой чисел $t_1, \ldots, t_n$, для которых $t_1\mathbf{a}_1 + \ldots + t_n\mathbf{a}_n = \mathbf{o}$, является совокупность $t_1 = t_2 = \ldots = t_n = 0$. Множество всех точек

$$\mathbf{x} = u_1\mathbf{a}_1 + \ldots + u_n\mathbf{a}_n \tag{1}$$

с целыми коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ называется *решеткой* Λ с *базисом* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Заметим, что в силу линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ выражение любого $\mathbf{x}$ в виде линейной комбинации (1) с вещественными коэффициентами $u_1, \ldots, u_n$ однозначно. Таким образом, если

[1]) Термины „вектор“ и „точка“ здесь и далее употребляются как синонимы. — *Прим. ред.*

точка $\mathbf{x}$ находится в решетке Λ и (1) — некоторое выражение для $\mathbf{x}$ с вещественными $u_1, \ldots, u_n$, то коэффициенты $u_1, \ldots, u_n$ — целые. Мы будем неоднократно пользоваться этими замечаниями, зачастую не делая точных ссылок.

Базис решетки определен неоднозначно. Действительно, пусть $\mathbf{a}'_i$ — точки решетки

$$\mathbf{a}'_i = \sum_j v_{ij}\mathbf{a}_j, \quad 1 \leqslant i, \ j \leqslant n, \tag{2}$$

где v_{ij} — некоторые целые числа с условием

$$\det(v_{ij}) = \pm 1. \tag{3}$$

Тогда

$$\mathbf{a}_i = \sum_j w_{ij}\mathbf{a}'_j, \tag{4}$$

где w_{ij} — целые числа. Отсюда легко видеть, что множество точек (1) в точности совпадает с множеством точек

$$u'_1\mathbf{a}'_1 + \ldots + u'_n\mathbf{a}'_n,$$

где $u'_1, \ldots, u'_n$ пробегают все целочисленные значения. Иными словами, совокупности $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$ являются базисами одной и той же решетки.

Покажем теперь, что таким способом из данного базиса $\mathbf{a}_i$ можно получить любой базис $\mathbf{a}'_i$. Действительно, так как точки $\mathbf{a}'_i$ принадлежат решетке с базисом $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, то найдутся такие целые числа v_{ij}, что имеют место равенства (2), а так как точки $\mathbf{a}_i$ принадлежат решетке с базисом $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$, то найдутся такие целые числа w_{ij}, что имеют место равенства (4). Подставляя выражения (2) в (4) и используя линейную независимость векторов $\mathbf{a}_i$, получим, что

$$\sum_j w_{ij}v_{jl} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = l, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$\det(w_{ij})\det(v_{jl}) = 1,$$

так что каждый из определителей $\det(w_{ij})$ и $\det(v_{jl})$, будучи целым числом, равен ± 1. Таким образом, равенство (3) справедливо, что и требовалось доказать.

Мы обозначаем решетки заглавными греческими буквами, в частности Λ, M, N, Γ.

Если $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n$ — базисы одной и той же решетки (так что они связаны равенствами (2) и (3)), то мы имеем

$$\det(\mathbf{a}'_1, \ldots, \mathbf{a}'_n) = \det(v_{ij})\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \pm\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n),$$

где, например, $\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ означает определитель n-го порядка, j-м столбцом которого является вектор $\mathbf{a}_j$. Таким образом, величина

$$d(\Lambda) = |\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)|$$

не зависит от выбора базиса решетки Λ; $d(\Lambda)$ называется определителем решетки Λ. В силу линейной независимости векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$

$$d(\Lambda) > 0.$$

Примером решетки является совокупность Λ_0 всех точек с целыми координатами. Совокупность векторов

$$\mathbf{e}_j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{(j-1)\text{ нулей}}, \ 1, \ \overbrace{0, \ldots, 0}^{(n-j)\text{ нулей}}), \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

очевидно, является базисом решетки Λ_0; поэтому

$$d(\Lambda_0) = 1.$$

Заметим, что точки решетки Λ образуют группу относительно сложения: если $\mathbf{a} \in \Lambda$, то и $-\mathbf{a} \in \Lambda$; если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \Lambda$, то $\mathbf{a} \pm \mathbf{b} \in \Lambda$. Ниже (§ 4 гл. III) мы увидим, что решетка является самой общей группой точек в n-мерном пространстве, содержащей n линейно независимых точек и обладающей следующим свойством (дискретности): существует такая сфера с центром в точке $\mathbf{o}$, которая (помимо $\mathbf{o}$) не содержит никаких других точек группы.

2. Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — точки решетки M с базисом $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$, так что

$$\mathbf{a}_i = \sum_j v_{ij}\mathbf{b}_j, \tag{1}$$

где v_{ij} — целые числа. Целое число

$$I = |\det(v_{ij})| = \frac{|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)|}{|\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)|} = \frac{|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)|}{d(\mathrm{M})}$$

называется индексом системы точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ в решетке M. Из последнего равенства вытекает, что индекс не зависит от выбора базиса решетки M. По определению $I \geqslant 0$, причем $I = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы.

Если каждая точка решетки Λ является также точкой решетки M, то мы называем Λ подрешеткой решетки M. Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — соответственно базисы решеток Λ и M. Так как $\mathbf{a}_i \in \mathrm{M}$ $(i = 1, \ldots, n)$, то найдутся такие целые числа v_{ij} $(i, \ j = 1, \ldots, n)$, что имеют место равенства (1). Индекс совокупности $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ в M, именно

$$D = |\det(v_{ij})| = \frac{|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)|}{|\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)|} = \frac{d(\Lambda)}{d(\mathrm{M})}, \tag{2}$$

называется индексом подрешетки Λ решетки M. Из последнего равенства вытекает, что индекс зависит только от Λ и M и не зависит от выбора базисов. Так как векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы, то $D > 0$.

Решая равенства (1) относительно $\mathbf{b}_i$ и используя (2), получаем равенства

$$D\,\mathbf{b}_i = \sum_j w_{ij}\mathbf{a}_j,$$

где w_{ij} — целые числа. Таким образом,

$$DM \subset \Lambda \subset M, \tag{3}$$

где DM — решетка векторов $D\mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in M$.

Часто бывает удобно выбрать базис решеток Λ и M так, чтобы матрица (v_{ij}) имела наиболее простой вид.

Теорема I. *Пусть Λ — подрешетка решетки M. Тогда*:

(A) *для любого базиса $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ решетки M можно так выбрать базис $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ подрешетки Λ, что*

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= v_{11}\mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_2 &= v_{21}\mathbf{b}_1 + v_{22}\mathbf{b}_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathbf{a}_n &= v_{n1}\mathbf{b}_1 + \ldots + v_{nn}\mathbf{b}_n, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где v_{ij} — целые числа, причем $v_{ii} \neq 0$ для всех i;

(B) *обратно, для любого базиса $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ подрешетки Λ найдется такой базис $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ решетки M, что имеют место равенства* (4).

Доказательство. Докажем утверждение (A). Для каждого i всегда существуют точки $\mathbf{a}_i$ решетки Λ вида

$$\mathbf{a}_i = v_{i1}\mathbf{b}_1 + \ldots + v_{ii}\mathbf{b}_i,$$

где $v_{i1}, \ldots, v_{ii}$ — целые и $v_{ii} \neq 0$, ибо, как мы видели, $D\mathbf{b}_i \in \Lambda$. Среди этих точек в качестве $\mathbf{a}_i$ мы выберем такую точку решетки Λ, для которой положительное число $|v_{ii}|$ является наименьшим (но отличным от нуля).

Покажем, что точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ действительно образуют базис решетки Λ. Так как точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ принадлежат Λ по построению, то и точка

$$w_1\mathbf{a}_1 + \ldots + w_n\mathbf{a}_n, \tag{5}$$

где $w_1, \ldots, w_n$ — любые целые числа, также принадлежит Λ. Предположим, что точку $\mathbf{c}$ решетки Λ нельзя представить в виде (5). Так как $\mathbf{c} \in M$, то

$$\mathbf{c} = t_1\mathbf{b}_1 + \ldots + t_k\mathbf{b}_k,$$

где $1 \leqslant k \leqslant n$, $t_1, \ldots, t_k$ — целые числа, причем $t_k \neq 0$. Если имеется несколько таких точек, то выберем из них ту, для которой индекс k наименьший. Поскольку $v_{kk} \neq 0$, можно выбрать целое число s с условием

$$|t_k - sv_{kk}| < |v_{kk}|. \tag{6}$$

Точка

$$\mathbf{c} - s\mathbf{a}_k = (t_1 - sv_{11})\,\mathbf{b}_1 + \ldots + (t_k - sv_{kk})\,\mathbf{b}_k$$

лежит в решетке Λ, так как точки $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}_k$ лежат в этой решетке, причем, как и точка $\mathbf{c}$, она не имеет вида (5). Поскольку k выбрано наименьшим, $t_k - sv_{kk} \neq 0$. Но тогда неравенство (6) противоречит тому условию, что целое число v_{kk} выбрано наименьшим по абсолютной величине. Противоречие показывает, что точек $\mathbf{c}$, которых нельзя представить в виде (5), в решетке Λ нет. Этим доказано утверждение (A) теоремы.

Докажем утверждение (B). Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — некоторый фиксированный базис подрешетки Λ. Так как по (3) DM есть подрешетка решетки Λ, где D — индекс Λ в M, то на основании (A) имеется базис $D\mathbf{b}_1, \ldots, D\mathbf{b}_n$ вида

$$\left.\begin{aligned} D\mathbf{b}_1 &= w_{11}\mathbf{a}_1, \\ D\mathbf{b}_2 &= w_{21}\mathbf{a}_1 + w_{22}\mathbf{a}_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ D\mathbf{b}_n &= w_{n1}\mathbf{a}_1 + \ldots + w_{nn}\mathbf{a}_n \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

с целыми w_{ij} и $w_{ii} \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Последовательно разрешая равенства (7) относительно $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, мы получим ряд уравнений вида (4), где v_{ij} — рациональные числа. Но точки $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ составляют базис решетки M, а точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ лежат в M; поэтому v_{ij} — целые числа.

Теорема I доказана.

Из этой теоремы вытекает несколько простых, но полезных следствий.

Следствие 1. *В теореме* I *можно полагать*

$$v_{ii} > 0, \tag{8}$$

$$0 \leqslant v_{ij} < v_{jj} \quad \textit{в утверждении (A)}, \tag{9}$$

$$0 \leqslant v_{ij} < v_{ii} \quad \textit{в утверждении (B)}. \tag{10}$$

Доказательство. Если первоначально было $v_{ii} < 0$, то, чтобы получить неравенство (8), достаточно заменить $\mathbf{a}_i$ (в случае утверждения (A)) или $\mathbf{b}_i$ (в случае утверждения (B)) соответственно точками $-\mathbf{a}_i$ или $-\mathbf{b}_i$.

Чтобы получить неравенство (9), заменим точку $\mathbf{a}_i$ на

$$\mathbf{a}'_i = t_{i1}\mathbf{a}_1 + \ldots + t_{i,\,i-1}\mathbf{a}_{i-1} + \mathbf{a}_i,$$

где целые числа t_{ij} подлежат определению. При любом выборе чисел t_{ij} векторы $\mathbf{a}'_i$ составляют базис решетки Λ. Имеем

$$\mathbf{a}'_i = v'_{i1}\mathbf{b}_1 + \ldots + v'_{ii}\mathbf{b}_i,$$

где

$$v'_{ii} = v_{ii}, v'_{ij} = t_{ij}v_{jj} + t_{i,\,j+1}v_{j+1,\,j} + \ldots + t_{i,\,i-1}v_{i-1,\,j} + v_{ij}\ (j<i).$$

Для каждого i можно последовательно выбрать $t_{i,\,i-1}, t_{i,\,i-2}, \ldots$ $\ldots, t_{i1}$ так, чтобы

$$0 \leqslant v'_{ij} < v_{jj} = v'_{jj},$$

что и требовалось. Доказательство неравенств (10) аналогично.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Пусть* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ — *линейно независимые точки решетки* M. *Тогда найдется такой базис* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ *решетки* M, *что*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= v_{11}\mathbf{b}_1, \\ \mathbf{a}_2 &= v_{21}\mathbf{b}_1 + v_{22}\mathbf{b}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_m &= v_{m1}\mathbf{b}_1 + \ldots + v_{mm}\mathbf{b}_m, \end{aligned}$$

v_{ij} — *целые числа, причем*

$$v_{jj} > 0, \quad 0 \leqslant v_{ij} < v_{ii}, \qquad 1 \leqslant j < i \leqslant m. \tag{11}$$

Доказательство. Выберем точки $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ решетки M так, чтобы векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ были линейно независимы. Тогда наше утверждение вытекает из следствия 1, если последнее применить к решетке Λ с базисом $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ $(m < n)$ — *линейно независимые точки решетки* M. *Для существования таких точек* $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$, *что* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *является базисом решетки* M, *необходимо и достаточно, чтобы для каждой точки* $\mathbf{c}$ *решетки* M, *представимой в виде*

$$\mathbf{c} = u_1\mathbf{a}_1 + \ldots + u_m\mathbf{a}_m \tag{12}$$

с вещественными коэффициентами $u_1, \ldots, u_m$, *эти коэффициенты были бы целыми.*

Доказательство. Если $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ — часть базиса $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, то условие, очевидно, выполняется. Обратно, пусть точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ удовлетворяют этому условию и пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис решетки M, определенный в следствии 2, а v_{ij} — соответствующие целые числа. Тогда точки $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_m$ имеют вид (12), а коэффициент при $\mathbf{a}_i$ в выражении для $\mathbf{b}_i$ равен v_{ii}^{-1} $(i = 1, \ldots, m)$. Следовательно, $v_{ii} = 1$, а значит, $v_{ij} = 0$ при $i \neq j$, т. е. $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, и можно положить $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i$ $(m+1 \leqslant i \leqslant n)$.

Следствие доказано.

В некоторых рассуждениях нам понадобится более специальное предложение, которое тотчас вытекает из следствия 3.

Следствие 4. *Пусть* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — *базис решетки* M, *и пусть*

$$\mathbf{c} = u_1\mathbf{b}_1 + \ldots + u_n\mathbf{b}_n \in \mathrm{M}$$

— *некоторая точка этой решетки. Для того чтобы точки*

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{m-1}, \mathbf{c}$$

можно было бы дополнить до базиса

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{m-1}, \mathbf{c}, \mathbf{c}_{m+1}, \ldots, \mathbf{c}_n$$

решетки M, *необходимо и достаточно, чтобы числа* $u_m, u_{m+1}, \ldots$ $\ldots, u_n$ *не имели бы общего множителя, отличного от* ± 1.

Доказательство очевидно.

Иногда полезна следующая характеристика индекса подрешетки Λ решетки M. Мы говорим, что два вектора $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ решетки M находятся в одном классе относительно подрешетки Λ, если вектор $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ лежит в Λ. Очевидно, эта операция является разбиением на классы, ибо если $\mathbf{c}-\mathbf{d}$ и $\mathbf{d}-\mathbf{e}$ лежат в Λ, то и $\mathbf{c}-\mathbf{e}$ лежит в Λ.

Лемма 1. *Индекс подрешетки* Λ *в решетке* M *равен числу классов решетки* M *относительно* Λ.

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{a}_j\}$, $\{\mathbf{b}_j\}$ — соответственно базисы решеток Λ и M вида (4), определенного теоремой I. Тогда, очевидно, индекс D подрешетки Λ в M дается формулой

$$D = \prod_i |v_{ii}|.$$

Далее, как легко проверить, точка $\mathbf{c} \in \mathrm{M}$ находится в том же классе, что и одна из точек

$$q_1\mathbf{b}_1 + \ldots + q_n\mathbf{b}_n \qquad (0 \leqslant q_j < v_{jj})$$

(см. доказательство следствия 1 теоремы I).

Лемма 1 доказана.

3. Имеется одна полезная модификация условия следствия 3 теоремы I для решения вопроса о том, можно ли совокупность точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ $(m < n)$ решетки Λ дополнить до базиса решетки Λ.

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — *базис решетки* Λ, *и пусть*

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij}\mathbf{b}_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant m) \tag{1}$$

— точки решетки Λ. *Для того чтобы совокупность точек* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *можно было бы дополнить до базиса* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *решетки* Λ, *необходимо и достаточно, чтобы определители порядка* m, *образованные* m *столбцами матрицы*

$$(v_{ij}) \quad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n), \tag{2}$$

не имели общего делителя.

Доказательство. Условие необходимо. Действительно, пусть точки $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ вместе с $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ образуют базис, так что

$$\mathbf{a}_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ij}\mathbf{b}_j \quad (m+1 \leqslant i \leqslant n) \tag{3}$$

для некоторых целых чисел v_{ij}. Так как $\mathbf{a}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и $\mathbf{b}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ — базисы одной и той же решетки, то

$$\det(v_{ij}) = \pm 1. \tag{4}$$

Разлагая определитель (4) по первым m и последним $(n-m)$ строкам (теорема Лапласа), получаем

$$\sum_{r=1}^{R} V_r W_r = \det(v_{ij}), \tag{5}$$

где $V_1, \ldots, V_R$ — определители, образованные столбцами матрицы (2); $W_1, \ldots, W_R$ — их алгебраические дополнения; $R = \binom{n}{m}$. Так как числа $W_1, \ldots, W_R$ — целые, то из равенств (4) и (5) вытекает, что числа $V_1, \ldots, V_R$ взаимно просты.

Условие леммы является также и достаточным. Действительно, пусть $\mathbf{c}$ — точка решетки Λ вида

$$\mathbf{c} = u_1\mathbf{a}_1 + \ldots + u_m\mathbf{a}_m \tag{6}$$

с вещественными коэффициентами $u_1, \ldots, u_m$. Так как $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис решетки Λ, то, подставляя выражения (1) в равенство (6), получаем

$$\sum_{i=1}^{m} u_i v_{ij} = l_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{7}$$

где $l_1, \ldots, l_n$ — целые числа. Мы можем разрешить равенства (7) относительно u_i различными способами. Пусть, например, $\tilde{v}_j$ — алгебраическое дополнение элемента v_{1j} в разложении определителя

$$V_1 = \det(v_{ij}) \quad (1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant m).$$

Тогда

$$\sum_{j=1}^{m} \tilde{v}_i l_j = V_1 u_1,$$

а потому $V_1 u_1$ — целое число. Аналогично докажем, что $V_r u_i$ — целое число для любого i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ и любого определителя V_r порядка m матрицы (2).

Так как по предположению $V_1, \ldots, V_R$ — взаимно простые целые числа, то числа u_i целые. Поэтому в силу следствия 3 теоремы I точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ можно дополнить до базиса $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$.

Лемма 2 доказана.

4[1]). Используем лемму 2 для получения результата Давенпорта [19], касающегося способа выбора базиса решетки. На этот результат мы будем опираться только в § 10 гл. V при доказательстве одного результата по диофантовым приближениям, далекого от главной темы этой книги.

Теорема II. *Пусть* Λ *есть* n*-мерная решетка, пусть* $\mathbf{c}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ *суть* $(n-1)$ *произвольных вещественных векторов и пусть* $\varepsilon > 0$ *— сколь угодно малое вещественное число. Тогда найдется такое число* N_0, *зависящее только от* Λ, ε *и* $\{\mathbf{c}_i\}$, *что для всех вещественных чисел* $N \geqslant N_0$ *существует базис* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ *решетки* Λ, *для которого*

$$|\mathbf{a}_i - N\mathbf{c}_i| < N^{\varepsilon} \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1). \tag{1}$$

Здесь, как обычно,

$$|\mathbf{x}| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

— расстояние в евклидовом пространстве.

Чтобы доказать теорему II, нам понадобится один результат, касающийся распределения целых чисел, взаимно простых с данным целым числом. Перед доказательством теоремы II мы докажем этот факт.

Лемма 3. *Для каждого* $\delta > 0$ *найдется число* $k(\delta)$, *обладающее следующим свойством: любой интервал длины* $k(\delta)q^{\delta}$, *где* q *— положительное целое число, содержит целое число, взаимно простое с* q.

Доказательство. Пусть

$$q = \prod_{j=1}^{J} p_j^{\alpha_j}, \tag{3}$$

где p_j — различные простые, а $\alpha_j > 0$ — целые числа. Целое число взаимно просто с q тогда и только тогда, когда оно не делится на $p_1, \ldots, p_J$.

[1]) При первом чтении этот пункт можно опустить.

Рассмотрим какой-нибудь интервал

$$V < u \leqslant V + U \tag{4}$$

длины U, где U и V — фиксированные целые числа. Пусть для $j_1 < j_2 < \ldots < j_s$, где $s \leqslant J$,

$$M(j_1, \ldots, j_s)$$

— число целых чисел u интервала (4), делящихся на $p_{j_1}, p_{j_2}, \ldots, p_{j_s}$ (а возможно, и на другие простые числа из ряда $p_1, \ldots, p_J$). Покажем, что формула

$$W = U + \sum_{\substack{s>0 \\ j_1<j_2<\ldots<j_s}} (-1)^s M(j_1, \ldots, j_s) \tag{5}$$

дает количество целых чисел u из интервала (4), взаимно простых с q.

Действительно, пусть число u делится в точности на r простых чисел p_j, где $r \geqslant 1$, скажем на $p_1, \ldots, p_r$, но не делится на $p_{r+1}, \ldots, p_J$. Число u учтено в $M(j_1, \ldots, j_s)$ тогда и только тогда, когда $s \leqslant r$ и $(j_1, \ldots, j_s)$ — одно из $\binom{r}{s}$ сочетаний из чисел $1, 2, \ldots, r$ по s элементов. Кроме того, u, будучи одним из целых чисел интервала (4), учитывается один раз в числе U. Таким образом, общий вклад u в сумму (5) равен

$$1 - \binom{r}{1} + \binom{r}{2} \ldots = (1-1)^r = 0.$$

Если же u взаимно просто с q, то оно учитывается один раз в числе U, но не учитывается ни в одном из чисел $M(j_1, \ldots, j_s)$. Таким образом, как и утверждалось, W есть число целых чисел интервала (4), взаимно простых с q. Далее,

$$\left| M(j_1, \ldots, j_s) - \frac{U}{p_{j_1} \ldots p_{j_s}} \right| < 1,$$

ибо $M(j_1, \ldots, j_s)$ — количество целых чисел вида

$$u = p_{j_1} \ldots p_{j_s} u',$$

где u' — целое, причем

$$\frac{V}{p_{j_1} \ldots p_{j_s}} < u' \leqslant \frac{U+V}{p_{j_1} \ldots p_{j_s}}.$$

Так как сумма (5) состоит из 2^J слагаемых, то

$$W > U \left\{ 1 + \sum_{\substack{s>0 \\ j_1<\ldots<j_s}} \frac{(-1)^s}{p_{j_1} \ldots p_{j_s}} \right\} - 2^J =$$

$$= U \prod_j \left(1 - \frac{1}{p_j}\right) - 2^J \geqslant 2^{-J} U - 2^J.$$

Таким образом, если

$$U \geqslant U_0(q) = 4^J,$$

то в интервале (4) найдется целое число, взаимно простое с q. Если δ — сколь угодно малое число, о котором говорится в формулировке леммы, то

$$\frac{U_0(q)}{q^\delta} \leqslant \prod_j \left(\frac{4}{p_j^\delta}\right) \leqslant \prod_{p \leqslant 4^{1/\delta}} \left(\frac{4}{p^\delta}\right) = k(\delta);$$

здесь второе произведение берется по всем простым числам, меньшим $4^{1/\delta}$.

Лемма 3 доказана.

Мы используем эту лемму в следующей, несколько более общей формулировке.

Следствие. *Пусть q, δ, $k(\delta)$ — те же, что и в лемме 3, и пусть s, t — целые числа, причем t взаимно просто с q. Тогда в интервале длины, большей, чем $k(\delta) q^\delta$, найдется такое целое число u, что число $tu + s$ взаимно просто с q.*

Доказательство. Так как t и q взаимно просты, то

$$s = s_1 t + s_2 q$$

для некоторых целых чисел s_1 и s_2. Далее,

$$tu + s = t(u + s_1) + s_2 q.$$

Ввиду взаимной простоты t и q нам нужно лишь выбрать u так, чтобы $u + s_1$ было бы взаимно просто с q, а это по лемме 3 возможно.

Следствие доказано.

Доказательство теоремы II. Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — произвольный базис решетки Λ, и пусть

$$\mathbf{c}_i = \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \mathbf{b}_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1), \tag{6}$$

где γ_{ij} — вещественные числа. Покажем, что можно выбрать базис

$$\mathbf{a}_i = \sum_j v_{ij} \mathbf{b}_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{7}$$

решетки Λ так, чтобы

$$v_{ij} = N\gamma_{ij} + O(N^{i\delta}), \tag{8}$$

где $N > 1$ — данное положительное число, а $\delta > 0$ — сколь угодно малое вещественное число; постоянная, входящая в символ O, зависит только от n, δ и γ_{ij}. Для этого подберем целые числа v_{ij} так, чтобы выполнялись условия (8) и для любого $I < n$ числа $R_I = \det(v_{ij})$ $(1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant I)$ и $S_I = \det(v_{ij})$ $(1 \leqslant i \leqslant I,\ 2 \leqslant j \leqslant I+1)$ были отличны от нуля и взаимно просты.

Выбор v_{ij} осуществим индукцией по I. Сначала предположим, что $I=1$. В качестве v_{11} выберем ненулевое целое число, ближайшее к числу $N\gamma_{11}$. В качестве v_{12} возьмем ненулевое целое число, ближайшее к $N\gamma_{12}$ и взаимно простое с v_{11}. При $j > 2$ положим v_{1j} равным ближайшему к $N\gamma_{1j}$ целому числу. Тогда равенство (8) при $i=1$ и $j \neq 2$ очевидно, а при $i=1,\ j=2$ вытекает из леммы 3, ибо $v_{11} = O(N)$. Целые числа $R_1 = v_{11}$ и $S_1 = v_{12}$ обладают требуемыми свойствами.

Пусть теперь $I > 1$. Предположим, что уже выбраны числа v_{ij} $(1 \leqslant i < I;\ 1 < j \leqslant n)$. При $j \neq I,\ I+1$ в качестве v_{Ij} возьмем ближайшее к $N\gamma_{Ij}$ целое число. Какие бы мы ни выбрали числа v_{II} и $v_{I,\,I+1}$, разлагая R_I и S_I по последним строкам, получим

$$R_I = \pm v_{II} R_{I-1} + A,$$
$$S_I = \pm v_{I,\,I+1} S_{I-1} + v_{II} B + C,$$

где целые числа $A,\ B,\ C$ уже определены. Так как R_{I-1} взаимно просто с S_{I-1}, то целое число v_{II} можно выбрать так, что $R_I \neq 0$ и взаимно просто с S_{I-1}. Положим v_{II} равным ближайшему к $N\gamma_{II}$ целому числу, для которого высказанное условие выполняется. $S_{I-1} = O(N^{I-1})$, так как S_{I-1} является суммой произведений $I-1$ чисел v_{ij} порядка N. Поэтому в силу следствия леммы 3

$$v_{II} - N\gamma_{II} = O(S_{I-1}^{\delta}) = O(N^{(I-1)\delta}).$$

Определив v_{II}, в качестве $v_{I,\,I+1}$ возьмем такое ближайшее к $N\gamma_{I,\,I+1}$ целое число, что $S_I \neq 0$ и взаимно просто с R_I. Как и выше, получим

$$v_{I,\,I+1} - N\gamma_{I,\,I+1} = O(S_I^{\delta}) = O(N^{I\delta}).$$

Этим завершается индукция. Итак, мы показали существование целых чисел v_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n-1,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$, удовлетворяющих равенству (8). Так как R_{n-1} и S_{n-1} взаимно просты, то, согласно лемме 2, можно подобрать целые числа $v_{n1},\ \ldots,\ v_{nn}$, так, что векторы $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$, определяемые равенствами (7), будут образовывать базис.

Из равенств (7) и (8) выводим

$$|\mathbf{a}_i - N\mathbf{c}_i| = O(N^{(n-1)\delta}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n-1).$$

Отсюда при $\delta = \frac{\varepsilon}{n}$ вытекает справедливость теоремы.

Теорема II доказана.

§ 3. Линейные преобразования решеток

Здесь удобно вкратце рассмотреть действие неособенного аффинного преобразования $\mathbf{x} \to \mathbf{X} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}$ n-мерного пространства в себя. Пусть преобразование $\mathbf{X} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}$ задано формулами

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{1}$$

где

$$\mathbf{X} = (X_1,\ \ldots,\ X_n), \qquad \mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

— точки, соответствующие одна другой при этом преобразовании, а α_{ij} — вещественные числа, причем

$$\det(\boldsymbol{\alpha}) = \det(\alpha_{ij}) \neq 0.$$

Пусть Λ — некоторая решетка; обозначим через $\boldsymbol{\alpha}\Lambda$ множество точек $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \Lambda$. Если $\mathbf{b}_1,\ \ldots,\ \mathbf{b}_n$ — базис решетки Λ, то произвольная точка $\mathbf{b} = u_1\mathbf{b}_1 + \ldots + u_n\mathbf{b}_n$ ($u_1,\ \ldots,\ u_n$ — целые) решетки Λ преобразуется так:

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{b} = \boldsymbol{\alpha}(u_1\mathbf{b}_1 + \ldots + u_n\mathbf{b}_n) = u_1\boldsymbol{\alpha}\mathbf{b}_1 + \ldots + u_n\boldsymbol{\alpha}\mathbf{b}_n.$$

Таким образом, множество $\boldsymbol{\alpha}\Lambda$ является решеткой с базисом $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{b}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{\alpha}\mathbf{b}_n$ и

$$d(\boldsymbol{\alpha}\Lambda) = |\det(\boldsymbol{\alpha}\mathbf{b}_1,\ \ldots,\ \boldsymbol{\alpha}\mathbf{b}_n)| = |\det(\boldsymbol{\alpha})|\,|\det(\mathbf{b}_1,\ \ldots,\ \mathbf{b}_n)| = |\det(\boldsymbol{\alpha})|\,d(\Lambda).$$

Отметим два частных случая. Во-первых, если $t \neq 0$ — вещественное число, то множество $t\mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in \Lambda$, является решеткой с определителем $|t|^n d(\Lambda)$. Эту решетку мы будем обозначать $t\Lambda$. Во-вторых, любую решетку M можно представить в виде $M = \boldsymbol{\alpha}\Lambda_0$, где $\boldsymbol{\alpha}$ — преобразование вида (1), а Λ_0 — решетка целых точек. Действительно, если $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ — любой базис M, то α_{ij} можно определить равенствами

$$\mathbf{a}_j = (\alpha_{1j},\ \ldots,\ \alpha_{nj}).$$

§ 4. Формы и решетки

1. Сначала рассмотрим квадратичные формы. Пусть

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i,\,j=1}^{n} f_{ij} x_i x_j \qquad (f_{ij} = f_{ji}), \tag{1}$$

где

$$\mathbf{x} = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \tag{2}$$

— неособенная квадратичная форма сигнатуры[1]) $(r,\ n-r)$; последнее означает существование таких независимых вещественных линейных форм

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_j \qquad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{3}$$

что имеет место тождество

$$f(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{X}), \tag{4}$$

где

$$\mathbf{X} = (X_1,\ \dots,\ X_n) \tag{5}$$

и

$$\varphi(\mathbf{X}) = X_1^2 + \dots + X_r^2 - X_{r+1}^2 - \dots - X_n^2 \tag{6}$$

(при $r=0$ и $r=n$ положительных, соответственно отрицательных, квадратов нет совсем).

Очевидно, что

$$\det(f_{ij}) = \pm\{\det(d_{ij})\}^2. \tag{7}$$

Обратно, если d_{ij} — любая совокупность таких вещественных чисел, что $\det(d_{ij}) \neq 0$, то равенства (3), (4) и (6) определяют квадратичную форму (1) сигнатуры $(r,\ n-r)$, причем имеет место равенство (7). Большей частью мы будем иметь дело со значениями, которые принимает форма $f(\mathbf{x})$ тогда, когда $x_1, \dots, x_n$ являются целыми числами. В силу равенства (3) они совпадают со значениями формы $\varphi(\mathbf{X})$, когда $\mathbf{X}$ пробегает точки решетки Λ с базисом

$$\mathbf{d}_j = (d_{1j},\ \dots,\ d_{nj}).$$

При этом равенство (7) дает нам

$$\{d(\Lambda)\}^2 = |\det(f_{ij})|. \tag{8}$$

При такой интерпретации утверждения относительно различных квадратичных форм сигнатуры $(r,\ n-r)$ при целых значениях аргумента эквивалентны утверждениям относительно единственной формы $\varphi(\mathbf{X}) = X_1^2 + \dots + X_r^2 - X_{r+1}^2 - \dots - X_n^2$ и различных решеток. Имея в виду дальнейшее, мы сформулируем типичный результат такого

Лемма 4. *Пусть*

$$\varphi(\mathbf{X}) = X_1^2 + \dots + X_r^2 - X_{r+1}^2 - \dots - X_n^2;$$

[1]) Многие авторы определяют сигнатуру как разность между числом положительных и отрицательных квадратов в выражении (6). Однако более удобно давать точно число положительных и отрицательных квадратов обоего вида, чем подсчитывать каждый раз разность.

тогда следующие четыре утверждения относительно числа $\varkappa$ *эквивалентны.*

(i) *В каждой решетке* Λ *имеется такая точка* $\mathbf{A} \neq \mathbf{o}$, *что*

$$|\varphi(\mathbf{A})| \leqslant \varkappa\{d(\Lambda)\}^{\frac{2}{n}}.$$

(ii) *В каждой решетке* Λ *с определителем* 1 *имеется такая точка* $\mathbf{A} \neq \mathbf{o}$, *что*

$$|\varphi(\mathbf{A})| \leqslant \varkappa.$$

(iii) *В каждой решетке* Λ *с определителем* $d(\Lambda) \leqslant \varkappa^{-\frac{n}{2}}$ *имеется такая точка* $\mathbf{A} \neq \mathbf{o}$, *что*

$$|\varphi(\mathbf{A})| \leqslant 1.$$

(iv) *Для любой квадратичной формы* $\sum f_{ij}x_ix_j$ *сигнатуры* $(r,\ n-r)$ *найдется такая целая точка* $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, *что*

$$|f(\mathbf{a})| \leqslant \varkappa|\det(f_{ij})|^{\frac{1}{n}}.$$

Доказательство. Эквивалентность утверждений (i), (ii) и (iii) вытекает из однородности, так как $\varphi(t\mathbf{X}) = t^2\varphi(\mathbf{X})$ и так как множество $t\Lambda$ всех $t\mathbf{X}$ $(\mathbf{X} \in \Lambda)$ является решеткой с определителем $|t|^n d(\Lambda)$, а t можно выбрать так, чтобы $t^n d(\Lambda) = 1$. Эквивалентность утверждений (iii) и (iv) немедленно следует из предыдущих рассуждений, в частности из равенства (8).

Лемма 4 доказана.

Предшествующие рассуждения имеют совершенно общий характер. Например, поведение любой формы $f(\mathbf{x})$ степени n, представимой в виде произведения n вещественных линейных форм

$$f(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{n} (d_{j1}x_1 + \dots + d_{jn}x_n),$$

для целых значений переменных эквивалентно поведению функции

$$\varphi(\mathbf{X}) = X_1 \cdot \ldots \cdot X_n$$

в точках соответствующей решетки Λ. Одна и та же функция $\varphi(\mathbf{X})$ соответствует множеству всех функций $f(\mathbf{x})$, которые можно получить из нее вещественным неособенным аффинным преобразованием

$$X_i = \sum d_{ij}x_j,$$

где d_{ij} — вещественные числа $(1 \leqslant i,\ j \leqslant n)$; $\det(d_{ij}) \neq 0$.

2. Конечно, форма $\varphi(\mathbf{x})$ и решетка Λ определяют функцию $f(\mathbf{x})$ неоднозначно, ибо функция $f(\mathbf{x})$ зависит от выбора базиса решетки Λ.

Здесь мы рассмотрим эту неопределенность. Преобразование

$$X_i = \sum_j d_{ij} x_j,$$

определенное в предыдущем пункте, имеет вид

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x},$$

рассмотренный в § 3. Отождествляя эти преобразования, мы видим, что

$$\Lambda = \boldsymbol{\alpha}\Lambda_0,$$

где Λ_0 — решетка целых точек; при этом фиксированный базис

$$\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n$$

решетки Λ соответствует базису

$$\mathbf{e}_j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{j-1}, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-j}), \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

решетки Λ_0. Поэтому любой другой базис $\mathbf{d}_1', \ldots, \mathbf{d}_n'$ решетки Λ имеет вид

$$\mathbf{d}_j' = \boldsymbol{\alpha}\mathbf{e}_j',$$

где $\mathbf{e}_j'$ — некоторый базис решетки Λ_0. Пусть форма f' соответствует базису $\{\mathbf{d}_j'\}$, подобно тому как f соответствует базису $\{\mathbf{d}_j\}$. Тогда имеет место тождество

$$f'(\mathbf{x}') = f'(x_1', \ldots, x_n') = \varphi(x_1'\mathbf{d}_1' + \ldots + x_n'\mathbf{d}_n') = \\ = f(x_1'\mathbf{e}_1' + \ldots + x_n'\mathbf{e}_n').$$

А так как $\{\mathbf{e}_j'\}$ — базис решетки Λ_0, то

$$\mathbf{e}_j' = (v_{1j}, \ldots, v_{nj}),$$

где v_{ij} — целые числа, удовлетворяющие условию

$$\det(v_{ij}) = \pm 1, \tag{1}$$

так что тождественно выполняется равенство

$$f'(\mathbf{x}') = f(\mathbf{x}), \tag{2}$$

где

$$x_i = \sum_j v_{ij} x_j'. \tag{3}$$

Обратно, если v_{ij} — такие целые числа, что имеют место равенства (1), (2), (3), то формы f' и f соответствуют одной и той же решетке Λ. В этом случае говорят, что формы f и f' эквивалентны[1]).

[1]) Следует подчеркнуть, что это определение дается для произвольных форм, т. е. для любых однородных полиномов произвольной степени и с любым числом переменных. — *Прим. ред.*

Когда переменные пробегают все целые числа, эти формы принимают значения из одного и того же множества чисел, так как в силу равенств (1) и (3) целый вектор $\mathbf{x}'$ соответствует вектору $\mathbf{x}$ и обратно.

Иногда в равенстве (1) полезно различать случаи $\det(v_{ij}) = +1$ (собственная эквивалентность) и $\det(v_{ij}) = -1$ (несобственная эквивалентность). Однако мы этого делать не будем, так как это различие соответствующих решеток не существенно.

3. Вообще говоря, формы $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{X})$ определяют решетку неоднозначно, ибо, например, квадратичную форму $f(x)$ сигнатуры (r, s), $r + s = n$, можно представить в виде

$$X_1^2 + \ldots + X_r^2 - X_{r+1}^2 - \ldots - X_{r+s}^2$$

многими способами. Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ и $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базисы соответственно решеток Λ и M. Предположим, что

$$\varphi\Big(\sum_j u_j \mathbf{a}_j\Big) = \varphi\Big(\sum_j u_j \mathbf{b}_j\Big) \tag{1}$$

для всех целых $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$. Так как $\varphi(\mathbf{X})$ — форма, то равенство (1) является тождеством относительно переменных $u_1, \ldots, u_n$. Пусть $\boldsymbol{\omega}$ — такое однозначно определенное однородное преобразование, что

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n);$$

тогда

$$\boldsymbol{\omega}\Big(\sum_j u_j \mathbf{a}_j\Big) = \sum_j u_j \mathbf{b}_j$$

для всех $\mathbf{u}$, откуда в силу тождества (1) и линейной независимости $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ выводим равенство

$$\varphi(\mathbf{X}) = \varphi(\boldsymbol{\omega}\mathbf{X}) \tag{2}$$

для всех векторов $\mathbf{X}$. Если для однородного преобразования выполняется равенство (2), то оно называется автоморфизмом формы φ. Мы только что показали, что если имеет место тождество (1), то найдется такой автоморфизм $\boldsymbol{\omega}$ формы φ, что $\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Обратное утверждение, т. е. если $\boldsymbol{\omega}$ — автоморфизм формы φ и $\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, то справедливо равенство (1), конечно тривиально. Более подробно мы изучим автоморфизмы форм в гл. X.

§ 5. Взаимная решетка[1])

1. Скалярное произведение двух n-мерных векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ мы обозначим через

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n. \tag{1}$$

[1]) Ссылок на этот параграф не будет до гл. VIII; он не будет иметь большого значения до гл. X и XI.

Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис решетки Λ. Так как векторы $\mathbf{b}_j$ линейно независимы, то найдутся такие векторы $\mathbf{b}_j^*$, что

$$\mathbf{b}_j^*\mathbf{b}_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases} \tag{2}$$

Решетка Λ^* с базисом $\{\mathbf{b}_j^*\}$ называется решеткой, взаимной (или полярной, или двойственной) решетке Λ, а базис $\{\mathbf{b}_j^*\}$ — взаимным базису $\{\mathbf{b}_j\}$. Взаимная решетка Λ^* для решетки Λ, как мы сейчас покажем, не зависит от выбора базиса.

Лемма 5. *Вектор $\mathbf{a}^*$ принадлежит решетке Λ^* тогда и только тогда, когда $\mathbf{a}^*\mathbf{a}$ — целое число для всех точек $\mathbf{a}$ решетки Λ. Обратно, решетка Λ является взаимной для решетки Λ^*. Более того,*

$$d(\Lambda)\,d(\Lambda^*) = 1.$$

Доказательство. Предположим сначала, что точки

$$\mathbf{a}^* = \sum u_j\mathbf{b}_j^*, \quad \mathbf{a} = \sum v_j\mathbf{b}_j$$

принадлежат соответственно решеткам Λ^* и Λ, так что коэффициенты u_j и v_j — целые. Тогда

$$\mathbf{a}^*\mathbf{a} = \sum_{j=1}^{n} u_jv_j$$

— целое число. Обратно, пусть $\mathbf{c}$ — такой вектор, что $\mathbf{ca}$ — целое число для всех $\mathbf{a} \in \Lambda$. В частности, числа

$$\mathbf{cb}_j = u_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

— целые. Возьмем $\mathbf{a}^* = \sum u_j\mathbf{b}_j^*$. Тогда

$$(\mathbf{c} - \mathbf{a}^*)\,\mathbf{b}_j = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

поэтому $\mathbf{c} = \mathbf{a}^*$, ибо векторы $\mathbf{b}_j$ линейно независимы. Это доказывает первое утверждение теоремы.

Второе утверждение непосредственно вытекает из первого и из равенств (2).

Наконец, из (2) следует, что

$$\det(\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*)\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) = 1;$$

поэтому $d(\Lambda^*)\,d(\Lambda) = 1$.

Лемма 5 доказана.

2. Если зафиксирован вектор $\mathbf{y} \neq \mathbf{o}$, то те точки $\mathbf{x}$, для которых $\mathbf{yx} = 0$, лежат в гиперплоскости, проходящей через $\mathbf{o}$.

Лемма 6. *Для того чтобы существовали $n-1$ линейно независимых точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{n-1}$ решетки Λ с условием $\mathbf{ya}_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{y} = t\mathbf{a}^*$, где t — некоторое вещественное число и $\mathbf{a}^*$ — точка решетки Λ^*, взаимной к Λ.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathbf{ya}_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Тогда в силу следствия 2 теоремы I найдется такой базис $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ решетки Λ, что

$$\mathbf{a}_i = v_{i1}\mathbf{b}_1 + \ldots + v_{ii}\mathbf{b}_i \qquad (v_{ii} \neq 0)$$

с целыми v_{ij}. Отсюда последовательно получаем $\mathbf{yb}_i = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$. Пусть $\mathbf{yb}_n = t$. Так как для любого вектора $\mathbf{z}$ имеет место разложение $\mathbf{z} = (\mathbf{zb}_1)\,\mathbf{b}_1^* + \ldots + (\mathbf{zb}_n)\,\mathbf{b}_n^*$, то $\mathbf{y} = t\mathbf{b}_n^*$, где $\mathbf{b}_j^*$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — базис, взаимный базису $\mathbf{b}_j$. Это доказывает необходимость условия леммы.

Докажем его достаточность. Пусть $\mathbf{y} = t\mathbf{a}^*$, где $\mathbf{a}^* \in \Lambda^*$. Если $\mathbf{a}^* = 0$, то утверждение очевидно. В противном случае $\mathbf{a}^* = m\mathbf{b}_1^*$, где m — некоторое целое число, а $\mathbf{b}_1^*$ — примитивный вектор [1]). Точку $\mathbf{b}_1^*$ можно дополнить до базиса $\{\mathbf{b}_j^*\}$ решетки Λ^*. Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — взаимный базис. Тогда

$$\mathbf{yb}_j = mt\mathbf{b}_1^*\mathbf{b}_j = 0 \qquad (2 \leqslant j \leqslant n).$$

Лемма 6 доказана.

Пусть $\Lambda(\mathbf{a}^*)$ — множество всех точек $\mathbf{a}$ решетки Λ, для которых $\mathbf{a}^*\mathbf{a} = 0$; здесь $\mathbf{a}^*$ — некоторый фиксированный вектор. Очевидно, что если точки $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ лежат в $\Lambda(\mathbf{a}^*)$, то при любых целых числах u_1 и u_2 и точка $u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2$ лежит в $\Lambda(\mathbf{a}^*)$. Пусть $\mathbf{a}^* \in \Lambda^*$; в силу леммы 6 в множестве $\Lambda(\mathbf{a}^*)$ найдутся $n-1$ линейно независимых векторов. Поэтому $\Lambda(\mathbf{a}^*)$ является $(n-1)$-мерной решеткой. Точнее, имеет место следующее предложение.

Следствие. *Пусть $\mathbf{b}^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ — примитивный вектор решетки Λ^*, причем $b_n^* \neq 0$. Тогда множество $(n-1)$-мерных векторов $\mathbf{a}' = (a_1, \ldots, a_{n-1})$, обладающих тем свойством, что для некоторого a_n вектор $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ лежит в решетке Λ и удовлетворяет равенству $\mathbf{b}^*\mathbf{a} = 0$, является $(n-1)$-мерной решеткой M с определителем $d(\mathrm{M}) = |b_n^*|\,d(\Lambda)$.*

Заметим, что решетка M является проекцией только что определенного множества $\Lambda(\mathbf{b}^*)$ на гиперплоскость $x_n = 0$. Ввиду того что $b_n^* \neq 0$, число a_n, если оно существует, определяется числами $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и условием $\mathbf{b}^*\mathbf{a} = 0$ однозначно.

---

[1]) То есть вектор $\mathbf{b}_1^*$ нельзя представить в виде $u\mathbf{c}^*$, $\mathbf{c}^* \in \Lambda^*$, $u > 1$ — целое число.

Можно предполагать, что $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}_n^*$, где $\{\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*\}$ — базис решетки Λ^*, а $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — взаимный ему базис. После того что было сказано перед формулировкой следствия, ясно, что $(n-1)$-мерные векторы $\mathbf{b}_j'$, составленные из первых $n-1$ координат векторов $\mathbf{b}_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, образуют базис для M. Далее имеем

$$b_n^* \det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n) = b_{nn}^* \det\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1,1} & \ldots & b_{n-1,n} \\ b_{nn}^* b_{n1} & \ldots & b_{nn}^* b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1,1} & \ldots & b_{n-1,n} \\ b_{1n}^* b_{11} + \ldots + b_{nn}^* b_{n1} & \ldots & b_{1n}^* b_{1n} + \ldots + b_{nn}^* b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1,1} & \ldots & b_{n-1,n} \\ \mathbf{b}_n^*\mathbf{b}_1 & \ldots & \mathbf{b}_n^*\mathbf{b}_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1,n-1} & b_{1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1,1} & \ldots & b_{n-1,n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & \ldots 0 & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n-1,1} & \ldots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} = \det(\mathbf{b}_1', \ldots, \mathbf{b}_{n-1}').$$

В частности, $|b_n^*| \, d(\Lambda) = d(\mathrm{M})$, что и требовалось доказать.

3. Наконец, нам следует изучить действие однородного линейного преобразования на отношение между взаимными решетками. Пусть

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{x} \tag{1}$$

— неособенное однородное линейное преобразование, заданное формулами

$$X_i = \sum_j \tau_{ij} x_j,$$

где

$$\det(\boldsymbol{\tau}) = \det(\tau_{ij}) \neq 0. \tag{2}$$

Пусть $\mathbf{Y}$ — произвольный вектор; тогда

$$\mathbf{YX} = \sum_i Y_i X_i = \sum_{i,j} Y_i \tau_{ij} x_j.$$

Следовательно,

$$\mathbf{YX} = \mathbf{yx}, \tag{3}$$

где

$$y_j = \sum_i Y_i \tau_{ij} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{4}$$

Так как по предположению $\det(\boldsymbol{\tau}) \neq 0$, то равенства (4) определяют вектор $\mathbf{Y}$ как функцию от $\mathbf{y}$. Запишем

$$\mathbf{Y} = \boldsymbol{\tau}^*\mathbf{y},$$

где $\boldsymbol{\tau}^*$ называется преобразованием, взаимным с $\boldsymbol{\tau}$.

Лемма 7. *Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — неособенное однородное линейное преобразование, Λ — решетка, $\boldsymbol{\tau}\Lambda$ — решетка точек $\boldsymbol{\tau}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \Lambda$. Тогда решеткой, взаимной с $\boldsymbol{\tau}\Lambda$, является решетка $\boldsymbol{\tau}^*\Lambda^*$, где $\boldsymbol{\tau}^*$ и Λ^* взаимны с $\boldsymbol{\tau}$ и Λ.*

Эта лемма вытекает непосредственно из леммы 5 и из приведенного выше равенства (3), где $\mathbf{X} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{x}$, $\mathbf{Y} = \boldsymbol{\tau}^*\mathbf{y}$.

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ПРИВЕДЕНИЯ

§ 1. Введение

При исследовании значений, принимаемых алгебраической формой $f(\mathbf{x})$ для целочисленных значений переменных, часто бывает полезно заменить форму f эквивалентной ей формой (в смысле § 4 гл. I), лучше отражающей специфику рассматриваемой задачи. Эта замена не зависит от введенных Минковским геометрических понятий, а опирается исключительно на рассмотренные в гл. I свойства базисов решеток. При этом фактически рассматривается только решетка целочисленных векторов Λ_0.

Удобно изложить в одной главе различные приложения теории приведения. Последние параграфы этой главы содержат некоторые, довольно сложные вычисления. Начинающий читатель после ознакомления с результатами п. 2 § 4 вполне может опустить все дальнейшее. Несколько следующих глав практически не зависят от гл. II, так что эту главу можно изучить позднее.

В § 2 излагается общий метод. Остальная часть главы посвящена главным образом исследованию величины

$$M(f)=\inf|f(\mathbf{u})|,$$

где $f(\mathbf{x})$ является формой специального типа; точная нижняя граница берется по всем целым векторам $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$. В § 3 и 4 рассматриваются соответственно определенные и неопределенные квадратичные формы, а в § 5 — бинарные кубические формы.

Методы этой главы можно с успехом применить к смежным проблемам: например, в случае, когда $f(\mathbf{x})$ — неопределенная форма, к оценке величины

$$\inf f(\mathbf{u})$$

по всем целочисленным векторам $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$, для которых $f(\mathbf{u})$ положительна (либо в строгом смысле $f(\mathbf{u})>0$, либо в слабом смысле $f(\mathbf{u})\geqslant 0$; вообще говоря, это две различные задачи). Однако нами эта оценка будет произведена лишь для бинарных форм.

Сводка известных результатов о квадратичных формах дана в приложении. Позднее мы будем рассматривать квадратичные формы с других точек зрения.

Давенпорт и Роджерс [2] показали, что во многих случаях существует не один, а бесконечно много целочисленных векторов $\mathbf{u}$, для которых $f(\mathbf{u})$ удовлетворяет установленным неравенствам. Эти вопросы, требующие более тонких методов, чем те, которые используются здесь, будут рассмотрены в гл. X.

Следует отметить, что существует классическая теория приведения неопределенных бинарных квадратичных форм, которую мы здесь не рассматриваем. Хотя эта теория и входит в общие рамки теории приведения в употребляемом здесь смысле, т. е. является решением вопроса о выборе базисов со специальными свойствами, но она становится более понятной после изучения гл. III. Эта теория находится в тесной связи с теорией цепных дробей (см. § 8 гл. X).

§ 2. Основной процесс

1. Рассмотрим сначала стандартную процедуру для положительно определенных форм $f(\mathbf{x})$, т. е. таких форм, что $f(\mathbf{x})>0$ для всех вещественных векторов $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}$.

Заметим сначала, что если $f(\mathbf{x})$ — положительно определенная форма степени r, то существует такая постоянная $\varkappa>0$, что

$$f(\mathbf{x})\geqslant\varkappa|\mathbf{x}|^r \tag{1}$$

для всех вещественных векторов $\mathbf{x}$, где $|\mathbf{x}|=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.

Действительно, на поверхности сферы $|\mathbf{x}|=1$ непрерывная функция $f(\mathbf{x})$ должна принимать свое наименьшее значение $\varkappa$; ясно, что $\varkappa>0$; неравенство (1) следует из однородности формы. В частности, существует только конечное число целочисленных векторов [1]) $\mathbf{u}$, для которых $f(\mathbf{u})$ меньше любого заданного числа.

Для положительно определенной формы $f(\mathbf{x})$ выберем базис решетки Λ_0 целочисленных векторов следующим образом. Пусть $\mathbf{e}_1'\neq\mathbf{o}$ — один из целочисленных векторов $\mathbf{u}$, для которых $f(\mathbf{u})$ имеет наименьшую возможную величину. Как было отмечено, такие $\mathbf{u}$ существуют и притом в конечном числе. Если вектор $\mathbf{e}_1'$ имеет вид $\mathbf{e}_1'=k\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\in\Lambda_0$, где $k>1$ — целое число, то имеет место неравенство

$$0<f(\mathbf{a})=k^{-r}f(\mathbf{e}_1')<f(\mathbf{e}_1'),$$

что противоречит определению вектора $\mathbf{e}_1'$. Таким образом, вектор $\mathbf{e}_1'$ примитивен, и по следствию 3 теоремы I гл. I мы можем дополнить вектор $\mathbf{e}_1'$ до базиса $\mathbf{e}_1', \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n$ решетки Λ_0 всех целочисленных векторов. Будем теперь последовательно выбирать векторы $\mathbf{e}_j'$ $(2\leqslant j\leqslant n)$. Предположим, что векторы $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_{j-1}'$ уже выбраны и их можно дополнить до базиса $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_{j-1}', \mathbf{b}_j, \ldots, \mathbf{b}_n$ решетки Λ_0. Тогда в качестве $\mathbf{e}_j'$ возьмем один из векторов с наимень-

[1]) То есть векторов с целыми рациональными координатами.

шим значением величины $f(\mathbf{e}'_j)$ среди всех векторов $\mathbf{e}'_j$, для которых множество $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_j$ может быть дополнено до базиса решетки Λ_0. Такие векторы $\mathbf{e}'_j$ существуют и притом в конечном числе, как это следует из рассуждений, аналогичных рассуждениям, проведенным при построении вектора $\mathbf{e}'_1$. Таким путем мы получаем базис $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$, причем для любой данной формы $f(\mathbf{x})$ существует только конечное число таких базисов.

Если функция $f(\mathbf{x})$ такова, что этот базис мы можем составить из векторов

$$\mathbf{e}'_j = \mathbf{e}_j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{j-1}, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-j}) \qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

то говорят, что форма $f(\mathbf{x})$ является приведенной (в смысле Минковского). Приведенное выше рассуждение показывает, что каждая положительно определенная форма эквивалентна (в смысле § 4 гл. I) самое меньшее одной и самое большее конечному числу приведенных форм.

Определению приведенной формы можно придать более явный вид. По следствию 4 теоремы I гл. I (или по лемме 2 гл. I) для того, чтобы множество векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{j-1}, \mathbf{u}$, где $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ — целый вектор, можно было дополнить до базиса решетки Λ_0, необходимо и достаточно, чтобы

$$\text{о. н. д. } (u_j, \ldots, u_n) = 1. \tag{2}$$

Таким образом, форма $f(\mathbf{x})$ является приведенной в том и только в том случае, когда

$$f(u_1, \ldots, u_n) \geqslant f(\mathbf{e}_j)$$

для всех j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и для всех систем целых $u_1, \ldots, u_n$, удовлетворяющих условию (2).

2. В случае, когда форма $f(\mathbf{x})$ — неопределенная, нет общего процесса, аналогичного процессу приведения определенных форм. Если мы знаем (или можем предположить), что $f(\mathbf{u})$ не принимает сколь угодно малых значений для целочисленных векторов $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, то можно отчасти сохранить процесс приведения. Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно малым. По предположению

$$M_1 = \inf |f(\mathbf{u})| > 0$$

(точная нижняя граница берется по всем целым векторам $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$). Мы можем найти целый вектор $\mathbf{e}'_1 \neq \mathbf{o}$, для которого

$$|f(\mathbf{e}'_1)| < \frac{M_1}{1-\varepsilon}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\mathbf{e}'_1$ — примитивный вектор. Если $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{j-1}$ уже выбраны, то обозначим

$$M_j = \inf |f(\mathbf{u})|,$$

где точная нижняя грань берется по всем таким целочисленным векторам $\mathbf{u}$, что множество векторов $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_{j-1}, \mathbf{u}$ может быть дополнено до базиса решетки Λ_0. Тогда

$$M_j \geqslant M_1 > 0,$$

и мы можем выбрать $\mathbf{e}'_j$ так, чтобы $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_j$ можно было дополнить до базиса и

$$|f(\mathbf{e}'_j)| \leqslant \frac{M_j}{1-\varepsilon}.$$

Пусть $f'(\mathbf{x})$ — форма, эквивалентная форме $f(\mathbf{x})$ и такая, что

$$f(\mathbf{e}'_j) = f'(\mathbf{e}_j) \qquad (j = 1, \ldots, n);$$

тогда

$$|f'(u_1, \ldots, u_n)| \geqslant (1-\varepsilon)\,|f'(\mathbf{e}_j)|$$

для всех $j = 1, \ldots, n$ и всех совокупностей целых чисел $u_1, \ldots, u_n$, таких, что о. н. д. $(u_j, \ldots, u_n) = 1$. Но, конечно, нет никаких оснований предполагать, что существует только конечное число форм f' с указанными свойствами, эквивалентных данной форме f.

Иногда возможна несколько иная процедура, при которой данной форме f сопоставляется определенная форма $g(\mathbf{x})$, которая затем приводится. Мы воспользуемся этой процедурой в § 6 для приведения бинарных кубических форм. Этот метод восходит к Эрмиту, который следующим образом применял его к неопределенным квадратичным формам.

Пусть $f(\mathbf{x})$ — неопределенная квадратичная форма сигнатуры $(r, n-r)$, так что, как прежде,

$$f(\mathbf{x}) = X_1^2 + \ldots + X_r^2 - X_{r+1}^2 - \ldots - X_n^2, \tag{1}$$

где X_j — линейные формы от $x_1, \ldots, x_n$. Тогда

$$g(\mathbf{x}) = X_1^2 + \ldots + X_r^2 + X_{r+1}^2 + \ldots + X_n^2 \tag{2}$$

является определенной квадратичной формой с тем же самым определителем, исключая, быть может, знак. Линейные формы $X_1, \ldots, X_n$ не определяются однозначно формой $f(\mathbf{x})$, однако мы говорим, что $f(\mathbf{x})$ является приведенной (в смысле Эрмита) формой, если форма $g(x)$ является приведенной в смысле Минковского при некотором выборе $X_1, \ldots, X_n$. Ясно, что форма $f(\mathbf{x})$ всегда эквивалентна некоторой приведенной форме, так как мы можем выбрать любое представление (1) и затем применить преобразование, которое приводит форму $g(\mathbf{x})$. Приведение примерно этого типа было впервые введено Эрмитом и в дальнейшем рассматривалось, в частности Зигелем [2], как инструмент для исследования арифметических свойств квадратичных форм. Вообще говоря, форма $f(\mathbf{x})$ эквивалентна бесконечно многим приведенным по Эрмиту формам, однако Зигель показал, что если все коэффициенты $f(\mathbf{x})$ рациональны, то она эквивалентна только конечному числу приведенных форм.

Мы отметим здесь, что связь между $f(\mathbf{x})$ и $g(\mathbf{x})$ позволяет перенести на неопределенные формы оценки для минимума определенных форм, так как очевидно, что $|f(\mathbf{x})| \leqslant g(\mathbf{x})$ для всех вещественных векторов $\mathbf{x}$. Однако, вообще говоря, при этом получается слишком неполная информация (оценки, далекие от наилучших).

§ 3. Определенные квадратичные формы

1. В этой книге мы будем рассматривать определенные квадратичные формы с различных точек зрения. Здесь мы укажем только то, что может быть достигнуто методом приведения. Изучение процесса приведения имеет большое значение в арифметической теории квадратичных форм (по этому поводу см. Г. Вейль [1] или ван дер Варден [1], где указаны ссылки на более раннюю литературу). Здесь мы рассматриваем только вопрос о минимумах форм.

Пусть

$$f(x_1, x_2) = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2$$

— положительно определенная квадратичная форма. Наша цель доказать, что существуют такие целые числа $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$, что

$$f(u_1, u_2) \leqslant \left(\frac{4D}{3}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1}$$

где

$$D = f_{11}f_{22} - f_{12}^2.$$

Переходя, если это необходимо, к эквивалентной форме, мы можем предполагать, что

$$M(f) = \inf f(u_1, u_2) = f_{11},$$

где точная нижняя граница берется по всем целым числам u_1 и u_2, не равным одновременно нулю. Имеем очевидное тождество

$$f(x_1, x_2) = f_{11}\left(x_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}x_2\right)^2 + \frac{D}{f_{11}}x_2^2.$$

Положим $u_2 = 1$, а в качестве u_1 выберем такое целое число, что

$$\left|u_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}\right| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда, с одной стороны,

$$f(u_1, 1) \geqslant f_{11},$$

а с другой —

$$f(u_1, 1) \leqslant \frac{1}{4}f_{11} + \frac{D}{f_{11}}. \tag{2}$$

Отсюда

$$\frac{D}{f_{11}} \geqslant \frac{3}{4}f_{11},$$

т. е.

$$f_{11}^2 \leqslant \frac{4D}{3},$$

что и требовалось доказать. То, что в оценке (1) знак $\leqslant$ не может быть заменен знаком $<$, показывает пример формы

$$f_0(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2,$$

для которой $D = \frac{3}{4}$ и $f(u_1, u_2) \geqslant 1$ для всех целых $(u_1, u_2) \neq (0, 0)$.

Рассматривая случаи, когда в приведенных выше рассуждениях встречается равенство, нетрудно показать, что если форма f не эквивалентна форме, кратной f_0, то знак $\leqslant$ может быть заменен знаком $<$. Мы не будем входить в детали, так как в дальнейшем докажем этот факт проще.

2. Как отметил Эрмит, эти рассуждения могут быть распространены на доказательство следующей теоремы.

Теорема I. *Невырожденная квадратичная форма*

$$f(\mathbf{x}) = \sum f_{ij}x_ix_j$$

для некоторого целого вектора $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *принимает такое значение* $f(\mathbf{u})$, *что*

$$|f(\mathbf{u})| \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)/2}|D|^{1/n}, \tag{1}$$

где $D = \det(f_{ij})$.

Доказательство. Согласно замечанию в конце § 2 (п. 2), мы можем без ограничения общности предположить, что $f(\mathbf{x})$ является положительно определенной формой. Как и прежде, можно считать, что

$$f_{11} \leqslant f(\mathbf{u})$$

для всех целых $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$. Тогда

$$f(\mathbf{x}) = f_{11}\left(x_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}}x_2 + \ldots + \frac{f_{1n}}{f_{11}}x_n\right)^2 + g(x_2, \ldots, x_n),$$

где $g(x_2, \ldots, x_n)$ — положительно определенная квадратичная форма с определителем D/f_{11}. Предполагаем, что результат уже доказан для форм от $n-1$ переменной; тогда существуют такие целые $u_2, \ldots, u_n$, не все равные нулю, что

$$g(u_2, \ldots, u_n) \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{(n-2)/2} \left(\frac{|D|}{f_{11}}\right)^{1/(n-1)}.$$

Выберем целое u_1 так, чтобы

$$\left| u_1 + \frac{f_{12}}{f_{11}} u_2 + \ldots + \frac{f_{1n}}{f_{11}} u_n \right| \leqslant \frac{1}{2};$$

тогда

$$f_{11} \leqslant f(\mathbf{u}) \leqslant \frac{f_{11}}{4} + \left(\frac{4}{3}\right)^{(n-2)/2} \left(\frac{|D|}{f_{11}}\right)^{1/(n-1)},$$

так что

$$f_{11} \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)/2} |D|^{1/n}.$$

Теорема I доказана.

К сожалению, полученное здесь значение постоянной $\left(\frac{4}{3}\right)^{(n-1)/2}$ является наилучшим только для $n=2$. Ниже мы покажем, что оно может быть улучшено уже для $n=3$, а следовательно, ввиду индукционности нашего доказательства и для $n \geqslant 3$. Видоизменив рассуждения, можно для $n=3$ получить оптимальный результат, на чем мы не будем останавливаться (см. Морделл [11]). Вместо этого мы изложим более элегантное, хотя и более искусственное исследование, основанное на более детальном изучении приведенных форм, которое, по существу, восходит по меньшей мере к Гауссу.

3. Мы начнем с рассмотрения положительно определенной бинарной квадратичной формы, которая приведена в смысле Минковского:

$$f(x_1, x_2) = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2.$$

После замены переменных $x_1 \to x_1$, $x_2 \to -x_2$, если это необходимо, мы можем предполагать без ограничения общности, что

$$f_{12} \geqslant 0. \tag{1}$$

По определению приведенной формы

$$f_{22} = f(0, 1) \geqslant f(1, 0) = f_{11} \tag{2}$$

и

$$f(-1, 1) \geqslant f(0, 1),$$

т. е.

$$2f_{12} \leqslant f_{11}. \tag{3}$$

Из неравенств (1), (2) и (3) мы выводим

$$4D - 3f_{11}f_{22} = f_{11}f_{22} - 4f_{12}^2 \geqslant f_{11}^2 - 4f_{12}^2 \geqslant 0$$

и, таким образом,

$$f_{11}^2 \leqslant f_{11}f_{22} \leqslant \frac{4}{3} D.$$

Знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда $f_{11} = f_{22} = 2f_{12}$, т. е. когда

$$f(\mathbf{x}) = f_{11}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2).$$

Прежде чем переходить к тернарным формам, отметим, что любая форма $f(x_1, x_2) = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2$, удовлетворяющая условиям (1), (2), (3), является приведенной. Это утверждение является частным случаем теоремы, утверждающей, что формы, приведенные по Минковскому, могут быть охарактеризованы конечной системой неравенств; здесь это легко проверить непосредственно.

Действительно, пусть u_1, u_2 — целые числа, отличные от нуля. Если $|u_1| \geqslant |u_2|$, то мы имеем

$$\begin{aligned} f(u_1, u_2) &= |u_1| \{f_{11}|u_1| \pm 2f_{12}|u_2|\} + f_{22}u_2^2 \geqslant \\ &\geqslant |u_1| \{f_{11}|u_1| - 2f_{12}|u_1|\} + f_{22}u_2^2 = \\ &= u_1^2(f_{11} - 2f_{12}) + f_{22}u_2^2 \geqslant f_{11} - 2f_{12} + f_{22} = f(-1, 1). \end{aligned}$$

При $0 < |u_1| \leqslant |u_2|$ это же неравенство выводится, если поменять местами u_1 и u_2. Так как ввиду (3) $f_{11} - 2f_{12} + f_{22} \geqslant f_{22}$, то мы показали, что $f(\mathbf{x})$ — приведенная форма.

В частности, если t — любое число, большее или равное $\frac{3}{4}$, то форма

$$f_t = x_1^2 + x_1x_2 + \left(t + \frac{1}{4}\right) x_2^2$$

является приведенной. Так как

$$M(f_t) = f_t(1, 0) = 1, \quad D_t = \det f_t = t,$$

то отношение

$$\frac{M(f_t)}{D_t^{1/2}} = t^{-\frac{1}{2}}$$

может принимать любое значение в интервале $0 < t^{-\frac{1}{2}} \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Совсем иначе ведут себя в этом смысле неопределенные квадратичные формы (см. § 4).

Для дальнейшего сформулируем доказанные утверждения в виде следующего предложения.

Теорема II. *Положительно определенная бинарная квадратичная форма*

$$f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2$$

является приведенной в том и только в том случае, когда

$$|2f_{12}| \leqslant f_{11} \leqslant f_{22}.$$

f_{11}, f_{22}, $f_{11} - 2|f_{12}| + f_{22}$ *являются тремя наименьшими значениями, принимаемыми приведенной формой для целочисленных значений переменных, не все из которых равны нулю, причем*

$$f_{11} \leqslant f_{22} \leqslant f_{11} - 2|f_{12}| + f_{22}.$$

Для приведенной формы имеет место неравенство

$$f_{11}f_{22} \leqslant \frac{4D}{3},$$

где

$$D = f_{11}f_{22} - f_{12}^2.$$

Отношение $\rho = f_{11}/D^{\frac{1}{2}}$ *может принимать любые значения в интервале*

$$0 < \rho \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4. Рассмотрим теперь тернарные квадратичные формы. Так как позднее мы будем рассматривать положительно определенные квадратичные формы в более широком контексте (гл. V, § 9; см. также гл. IX, § 3, п. 3), ограничимся здесь следующим предложением.

Теорема III. (A) *Пусть*

$$f(\mathbf{x}) = \sum f_{ij}x_ix_j \quad (f_{ij} = f_{ji})$$

— *положительно определенная тернарная квадратичная форма. Тогда существует такой целый вектор* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, *что*

$$f(\mathbf{u}) \leqslant (2D)^{\frac{1}{3}},$$

где

$$D = D(f) = \det(f_{ij}).$$

(B) *Если* $f(\mathbf{x})$ — *приведенная форма, то*

$$f_{11}f_{22}f_{33} \leqslant 2D.$$

(C) *Знаки равенства в приведенных выше оценках достигаются в том и только в том случае, когда форма* $f(\mathbf{x})$ *кратна форме, эквивалентной*

$$f_0(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

Предварительно отметим, что для произведения $f_{11}f_{22}f_{33}$ получается такая же оценка, как и для f_{11}^3. Это обстоятельство будет более широко рассмотрено в § 2 гл. VIII.

Доказательство. Так как форма $f_0(\mathbf{u})$ имеет целые коэффициенты, то $f_0(\mathbf{u}) \geqslant 1$ для любого целого вектора $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$. Кроме того, $D(f_0) = \frac{1}{2}$. Поэтому для формы f_0 приведенные выше оценки обращаются в равенства. Так как утверждение (A) следует, очевидно, из утверждения (B), то для доказательства теоремы нам достаточно доказать только утверждение (B) и тот факт, что знак равенства имеет место только для форм f, кратных форме f_0.

Следуя Гауссу (см. [1]), рассмотрим два случая. Предположим сначала, что

$$f_{12}f_{23}f_{31} \geqslant 0.$$

Тогда, произведя в случае необходимости замену переменных

$$x_i \to \pm x_i,$$

мы можем, не уменьшая общности, предполагать, что

$$f_{12} \geqslant 0, \quad f_{23} \geqslant 0, \quad f_{31} \geqslant 0.$$

Положим

$$\vartheta_{ij} = f_{ii} - 2f_{ij} \quad (f_{ij} = f_{ji}). \tag{1}$$

Так как f — приведенная форма, то

$$\vartheta_{ij} \geqslant 0$$

для всех i, j $(1 \leqslant i \neq j \leqslant 3)$. Например, из неравенства

$$f(1, -1, 0) \geqslant f(1, 0, 0)$$

следует, что $\vartheta_{21} \geqslant 0$. Рассмотрим тождество

$$2D - f_{11}f_{22}f_{33} = \vartheta_{32}\vartheta_{21}\vartheta_{13} + \sum \{f_{11}f_{23}\vartheta_{23} + f_{23}\vartheta_{13}\vartheta_{21}\}, \tag{2}$$

где сумма распространяется на все циклические перестановки цифр 1, 2, 3. Это тождество легко проверить, выразив все величины, входящие в обе его части, через коэффициенты f_{ij} [1]). Поскольку все члены, входящие в правую часть этого тождества, неотрицательны, то мы получаем, как и требовалось, что

$$f_{11}^3 \leqslant f_{11}f_{22}f_{33} \leqslant 2D. \tag{3}$$

---

[1]) Это соображение является приложением „принципа Литтлвуда“: все тождества тривиальны, коль скоро они кем-то уже составлены.

Пусть теперь $f_{12}f_{23}f_{31} \leqslant 0$. Тогда, не уменьшая общности, мы можем считать, что

$$f_{12} \leqslant 0, \quad f_{23} \leqslant 0, \quad f_{31} \leqslant 0.$$

Положим

$$\psi_{ij} = f_{ii} + 2f_{ij}$$

и

$$\omega_i = f(1,\ 1,\ 1) - f_{ii}.$$

Так как f — приведенная форма, то $\psi_{ij} \geqslant 0$ и $\omega_i \geqslant 0$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant 3)$. Поэтому, принимая во внимание тождество

$$6D - 3f_{11}f_{22}f_{33} = \psi_{23}\psi_{31}\psi_{12} + 2\psi_{32}\psi_{13}\psi_{21} + \sum\{f_{11}(-f_{23})(\psi_{23} + 2\omega_1) + (-f_{23})\psi_{13}\psi_{21}\} \qquad (4)$$

и замечая, что все члены, входящие в его правую часть, неотрицательны, мы снова приходим к неравенству (3).

Мы оставляем читателю рассмотрение возможных случаев равенства. Несколько утомительное исследование возникающих случаев показывает, что неравенства (3) обращаются в равенства только тогда, когда

$$f_{11} = f_{22} = f_{33}$$

и либо $2f_{23} = 2f_{31} = 2f_{12} = \pm 1$, либо одно из чисел $2f_{23}$, $2f_{31}$, $2f_{12}$ равно нулю, а два других равны ± 1. Однако, как легко проверить, все эти формы эквивалентны форме $f_{11}f_0(\mathbf{x})$; например,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 = f_0(x_1,\ x_2 + x_3,\ -x_3).$$

Теорема III доказана.

Гаусс приводит еще несколько других тождеств, которые можно было бы использовать вместо приведенных здесь.

§ 4. Неопределенные квадратичные формы

1. В этом параграфе мы будем изучать арифметические минимумы неопределенных квадратичных форм, привлекая теорию приведения лишь в той мере, в какой это необходимо, чтобы проиллюстрировать отличие получающихся здесь результатов от случая положительных форм (более полно известные результаты по теории арифметических минимумов изложены в приложении).

Мы будем по-прежнему обозначать

$$M(f) = \inf |f(\mathbf{u})|,$$

где нижняя граница берется по всем целым векторам $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$; $f(\mathbf{x})$ — форма от любого числа переменных. Квадратичной форме

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i,\,j=1}^{n} f_{ij}x_ix_j$$ сопоставляем определитель

$$D = D(f) = \det(f_{ij}).$$

Имеется два существенных различия в поведении величины $M(f)$ для определенных и неопределенных форм. Первое отличие в поведении величины $M(f)$ для неопределенных квадратичных форм несколько тривиально: вполне может случиться, что $M(f) = 0$. Это может произойти либо потому, что существует такой целый вектор $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, что $f(\mathbf{u}) = 0$, либо потому, что существуют целые векторы $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, для которых $|f(\mathbf{u})|$ произвольно мало, но отлично от нуля.

Второе отличие глубже. Мы видели, что для определенных бинарных форм величина $M(f)/|D(f)|^{1/2}$ может принимать любое значение ρ в интервале

$$0 < \rho \leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{1/2},$$

причем $\left(\frac{4}{3}\right)^{1/2}$ является максимальным возможным значением. Нетрудно проверить, что аналогичным образом ведут себя определенные квадратичные формы от любого числа переменных (см. лемму 6 гл. V). Наоборот, для неопределенных квадратичных форм f значения величины $M(f)/|D(f)|^{1/2}$ не заполняют весь интервал вплоть до максимального возможного значения.

Возникающая здесь ситуация наиболее полно исследована для неопределенных бинарных квадратичных форм. В этом случае о возможных значениях величины $M(f)/|D(f)|^{1/2}$ известно очень много. Наибольшее значение ее равно $\left(\frac{4}{5}\right)^{1/2}$; оно достигается для форм, эквивалентных формам, кратным форме $x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$. В противном случае $M(f) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}|D(f)|^{1/2}$ [1]). Хорошо известная теорема Маркова [1] утверждает, что существует только счетное число возможных значений величины $M(f)/|D(f)|^{1/2}$, больших, чем $\frac{2}{3}$ (и эти значения описываются). Слева от $\frac{2}{3}$ (где сведения не столь исчерпывающие) также существуют интервалы, которые не содержат значений величины $M(f)/|D(f)|^{1/2}$. Читатель может более подробно ознакомиться с затронутыми в этом параграфе вопросами и, в частности, с доказательством теоремы Маркова по книге автора [8]. Здесь же мы ограничимся нахождением двух наибольших возможных значений величины $M(f)/|D(f)|^{1/2}$.

Аналогично обстоит дело и в случае тернарных квадратичных форм, хотя этот случай и менее изучен. Наиболее полной инфор-

[1]) Это впервые замечено Коркиным (Sur les formes quadratiques, *Math. Ann.*, 6 (1873),366 — 389). — *Прим. ред.*

мацией в этом вопросе мы обязаны Венкову [1], который нашел одиннадцать наибольших значений величины $M(f)/|D(f)|^{1/3}$. Не видно, однако, никаких общих закономерностей, которым подчинялись бы эти значения, если не считать того, что все они отвечают формам с целочисленными коэффициентами. Относительно неопределенных тернарных форм имеются две нерешенные проблемы, которые, по-видимому, очень трудны. Именно, неизвестно, существует ли форма f, не являющаяся кратной целочисленной формы, для которой $M(f) > 0$; неизвестно также, имеет ли множество значений величины $M(f)/|D(f)|^{1/3}$ какую-либо предельную точку, отличную от нуля. Эти две проблемы тесно связаны (см. Касселс и Суиннертон-Дайер [1]; см. также теорему XII гл. X).

Это явление „последовательных минимумов“ (не следует путать с „последовательными минимумами“ решетки по отношению к точечному множеству, которые рассматриваются в гл. VIII) очень широко встречается в теории неопределенных форм. Поведение этих минимумов настолько сложно, что едва ли может быть уложено в рамки общей теории [1]). Так, невозможно предсказать, когда встретятся „последовательные минимумы“: например, они не встречаются в проблемах, рассматриваемых в п. 5 § 4 или в § 5.

Нетрудно выявить причину возникновения „последовательных минимумов“. Неравенство $|f(\mathbf{u})| \geqslant 1$, где $f(\mathbf{x})$ — неопределенная форма, а $\mathbf{u}$ — целый вектор, эквивалентно следующей альтернативе:

$$\text{либо } f(\mathbf{u}) \geqslant 1, \quad \text{либо } f(\mathbf{u}) \leqslant -1.$$

Каждое из этих неравенств можно рассматривать как линейное относительно коэффициентов формы f. Пары альтернативных неравенств, отвечающие различным векторам $\mathbf{u}$, вообще говоря, независимы. При комбинировании различных альтернатив может оказаться, что некоторые их комбинации несовместны, тогда как другие комбинации однозначно определяют форму f. Поясним это на примере. Предположим, что нас интересуют бинарные квадратичные формы, для которых $M(f) = 1$ и $f(1, 0) = 1$. Такие формы имеют вид

$$f(\mathbf{x}) = x_1^2 + \alpha x_1 x_2 + \beta x_2^2, \tag{1}$$

где коэффициенты α и β подлежат исследованию. Как легко может проверить читатель, единственной такой формой, удовлетворяющей неравенствам

$$f(0, 1) \leqslant -1,$$
$$f(1, 1) \geqslant +1,$$
$$f(2, -1) \geqslant +1,$$

[1]) Малер показал, что минимумы образуют замкнутое множество. Это сразу следует из его теоремы компактности (гл. V).

является форма $x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2$. Поэтому любая другая форма, удовлетворяющая условиям $f(1, 0) = 1$ и $M(f) = 1$, должна удовлетворять по меньшей мере одному из неравенств $f(0, 1) \geqslant +1$, $f(1, 1) \leqslant -1$, $f(2, -1) \leqslant -1$. Таким образом, форма $x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2$ в строгом смысле изолирована от всех других форм вида (1) со свойством $M(f) = 1$. Для наглядности интерпретируем α и β как декартовы

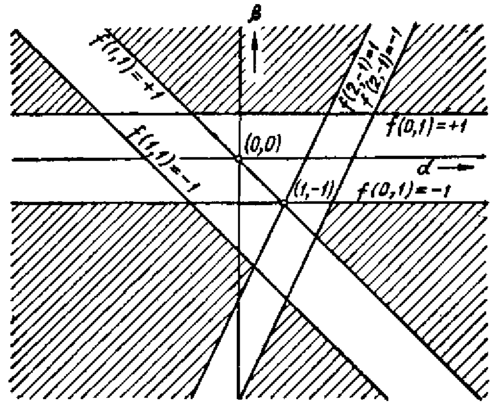

Рис. 4.

координаты формы f; тогда при фиксированных u_1 и u_2 условие вида $|f(u_1, u_2)| \geqslant 1$ исключает из плоскости полосу, расположенную между двумя параллельными прямыми $f(u_1, u_2) = 1$ и $f(u_1, u_2) = -1$. Три условия

$$|f(0, 1)| \geqslant 1, \quad |f(1, 1)| \geqslant 1, \quad |f(2, -1)| \geqslant 1$$

исключают три полосы. Остающаяся часть плоскости состоит из точки $(1, -1)$, отвечающей форме $x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2$, и шести бесконечных областей, отделенных от этой точки одной из полос (см. рис. 4).

При фактическом проведении доказательства этот общий принцип уже не так отчетлив. Ибо если f неопределенная форма и $M(f) = 1$, то это еще не значит, что существует целый вектор $\mathbf{u}$ с условием $|f(\mathbf{u})| = 1$, а лишь требует для любого $\varepsilon > 0$ существования целого вектора $\mathbf{u}$, для которого $1 \leqslant |f(\mathbf{u})| \leqslant 1 + \varepsilon$; это обстоятельство усложняет рассуждения. Трудность заключается также в том, что для $t > 1$ форма $tf(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x})$ удовлетворяет тому же набору неравенств вида „$f(\mathbf{u}) \geqslant 1$ или $f(\mathbf{u}) \leqslant -1$“, что и первоначальная форма $f(\mathbf{x})$. Поскольку t можно взять произвольно близким к 1, то коэффициенты $f'(\mathbf{x})$ могут быть сколь угодно близки к коэффициентам формы $f(\mathbf{x})$. Поэтому, чтобы однозначно выделить форму $f(\mathbf{x})$, нужно каким-то образом использовать условие $M(f) = 1$. Мы сделаем это, находя определитель рассматриваемой формы и используя его в качестве дополнительной информации. Все эти детали выяснятся при доказательстве.

Позднее мы будем рассматривать изоляцию этого типа с более искусственной точки зрения (гл. X). Приведенные там рассуждения прояснят также причину эффективности упомянутых выше добавочных соображений.

2. Вопрос о минимуме неопределенных бинарных квадратичных форм уже обсуждался в предыдущем пункте. Здесь мы строго докажем следующее предложение.

Теорема IV. *Пусть*

$$f(\mathbf{x}) = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2 \tag{1}$$

— неопределенная форма с определителем

$$D = D(f) = f_{11}f_{22} - f_{12}^2.$$

Тогда

$$M(f) = \inf_{(u_1, u_2) \neq (0, 0)} |f(u_1, u_2)| \leqslant \left|\frac{100D}{221}\right|^{\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

исключая случаи, когда форма f эквивалентна кратному одной из форм:

$$f_0(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2, \tag{3}$$

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2, \tag{4}$$

для которых $M(f_0) = M(f_1) = 1$, $|D(f_0)| = \frac{5}{4}$, $|D(f_1)| = 2$.

То, что $M(f_0) = M(f_1) = 1$, очевидно, так как для всех целых векторов $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ их значения $f_0(\mathbf{u})$ и $f_1(\mathbf{u})$ суть ненулевые целые числа. Константа $\frac{100}{221}$ в неравенстве (2) неулучшаема, так как для

$$f_2 = 5x_1^2 + 11x_1x_2 - 5x_2^2$$

(следующей формы „цепи“ Маркова) $D(f_2) = -\frac{221}{4}$ и можно показать [1]), что $M(f_2) = 5$.

[1]) Действительно, при целых u_1 и u_2 значения f_2 суть целые числа, $f_2(1, 0) = 5$, так что $M(f_2) = m$, где m — целое число ($0 \leqslant m \leqslant 5$). При взаимно простых u_1 и u_2 число $f_2(u_1, u_2)$ нечетно, так что $M(f_2) \neq 0, 2, 4$. Далее, $\left(\frac{\pm 1}{13}\right) = \left(\frac{\pm 3}{13}\right) = 1$, в то время как $\left(\frac{f_2(1, 0)}{13}\right) = \left(\frac{5}{13}\right) = -1$ и 13 — простой множитель определителя формы f_2; по теории характеров бинарных квадратичных форм отсюда следует, что ни ± 1, ни ± 3 не представляются формой f_2; $M(f_2) \neq 1, 3$. Итак, $M(f_2) = 5$. — *Прим. ред.*

Доказательство теоремы IV. Если $M(f) = 0$, то (2) очевидно. Если $M(f) > 0$, то, заменяя (в случае необходимости) форму f на форму tf с подходящим t, мы можем считать, не уменьшая общности, что

$$M(f) = 1.$$

Поэтому (ср. п. 2 § 2) существует форма $g(\mathbf{x}) = g_\varepsilon(\mathbf{x})$, эквивалентная форме $f(\mathbf{x})$, для которой

$$1 \leqslant |g(1, 0)| < (1 - \varepsilon)^{-1},$$

где ε — любое заданное число интервала $0 < \varepsilon < 1$. Положим

$$\pm g(1, 0) = (1 - \eta)^{-1},$$

где

$$0 \leqslant \eta = \eta_\varepsilon < \varepsilon < 1.$$

Так как $D(f) = D(g) = D$, то можно записать

$$\pm g(\mathbf{x}) = \frac{(x_1 + \alpha x_2)^2}{1 - \eta} - |D|(1 - \eta)x_2^2, \tag{5}$$

где $\alpha = \alpha_\varepsilon$ — вещественное число. Мы можем считать, что

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}, \tag{6}$$

произведя в случае необходимости замену переменных $x_1 \to \pm x_1 + vx_2$ с подходящим целым v. Так как $M(f) = 1$, то или

$$\frac{(u_1 + \alpha_\varepsilon u_2)^2}{1 - \eta_\varepsilon} - |D|(1 - \eta_\varepsilon)u_2^2 \geqslant 1, \tag{7}$$

или

$$\frac{(u_1 + \alpha_\varepsilon u_2)^2}{1 - \eta_\varepsilon} - |D|(1 - \eta_\varepsilon)u_2^2 \leqslant -1 \tag{8}$$

для любой пары целых чисел u_1 и u_2, не равных одновременно нулю. Конечно, если ε меняется, то нет оснований предполагать, что для фиксированного вектора $\mathbf{u}$ всегда выполняется одна и та же из альтернатив (7) или (8).

Будем теперь подставлять различные пары целых u_1, u_2, учитывая, какое из неравенств (7) или (8) выполняется. Так как мы желаем отделить формы (3) и (4), то естественно выбирать такие векторы $\mathbf{u}$, что $f_0(\mathbf{u}) = \pm 1$ или $f_1(\mathbf{u}) = \pm 1$.

Прежде всего заметим, что неравенство (7) при $(u_1, u_2) = (0, 1)$ не имеет места для достаточно малых η, ибо иначе из (6) мы бы вывели, что $|D| < 0$. Поэтому, полагая в (8) $(u_1, u_2) = (0, 1)$, мы для всех ε, меньших некоторого $\varepsilon_0 > 0$, получаем

$$(1 - \eta)^2|D| \geqslant (1 - \eta) + \alpha^2. \tag{9}$$

Пусть теперь $(u_1, u_2) = (1, 1)$. Рассмотрим две возникающие здесь возможности. Сначала предположим, что существуют сколь угодно малые значения ε, для которых выполняется неравенство (7). Для этих ε мы имеем:

$$(1-\eta)^2 |D| \leqslant -(1-\eta) + (1+\alpha)^2. \tag{10}$$

Исключая $|D|$ из неравенств (9) и (10), мы получаем неравенство

$$2\alpha \geqslant 1 - 2\eta,$$

откуда с учетом (6)

$$\frac{1}{2} - \eta \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}. \tag{11}$$

Подставляя это неравенство в неравенства (9) и (10), мы убеждаемся, что $|D|$ может отличаться от $\frac{5}{4}$ самое большее на величину того же порядка, что и η. Но $|D|$ не зависит от η, в то время как $\eta \geqslant 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Поэтому $|D| = \frac{5}{4}$. Полагая в неравенстве (9) $|D| = \frac{5}{4}$ и учитывая (11), мы получаем, что

$$\eta^2 - 2\eta \geqslant 0,$$

и так как $\eta < 2$, то отсюда следует, что $\eta = 0$. Итак, $\alpha = \frac{1}{2}$ и

$$\pm g(x_1, x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2\right)^2 - \frac{5}{4} x_2^2 = f_0(x_1, x_2).$$

В противном случае для достаточно малых ε неравенство (7) неверно, а стало быть, для вектора $\mathbf{u} = (1, 1)$ и всех ε, меньших некоторого $\varepsilon_1 > 0$, справедливо неравенство (8), т. е.

$$(1-\eta)^2 |D| \geqslant (1-\eta) + (1+\alpha)^2. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь вектор $\mathbf{u} = (-3, 2)$. Заметим, что $f_1(-3, 2) = 1$, где f_1 — форма (4). Пусть неравенство (7) справедливо для вектора $\mathbf{u} = (-3, 2)$ при сколь угодно малых значениях ε. Тогда для этих ε

$$4(1-\eta)^2 |D| \leqslant -(1-\eta) + (-3+2\alpha)^2. \tag{13}$$

Исключая $|D|$ из неравенств (12) и (13), мы получаем, что $4\alpha \leqslant \eta$, а с учетом (6) имеем $0 \leqslant 4\alpha \leqslant \eta$. Так как $\eta \geqslant 0$ можно выбрать сколь угодно малым, а D не зависит от η, то из последнего неравенства в соединении с неравенствами (12) и (13) следует, что $|D| = 2$. Подставляя в (12) это значение $|D|$, получаем $-3\eta + \eta^2 \geqslant 2\alpha + \alpha^2$; так как $\eta \geqslant 0$ сколь угодно мало, $\alpha \geqslant 0$, то отсюда следует, что $\eta = 0$, $\alpha = 0$, так что

$$\pm g(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 = f_1(\mathbf{x}).$$

В противном случае при всех ε, меньших некоторого $\varepsilon_2 > 0$, для вектора $\mathbf{u} = (-3, 2)$ выполняется неравенство (8), т. е.

$$4(1-\eta)^2 |D| \geqslant (1-\eta) + (-3+2\alpha)^2. \tag{14}$$

Заметим, что при изменении α от 0 до $\frac{1}{2}$ правая часть неравенства (12) увеличивается, а правая часть неравенства (14) уменьшается. Поэтому, используя неравенство (14), если $\alpha \leqslant \frac{1}{10}$, и неравенство (12) в противном случае, мы получаем, что всегда $|D| \geqslant 2{,}21 + O(\eta)$, откуда, поскольку $|D|$ не зависит от η, следует, что $|D| \geqslant 2{,}21$.

Теоре а IV доказана.

Замечательной особенностью, которая бросается в глаза при доказательстве этой теоремы, является то, что из получаемых неравенств следует точное равенство $\eta = 0$. Как мы уже отмечали, это связано с явлением „изоляции", которое впоследствии будет рассмотрено более полно.

3. Рассмотрим теперь для неопределенных бинарных квадратичных форм „одностороннюю задачу". В отличие от результатов предыдущего пункта здесь нет серии последовательных минимумов. Утверждение (А) теоремы V, к которой мы теперь переходим, является частным случаем теоремы IX гл. XI и принадлежит Малеру.

Теорема V. (А) *Пусть*

$$f(\mathbf{x}) = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2$$

— неопределенная квадратичная форма с определителем

$$D = f_{11}f_{22} - f_{12}^2.$$

Тогда существует такой целый вектор $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, что

$$0 < f(\mathbf{u}) \leqslant 2|D|^{1/2}. \tag{1}$$

Знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда форма f эквивалентна кратному формы

$$f_0(\mathbf{x}) = x_1x_2.$$

(В) *Для каждого $\varepsilon > 0$ существует бесконечно много форм, обладающих тем свойством, что ни одна из них не эквивалентна кратному другой формы, но для каждой из них имеет место неравенство*

$$M_+(f) = \inf f(\mathbf{u}) > (2-\varepsilon)|D|^{1/2}, \tag{2}$$

где точная нижняя граница берется по всем целым векторам $\mathbf{u}$ с условием $f(\mathbf{u}) > 0$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение (A). То, что для формы $f_0=x_1x_2$ в (1) имеет место знак равенства, очевидно. Поэтому достаточно доказать лишь неравенство (1) и отсутствие других случаев равенства. Как и в п. 2, мы можем предположить, что

$$M_+(f)=1,$$

где $M_+(f)$ — величина, определенная условием (2). Отсюда, как и прежде, выводим, что существует форма

$$g(\mathbf{x})=\frac{(x_1+\alpha x_2)^2}{1-\eta}-(1-\eta)|D|\,x_2^2,$$

эквивалентная форме f, причем

$$0\leqslant\alpha\leqslant\frac{1}{2},$$

а $\eta\geqslant 0$ может быть взято сколь угодно малым [1]). Если бы $g(-1,\,1)\geqslant 1$, то

$$(1-\eta)^2|D|\leqslant(1-\alpha)^2-(1-\eta)\leqslant\eta,$$

что для достаточно малых η невозможно, так как $|D|$ не зависит от η. Таким образом, $g(-1,\,1)\leqslant 0$, откуда

$$|D|\geqslant\frac{(1-\alpha)^2}{(1-\eta)^2}\geqslant\frac{1}{4},$$

причем знак равенства, очевидно, может иметь место только в случае, когда $\alpha=\frac{1}{2}$, $\eta=0$, т. е. когда

$$g(\mathbf{x})=\left(x_1+\frac{1}{2}x_2\right)^2-\frac{1}{4}x_2^2=x_1(x_1+x_2)=f_0(x_1,\;x_1+x_2).$$

Утверждение (A) доказано. Докажем утверждение (B). В п. 4 (теорема VI) будет доказано, что для форм вида

$$f_k(\mathbf{x})=k\,(x_1^2+x_1x_2)-x_2^2,$$

где k — целое положительное число, имеет место равенство

$$M_+(f_k)=k.$$

Так как

$$|D(f_k)|=\frac{1}{4}k^2+k,$$

то отношение

$$M_+(f)/|D(f_k)|^{1/2}$$

[1]) Точнее говоря, как и в п. 2, мы будем иметь дело с семейством форм $g_\varepsilon(\mathbf{x})$. Проведя один раз со всей строгостью доказательство этого типа, мы в остальной части главы будем уделять меньше внимания формальной стороне вопроса.

может быть сколь угодно близко к 2.

Теорема V доказана.

Возможно также другое простое доказательство утверждения (B) с помощью теории цепных дробей.

4. В качестве промежуточного между случаями, рассмотренными в п. 2 и 3, можно рассмотреть формы $f(\mathbf{x})$, для которых не существует целых векторов $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$ с условием

$$-a<f(\mathbf{u})<b,$$

где a, b — данные положительные числа. Для некоторых значений a и b из результатов п. 2 можно вывести наименьшее возможное значение определителя $D(f)$ формы f. Например [1]), если

$$a=1,\quad b=\frac{11}{10},$$

то заведомо

$$M(f)\geqslant 1,$$

и тогда по теореме IV либо

$$|D(f)|\geqslant 2,$$

либо форма f эквивалентна форме вида

$$f_0=t\,(x_1^2+x_1x_2-x_2^2)$$

для некоторого t. Во втором случае положим $t=\frac{11}{10}$; ясно, что нет целых векторов $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$ с условием $-1<f_0(\mathbf{u})<\frac{11}{10}$. Соответствующий определитель равен тогда $\left(\frac{11}{10}\right)^2\cdot\frac{5}{4}<2$. Таким образом, первый минимум является изолированным. Заметим, что форма с наименьшим значением величины $|D|$ не принимает значений в достаточно малой окрестности точки $-a=-1$.

Методы п. 2 и 3 применимы и для некоторых других значений a и b. Например, при $a=5$, $b=3$ наименьший определитель равен $|D|=24$ и соответствует форме $3x_1^2-8x_2^2$, которая является при этом изолированной. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю. Здесь мы докажем только следующее предложение, принадлежащее, по существу, Сегре [1].

Теорема VI. *Пусть*

$$f(\mathbf{x})=f_{11}x_1^2+2f_{12}x_1x_2+f_{22}x_2^2 \tag{1}$$

— неопределённая квадратичная форма с определителем

$$D(f)=f_{11}f_{22}-f_{12}^2<0. \tag{2}$$

[1]) Это замечание было сделано автору проф. Роджерсом (C. A. Rogers).

Предположим, что не существует целых векторов $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *с условием*

$$-a < f(\mathbf{u}) < b, \tag{3}$$

где $a > 0$, $b > 0$. *Тогда*

$$|D| \geqslant ab + \frac{1}{4}\max(a^2, b^2). \tag{4}$$

Если $b > a$, *то знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда число*

$$k = \frac{b}{a} \tag{5}$$

является целым и

$$f(\mathbf{x}) = af_k(\mathbf{x}), \tag{6}$$

где

$$f_k(\mathbf{x}) = k(x_1^2 + x_1x_2) - x_2^2. \tag{7}$$

При любом целом k *действительно нет целых векторов* $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ *с условием*

$$-1 < f_k(\mathbf{u}) < k. \tag{8}$$

Для случая $k = 1$ теорема VI содержится в теореме IV. В случае, когда k не является целым, неравенство (4) можно фактически усилить. В случае целого k имеет место явление изоляции; здесь известно гораздо больше (см. Сойер [3], Торнхейм [1]). Возможные случаи равенства для $b \leqslant a$, конечно, также следуют из этой теоремы; достаточно лишь поменять ролями a и b.

Доказательство теоремы VI. Не уменьшая общности, мы можем считать, что

$$a = 1, \quad b = k,$$

где k пока не предполагается целым. Пусть

$$c = M_+(f) = \inf_{f(\mathbf{u}) > 0} f(\mathbf{u}),$$

так что

$$c \geqslant k.$$

Как и в п. 2, находим форму $g(\mathbf{x})$, эквивалентную форме $f(\mathbf{x})$ и имеющую вид

$$g(\mathbf{x}) = \frac{c}{1-\eta}(x_1 + \alpha x_2)^2 - \frac{|D|}{c}(1-\eta)x_2^2,$$

где

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2},$$

а $\eta \geqslant 0$ может быть взято произвольно малым. Ясно, что $g(0, 1) = \frac{c\alpha^2}{1-\eta} - \frac{|D|}{c}(1-\eta) < c$ для достаточно малых η, а тогда $g(0, 1) \leqslant -1$. Точно так же $g(1, -1) < c$ для достаточно малых η и, стало быть, $g(1, -1) \leqslant -1$, т. е.

$$|D| \geqslant \frac{c}{1-\eta} + \frac{c^2}{(1-\eta)^2}(1-\alpha)^2.$$

Отсюда следует, что

$$|D| \geqslant c + \frac{1}{4}c^2 \geqslant k + \frac{1}{4}k^2,$$

причем равенство может быть только в случае, когда

$$\eta = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad c = k,$$

т. е. в случае

$$g(\mathbf{x}) = f_k(\mathbf{x}).$$

Выясним, для каких k неравенство

$$-1 < f_k(\mathbf{u}) < k \tag{8}$$

неразрешимо в целых векторах $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$. Так как $f_k(1, 0) > 0$ и $f_k(1, x_2) \to -\infty$ при $x_2 \to +\infty$, то существует такое целое число $v \geqslant 0$, что

$$f_k(1, v) \geqslant 0 > f_k(1, v+1).$$

Для того чтобы неравенство (8) было неразрешимо, во всяком случае необходимо, чтобы

$$f_k(1, v) \geqslant k, \quad f_k(1, v+1) \leqslant -1;$$

иными словами, чтобы

$$v(k - v) \geqslant 0, \quad (v+2)(k-v) \leqslant 0,$$

что возможно лишь в случае, когда $v = k$, т. е. в случае целого k.

Докажем, что для целого k неравенство (8) неразрешимо в целых векторах $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$. Поскольку корень ϑ уравнения $f_k(\vartheta, 1) = 0$ иррационален, то равенство $f_k(\mathbf{u}) = 0$ для целого вектора $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ невозможно. Следовательно, нам достаточно доказать невозможность неравенства

$$0 < f_k(\mathbf{u}) < k. \tag{9}$$

Пусть имеются целые векторы $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, удовлетворяющие условию (9). Выберем из них тот, у которого величина $|u_1|$ наименьшая. Ясно, что

$$u_1 \neq 0.$$

Используем следующие тождества:

$$f_k(\mathbf{x}) = f_k((k+1)x_1 - x_2, \; -kx_1 + x_2) =$$
$$= f_k(x_1 + x_2, \; kx_1 + (k+1)x_2) =$$
$$= (k+2)x_1\{(k+1)x_1 - x_2\} - \{(k+1)x_1 - x_2\}^2 - x_1^2 =$$
$$= (k+2)x_1(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)^2 - x_1^2.$$

Так как $f_k(\mathbf{u}) > 0$, то из двух последних выражений для $f_k(\mathbf{x})$ получаем

$$u_1\{(k+1)u_1 - u_2\} > 0,$$
$$u_1(u_1 + u_2) > 0.$$

Обозначая в случае необходимости $-\mathbf{u}$ вместо $\mathbf{u}$ (так, чтобы $u_1 > 0$), мы выводим отсюда неравенства

$$u_1 > 0, \quad (k+1)u_1 > u_2 > -u_1. \tag{10}$$

Из двух первых тождеств и свойства минимальности величины $|u_1|$ мы получаем, что

$$|u_1 + u_2| \geqslant u_1,$$
$$|(k+1)u_1 - u_2| \geqslant u_1,$$

и, значит, с учетом (10), что

$$0 \leqslant u_2 \leqslant ku_1, \quad 0 < u_1;$$

но тогда

$$f_k(\mathbf{u}) = ku_1^2 + u_2(ku_1 - u_2) \geqslant ku_1^2 \geqslant k,$$

и мы пришли к противоречию с нашим предположением. Итак, для целого k неравенство (8) неразрешимо.

Теорема VI доказана.

В случае, когда k не целое, оценку (4) можно улучшить, если рассмотреть значения $f(1, v)$ для всех целых v. При целых значениях k формы f_k дают изолированный первый минимум. Доказательство этих утверждений мы предоставляем читателю (ср. статьи, цитированные в начале этого пункта).

5. Рассмотрим теперь неопределенные тернарные квадратичные формы. Как уже отмечалось в п. 1, для них существует множество последовательных минимумов, первые одиннадцать из которых были найдены Венковым [1]. Первые четыре минимума были впервые указаны Марковым и Оппенгеймом (см. Диксон [2]); изящный вывод первого минимума был дан Давенпортом [10]. Здесь мы докажем лишь следующий результат.

Теорема VII. *Пусть*

$$f(\mathbf{x}) = \sum f_{ij}x_ix_j \tag{1}$$

— неопределенная тернарная квадратичная форма с определителем

$$D(f) = \det(f_{ij}) > 0. \tag{2}$$

Тогда

$$M(f) = \inf_{\substack{\mathbf{u} \neq \mathbf{o}, \\ \mathbf{u}\ \text{целая}}} |f(\mathbf{u})| \leqslant \left|\frac{2}{5}D\right|^{1/3}, \tag{3}$$

кроме тех случаев, когда форма f эквивалентна кратному формы

$$f_0 = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2, \tag{4}$$

для которой

$$M(f_0) = 1, \quad D(f_0) = \frac{3}{2}. \tag{5}$$

То, что постоянная $\frac{2}{5}$ в неравенстве (3) не может быть улучшена, показывает пример формы

$$f_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2 - 2x_3^2.$$

Читатель, видоизменив следующее ниже доказательство, может без особого труда показать, что эта форма дает единственный случай равенства в (3) и является изолированной.

Доказательство. Сначала выведем равенства (5). Так как для любого целого вектора $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ значение формы $f_0(\mathbf{u})$ является целым числом, то достаточно показать, что $f_0(\mathbf{u}) \neq 0$. В силу легко проверяемого тождества

$$4f_0(\mathbf{u}) = (2u_1 + u_2)^2 + (2u_3 - u_2)^2 - 6u_2^2$$

достаточно показать, что уравнение

$$v_1^2 + v_3^2 = 6v_2^2$$

не имеет целочисленных решений, кроме тривиального $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Предположим противное. Можно, очевидно, считать, что числа v_1, v_2, v_3 взаимно просты. Из уравнения выводим, что v_1 и v_3 должны делиться на 3, таким образом $v_1^2 + v_3^2$ должно делиться на 9, а потому v_2 делится на 3, что противоречит предположенной взаимной простоте v_1, v_2 и v_3.

Предположим теперь, как и прежде, что

$$M(f) = 1. \tag{6}$$

Заменяя в случае необходимости форму f на форму $-f$, мы можем считать, что

$$D<0. \tag{7}$$

Нам достаточно показать, что либо форма f эквивалентна форме f_0, либо $D \leqslant -\frac{5}{2}$. Доказательство для удобства разобьем на ряд вспомогательных предложений (в которых предполагаются выполненными условия (6) и (7)).

Лемма 1. *Для формы f имеет место одна из альтернатив: либо*

$$M_+(f)=\inf_{f(\mathbf{u})>0} f(\mathbf{u})=1, \tag{8}$$

либо

$$D \leqslant -\frac{7}{2}. \tag{9}$$

Действительно, если равенство (6) справедливо, а равенство (8) нет, то найдутся такие целые векторы $\mathbf{u}$, что $f(\mathbf{u})=-(1-\eta)^{-1}$, где $\eta \geqslant 0$ может быть выбрано сколь угодно малым. Отсюда следует, что для каждого такого η форма $f(\mathbf{x})$ эквивалентна форме $g(\mathbf{x})$ вида

$$(1-\eta)\, g(\mathbf{x})=-(x_1+\alpha x_2+\beta x_3)^2+h(x_2, x_3),$$

где α и β — вещественные числа, а бинарная форма

$$h(x_2, x_3)=h_{22}x_2^2+2h_{23}x_2x_3+h_{33}x_3^2$$

является положительно определенной. Определитель формы $h(x_2, x_3)$ равен

$$h_{22}h_{33}-h_{23}^2=-(1-\eta)^3 D=(1-\eta)^3\,|D|.$$

Произведя подходящую замену переменных x_2 и x_3, мы можем считать, что форма $h(\mathbf{x})$ является приведенной, и, значит, на основании теоремы II

$$h_{22}^2 \leqslant \frac{4}{3}(1-\eta)^3\,|D|. \tag{10}$$

Рассмотрим теперь неопределенную бинарную форму

$$G(x_1, x_2)=(1-\eta)\, g(x_1, x_2, 0)=-(x_1+\alpha x_2)^2+h_{22}x_2^2$$

с определителем $-h_{22}$. Очевидно,

$$M(G) \geqslant (1-\eta)\, M(g)=1-\eta.$$

Поэтому из теоремы IV следует, что либо

$$h_{22} \geqslant \frac{221}{100}(1-\eta)^2, \tag{11}$$

либо форма $G(x_1, x_2)$ эквивалентна одной из форм $t\left(x_1^2-2x_2^2\right)$, $t\left(x_1^2+x_1x_2-x_2^2\right)$ для некоторого числа t с условием $|t| \geqslant (1-\eta)$. Если справедлива первая альтернатива, то $t=-1$, ибо $G(1, 0)=-1$. Тогда найдется такой целый вектор $\mathbf{u}=(u_1, u_2)$, что $G(\mathbf{u})=+1$, т. е. $g(u_1, u_2, 0)=(1-\eta)^{-1}$. Поэтому

$$M_+(f)=M_+(g)=1,$$

ибо $\eta \geqslant 0$ может быть выбрано произвольно малым. Но это противоречит предположению, сделанному в начале доказательства. Таким образом, верно неравенство (11), откуда с помощью (10) выводим для достаточно малого η

$$|D| \geqslant (1-\eta)\cdot\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{221}{100}\right)^2 > \frac{7}{2}.$$

Тем самым лемма 1 доказана.

Теперь при доказательстве теоремы VII мы можем предполагать, что

$$M_+(f)=1. \tag{12}$$

Как и прежде, отыскиваем форму g, эквивалентную форме f и имеющую вид

$$(1-\eta)\, g(\mathbf{x})=(x_1+\alpha x_2+\beta x_3)^2+h(x_2, x_3),$$

где $\eta \geqslant 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, а форма

$$h(x_2, x_3)=h_{22}x_2^2+2h_{23}x_2x_3+h_{33}x_3^2 \tag{13}$$

— неопределенная форма с определителем

$$h_{22}h_{33}-h_{23}^2=(1-\eta)^3 D<0. \tag{14}$$

Лемма 2. *Если u_2 и u_3 — целые числа, не равные одновременно нулю, то имеет место одно из следующих трех неравенств: либо*

$$h(u_2, u_3) \geqslant \frac{3}{4}-\eta, \tag{15}$$

либо

$$h(u_2, u_3) \leqslant -2+\eta, \tag{16}$$

либо

$$-\frac{5}{4}-\eta \leqslant h(u_2, u_3) \leqslant -\frac{5}{4}+\eta. \tag{17}$$

При этом в случае выполнения неравенства (17) найдется такое целое число v, что

$$\left|v+\frac{1}{2}-(\alpha u_2+\beta u_3)\right| \leqslant \frac{\eta}{2}. \tag{18}$$

Покажем сначала, что ни одно из неравенств

$$-2+\eta < h(u_2, u_3) < -\frac{5}{4}-\eta,$$

$$-\frac{5}{4}+\eta < h(u_2, u_3) \leqslant -1+\eta,$$

$$-1+\eta < h(u_2, u_3) < \frac{3}{4}-\eta$$

не имеет решений в целых числах u_2 и u_3, не равных одновременно нулю. Действительно, в противном случае выберем целое число u_1 так, чтобы выполнялись соответственно неравенства

$$1 \leqslant |u_1+\alpha u_2+\beta u_3| \leqslant \frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{2} \leqslant |u_1+\alpha u_2+\beta u_3| \leqslant 1$$

и

$$0 \leqslant |u_1+\alpha u_2+\beta u_3| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Но тогда в каждом из этих случаев (при достаточно малых η) мы имели бы

$$(1-\eta)\,|g(\mathrm{u})| < 1-\eta,$$

что противоречит (6). Итак, если u_2 и u_3 — целые числа, не равные одновременно нулю, то имеет место или неравенство (15), или (16), или (17).

Предположим, что выполняется неравенство (17). Подберем целое число t и вещественное число τ так, чтобы при соответствующем выборе знака

$$\alpha u_2+\beta u_3 = t \pm \tau, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2}.$$

Ясно, что мы можем выбрать целые числа u_1', u_1'' так, чтобы выполнялись равенства

$$|u_1'+\alpha u_2+\beta u_3| = 1-\tau,$$

$$|u_1''+\alpha u_2+\beta u_3| = 1+\tau;$$

тогда

$$g(u_1', u_2, u_3) = (1-\tau)^2+h(u_2, u_3) \leqslant 1-\frac{5}{4}+\eta = -\frac{1}{4}+\eta,$$

$$g(u_1'', u_2, u_3) = (1+\tau)^2+h(u_2, u_3) \geqslant 1-\frac{5}{4}+\eta = -\frac{1}{4}+\eta,$$

и так как $M(g)=1$, то для достаточно малых η

$$h(u_2, u_3)+(1-\tau)^2 = g(u_1', u_2, u_3) \leqslant -1+\eta, \tag{19}$$

$$h(u_2, u_3)+(1+\tau)^2 = g(u_1'', u_2, u_3) \geqslant 1-\eta. \tag{20}$$

Вычитая неравенство (19) из неравенства (20), мы получаем

$$\frac{1}{2}(1-\eta) \leqslant \tau \leqslant \frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство эквивалентно неравенству (18), и лемма 2 доказана полностью.

Следствие. *Если выполняется неравенство* (17), *то для достаточно малого* η *числа* u_2, u_3 *взаимно просты.*

Действительно, если $u_2 = vu_2'$, $u_3 = vu_3'$, где $v > 1$, то $h(u_2', u_3')$ не удовлетворяет ни одному из неравенств (15), (16), (17) в противоречии с утверждением леммы.

Лемма 3. *Либо*

$$|D| \geqslant \frac{5}{2}, \tag{21}$$

либо после перехода к подходящей эквивалентной форме $g(\mathrm{x})$ *можно считать, что выполняются неравенства*

$$-\frac{5}{4}-\eta \leqslant h(1, 0) \leqslant -\frac{5}{4}+\eta, \tag{22}$$

$$h(1, -1) \geqslant \frac{3}{4}-\eta, \tag{23}$$

$$-\frac{5}{4}-\eta \leqslant h(1, 1) \leqslant -\frac{5}{4}+\eta, \tag{24}$$

$$h(2, -1) \leqslant -2+\eta, \tag{25}$$

$$\left|\alpha-\frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\eta, \tag{26}$$

$$|\beta| \leqslant \eta \tag{27}$$

при условии, что $\eta > 0$ *меньше некоторой абсолютной постоянной* $\eta_0 > 0$.

Предположим сначала, что неравенство

$$-2+\eta < h(u_2, u_3) < \frac{3}{4}-\eta$$

не имеет решений. Тогда по теореме VI должно выполняться неравенство

$$|h_{22}h_{33}-h_{23}^2| \geqslant \frac{1}{4}(2-\eta)^2+(2-\eta)\left(\frac{3}{4}-\eta\right) = \frac{5}{4}(2-\eta)(1-\eta),$$

откуда с учетом (14) получаем для достаточно малых η

$$|D| \geqslant \frac{5(2-\eta)}{4(1-\eta)^2} \geqslant \frac{5}{2}.$$

В противном случае в силу леммы 2 существует решение неравенства

$$\left|h(u_2, u_3)-\frac{5}{4}\right| \leqslant \eta.$$

Поэтому (следствие леммы 2), делая надлежащую замену переменных x_2, x_3, можно считать, что

$$-\frac{5}{4}-\eta \leqslant h(1, 0)=h_{22} \leqslant -\frac{5}{4}+\eta. \tag{28}$$

Произведя затем подстановку вида $x_2 \to \pm x_2+vx_3$ с подходящим целым числом v, можно добиться выполнения неравенств

$$0 \geqslant 2h_{23} \geqslant h_{22} \geqslant -\frac{5}{4}-\eta. \tag{29}$$

Рассмотрим теперь величину $h(u_2, u_3)$ при $(u_2, u_3)=(0, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$. Если бы $h_{33}=h(0, 1) \leqslant -\frac{5}{4}+\eta$, то из неравенств (28), (29) при достаточно малых η следовало бы, что

$$h_{22}h_{33}-h_{23}^2>0,$$

а это противоречит предположению о неопределенности формы h. Таким образом,

$$h_{33}>-\frac{5}{4}+\eta$$

и, следовательно, по лемме 2

$$h_{33}=h(0, 1) \geqslant \frac{3}{4}-\eta.$$

Но из неравенства (29) выводим

$$h(1, -1) \geqslant h_{22}+h_{33}>-\frac{5}{4}+\eta,$$

а потому по лемме 2

$$h_{22}-2h_{23}+h_{33}=h(1, -1) \geqslant \frac{3}{4}-\eta. \tag{30}$$

Отсюда, учитывая (29), получаем

$$h(1, 1)=h(1, -1)+4h_{23} \geqslant\left(\frac{3}{4}-\eta\right)+2\left(-\frac{5}{4}+\eta\right)>-2+\eta.$$

Поэтому по лемме 2 для $h(1, 1)$ имеет место или неравенство (15), или неравенства (17). В первом случае

$$h(1, 1)=h_{22}+2h_{23}+h_{33}>\frac{3}{4}-\eta,$$

а с учетом (29) и (28)

$$h_{33}>\frac{3}{4}-\eta-h_{22}>2-2\eta.$$

Тогда по (14) для достаточно малых η

$$|D|=\frac{h_{23}^2-h_{22}h_{33}}{(1-\eta)^3} \geqslant \frac{-h_{22}h_{33}}{(1-\eta)^3} \geqslant \frac{\left(\frac{5}{4}-\eta\right)(2-2\eta)}{(1-\eta)^3}=\frac{1-\frac{4}{5}\eta}{(1-\eta)^2} \cdot \frac{5}{2} \geqslant \frac{5}{2},$$

так что в этом случае лемма 3 обоснована.

Поэтому мы можем считать, что

$$-\frac{5}{4}-\eta \leqslant h(1, 1)=h_{22}+2h_{23}+h_{33}<-\frac{5}{4}+\eta.$$

По лемме 2, примененной к $(u_2, u_3)=(1, 0)$ и $(1, 1)$, найдутся такие целые числа v' и v'', что

$$\left|v'+\frac{1}{2}-\alpha\right| \leqslant \frac{1}{2}\eta,$$

$$\left|v''+\frac{1}{2}-(\alpha+\beta)\right| \leqslant \frac{1}{2}\eta.$$

Заменяя в форме g переменную x_1 на $x_1+v'x_2+(v''-v')x_3$, мы можем считать, что

$$\left|\frac{1}{2}-\alpha\right| \leqslant \frac{1}{2}\eta,$$

$$\left|\frac{1}{2}-(\alpha+\beta)\right| \leqslant \frac{1}{2}\eta,$$

откуда

$$|\beta| \leqslant \eta.$$

Далее имеем

$$h(2, -1)=h(1, 1)+3h_{22}-6h_{23} \leqslant h(1, 1) \leqslant -\frac{5}{4}+\eta.$$

Неравенство

$$h(2, -1) \geqslant -\frac{5}{4}-\eta$$

не может выполняться, ибо в противном случае из неравенства (18) для $(u_2, u_3)=(2, -1)$ следовало бы, что дробная часть числа $2\alpha-\beta$ близка к $\frac{1}{2}$, в то время как из полученных в предыдущем абзаце неравенств для α и β вытекает оценка $2\alpha-\beta=1+O(\eta)$. Поэтому по лемме 2

$$h(2, -1) \leqslant -2+\eta.$$

Тем самым лемма 3 доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы VII. Неравенства (22) — (25) леммы 3 линейны относительно величин h_{22}, h_{23}, h_{33}. Положим

$$h_{22} = -\frac{5}{4} + \lambda\eta, \tag{31}$$

$$h_{23} = -\frac{1}{2} + \mu\eta, \tag{32}$$

$$h_{33} = 1 + \nu\eta. \tag{33}$$

Тогда неравенства (22) — (25) переходят в неравенства

$$|\lambda| \leqslant 1, \tag{34}$$

$$\lambda - 2\mu + \nu \geqslant -1, \tag{35}$$

$$|\lambda + 2\mu + \nu| \leqslant 1, \tag{36}$$

$$4\lambda - 4\mu + \nu \leqslant 1. \tag{37}$$

Отсюда

$$2\nu = (\lambda - 2\mu + \nu) + (\lambda + 2\mu + \nu) - 2\lambda \geqslant -4,$$
$$3\nu = 4\lambda - 4\mu + \nu + 2(\lambda + 2\mu + \nu) - 6\lambda \leqslant 9,$$

так что

$$|\nu| \leqslant 3$$

и из неравенства (36) мы выводим

$$|\mu| \leqslant 3.$$

Поэтому, используя (14), получаем

$$(1-\eta)^3 |D| = h_{23}^2 - h_{22}h_{33} =$$
$$= \frac{3}{2} + \left(-\lambda - \mu + \frac{5}{4}\nu\right)\eta + O(\eta^2) = \frac{3}{2} + O(\eta). \tag{38}$$

Но определитель D не зависит[1]) от η, так что

$$|D| = \frac{3}{2}.$$

Допустим, если это возможно, что $\eta \neq 0$. Полагая в соотношении (38) $|D| = \frac{3}{2}$, мы получаем

$$-\lambda - \mu + \frac{5}{4}\nu = -\frac{9}{4} + O(\eta).$$

[1]) Точнее говоря, как и в п. 2, мы имеем дело с семейством форм $g_\varepsilon(\mathbf{x})$, каждой из которых соответствовало свое собственное $\eta = \eta_\varepsilon$, $0 \leqslant \eta < \varepsilon$. Параметры λ, μ, ν также зависят от ε, но оценка (38) верна для всех достаточно малых ε.

Для достаточно малых η это противоречит неравенствам (34), (35) и (36), так как из них следует, что

$$-\lambda - \mu + \frac{5}{4}\nu = -\frac{9}{4}\lambda + \frac{7}{8}(\lambda - 2\mu + \nu) + \frac{3}{8}(\lambda + 2\mu + \nu) \geqslant$$
$$\geqslant -\frac{9}{4} - \frac{7}{8} - \frac{3}{8} = -\frac{7}{2}.$$

Таким образом, $\eta = 0$, а тогда из соотношений (13), (26), (27), (31), (32), (33) мы получаем, что форма $f(\mathbf{x})$ эквивалентна форме

$$g(\mathbf{x}) = \left(x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 - \frac{5}{4}x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = f_0(\mathbf{x}).$$

Теорема VII доказана.

§ 5. Бинарные кубические формы

1. Изложим некоторые сведения из алгебраической теории бинарных кубических форм вида

$$f(x_1, x_2) = ax_1^3 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2 + dx_2^3, \tag{1}$$

где коэффициенты a, b, c, d пока считаем комплексными числами. Форму (1) всегда можно разложить на произведение трех линейных форм с комплексными коэффициентами:

$$f(x_1, x_2) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant 3} (\vartheta_j x_1 + \psi_j x_2). \tag{2}$$

Форме f сопоставляем ее дискриминант

$$D(f) = \prod_{1 \leqslant j < k \leqslant 3} \{\vartheta_j\psi_k - \vartheta_k\psi_j\}^2. \tag{3}$$

Легко проверить (см. ниже, п. 2), что

$$D(f) = 18abcd + b^2c^2 - 4ac^3 - 4db^3 - 27a^2d^2. \tag{4}$$

Из соотношения (3) следует, что $D(f) = 0$ в том и только в том случае, когда $f(x_1, x_2)$ имеет кратные линейные множители. Формы f с условием $D(f) = 0$ называются вырожденными.

Если для некоторых чисел α, β, γ, δ тождественно выполняется равенство

$$f'(x_1, x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_1 + \delta x_2), \tag{5}$$

то

$$|D(f')| = (\alpha\delta - \beta\gamma)^6 D(f), \tag{6}$$

как легко следует из соотношения (3) и того факта, что

$$f'(x_1, x_2) = \prod_j (\vartheta_j' x_1 + \psi_j' x_2). \tag{7}$$

где

$$\vartheta_j' = \alpha\vartheta_j + \gamma\psi_j, \quad \psi_j' = \beta\vartheta_j + \delta\psi_j. \tag{8}$$

Поэтому дискриминант $D(f)$ является инвариантом бинарной кубической формы f при линейных преобразованиях переменных с условием $\alpha\delta - \gamma\beta = \pm 1$. В частности, $D(f') = D(f)$ для эквивалентных форм f и f' (т. е. для форм f и f', связанных соотношением (5) с некоторыми целыми числами α, β, γ, δ, удовлетворяющими равенству $\alpha\delta - \gamma\beta = \pm 1$).

Если числа a, b, c, d вещественны, то либо все отношения ψ_j/ϑ_j вещественны, либо два из них комплексные сопряженные, а третье вещественно. Это следует из того факта, что у кубического уравнения $f(\xi, 1) = 0$ с вещественными коэффициентами либо все корни вещественны, либо есть пара комплексно сопряженных корней, а третий корень веществен. На этом принципе основано разбиение вещественных невырожденных кубических форм с данным дискриминантом на два существенно отличных типа.

Покажем, что две формы одного и того же типа могут быть преобразованы друг в друга подстановкой

$$\begin{cases} x_1 = \alpha x_1' + \beta x_2', \\ x_2 = \gamma x_1' + \delta x_2' \end{cases}$$

с некоторыми вещественными α, β, γ, δ. Достаточно, очевидно, показать, что все формы f данного типа могут быть преобразованы в фиксированную форму f' этого типа. Не умаляя общности, можно считать, что либо

$$\vartheta_j, \ \psi_j \quad (j = 1, 2, 3) \text{ вещественны}, \tag{9_1}$$

либо

$$\vartheta_3, \ \psi_3 \text{ вещественны}, \ \vartheta_2 = \overline{\vartheta}_1, \ \psi_2 = \overline{\psi}_1, \tag{9_2}$$

соответственно нашим двум случаям; при этом черточка сверху означает комплексно сопряженное число. Ясно, что эти два случая вполне характеризуются условиями $D > 0$ и $D < 0$ соответственно.

Подберем такие числа λ_1, λ_2, λ_3, не равные одновременно нулю, что

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\psi_1 + \lambda_2\psi_2 + \lambda_3\psi_3 = 0, \\ \lambda_1\vartheta_1 + \lambda_2\vartheta_2 + \lambda_3\vartheta_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Тогда $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$, так как если бы, например, $\lambda_3 = 0$, то

$$\vartheta_1\psi_2 - \vartheta_2\psi_1 = 0,$$

а тогда, согласно (3), $D(f) = 0$, что противоречит предположению о невырожденности f. Умножив в случае необходимости все числа λ_i на подходящий постоянный множитель, мы, не уменьшая общности, можем считать, что

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 1. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь два случая согласно тому, какое из условий — (9_1) или (9_2) — выполняется.

Если выполняется условие (9_1), то можно считать, что λ_1, λ_2, λ_3 все вещественны. Обозначим

$$X_j = -\lambda_j(\vartheta_j x_1 + \psi_j x_2) \quad (j = 1, 2);$$

тогда

$$\lambda_3(\vartheta_3 x_1 + \psi_3 x_2) = X_1 + X_2,$$

и, согласно (2) и (11),

$$f(x_1, x_2) = X_1 X_2 (X_1 + X_2). \tag{12}$$

Если справедливо условие (9_2), то мы можем считать, что $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$, $\lambda_3 = \overline{\lambda}_3$. Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \rho X_1 + \rho^2 X_2 = \lambda_1(\vartheta_1 x_1 + \psi_1 x_2), \\ \rho^2 X_1 + \rho X_2 = \lambda_2(\vartheta_2 x_1 + \psi_2 x_2), \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где ρ — фиксированное невещественное число с условием $\rho^3 = 1$. Согласно (10),

$$X_1 + X_2 = \lambda_3(\vartheta_3 x_1 + \psi_3 x_2) \tag{14}$$

и

$$f(x_1, x_2) = X_1^3 + X_2^3. \tag{15}$$

При этом коэффициенты α, β, γ, δ в равенствах

$$X_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad X_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$$

вещественны, так как уравнения (13) являются комплексно сопряженными.

Значения, принимаемые невырожденными бинарными кубическими формами, совпадают (в смысле § 4 гл. I) со значениями, принимаемыми функцией

$$\varphi(\mathbf{X}) = X_1 X_2 (X_1 + X_2)$$

или

$$\varphi(\mathbf{X}) = X_1^3 + X_2^3$$

в точках соответствующей решетки. Читателю не представит труда проверить, что соответствующий результат справедлив и для вырожденных кубических форм, причем тогда

$$\varphi(\mathbf{X}) = X_1^2 X_2$$

или

$$\varphi(\mathbf{X}) = X_1^3$$

соответственно с тем, имеется ли среди линейных множителей $\vartheta_j x_1 + \psi_j x_2$ два или три кратных друг другу.

Морделл [7] впервые показал, что если f — вещественная кубическая форма, то существует такой целый вектор $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, что

$$|f(\mathbf{u})| \leqslant \begin{cases} \left|\frac{D}{49}\right|^{1/4}, & \text{если } D > 0, \\ \left|\frac{D}{23}\right|^{1/4}, & \text{если } D < 0, \\ \varepsilon, & \text{если } D = 0; \end{cases} \tag{16}$$

здесь ε означает произвольно малое положительное число.

Третий случай, когда $f(\mathbf{x})$ является вырожденной формой, тривиально может быть рассмотрен с помощью теоремы Минковского [1]) (см. теорему III следующей главы), так что мы здесь не будем на нем останавливаться. То, что неравенства (16_1) и (16_2) неулучшаемы, показывают примеры форм

$$x_1^3 + x_1^2 x_2 - 2x_1 x_2^2 - x_2^3 \tag{17}$$

и

$$x_1^3 - x_1 x_2^2 - x_2^3. \tag{18}$$

Дискриминанты этих форм равны соответственно 49 и -23. Так как эти формы не представляют 0 и для всех целых векторов $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ принимают целочисленные значения, то для них знак $\leqslant$ в неравенствах (16) не может быть заменен знаком $<$. Ниже мы докажем, что для всех форм, не эквивалентных кратным форм (17) и (18), в неравенствах (16) можно поставить знак $<$.

Простое доказательство неравенств (16), основанное на теории приведения бинарных кубических форм, дал Давенпорт [8] (первоначально они были доказаны иным путем).

Бинарная кубическая форма считается приведенной, если является приведенной некоторая связанная с ней определенная квадратичная форма; при этом в случаях $D > 0$ и $D < 0$ эта квадратичная форма строится по-разному. Давенпорт доказывает, что в случае приведенной формы либо выполняются неравенства (16) со знаком $<$ для

1) Действительно, если $f(x_1, x_2) = X_1^2 X_2$, где $X_1 = \alpha x_1 + \beta x_2$, $X_2 = \gamma x_1 + \delta x_2$, $|\alpha\delta - \gamma\beta| = 1$, то подбираем $\mathbf{u} = (x_1, x_2) \neq \mathbf{o}$ так, чтобы $|X_1| \leqslant \varepsilon$, $|X_2| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$. Тогда $|f(\mathbf{u})| \leqslant \varepsilon$. Случай $f(x_1, x_2) = X_1^3$ еще тривиальнее. — *Прим. ред.*

одного из явно выписанных векторов $\mathbf{u}$, либо $f(\mathbf{x})$ является одной из форм (17), (18). Мы проведем полностью доказательство для случая $D > 0$ и лишь наметим его для случая $D < 0$, так как впоследствии мы используем случай $D < 0$ для иллюстрации другого метода.

Давенпорт доказал также [6], что ни 49, ни 23 не являются изолированными константами. Мы не будем проводить этого доказательства, которое существенно опирается на тот факт, что хотя кубическая форма $f(\mathbf{x})$ является всегда неопределенной, однако площадь области

$$|f(\mathbf{x})| < 1$$

конечна и формы (17), (18) лишь конечное число раз принимают значение ± 1 — ситуация, резко отличающаяся от встречающейся в случае неопределенных квадратичных форм.

2. Для того чтобы перейти к изложению результата Давенпорта, определим квадратичную форму, ассоциированную с данной кубической формой

$$f(x_1, x_2) = ax_1^3 + bx_1^2 x_2 + cx_1 x_2^2 + dx_2^3 = \tag{1}$$

$$= \prod_{1 \leqslant j \leqslant 3} (\vartheta_j x_1 + \psi_j x_2). \tag{2}$$

В качестве такой квадратичной формы возьмем гессиан кубической формы, а именно

$$h(x_1, x_2) = \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right\} = \tag{3}$$

$$= Ax_1^2 + Bx_1 x_2 + Cx_2^2, \tag{4}$$

где

$$A = b^2 - 3ac, \quad B = bc - 9ad, \quad C = c^2 - 3bd. \tag{5}$$

Вычислив частные производные f в представлении (2) и проведя простые преобразования, мы получаем, что

$$h(x_1, x_2) = \sum (\vartheta_2\psi_3 - \vartheta_3\psi_2)^2 (\vartheta_1 x_1 + \psi_1 x_2)^2, \tag{6}$$

где сумма распространяется на все циклические перестановки цифр 1, 2, 3.

Покажем теперь, что гессиан $h(x_1, x_2)$ является ковариантом формы $f(x_1, x_2)$; иными словами, покажем, что если α, β, γ, δ — вещественные числа с условием

$$\alpha\delta - \gamma\beta = \pm 1, \tag{7}$$

то гессиан формы $f'(x_1, x_2)$, определенной условием

$$f'(x_1, x_2) = f(\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_1 + \delta x_2),$$

равен

$$h'(x_1, x_2) = h(\alpha x_1 + \beta x_2, \gamma x_1 + \delta x_2).$$

Действительно, это сразу же следует из равенства (6) и выражений (7), (8) п. 1, если учесть, что на основании условия (7)

$$\vartheta_j'\psi_k' - \vartheta_k'\psi_j' = (\alpha\delta - \gamma\beta)(\vartheta_j\psi_k - \vartheta_k\psi_j) =$$
$$= \pm(\vartheta_j\psi_k - \vartheta_k\psi_j).$$

Используя (5) или (6), мы получаем, что определитель формы $h(x_1, x_2)$ равен

$$AC - \frac{1}{4}B^2 = \frac{3}{4}D(f). \tag{8}$$

В частности, форма $h(x_1, x_2)$ является определенной в том и только в том случае, когда $D > 0$, т. е. когда форма f является произведением трех вещественных линейных форм (если числа ϑ_j, ψ_j вещественны, то ясно, что форма является положительно определенной; обратное не так очевидно, если не принимать во внимание равенство (8)).

В случае вещественных ϑ_j, ψ_j кубическую форму $f = f(x_1, x_2)$ с гессианом $h(x_1, x_2)$ будем называть приведенной в смысле Эрмита, если положительно определенная квадратичная форма $h = h(x_1, x_2)$ является приведенной в смысле Минковского (см. п. 3 § 3).

Каждая форма с вещественными ϑ_j, ψ_j эквивалентна приведенной форме, так как в силу ковариантности форм $h(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x})$ преобразование, приводящее форму $h(\mathbf{x})$ в смысле Минковского, приводит и $f(\mathbf{x})$. Это приведение может быть осуществлено при помощи конечного числа шагов, поскольку, как мы видели, это может быть сделано для определенных квадратичных форм.

3. Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему Давенпорта.

Теорема VIII. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — бинарная кубическая форма с дискриминантом $D > 0$, которая является приведенной в смысле Эрмита. Тогда*

$$\min\{|f(1, 0)|, |f(0, 1)|, |f(1, 1)|, |f(1, -1)|\} \leqslant \left(\frac{D}{49}\right)^{1/4}. \tag{1}$$

При этом знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда

$$\lambda f(x_1, \pm x_2) = x_1^3 + x_1^2x_2 - 2x_1x_2^2 - x_2^3 \tag{2}$$

или

$$\lambda f(x_1, \pm x_2) = x_1^3 + 2x_1^2x_2 - x_1x_2^2 - x_2^3, \tag{3}$$

где $\lambda \neq 0$ — вещественное число.

Фактически Давенпорт доказал, что для приведенной формы $f(x_1, x_2)$ по крайней мере одно из пяти произведений

$$|f(1, 0)f(0, 1)|, \quad |f(1, 0)f(1, 1)|, \quad |f(0, 1)f(1, 1)|,$$
$$|f(1, 0)f(1, -1)|, \quad |f(0, 1)f(1, -1)|$$

не превышает $\left(\frac{D}{49}\right)^{1/2}$, причем равенство возможно, как и прежде, только для форм (2) и (3). Мы, следуя Чоку [2], докажем другое обобщение этой теоремы. Пусть

$$h(x_1, x_2) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2$$

— гессиан формы $f(\mathbf{x})$, причем

$$0 \leqslant B \leqslant A \leqslant C, \quad A > 0. \tag{4}$$

Тогда

$$\min\{|f(1, 0)|, |f(0, 1)|, |f(1, 1)|, |f(1, -1)|\} \leqslant \left(\frac{A}{7}\right)^{1/2}, \tag{4a}$$

причем равенство имеет место только для форм (2) и (3). Так как $4AC - B^2 \geqslant 3A^2$ и по равенству (8) п. 2 $4AC - B^2 = 3D(f)$, то этот результат сильнее теоремы VIII.

Доказательство теоремы VIII (точнее, неравенства (4a)). В силу однородности задачи мы можем предположить, что

$$A = 7. \tag{5}$$

Выведем противоречие из предположения, что для некоторой приведенной кубической формы f, отличной от форм (2) и (3), одновременно выполняются неравенства

$$|f(1, 0)| \geqslant 1, \quad |f(0, 1)| \geqslant 1, \quad |f(1, 1)| \geqslant 1, \quad |f(1, -1)| \geqslant 1.$$

Через коэффициенты формы

$$f(\mathbf{x}) = ax_1^3 + bx_1^2x_2 + cx_1x_2^2 + dx_2^3$$

эти неравенства записываются так:

$$|a| \geqslant 1, \quad |d| \geqslant 1, \tag{6}$$

$$|a + b + c + d| \geqslant 1, \quad |a - b + c - d| \geqslant 1. \tag{7}$$

Переходя в случае необходимости от формы f к форме $-f$, можно считать, что

$$a \geqslant 1. \tag{8}$$

Воспользуемся тождествами

$$A = b^2 - 3ac, \quad B = bc - 9ad, \quad C = c^2 - 3bd, \tag{9}$$

из которых следует, что

$$Bc - Cb = 3Ad, \quad Bb - Ac = 3Ca. \tag{10}$$

Из условий (4), (5) и тождества (9_2) мы получаем, что

$$0 \leqslant bc - 9ad \leqslant 7. \tag{11}$$

Допустим, что $d > 0$. Тогда неравенство (11) с учетом (8) дает

$$bc \geqslant 9ad \geqslant 9. \tag{12}$$

Предположение $b \geqslant c \geqslant 0$ противоречит тождеству (10_1), если учесть (4); предположение $c \geqslant b \geqslant 0$ противоречит (10_2); поэтому

$$b < 0, \quad c < 0.$$

Тогда, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, мы получаем

$$A = b^2 - 3ac = |b|^2 + \frac{3}{2}|ac| + \frac{3}{2}|ac| \geqslant 3\left(\frac{9}{4}a^2b^2c^2\right)^{1/3},$$

откуда на основании (12) и (8)

$$A \geqslant 3\left(\frac{729}{4}\right)^{1/3} > 7,$$

что противоречит (5).

Таким образом, мы можем считать, что

$$d < 0,$$

и тогда на основании (11)

$$bc \leqslant 7 - 9a|d| \leqslant -2. \tag{13}$$

Предположение $b < 0 < c$ противоречит тождеству (10_2) в совокупности с неравенствами (4), так что

$$c < 0 < b,$$

и неравенство (13) перепишется так:

$$b|c| \geqslant 9a|d| - 7 \geqslant 2. \tag{14}$$

Далее, из (5) следует, что

$$7 = A = b^2 + 3a|c| \geqslant b^2 + 3|c|. \tag{15}$$

Подставляя (14) в (15), мы получаем, что

$$7 \geqslant b^2 + 3|c| \geqslant b^2 + \frac{6}{b},$$

и, таким образом,

$$1 \leqslant b \leqslant 2. \tag{16}$$

Аналогично мы получаем, что

$$7 \geqslant \frac{4}{c^2} + 3|c|,$$

откуда

$$1 \leqslant -c \leqslant 2. \tag{17}$$

Ясно, что в неравенствах (16) или (17) знак равенства может встретиться только при условии

$$a = -d = 1, \quad bc = -2. \tag{18}$$

Из неравенств (14), (16) и (17) мы получаем

$$9a|d| \leqslant 7 + |bc| \leqslant 11,$$

откуда с учетом (6)

$$a \leqslant \frac{11}{9}, \quad |d| \leqslant \frac{11}{9}.$$

Отсюда следует, что

$$a - b + c - d \leqslant \frac{11}{9} - 1 - 1 + \frac{11}{9} < 1,$$

а тогда по (7)

$$a - b + c - d \leqslant -1. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь две возможности для величины $f(1, 1)$, допускаемые неравенством (7_1). Если

$$f(1, 1) = a + b + c + d \leqslant -1, \tag{20}$$

то, складывая неравенства (19) и (20), мы получаем

$$a - |c| \leqslant -1,$$

так что

$$|c| \geqslant 1 + a \geqslant 2.$$

Сравнивая это неравенство с неравенством (17), мы заключаем, что $|c| = 2$, и, поскольку в неравенстве (17) встречается, таким образом, знак равенства, должны быть справедливы равенства (18), откуда

$$a = -d = 1, \quad b = 1, \quad c = -2.$$

Аналогично убеждаемся в том, что если

$$a + b + c + d \geqslant +1,$$

то

$$b + d \geqslant 1,$$

а тогда

$$b \geqslant 2$$

и мы получаем, что

$$a = -d = 1, \quad b = 2, \quad c = -1.$$

Теорема VIII доказана.

4. Пусть теперь дискриминант $D(f)$ бинарной кубической формы f отрицателен. Тогда ее гессиан является неопределенной бинарной квадратичной формой, а потому приведение гессиана (как квадратичной формы) не позволяет выбрать конечное число приведенных форм среди форм, эквивалентных форме f.

Однако если $D < 0$, то только один линейный множитель формы f является вещественным, и мы можем представить форму f в виде

$$f(x_1, x_2) = (\vartheta_3 x_1 + \psi_3 x_2)(Px_1^2 + Qx_1x_2 + Rx_2^2), \qquad (1)$$

где квадратичная форма $Px_1^2 + Qx_1x_2 + Rx_2^2$ как произведение двух сопряженных линейных форм с комплексными коэффициентами является положительно определенной. Давенпорт, следуя более ранним авторам, называет форму f приведенной, если квадратичная форма

$$Px_1^2 + Qx_1x_2 + Rx_2^2$$

является приведенной по Минковскому, т. е. если

$$|Q| \leqslant P \leqslant R \qquad (2)$$

и, кроме того, если

$$\vartheta_3\psi_3 \geqslant 0. \qquad (3)$$

Выполнимость последнего условия может быть достигнута путем изменения в случае необходимости знака переменной x_2, что не влияет на условия (2). Давенпорт [8$_{II}$] доказал следующее предложение.

Теорема IX. *Если $f(\mathbf{x})$ — бинарная кубическая форма с дискриминантом $D(f) < 0$, то существует такой целочисленный вектор $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, что*

$$|f(\mathbf{u})| \leqslant \left|\frac{D}{23}\right|^{1/4}.$$

Более того, если $f(\mathbf{x})$ — приведенная форма, то

$$\min[|f(1, 0)|, \quad |f(0, 1)|, \quad |f(1, -1)|, \quad |f(1, -2)|] \leqslant \left|\frac{D}{23}\right|^{1/4},$$

причем знак равенства достигается только для формы

$$f(x_1, x_2) = a(x_1^3 + x_1^2x_2 + 2x_1x_2^2 + x_2^3).$$

Мы только наметим доказательство этой теоремы. С деталями доказательства читатель может познакомиться по работе Давенпорта. Позднее мы дадим другое доказательство первой части этой теоремы (гл. III, теорема VII).

Нам надо показать, что если

$$|f(1, 0)| \geqslant 1, \qquad |f(0, 1)| \geqslant 1,$$
$$|f(1, -1)| \geqslant 1, \quad |f(1, -2)| \geqslant 1,$$

то $D(f) \leqslant -23$. Так как в силу положительной определенности нашей квадратичной формы числа $P - Q + R$ и $P - 2Q + 4R$ положительны, то приведенные выше неравенства эквивалентны неравенствам

$$P|\vartheta_3| \geqslant 1, \quad R|\psi_3| \geqslant 1, \qquad (4_1)$$

$$|\vartheta_3 - \psi_3|(P - Q + R) \geqslant 1, \qquad (4_2)$$

$$|\vartheta_3 - 2\psi_3|(P - 2Q + 4R) \geqslant 1. \qquad (4_3)$$

При фиксированных ϑ_3 и ψ_3 неравенства (2) и (4) показывают, что точка (P, Q, R), рассматриваемая в трехмерном евклидовом пространстве, лежит в некоторой бесконечной области $\mathscr{S}$, ограниченной плоскостями. Давенпорт показывает, что

$$-D(f) = \{P\psi_3^2 - Q\vartheta_3\psi_3 + R\psi_3^2\}^2(4PR - Q^2)$$

и что при фиксированных ϑ_3, ψ_3 функция $|D(f)|^{1/4}$ является выпуклой функцией точки (P, Q, R). Отсюда следует, что максимум функции $D(f)$ достигается в одной из вершин области $\mathscr{S}$, где встречаются три граничные плоскости, ибо легко видеть, что $|D| \to \infty$ при $\max(|P|, |Q|, |R|) \to \infty$. Затем несколько искусственно оценивается величина $D(f)$ в вершинах области $\mathscr{S}$ и доказательство завершается.

§ 6. Другие формы

1. Мы дадим здесь краткий обзор результатов по теории приведения форм, отличных от уже рассмотренных.

2. Для бинарной формы степени $n \geqslant 4$ имеется уже более одного независимого инварианта. Например, бинарная биквадратичная форма $f(x_1, x_2)$, являющаяся произведением двух пар комплексно-сопряженных линейных форм, может быть приведена к виду

$$\varphi(\mathbf{X}) = \varphi(X_1, X_2) = X_1^4 + 6\mu X_1^2X_2^2 + X_2^4,$$

где

$$X_1 = \alpha x_1 + \beta x_2, \quad X_2 = \gamma x_1 + \delta x_2,$$

α, β, γ, δ — некоторые вещественные числа; $\mu = \mu(f)$ — вещественное число, удовлетворяющее неравенству

$$|\mu| < \frac{1}{3}.$$

Две формы с различными μ не могут быть переведены одна в другую с помощью однородного линейного преобразования переменных. Кроме того, $\mu(f)$ является абсолютным инвариантом в том смысле, что $\mu(tf)=\mu(f)$ для любого вещественного числа t. Наряду с этим инвариантом, конечно, имеется и дискриминант

$$D(f)=\prod_{1\leqslant j<k\leqslant 4}(\vartheta_j\psi_k-\vartheta_k\psi_j)^2,$$

где

$$f(x_1,\ x_2)=\prod_{j=1}^{4}(\vartheta_jx_1+\psi_jx_2).$$

Проблема минимума определенной бинарной биквадратичной формы была решена независимо друг от друга Девисом [1] и Черным [1]. Они нашли такую минимально возможную функцию $\gamma(\mu)$ инварианта μ, что для каждой формы f с инвариантом μ имеет место неравенство

$$\inf f(\mathbf{u})\leqslant\gamma(\mu)\,\{D(f)\}^{1/6},$$

где точная нижняя граница берется по всем целым векторам $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$. Девис [1] получил также некоторые результаты для неопределенных биквадратичных форм. В этой же работе Девиса указана полная библиография более ранних работ по этому вопросу. Как мы отмечали, квадратичные и кубические формы f с условием $D(f)=0$ принимают при целочисленных значениях переменных произвольно малые значения. Оказывается, что для биквадратичных форм этот факт уже не имеет места. Случай $D(f)=0$ для биквадратичных форм был полностью изучен Давенпортом [15].

Методы этих авторов основаны на комбинировании метода теории приведения с другими приемами, идущими от геометрии чисел.

По бинарным формам степени выше 4 нет, по-видимому, никаких систематических работ.

3. Единственным типом форм $f(x_1,\ \ldots,\ x_m)$ степени n при $n>2$, $m>2$, для которого известны наилучшие оценки величины

$$M(f)=\inf_{\substack{\mathbf{u}\neq\mathbf{o}\\ \mathbf{u}\ \text{целая}}}|f(\mathbf{u})|,$$

являются, по-видимому, тернарные кубические формы с вещественными коэффициентами, разлагающиеся на произведение трех линейных форм:

$$f(x_1,\ x_2,\ x_3)=\prod_{1\leqslant j\leqslant 3}(\vartheta_{j1}x_1+\vartheta_{j2}x_2+\vartheta_{j3}x_3),$$

где либо все ϑ_{jk} вещественны (первый тип), либо $\vartheta_{31},\ \vartheta_{32},\ \vartheta_{33}$ вещественны, а $\vartheta_{2k}=\bar{\vartheta}_{1k}$ $(1\leqslant k\leqslant 3)$. Инвариантом формы f является дискриминант

$$D(f)=\{\det_{j,k}(\vartheta_{jk})\}^2.$$

Он является единственным инвариантом в каждом типе, ибо, очевидно, существуют вещественные преобразования, переводящие форму f в формы

$$X_1X_2X_3$$

и

$$X_1(X_2^2+X_3^2)$$

соответственно в зависимости от того, к какому типу принадлежит форма f. Указанные типы определяются соответственно условиями $D>0$ и $D<0$. Относительно этих форм известны следующие два результата.

Теорема X. *Пусть $f(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — разложимая тернарная кубическая форма, причем $D(f)>0$. Тогда существует такой целый вектор $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$, что*

$$|f(\mathbf{u})|<\frac{D^{1/3}}{9{,}1},$$

исключая те случаи, когда форма f эквивалентна кратному одной из форм

$$f_{49}=x_1^3+x_2^3+x_3^3-x_1^2x_2+5x_1^2x_3-2x_1x_2^2+6x_1x_3^2-2x_2x_3^2-$$
$$-x_2^2x_3-x_1x_2x_3,$$

$$f_{81}=x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1^2x_3-3x_1x_2^2+9x_1x_3^2-3x_2x_3^2-3x_1x_2x_3,$$

для которых $M(f)=1$, а $D(f)$ равен 49 и 81 соответственно.

Теорема XI. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — разложимая тернарная кубическая форма с условием $D(f)<0$. Тогда существует такой целый вектор $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$, что*

$$|f(\mathbf{u})|\leqslant\left|\frac{D}{23}\right|^{1/3}.$$

Знак равенства имеет место только в том случае, когда $f(\mathbf{x})$ эквивалентна кратному формы

$$f_{23}=x_1^3+x_2^3+x_3^3+2x_1^2x_3-x_1x_2^2+x_1x_3^2-x_2x_3^2-3x_1x_2x_3.$$

Заметим, что формы $f_{49},\ f_{81}$ и f_{23} имеют вид

$$\mathrm{Norm}(x_1+\varphi x_2+\psi x_3),$$

где числа $1,\ \varphi,\ \psi$ являются базисом кольца целых чисел некоторого кубического поля. Позднее (гл. X) мы рассмотрим причины, приводящие к этому обстоятельству. Для форм $f_{49},\ f_{81}$ и f_{23} имеет место соотношение $\psi = \varphi^2$ и φ удовлетворяет соответственно уравнениям

$$\varphi^3 + \varphi^2 - 2\varphi - 1 = 0,$$

$$\varphi^3 - 3\varphi - 1 = 0$$

и

$$\varphi^3 - \varphi - 1 = 0.$$

(Под нормой понимается произведение трех линейных форм, полученных подстановкой в одну и ту же форму трех пар сопряженных значений φ и ψ.) Первое уравнение соответствует, очевидно, бинарной кубической форме, указанной в теореме VIII. Третье уравнение соответствует бинарной форме

$$x_1^3 - x_1 x_2^2 - x_2^3,$$

которая эквивалентна форме, указанной в теореме IX, что легко видеть, производя замену переменных $x_1 \to x_1$, $x_2 \to -x_1 - x_2$.

Для случая $D > 0$ теорема X дает два первых последовательных минимума и показывает, что второй минимум является изолированным. Первый минимум в случае $D < 0$ (теорема XI) не является изолированным, однако он будет изолированным в некотором более слабом смысле (см. Давенпорт и Роджерс [2], в частности теорема 14; см. также гл. X). Теорема X была доказана Давенпортом [7]. Ранее им был найден первый минимум (см. Давенпорт [1]; более простое доказательство см. Давенпорт [5]). Несколько более слабая форма теоремы XI, в которой вместо $\left|\frac{D}{23}\right|^{1/3}$ стоит $\left|\frac{D}{23}\right|^{1/3} + \varepsilon$ с произвольно малым $\varepsilon > 0$, была доказана Давенпортом [7]; в полном объеме теорема XI доказана Давенпортом и Роджерсом [2]. Чок и Роджерс [3] доказали, что каждая разложимая тернарная кубическая форма с $D > 0$ либо эквивалентна кратному формы f_{49}, либо эквивалентна форме $g(\mathbf{x})$, для которой

$$|g(1, 0, 0)\, g(0, 1, 0)\, g(0, 0, 1)| \leqslant \left(\frac{D^{1/2}}{7{,}1}\right)^3.$$

Этот результат аналогичен полученному в § 3 результату о произведении диагональных коэффициентов положительно определенной квадратичной формы.

Мы не будем здесь доказывать теоремы X и XI, поскольку в гл. X мы, следуя Морделлу, выведем теоремы X и XI из соответствующих результатов для бинарных кубических форм (в которых, как отметит читатель, также фигурируют постоянные 49 и 23). Однако краткое изложение аргументов теории приведения, использованных Давенпортом при доказательстве теоремы X, заслуживает внимания.

Пусть $f(\mathbf{x})$ — разложимая тернарная кубическая форма с $D > 0$. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $M(f) = 1$. Тогда форма f эквивалентна форме g, для которой

$$g(1, 0, 0) = (1-\eta)^{-1},$$

где $\eta \geqslant 0$ может быть взято произвольно малым. Таким образом, мы можем написать, что

$$(1-\eta)\, g(\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{3} (x_1 + \alpha_j x_2 + \beta_j x_3).$$

Рассмотрим также квадратичную форму

$$h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3} (x_1 + \alpha_j x_2 + \beta_j x_3)^2.$$

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим следует, что для всех целых $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ $h(\mathbf{u}) \geqslant 3(1-\eta)^{2/3}$, и легко проверить, что на самом деле $h(\mathbf{u}) \geqslant 3$, причем равенство имеет место только тогда, когда $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$. Таким образом, форма $h(\mathbf{x})$ может быть приведена в смысле Минковского посредством преобразования вида

$$\begin{aligned} x_1 &\to x_1 + v_{12}x_2 + v_{13}x_3, \\ x_2 &\to \phantom{x_1 +{}} v_{22}x_2 + v_{23}x_3, \\ x_3 &\to \phantom{x_1 +{}} v_{32}x_2 + v_{33}x_3, \end{aligned}$$

где v_{ij} — целые числа и $v_{22}v_{33} - v_{23}v_{32} = \pm 1$. Поскольку определитель формы $h(\mathbf{x})$ равен $(1-\eta)^6 D(f)$ и форма $h(\mathbf{x})$ является приведенной, мы получаем границы для ее коэффициентов. Дальнейшее доказательство основано на сложной и тонкой цепи вычислений, использующих эти границы и тот факт, что $|g(\mathbf{u})| \geqslant 1$ для всех целых векторов $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$.

Доказательство теоремы XI, данное Давенпортом, исходит из аналогичного приведения, но затем использует другие идеи и детальное рассмотрение возникающей здесь сложной двумерной фигуры.

4. Проблеме арифметических минимумов для форм, представимых в виде произведения n однородных линейных форм от n переменных ($n > 3$), посвящено много работ. Известны различные оценки, полученные другими методами, однако точные результаты неизвестны. Случай большого n мы рассмотрим в § 8 гл. IX. Наилучшие из опубликованных оценок для $n = 4$ и 5 принадлежат соответственно Жилинкасу [1] и Годуину [1], однако Годуин ссылается на лучшую оценку для $n = 4$, содержащуюся, по-видимому, в диссертации Бёма (Böhm G., Вена, 1942); эта оценка упоминается также в энциклопедическом обзоре Келлера [1]; но автор ею не располагает.

Имеется, однако, удивительный результат Чока о произведении величин, принимаемых n линейными формами, в случае когда эти величины положительны. Чок доказывает, что если $L_1, \ldots, L_n$ суть n линейных форм от n переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ с определителем

$\Delta \neq 0$, то существует такой целый вектор $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, что

$$L_j(\mathbf{u}) > 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n) \tag{1}$$

и

$$\prod_j L_j(\mathbf{u}) \leqslant |\Delta|. \tag{2}$$

Константа 1 в правой части неравенства (2) является наилучшей, как показывает простой пример форм $L_j = x_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. На самом деле теорема Чока имеет более общую форму и относится к произведению неоднородных линейных форм. Поэтому мы докажем ее позднее (§ 4 гл. XI).

ГЛАВА III

ТЕОРЕМЫ БЛИХФЕЛЬДТА И МИНКОВСКОГО

§ 1. Введение

1. Можно сказать, что вся геометрия чисел базируется на теореме Минковского о выпуклом теле. В упрощенном виде эту теорему можно сформулировать так: если точечное множество $\mathscr{S}$ n-мерного евклидова пространства симметрично относительно начала координат (т. е. вместе с точкой $\mathbf{x}$ оно содержит и точку $-\mathbf{x}$), выпукло (т. е. вместе с точками $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ содержит весь отрезок

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1))$$

и имеет объем $V > 2^n$, то это множество содержит целую точку $\mathbf{u}$, отличную от начала координат. Таким образом мы получаем связь между „геометрическими" свойствами множества — выпуклостью, симметричностью и объемом — и „арифметическими" свойствами: существованием в $\mathscr{S}$ целой точки. Другая формулировка этой теоремы, с первого взгляда более общая, утверждает, что если Λ — решетка с определителем $d(\Lambda)$, а $\mathscr{S}$, как и выше, — выпуклое и симметричное относительно начала координат тело, то $\mathscr{S}$ содержит точку решетки Λ, отличную от начала координат, если объем V тела $\mathscr{S}$ больше $2^n d(\Lambda)$. В § 2 мы докажем теорему Минковского и некоторые ее уточнения. Мы не будем следовать доказательству самого Минковского, а выведем эту теорему из теоремы Блихфельдта, которая сама по себе имеет важные приложения и является практически очевидной: если объем точечного множества $\mathscr{R}$ строго больше $d(\Lambda)$, то оно содержит две различные точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, разность которых $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ принадлежит решетке Λ.

Теоремы Блихфельдта и Минковского можно рассматривать как утверждения относительно характеристических функций множества $\mathscr{S}$, т. е. относительно функции $\chi(\mathbf{x})$, имеющей значение 1, если $\mathbf{x} \in \mathscr{S}$, и 0 в противном случае. Имеются принадлежащие Зигелю и Радо обобщения теорем Блихфельдта и Минковского на неотрицательные функции $\psi(\mathbf{x})$. Эти теоремы мы приводим в § 3, хотя в дальнейшем применять их не будем.

В § 4 мы используем теорему Минковского для получения такой характеристики решетки, которая не зависит от понятия базиса: решеткой является множество точек Λ n-мерного пространства, которое 1) содержит n линейно независимых векторов, 2) является группой относительно сложения (т. е. удовлетворяет следующему условию: если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ принадлежат множеству Λ, то и $\mathbf{x} \pm \mathbf{y} \in \Lambda$)

и 3) в некоторой сфере $x_1^2+\ldots+x_n^2<\eta^2$, где $\eta>0$, содержится только одна точка множества Λ — начало координат.

В § 5 мы вводим понятие критического определителя $\Delta(\mathscr{S})$ множества $\mathscr{S}$. Это есть число, обладающее тем свойством, что каждая решетка Λ с определителем $d(\Lambda)<\Delta(\mathscr{S})$ имеет в $\mathscr{S}$ точку, отличную от $\mathbf{o}$, в то время как существуют решетки с определителем $d(\Lambda)$, сколь угодно близким к $\Delta(\mathscr{S})$, не имеющие в $\mathscr{S}$ точек, отличных от начала координат.

В § 6 мы детально рассматриваем метод, принадлежащий Морделлу, который использует теорему Минковского о выпуклом теле для вычисления или оценки критического определителя $\Delta(\mathscr{S})$ как выпуклых, так и невыпуклых множеств. Грубо говоря, идея состоит в том, чтобы показать, что если решетка Λ с заданным определителем $d(\Lambda)=\Delta_0$ не имеет в $\mathscr{S}$ отличных от $\mathbf{o}$ точек, то Λ во всяком случае имеет точки, лежащие в различных множествах, близких к $\mathscr{S}$. Вместе с этими точками в Λ лежат их линейные комбинации. Эти линейные комбинации должны либо быть равными $\mathbf{o}$, либо лежать вне $\mathscr{S}$. Таким путем мы получаем все большую и большую информацию о точках Λ, лежащих вблизи $\mathscr{S}$, до тех пор, пока не приходим к противоречию; это противоречие показывает, что каждая решетка Λ с определителем $d(\Lambda)=\Delta_0$ имеет точку, лежащую в $\mathscr{S}$. Этот метод особенно эффективен для двух измерений, ибо в этом случае взаимоотношение различных точек наглядно. Соответственно в п. 2 § 6 мы дадим ряд простых, но полезных лемм о двумерных решетках. В частности, метод Морделла применим для нахождения $\Delta(\mathscr{S})$, когда $\mathscr{S}$ — область вида

$$|X_1^3+X_2^3|<1. \tag{1}$$

Это эквивалентно нахождению нижней границы значений (принимаемых на целых точках $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$) бинарной кубической формы с отрицательным дискриминантом. Этот вопрос рассматривался в гл. II, но на него не было дано ответа[1]). Данное здесь доказательство объединяет несколько вариантов, предложенных Морделлом. Оно существенно использует алгебраические предпосылки. Как отмечает Морделл [10], полученный результат обобщается на все области, достаточно сходные с областью (1). Равным образом Бамба [1] получил результат, показывающий, что все множества, достаточно сходные с

$$|X_1X_2(X_1+X_2)|<1, \tag{2}$$

фактически ведут себя так же, как и область (2). Множество (2) соответствует бинарной кубической форме с положительным дискриминантом, подобно тому как множество (1) — форме с отрицательным дискриминантом. Результат Бамба применим, например, к таким областям $\mathscr{S}$ с гексагональной симметрией и шестью асимптотами под углом $\frac{\pi}{3}$, для которых множество точек между двумя асимптотами, не принадлежащее $\mathscr{S}$, является выпуклым (ср. п. 3 § 3 гл. X).

[1]) Если не считать формулировки теоремы IX, полного доказательства которой там не приводилось. — *Прим. ред.*

Наконец, в § 7 мы используем теорему Минковского для получения некоторых результатов о представлении чисел квадратичными формами. Например, мы покажем, что каждое простое число $p=4m+1$ может быть представлено в виде суммы квадратов двух целых чисел: $p=u_1^2+u_2^2$. Это лежит довольно далеко в стороне от основной темы книги, но доказательства настолько элементарны и поразительны, что заслуживают большей известности.

2. Здесь удобно ввести несколько важных определений и понятий.

Как обычно, длину вектора $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, а именно число

$$(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

обозначаем символом $|\mathbf{x}|$. Для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ справедливо „неравенство треугольника“:

$$|\mathbf{x}+\mathbf{y}|\leqslant|\mathbf{x}|+|\mathbf{y}|.$$

Не в пример большинству понятий, с которыми мы будем иметь дело, длина не является инвариантом всех унимодулярных преобразований, однако нас будет интересовать только топология, индуцированная метрикой $|\mathbf{x}|$, а не сама метрика. Пусть

$$y_i=\sum\alpha_{ij}x_j \qquad (1\leqslant i,\ j\leqslant n) \tag{1}$$

— вещественное преобразование с определителем

$$\det(\alpha_{ij})\neq 0. \tag{2}$$

Очевидно, что

$$|\mathbf{y}|^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ik}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)\leqslant$$

$$\leqslant n^3A^2\sum_{j=1}^{n}x_j^2=n^3A^2|\mathbf{x}|^2,$$

где

$$A=\max_{i,j}|\alpha_{ij}|.$$

Так как $\det(\alpha_{ij}) \neq 0$, то система (1) может быть разрешена относительно x_j; тогда получим

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} y_j. \qquad (3)$$

Поэтому аналогично предыдущему

$$|\mathbf{x}|^2 \leqslant n^3 B^2 |\mathbf{y}|^2,$$

где

$$B = \max_{i,j} |\beta_{ij}|.$$

Это значит, что существуют такие постоянные c_1, c_2, не зависящие от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, что[1])

$$0 < c_1 \leqslant \frac{|\mathbf{x}|}{|\mathbf{y}|} \leqslant c_2 < \infty. \qquad (4)$$

Мы часто будем пользоваться следующими утверждениями, не делая точной ссылки.

Лемма 1. *Пусть Λ — решетка в n-мерном пространстве. Существуют такие постоянные η_1, η_2, зависящие только от Λ, что:*

(i) *если $\mathbf{u} \in \Lambda$, $\mathbf{v} \in \Lambda$ и $|\mathbf{u} - \mathbf{v}| < \eta_1$, то точки $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ идентичны;*

(ii) *число $N(R)$ точек решетки Λ, находящихся внутри шара $|\mathbf{x}| < R$, не превосходит числа $\eta_2(R^n + 1)$.*

Оба эти утверждения тривиальны для решетки Λ_0 целых точек. Если теперь (см. § 3 гл. I) Λ — произвольная решетка с базисом

$$\mathbf{b}_j = (\beta_{1j}, \ldots, \beta_{nj}) \qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

то точки $\mathbf{x}$ решетки Λ выражаются через точки $\mathbf{y}$ решетки Λ_0 равенствами (3). Справедливость свойств (i) и (ii) в общем случае немедленно вытекает из неравенства (4) и справедливости (i) и (ii) для решетки Λ_0.

3. Мы говорим, что последовательность векторов $\mathbf{x}_r$ $(r = 1, 2, \ldots)$ сходится к вектору $\mathbf{x}'$, если

$$\lim |\mathbf{x}_r - \mathbf{x}'| = 0$$

в обычном смысле. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы координаты векторов $\mathbf{x}_r$ сходились бы к соответствующим координатам вектора $\mathbf{x}'$, так как ясно, что

$$\max |x_j| \leqslant |\mathbf{x}| \leqslant n^{\frac{1}{2}} \max |x_j|$$

[1]) Это частный случай результата, который будет доказан ниже (гл. IV, следствие леммы 2).

для любого вектора $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Из леммы 1 (i) немедленно вытекает, что последовательность векторов $\mathbf{u}_r$ решетки Λ сходится только тогда, когда все $\mathbf{u}_r$ равны для достаточно больших r, скажем

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{u}' \qquad (\text{при всех } r \geqslant r_0).$$

Точечное множество $\mathscr{S}$ называется компактным, если любая последовательность точек $\mathbf{x}_r \in \mathscr{S}$ содержит подпоследовательность $\mathbf{y}_s = \mathbf{x}_{r_s}$ $(r_1 < r_2 < \ldots)$, сходящуюся к пределу в $\mathscr{S}$:

$$\lim_{s \to \infty} \mathbf{y}_s = \mathbf{y}' \in \mathscr{S}.$$

Классическая теорема Вейерштрасса показывает, что множество $\mathscr{S}$ в n-мерном евклидовом пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно одновременно и ограничено (т. е. содержится в шаре $|\mathbf{x}| < R$ для достаточно большого R) и замкнуто (т. е. если $\mathbf{x}_r \in \mathscr{S}$ $(1 \leqslant r < \infty)$ и существует $\mathbf{x}' = \lim \mathbf{x}_r$, то $\mathbf{x}' \in \mathscr{S}$).

Для полноты мы приведем доказательство теоремы Вейерштрасса. Предположим сначала, что $\mathscr{S}$ — компактное множество. Если бы $\mathscr{S}$ не было ограниченным множеством, то мы смогли бы найти такую последовательность точек $\mathbf{x}_r \in \mathscr{S}$, что $|\mathbf{x}_r| \to \infty$; эта последовательность не может содержать сходящуюся подпоследовательность. Таким образом, компактное множество $\mathscr{S}$ ограничено. Если бы множество $\mathscr{S}$ не было бы замкнутым, то мы смогли бы найти такую последовательность точек $\mathbf{x}_r \in \mathscr{S}$, что $\lim \mathbf{x}_r = \mathbf{x}'$ не принадлежал бы $\mathscr{S}$. Очевидно, что любая подпоследовательность этой последовательности стремится к $\mathbf{x}'$. Поэтому компактное множество замкнуто.

Пусть теперь $\mathscr{S}$ — ограниченное замкнутое множество. Покажем, что $\mathscr{S}$ компактно. Пусть $\mathbf{x}_r$ $(1 \leqslant r < \infty)$ — последовательность точек множества $\mathscr{S}$. С самого начала мы можем предполагать, что все $\mathbf{x}_r$ содержатся в n-мерном кубе $\mathscr{C}_0$ со стороной $2R$ для некоторого R. Этот куб можно разбить на 2^n кубов со стороной R плоскостями, проходящими через центр куба $\mathscr{C}_0$ параллельно его граням. Для определенности будем считать куб $\mathscr{C}_0$ замкнутым, т. е. включающим в себя граничные точки. По крайней мере один из кубов со стороной R должен содержать бесконечно много $\mathbf{x}_r$. Пусть $\mathscr{C}_1$ — один из таких кубов. Повторяя предыдущий процесс с кубом $\mathscr{C}_1$ вместо $\mathscr{C}_0$, получим куб $\mathscr{C}_2$ со стороной $\frac{1}{2}R$, находящийся в кубе $\mathscr{C}_1$ и содержащий бесконечно много членов последовательности $\mathbf{x}_r$. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность кубов $\mathscr{C}_s$ $(0 \leqslant s < \infty)$ со сторонами $2^{1-s}R$, причем $\mathscr{C}_{s+1} \subset \mathscr{C}_s$. Каждый куб $\mathscr{C}_s$ содержит бесконечное число членов $\mathbf{x}_r$. Кубы $\mathscr{C}_s$ определяют точку $\mathbf{x}'$, которая содержится во всех $\mathscr{C}_s$. Теперь можно следующим образом определить подпоследовательность $\mathbf{x}_{r_s}$, сходящуюся к $\mathbf{x}'$: $\mathbf{x}_{r_1}$ — любая точка исходной последовательности в $\mathscr{C}_0$; если $r_1, r_2, \ldots, r_s$ уже определены, причем

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_s,$$

то r_{s+1} — любой из бесконечного множества таких индексов $r > r_s$, что $x_{r_{s+1}} \in \mathscr{C}_s$. Наконец, так как

$$\mathbf{x}' = \lim_{s \to \infty} \mathbf{x}_{r_s},$$

то $\mathbf{x}' \in \mathscr{S}$, ибо по предположению $\mathscr{S}$ — замкнутое множество.

Известна другая форма теоремы Вейерштрасса, кажущаяся несколько более общей. Пусть

$$\mathbf{x}_{kr} \quad (1 \leqslant k \leqslant m, \ 1 \leqslant r < \infty)$$

— последовательность множеств $\mathbf{A}_r$ m точек $\mathbf{x}_{kr}$ в компактном множестве $\mathscr{S}$. Тогда найдется такая возрастающая последовательность $r_1 < r_2 < \ldots$ целых чисел, что все пределы

$$\lim_{s \to \infty} \mathbf{x}_{kr_s}$$

существуют и находятся в $\mathscr{S}$. Действительно, если

$$\mathbf{x}_{kr} = (x_{1kr}, \ldots, x_{nkr}),$$

то множества $\mathbf{A}_r$ можно рассматривать как точки $\mathbf{X}_r$ с координатами x_{jkr} $(1 \leqslant j \leqslant n, \ 1 \leqslant k \leqslant m)$ mn-мерного пространства. Очевидно, множество $\mathscr{S}_m$ точек $\mathbf{X} = (x_{jk})$ $(j = 1, \ldots, n; \ k = 1, \ldots, m)$, где

$$(x_{1k}, \ldots, x_{nk}) \in \mathscr{S} \quad (1 \leqslant k \leqslant m),$$

ограничено и замкнуто вместе с $\mathscr{S}$. Поэтому последовательность точек $\mathbf{X}_r$ содержит сходящуюся подпоследовательность $\mathbf{X}_{r_s}$. Очевидно, что последовательность r_s является искомой.

(Наряду с вышеизложенным подходом можно использовать так называемый диагональный процесс. Сначала возьмем из последовательности $\mathbf{A}_r$ такую подпоследовательность

$$\mathbf{A}_{r_s} = \mathbf{B}_s = (\mathbf{y}_{1s}, \ldots, \mathbf{y}_{ms}),$$

что $\mathbf{y}_{1s}$ — сходящаяся подпоследовательность. Далее из последовательности $\mathbf{B}_s$ извлечем такую подпоследовательность $\mathbf{C}_t = (\mathbf{z}_{1t}, \ldots, \mathbf{z}_{mt})$, что $\mathbf{z}_{2t}$ сходится. Последовательность $\mathbf{z}_{1t}$, являясь подпоследовательностью сходящейся последовательности $\mathbf{y}_{1s}$, сама сходится. Продолжая этот процесс, через m шагов мы получим искомую подпоследовательность.)

4. В этой книге, если не оговорено противное, под объемом понимается лебегова мера. Однако у нас не возникнет необходимости в более трудных для понимания свойствах меры; множества, с которыми мы главным образом будем иметь дело, например открытые кубы или эллипсоиды, имеют объем согласно любому определению объема.

§ 2. Теоремы Блихфельдта и Минковского

1. Мы воспользуемся обозначениями и результатами гл. I. Блихфельдт [1] первый показал, что основой значительной части геометрии чисел является следующий почти очевидный результат.

Теорема I. *Пусть m — натуральное число, Λ — решетка с определителем $d(\Lambda)$, а $\mathscr{S}$ — точечное множество объема $V(\mathscr{S})$*

(причем допускается случай $V(\mathscr{S}) = \infty$). Предположим, что либо

$$V(\mathscr{S}) > md(\Lambda), \tag{1}$$

либо $\mathscr{S}$ компактно и

$$V(\mathscr{S}) = md(\Lambda). \tag{2}$$

Тогда найдутся $m+1$ таких различных точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{m+1} \in \mathscr{S}$, что все разности $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ содержатся в Λ.

Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — произвольный базис решетки Λ, а $\mathscr{P}$ — обобщенный параллелепипед, т. е. множество точек вида

$$y_1\mathbf{b}_1 + \ldots + y_n\mathbf{b}_n \quad (0 \leqslant y_j < 1, \ 1 \leqslant j \leqslant n).$$

Тогда объем $\mathscr{P}$ равен

$$V(\mathscr{P}) = |\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)| = d(\Lambda). \tag{3}$$

Каждую точку $\mathbf{x}$ пространства можно представить в виде

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} \in \Lambda, \quad \mathbf{v} \in \mathscr{P},$$

причем это представление однозначно, ибо точки Λ имеют вид $y_1\mathbf{b}_1 + \ldots + y_n\mathbf{b}_n$ при целых $y_1, \ldots, y_n$.

Ниже (гл. VII) этот параллелепипед (называемый фундаментальным параллелепипедом решетки Λ) будет играть значительную роль.

Пусть $\mathbf{u} \in \Lambda$; через $\mathscr{R}(\mathbf{u})$ будем обозначать множество[1]) точек $\mathbf{v}$ с условиями $\mathbf{v} \in \mathscr{P}$, $\mathbf{v} + \mathbf{u} \in \mathscr{S}$. Очевидно, что для объемов $V\{\mathscr{R}(\mathbf{u})\}$ этих множеств справедливо равенство

$$\sum_{\mathbf{u} \in \Lambda} V\{\mathscr{R}(\mathbf{u})\} = V(\mathscr{S}). \tag{4}$$

Предположим теперь, что выполнено первое условие, а именно $V(\mathscr{S}) > md(\Lambda)$. Тогда из равенства (4) вытекает неравенство

$$\sum_{\mathbf{u} \in \Lambda} V\{\mathscr{R}(\mathbf{u})\} > md(\Lambda) = mV(\mathscr{P}).$$

Ввиду того что все множества $\mathscr{R}(\mathbf{u})$ содержатся в $\mathscr{P}$, должна найтись по крайней мере одна точка $\mathbf{v}_0 \in \mathscr{P}$, принадлежащая $m+1$ множествам вида $\mathscr{R}(\mathbf{u})$; скажем

$$\mathbf{v}_0 \in \mathscr{R}(\mathbf{u}_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant m+1),$$

---

[1]) Наглядно: $\mathscr{R}(\mathbf{u})$ есть та часть множества $\mathscr{S}$, которая лежит в параллелограмме $\mathscr{P}$, сдвинутом (параллельно перенесенном) на вектор $\mathbf{u}$, причем эта часть перенесена вектором $-\mathbf{u}$ в исходный параллелограмм $\mathscr{P}$. — *Прим. ред.*

где $\mathbf{u}_j$ — различные точки. Тогда по определению $\mathscr{R}(\mathbf{u})$ точки

$$\mathbf{x}_j = \mathbf{v}_0 + \mathbf{u}_j$$

находятся в $\mathscr{S}$, причем

$$\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j \begin{cases} \in \Lambda, \\ \neq \mathbf{o} \quad (i \neq j). \end{cases}$$

Этим первый случай теоремы доказан.

Предположим теперь, что выполнено второе условие. Пусть ε_r $(1 \leqslant r < \infty)$ — последовательность положительных чисел, причем

$$\lim \varepsilon_r = 0.$$

Для каждого r множество $(1+\varepsilon_r)\mathscr{S}$ точек $(1+\varepsilon_r)\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathscr{S}$ имеет, очевидно, объем

$$(1+\varepsilon_r)^n V(\mathscr{S}) > V(\mathscr{S}) = md(\Lambda).$$

Следовательно, в силу только что доказанного найдутся такие точки

$$\mathbf{x}_{jr} \in (1+\varepsilon_r)\mathscr{S} \quad (1 \leqslant j \leqslant m+1),$$

что, скажем,

$$\mathbf{u}_r(i, j) = \mathbf{x}_{ir} - \mathbf{x}_{jr} \begin{cases} \in \Lambda, \\ \neq \mathbf{o} \quad (i \neq j). \end{cases} \tag{5}$$

Выделив подходящим образом из заданной последовательности подпоследовательности (которые мы обозначим теми же индексами), мы можем, не ограничивая общности, предполагать, что все пределы

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{x}_{jr} = \mathbf{x}'_j \quad (1 \leqslant j \leqslant m+1)$$

существуют; здесь $\mathbf{x}_{jr}$ — последовательности, отвечающие выбранным подпоследовательностям ε_r. Так как теперь предполагается, что $\mathscr{S}$ компактно, то точки $\mathbf{x}'_j$ находятся в $\mathscr{S}$[1]). Тогда в силу равенства (5)

$$\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j = \lim_{r\to\infty} \mathbf{u}_r(i, j).$$

Но точки $\mathbf{u}_r(i, j) \in \Lambda$. Это значит (см. п. 3 § 1), что начиная с некоторого места точки $\mathbf{u}_r(i, j)$ не зависят от r, т. е.

$$\mathbf{u}_r(i, j) = \mathbf{u}'(i, j) \quad (r \geqslant r_0).$$

Таким образом,

$$\mathbf{x}'_i - \mathbf{x}'_j = \mathbf{u}'(i, j) \begin{cases} \in \Lambda, \\ \neq \mathbf{o} \quad (i \neq j), \end{cases}$$

и мы разобрали второй случай.

Теорема I доказана.

[1]) Это утверждение не следует непосредственно из определения, но его легко доказать, рассматривая $(1+\varepsilon_r)\mathscr{S}$ (или от противного). — *Прим. ред.*

Имея в виду ссылки в дальнейшем (гл. VII), заметим, что при доказательстве первого случая мы заодно доказали следующее предложение.

Следствие. *Пусть $\mathscr{S}$ — любое множество точек, а $\mathscr{S}_1$ — множество таких точек $\mathbf{v}$ фундаментального параллелепипеда, которые можно представить в виде*

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} - \mathbf{u}, \quad \mathbf{x} \in \mathscr{S}, \ \mathbf{u} \in \Lambda.$$

Тогда

$$V(\mathscr{S}_1) \leqslant V(\mathscr{S}).$$

При этом, если ни одна разность $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ между различными точками $\mathscr{S}$ не принадлежит решетке Λ, то

$$V(\mathscr{S}_1) = V(\mathscr{S}).$$

Первое утверждение очевидно. Что касается второго, то его справедливость вытекает из того факта, что в этом случае множества $\mathscr{R}(\mathbf{u})$ попарно не имеют пересечений.

2. Из теоремы I почти непосредственно вытекает следующее предложение, которое, по крайней мере для $m = 1$, принадлежит Минковскому („теорема Минковского о выпуклом теле“)[1]).

Теорема II. *Пусть $\mathscr{S}$ — симметричное относительно начала координат выпуклое точечное множество с объемом (возможно, бесконечным) $V(\mathscr{S})$. Пусть m — целое число, а Λ — решетка с определителем $d(\Lambda)$. Пусть либо*

$$V(\mathscr{S}) > m2^n d(\Lambda),$$

либо $\mathscr{S}$ — компактное множество и

$$V(\mathscr{S}) = m2^n d(\Lambda).$$

Тогда $\mathscr{S}$ содержит по крайней мере m пар различных точек $\pm\mathbf{u}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$, не совпадающих с $\mathbf{o}$.

Еще раз заметим, что не исключена возможность бесконечного объема.

Доказательство. Применим теорему I к множеству $\frac{1}{2}\mathscr{S}$ точек $\frac{1}{2}\mathbf{x}$, $\mathbf{x} \in \mathscr{S}$, имеющему объем $2^{-n}V(\mathscr{S})$. Тогда найдутся такие

[1]) Общий случай, по-видимому, принадлежит ван дер Корпуту [1].

$m+1$ различных точек

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}_j \in \frac{1}{2}\mathscr{S} \quad (1 \leqslant j \leqslant m+1),$$

что

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}_i - \frac{1}{2}\mathbf{x}_j \begin{cases} \in \Lambda, \\ \neq \mathbf{o} \quad (i \neq j). \end{cases}$$

Упорядочим вещественные точки, считая

$$\mathbf{x}_1 \succ \mathbf{x}_2,$$

если первая отличная от нуля координата точки $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ положительна. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\mathbf{x}_1 \succ \mathbf{x}_2 \succ \ldots \succ \mathbf{x}_{m+1}.$$

Положим

$$\mathbf{u}_j = \frac{1}{2}\mathbf{x}_j - \frac{1}{2}\mathbf{x}_{m+1};$$

тогда, очевидно, все точки

$$\mathbf{o}, \ \pm\mathbf{u}_1, \ \ldots, \ \pm\mathbf{u}_m$$

различны. Но $-\mathbf{x}_{m+1} \in \mathscr{S}$, так как $\mathbf{x}_{m+1} \in \mathscr{S}$ и $\mathscr{S}$ симметрично. Следовательно,

$$\mathbf{u}_j = \frac{1}{2}\mathbf{x}_j + \frac{1}{2}(-\mathbf{x}_{m+1}) \in \mathscr{S}$$

в силу выпуклости множества $\mathscr{S}$.

Теорема II доказана.

Для дальнейшего отметим полученное при доказательстве очевидное предложение.

Замечание. *Пусть $\mathscr{S}$ — симметричное относительно начала координат выпуклое множество. Для того чтобы $\mathscr{S}$ содержало точку решетки Λ, отличную от начала, необходимо и достаточно, чтобы нашлись такие две различные точки $\frac{1}{2}\mathbf{x}_1$, $\frac{1}{2}\mathbf{x}_2 \in \frac{1}{2}\mathscr{S}$, что разность $\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 \in \mathscr{S}$.*

Если $\mathscr{S}$ содержит точку $\mathbf{a} \in \Lambda$, то $\frac{1}{2}\mathscr{S}$ содержит две точки $\frac{1}{2}\mathbf{a}$, $-\frac{1}{2}\mathbf{a}$, разность которых есть $\mathbf{a}$; необходимость доказана. Обратно, как при доказательстве теоремы, если даны $\frac{1}{2}\mathbf{x}_1$, $\frac{1}{2}\mathbf{x}_2$, то $\frac{1}{2}\mathbf{x}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{x}_2 \in \mathscr{S}$.

2. Зигель [1] дал более сильную форму теоремы IV, которая, однако, до сих пор сравнительно мало использовалась в приложениях. Ради простоты обозначений сформулируем эту теорему только для решетки Λ_0 целых векторов. Функция

$$\varphi(\mathbf{v}) = \sum_{\mathbf{u} \in \Lambda_0} \psi(\mathbf{v} + \mathbf{u}) \tag{1}$$

периодична в силу определения. Ее коэффициенты Фурье, равные $c(\mathbf{p}) = c(p_1, \ldots, p_n)$, где $\mathbf{p} \in \Lambda_0$, задаются формулой

$$c(\mathbf{p}) = \int_{\mathscr{P}} \varphi(\mathbf{v}) e^{-2\pi i \mathbf{p}\mathbf{v}} d\mathbf{v}; \tag{2}$$

здесь $\mathbf{pv}$ — скалярное произведение

$$p_1 v_1 + \ldots + p_n v_n.$$

Так как при $\mathbf{p} \in \Lambda_0$, $\mathbf{u} \in \Lambda_0$, $\mathbf{pu}$ — целое число, то, подставляя в формулу (2) выражение (1), получаем

$$c(\mathbf{p}) = \int\limits_{\substack{-\infty < x_j < \infty \\ (1 \leqslant j \leqslant n)}} \psi(\mathbf{x}) e^{-2\pi i (\mathbf{px})} d\mathbf{x}. \tag{3}$$

В частности,

$$\int_{\mathscr{P}} \varphi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = c(\mathbf{o}) = V(\psi). \tag{4}$$

По основной теореме теории рядов Фурье („равенство Парсеваля")

$$\int_{\mathscr{P}} \varphi^2(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \sum_{\mathbf{p} \in \Lambda_0} |c(\mathbf{p})|^2. \tag{5}$$

В силу того что $\varphi(\mathbf{v}) \geqslant 0$ при любых $\mathbf{v}$, должно существовать такое $\mathbf{v}_0$, что

$$\int_{\mathscr{P}} \varphi^2(\mathbf{v}) d\mathbf{v} \geqslant \varphi(\mathbf{v}_0) \int_{\mathscr{P}} \varphi(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = \varphi(\mathbf{v}_0) V(\psi). \tag{6}$$

Используя определение $\varphi(\mathbf{v}_0)$ и равенства (3), (4), (5), мы получим, что существует точка $\mathbf{v}_0$, для которой

$$\sum_{\mathbf{u} \in \Lambda_0} \psi(\mathbf{v}_0 + \mathbf{u}) = \varphi(\mathbf{v}_0) \geqslant V(\psi) + \{V(\psi)\}^{-1} \sum_{\substack{\mathbf{p} \in \Lambda_0 \\ \mathbf{p} \neq \mathbf{o}}} \left| \int_{R^n} \psi(\mathbf{x}) e^{-2\pi i (\mathbf{px})} d\mathbf{x} \right|^2. \tag{7}$$

Это и есть неравенство Зигеля.

Если в левую часть неравенства (7) вместо Λ_0 подставляется произвольная решетка Λ, то в правой части вместо Λ_0 следует подставить взаимную с Λ решетку Λ^* (см. § 5 гл. I).

3. Теперь мы получим обобщение теоремы II Минковского о выпуклом теле, данное Радо [1] (см. также Касселс [1]). Радо рассматривает с очень общей точки зрения однородное линейное отображение $\boldsymbol{\lambda}$ n-мерного векторного пространства в себя. Это отображение,

Лемма 2. *Пусть дана последовательность различных векторов*

$$\{\mathbf{z}\}: \mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_r, \ldots;$$

можно построить другую последовательность

$$\{\mathbf{w}\}: \mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r, \ldots,$$

удовлетворяющую следующим трем условиям:

(i) $\mathbf{w}_0 = \mathbf{o}$,

(ii) $\mathbf{w}_r \neq \pm \mathbf{w}_s$ *при* $r \neq s$,

(iii) *каждый элемент* $\mathbf{w}_r$ *является разностью между двумя элементами из первых* $r+1$ *элементов последовательности* $\{\mathbf{z}\}$, *скажем*

$$\mathbf{w}_r = \mathbf{z}_{l_r} - \mathbf{z}_{m_r} \quad (l_r \leqslant r,\ m_r \leqslant r) \tag{4}$$

Доказательство. Упорядочим вещественные векторы, записывая

$$\mathbf{x}_1 \succ \mathbf{x}_2,$$

если первая отличная от нуля координата вектора $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ положительна. Если $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, то либо $\mathbf{x}_1 \succ \mathbf{x}_2$, либо $\mathbf{x}_2 \succ \mathbf{x}_1$. Мы будем строить последовательность $\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_r, \ldots$ постепенно, так чтобы

$$\mathbf{w}_r \succ \mathbf{o} \qquad (r > 0).$$

Вектор $\mathbf{w}_0$ задан. Предположим, что векторы $\mathbf{w}_0, \ldots, \mathbf{w}_{r-1}$ $(r \geqslant 1)$ уже построены. Найдется единственная перестановка $\mathbf{z}_{k_j}$ $(0 \leqslant j \leqslant r)$ векторов $\mathbf{z}_j$ $(0 \leqslant j \leqslant r)$, для которой

$$\mathbf{z}_{k_0} \prec \mathbf{z}_{k_1} \prec \ldots \prec \mathbf{z}_{k_r}.$$

Векторы

$$\mathbf{z}_{k_j} - \mathbf{z}_{k_0} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

попарно различны и отличны от нуля. Поэтому в качестве $\mathbf{w}_r$ мы можем выбрать один из этих векторов, отличный от $r-1$ вектора $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{r-1}$. Так как $\mathbf{w}_j \succ \mathbf{o}$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$, то равенство $\mathbf{w}_r = -\mathbf{w}_j$ невозможно. Потому вектор $\mathbf{w}_r$ отвечает поставленным условиям. Лемма 2 доказана.

Теорема V является почти непосредственным следствием следующего предложения.

Лемма 3. *Пусть выполнено неравенство* (2), *и пусть* $\det(\boldsymbol{\lambda}) \neq 0$, *так что существует преобразование* $\boldsymbol{\lambda}^{-1}$, *обратное преобразованию* $\boldsymbol{\lambda}$. *Тогда для любого вещественного вектора* $\mathbf{t}$

$$\sum_{\mathbf{u} \in \Lambda} \psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}) \leqslant \psi(\mathbf{o}) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\mathbf{u} \in \Lambda \\ \mathbf{u} \neq \mathbf{o}}} \psi(\mathbf{u}). \tag{5}$$

Доказательство. Фиксируем вектор $\mathbf{t}$. Пусть $\mathbf{z}_r$ — последовательность векторов $\mathbf{z}$ решетки Λ с условием $\psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z} + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}) > 0$, упорядоченная так, чтобы

$$\psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_r + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}) \geqslant \psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_s + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}) \qquad (r \leqslant s) \tag{6}$$

Построим последовательность $\mathbf{w}_r$, удовлетворяющую условиям (i)—(iii) леммы 2. В неравенстве (2) положим

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_r = \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_{l_r} + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t},$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_r = \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_{m_r} + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t},$$

где l_r и m_r определены условием (4). Тогда $l_r \leqslant r$, $m_r \leqslant r$ и в силу (6)

$$\min\{\psi(\mathbf{x}_r), \psi(\mathbf{y}_r)\} \geqslant \psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_r + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}). \tag{7}$$

Так как по определению (4)

$$\boldsymbol{\lambda}(\mathbf{x}_r - \mathbf{y}_r) = \mathbf{w}_r,$$

то из неравенств (2) и (7) мы выводим

$$\psi(\mathbf{w}_r) \geqslant \psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_r + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}).$$

Аналогично, меняя местами $\mathbf{x}_r$ и $\mathbf{y}_r$, получим

$$\psi(-\mathbf{w}_r) \geqslant \psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_r + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}).$$

Следовательно, учитывая, что $\psi \geqslant 0$, мы будем иметь

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{u} \in \Lambda} \psi(\mathbf{u}) &\geqslant \psi(\mathbf{w}_0) + \sum_{r > 0} \{\psi(\mathbf{w}_r) + \psi(-\mathbf{w}_r)\} \geqslant \\
&\geqslant \psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_0 + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}) + 2 \sum_{r > 0} \psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_r + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}) = \\
&= -\psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_0 + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}) + 2 \sum_{\mathbf{u} \in \Lambda} \psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}),
\end{aligned} \tag{8}$$

так как каждый вектор $\mathbf{u} \in \Lambda$, для которого $\psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{u} + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}) > 0$, встречается тогда же, когда встречается $\mathbf{z}_r$. Далее, из неравенства (2) при $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ вытекает неравенство $\psi(\mathbf{o}) \geqslant \psi(\mathbf{x})$ при любом $\mathbf{x}$, и, в частности,

$$\psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{z}_0 + \boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t}) \leqslant \psi(\mathbf{o}). \tag{9}$$

Неравенство (5) непосредственно следует из неравенств (8) и (9). Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы V. Проинтегрируем неравенство (5) относительно $\mathbf{t}$ по фундаментальному параллелепипеду $\mathscr{P}$

решетки Λ. Для левой части тогда имеем

$$\int_{\mathscr{P}}\left\{\sum_{\mathbf{u}\in\Lambda}\psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{u}+\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t})\right\}dt=\int\limits_{\substack{-\infty<t_j<\infty\\(1\leqslant j\leqslant n)}}\psi(\boldsymbol{\lambda}^{-1}\mathbf{t})\,dt=|\det(\boldsymbol{\lambda})|V(\psi).$$

Правая часть неравенства (5) не зависит от $\mathbf{t}$, а потому при интегрировании относительно $\mathbf{t}$ просто умножается на $V(\mathscr{P})=d(\Lambda)$. Теорема V доказана.

Радо [1] рассматривает однородные линейные преобразования $\boldsymbol{\lambda}$, для которых найдется функция $\psi(\mathbf{x})$, не равная тождественно нулю и удовлетворяющая условию (2). Оказывается, что $\boldsymbol{\lambda}$ должно удовлетворять довольно сильным условиям и что преобразование $\boldsymbol{\lambda}$ типа $\mathbf{x}\to\frac{1}{2}\mathbf{x}$ находится в некотором смысле на грани возможного.

§ 4. Характеризация решеток

Теперь мы можем дать характеристику решетки, в которой не участвует понятие базиса.

Теорема VI. *Для того чтобы множество Λ точек n-мерного евклидова пространства было бы решеткой, необходимо и достаточно, чтобы это множество удовлетворяло следующим трем условиям:*

(i) *если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ лежат в Λ, то и $\mathbf{a}\pm\mathbf{b}$ лежат в Λ;*

(ii) *Λ содержит n линейно независимых точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$;*

(iii) *существует такая постоянная $\eta>0$, что $\mathbf{o}$ является единственной точкой множества Λ, находящейся в шаре*

$$|\mathbf{x}|<\eta,$$

где, как обычно,

$$|\mathbf{x}|=(x_1^2+\ldots+x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. В силу определения и леммы 1 любая решетка удовлетворяет условиям (i), (ii), (iii). Остается показать, что любое множество Λ, удовлетворяющее условиям (i), (ii), (iii), является решеткой.

Заметим, во-первых, что из свойства (i) по индукции вытекает следующее утверждение: если $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$ — любые точки решетки, а $u_1, \ldots, u_m$ — целые числа, то

$$u_1\mathbf{c}_1+\ldots+u_m\mathbf{c}_m\in\Lambda.$$

Во-вторых, покажем, что если

$$\mathbf{c}_j=(c_{1j}, \ldots, c_{nj})\qquad(1\leqslant j\leqslant n+1)$$

суть $n+1$ точек Λ, то найдутся такие целые числа u_j $(1\leqslant j\leqslant n+1)$, не равные одновременно нулю, что

$$\sum_{j=1}^{n+1}u_j\mathbf{c}_j=\mathbf{o}.$$

Действительно, в силу теоремы II в выпуклом симметричном $(n+1)$-мерном множестве $\mathscr{S}$ бесконечного объема, определенном n неравенствами

$$\left|\sum_{1\leqslant j\leqslant n+1}c_{ij}u_j\right|<\frac{\eta}{n}\qquad(1\leqslant i\leqslant n),$$

найдутся точки $(u_1, \ldots, u_{n+1})\neq\mathbf{o}$, принадлежащие $(n+1)$-мерной решетке Λ_0 целых векторов.

Положим

$$\mathbf{d}=\sum_{j=1}^{n+1}u_j\mathbf{c}_j;$$

тогда, очевидно,

$$|\mathbf{d}|<\eta.$$

Поэтому в силу условия (iii) $\mathbf{d}=\mathbf{o}$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь M_1 — решетка с базисом $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, заданным свойством (ii). Ясно, что M_1 является подмножеством множества Λ. Если M_1 совпадает с Λ, то уже все доказано. Если же $M_1\neq\Lambda$, то в множестве Λ найдется точка $\mathbf{b}$, не лежащая в M_1. Применяя результаты предыдущего параграфа к $n+1$ векторам $\mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, найдем такие целые, не равные одновременно нулю числа $u_1, \ldots, u_n$ и v, что

$$v\mathbf{b}=u_1\mathbf{a}_1+\ldots+u_n\mathbf{a}_n. \qquad (1)$$

Здесь $v\neq0$, так как векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы; $v\neq\pm1$, так как $\mathbf{b}$ в силу предположения не лежит в M_1. Можно считать, что вектор $\mathbf{b}$ выбран так, что величина $|v|$ в равенстве (1) является наименьшей из всех возможных. Пусть p — простой делитель числа v; положим

$$v=pv_1,\quad \mathbf{b}_1=v_1\mathbf{b}.$$

Тогда

$$p\mathbf{b}_1=u_1\mathbf{a}_1+\ldots+u_n\mathbf{a}_n,$$

где не все $u_1, \ldots, u_n$ делятся на p, так как $\mathbf{b}_1$ не лежит в M_1, ибо v выбрано наименьшим. Не умаляя общности, можно считать, что p не делит u_1, так что при некоторых целых l и m

$$lp-mu_1=1.$$

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{a}_1'=l\mathbf{a}_1-m\mathbf{b}_1,\\&\mathbf{a}_j'=\mathbf{a}_j\quad(2\leqslant j\leqslant n),\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

откуда обратно

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= p\mathbf{a}_1' + mu_2\mathbf{a}_2' + \ldots + mu_n\mathbf{a}_n', \\ \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_j' \qquad (2 \leqslant j \leqslant n). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Пусть M_2 — решетка с базисом $\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \ldots, \mathbf{a}_n'$; тогда M_1' является подрешеткой решетки M_2. Индекс M_1 в M_2 равен p, поэтому, в частности,

$$d(M_2) = p^{-1}d(M_1) \leqslant \frac{1}{2}d(M_1). \tag{4}$$

В силу (2) базис решетки M_2 лежит в Λ, так что M_2 целиком содержится в Λ. Теперь мы можем повторить рассуждения: если M_2 не совпадает с Λ, то найдется третья решетка M_3, лежащая в Λ и содержащая M_2 в качестве подрешетки, и т. д. Наконец, в силу (4)

$$d(M_r) \leqslant \frac{1}{2}d(M_{r-1}) \leqslant \ldots \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{r-1} d(M_1).$$

Если бы

$$d(M_r) < \left(\frac{\eta}{n}\right)^n,$$

где η определено свойством (iii), указанным в формулировке теоремы, то M_r в силу теоремы II содержало бы такую точку $\mathbf{d} \neq \mathbf{o}$, что

$$|d_j| < \frac{\eta}{n} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

а это противоречит предположению. Следовательно, цепочка решеток $M_1, \ldots, M_r, \ldots$ должна обрываться, скажем, на M_R, и тогда решетка M_R совпадает с Λ.

Теорема VI доказана.

§ 5. Критические определители

1. Нам нужно теперь дать несколько новых определений, связанных с решетками и точечными множествами. Эти новые понятия существенно используются в гл. IV и V; здесь мы довольствуемся тем, что покажем их применение и дадим некоторые приложения теоремы Минковского.

Пусть $\mathscr{S}$ — точечное множество. Если решетка Λ не имеет в $\mathscr{S}$ отличных от $\mathbf{o}$ точек (если $\mathbf{o} \in \mathscr{S}$), то мы говорим, что Λ *допустима* для $\mathscr{S}$ или $\mathscr{S}$-допустима. Точную нижнюю границу

$$\Delta(\mathscr{S}) = \inf d(\Lambda)$$

определителей $d(\Lambda)$ всех $\mathscr{S}$-допустимых решеток Λ назовем *критическим определителем* множества $\mathscr{S}$. Если $\mathscr{S}$-допустимых решеток нет, то мы говорим, что $\mathscr{S}$ является множеством бесконечного типа,

и пишем $\Delta(\mathscr{S}) = \infty$; в противном случае $\mathscr{S}$ является множеством конечного типа и $0 \leqslant \Delta(\mathscr{S}) < \infty$. Если решетка Λ $\mathscr{S}$-допустима и $d(\Lambda) = \Delta(\mathscr{S})$, то Λ называется *критической*. Критические решетки играют очень важную роль в гл. V. Конечно, вообще говоря, нет никаких оснований полагать, что произвольное множество $\mathscr{S}$ имеет критическую решетку.

Наши определения не вполне совпадают с определением Малера [5]. Он, как правило, имеет дело с замкнутыми множествами $\mathscr{S}$ и говорит, что решетка Λ является $\mathscr{S}$-допустимой, если ни одна внутренняя точка $\mathscr{S}$, за исключением $\mathbf{o}$, не принадлежит решетке Λ, т. е. если Λ допустима в нашем смысле для множества внутренних точек $\mathscr{S}$. Наше определение — компромисс между определениями Малера и Роджерса [10].

2. Определение $\Delta(\mathscr{S})$ можно „обратить": $\Delta(\mathscr{S})$ — наибольшее из таких чисел Δ, что каждая решетка Λ, для которой $d(\Lambda) < \Delta$, имеет в $\mathscr{S}$ точку, отличную от $\mathbf{o}$[1]). Рассуждения § 4 гл. I показывают, что большинство результатов гл. II можно рассматривать как отыскание значений $\Delta(\mathscr{S})$ для некоторых областей $\mathscr{S}$. Возьмем, например, такое утверждение: если $f(\mathbf{x}) = f_{11}x_1^2 + 2f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2$ — определенная квадратичная форма и $D = f_{11}f_{22} - f_{12}^2$, то найдутся такие целые числа $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \neq \mathbf{o}$, что $f(\mathbf{u}) \leqslant \left(\frac{4D}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$; равенство возможно только для форм, эквивалентных форме $f_{11}(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$ (теорема II гл. II). Это утверждение эквивалентно тому, что двумерное множество

$$\mathscr{D}\colon X_1^2 + X_2^2 < 1 \tag{1}$$

имеет критический определитель $\Delta(\mathscr{D}) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, причем критическими являются те и только те решетки, базис которых $\mathbf{b}_1 = (b_{11}, b_{12})$, $\mathbf{b}_2 = (b_{21}, b_{22})$ удовлетворяет тождеству

$$(b_{11}x_1 + b_{12}x_2)^2 + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2)^2 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2. \tag{2}$$

Читатель может легко убедиться в этом самостоятельно (см. лемму 4 гл. I). Равенству (2) мы также можем дать геометрическую интерпретацию. Пусть

$$b_{11} = \cos\vartheta, \qquad b_{21} = \sin\vartheta,$$
$$b_{12} = \cos\psi, \qquad b_{22} = \sin\psi;$$

[1]) Нетрудно установить существование наибольшего Δ (если допускать и значение $\Delta = +\infty$), а также доказать эквивалентность этого определения предыдущему. — *Прим. ред.*

тогда равенство (2) справедливо при условии, если

$$\cos\vartheta\cos\psi+\sin\vartheta\sin\psi=\frac{1}{2},$$

т. е. если

$$\vartheta-\psi=\pm\frac{\pi}{3}.$$

Таким образом, критическая решетка в качестве базиса имеет две точки окружности $X_1^2+X_2^2=1$, образующие угол $\frac{\pi}{3}$. Тождество (2) показывает, что $\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2$ — точка решетки, лежащая на окружности $X_1^2+X_2^2=1$. Легко проверить, что шесть точек $\pm\mathbf{b}_1$, $\pm\mathbf{b}_2$, $\pm(\mathbf{b}_1-\mathbf{b}_2)$ являются вершинами правильного шестиугольника, вписанного в окружность $X_1^2+X_2^2=1$ [1]).

3. В этом и следующем пунктах мы используем теорему Минковского о выпуклом теле для оценки критического определителя $\Delta(\mathscr{S})$ различных множеств $\mathscr{S}$. Теорема II применима непосредственно, если $\mathscr{S}$ симметрично и выпукло; в этом случае она утверждает, что

$$\Delta(\mathscr{S})\geqslant 2^{-n}V(\mathscr{S}). \tag{1}$$

Например, для круга $\mathscr{D}$: $X_1^2+X_2^2<1$ неравенство (1) дает оценку $\Delta(\mathscr{D})\geqslant\frac{\pi}{4}=0{,}785\ldots$, которую можно сравнить с точным значением $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}=0{,}866\ldots$, полученным выше.

Однако, даже если заданная область $\mathscr{S}$ невыпукла или несимметрична, мы можем получить оценки $\Delta(\mathscr{S})$ снизу, если в $\mathscr{S}$ можно вписать выпуклое симметричное тело $\mathscr{T}$. Очевидно, что если $\mathscr{T}$ — подмножество $\mathscr{S}$, то $\Delta(\mathscr{S})\geqslant\Delta(\mathscr{T})$, так как каждая $\mathscr{S}$-допустимая решетка является автоматически и $\mathscr{T}$-допустимой. Поэтому

$$\Delta(\mathscr{S})\geqslant\Delta(\mathscr{T})\geqslant 2^{-n}V(\mathscr{T}).$$

Рассмотрим, например, область

$$\mathscr{S}:\ |X_1\ \ldots\ X_n|<1.$$

В силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим она содержит выпуклую симметричную область

$$\mathscr{T}:\ |X_1|+\ldots+|X_n|<n.$$

[1]) Других точек этой решетки на окружности $X_1^2+X_2^2=1$, очевидно, нет.— *Прим. ред.*

Область $\mathscr{T}$ выпукла и симметрична, так как она определена линейными однородными неравенствами; ее объем равен

$$2^n\frac{n^n}{n!};$$

следовательно,

$$\Delta(\mathscr{S})\geqslant\frac{n^n}{n!}.$$

Ниже (§ 8 гл. IX) мы получим значительно более сильную оценку для критического определителя этой области. Отметим интерпретацию этого неравенства в терминах теории форм. Пусть

$$L_j(\mathbf{x})=\sum_{1\leqslant i\leqslant n}c_{ji}x_i$$

— вещественные линейные формы n переменных $\mathbf{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ с определителем $\det(c_{ij})\neq 0$. Тогда найдется такая целая точка $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$, что

$$\left|\prod_j L_j(\mathbf{u})\right|\leqslant\frac{n!}{n^n}\left|\det(c_{ij})\right|.$$

Теорема о выпуклом теле Минковского дает возможность получить также оценку $\Delta(\mathscr{S})$ для множеств $\mathscr{S}$, не симметричных относительно $\mathbf{o}$. Приведем здесь, с любезного разрешения профессора Малера, его до сих пор не опубликованные [1]) изящные рассуждения относительно симплекса. Пусть $\mathscr{S}$ — открытый симплекс n-мерного пространства, содержащий точку $\mathbf{o}$. Зададим грани симплекса $\mathscr{S}$ уравнениями

$$L_j(\mathbf{x})=1\qquad(0\leqslant j\leqslant n),$$

где $L_j(\mathbf{x})$ — линейные формы; $\mathscr{S}$ — множество точек, удовлетворяющих неравенствам

$$L_j(\mathbf{x})<1.$$

Между линейными формами имеется одно нетривиальное соотношение, тождественное относительно $\mathbf{x}$, скажем

$$\sum_{0\leqslant j\leqslant n}\alpha_jL_j(\mathbf{x})=0,$$

где α_j — вещественные числа. Не умаляя общности, можно считать, что

$$\alpha_0>0.$$

Если бы, скажем, $\alpha_1\leqslant 0$, то множество $\mathscr{S}$ содержало бы бесконечный луч точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенству

$$L_0(\mathbf{x})\leqslant 0,\qquad L_j(\mathbf{x})=0\qquad(j\neq 0,\ 1),$$

[1]) Тем не менее они вместе с другими интересными результатами относительно несимметричных множеств приведены в мимеографированном курсе лекций, прочитанном Малером в 1950 г. в Боулдере (Колорадо, США).

что невозможно, так как $\mathscr{S}$ является симплексом. Поэтому $\alpha_1 > 0$ и вообще

$$\alpha_j > 0 \quad (0 \leqslant j \leqslant n).$$

Не умаляя общности, можно предполагать, что

$$\alpha_0 = 1 = \min_j \alpha_j, \tag{2}$$

откуда

$$L_0(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j L_j(\mathbf{x}), \tag{3}$$

где

$$\alpha_j \geqslant 1. \tag{4}$$

Покажем, что

$$\Delta(\mathscr{S}) = 2^{-n} V(\mathscr{C}), \tag{5}$$

где $V(\mathscr{C})$ — объем параллелепипеда

$$\mathscr{C} : |L_j(\mathbf{x})| < 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

С одной стороны, если Λ — решетка с определителем $d(\Lambda) < 2^{-n}V(\mathscr{C})$, то найдется точка $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ, лежащая в $\mathscr{C}$. Заменив, если нужно, $\mathbf{a}$ на $-\mathbf{a}$, мы всегда можем считать, что

$$L_0(\mathbf{a}) \leqslant 0,$$

а потому

$$L_j(\mathbf{a}) < 1 \quad (0 \leqslant j \leqslant n),$$

так что $\mathbf{a} \in \mathscr{S}$. Следовательно,

$$\Delta(\mathscr{S}) \geqslant 2^{-n} V(\mathscr{C}).$$

С другой стороны, мы покажем, что решетка [1]) M тех точек $\mathbf{a}$, для которых $L_j(\mathbf{a}) = u_j$ — целое число ($1 \leqslant j \leqslant n$), является допустимой для множества $\mathscr{S}$.

Действительно, если бы $\mathbf{a} \in \mathscr{S}$, то обязательно $u_j \leqslant 0$ ($1 \leqslant j \leqslant n$) и $\min u_j \leqslant -1$ при $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$. Но тогда в силу (4) мы имеем неравенство

$$L_0(\mathbf{a}) = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \geqslant 1,$$

так что вектор $\mathbf{a}$ не лежит в $\mathscr{S}$. Таким образом, $\mathbf{o}$ — единственная точка решетки M, лежащая в $\mathscr{S}$. Равенство (5) следует из того, что $d(\mathrm{M}) = 2^{-n}V(\mathscr{C})$.

Заметим, что $2^{-n}V(\mathscr{C}) = |d_0|^{-1}$, где d_0 — определитель n форм $L_1, \ldots, L_n$. В силу (3) и (4) d_0 — наименьший по абсолютной величине определитель n форм, выбранных из $n+1$ формы $L_0, \ldots, L_n$.

1) То, что это решетка, следует из теоремы VI. — *Прим. ред.*

Оценки $\Delta(\mathscr{S})$ для невыпуклых множеств $\mathscr{S}$ можно получить не только из теоремы II, но и из теоремы I. Пусть $\mathscr{R}$ — такое множество, что все разности

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_1 \in \mathscr{R}, \quad \mathbf{x}_2 \in \mathscr{R} \tag{6}$$

лежат в $\mathscr{S}$. В силу теоремы I, если $d(\Lambda) < V(\mathscr{R})$, то найдутся такие две точки $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathscr{R}$, что $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \Lambda$. По условию, наложенному на $\mathscr{R}$, $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \mathscr{S}$. Поэтому

$$\Delta(\mathscr{S}) \geqslant V(\mathscr{R}).$$

Конечно, если $\mathscr{T}$ — выпуклое симметричное множество, вписанное в $\mathscr{S}$, то можно было бы взять $\mathscr{R} = \frac{1}{2}\mathscr{T}$, но тогда мы получили бы ту же самую оценку $\Delta(\mathscr{S}) \geqslant 2^{-n}V(\mathscr{T})$, что и при применении теоремы II. Однако Морделл и Мюллендер в некоторых специальных случаях нашли такие множества $\mathscr{R}$, что $V(\mathscr{R})$ больше $2^{-n}V(\mathscr{T})$ для любого выпуклого симметричного множества $\mathscr{T}$, вписанного в $\mathscr{S}$. Увеличения оценок, как правило, сравнительно небольшие и достигаются за счет некоторого усложнения рассуждений. За более детальной информацией мы отсылаем читателя к работе Мюллендера [2] и к указанной там литературе.

В гл. VI будут получены в терминах $V(\mathscr{S})$ оценки сверху для $\Delta(\mathscr{S})$, применимые для любых множеств (теорема Минковского—Главки и связанные с ней вопросы).

§ 6. Метод Морделла

1. В этом параграфе мы изложим метод Морделла для нахождения точного значения $\Delta(\mathscr{S})$ точечных множеств $\mathscr{S}$, которые могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми. Метод применим главным образом к *звездным* телам. Класс этих множеств определяется следующими свойствами: (i) начало является внутренней точкой множества; (ii) любой луч, выходящий из начала, либо не пересекается с границей, либо имеет с ней только одну общую точку; иными словами, если $\mathbf{x}$ — любой вектор, отличный от нуля, то либо $t\mathbf{x} \in \mathscr{S}$ при всех $t \geqslant 0$, либо найдется такое t_0, что $t\mathbf{x}$ — внутренняя точка множества $\mathscr{S}$ при $t < t_0$, граничная точка — при $t = t_0$ и $t\mathbf{x}$ не лежит в $\mathscr{S}$ при $t > t_0$. Имеет место следующая довольно очевидная лемма.

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{S}$ — звездное тело; предположим, что существует постоянная Δ_0 со следующими двумя свойствами:*

(i) *каждая решетка Λ с определителем $d(\Lambda) = \Delta_0$ имеет отличную от* $\mathbf{o}$ *точку внутри или на границе множества $\mathscr{S}$;*

(ii) *существуют решетки* Λ_c *с определителями* $d(\Lambda_c) = \Delta_0$, *не имеющие отличных от* **o** *точек внутри* $\mathscr{S}$.

Тогда $\Delta(\mathscr{S}) = \Delta_0$. *Далее, если* $\mathscr{S}$ — *открытое множество* [1]), *то* Λ_c — *его критическая решетка.*

Доказательство. Предположим, что нашлась такая $\mathscr{S}$-допустимая решетка M, что $d(\mathrm{M}) < \Delta_0$. Пусть число $\gamma > 1$ определено равенством $\gamma^n d(\mathrm{M}) = \Delta_0$. Тогда решетка $\gamma\mathrm{M}$, состоящая из точек $\gamma\mathbf{x}$; $\mathbf{x} \in \mathrm{M}$, очевидно, не имеет точки ни внутри, ни на границе тела $\mathscr{S}$, что противоречит условию (i). Поэтому $\Delta(\mathscr{S}) \geqslant \Delta_0$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ решетка $(1+\varepsilon)\Lambda_c$ не имеет точек в $\mathscr{S}$; решетка Λ_c задана условием (ii). Поэтому $\Delta(\mathscr{S}) \leqslant (1+\varepsilon)^n \Delta_0$, и так как ε произвольно, то $\Delta(\mathscr{S}) \leqslant \Delta_0$. Таким образом, $\Delta(\mathscr{S}) = \Delta_0$. Справедливость последнего утверждения леммы теперь очевидна.

Лемма 4 доказана.

Когда в следующей главе будет дано описание звездных тел с помощью лучевых функций, лемма 4 займет свое место как часть более общей теории.

Теперь можно дать описание метода Морделла нахождения $\Delta(\mathscr{S})$ для данного звездного тела $\mathscr{S}$. Во-первых, для нахождения $\Delta(\mathscr{S})$ нам нужно разумно сделать приблизительный выбор Δ_0, в частности, такой, чтобы выполнялось свойство (ii) леммы 4. Если Δ_0 выбран правильно, то можно проверить свойство (i) и найти все Λ_c, упоминаемые в свойстве (ii). Для этого используется следующая общая процедура, детали которой, естественно, меняются при переходе от одного случая к другому. Для простоты предположим, что $\mathscr{S}$ — открытое множество. Пусть M есть $\mathscr{S}$-допустимая решетка с определителем $d(\mathrm{M}) = \Delta_0$. Тогда, если $\mathscr{T}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ — какой-либо набор замкнутых выпуклых симметричных множеств, каждое из которых имеет объем

$$V(\mathscr{T}_j) = 2^n \Delta_0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant r),$$

то в $\mathscr{T}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$ должны быть точки $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{o}$ решетки M. Так как M есть $\mathscr{S}$-допустимая решетка, то точки $\mathbf{p}_j$ должны лежать в множестве $\mathscr{R}_j$ точек множества $\mathscr{T}_j$, не лежащих в $\mathscr{S}$. Воспользовавшись тем, что $\mathbf{p}_j$ — точки решетки M определителя Δ_0, мы можем найти новые точки решетки M. Эти новые точки не могут лежать в $\mathscr{S}$, что дает нам дополнительную информацию о точках $\mathbf{p}_j$. В конце концов оказывается возможным показать, что M является одной из совокупности решеток Λ_c, каждая из которых имеет точки, лежащие на границе $\mathscr{S}$. Лемма 4 показывает, что $\Delta(\mathscr{S}) = \Delta_0$. Разумеется, эффективность метода зависит от подходящего подбора множеств $\mathscr{T}_j$ [2]).

[1]) Это значит, что $\mathscr{S}$ не содержит ни одной граничной точки. Минковский (и вслед за ним Малер) полагает звездное тело замкнутым. Мы не требуем этого.

[2]) Это описание метода Морделла, конечно, довольно туманно. Его содержание лучше выявляется на разбираемых ниже примерах. — *Прим. ред.*

и достаточно, чтобы замкнутый треугольник **ouv** *не содержал бы никаких точек* Λ, *кроме вершин.*

Доказательство. В силу леммы 5 очевидно, что условие необходимо; поэтому нам нужно лишь доказать его достаточность. Если в треугольнике **ouv** нет точек решетки Λ, отличных от вершин, то это же самое справедливо и для треугольников с вершинами

$$-\mathbf{u},\ \mathbf{o},\ \mathbf{v}-\mathbf{u} \tag{1}$$

и

$$-\mathbf{v},\ \mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{o}, \tag{2}$$

ибо, если, например, $\mathbf{x}\in\Lambda$ лежит в треугольнике (1), то $\mathbf{x}+\mathbf{u}\in\Lambda$ лежит в треугольнике **ouv**. Равным образом, не может быть точек решетки Λ в треугольниках, симметричных треугольникам **ouv**, $(-\mathbf{u},\ \mathbf{o},\ \mathbf{v}-\mathbf{u})$, $(-\mathbf{v},\ \mathbf{u}-\mathbf{v},\ \mathbf{o})$ относительно начала координат, так как если $\mathbf{x}\in\Lambda$, то и $-\mathbf{x}\in\Lambda$. Таким образом, в шестиугольнике $\mathscr{H}$ с вершинами $\pm\mathbf{u}$, $\pm\mathbf{v}$, $\pm(\mathbf{v}-\mathbf{u})$ нет точек решетки Λ, за исключением **o** и вершин. В силу теоремы II

$$d(\Lambda)\geqslant\frac{1}{4}V(\mathscr{H})=\frac{3}{4}|\det(\mathbf{u},\ \mathbf{v})|.$$

Но

$$|\det(\mathbf{u},\ \mathbf{v})|=Id(\Lambda),$$

где I — индекс точек **u**, **v** в Λ (п. 2 § 2 гл. I). Поэтому $I=1$, ибо I — целое число.

Лемма 6 доказана.

В пространстве размерности выше 2 аналог леммы 6 не имеет места.

Лемма 7. *Пусть* $\mathscr{L}$ — *открытый параллелограмм с центром* **o** *и площадью* $4d(\Lambda)$, *не содержащий точек решетки* Λ, *кроме* **o**. *Тогда решетка* Λ *имеет базис, образованный серединой одной из сторон параллелограмма* $\mathscr{L}$ *и некоторой точкой, лежащей на одной из другой пары параллельных сторон.*

Доказательство. Сделав соответствующее преобразование координат, можно полагать, что параллелограмм $\mathscr{L}$ задан неравенствами

$$\mathscr{L}:\ |X_1|<1,\quad |X_2|<1$$

и что $d(\Lambda)=1$. В силу теоремы III, в области $|X_1|\leqslant1$, $|X_2|\leqslant1$ всегда найдется точка решетки Λ, отличная от **o**. Таким образом, решетка Λ должна содержать точку

$$\mathbf{u}=(1,\ u_2),\qquad |u_2|<1.$$

Аналогично в Λ содержится точка

$$\mathbf{v}=(v_1,\ 1)\qquad |v_1|<1.$$

Так как $d(\Lambda)=1$, индекс пары $(\mathbf{u},\ \mathbf{v})$ в Λ дается формулой

$$I=|\det(\mathbf{u},\ \mathbf{v})|=1-u_2v_1,$$

но I — целое число и $|u_2v_1|<1$. Поэтому $I=1$ и либо $u_2=0$, либо $v_1=0$.

Лемма 7 доказана.

Лемма 8. *Пусть* Λ — *решетка с определителем* $d(\Lambda)$, *имеющая две точки, отличные от* **o**, *в замкнутом параллелограмме с вершинами* **o**, **a**, **b**, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ *и площадью* $d(\Lambda)$. *Тогда имеет место одна из трех возможностей:*

(i) *указанные две точки лежат на одной прямой с* **o**;

(ii) *одна из точек совпадает с* **a**, *а другая лежит на отрезке* **b**, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$;

(iii) *одна из точек совпадает с* **b**, *а другая лежит на отрезке* **a**, $\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Доказательство. Пусть эти точки имеют вид

$$\mathbf{p}=\pi_1\mathbf{a}+\pi_2\mathbf{b},\qquad \mathbf{q}=\varkappa_1\mathbf{a}+\varkappa_2\mathbf{b},$$

где

$$0\leqslant\pi_j\leqslant1,\qquad 0\leqslant\varkappa_j\leqslant1\qquad (j=1,\ 2).$$

Индекс I пары **p**, **q** в решетке Λ задан формулой

$$I=|\pi_1\varkappa_2-\pi_2\varkappa_1|.$$

Поэтому $\pi_1\varkappa_2-\pi_2\varkappa_1=0$ или ±1, откуда и вытекают три возможности, указанные в формулировке леммы.

Лемма 8 доказана.

3. Мы начнем с того, что проиллюстрируем метод Морделла на примере, в котором необходимость во вспомогательных рассуждениях сведена до минимума.

Пусть $\mathscr{K}$ — крестообразная двумерная область (см. рис. 5), определенная неравенствами

$$\min\{|x_1|,\ |x_2|\}<1,\quad \max\{|x_1|,\ |x_2|\}<\frac{3}{2}.$$

Покажем, что

$$\Delta(\mathscr{K})=2$$

и что единственными критическими решетками для $\mathscr{K}$ являются решетки Λ_1, Λ_2, Λ_3, заданные следующими базисами:

$$\Lambda_1=[(1,\ 1),\ (1,\ -1)],$$

$$\Lambda_2=\left[\left(\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)\right],$$

$$\Lambda_3=\left[\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right)\right].$$

Легко проверить, что эти решетки $\mathscr{K}$-допустимы, их определители равны 2, причем на границе $\mathscr{K}$ имеются точки каждой из решеток. Поэтому в силу леммы 4 достаточно показать, что любая $\mathscr{K}$-допустимая решетка с определителем $d(\Lambda)=2$ совпадает с одной из решеток Λ_1, Λ_2, Λ_3.

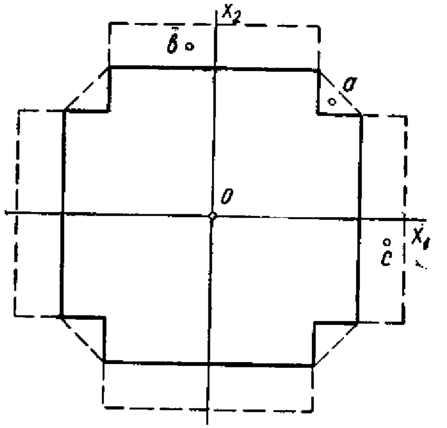

Рис. 5.

Начиная с этого места, будем считать, что $d(\Lambda)=2$ и что Λ есть $\mathscr{K}$-допустимая решетка.

Выпуклый симметричный восьмиугольник

$$\mathscr{S}_1: |x_1| < \frac{3}{2}, \ |x_2| < \frac{3}{2}, \ |x_1|+|x_2| < \frac{5}{2}$$

имеет площадь

$$\frac{17}{2} > 2^2 d(\Lambda),$$

а потому содержит точку $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ. Все точки восьмиугольника $\mathscr{S}_1$, не лежащие в $\mathscr{K}$, образуют четыре треугольника, для которых $|x_1| \geqslant 1$, $|x_2| \geqslant 1$ (см. рис. 5). В силу симметрии мы можем считать, что Λ содержит точку $\mathbf{a}=(a_1, a_2)$ с условиями

$$1 \leqslant a_1 < \frac{3}{2}, \quad 1 \leqslant a_2 < \frac{3}{2}, \quad a_1 + a_2 < \frac{5}{2}. \tag{1}$$

По теореме III в области

$$|x_1| < 1, \quad |x_2| \leqslant 2$$

найдется точка $\mathbf{b} \in \Lambda$, отличная от $\mathbf{o}$. Взяв, если нужно, вместо $\mathbf{b}$ точку $-\mathbf{b}$ и используя тот факт, что $\mathbf{b}$ не лежит в области $\mathscr{K}$,

можно предполагать, что координаты точки $\mathbf{b}$ удовлетворяют неравенствам

$$|b_1| \leqslant 1, \quad \frac{3}{2} \leqslant b_2 \leqslant 2. \tag{2}$$

Аналогично найдется точка $\mathbf{c} \in \Lambda$, удовлетворяющая неравенствам

$$\frac{3}{2} \leqslant c_1 \leqslant 2, \quad |c_2| < 1. \tag{3}$$

Покажем теперь, что точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ образуют базис решетки Λ. Имеем

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 1 \cdot \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \cdot 1 = 0$$

и

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) < \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{9}{2},$$

откуда

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2 \text{ или } 4,$$

ибо $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — число кратное $d(\Lambda)=2$.

Предположим сначала, если это возможно, что $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b})=4$, так что индекс $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ в Λ равен 2. Точки $k^{-1}\mathbf{a}$, $k^{-1}\mathbf{b}$ при любом целом числе $k>1$ лежат в $\mathscr{K}$, а потому не могут быть точками $\mathscr{K}$-допустимой решетки Λ. Таким образом, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ являются примитивными точками решетки Λ. Покажем, что $\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \in \Lambda$. Ввиду примитивности точки $\mathbf{a}$ существует базис вида $(\mathbf{a}, \mathbf{d})$, где $\det(\mathbf{a}, \mathbf{d}) = d(\Lambda) = 2$. Тогда при некоторых целых u и v $\mathbf{b} = u\mathbf{a} + v\mathbf{d}$; отсюда $v=2$, так как $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 4 = 2\det(\mathbf{a}, \mathbf{d})$. Поэтому u нечетно ввиду примитивности точки $\mathbf{b}$, откуда $\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \in \Lambda$, что и утверждалось. Но ясно, что $\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \in \mathscr{K}$, и мы получили противоречие. Значит,

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 2 = d(\Lambda); \tag{4}$$

отсюда получаем оценку

$$b_1 \geqslant -\frac{1}{2}, \tag{5}$$

ибо в противном случае мы имели бы противоречие

$$2 = a_1 b_2 - a_2 b_1 > 1 \cdot \frac{3}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2}.$$

Аналогично

$$\det(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = -2 = -d(\Lambda) \tag{6}$$

и

$$c_2 \geqslant -\frac{1}{2}. \tag{7}$$

Так как $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ — базис решетки Λ, то для некоторых целых чисел r и s мы имеем

$$\mathbf{c} = s\mathbf{a} + r\mathbf{b}.$$

Подставляя это равенство в (6) и используя (4), получим $r = -1$, откуда

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = s\mathbf{a}, \tag{8}$$

т. е. в координатах

$$b_1 + c_1 = sa_1, \quad b_2 + c_2 = sa_2. \tag{9}$$

Но в силу (1), (2), (3)

$$\frac{1}{2} < b_1 + c_1 < 3, \quad 1 \leqslant a_1 < \frac{3}{2},$$

так что имеются только две возможности:

$$s = 1 \quad \text{или} \quad s = 2,$$

которые мы рассмотрим отдельно.

1°. Случай $s = 1$. Из (1), (2), (3) и (9) [1]) получаем, что

$$b_1 < 0, \quad c_2 < 0; \tag{10}$$

из (4) — (6) выводим, что

$$\det(\mathbf{c}, \mathbf{b}) = 2,$$

т. е.

$$c_1 b_2 - c_2 b_1 = 2.$$

Но в силу (2) и (3) $c_1 \geqslant \frac{3}{2}$, $b_2 \geqslant \frac{3}{2}$, а в силу (5), (7) и (10) $0 > b_1 \geqslant -\frac{1}{2}$, $0 > c_2 \geqslant -\frac{1}{2}$. Поэтому равенство (8) справедливо только тогда, когда

$$c_1 = b_2 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = b_1 = -\frac{1}{2},$$

что дает нам решетку Λ_2.

2°. Случай $s = 2$. Теперь в силу (1), (2), (3) и (9) имеем

$$b_1 \geqslant 0, \quad c_2 \geqslant 0. \tag{11}$$

Рассмотрим точку решетки

$$(d_1, d_2) = \mathbf{d} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{c}).$$

[1]) Или же непосредственно из рис. 5 с учетом (9). — *Прим. ред.*

В силу (2), (3) и (11) получаем

$$0 \geqslant 2d_1 = b_1 - c_1 \geqslant -2, \quad -1 \leqslant d_1 \leqslant 0,$$
$$0 \leqslant 2d_2 = b_2 - c_2 \leqslant 2, \quad 0 \leqslant d_2 \leqslant 1.$$

Так как точка $\mathbf{d}$ не лежит в $\mathscr{K}$, то из этих неравенств выводим (см. рис. 5), что $d_1 = -1$, $d_2 = +1$, т. е. что $c_1 = b_2 = 2$, $b_1 = c_2 = 0$. Таким образом, $a_1 = a_2 = 1$ и $\Lambda = \Lambda_1$.

В доказательстве мы использовали симметрию фигуры $\mathscr{K}$. Заметим, что Λ_1 не меняется при преобразовании $\mathscr{K}$ в себя (изменением направления координат), а Λ_2 и Λ_3 могут переходить одна в другую.

Тем самым мы показали, что Λ является одной из решеток Λ_1, Λ_2, Λ_3, что и требовалось доказать.

4. В качестве второго примера на применение метода Морделла возьмем круг

$$\mathscr{D}: \ x_1^2 + x_2^2 < 1,$$

который уже рассматривался нами ранее другими методами (п. 2 § 5). Положим в лемме 4 $\Delta_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$. Решетки Λ_c заведомо существуют, ибо такими свойствами обладают решетки, имеющие базис, составленный из двух вершин правильного вписанного шестиугольника. Мы покажем, что если $d(\Lambda) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$, то Λ имеет в $\mathscr{D}$ точку, отличную от $\mathbf{o}$, за исключением того случая, когда $\Lambda = \Lambda_c$ [1]).

В круге

$$x_1^2 + x_2^2 < 2$$

наверняка найдутся точки решетки Λ, ибо его площадь $2\pi > 2^2 > 2^2 d(\Lambda)$. Такая точка должна лежать в кольце $1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 < 2$, ибо Λ есть $\mathscr{D}$-допустимая решетка. Таким образом, после подходящего поворота системы координат мы можем, не умаляя общности, предполагать, что в Λ найдется точка $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$, причем

$$p_2 = -\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{1}{2} \leqslant p_1 < \frac{3}{2}.$$

По теореме III в полуоткрытом параллелограмме

$$\mathscr{P}: \ |x_1 + 3^{-\frac{1}{2}} x_2| \leqslant 1, \ |x_2| < \sqrt{\frac{3}{4}}$$

[1]) Где Λ_c — только что указанная решетка. — *Прим. ред.*

с площадью $2\sqrt{3} = 4d(\Lambda)$ (см. рис. 6) найдется точка $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, отличная от $\mathbf{o}$. Единственная часть параллелограмма $\mathscr{L}$, не содержащаяся в $\mathscr{D}$, состоит из криволинейного треугольника $\mathscr{C}$, отрезанного от параллелограмма дугой круга, находящейся между точками $\mathbf{a} = (1, 0)$ и $\mathbf{b} = \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{3}{4}}\right)$, и симметричного ему относительно начала координат криволинейного треугольника. Не умаляя общности, можно считать, что $\mathbf{q} \in \mathscr{C}$.

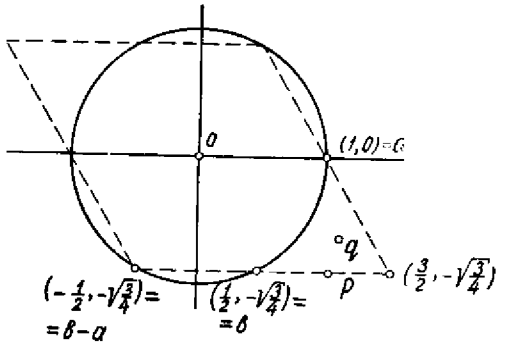

Рис. 6.

Ясно, что $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ — примитивные точки, так как если одна из этих точек имеет вид $k\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \Lambda$, $k > 1$ — целое число, то $\mathbf{u} \in \mathscr{D}$. Далее, $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, так как $p_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}}$, а $|q_2| < \sqrt{\frac{3}{4}}$. Применим теперь лемму 8. Так как $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ и $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ примитивны, то точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{o}$ не лежат на одной прямой. Поэтому либо $\mathbf{p} = \mathbf{b}$ и $\mathbf{q}$ лежит на отрезке $[\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$, либо $\mathbf{q} = \mathbf{a}$ и точка $\mathbf{p}$ лежит на отрезке $[\mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b})$. В силу симметрии можно полагать, что имеет место второй случай. Тогда точка решетки $\mathbf{p} - \mathbf{q} = \mathbf{p} - \mathbf{a}$ лежит на отрезке $[\mathbf{b} - \mathbf{a}, \mathbf{b})$. Единственной из этих точек, не лежащей в $\mathscr{D}$, является точка $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. Таким образом, $\mathbf{p} = \mathbf{b}$. Следовательно, решетка Λ порождается точками $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Так как поворот системы координат произволен, это завершает доказательство сформулированного результата.

5. В качестве последнего применения метода Морделла мы докажем один результат о бинарных кубических формах, заполняющий пробел, оставленный нами в § 5 гл. II. Здесь мы используем те же обозначения, что и в гл. II.

Теорема VII. *Пусть $f(x_1, x_2)$ — бинарная кубическая форма с дискриминантом $D < 0$. Найдутся такие целые числа $(u_1, u_2) = \mathbf{u} \neq \mathbf{o}$, что*

$$|f(\mathbf{u})| \leqslant \left|\frac{D}{23}\right|^{\frac{1}{4}}.$$

Равенство необходимо тогда и только тогда, когда f эквивалентна форме, кратной форме

$$x_1^3 - x_1 x_2^2 - x_2^3.$$

Это утверждение является основной частью теоремы IX гл. II (полного доказательства которой мы там не дали). Как мы уже указывали, форма $x_1^3 - x_1 x_2^2 - x_2^3$ подстановкой $x_1 \to x_1$, $x_2 \to -(x_1 + x_2)$ переводится в форму $x_1^3 + x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 + x_2^3$. Мы уже отмечали, что „исключительная" форма требует знака равенства, так как она имеет определитель $D = -23$ и представляет только отличные от нуля целые числа.

Прежде всего дадим геометрическую формулировку теоремы VII. В гл. II мы видели, что две любые бинарные кубические формы с отрицательным дискриминантом можно преобразовать друг в друга с помощью линейной вещественной замены переменных. В качестве стандартной формы представляется удобным взять форму $X_1^3 + X_2^3$ с дискриминантом -27. Тогда теорема VII эквивалентна следующему утверждению.

Теорема VII A. *Пусть Λ — решетка в двумерном пространстве векторов $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ с определителем*

$$d(\Lambda) = \left(\frac{23}{27}\right)^{\frac{1}{6}} = \Delta_0. \tag{1}$$

Тогда Λ содержит в области

$$\mathscr{S}: \quad |X_1^3 + X_2^3| < 1 \tag{2}$$

точку, отличную от $\mathbf{o}$. Исключение представляет только случай решетки Λ, имеющей такой базис $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, что равенство

$$(a_1 x_1 - b_1 x_2)^3 + (a_2 x_1 - b_2 x_2)^3 = x_1^3 - x_1 x_2^2 - x_2^3 \tag{3}$$

выполняется тождественно.

Эквивалентность теорем VII и VII A без особого труда устанавливается применением леммы 4 к звездному телу $\mathscr{S}$.

Доказательство теоремы VII A. Пусть $\Delta_0 = \left(\frac{23}{27}\right)^{\frac{1}{6}}$. Для обозначения точек и координат мы используем заглавные буквы, исключение представляет символ $\mathbf{o}$, который, как обычно, означает начало координат. Пусть Λ — решетка определителя $d(\Lambda) = \Delta_0$, не имеющая отличных от $\mathbf{o}$ точек в множестве $\mathscr{S}$. Множество $\mathscr{S}$ изображено на рис. 7.

Прежде всего, так как $\Delta_0 < 1$, в квадрате

$$|X_1| < 1, \quad |X_2| < 1 \tag{4}$$

заведомо найдется точка $\mathbf{P} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ. Точка $\mathbf{P}$ не лежит в $\mathscr{S}$, поэтому либо $\mathbf{P}$, либо $-\mathbf{P}$ находится в первой четверти, и, не умаляя общности, можно полагать, что

$$0 \leqslant P_1 < 1, \quad 0 \leqslant P_2 < 1. \tag{5}$$

Как видно из рис. 7 (это же легко показать на основании элементарных алгебраических соображений),

$$P_1 + P_2 \geqslant 1. \tag{6}$$

Предположим, что нашлись две такие точки $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$. Тогда их разность $\mathbf{P}'' = \mathbf{P} - \mathbf{P}'$ удовлетворяет условию (4). Поэтому, поменяв,

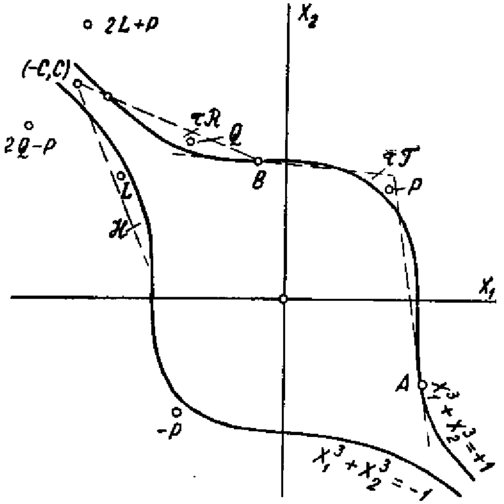

Рис. 7.

если нужно, местами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$, можно считать, что точка $\mathbf{P}''$ находится в первой четверти. Естественно, она может совпадать как с $\mathbf{P}$, так и с $\mathbf{P}'$. Таким образом, имеем

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}' + \mathbf{P}''.$$

Но теперь, так как ни $\mathbf{P}'$, ни $\mathbf{P}''$ не лежат в $\mathscr{S}$, мы имеем $P_1' + P_2' \geqslant 1$, $P_1'' + P_2'' \geqslant 1$. Отсюда получаем

$$P_1 + P_2 = (P_1' + P_2') + (P_1'' + P_2'') \geqslant 2,$$

что противоречит условию (5).

Итак, мы показали, что в квадрате (4) имеется ровно одна пара точек $\pm \mathbf{P}$ решетки Λ, отличных от $\mathbf{o}$. Начиная с этого места, $\mathbf{P}$ обозначает точку решетки Λ, удовлетворяющую условиям (5) и (6).

Теперь подробнее рассмотрим решетки, удовлетворяющие условию (3). Здесь мы должны воспользоваться аппаратом, который был развит в § 5 гл. II. Пусть A_1, B_1, A_2, B_2 — такие числа, что равенство

$$(A_1x_1 - B_1x_2)^3 + (A_2x_1 - B_2x_2)^3 = x_1^3 - x_1x_2^2 - x_2^3 = f_0(\mathbf{x}) \tag{7}$$

выполняется тождественно. Приравнивая гессианы обеих частей, получим

$$-9(A_1B_2 - A_2B_1)^2(A_1x_1 - B_1x_2)(A_2x_1 - B_2x_2) =$$
$$= \frac{1}{4}\left\{\left(\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2 - \frac{\partial^2 f_0}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f_0}{\partial x_2^2}\right\} = 3x_1^2 + 9x_1x_2 + x_2^2.$$

Линейные множители обеих частей должны совпадать; поэтому, поменяв, если нужно, местами A_1, B_1 и A_2, B_2, получим

$$A_1x_1 - B_1x_2 = A_1\left\{x_1 + \frac{9 - \sqrt{69}}{6}x_2\right\},$$
$$A_2x_1 - B_2x_2 = A_2\left\{x_1 + \frac{9 + \sqrt{69}}{6}x_2\right\},$$

откуда

$$B_1 = -\frac{9 - \sqrt{69}}{6}A_1, \quad B_2 = -\frac{9 + \sqrt{69}}{6}A_2.$$

Сравнение коэффициентов в обеих частях равенства (7) при x_1^3 и при $x_1^2x_2$ дает нам систему

$$A_1^3 + A_2^3 = 1,$$
$$(9 - \sqrt{69})A_1^3 + (9 + \sqrt{69})A_2^3 = 0,$$

из которой A_1^3 и A_2^3, а значит, и вещественные числа A_1, A_2, B_1, B_2 определяются однозначно.

Таким образом, имеются только две решетки указанного в теореме типа, а именно решетки соответственно с базисами

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2), \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2)$$

и

$$\tilde{\mathbf{A}} = (A_2, A_1), \quad \tilde{\mathbf{B}} = (B_2, B_1).$$

Приближенные значения указанных величин равны

$$A_1 \approx 1{,}014,\qquad A_2 \approx -0{,}347,$$
$$B_1 \approx -0{,}017,\qquad B_2 \approx 1{,}0005.$$

Фактически нам понадобятся только неравенства

$$\left.\begin{array}{ll} A_1 > 1, & A_2 < 0,\\ B_1 < 0, & B_2 > 1.\end{array}\right\} \qquad (8)$$

Знаки величин A_2, B_1 установить легко, остальное же вытекает из равенства

$$A_1^3 + A_2^3 = B_1^3 + B_2^3 = 1,$$

справедливого в силу (7).

Сравнение дискриминантов обеих частей равенства (7) дает

$$27\,(A_1B_2 - A_2B_1)^6 = 23,$$

откуда

$$A_1B_2 - A_2B_1 = \pm\,\Delta_0.$$

На самом деле имеет место знак $+$, но это уточнение нам не понадобится.

Пусть $\mathbf{X} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{x}$ — преобразование плоскости $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$ в плоскость $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, заданное равенствами

$$X_1 = A_1x_1 - B_1x_2,$$
$$X_2 = A_2x_1 - B_2x_2.$$

Тогда множество $\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathscr{S}$ точек $\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathbf{X}$, $\mathbf{X} \in \mathscr{S}$ задается неравенством

$$|x_1^3 - x_1x_2^2 - x_2^3| < 1.$$

Далее, $\boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda$ — решетка с определителем

$$d(\boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda) = |\det(\boldsymbol{\tau})|^{-1} d(\Lambda) = 1, \qquad (9)$$

(см. § 3 гл. I).

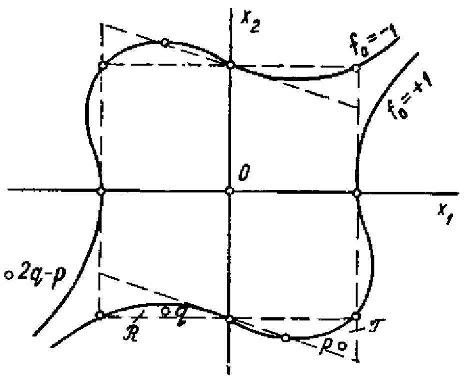

Рис. 8. $f_0 = x_1^3 - x_1x_2^2 - x_2^3$.

Область $\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathscr{S}$ изображена на рис. 8. Прямая $x_1 = 1$ касается кривой $x_1^3 - x_1x_2^2 - x_2^3 = 1$ при $x_2 = 0$ и пересекается с ней при $x_2 = -1$. Прямая $x_2 = 1$ имеет общие точки с кривой

$$x_1^3 - x_1x_2^2 - x_2^3 = -1$$

при $x_1 = 0,\ \pm 1$. Так как любая прямая имеет с кубической кривой не более трех общих точек, то легко видеть, что, за исключением небольшой области $\mathscr{R}$ при $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и симметричной ей относительно начала координат области $-\mathscr{R}$, весь единичный квадрат

$$\mathscr{L}:\ |x_1| < 1,\quad |x_2| < 1$$

лежит в множестве $\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathscr{S}$.

Предположим сначала, что $(1, 0) \in \boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda$. Так как $d(\boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda) = 1$, то в силу леммы 5 на прямой $x_2 = 1$ имеются точки решетки $\boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda$, находящиеся на единичном расстоянии одна от другой. Ввиду того что ни одна из этих точек не может лежать в $\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathscr{S}$, однозначно получаем, что $\boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda = \Lambda_0$, где Λ_0 — решетка целых точек. Но тогда $\Lambda = \boldsymbol{\tau}\Lambda_0$, т. е. Λ — одна из исключительных решеток, указанных в теореме. Аналогично если $(0, 1) \in \boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda$, то $\Lambda = \boldsymbol{\tau}\Lambda_0$. Поэтому, начиная с этого места, можно полагать, что

$$(1,\ 0) \notin \boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda,\qquad (0,\ 1) \notin \boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda. \qquad (10)$$

По лемме 7 или $(1, 0) \in \Lambda$, или $(0, 1) \in \Lambda$, или в квадрате $\mathscr{L}$ найдется точка $\mathbf{q} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ. Но первая и вторая возможности были уже исключены, и так как $\mathbf{q}$ не может лежать в $\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathscr{S}$, можно предполагать, что $\mathbf{q}$ находится в $\mathscr{R}$. Далее, $\mathbf{q}$ — примитивная точка. Действительно, пусть $\mathbf{q} = k\mathbf{q}_1$ при целом $k > 1$ и $\mathbf{q}_1 \in \boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda$; тогда $\mathbf{q}_1$ лежит в квадрате $|x_1| < \frac{1}{2}$, $|x_2| < \frac{1}{2}$, а значит, обязательно[1]) и в $\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathscr{S}$. Но это противоречит предположению, что решетка $\boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda$ является $\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathscr{S}$-допустимой. В силу леммы 8 точка $\mathbf{q}$ определена однозначно.

Нам нужна еще одна точка решетки $\boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda$. Касательной к кривой $f_0(\mathbf{x}) = 1$ в точке $(0, -1)$ является прямая

$$-x_1 - 3x_2 = 3.$$

Эта прямая пересекает $f_0(\mathbf{x}) = 1$ в точке $\left(\frac{9}{25},\ \frac{-28}{25}\right)$. Следовательно, все точки параллелограмма

$$\mathscr{L}':\quad |x_1| < 1,\quad |x_1 + 3x_2| \leqslant 3,$$

за исключением точек $\pm(0, 1)$, области $\mathscr{T}$ при $x_2 < 0$, $x_1 > 0$ и симметричной ей относительно начала координат области, лежат в множестве $\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathscr{S}$. Но по теореме III в $\mathscr{L}'$ найдется точка $\mathbf{p}$ решетки $\boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda$, а так как $\boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda$ является $\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathscr{S}$-допустимой решеткой,

[1]) Действительно, тогда $|f_0(\mathbf{q}_1)| \leqslant |x_1|^3 + |x_1| \cdot |x_2|^2 + |x_2|^3 < \frac{3}{8} < 1$. В дальнейшем мы не будем приводить подробно столь тривиальные вычисления.

то, учитывая (10), можно предполагать, что $\mathbf{p} \in \mathcal{T}$. Точка $\mathbf{p}$ примитивна, так как если бы при целом $k > 1$, $\mathbf{p} = k\mathbf{p}_1$, то $\mathbf{p}_1$ находилась бы в прямоугольнике $|x_1| \leqslant \frac{1}{2}$, $|x_2| \leqslant \frac{2}{3}$, откуда $\mathbf{p}_1 \in \tau^{-1}\mathcal{S}$. Лемма 8 показывает, что точка $\mathbf{p}$ определена однозначно.

Очевидно, что $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$ лежит в области $x_1 < 0$, $x_2 > -1$. Так как единственной точкой решетки $\tau^{-1}\Lambda$, которая лежит в $\mathcal{R}$, является точка $\mathbf{q}$, то $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$ лежит в области $f_0(\mathbf{x}) \leqslant -1$.

Теперь мы покажем, что $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ образуют базис решетки Λ. Имеем

$$0 < p_1 < 1, \quad -\frac{4}{3} < p_2 < -1 \tag{11}$$

и

$$-1 < q_1 < 0, \quad -1 < q_2 < 0, \tag{12}$$

откуда

$$\det(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = p_1q_2 - q_1p_2 \begin{cases} < 0, \\ > -1 \cdot 1 - 1 \cdot \frac{4}{3} > -3. \end{cases}$$

Так как $\det(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ является кратным $\det(\tau^{-1}\Lambda) = 1$, имеются только следующие две возможности:

$$\det(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -1$$

или

$$\det(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -2.$$

В первом случае точки $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ образуют базис. Пусть теперь $\det(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -2$. Так как $\mathbf{p}$ — примитивная точка, существует базис $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$, где $\det(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \pm d(\Lambda) = \pm 1$. Пусть для некоторых целых u и v

$$\mathbf{q} = u\mathbf{p} + v\mathbf{r};$$

тогда

$$\det(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = v \det(\mathbf{p}, \mathbf{r}),$$

так что $v = \pm 2$. Число u нечетно, так как $\mathbf{q}$ — примитивная точка. Поэтому

$$\mathbf{t} = \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \in \tau^{-1}\Lambda,$$

но тогда в силу (11) и (12)

$$0 < t_1 < 1, \quad -\frac{2}{3} < t_2 < 0.$$

Тривиальное вычисление показывает, что $|f_0(\mathbf{t})| < 1$, так что $\mathbf{t} \in \tau^{-1}\mathcal{S}$. Но это противоречит предположению.

Итак, решетка $\tau^{-1}\Lambda$ имеет базис $\mathbf{p} \in \mathcal{T}$, $\mathbf{q} \in \mathcal{R}$. Точка $2\mathbf{q} - \mathbf{p}$ лежит в области $f_0(\mathbf{x}) \leqslant -1$. В $\mathcal{T}$ и $\mathcal{R}$ других точек решетки $\tau^{-1}\Lambda$ нет.

Теперь нам нужно преобразовать полученные результаты относительно решетки $\tau^{-1}\Lambda$ в результаты относительно решетки Λ. Пусть

$$\mathbf{A} = (A_1, A_2), \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2).$$

Область $\tau\mathcal{R}$ ограничена кривой

$$X_1^3 + X_2^3 = 1,$$

являющейся образом кривой $f_0(\mathbf{x}) = 1$, и отрезком, соединяющим точки

$$\tau(0, -1) = \mathbf{B}, \quad \tau(-1, -1) = -\mathbf{A} + \mathbf{B},$$

так что приблизительно имеет вид, указанный на рис. 7. Точка

$$\mathbf{Q} = \tau\mathbf{q}$$

лежит в $\tau\mathcal{R}$.

Аналогично область $\tau\mathcal{T}$ ограничена кривой $X_1^3 + X_2^3 = 1$ и касательными к ней в точках $\tau(0, -1) = \mathbf{B}$ и $\tau(1, 0) = \mathbf{A}$. Покажем, что область $\tau\mathcal{T}$ лежит в квадрате

$$0 < X_1 < 1, \quad 0 < X_2 < 1. \tag{13}$$

Действительно, так как $B_2 > 1$, то тангенс наклона касательной к кривой $X_1^3 + X_2^3 = 1$ в точке $\mathbf{B}$ отрицателен, поэтому касательная пересекается с кривой $X_1^3 + X_2^3 = 1$ внутри квадрата (13). Ввиду того что множество $\tau\mathcal{T}$ лежит ниже этой касательной, его точки удовлетворяют неравенству $X_2 < 1$. Точно так же, поскольку $A_1 > 1$, точки множества $\tau\mathcal{T}$ удовлетворяют неравенству $X_1 < 1$. Очевидно, эти же точки удовлетворяют неравенствам $X_1 > 0$, $X_2 > 0$.

Но, как мы заметили раньше, в квадрате (13) имеется только одна точка $\mathbf{P}$ решетки Λ. Ввиду того что $\tau\mathbf{p} \in \tau\mathcal{T}$, имеет место равенство

$$\tau\mathbf{p} = \mathbf{P}.$$

Итак, в $\tau\mathcal{R}$ имеется только одна точка $\mathbf{Q} \in \Lambda$. Эта точка $\mathbf{Q}$ вместе с единственной точкой $\mathbf{P}$ решетки Λ, лежащей в квадрате (13), образует базис решетки Λ. Точка $2\mathbf{Q} - \mathbf{P}$ лежит в области $X_1^3 + X_2^3 \leqslant -1$.

Пусть $\mathcal{H}$ — зеркальный образ области $\tau\mathcal{R}$ относительно прямой $X_1 + X_2 = 0$. В силу симметрии в $\mathcal{H}$ имеется ровно одна точка $\mathbf{L} \in \Lambda$; эта точка вместе с точкой $-\mathbf{P}$ образует базис решетки Λ, причем точка $2\mathbf{L} + \mathbf{P}$ лежит в области $X_1^3 + X_2^3 \geqslant 1$.

Но тогда каждая точка треугольника $\mathbf{oLQ}$ лежит в одной из областей $\mathcal{S}$, $\tau\mathcal{R}$ и $\mathcal{H}$. По предположению в $\mathcal{S}$ точек решетки Λ нет. Поэтому единственными точками решетки Λ, лежащими в $\tau\mathcal{R}$ и $\mathcal{H}$, являются соответственно точки $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{L}$. Таким образом, в силу леммы 6 точки $\mathbf{Q}$, $\mathbf{L}$ образуют базис решетки Λ.

У нас имеются три базиса $(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$, $(\mathbf{Q}, \mathbf{L})$ и $(\mathbf{L}, -\mathbf{P})$ решетки Λ. Нам нужно изучить связи между этими базисами. Имеем

$$\det(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \det(\mathbf{Q}, \mathbf{L}) = \det(\mathbf{L}, -\mathbf{P}) = d(\Lambda),$$

так как эти определители равны $\pm d(\Lambda)$ и, очевидно, положительны. Пусть

$$\mathbf{P} = u\mathbf{Q} + v\mathbf{L},$$

тогда

$$\det(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = v \det(\mathbf{L}, \mathbf{Q}),$$

$$\det(\mathbf{P}, \mathbf{L}) = u \det(\mathbf{P}, \mathbf{Q}),$$

откуда

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} - \mathbf{L}.$$

Мы получили наконец противоречие, так как последнее равенство можно переписать так:

$$2\mathbf{Q} - \mathbf{P} = 2\mathbf{L} + \mathbf{P},$$

а, как было показано, эта точка лежит одновременно в $X_1^3 + X_2^3 \geqslant 1$ и $X_1^3 + X_2^3 \leqslant -1$. Это противоречие показывает, что никаких других $\mathscr{S}$-допустимых решеток с определителями $d(\Lambda) = \Delta_0$, кроме указанных в формулировке теоремы, не существует.

Теорема VIIA, а вместе с ней и теорема VII доказаны.

Мы показали даже больше. Пусть прямая, проходящая через точки $\mathbf{B}$ и $-\mathbf{A}+\mathbf{B}$ (она является частью границы области $\tau\mathscr{R}$), пересекается с прямой $X_1 + X_2 = 0$ в точке $(-c, c)$. Тогда, очевидно, наши рассуждения показывают, что в ограниченной области

$$|X_1^3 + X_2^3| < 1, \quad \max\{|X_1|, |X_2|\} \leqslant c$$

имеются точки любой решетки Λ с определителем $d(\Lambda) \leqslant \Delta_0$, исключая тот случай, когда Λ является одной из двух критических решеток. Иными словами, область $|X_1^3 + X_2^3| < 1$ ограниченно приводима (на самом деле вполне приводима) в смысле § 7 гл. V.

§ 7. Представление целых чисел квадратичными формами[1]

1. В этом параграфе мы несколько отклонимся от основной темы нашей книги, чтобы получить ряд результатов арифметической теории квадратичных форм, которые можно очень легко доказать методами геометрии чисел. Главную роль здесь будет играть следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть n, m, $k_1, \ldots, k_m$ — положительные целые числа; a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n)$ — целые числа. Множество Λ точек $\mathbf{u}$ с целыми координатами, удовлетворяющими*

[1]) Материал, изложенный в этом параграфе, в дальнейшем не используется

сравнениям[1])

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \equiv 0 \ (k_i), \qquad 1 \leqslant i \leqslant m,$$

является решеткой с определителем

$$d(\Lambda) \leqslant k_1 \cdot \ldots \cdot k_m.$$

Доказательство. Тот факт, что Λ — решетка, вытекает, например, из теоремы VI. Две точки $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ решетки Λ_0 всех целочисленных векторов находятся в одном классе относительно Λ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \quad (k_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant m.$$

Поэтому индекс I решетки Λ в Λ_0, т. е. число классов смежности, не превосходит $\prod_{i=1}^{m} k_i$, откуда

$$d(\Lambda) = I\, d(\Lambda_0) \leqslant \prod_{i=1}^{m} k_i$$

(ср. с леммой 1 гл. I).

Лемма 9 доказана.

2. В качестве первого примера покажем, что каждое простое число $p \equiv 1$ (4) является суммой квадратов двух целых чисел. Действительно, хорошо известно, что имеется такое целое число i, что

$$i^2 + 1 \equiv 0 \quad (p).$$

Множество Λ тех пар целых чисел (u_1, u_2), для которых

$$u_2 \equiv i u_1 \quad (p), \tag{1}$$

является в силу леммы 9 решеткой с определителем $d(\Lambda) \leqslant p$. Следовательно, по теореме Минковского о выпуклом теле в круге

$$\mathscr{D}: \ x_1^2 + x_2^2 < 2p$$

площади $V(\mathscr{D}) = 2\pi p > 2^2 d(\Lambda)$ заведомо найдется точка решетки Λ (отличная от $\mathbf{o}$). Таким образом, найдутся целые числа u_1, u_2, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие сравнению (1) и неравенству

$$u_1^2 + u_2^2 < 2p.$$

Но из (1) выводим

$$u_1^2 + u_2^2 \equiv u_1^2(1 + i^2) \equiv 0 \quad (p),$$

откуда $u_1^2 + u_2^2 = p$, что и требовалось доказать.

[1]) Запись $a \equiv b$ (k) обозначает, что $a - b$ делится на k.

Этот метод легко можно обобщить так, чтобы показать, что положительное целое число, не делящееся на простое число $p\equiv -1\ (4)$, является суммой двух квадратов.

3. В качестве второго примера мы покажем, что каждое положительное целое число m представимо в виде суммы четырех квадратов:

$$m=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2$$

с целыми числами u_1, u_2, u_3, u_4. Не умаляя общности, можно полагать, что m не делится на квадрат, отличный от 1, так что

$$m=p_1\cdot\ldots\cdot p_g,$$

где $p_1, \ldots, p_g$ — различные простые числа. Покажем, что для любого простого числа p найдутся такие целые числа a_p, b_p, что

$$a_p^2+b_p^2+1\equiv 0 \quad (p). \tag{1}$$

Действительно, когда p нечетно, каждая из совокупностей $\frac{1}{2}(p+1)$ чисел

$$a^2 \qquad \left(0\leqslant a<\frac{1}{2}p\right) \tag{2}$$

и

$$-1-b^2 \qquad \left(0\leqslant b<\frac{1}{2}p\right) \tag{3}$$

является множеством несравнимых по модулю p чисел. Ввиду того что имеется только p классов по модулю p, должно найтись некоторое целое число c, сравнимое (по модулю p) с элементом каждого из множеств (2) и (3), т. е. $a_p^2\equiv c\equiv -1-b_p^2$, откуда $a_p^2+b_p^2+1\equiv 0\ (p)$. Если $p=2$, то годятся $a_2=1$, $b_2=0$.

Рассмотрим теперь (см. Давенпорт [11]) решетку целых точек $\mathbf{u}=(u_1, \ldots, u_4)$, координаты которых удовлетворяют $2g$ сравнениям

$$\left.\begin{aligned} u_1&\equiv a_pu_3+b_pu_4 \quad (p),\\ u_2&\equiv b_pu_3-a_pu_4 \quad (p)\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

при $p=p_1, \ldots, p_g$. По лемме 9 эти точки образуют решетку Λ с определителем

$$d(\Lambda)\leqslant p_1^2\cdot\ldots\cdot p_q^2=m^2.$$

Таким образом, в множестве

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2<2m$$

с объемом

$$\frac{1}{2}\pi^2(2m)^2>2^4m^2\geqslant 2^4 d(\Lambda)$$

найдется точка решетки, отличная от $\mathbf{o}$. Пусть $\mathbf{u}$ — такая точка; тогда

$$0<u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2<2m,$$

и в силу (1) и (4)

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2\equiv(a_p^2+b_p^2+1)\,u_3^2+(a_p^2+b_p^2+1)\,u_4^2\equiv 0\ (p)$$

при $p=p_1, \ldots, p_g$, т. е.

$$u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2\equiv 0 \ (m).$$

Это вместе с только что полученным неравенством доказывает утверждение.

4. Знаменитая теорема Лежандра утверждает, что тернарная квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3)$ с рациональными коэффициентами представляет 0 в том случае, когда выполняются очевидные необходимые условия, выраженные сравнениями. Следуя Давенпорту и Холлу [1] и Морделлу [12], мы покажем это в одном частном случае (к которому на самом деле можно свести с помощью простых рассуждений и общий случай).

Пусть

$$f(\mathbf{x})=a_1x_1^2+a_2x_2^2+a_3x_3^2,$$

где a_1, a_2, a_3 — бесквадратные[1]) попарно взаимно простые целые числа, так что $a_1a_2a_3$ бесквадратно. Пусть выполняются следующие два условия:

(i) имеются такие целые числа A_1, A_2, A_3, что

$$a_1+A_3^2a_2\equiv 0\ (a_3),\quad a_2+A_1^2a_3\equiv 0\ (a_1),\quad a_3+A_2^2a_1\equiv 0\ (a_2),$$

и

(ii) найдутся такие целые числа v_1, v_2, v_3, не делящиеся одновременно на 2, что

$$a_1v_1^2+a_2v_2^2+a_3v_3^2\equiv 0\ (2^{2+\lambda}),$$

где λ равно 1 или 0 в зависимости от четности или нечетности $a_1a_2a_3$.

Покажем, что тогда существуют такие целые числа $(u_1, u_2, u_3)=\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$, что $f(\mathbf{u})=0$.

Пусть

$$|a_1a_2a_3|=2^{\lambda}p_1\cdot\ldots\cdot p_g,$$

где $p_1, \ldots, p_g$ — различные нечетные простые числа; λ равно 1 или 0. В качестве решетки Λ возьмем целые векторы $\mathbf{u}=(u_1, u_2, u_3)$, удовлетворяющие следующим условиям.

[1]) То есть не делящиеся на квадрат целого числа, большего 1.—*Прим. ред.*

(I) Пусть p — одно из чисел $p_1, \ldots, p_g$. В силу симметрии можно считать, что $a_3 \equiv 0\ (p)$. Мы требуем, чтобы

$$u_2 \equiv A_3 u_1\ (p).$$

Тогда

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 \equiv a_1 u_1^2 + a_2 u_1^2 \equiv (a_1 + a_2 A_3^2)\, u_1^2 \equiv 0\ (p).$$

(II_α) Предположим, что $\lambda = 0$, т. е. все числа a_1, a_2, a_3 нечетны. Для любого целого v имеем

$$v^2 \equiv 0 \text{ или } 1\ (2^2).$$

Тогда по условию (ii) точно одно из чисел v_1, v_2, v_3, скажем v_3, должно быть четным, и мы имеем

$$0 \equiv a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2 + a_3 v_3^2 \equiv a_1 + a_2\ (2^2).$$

Требуем выполнения следующих двух сравнений:

$$u_1 \equiv u_2\ (2),$$
$$u_3 \equiv 0\ (2);$$

тогда

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 \equiv a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 \equiv 0\ (2^2).$$

(II_β) Предположим, что $\lambda = 1$, так что одно из чисел a_1, a_2, a_3, например a_3, является четным. Тогда $a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2$ четное, а потому v_1 и v_2 являются одновременно либо четными, либо нечетными. Если бы v_1, v_2 были четными, то число

$$a_3 v_3^2 \equiv -a_1 v_1^2 - a_2 v_2^2 \quad (2^3)$$

делилось бы на 2^2, откуда вытекает, что v_3 — четное (в противоречии с предположением (ii)). Таким образом, v_1, v_2 в (ii) должны быть нечетными и

$$0 \equiv a_1 v_1^2 + a_2 v_2^2 + a_3 v_3^2 \equiv a_1 + a_2 + a_3 v_3^2 \quad (2^3),$$

так как если v нечетно, то $v^2 \equiv 1\ (2^3)$. Требуем выполнения следующих сравнений:

$$u_1 \equiv u_2 \quad (2^2),$$
$$u_3 \equiv v_3 u_1\ (2);$$

тогда, как легко проверить,

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 \equiv 0\ (2^3).$$

В любом из двух случаев решетка Λ имеет определитель

$$d(\Lambda) \leqslant 2^{\lambda+2} p_1 \cdot \ldots \cdot p_g = 4\,|a_1 a_2 a_3|,$$

а из сравнений получаем

$$a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 \equiv 0 \quad \left(\mathrm{mod}\ 2^{\lambda+2} p_1 \cdot \ldots \cdot p_g = 4\,|a_1 a_2 a_3|\right).$$

По теореме Минковского о выпуклом теле в эллипсоиде

$$\mathscr{E}: \quad |a_1|\, x_1^2 + |a_2|\, x_2^2 + |a_3|\, x_3^2 < 4\,|a_1 a_2 a_3|$$

объема

$$V(\mathscr{E}) = \frac{\pi}{3} \cdot 2^5\, |a_1 a_2 a_3| > 2^3 d(\Lambda)$$

имеется отличная от $\mathbf{o}$ точка решетки. Пусть $\mathbf{u} \neq \mathbf{o}$ — точка решетки, лежащая в эллипсоиде $\mathscr{E}$. Тогда $a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 = 0$, так как это целое число делится на $4 a_1 a_2 a_3$, в то время как

$$|a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2| \leqslant |a_1|\, u_1^2 + |a_2|\, u_2^2 + |a_3|\, u_3^2 < 4\,|a_1 a_2 a_3|.$$

Тем самым мы доказали теорему Лежандра.

В заключение сделаем два замечания. Во-первых, очевидное необходимое условие разрешимости уравнения $a_1 u_1^2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_3^2 = 0$ заключается в том, чтобы числа a_1, a_2, a_3 не имели один и тот же знак. Этим условием мы совсем не пользовались. Следовательно, это условие должно вытекать из других. Читатель легко проверит, что это можно доказать с помощью квадратичного закона взаимности.

Во-вторых, мы доказали не просто существование решения, мы показали, что имеется решение, удовлетворяющее неравенству

$$|a_1|\, u_1^2 + |a_2|\, u_2^2 + |a_3|\, u_3^2 < 4\,|a_1 a_2 a_3|.$$

Используя вместо теоремы II точную теорему III гл. II, правую часть здесь можно улучшить до $2^{5/3}|a_1 a_2 a_3|$. Это легко может проверить читатель.

Г Л А В А IV

ЛУЧЕВЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Введение

1. В этой главе мы изложим некоторые понятия, которые окажутся полезными в дальнейшем.

2. Функция $F(\mathbf{x})$ вектора $\mathbf{x}$ называется *лучевой* функцией, если

(i) $F(\mathbf{x})$ неотрицательна, т. е. $F(\mathbf{x}) \geqslant 0$;
(ii) $F(\mathbf{x})$ непрерывна;
(iii) $F(\mathbf{x})$ однородна, т. е. для любого вещественного числа $t \geqslant 0$

$$F(t\mathbf{x}) = tF(\mathbf{x}).$$

Множество $\mathscr{S}$, определенное неравенством

$$\mathscr{S}: \quad F(\mathbf{x}) < 1, \tag{1}$$

является звездным телом в смысле предыдущей главы, т. е. начало $\mathbf{o}$ является внутренней точкой множества $\mathscr{S}$ и либо луч

$$t\mathbf{x}_0 \quad (0 \leqslant t < \infty)$$

целиком лежит в $\mathscr{S}$ (что имеет место, когда $F(\mathbf{x}_0) = 0$), либо найдется такое вещественное число $t_0 = \{F(\mathbf{x}_0)\}^{-1} > 0$, что $t\mathbf{x}_0$ является внутренней точкой множества $\mathscr{S}$ при $t < t_0$ и внешней при $t > t_0$. В § 2 мы исследуем эту связь и покажем, что верно обратное утверждение: каждое звездное тело $\mathscr{S}$ определяет такую лучевую функцию $F(\mathbf{x})$, а множество (1) является множеством внутренних точек тела $\mathscr{S}$. Многие (хотя и не все) из точечных множеств, представляющих интерес в геометрии чисел, являются звездными телами. Ввиду этого понятие лучевой функции играет важную роль.

Большинство проблем, рассмотренных в гл. II, связано со звездными телами. Легко выписать соответствующие лучевые функции. Если, например, $f(\mathbf{x})$ — положительно определенная или полуопределенная[1]) форма, то множество

$$f(\mathbf{x}) < 1$$

соответствует лучевой функции

$$F(\mathbf{x}) = \{f(x)\}^{1/r},$$

---

[1]) Под полуопределенной формой мы понимаем такую форму $f(\mathbf{x})$, что $f(\mathbf{x}) \geqslant 0$ при всех $\mathbf{x}$, но при некоторых $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ может быть $f(\mathbf{x}) = 0$.

множества $\mathscr{K}$, т. е. такую плоскость

$$\pi:\ p_1x_1+\ \dots\ +p_nx_n=k,$$

проходящую через $\mathbf{a}$, что множество $\mathscr{K}$ либо целиком лежит по одну сторону плоскости π, либо полностью лежит в π, скажем

$$p_1x_1+\ \dots\ +p_nx_n\leqslant k \quad (\text{при всех } \mathbf{x}\in\mathscr{K}).$$

Очевидно, что если $\mathscr{K}$ имеет в точке $\mathbf{a}$ касательную плоскость, то она и является единственной опорной плоскостью. Но опорные плоскости существуют даже тогда, когда не существует касательной плоскости, и могут определяться неоднозначно, например, если $\mathbf{a}$ является вершиной квадрата $|x_1|<1$, $|x_2|<1$.

При рассмотрении опорных плоскостей имеет смысл ввести понятие тела, взаимного данному выпуклому телу. Это понятие, во всяком случае, понадобится нам в гл. VIII и XI. Любую плоскость π, не проходящую через начало координат, можно задать уравнением вида

$$\pi:\ y_1x_1+\ \dots\ +y_nx_n=1,$$

т. е. сопоставить точке $\mathbf{y}=(y_1,\ \dots,\ y_n)$ n-мерного пространства. Оказывается, что точки $\mathbf{y}$, соответствующие плоскостям π, не пересекающимся[1]) с $\mathscr{K}$, сами образуют выпуклое множество $\mathscr{K}^*$, называемое взаимным с $\mathscr{K}$. Более того, связь между $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}^*$ обратима в том смысле, что $\mathscr{K}$ может быть получено из $\mathscr{K}^*$ той же процедурой, какой множество $\mathscr{K}^*$ было получено из $\mathscr{K}$. Строго говоря, $\mathscr{K}^{**}=(\mathscr{K}^*)^*$ совпадает с $\mathscr{K}$, за исключением, быть может, точек границы; лучевые функции тел $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}^{**}$ совпадают.

Примером пары взаимных тел может служить обобщенный куб

$$\mathscr{C}:\quad \max|x_j|\leqslant 1$$

и обобщенный октаэдр

$$\mathscr{D}:\quad \sum|y_j|\leqslant 1.$$

Легко видеть, что плоскость $\sum y_jx_j=1$ при фиксированном $\mathbf{y}$ может содержать внутреннюю точку куба $\mathscr{C}$ только тогда, когда точка $\mathbf{y}$ не лежит в $\mathscr{D}$, и обратно. Взаимные множества мы рассмотрим в § 4.

Теория выпуклых тел весьма обширна; мы же изложим только то, что имеет отношение к геометрии чисел. За подробностями можно отослать читателя к обзору Боннесена и Фенхеля [1] или к монографии Эгглстона [1].

[1]) Мы говорим, что два точечных множества пересекаются, если они имеют хотя бы одну общую точку.

§ 2. Общие лучевые функции

Установим теперь связь между лучевыми функциями и звездными телами, о которой мы упоминали выше.

Теорема I. (A) *Для любой лучевой функции $F(\mathbf{x})$ множество точек $\mathbf{x}$ с условием*

$$\mathscr{S}:\ F(\mathbf{x})<1$$

является открытым звездным телом. Границей множества $\mathscr{S}$ является множество точек $\mathbf{x}$, для которых $F(\mathbf{x})=1$, а точки, для которых $F(\mathbf{x})>1$, являются внешними для множества $\mathscr{S}$ (т. е. имеют окрестность, не пересекающуюся с $\mathscr{S}$).

(B) *Обратно, любое звездное тело $\mathscr{T}$ определяет единственную лучевую функцию $F(\mathbf{x})$, для которой точки $\mathbf{x}$, такие, что $F(\mathbf{x})<1$, образуют множество $\mathscr{S}$ внутренних точек тела $\mathscr{T}$.*

Доказательство. Заметим, что если звездные тела $\mathscr{T}_1$ и $\mathscr{T}_2$ имеют одно и то же множество внутренних точек, то они определяют одну и ту же лучевую функцию $F(\mathbf{x})$. Однако лучевая функция определяет только одно открытое звездное тело, а именно $F(\mathbf{x})<1$, и одно замкнутое звездное тело $F(\mathbf{x})\leqslant 1$. Различные лучевые функции F_1, F_2 всегда соответствуют различным звездным телам. Действительно, если F_1 и F_2 различны, то при некотором $\mathbf{x}_0$ $F_1(\mathbf{x}_0)\neq$ $\neq F_2(\mathbf{x}_0)$, например $F_1(\mathbf{x}_0)<F_2(\mathbf{x}_0)$. Тогда найдется такое t, что

$$F_1(t\mathbf{x}_0)<1<F_2(t\mathbf{x}_0),$$

так что точка $t\mathbf{x}_0$ лежит в одном звездном теле и не лежит в другом.

Доказательство части (A) теоремы почти очевидно. В силу непрерывности функции $F(\mathbf{x})$ при $F(\mathbf{x}_0)<1$ найдется окрестность

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|<\eta$$

точки $\mathbf{x}_0$, лежащая в $\mathscr{S}$. Поэтому $\mathbf{x}_0$ является внутренней точкой множества $\mathscr{S}$. Здесь, как обычно,

$$|\mathbf{x}|=(x_1^2+\ \dots\ +x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогично если $F(\mathbf{x}_0)>1$, то найдется окрестность точки $\mathbf{x}_0$, не пересекающаяся с $\mathscr{S}$. И наконец, если $F(\mathbf{x}_0)=1$, то любая окрестность точки $\mathbf{x}_0$ содержит точки вида $t\mathbf{x}_0$ как при $t>1$, так и при $t<1$. Для этих точек соответственно $F(t\mathbf{x}_0)>1$ и $F(t\mathbf{x}_0)<1$, так что $\mathbf{x}_0$ является граничной точкой множества $\mathscr{S}$.

Перейдем теперь к доказательству части (B). Для произвольного звездного тела $\mathscr{T}$ определим функцию $F(\mathbf{x})$ следующим образом:

(α) если при всех $t>0$, $t\mathbf{x}\in\mathscr{T}$ то $F(\mathbf{x})=0$, в частности $F(\mathbf{o})=0$;

(β) если при некоторых $t > 0$ точка $t\mathbf{x}$ не лежит в $\mathcal{T}$, то в силу определения звездного тела найдется такое число $t_0 = t_0(\mathbf{x}) > 0$, что точка $t\mathbf{x}$ является внутренней точкой множества $\mathcal{S}$ при $t < t_0$ и внешней при $t > t_0$. В этом случае положим

$$F(\mathbf{x}) = t_0^{-1}.$$

Ясно, что если $F(\mathbf{x})$ — лучевая функция, то она связана с множеством $\mathcal{S}$ внутренних точек тела $\mathcal{T}$ описанным выше способом. Далее, из конструкции функции $F(\mathbf{x})$ очевидным образом следует, что $F(\mathbf{x}) \geqslant 0$ и $F(t\mathbf{x}) = tF(\mathbf{x})$ при $t > 0$. Остается доказать непрерывность функции $F(\mathbf{x})$.

Покажем сначала, что $F(\mathbf{x})$ непрерывна в точке $\mathbf{o}$. В силу определения звездного тела начало координат $\mathbf{o}$ является внутренней точкой тела $\mathcal{T}$, поэтому найдется такое число $\eta > 0$, что шар

$$|\mathbf{x}| \leqslant \eta$$

содержится в $\mathcal{T}$. Поэтому при $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{o}$ точка

$$\frac{\eta}{|\mathbf{x}_0|}\mathbf{x}_0$$

заведомо лежит в $\mathcal{T}$, а поэтому

$$F(\mathbf{x}_0) \leqslant \eta^{-1}|\mathbf{x}_0|. \qquad (1)$$

Поскольку число η не зависит от $\mathbf{x}_0$, это неравенство доказывает непрерывность функции $F(\mathbf{x})$ в начале координат.

Докажем теперь непрерывность $F(\mathbf{x})$ в любой точке $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{o}$. Пусть $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно. В силу определения F точка

$$\mathbf{x}_1 = \{F(\mathbf{x}_0) + \varepsilon\}^{-1}\mathbf{x}_0 \qquad (2)$$

является внутренней точкой тела $\mathcal{T}$, поэтому найдется окрестность

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| < \eta_1, \qquad (3)$$

лежащая в $\mathcal{T}$. Тогда

$$F(\mathbf{x}) \leqslant 1. \qquad (4)$$

Пусть

$$\mathbf{x} = \{F(\mathbf{x}_0) + \varepsilon\}^{-1}\mathbf{y}, \quad \eta_1 = \{F(\mathbf{x}_0) + \varepsilon\}^{-1}\eta_2;$$

тогда неравенство (3) эквивалентно неравенству

$$|\mathbf{y} - \mathbf{x}_0| < \eta_2. \qquad (5)$$

Отсюда в силу уже доказанной однородности функции $F(\mathbf{x})$ выводим, что неравенство (4) эквивалентно неравенству

$$F(\mathbf{y}) \leqslant F(\mathbf{x}_0) + \varepsilon. \qquad (6)$$

Таким образом, нами найдена окрестность (5) точки $\mathbf{x}_0$, в которой имеет место неравенство (6). Осталось найти окрестность точки $\mathbf{y}$, для которой

$$F(\mathbf{y}) \geqslant F(\mathbf{x}_0) - \varepsilon. \qquad (7)$$

Если $F(\mathbf{x}_0) \leqslant \varepsilon$, то ввиду того, что $F(\mathbf{y}) \geqslant 0$, (7) справедливо при всех $\mathbf{y}$. В противном случае рассмотрим точку

$$\mathbf{x}_2 = \{F(\mathbf{x}_0) - \varepsilon\}^{-1}\mathbf{x}_0.$$

Так как $\mathbf{x}_2$ — внешняя точка тела $\mathcal{T}$, то рассуждения протекают аналогично вышеизложенным.

Теорема I доказана.

Очевидным следствием этой теоремы является следующее предложение.

Следствие. *Пусть $F_1(\mathbf{x})$ и $F_2(\mathbf{x})$ — лучевые функции. Звездное тело $F_1(\mathbf{x}) < 1$ тогда и только тогда содержится в звездном теле $F_2(\mathbf{x}) < 1$, когда при всех $\mathbf{x}$*

$$F_2(\mathbf{x}) \leqslant F_1(\mathbf{x}). \qquad (8)$$

Приведем два полезных для дальнейшего результата, первый из которых нами уже доказан.

Лемма 1. *Для любой лучевой функции $F(\mathbf{x})$ найдется такая постоянная C, что при всех $\mathbf{x}$*

$$F(\mathbf{x}) \leqslant C|\mathbf{x}|.$$

Лемма 2. *Для того чтобы звездное тело $F(\mathbf{x}) < 1$ было ограничено, необходимо и достаточно, чтобы $F(\mathbf{x}) \neq 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. При этом найдется такая постоянная $c > 0$, что при всех $\mathbf{x}$*

$$F(\mathbf{x}) \geqslant c|\mathbf{x}|. \qquad (9)$$

Что касается леммы 1, то при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$ она очевидна, а при $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ она была доказана выше (в ходе доказательства теоремы I) с постоянной $C = \eta^{-1}$.

Если для некоторой точки $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{o}$ $F(\mathbf{x}_0) = 0$, то при всех $t > 0$ точка $t\mathbf{x}_0$ лежит в $F(\mathbf{x}) < 1$, поэтому $F(\mathbf{x}) < 1$ не может быть ограниченным телом. Этим доказана необходимость условия леммы 2. Обратно, пусть $F(\mathbf{x}) \neq 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$. На сфере $|\mathbf{x}| = 1$ функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна и потому достигает своего минимума, например в точке $\mathbf{x}_0$. По предположению $F(\mathbf{x}_0) > 0$. Пусть $F(\mathbf{x}_0) = c$; тогда при $|\mathbf{x}| = 1$

$$F(\mathbf{x}) \geqslant c,$$

а потому в силу однородности $F(\mathbf{x})$ неравенство (9) справедливо. Лемма 2 доказана. Заметим, что если имеет место неравенство (9), то множество $F(\mathbf{x}) < 1$ целиком находится в шаре $|\mathbf{x}| < c^{-1}$.

Следующее очевидное следствие обобщает леммы 1 и 2, заменяя в их формулировках специальную лучевую функцию $|\mathbf{x}|$ на произвольную лучевую функцию $F_2(\mathbf{x})$.

Следствие. *Пусть $F_1(\mathbf{x})$, $F_2(\mathbf{x})$ — лучевые функции и множество $F_1(\mathbf{x}) < 1$ ограничено (т. е. $F_1(\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$). Тогда найдется такая постоянная C, что при всех $\mathbf{x}$*

$$F_2(\mathbf{x}) \leqslant CF_1(\mathbf{x}).$$

Если же множество $F_2(\mathbf{x}) < 1$ также ограничено, то найдется такая постоянная c, что

$$cF_1(\mathbf{x}) \leqslant F_2(\mathbf{x}) \leqslant CF_1(\mathbf{x}).$$

Вторая часть следствия означает, что „в качественном смысле имеется только одно ограниченное звездное тело".

§ 3. Выпуклые множества

1. Множество $\mathscr{K}$ называется *выпуклым*, если для любых точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, лежащих в $\mathscr{K}$, отрезок

$$t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y} \quad (0 < t < 1) \tag{1}$$

также лежит в $\mathscr{K}$. Говорят, что $\mathscr{K}$ *строго выпукло*, если для любых точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, лежащих в $\mathscr{K}$ или на его границе, все точки отрезка (1) являются внутренними точками множества $\mathscr{K}$.

Покажем сначала, что если $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$ — любые точки множества $\mathscr{K}$ и

$$t_j \geqslant 0, \quad \sum t_j = 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant r),$$

то

$$t_1\mathbf{x}_1 + \ldots + t_r\mathbf{x}_r \in \mathscr{K}. \tag{2}$$

При $r = 2$ это утверждение верно в силу определения выпуклости. При $r > 2$ оно доказывается индукцией. Действительно, считая $t_1 \neq 1$, имеем

$$t_1\mathbf{x}_1 + \ldots + t_r\mathbf{x}_r = t_1\mathbf{x}_1 + (1-t_1)\mathbf{y},$$

где

$$\mathbf{y} = \frac{t_2}{1-t_1}\mathbf{x}_2 + \ldots + \frac{t_r}{1-t_1}\mathbf{x}_r \in \mathscr{K},$$

так как $\mathbf{y}$ имеет вид (2) и состоит из $r-1$ слагаемых.

Почти непосредственным следствием отсюда является следующее предложение.

Лемма 3. *В n-мерном пространстве выпуклое множество $\mathscr{K}$ либо имеет внутренние точки, либо целиком лежит в плоскости*

$$\pi\colon\ p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = k.$$

Доказательство. Если $\mathscr{K}$ не лежит в одной плоскости, то оно содержит $n+1$ точек

$$\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1},$$

не лежащих в одной плоскости. Точки $\sum t_j\mathbf{x}_j$ при $t_j \geqslant 0$, $\sum t_j = 1$ образуют симплекс с вершинами $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n+1}$. Этот симплекс целиком лежит в множестве $\mathscr{K}$ и имеет внутренние точки.

Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если выпуклое множество $\mathscr{K}$ имеет конечный ненулевой объем $V(\mathscr{K})$, то оно ограничено.*

Доказательство. Заметим, что при $V(\mathscr{K}) > 0$ множество $\mathscr{K}$ не лежит в одной плоскости. Поэтому, не умаляя общности, после переноса начала координат можно считать, что $\mathbf{o}$ — внутренняя точка множества $\mathscr{K}$ и что найдется число $\eta > 0$, для которого все точки

$$\eta\mathbf{e}_j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{j-1}, \eta, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

лежат в $\mathscr{K}$. Пусть $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — любая другая точка множества $\mathscr{K}$. Покажем, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j| \leqslant \eta^{-n+1}(n!) \cdot V(\mathscr{K}).$$

Если, например, $a_1 \neq 0$, то весь симплекс с вершинами $\mathbf{o}$, $\mathbf{a}$, $\eta\mathbf{e}_2, \ldots, \eta\mathbf{e}_n$ лежит в $\mathscr{K}$ и имеет объем

$$(n!)^{-1} \cdot \eta^{n-1} |a_1|.$$

Поскольку этот объем не превосходит $V(\mathscr{K})$, мы получаем искомое неравенство (при $a_1 = 0$ оно тривиально).

Лемма 4 доказана.

Наконец, мы докажем следующее предложение.

Теорема II. *Выпуклое тело $\mathscr{K}$, для которого точка $\mathbf{o}$ является внутренней, есть звездное тело. При этом его лучевая функция $F(\mathbf{x})$ для всех точек $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ удовлетворяет неравенству*

$$F(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leqslant F(\mathbf{x}) + F(\mathbf{y}). \tag{3}$$

Обратно, если для лучевой функции выполнено условие (3), *то звездное тело*

$$F(\mathbf{x}) < 1 \tag{4}$$

является выпуклым.

Доказательство. Обратное утверждение тривиально. Если $F(\mathbf{x}) < 1$, $F(\mathbf{y}) < 1$ и $0 < t < 1$, то, применяя условие (3) к точкам $t\mathbf{x}$ и $(1-t)\mathbf{y}$, имеем

$$F\{t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{y}\} \leqslant F(t\mathbf{x})+F\{(1-t)\mathbf{y}\} =$$
$$= tF(\mathbf{x})+(1-t)F(\mathbf{y}) < t+(1-t)=1.$$

Таким образом, остается убедиться в справедливости прямого утверждения теоремы II. Функцию $F(\mathbf{x})$ определим следующим образом:

$$F(\mathbf{x}) = \inf t^{-1}, \tag{5}$$

где точная нижняя граница берется по всем вещественным числам t, для которых

$$t > 0, \quad t\mathbf{x} \in \mathscr{K}. \tag{6}$$

Поскольку **o** — внутренняя точка множества $\mathscr{K}$, числа t, удовлетворяющие условию (6), заведомо существуют. Из определения тотчас же вытекает, что $F(\mathbf{x}) \geqslant 0$, $F(\mathbf{o})=0$ и при всех $s \geqslant 0$ $F(s\mathbf{x}) = sF(\mathbf{x})$. Таким образом, мы покажем, что $F(\mathbf{x})$ — лучевая функция, если докажем ее непрерывность. Для этого мы докажем неравенство (3), а из него уже легко выведем непрерывность функции $F(\mathbf{x})$.

Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ — любые векторы, а s, t — такие положительные вещественные числа, что

$$s\mathbf{x} \in \mathscr{K}, \quad t\mathbf{y} \in \mathscr{K}; \tag{7}$$

тогда при $0 < r < 1$

$$rs\mathbf{x}+(1-r)t\mathbf{y} \in \mathscr{K}.$$

Выберем r так, чтобы эта точка была кратной точке $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, т. е. положим

$$rs=(1-r)t, \quad r=\frac{t}{s+t};$$

тогда

$$\frac{st}{s+t}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = rs\mathbf{x}+(1-r)t\mathbf{y} \in \mathscr{K},$$

откуда

$$F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant \frac{s+t}{st} = s^{-1}+t^{-1}.$$

Поэтому

$$F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant F(\mathbf{x})+F(\mathbf{y}),$$

ибо, согласно определению (5), $F(\mathbf{x})$ и $F(\mathbf{y})$ — точные нижние границы соответственно чисел s^{-1} и t^{-1}, удовлетворяющих условию (7).

Непрерывность функции $F(\mathbf{x})$ в точке **o** доказывается теми же рассуждениями, которые были использованы выше (теорема I). Ввиду того что **o** — внутренняя точка, найдется окрестность

$$|\mathbf{x}| \leqslant \eta, \quad \eta > 0$$

точки **o**, лежащая в $\mathscr{K}$, поэто

$F(\mathbf{x}$

Непрерывность в произвольной
ственно. Имеем, согласно (3),

$F(\mathbf{x}_0+\mathbf{y})$

и

$F(\mathbf{x}_0) \leqslant F($

Отсюда для любого ε и $|\mathbf{y}| <$

$|F(\mathbf{x}_0+\mathbf{y})-F(\mathbf{x}_0)|$

Наконец, нам нужно убедит

действительно является множест
для точки $\mathbf{x}$ $F(\mathbf{x}) < 1$. По
такое число $t > 1$, что $t\mathbf{x} \in \mathscr{K}$

$\mathbf{x} = t^{-1}(t$

лежит в $\mathscr{K}$ в силу условия вы
ная функция, множество $F(\mathbf{x})$
являются внутренними точками т
няя точка тела $\mathscr{K}$. Найдется та
$F(\mathbf{x}) < 1$ по определению функ
точка $\mathbf{x}$, для которой $F(\mathbf{x}) >$
для которых $F(\mathbf{x}) = 1$, могут л
так как $F(\mathbf{x})$ — лучевая функци
тела $\mathscr{K}$.

Теорема II доказана.

Для ссылок в дальнейшем сф
был нами получен в ходе доказ

Замечание. *Если* $F(\mathbf{x})$ —
мента $\mathbf{x}$, *непрерывная в точ*

$F(t\mathbf{x}) = tF$

$F(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \leqslant F$

то $F(\mathbf{x})$ *непрерывна при л*
лучевой функцией.

2. Следующая подготовительна
вании взаимных тел и опорных

Лемма 5. *Пусть* $\mathscr{K}_1, \mathscr{K}_2$ — *замкнутые выпуклые множества, не имеющие общих точек, причем хотя бы одно из них ограничено. Тогда существует плоскость*

$$\pi:\ p_1x_1 + \ldots + p_nx_n = k,$$

разделяющая[1] $\mathscr{K}_1$ *и* $\mathscr{K}_2$.

Доказательство. Пусть хотя бы одно из множеств $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ ограничено. Рассмотрим расстояние $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$, когда точки $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ пробегают точки множеств $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ соответственно. Поскольку $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ замкнуты, это расстояние принимает свое наименьшее значение в некоторых точках $\mathbf{x}_1' \in \mathscr{K}_1$ и $\mathbf{x}_2' \in \mathscr{K}_2$, причем $\mathbf{x}_1' \neq \mathbf{x}_2'$, так как $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ не имеют общих точек. Покажем, что плоскость π, перпендикулярная отрезку $\mathbf{x}_1'\mathbf{x}_2'$ и делящая этот отрезок пополам, отвечает указанным требованиям. Мы можем так повернуть систему координат и перенести начало, что точки $\mathbf{x}_1'$ и $\mathbf{x}_2'$ будут иметь вид

$$\mathbf{x}_1' = (-\eta,\ 0,\ \ldots,\ 0),\quad \mathbf{x}_2' = (\eta,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

при некотором $\eta > 0$; тогда

$$\pi:\ x_1 = 0.$$

Предположим, что имеется точка $\mathbf{z} \in \mathscr{K}_1$, для которой $z_1 \geqslant 0$. Так как тело $\mathscr{K}_1$ выпукло, точка

$$\mathbf{z}_t = (1-t)\,\mathbf{x}_1' + t\mathbf{z} \qquad (0 < t < 1)$$

лежит в $\mathscr{K}_1$. При достаточно малом $t > 0$

$$|\mathbf{z}_t - \mathbf{x}_2'|^2 = (2\eta - t\eta - tz_1)^2 + \sum_{j=2}^{n} (tz_j)^2 = \\ = 4\eta^2 - 4(\eta + z_1)\,\eta t + O(t^2) < 4\eta^2,$$

но это противоречит определению точек $\mathbf{x}_1'$ и $\mathbf{x}_2'$. Итак, точки $\mathbf{z}$ с указанным свойством не существуют.

Общий случай сводится к рассмотренному предельным переходом. Лемма 5 доказана.

Следствие. *Если* $\mathscr{K}$ — *выпуклое замкнутое множество, а точка* $\mathbf{a}$ *не лежит в* $\mathscr{K}$, *то существует плоскость, разделяющая* $\mathscr{K}$ *и* $\mathbf{a}$.

Действительно, можно положить $\mathscr{K}_1 = \mathscr{K}$, а в качестве $\mathscr{K}_2$ взять множество, состоящее из одной точки $\mathbf{a}$.

[1]) Это означает, что все точки тела $\mathscr{K}_1$ лежат в одном из двух полупространств, на которые плоскость π разбивает все пространство, а все точки тела $\mathscr{K}_2$ — в другом.

3. Вводя понятие множества, взаимного данному выпуклому множеству $\mathscr{K}$, мы сосредоточим внимание на случае, когда $\mathscr{K}$ ограничено и его можно описать лучевой функцией. Тогда в силу лемм 3 и 4 и теоремы II $\mathbf{o}$ — внутренняя точка и $0 < V(\mathscr{K}) < \infty$. При желании, используя лемму 2, можно без труда распространить наши результаты на другие случаи.

Через

$$\mathbf{pa} = p_1a_1 + \ldots + p_na_n$$

обозначаем скалярное произведение векторов $\mathbf{p}$ и $\mathbf{a}$.

Теорема III. *Пусть* $F(\mathbf{x})$ — *лучевая функция ограниченного выпуклого множества. Определим функцию* $F^*(\mathbf{y})$, *сопоставляя каждой точке* $\mathbf{y}$ *значение*

$$F^*(\mathbf{y}) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{\mathbf{xy}}{F(\mathbf{x})}. \tag{1}$$

Тогда $F^*(\mathbf{y})$ *является лучевой функцией некоторого ограниченного выпуклого множества. Это сопоставление взаимно в том смысле, что*

$$F(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{y} \neq \mathbf{o}} \frac{\mathbf{xy}}{F^*(\mathbf{y})}. \tag{2}$$

Говорят, что функции F и F^*, равно как и выпуклые множества, связанные с ними, *взаимны*.

Доказательство. Покажем сначала, что определение функции F^* законно[1]). Действительно, поскольку тело $F(\mathbf{x}) < 1$ ограничено, то по лемме 2 $F(\mathbf{x}) \neq 0$ при $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$; поэтому найдется такая постоянная $c > 0$, что $F(\mathbf{x}) \geqslant c\,|\mathbf{x}|$. Принимая во внимание неравенство $\mathbf{xy} \leqslant |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$, получаем

$$F^*(\mathbf{y}) \leqslant c^{-1}\,|\mathbf{y}|. \tag{3}$$

Из определения (1) непосредственно следует, что

$$F^*(t\mathbf{y}) = tF^*(\mathbf{y}) \quad \text{при} \quad t > 0 \tag{4}$$

и

$$F^*(\mathbf{y}) > 0 \qquad \text{при} \quad \mathbf{y} \neq \mathbf{o}. \tag{5}$$

Пусть $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ — произвольные точки; тогда

$$F^*(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) = \sup_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{x}(\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)}{F(\mathbf{x})} \leqslant \sup_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{xy}_1}{F(\mathbf{x})} + \sup_{\mathbf{x}} \frac{\mathbf{xy}_2}{F(\mathbf{x})} = F^*(\mathbf{y}_1) + F^*(\mathbf{y}_2). \tag{6}$$

В силу теоремы II и следствия (см. п. 2) из неравенств (3), (4), (5) и (6) выводим, что $F^*(\mathbf{y})$ — лучевая функция выпуклого тела. В силу неравенства (5) и леммы 2 это выпуклое множество ограничено.

[1]) В том смысле, что $F^*(\mathbf{y}) \neq \infty$ для всех $\mathbf{y}$. — *Прим. ред.*

Докажем теперь равенство (2). Здесь нам понадобится выпуклость функции $F(\mathbf{x})$, которой до сих пор мы серьезно не пользовались. При $\mathbf{x}=\mathbf{o}$ равенство (2) очевидно. Фиксируем точку $\mathbf{x}_0\neq\mathbf{o}$. Из (1) выводим, что для любых $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$

$$F(\mathbf{x})F^*(\mathbf{y})\geqslant \mathbf{xy}, \tag{7}$$

откуда

$$F(\mathbf{x}_0)\geqslant \sup_{\mathbf{y}}\frac{\mathbf{x}_0\mathbf{y}}{F^*(\mathbf{y})}. \tag{8}$$

Пусть $\varepsilon>0$. По следствию из леммы 5 найдется плоскость π, отделяющая точку $\mathbf{x}_0$ от множества тех $\mathbf{x}$, для которых

$$F(\mathbf{x})\leqslant(1-\varepsilon)F(\mathbf{x}_0). \tag{9}$$

Так как плоскость π не проходит через начало координат, ее можно записать в виде

$$\pi:\quad \mathbf{xy}_0=1. \tag{10}$$

Тогда для всех точек $\mathbf{x}$ плоскости π

$$F(\mathbf{x})\geqslant(1-\varepsilon)F(\mathbf{x}_0),$$

ибо π не пересекается с множеством (9). Следовательно,

$$F^*(\mathbf{y}_0)\leqslant\frac{1}{(1-\varepsilon)F(\mathbf{x}_0)}, \tag{11}$$

поскольку, очевидно, в силу однородности (1) при $\mathbf{y}\neq\mathbf{o}$ достаточно рассмотреть только те $\mathbf{x}$, для которых $\mathbf{xy}=1$. Далее

$$\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0>1, \tag{12}$$

так как точки $\mathbf{x}_0$ и начало координат (принадлежащее множеству (9)) лежат по разные стороны плоскости π. Из (11) и (12) выводим

$$\sup_{\mathbf{y}}\frac{\mathbf{x}_0\mathbf{y}}{F^*(\mathbf{y})}\geqslant\frac{\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0}{F^*(\mathbf{y}_0)}>(1-\varepsilon)F(\mathbf{x}_0). \tag{13}$$

Требуемое равенство (2) вытекает из (8) и (13), поскольку ε произвольно мало.

Теорема III доказана.

Читатель может без труда проверить, что множества $F(\mathbf{x})<1$ и $F^*(\mathbf{y})<1$ связаны способом, описанным в п. 3 § 1.

Из теоремы немедленно вытекает следующее предложение.

Следствие 1. *Для всех* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$

$$F(\mathbf{x})F^*(\mathbf{y})\geqslant\mathbf{xy}.$$

Для любой точки $\mathbf{y}_0\neq\mathbf{o}$ *найдется такая точка* $\mathbf{x}_0\neq\mathbf{o}$, *что*

$$F(\mathbf{x}_0)F^*(\mathbf{y}_0)=\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0; \tag{14}$$

обратно, для любой $\mathbf{x}_0\neq\mathbf{o}$ *найдется* $\mathbf{y}_0\neq\mathbf{o}$ *с условием* (14).

Первое неравенство, являющееся непосредственным следствием определения, было уже нами отмечено. В силу симметрии достаточно показать существование точки $\mathbf{x}_0$ при заданном $\mathbf{y}_0$. Множество $\mathscr{B}$ точек $\mathbf{x}$, для которых $F(\mathbf{x})=1$, не только ограничено, но и замкнуто, поскольку функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна. Следовательно, непрерывная функция $\mathbf{xy}_0$ достигает своего максимума, скажем в точке $\mathbf{x}_0$. Но мы уже видели, что этот максимум равен $F^*(\mathbf{y}_0)$, откуда вытекает справедливость (14).

В дальнейшем нам понадобится также следующее предложение.

Следствие 2. *Пусть* $\mathscr{K}_1$, $\mathscr{K}_2$ — *выпуклые множества с ненулевыми объемами, содержащие начало координат как внутреннюю точку, и пусть* $\mathscr{K}_1^*$, $\mathscr{K}_2^*$ — *соответствующие взаимные им множества. Тогда если* $\mathscr{K}_1$ *содержит* $\mathscr{K}_2$, *то* $\mathscr{K}_2^*$ *содержит* $\mathscr{K}_1^*$.

Действительно, пусть, как обычно, $F_1(\mathbf{x})$, $F_2(\mathbf{x})$, $F_1^*(\mathbf{x})$, $F_2^*(\mathbf{x})$ — соответствующие лучевые функции. По следствию из теоремы I $F_1(\mathbf{x})\leqslant F_2(\mathbf{x})$. Тогда из определения (1) взаимной лучевой функции немедленно следует, что $F_2^*(\mathbf{y})\leqslant F_1^*(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y}$.

Следующее предложение связывает взаимные лучевые функции со взаимными преобразованиями, введенными в § 5 гл. I.

Следствие 3. *Пусть* $F(\mathbf{x})$, $F^*(\mathbf{y})$ — *взаимные друг другу выпуклые лучевые функции. Пусть* τ — *однородное линейное преобразование, а* τ^* — *взаимное ему преобразование. Тогда функции* $F(\tau\mathbf{x})$ *и* $F^*(\tau^*\mathbf{y})$ *взаимны друг другу.*

Действительно, в силу определения τ^* мы имеем $\tau\mathbf{x}\tau^*\mathbf{y}=\mathbf{xy}$ для всех $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$. Справедливость следствия поэтому вытекает из (1) и (2).

4. Плоскость π, проходящая через граничную точку $\mathbf{x}_0$ выпуклого множества $\mathscr{K}$, называется *опорной плоскостью* множества $\mathscr{K}$ в $\mathbf{x}_0$, если ни одна внутренняя точка множества $\mathscr{K}$ не лежит в π. Сформулированная ниже теорема IV является почти очевидным следствием результатов п. 3. Теорема IV понадобится нам в следующей главе, а п. 3 — только в гл. VIII.

Теорема IV. *Пусть* $\mathscr{K}$ — *произвольное выпуклое тело с конечным ненулевым объемом* $V(\mathscr{K})$. *Тогда в каждой граничной точке тела* $\mathscr{K}$ *имеется по крайней мере одна опорная плоскость. Найдутся ровно две опорные плоскости тела* $\mathscr{K}$, *параллельные любой данной плоскости* π.

Доказательство. Начало координат $\mathbf{o}$ можно считать внутренней точкой тела $\mathscr{K}$. Пусть $F(\mathbf{x})$ — соответствующая лучевая функция.

Тогда $F(\mathbf{x}_0)=1$. По следствию 1 теоремы III найдется такая точка $\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{o}$, что

$$\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0 = F(\mathbf{x}_0)F^*(\mathbf{y}_0) = F^*(\mathbf{y}_0). \tag{1}$$

Таким образом, плоскость

$$\pi': \quad \mathbf{x}\mathbf{y}_0 = F^*(\mathbf{y}_0) \tag{2}$$

проходит через точку $\mathbf{x}_0$. По только что использованному следствию

$$\mathbf{x}\mathbf{y}_0 \leqslant F(\mathbf{x})F^*(\mathbf{y}_0),$$

откуда получаем, что $F(\mathbf{x}) \geqslant 1$ для всех точек плоскости π'. Следовательно, π' не содержит внутренних точек тела $\mathscr{K}$, а потому является опорной плоскостью.

Любая плоскость вида (2) при фиксированном $\mathbf{y}_0$ является опорной плоскостью в некоторой точке $\mathbf{x}_0$. Действительно, из следствия 1 теоремы III вытекает, что существует такая точка, для которой справедливо равенство (1).

Поэтому для любой точки $\mathbf{y}_0$ обе плоскости

$$\mathbf{x}\mathbf{y}_0 = F^*(\mathbf{y}_0) \tag{3}$$

и

$$\mathbf{x}\mathbf{y}_0 = -F^*(-\mathbf{y}_0) \tag{4}$$

являются опорными. Очевидно, что других опорных плоскостей, параллельных плоскости $\mathbf{x}\mathbf{y}_0 = 0$, нет. Начало координат, а значит, и все внутренние точки тела $\mathscr{K}$ лежат между плоскостями (3) и (4).

Теорема IV доказана.

5. В гл. IX нам потребуется следующее предложение.

Лемма 6. *Пусть $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ — открытые выпуклые множества в n-мерном пространстве с конечными ненулевыми объемами. Предположим, что $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ не имеют общих точек, а точка* $\mathbf{a}$ *одновременно является граничной точкой и $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$. Тогда через точку* $\mathbf{a}$ *можно провести плоскость, не пересекающую ни $\mathscr{K}_1$, ни $\mathscr{K}_2$ (так что она одновременно является опорной плоскостью обоих множеств).*

Доказательство. Оно аналогично доказательству теоремы III. Не умаляя общности, можно полагать, что $\mathbf{o}$ — внутренняя точка множества $\mathscr{K}_1$. Пусть $\mathbf{b}$ — внутренняя точка множества $\mathscr{K}_2$. Тогда $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ задаются лучевыми функциями

$$\mathscr{K}_1: \quad F_1(\mathbf{x}) < 1,$$
$$\mathscr{K}_2: \quad F_2(\mathbf{x}-\mathbf{b}) < 1.$$

Пусть при $\frac{1}{2} < t < 1$ множества $\mathscr{K}_j^{(t)}$ $(j=1, 2)$ заданы формулами

$$\mathscr{K}_1^{(t)}: \quad F_1(\mathbf{x}) \leqslant t,$$
$$\mathscr{K}_2^{(t)}: \quad F_2(\mathbf{x}-\mathbf{b}) \leqslant t,$$

так что $\mathscr{K}_j^{(t)}$ — замкнутое подмножество множества $\mathscr{K}_j$ $(j=1, 2)$. В силу леммы 5 найдется плоскость $\pi^{(t)}$, разделяющая $\mathscr{K}_1^{(t)}$ и $\mathscr{K}_2^{(t)}$. Поскольку $\pi^{(t)}$ не проходит через точку $\mathbf{o} \in \mathscr{K}_1^{(t)}$, эту плоскость можно задать уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} p_{it}x_i = 1.$$

Ввиду того что $t > \frac{1}{2}$, множество $\mathscr{K}_1^{(t)}$ содержит окрестность начала координат $|\mathbf{x}| \leqslant \eta$, $\eta > 0$. Так как ни одна точка этой окрестности не лежит в плоскости $\pi^{(t)}$, то

$$|p_{it}| \leqslant \eta^{-1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{1}$$

а так как точки $\mathbf{b}$ и $\mathbf{o}$ лежат по разные стороны плоскости $\pi^{(t)}$, то

$$\sum_{i=1}^{n} p_{it}b_i > 1. \tag{2}$$

В силу (1) и теоремы Больцано — Вейерштрасса существуют пределы p'_j $(j=1, 2)$ последовательностей p_{jt} при t, стремящемся к 1 по некоторой подпоследовательности $t_1 < t_2 < \ldots < t_m < \ldots$. Очевидно, плоскость π', определенная уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} p'_i x_i = 1,$$

отвечает всем поставленным условиям.

Лемма 6 доказана.

6. Результаты оставшейся части этого параграфа не понадобятся нам до гл. VIII, однако удобно изложить их здесь. Эти результаты показывают, что любые два симметричных выпуклых множества $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$ с конечными ненулевыми объемами в некотором смысле весьма „похожи“ друг на друга.

Что касается уточнений, обобщений на несимметричные выпуклые множества, а также ссылок на соответствующую литературу, то мы отсылаем читателя к статье Бамба [5]; относительно весьма интересных приложений см. статьи Малера [15].

Множество точек вида

$$\mathbf{x} = t_1\mathbf{x}_1 + \ldots + t_n\mathbf{x}_n, \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ — фиксированные линейно независимые точки, а $t_1, \ldots, t_n$ пробегают такие вещественные числа, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |t_j| \leqslant 1, \tag{2}$$

называется замкнутым „обобщенным параллелепипедом" (или просто — параллелепипедом) n-мерного пространства с центром в точке $\mathbf{o}$. Аналогично, замкнутый „обобщенный октаэдр" (или просто октаэдр) с центром в $\mathbf{o}$ — это множество всех точек вида (1), когда $t_1, \ldots, t_n$ пробегают все числа, удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{j=1}^{n} |t_j| \leqslant 1. \tag{3}$$

Докажем сначала следующее уточнение [1]) одного результата Малера [3].

Теорема V. *Пусть $\mathscr{K}$ — произвольное замкнутое симметричное выпуклое множество с конечным ненулевым объемом $V(\mathscr{K})$. Тогда существуют такие точки $\pm\mathbf{x}_1, \ldots, \pm\mathbf{x}_n \in \mathscr{K}$, что $\mathscr{K}$ содержится в параллелепипеде $\mathscr{C}$ с гранями $\pm\pi_J$ $(1 \leqslant J \leqslant n)$, где π_J — плоскость, проходящая через точки $\mathbf{x}_J \pm \mathbf{x}_j$ $(j \neq J)$. При этом октаэдр $\mathscr{D}$ с вершинами $\pm\mathbf{x}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ содержится в $\mathscr{K}$.*

Доказательство. Последнее утверждение очевидно в силу выпуклости $\mathscr{K}$. В качестве $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ выберем точки множества $\mathscr{K}$ так, чтобы объем октаэдра $\mathscr{D}$ был бы максимальным. Такой выбор возможен, ибо $\mathscr{K}$ замкнуто и ограничено. Если бы множество $\mathscr{K}$ не лежало бы в $\mathscr{C}$, то нашлась бы такая точка $\mathbf{y} \in \mathscr{K}$, что $\mathbf{o}$ и $\mathbf{y}$ лежали по разные стороны одной из плоскостей π_J, скажем π_n. Тогда октаэдр с вершинами $\pm\mathbf{x}_1, \pm\mathbf{x}_2, \ldots, \pm\mathbf{x}_{n-1}, \pm\mathbf{y}$, лежащий в $\mathscr{K}$, имел бы больший объем, чем $\mathscr{D}$, что противоречит выбору $\mathscr{D}$. Теорема V доказана.

Следствие 1. *Имеют место неравенства*

$$V(\mathscr{K}) \leqslant V(\mathscr{C}) \leqslant n!\,V(\mathscr{K}),$$
$$V(\mathscr{K}) \geqslant V(\mathscr{D}) \geqslant (n!)^{-1} V(\mathscr{K}).$$

Действительно, неравенства, стоящие слева, очевидны, а правые вытекают из них и неравенства $V(\mathscr{C}) \leqslant n!\,V(\mathscr{D})$.

Следствие 2. *Пусть $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ — любые замкнутые симметричные выпуклые множества с конечными ненулевыми объемами. Тогда найдется такое однородное линейное преобразование $\boldsymbol{\tau}$, что*

$$n^{-1}\boldsymbol{\tau}\mathscr{L} \subset \mathscr{K} \subset n\boldsymbol{\tau}\mathscr{L}$$

и

$$(n!)^{-1} V(\mathscr{K}) \leqslant V(\boldsymbol{\tau}\mathscr{L}) \leqslant (n!)\,V(\mathscr{K}).$$

[1]) Эта теорема высказана проф. Роджерсом (C. A. Rogers); впрочем, он отвергает ее оригинальность. Таким же методом доказывается соответствующий результат для несимметричных тел, где вписанные и описанные тела являются симплексами (см. Малер [14]). Имеются также результаты о вписанных и описанных эллипсоидах (Джон [1]).

Пусть $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ — точки множества $\mathscr{K}$, а $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ — точки множества $\mathscr{L}$, о которых говорится в теореме V. Определим $\boldsymbol{\tau}$ уравнениями

$$\boldsymbol{\tau}\mathbf{y}_j = \mathbf{x}_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Тогда тела $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$, указанные теоремой V, одни и те же для $\mathscr{K}$ и $\boldsymbol{\tau}\mathscr{L}$. Следствие теперь становится очевидным, так как $n^{-1}\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$.

7. В качестве приложения методов и результатов предыдущего пункта докажем следующее предложение об объемах и критических определителях (§ 5 гл. III) взаимных выпуклых множеств. Как обычно, $\Delta(\mathscr{S})$ — критический определитель множества $\mathscr{S}$.

Теорема VI. *Пусть $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}^*$ — взаимные ограниченные симметричные выпуклые множества; тогда*

$$\frac{4^n}{(n!)^2} \leqslant V(\mathscr{K})\,V(\mathscr{K}^*) \leqslant 4^n$$

и

$$\Phi^2 \leqslant \Delta(\mathscr{K})\,\Delta(\mathscr{K}^*) \leqslant 1,$$

где Φ — критический определитель октаэдра $\sum |x_j| \leqslant 1$.

Первая цепочка неравенств принадлежит Малеру [2, 3]; доказательство второй цепочки практически то же самое. При $n = 2$ Малер [11] указал неулучшаемое неравенство такого вида, а именно

$$\frac{1}{2} \leqslant \Delta(\mathscr{K})\,\Delta(\mathscr{K}^*) \leqslant \frac{3}{4};$$

равенство слева получается в случае, когда $\mathscr{K}$ — квадрат, а справа — в случае, когда $\mathscr{K}$ — круг. Относительно неравенств такого типа и ссылок на более поздние работы см. Бамба [4, 5].

Доказательство теоремы VI. Докажем неравенства для критических определителей тел $\mathscr{K}$ и $\mathscr{K}^*$. Доказательство неравенств для объемов аналогично. Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — любое однородное линейное преобразование, а $\boldsymbol{\tau}^*$ — преобразование, взаимное с ним, так что

$$\det(\boldsymbol{\tau}) \cdot \det(\boldsymbol{\tau}^*) = 1. \tag{1}$$

Тела $\boldsymbol{\tau}\mathscr{K}$, $\boldsymbol{\tau}^*\mathscr{K}^*$ взаимны друг другу в силу следствия 3 теоремы III. Поскольку

$$\Delta(\boldsymbol{\tau}\mathscr{K}) = |\det(\boldsymbol{\tau})|\,\Delta(\mathscr{K}),$$

то из (1) вытекает, что

$$\Delta(\boldsymbol{\tau}\mathscr{K})\,\Delta(\boldsymbol{\tau}^*\mathscr{K}^*) = \Delta(\mathscr{K})\,\Delta(\mathscr{K}^*).$$

Таким образом, ни посылка, ни заключение теоремы не изменятся, если $\mathcal{K}$ подвергнуть однородному линейному преобразованию, а $\mathcal{K}^*$ — преобразованию, взаимному с ним.

Предположим сначала, что $\mathcal{K} = \mathcal{K}_0$ — параллелепипед. Применив подходящее однородное линейное преобразование, можно, не умаляя общности, полагать, что $\mathcal{K}_0$ является единичным кубом

$$|x_j| \leqslant 1 \quad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

В п. 3 мы отмечали, что $\mathcal{K}_0^*$ является октаэдром

$$\sum_{j=1}^{n} |y_j| \leqslant 1.$$

Поэтому в силу определения числа Φ

$$\Delta(\mathcal{K}_0)\,\Delta(\mathcal{K}_0^*) = \Delta(\mathcal{K}_0^*) = \Phi. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь произвольное множество $\mathcal{K}$, подчиняющееся условиям теоремы. Не умаляя общности, можно считать это множество замкнутым. Пусть $\mathscr{C}$ — параллелепипед, а $\mathscr{D}$ — октаэдр, определенные в теореме V, так что

$$\mathscr{C} \supset \mathcal{K} \supset \mathscr{D}. \tag{3}$$

Множеством, взаимным с параллелепипедом $\mathscr{C}$, является октаэдр $\mathscr{C}^*$, вписанный в силу следствия 2 теоремы III в $\mathcal{K}^*$. Аналогично множеством, взаимным с октаэдром $\mathscr{D}$, является параллелепипед $\mathscr{D}^*$, причем

$$\mathscr{D}^* \supset \mathcal{K}^* \supset \mathscr{C}^*. \tag{4}$$

Покажем теперь, что

$$\Delta(\mathscr{D}) \geqslant \Phi\Delta(\mathscr{C}), \tag{5}$$

где Φ — число, определенное в формулировке теоремы. По теореме V

$$V(\mathscr{D}) \geqslant (n!)^{-1} V(\mathscr{C}). \tag{6}$$

Но любой октаэдр можно посредством однородного линейного преобразования отобразить в любой другой; при этом отношение $\dfrac{\Delta(\mathscr{D})}{V(\mathscr{D})}$ не меняется. В частности, взяв в качестве $\mathscr{D}$ октаэдр $\sum |x_j| < 1$, получим

$$\frac{\Delta(\mathscr{D})}{V(\mathscr{D})} = \frac{n!\Phi}{2^n}.$$

Аналогично

$$\frac{\Delta(\mathscr{C})}{V(\mathscr{C})} = \frac{1}{2^n},$$

а потому неравенство (5) вытекает из неравенства (6).

Но теперь, применяя (2) при $\mathcal{K}_0 = \mathscr{C}$, из (3) и (4) выводим

$$\Delta(\mathcal{K})\,\Delta(\mathcal{K}^*) \geqslant \Delta(\mathscr{D})\,\Delta(\mathscr{C}^*) \geqslant \Phi\Delta(\mathscr{C})\,\Delta(\mathscr{C}^*) = \Phi^2.$$

Аналогично, применяя (2) при $\mathcal{K}_0 = \mathscr{D}^*$, получаем

$$\Delta(\mathcal{K})\,\Delta(\mathcal{K}^*) \leqslant \Delta(\mathscr{C})\,\Delta(\mathscr{D}^*) \leqslant \Phi^{-1}\Delta(\mathscr{D})\,\Delta(\mathscr{D}^*) = 1.$$

Теорема VI доказана.

§ 4. Лучевые функции и решетки

1. В дальнейшем при изучении связи между звездными телами и, в частности, выпуклыми телами) и решетками удобнее иметь дело не с самими звездными телами, а с их лучевыми функциями. Для любой лучевой функции F и решетки Λ положим

$$F(\Lambda) = \inf_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{0}}} F(\mathbf{a}). \tag{1}$$

В терминах п. 1 § 5 гл. III решетка Λ допустима для звездного тела $F(\mathbf{x}) < k$ при $k \leqslant F(\Lambda)$; при $k > F(\Lambda)$ решетка Λ не является допустимой.

Для любого вещественного $t \neq 0$ имеем

$$F(t\Lambda) = |t|\,F(\Lambda), \tag{2}$$

где $t\Lambda$ — множество векторов $t\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Lambda$. При $t > 0$ это следует из свойства однородности $F(t\mathbf{x}) = tF(\mathbf{x})$ лучевых функций $F(\mathbf{x})$, а при $t < 0$ очевидным образом следует из предыдущего случая, если заметить, что Λ содержит $-\mathbf{a}$ вместе с $\mathbf{a}$. В частности,

$$\frac{\{F(t\Lambda)\}^n}{d(t\Lambda)} = \frac{\{F(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)}, \tag{3}$$

где n — размерность пространства. Резюмируем свойства $F(\Lambda)$ в следующей теореме, связывающей эту точку зрения с точкой зрения, принятой в п. 1 § 5 гл. III.

Теорема VII. *Пусть для любой лучевой функции*

$$\delta(F) = \sup_{\Lambda} \frac{\{F(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)}, \tag{4}$$

где верхняя граница берется по всем решеткам Λ. Тогда $\delta(F) < \infty$. Более того,

$$\delta(F) = [\Delta(\mathscr{S})]^{-1}, \tag{5}$$

где $\Delta(\mathscr{S})$ — критический определитель звездного тела

$$\mathscr{S}\colon\ F(\mathbf{x}) < 1.$$

При $\Delta(\mathscr{S}) = \infty$ равенство (5) понимается как равенство $\delta(F) = 0$.

Доказательство. Если $\delta(F)\neq 0$, то в (4) верхнюю границу можно брать по решеткам Λ, для которых $F(\Lambda)>0$, а значит, в силу однородности (3) по решеткам Λ, для которых $F(\Lambda)=1$. Такие решетки допустимы для $\mathscr{S}$ по определению, так что $d(\Lambda)\geqslant \Delta(\mathscr{S})$. Отсюда следует, что

$$\delta(F)\leqslant\{\Delta(\mathscr{S})\}^{-1}. \tag{6}$$

С другой стороны, если решетка Λ является $\mathscr{S}$-допустимой, то $F(\Lambda)\geqslant 1$. А поскольку существуют $\mathscr{S}$-допустимые решетки Λ, определитель которых $d(\Lambda)$ в силу определения $\Delta(\mathscr{S})$ сколь угодно близок к $\Delta(\mathscr{S})$, то мы имеем

$$\delta(F)\geqslant\sup\{d(\Lambda)\}^{-1}\geqslant\{\Delta(\mathscr{S})\}^{-1}, \tag{7}$$

где верхняя граница берется по $\mathscr{S}$-допустимым решеткам Λ. Равенство (5) вытекает из сопоставления неравенств (6) и (7).

Если $\delta(F)=0$, то $F(\Lambda)=0$ для любой решетки Λ. В силу неравенства (7) (которое справедливо в общем случае) это возможно только в том случае, когда не существует $\mathscr{S}$-допустимых решеток, т. е. когда $\Delta(\mathscr{S})=\infty$. Обратно, если $\Delta(\mathscr{S})=\infty$ и Λ — произвольная решетка, то при любом $t>0$ решетка $t\Lambda$ не является $\mathscr{S}$-допустимой, так что

$$tF(\Lambda)=F(t\Lambda)<1.$$

Отсюда сразу следует, что $F(\Lambda)=0$.

Теорема VII доказана.

Отметим также следующий довольно очевидный результат.

Лемма 7. *Пусть лучевая функция $F(\mathbf{x})>0$ при $\mathbf{x}\neq\mathbf{o}$. Тогда каждая решетка Λ содержит такую точку $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$, что $F(\Lambda)=F(\mathbf{a})$; в частности, $F(\Lambda)>0$.*

Доказательство. По лемме 2 найдется такое число $c>0$, что

$$F(\mathbf{x})\geqslant c|\mathbf{x}|.$$

Поэтому из неравенства

$$F(\mathbf{x})\leqslant F(\Lambda)+1 \tag{8}$$

вытекает неравенство

$$|\mathbf{x}|\leqslant c^{-1}\{F(\Lambda)+1\}. \tag{9}$$

Но в силу леммы 1 гл. III существует только конечное число точек решетки Λ, для которых $|\mathbf{x}|$ меньше заданной границы, и поэтому существует только конечное число точек $\mathbf{x}$ решетки Λ, удовлетворяющее неравенству (9). Если в качестве $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$ взять одну из тех точек, для которых $F(\mathbf{a})$ принимает наименьшее значение, то эта точка удовлетворяет требуемым условиям.

Лемма 7 доказана.

ГЛАВА V

ТЕОРЕМА МАЛЕРА О КОМПАКТНОСТИ

§ 1. Введение

1. До сих пор каждый раз мы имели дело с одной фиксированной решеткой. В этой главе мы займемся свойствами совокупностей решеток. Сначала мы определим понятие близости двух решеток Λ и M. Это будет сделано посредством однородных линейных преобразований. Говорят, что однородное линейное преобразование $\mathbf{X}=\boldsymbol{\tau}\mathbf{x}$ n-мерного евклидова пространства в себя близко к тождественному преобразованию, если коэффициенты τ_{ij} в равенствах

$$X_i=\sum_{j=1}^{n}\tau_{ij}x_j \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

близки к коэффициентам тождественного преобразования, т. е. если все числа

$$|\tau_{ii}-1| \quad (1\leqslant i\leqslant n)$$

и

$$|\tau_{ij}| \quad (1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n,\ i\neq j)$$

малы. Считается, что решетка M близка к решетке Λ, если M имеет вид $\boldsymbol{\tau}\Lambda$, где $\boldsymbol{\tau}$ близко к тождественному преобразованию, а $\boldsymbol{\tau}\Lambda$ — множество векторов $\boldsymbol{\tau}\mathbf{a}$, $\mathbf{a}\in\Lambda$. Грубо говоря, M близко к Λ, если M можно получить из Λ малой деформацией пространства, в котором находятся решетки. После этого сходимость последовательности решеток Λ_r к решетке Λ' можно определить обычным способом.

Уже Минковский [2, 3] использовал идею непрерывного преобразования решеток, чтобы показать, что ограниченное выпуклое множество

$$\mathscr{S}:\ F(\mathbf{x})<1, \tag{1}$$

где $F(\mathbf{x})$ — соответствующая лучевая функция, всегда имеет критическую решетку в смысле п. 1 § 5 гл. III, т. е. что существует решетка Λ_c с условиями

$$F(\Lambda_c)=\inf_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda_c\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}}F(\mathbf{a})\geqslant 1,\quad d(\Lambda_c)=\Delta(\mathscr{S})=\inf_{F(\Lambda)\geqslant 1}d(\Lambda). \tag{2}$$

Критическая решетка Λ_c обладает тем свойством, что если ее слегка деформировать в решетку Λ, для которой $d(\Lambda)<d(\Lambda_c)$, то $F(\Lambda)<1$ (это означает, что Λ содержит точку множества $\mathscr{S}$, отличную от $\mathbf{o}$). Из этих соображений Минковский вывел важные свойства критических решеток и с помощью этих свойств указал, во всяком случае в трехмерном пространстве, точный процесс [1]) нахождения критического определителя $\Delta(\mathscr{S})$ заданного выпуклого тела $\mathscr{S}$. Все это обобщил и более фундаментально обосновал Малер [4], давший общие условия, при которых последовательность решеток Λ_r содержит сходящуюся подпоследовательность. Малер также показал, что произвольное звездное тело $F(\mathbf{x}) < 1$ имеет критическую решетку, если только имеются такие решетки Λ, что $F(\Lambda) > 0$. В серии важных работ [4, 5] Малер обобщил большое количество работ Минковского о критических решетках на произвольные звездные тела и дал ряд других приложений своего критерия компактности. Малер [13] рассматривал также критические решетки множеств, не являющихся звездными телами, но здесь мы на этом останавливаться не будем.

2. Эту главу мы начнем с рассмотрения свойств однородных линейных преобразований, нужных нам для изучения понятия сходимости решеток. Далее мы докажем общий критерий компактности Малера, устанавливающий, когда последовательность решеток Λ_r содержит сходящуюся подпоследовательность. Затем мы изучим свойства критических решеток множеств $\mathscr{S}$, рассматривая по очереди произвольные звездные тела, ограниченные звездные тела, выпуклые множества и шары. По мере того как рассматриваются множества все более специального вида, мы получаем все большую информацию о критических решетках. Наконец, в § 10 мы приложим эти исследования к одной проблеме теории диофантовых приближений.

§ 2. Линейные преобразования

1. Понятие сходимости решеток будет определено в терминах однородных линейных преобразований, уже введенных в § 3 гл. I. В n-мерном пространстве мы имеем дело с некоторой фиксированной системой координат. Если τ_{ij} — совокупность n^2 вещественных чисел, то под $\tau\mathbf{x}$ понимается преобразование пространства в себя, задаваемое уравнениями

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} x_j \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

где $\mathbf{X} = \tau\mathbf{x}$. Мы будем обозначать $\det(\tau) = \det(\tau_{ij})$. Если $\det(\tau) = 0$, то преобразование τ называется вырожденным, в противном случае это преобразование обладает обратным; последнее мы будем обозначать символом τ^{-1}. Под суммой $\sigma + \tau$ преобразований σ и τ мы понимаем преобразование, определяемое равенством

$$(\sigma + \tau)\mathbf{x} = \sigma\mathbf{x} + \tau\mathbf{x},$$

а под произведением $\sigma\tau$ — преобразование, определяемое равенством

$$(\sigma\tau)\mathbf{x} = \sigma(\tau\mathbf{x}).$$

Если преобразованиям σ, τ соответствуют матрицы коэффициентов (σ_{ij}) и (τ_{ij}), то преобразованиям $\sigma + \tau$ и $\sigma\tau$, очевидно, соответствуют матрицы

$$(\sigma_{ij} + \tau_{ij})$$

и

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik}\tau_{kj}\right). \tag{1}$$

Тождественное преобразование

$$X_i = x_i$$

мы обозначаем символом ι.

Нам понадобится мера величины коэффициентов матрицы преобразования τ. Определим [1])

$$\|\tau\| = n \max_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} |\tau_{ij}|.$$

Ясно, что

$$\left.\begin{aligned} \|-\tau\| &= \|\tau\|, \\ \|\sigma + \tau\| &\leqslant \|\sigma\| + \|\tau\|. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Далее

$$\|\sigma\tau\| \leqslant \|\sigma\|\,\|\tau\|, \tag{3}$$

так как коэффициенты преобразования $\sigma\tau$ задаются формулой (1). Более того, если $\mathbf{X} = \tau\mathbf{x}$, то

$$\max_i |X_i| \leqslant \|\tau\| \max_i |x_i|. \tag{4}$$

Отсюда тривиальным образом вытекает, что

$$|\tau\mathbf{x}| \leqslant n^{\frac{1}{2}} \|\tau\|\, |\mathbf{x}|, \tag{5}$$

ибо для всех $\mathbf{x}$

$$\max_i |x_i| \leqslant |\mathbf{x}| \leqslant n^{\frac{1}{2}} \max_i |x_i|.$$

Нам понадобится также следующий факт: если τ близко к тождественному преобразованию ι, то преобразование τ^{-1} существует

[1]) См. Минковский [2]. — *Прим. ред.*

[1]) $\|\tau\|$ можно называть нормой преобразования τ. — *Прим. ред*

и также близко к ι. Более точное выражение это обстоятельство получает в следующем предложении.

Лемма 1. *Пусть $\tau = \iota + \sigma$ — однородное линейное преобразование, причем*

$$\|\sigma\| < 1. \tag{6}$$

Тогда преобразование τ — невырожденное, причем преобразование

$$\rho = \iota - \tau^{-1} \tag{7}$$

удовлетворяет условию

$$\|\rho\| \leqslant \frac{\|\sigma\|}{1 - \|\sigma\|}. \tag{8}$$

Доказательство. Заметим, что если ρ существует, то неравенство (8) немедленно вытекает из (2) и (3). Действительно,

$$\rho = \tau^{-1}\sigma = \sigma - \rho\sigma,$$

откуда

$$\|\rho\| \leqslant \|\sigma\| + \|\rho\sigma\| \leqslant \|\sigma\| + \|\rho\|\,\|\sigma\|,$$

что равносильно (8).

Остается показать, что τ — невырожденное преобразование, а для этого удобнее воспользоваться другим подходом к $\|\tau\|$. Пусть

$$F_1(\mathbf{x}) = n^{-1}\sum_j |x_j|, \quad F_2(\mathbf{x}) = \max_j |x_j|. \tag{9}$$

Тогда $F_1(\mathbf{x})$ и $F_2(\mathbf{x})$ — выпуклые симметричные лучевые функции, обращающиеся в нуль только в точке $\mathbf{o}$, причем для всех $\mathbf{x}$

$$F_1(\mathbf{x}) \leqslant F_2(\mathbf{x}). \tag{10}$$

Для любого однородного преобразования τ

$$\|\tau\| = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{F_2(\tau\mathbf{x})}{F_1(\mathbf{x})}. \tag{11}$$

В силу (10), (11) и условия $\|\sigma\| < 1$ для любого $\mathbf{x}$ имеем

$$F_1(\mathbf{x}) = F_1(\tau\mathbf{x} - \sigma\mathbf{x}) \leqslant F_1(\tau\mathbf{x}) + F_1(\sigma\mathbf{x}) \leqslant$$
$$\leqslant F_1(\tau\mathbf{x}) + F_2(\sigma\mathbf{x}) \leqslant F_1(\tau\mathbf{x}) + \|\sigma\| F_1(\mathbf{x}) < F_1(\tau\mathbf{x}) + F_1(\mathbf{x}),$$

причем предпоследнее неравенство вытекает из (11) при замене τ на σ. В частности, $F_1(\tau\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, т. е. $\tau\mathbf{x} = \mathbf{o}$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, так что τ — невырожденное преобразование.

Лемма 1 доказана.

2. Наш выбор $\|\tau\|$ для характеристики „размера" преобразования τ довольно произволен. Другой характеристикой может служить число

$$\|\tau\|_F = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{o}} \frac{F(\tau\mathbf{x})}{F(\mathbf{x})}, \tag{12}$$

где F — лучевая функция заданного симметричного выпуклого ограниченного тела. Читатель без труда проверит, что свойства (2), (3) и лемма 1 остаются справедливыми при замене $\|\ \|$ на $\|\ \|_F$. Поскольку для характеристики величины вектора $\mathbf{x}$ мы используем его длину $|\mathbf{x}|$, естественнее всего выбрать в качестве F функцию $F_0(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$. Мы выбрали $\|\tau\|$, так как эта величина имеет простое выражение через коэффициенты τ_{ij}. Во всех важных случаях замена $\|\ \|_F$ на $\|\ \|$ несущественна, поскольку по следствию из леммы 2 гл. IV

$$0 < c_1' \leqslant \frac{\|\tau\|_F}{\|\tau\|} \leqslant c_2' < \infty,$$

где числа c_1' и c_2' зависят только от выбора функции F и не зависят от τ.

3. В дальнейшем нам понадобятся два предложения, касающиеся связи между лучевыми функциями и линейными преобразованиями.

Лемма 2. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — такая лучевая функция, что $F(\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, и пусть τ — линейное преобразование. Тогда найдется такое число c_1, зависящее только от F и τ, что при всех $\mathbf{x}$*

$$F(\tau\mathbf{x}) \leqslant c_1 F(\mathbf{x}).$$

Доказательство. Функция

$$F_1(\mathbf{x}) = F(\tau\mathbf{x})$$

является лучевой. Утверждение тотчас же вытекает из следствия леммы 2 гл. IV.

Лемма 2 доказана.

Если τ — невырожденное преобразование, то мы можем применить лемму 2 к τ^{-1} вместо τ и получить

Следствие. *Если τ — невырожденное преобразование, то найдется такая постоянная c_2, что*

$$F(\mathbf{x}) \leqslant c_2 F(\tau\mathbf{x}).$$

Лемма 3. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — лучевая функция, причем $F(\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Тогда для каждого ε, $0 < \varepsilon < 1$, найдется такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, зависящее только от F и ε, что при любом $\mathbf{x}$*

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{F(\tau\mathbf{x})}{F(\mathbf{x})} \leqslant 1 + \varepsilon \tag{13}$$

для всех однородных линейных преобразований τ с условием[1])

$$\|\tau - \iota\| < \eta. \tag{14}$$

[1]) Как и выше, ι — тождественное преобразование.

Доказательство. По лемме 2 гл. IV найдется такое число $c > 0$, что при всех $\mathbf{x}$

$$F(\mathbf{x}) \geqslant c\,|\mathbf{x}|. \tag{15}$$

Поскольку функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна в шаре $|\mathbf{x}| \leqslant 2$, найдется такое число η_1, $0 < \eta_1 < 1$, что

$$|F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2)| < c\varepsilon,$$

как только

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \eta_1, \quad |\mathbf{x}_1| \leqslant 2, \quad |\mathbf{x}_2| \leqslant 2.$$

В частности, это справедливо при $|\mathbf{x}_2| = 1$, а потому в силу однородности

$$|F(\mathbf{x}_1) - F(\mathbf{x}_2)| < c\varepsilon\,|\mathbf{x}_2|, \tag{16}$$

как только

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| < \eta_1\,|\mathbf{x}_2|. \tag{17}$$

А теперь в силу (5) и (14) имеем

$$|\boldsymbol{\tau}\mathbf{x} - \mathbf{x}| = |(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota})\,\mathbf{x}| \leqslant n^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\|\,|\mathbf{x}| < \eta_1\,|\mathbf{x}|$$

при условии, что $n^{\frac{1}{2}}\eta < \eta_1$, которое можно полагать выполненным.

Но тогда из неравенств (15) и (16) при $\mathbf{x}_1 = \boldsymbol{\tau}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$ вытекает неравенство

$$|F(\boldsymbol{\tau}\mathbf{x}) - F(\mathbf{x})| < \varepsilon F(\mathbf{x}),$$

эквивалентное неравенству (13).

Лемма 3 доказана.

§ 3. Сходимость решеток

1. В § 3 гл. I мы уже видели, что если Λ — решетка, $\boldsymbol{\tau}$ — невырожденное преобразование, то множество точек $\boldsymbol{\tau}\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Lambda$, является решеткой $\boldsymbol{\tau}\Lambda$ с определителем

$$d(\boldsymbol{\tau}\Lambda) = |\det(\boldsymbol{\tau})|\,d(\Lambda). \tag{1}$$

Если M — какая-нибудь другая решетка, ее можно представить в виде

$$\mathrm{M} = \boldsymbol{\tau}\Lambda,$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — некоторое невырожденное однородное преобразование, причем такое представление можно осуществить бесконечно большим количеством способов. Действительно, пусть $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ и $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ — соответственно базисы решеток Λ и M. Существует такое однозначно определенное линейное преобразование $\boldsymbol{\tau}$, что

$$\mathbf{b}_i = \boldsymbol{\tau}\mathbf{a}_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

откуда

$$\mathrm{M} = \boldsymbol{\tau}\Lambda.$$

Мы говорим, что последовательность решеток Λ_r $(1 < r < \infty)$ сходится к решетке Λ', если существуют такие однородные линейные преобразования $\boldsymbol{\tau}_r$, что

$$\Lambda_r = \boldsymbol{\tau}_r\Lambda' \tag{2}$$

и

$$\|\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\iota}\| \to 0 \quad (r \to \infty), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{\iota}$ — тождественное преобразование, а величина $\|\boldsymbol{\tau}\|$ определена в § 2. Тогда мы пишем

$$\Lambda_r \to \Lambda'.$$

Из (1) и (3) немедленно следует, что

$$d(\Lambda_r) \to d(\Lambda').$$

Также совершенно очевидно, что если $\boldsymbol{\alpha}$ — любое невырожденное однородное линейное преобразование, то

$$\boldsymbol{\alpha}\Lambda_r \to \boldsymbol{\alpha}\Lambda'.$$

Действительно,

$$\boldsymbol{\alpha}\Lambda_r = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\tau}_r\boldsymbol{\alpha}^{-1}\{\boldsymbol{\alpha}\Lambda'\}$$

и

$$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\tau}_r\boldsymbol{\alpha}^{-1} - \boldsymbol{\iota} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\iota})\,\boldsymbol{\alpha}^{-1},$$

откуда в силу (3) § 2

$$\|\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\tau}_r\boldsymbol{\alpha}^{-1} - \boldsymbol{\iota}\| \leqslant \|\boldsymbol{\alpha}\|\,\|\boldsymbol{\alpha}^{-1}\|\,\|\boldsymbol{\tau}_r - \boldsymbol{\iota}\| \to 0.$$

Лемма 4. *Для того чтобы последовательность решеток Λ_r $(1 \leqslant r < \infty)$ сходилась к решетке Λ', необходимо и достаточно, чтобы существовали такие базисы*

$$\{\mathbf{b}_1^{(r)}, \ldots, \mathbf{b}_n^{(r)}\}$$

и

$$\{\mathbf{b}_1', \ldots, \mathbf{b}_n'\}$$

решеток Λ_r и Λ' соответственно, что

$$\mathbf{b}_j^{(r)} \to \mathbf{b}_j' \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \quad (r \to \infty). \tag{4}$$

Пределы (4) понимаются в смысле обычной сходимости векторов $|\mathbf{b}_j^{(r)} - \mathbf{b}_j'| \to 0$.

Доказательство. Предположим сначала, что $\Lambda_r \to \Lambda'$ и что $\boldsymbol{\tau}_r$ — преобразование, удовлетворяющее условиям (2) и (3). Выберем любой базис $\{\mathbf{b}_j'\}$ решетки Λ' и положим

$$\mathbf{b}_j^{(r)} = \boldsymbol{\tau}_r\mathbf{b}_j' \quad (1 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant r < \infty). \tag{5}$$

Тогда в силу неравенства (5) § 2 и условия (3) имеем

$$|\mathbf{b}_j^{(r)} - \mathbf{b}_j'| = |(\tau_r - \iota)\,\mathbf{b}_j'| \leqslant n^{\frac{1}{2}} \|\tau_r - \iota\| |\mathbf{b}_j'| \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

Обратно, пусть базисы удовлетворяют условию (4). Равенствами (5) преобразование τ_r определено однозначно. Тогда ясно, что $\|\tau_r - \iota\| \to 0$.

Лемма 4 доказана.

Следующий критерий гораздо менее очевиден.

Теорема I. *Для того чтобы $\Lambda_r \to \Lambda'$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись следующие два условия:*

(i) *если* $\mathbf{a}' \in \Lambda'$, *то найдутся такие точки* $\mathbf{a}^{(r)} \in \Lambda_r$, $r = 1, 2, \ldots$, *что*

$$\mathbf{a}^{(r)} \to \mathbf{a}' \qquad (r \to \infty); \tag{6}$$

(ii) *если* $\mathbf{c}$ *не лежит в* Λ', *то существуют такое число* $\eta > 0$ *и такое целое число* $r_0 > 0$, *оба зависящие от* $\mathbf{c}$, *что*

$$|\mathbf{a}^{(r)} - \mathbf{c}| > \eta \tag{7}$$

для всех $\mathbf{a}^{(r)} \in \Lambda_r$ *при* $r > r_0$.

Доказательство. Покажем, что если $\Lambda_r \to \Lambda'$, то условия (i) и (ii) выполняются. Действительно, в условии (i) нам нужно лишь положить

$$\mathbf{a}^{(r)} = \tau_r \mathbf{a}',$$

где τ_r — такие преобразования, что

$$\Lambda_r = \tau_r \Lambda', \quad \|\tau_r - \iota\| \to 0.$$

Тогда, как и выше,

$$\|\mathbf{a}^{(r)} - \mathbf{a}'\| \leqslant n^{\frac{1}{2}} \|\tau_r - \iota\| |\mathbf{a}'| \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

Чтобы доказать условие (ii), заметим, что всегда найдется такое $\eta_1 > 0$, что для всех $\mathbf{a}' \in \Lambda'$

$$|\mathbf{a}' - \mathbf{c}| > \eta_1. \tag{8}$$

Пусть

$$\eta = \frac{1}{2}\eta_1. \tag{9}$$

Предположим, что нашлась такая точка $\mathbf{a}^{(r)} \in \Lambda_r$, что

$$|\mathbf{a}^{(r)} - \mathbf{c}| \leqslant \eta; \tag{10}$$

тогда

$$|\mathbf{a}^{(r)}| \leqslant |\mathbf{c}| + \eta. \tag{11}$$

По определению преобразования τ_r для некоторого $\mathbf{a}' \in \Lambda'$ имеем

$$\mathbf{a}^{(r)} = \tau_r \mathbf{a}'; \tag{12}$$

тогда

$$\mathbf{a}^{(r)} - \mathbf{a}' = \rho_r \mathbf{a}^{(r)}, \tag{13}$$

где

$$\rho_r = \iota - \tau_r^{-1}.$$

Так как $\|\tau_r - \iota\| \to 0$, то из леммы 1 выводим

$$\|\rho_r\| \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

Таким образом, на основании неравенства (5) § 2 и (11) для всех r, больших некоторого r_0,

$$|\mathbf{a}^{(r)} - \mathbf{a}'| \leqslant n^{\frac{1}{2}} \|\rho_r\| |\mathbf{a}^{(r)}| \leqslant n^{\frac{1}{2}} \|\rho_r\| (|\mathbf{c}| + \eta) < \eta.$$

Отсюда с учетом (9) и (10) получаем

$$|\mathbf{a}' - \mathbf{c}| \leqslant 2\eta = \eta_1,$$

а это противоречит неравенству (8). Следовательно, условие (ii) выполнено.

Теперь нам нужно показать, что если выполнены условия (i) и (ii), то $\Lambda_r \to \Lambda'$. Для доказательства нам понадобится лемма, представляющая и самостоятельный интерес.

Лемма 5. *Пусть* $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ — *линейно независимые точки решетки* Λ, *не составляющие базиса решетки. Тогда* Λ *содержит точку*

$$\mathbf{d} = \vartheta_1 \mathbf{c}_1 + \ldots + \vartheta_n \mathbf{c}_n,$$

где числа $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ *удовлетворяют неравенству*

$$\frac{1}{4} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\vartheta_j| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{14}$$

Доказательство леммы 5. Поскольку совокупность $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ не является базисом, то найдется точка

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{c}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{c}_n$$

решетки Λ такая, что не все числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ целые. Не умаляя общности, можно считать, что

$$|\alpha_j| \leqslant \frac{1}{2} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Пусть t — такое целое неотрицательное число, что

$$\frac{1}{4} \leqslant 2^t \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\alpha_j| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда точка
$$\mathbf{d} = 2^t \mathbf{a}$$
удовлетворяет поставленному условию.

Лемма 5 доказана.

Небольшое уточнение рассуждений, которое мы оставляем читателю, показывает, что в (14) $\frac{1}{4}$ можно заменить на $\frac{1}{3}$, однако большее число поставить уже нельзя.

Возвратимся к доказательству теоремы I. Предположим, что Λ_r и Λ' удовлетворяют условиям (i) и (ii). Пусть $\{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$ — некоторый базис решетки Λ'. В силу условия (i) существует последовательность точек
$$\mathbf{b}_j^{(r)} \to \mathbf{b}'_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n,\ \mathbf{b}_j^{(r)} \in \Lambda_r). \tag{15}$$
Покажем, что $\{\mathbf{b}_j^{(r)}\}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ является базисом решетки Λ_r, за исключением, быть может, конечного числа значений r. Действительно, если бы совокупность $\{\mathbf{b}_1^{(r)}, \ldots, \mathbf{b}_n^{(r)}\}$ не являлась базисом решетки Λ_r, то в силу леммы 5 нашлась бы такая точка
$$\mathbf{d}_r = \vartheta_{1r}\mathbf{b}_1^{(r)} + \ldots + \vartheta_{nr}\mathbf{b}_n^{(r)} \tag{16}$$
решетки Λ, что
$$\frac{1}{4} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\vartheta_{jr}| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{17}$$
Поскольку последовательности ϑ_{jr} ограничены, они содержат в силу классической теоремы Вейерштрасса сходящиеся подпоследовательности (см. п. 2 § 1 гл. III). Пусть, например,
$$\lim_{t\to\infty} \vartheta_{jr_t} = \vartheta'_j, \tag{18}$$
где
$$r_1 < r_2 < \ldots < r_t < \ldots$$
— возрастающая последовательность целых чисел. Тогда в силу (15), (16) и (18)
$$\mathbf{d}' = \sum_{j=1}^{n} \vartheta'_j \mathbf{b}'_j = \lim_{t\to\infty} \mathbf{d}_{r_t}.$$
Поэтому из условия (ii) вытекает, что $\mathbf{d}' \in \Lambda'$. Но это противоречит тому, что $\{\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n\}$ является базисом решетки Λ', ибо из (14) и (15) вытекает неравенство
$$\frac{1}{4} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |\vartheta'_j| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Итак, за исключением конечного числа значений r, $\{\mathbf{b}_1^{(r)}, \ldots, \mathbf{b}_n^{(r)}\}$ — базис решетки Λ_r. Если для таких исключительных r точки $\mathbf{b}_j^{(r)}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ изменить так, чтобы они составляли базис решетки Λ_r при любом r, то эта операция на пределе (15) не отразится. Поэтому из леммы 4 выводим, что критерий является достаточным.

Теорема I доказана.

2. В гл. X нам понадобится понятие окрестности решетки, которое мы мимоходом упомянем также в § 9 этой главы. Говорят, что множество $\mathfrak{L}$ решеток Λ является окрестностью решетки M, если это множество содержит все решетки
$$\Lambda = \tau \mathrm{M}, \tag{1}$$
для которых
$$\|\tau - \iota\| < \eta \tag{2}$$
при некотором $\eta > 0$ (зависящим от $\mathfrak{L}$). Окрестность $\mathfrak{L}$ может содержать и решетки Λ, отличные от тех, которые заданы условиями (1) и (2), но всегда найдется такое $\eta > 0$, что окрестность содержит все решетки указанного вида. Если α — произвольное невырожденное однородное преобразование, мы покажем, что множество $\alpha\mathfrak{L}$ решеток $\alpha\Lambda$, $\Lambda \in \mathfrak{L}$, является окрестностью решетки $\alpha\mathrm{M}$. Действительно, $\alpha\mathfrak{L}$ содержит все решетки
$$\mathrm{N} = \sigma(\alpha\mathrm{M}),$$
для которых
$$\|\sigma - \iota\| < \{\|\alpha\|\,\|\alpha^{-1}\|\}^{-1}\eta,$$
поскольку
$$\mathrm{N} = \alpha\Lambda, \quad \Lambda = \alpha^{-1}\sigma\alpha\mathrm{M},$$
а потому, как и в п. 1,
$$\|\alpha^{-1}\sigma\alpha - \iota\| \leqslant \|\alpha^{-1}\|\,\|\alpha\|\,\|\sigma - \iota\| < \eta.$$

Очевидно, что последовательность решеток Λ_r $(1 \leqslant r < \infty)$ стремится к M тогда и только тогда, когда каждая окрестность решетки M содержит все решетки Λ_r, за исключением их конечного числа.

Отметим (хотя это нам и не понадобится), что в пространстве всех решеток можно ввести метрику. Пусть Λ и M — две решетки, и пусть
$$\mu = \inf\|\sigma - \iota\|, \quad \nu = \inf\|\tau - \iota\|,$$
где точные нижние границы берутся по всем тем невырожденным преобразованиям σ и τ, для которых
$$\Lambda = \sigma\mathrm{M}, \quad \mathrm{M} = \tau\Lambda.$$
Положим
$$\mathsf{D}(\mathrm{M}, \Lambda) = \mathsf{D}(\Lambda, \mathrm{M}) = \max\{\log(1+\mu),\ \log(1+\nu)\}.$$

Тогда имеем неравенство треугольника

$$\mathsf{D}(\Lambda, \mathrm{N}) \leqslant \mathsf{D}(\Lambda, \mathrm{M}) + \mathsf{D}(\mathrm{M}, \mathrm{N}).$$

Действительно, если

$$\Lambda = (\iota + \rho_1)\mathrm{M}, \quad \mathrm{M} = (\iota + \rho_2)\mathrm{N},$$

то

$$\Lambda = (\iota + \rho_3)\mathrm{N},$$

где

$$\|\rho_3\| = \|\rho_1 + \rho_2 + \rho_1\rho_2\| \leqslant \|\rho_1\| + \|\rho_2\| + \|\rho_1\|\,\|\rho_2\|,$$

а потому

$$\log(1 + \|\rho_3\|) \leqslant \log(1 + \|\rho_1\|) + \log(1 + \|\rho_2\|).$$

Определенная выше окрестность является окрестностью ассоциированной с этой метрикой, так как если

$$\Lambda = \sigma\mathrm{M},$$

причем

$$\|\sigma - \iota\| < \eta < 1,$$

то

$$\mathrm{M} = \sigma^{-1}\Lambda,$$

где

$$\|\sigma^{-1} - \iota\| \leqslant \frac{\|\sigma - \iota\|}{1 - \|\sigma - \iota\|} < \frac{\eta}{1 - \eta},$$

а потому

$$\mathsf{D}(\Lambda, \mathrm{M}) < \frac{\eta}{1 - \eta}.$$

3. Непрерывность лучевой функции $F(\mathbf{x})$ точки $\mathbf{x}$ влечет за собой полунепрерывность функции (см. § 4 гл. IV)

$$F(\Lambda) = \inf_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{o}}} F(\mathbf{a}) \tag{1}$$

решетки Λ. Позднее в некоторых приложениях возникнет ситуация, когда лучевая функция F и решетка Λ изменяются одновременно.

Теорема II. *Пусть Λ_r $(1 \leqslant r < \infty)$ — последовательность решеток, сходящаяся к решетке Λ', и пусть $F_r(\mathbf{x})$ $(1 \leqslant r < \infty)$ — последовательность лучевых функций, сходящаяся равномерно в единичном шаре $|\mathbf{x}| < 1$ к лучевой функции $F'(\mathbf{x})$; тогда*

$$F'(\Lambda') \geqslant \limsup_{r \to \infty} F_r(\Lambda_r). \tag{2}$$

Доказательство. Так как при $t > 0$ $F_r(t\mathbf{x}) = tF_r(\mathbf{x})$, то последовательность $F_r(\mathbf{x})$ равномерно сходится к последовательности $F'(\mathbf{x})$ в любом ограниченном множестве точек; в частности из непрерывности функции $F'(\mathbf{x})$ следует, что

$$\lim_{r \to \infty} F_r(\mathbf{a}_r) = F'(\mathbf{a}'),$$

где $\mathbf{a}_r$ — произвольная последовательность точек, сходящаяся к точке $\mathbf{a}'$. Но по теореме I каждая точка $\mathbf{a}' \neq \mathbf{o}$ решетки Λ' является пределом точек $\mathbf{a}_r \neq \mathbf{o}$ решеток Λ_r. Поскольку $F_r(\mathbf{a}_r) \geqslant F_r(\Lambda_r)$, то

$$F'(\mathbf{a}') = \lim_{r \to \infty} F_r(\mathbf{a}_r) \geqslant \limsup_{r \to \infty} F_r(\Lambda_r).$$

Результат (2) теперь следует из определения (1).

Теорема II доказана.

Знак равенства в (2) не обязательно имеет место даже тогда, когда $F_r = F'$ при всех r. Мы отложим построение соответствующего примера до п. 5 § 10. Однако если $F'(\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, т. е. если множество $F'(\mathbf{x}) < 1$ ограничено (лемма 2 гл. IV), то имеет место результат, значительно более сильный, чем теорема II.

Замечание. *Предположим, что выполнены условия теоремы* II *и что $F'(\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$. Тогда предел*

$$\lim_{r \to \infty} F_r(\Lambda_r)$$

существует и равен $F'(\Lambda')$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3. В силу леммы 2 гл. IV найдется такое $c > 0$, что для всех $\mathbf{x}$

$$F'(\mathbf{x}) \geqslant c\,|\mathbf{x}|. \tag{3}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. В силу равномерной сходимости последовательности $F_r(\mathbf{x})$ существует такое r_0, что неравенство

$$|F_r(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{x})| < c\varepsilon \tag{4}$$

имеет место при всех $r \geqslant r_0$ и всех $\mathbf{x}$, лежащих на сфере $|\mathbf{x}| = 1$. Следовательно, для произвольного $\mathbf{x}$ и $r \geqslant r_0$ имеем

$$|F_r(\mathbf{x}) - F'(\mathbf{x})| < c\varepsilon\,|\mathbf{x}| \leqslant \varepsilon F'(\mathbf{x}),$$

так что

$$1 - \varepsilon < \frac{F_r(\mathbf{x})}{F'(\mathbf{x})} < 1 + \varepsilon. \tag{5}$$

Пусть теперь $\Lambda_r = \tau_r\Lambda'$, где τ_r — такое однородное линейное преобразование, что (в обозначениях § 2)

$$\|\tau_r - \iota\| \to 0 \qquad (r \to \infty).$$

Тогда по лемме 3 для всех r, больших некоторого r_1,

$$1 - \varepsilon < \frac{F'(\tau_r\mathbf{x})}{F'(\mathbf{x})} < 1 + \varepsilon. \tag{6}$$

Поэтому, заменив в (6) и (5) $\mathbf{x}$ на $\tau_r\mathbf{x}$, получим, что при $r > \max(r_0, r_1)$

$$(1-\varepsilon)^2 < \frac{F_r(\tau_r\mathbf{x})}{F'(\mathbf{x})} < (1+\varepsilon)^2.$$

Но $\Lambda_r = \tau_r\Lambda'$, а поэтому [1])

$$(1-\varepsilon)^2 \leqslant \frac{F_r(\Lambda_r)}{F'(\Lambda')} \leqslant (1+\varepsilon)^2.$$

Это доказывает замечание, поскольку ε произвольно мало.

4. Из этого замечания почти непосредственно вытекает следующий результат, показывающий, что ни одно ограниченное звездное тело не может иметь последовательных минимумов в смысле § 4 гл. II.

Лемма 6. *Пусть $F(\mathbf{x})$ есть n-мерная лучевая функция, причем $F(\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, и пусть η — произвольное число, удовлетворяющее условию*

$$0 < \eta < \delta(F) = \sup_{\Lambda} \frac{\{F(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)}. \qquad (1)$$

Тогда найдется такая решетка M_η, что

$$\{F(\mathrm{M}_\eta)\}^n = \eta d(\mathrm{M}_\eta).$$

Доказав теорему VI, мы сможем заменить в (1) правый знак $<$ на знак $\leqslant$.

Доказательство. Пусть η удовлетворяет условию (1). Тогда найдется такая решетка N, что

$$\{F(\mathrm{N})\}^n > \eta d(\mathrm{N}). \qquad (2)$$

Пусть $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ — произвольный базис решетки N, и пусть $0 < \varepsilon < 1$; рассмотрим решетку N_ε с базисом

$$\{\varepsilon\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n\}.$$

Тогда

$$d(\mathrm{N}_\varepsilon) = \varepsilon d(\mathrm{N})$$

и

$$F(\mathrm{N}_\varepsilon) \leqslant F(\varepsilon\mathbf{b}_1) = \varepsilon F(\mathbf{b}_1),$$

следовательно,

$$\frac{\{F(\mathrm{N}_\varepsilon)\}^n}{d(\mathrm{N}_\varepsilon)} \leqslant \varepsilon^{n-1}\frac{\{F(\mathbf{b}_1)\}^n}{d(\mathrm{N})} \to 0 \qquad (\varepsilon \to 0). \qquad (3)$$

По замечанию к теореме II $F(\mathrm{N}_\varepsilon)$ — непрерывная функция ε. Поэтому на основании (2) и (3) можно положить для подходящего значения ε $\mathrm{M}_\eta = \mathrm{N}_\varepsilon$.

Лемма 6 доказана.

[1]) Заметим, что в силу леммы 7 гл. IV $F'(\Lambda') \neq 0$.

5. Для полноты изложения сформулируем следующую лемму, интерпретирующую равномерную сходимость последовательности $F_r(\mathbf{x})$ к $F'(\mathbf{x})$ в терминах соответствующих звездных тел

$$\mathscr{S}_r:\quad F_r(\mathbf{x}) < 1 \qquad (1)$$

и

$$\mathscr{S}':\quad F'(\mathbf{x}) < 1. \qquad (2)$$

Поскольку эта лемма нам не понадобится, ее доказательства мы давать не будем, однако читатель получит его без труда, следуя идеям доказательства теоремы I гл. IV.

Лемма 7. *Для того чтобы последовательность лучевых функций $F_r(\mathbf{x})$ сходилась к лучевой функции $F'(\mathbf{x})$ равномерно в шаре $|\mathbf{x}| \leqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы тела $\mathscr{S}_r$ и $\mathscr{S}'$, определенные формулами* (1) *и* (2), *обладали следующими свойствами.*

(i) *Если $\mathbf{c}$ — (внутренняя) точка тела $\mathscr{S}'$, то найдутся такое $\eta > 0$ и такое целое число r_0 (зависящие от $\mathbf{c}$), что все точки $\mathbf{x}$ окрестности $|\mathbf{x}-\mathbf{c}| < \eta$ принадлежат $\mathscr{S}_r$ при $r > r_0$.*

(ii) *Если $\mathbf{c}$ — внешняя точка $\mathscr{S}'$, т. е. $F'(\mathbf{c}) > 1$, то найдутся такие $\eta > 0$ и r_0, что ни одна точка $\mathbf{x}$ окрестности $|\mathbf{x}-\mathbf{c}| < \eta$ не принадлежит телу $\mathscr{S}_r$ ни при каком $r > r_0$.*

§ 4. Компактность решеток

1. В этом параграфе мы займемся условиями, при которых бесконечная последовательность решеток Λ_r содержит подпоследовательность $\mathrm{M}_t = \Lambda_{r_t}$, сходящуюся к решетке M', не обязательно принадлежащей этой последовательности.

Простейшим условием такого рода является предположение, что каждая решетка последовательности имеет базис, все векторы которого лежат в некотором фиксированном шаре

$$|\mathbf{x}| \leqslant R, \qquad (1)$$

а определители $d(\Lambda_r)$ ограничены снизу положительным числом, скажем

$$d(\Lambda_r) \geqslant \varkappa > 0 \qquad (\text{при всех } r). \qquad (2)$$

Поскольку базисы всех решеток лежат в (1), мы можем в силу теоремы Вейерштрасса о точке сгущения найти такую подпоследовательность решеток $\mathrm{M}_t = \Lambda_{r_t}$ с базисами $\{\mathbf{b}_1^{(t)}, \ldots, \mathbf{b}_n^{(t)}\}$, лежащими в (1), что все пределы

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{b}_j^{(t)} = \mathbf{b}_j'$$

существуют. В силу (2)

$$|\det(\mathbf{b}_1', \ldots, \mathbf{b}_n')| = \lim_{t\to\infty} |\det(\mathbf{b}_1^{(t)}, \ldots, \mathbf{b}_n^{(t)})| = \lim_{t\to\infty} d(\mathrm{M}_t) \geqslant \varkappa > 0,$$

и поэтому векторы $\mathbf{b}_1', \ldots, \mathbf{b}_n'$ линейно независимы. Таким образом, существует решетка M' с базисом $\{\mathbf{b}_1', \ldots, \mathbf{b}_n'\}$, и по лемме 4

$$\mathrm{M}_t \to \mathrm{M}' \qquad (t \to \infty).$$

Незначительное обобщение этой идеи приводит к следующей теореме, которая, однако, как окажется, не будет особенно полезной. Мы излагаем эту теорему, с одной стороны, потому, что она представляет исторический интерес, а с другой стороны, потому, что лемма, на которую она опирается, понадобится нам в дальнейшем.

Теорема III. *Пусть Λ_r $(1 \leqslant r < \infty)$ — бесконечная последовательность n-мерных решеток, обладающих следующими двумя свойствами:*

(i) *существует такое число R, что каждая решетка Λ_r имеет в шаре*

$$|\mathbf{x}| \leqslant R$$

n линейно независимых точек;

(ii) *существует такое число $\varkappa > 0$, что при всех r*

$$d(\Lambda_r) \geqslant \varkappa.$$

Тогда последовательность Λ_r содержит подпоследовательность решеток M_t, для которой существует предел

$$\mathrm{M}' = \lim_{t\to\infty} \mathrm{M}_t.$$

Доказательство. Теорема легко выводится из следующей леммы, принадлежащей Малеру [1] и независимо от него доказанной Г. Вейлем [2].

Лемма 8. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — произвольная симметричная выпуклая лучевая функция, и пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ суть n линейно независимых точек решетки Λ. Тогда найдется такой базис $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ решетки Λ, что*

$$F(\mathbf{b}_j) \leqslant \max\left[F(\mathbf{a}_j),\ \frac{1}{2}\{F(\mathbf{a}_1) + \ldots + F(\mathbf{a}_j)\}\right].$$

Перед тем как доказывать лемму 8, покажем, как из нее выводится теорема III. Применим лемму к выпуклой функции $F(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ и к n линейно независимым точкам $\mathbf{a}_1^{(r)}, \ldots, \mathbf{a}_n^{(r)}$ решетки Λ_r, заданным условием (i) теоремы III. Получаем, что решетка Λ_r имеет базис $\{\mathbf{b}_1^{(r)}, \ldots, \mathbf{b}_n^{(r)}\}$, для которого

$$|\mathbf{b}_j^{(r)}| \leqslant \max\left[|\mathbf{a}_j^r|,\ \frac{1}{2}\{|\mathbf{a}_1^{(r)}| + \ldots + |\mathbf{a}_j^{(r)}|\}\right] \leqslant n\frac{R}{2}.$$

Тем самым мы свели теорему III к тривиальному случаю, рассмотренному в начале параграфа, с заменой R на $n\dfrac{R}{2}$.

Доказательство леммы 8. По теореме I гл. I найдется такой базис $\{\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n\}$ решетки Λ, что

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= v_{11}\mathbf{c}_1, \\ \mathbf{a}_2 &= v_{21}\mathbf{c}_1 + v_{22}\mathbf{c}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{a}_n &= v_{n1}\mathbf{c}_1 + \ldots + v_{nn}\mathbf{c}_n, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где v_{ij} — целые числа и $v_{ii} \neq 0$. Рассмотрим точки $\mathbf{b}_j$ решетки Λ, записываемые в виде

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{c}_j + t_{j,\,j-1}\mathbf{a}_{j-1} + \ldots + t_{j1}\mathbf{a}_1 \in \Lambda, \tag{4}$$

где рациональные числа t_{ji} $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ подлежат определению. Точки $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ составляют базис решетки Λ для любых наборов чисел t_{ji}, для которых $\mathbf{b}_j \in \Lambda$.

Для каждого j мы будем различать два случая. Если $v_{jj} = \pm 1$, положим $\mathbf{b}_j = \pm \mathbf{a}_j$. Ясно, что эта точка имеет вид (4), причем

$$F(\mathbf{b}_j) = F(\mathbf{a}_j).$$

В противном случае $|v_{jj}| \geqslant 2$. Разрешая систему (3) относительно $\mathbf{c}_j$, получаем

$$\mathbf{c}_j = v_{jj}^{-1}\mathbf{a}_j + k_{j,\,j-1}\mathbf{a}_{j-1} + \ldots + k_{j1}\mathbf{a}_1, \tag{5}$$

где k_{ji} — некоторые рациональные числа. Определим в (4) целые числа t_{ji} так, чтобы

$$|k_{ji} + t_{ji}| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда $\mathbf{b}_j \in \Lambda$ и

$$\mathbf{b}_j = l_{jj}\mathbf{a}_j + l_{j,\,j-1}\mathbf{a}_{j-1} + \ldots + l_{j1}\mathbf{a}_1, \tag{6}$$

где

$$|l_{jj}| = |v_{jj}^{-1}| \leqslant \frac{1}{2}$$

и

$$|l_{ji}| = |k_{ji} + t_{ji}| \leqslant \frac{1}{2} \qquad (i < j).$$

Далее, в силу выпуклости, симметричности и однородности функции $F(\mathbf{x})$ имеем

$$\begin{aligned} F(\mathbf{b}_j) &\leqslant F(l_{jj}\mathbf{a}_j) + \ldots + F(l_{j1}\mathbf{a}_1) = \\ &= |l_{jj}|\,F(\mathbf{a}_j) + \ldots + |l_{j1}|\,F(\mathbf{a}_1) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\{F(\mathbf{a}_j) + \ldots + F(\mathbf{a}_1)\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Лемма 8, а с ней и теорема III доказаны.

Когда $F(\mathbf{x})$ является обычной евклидовой метрикой, $F(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$, рассуждения, принадлежащие Ремаку [3], приводят к более сильному результату; см. также ван дер Варден [1].

Если

$$F(\mathbf{a}_1) \leqslant F(\mathbf{a}_2) \leqslant \ldots \leqslant F(\mathbf{a}_n), \tag{8}$$

то лемма 8 приводит (при $n \geqslant 2$) к неравенству

$$F(\mathbf{b}_j) \leqslant \frac{n}{2} F(\mathbf{a}_j).$$

2. Малеру [5] мы обязаны критерием существования в последовательности решеток сходящейся подпоследовательности. Этот критерий имеет гораздо больше приложений, чем теорема III, и можно сказать, что он совершенно изменил подход к этой теме. Для доказательства своего критерия Малер, используя теорию последовательных минимумов [1]) шара, установил его эквивалентность критерию теоремы III. Рассуждения Малера [2]) мы изложим в гл. VIII, когда будем рассматривать последовательные минимумы. Здесь же мы дадим прямой подход, принадлежащий Шаботи [2] [3]), который показал, что критерий Малера очень интересно переносится на более общий случай (подгруппы локально компактных топологических групп). Критерий Малера состоит в следующем предложении.

Теорема IV. *Пусть Λ_r — бесконечная последовательность решеток, удовлетворяющая следующим двум условиям:*

(i) *для любой решетки Λ_r*

$$d(\Lambda_r) \leqslant K,$$

причем K не зависит от r.

(ii) *для всех r $|\Lambda_r| \geqslant \varkappa > 0$, причем $\varkappa$ не зависит от r, и, как обычно,*

$$|\Lambda| = \inf_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{o}}} |\mathbf{a}|.$$

Тогда последовательность Λ_r содержит подпоследовательность $\mathrm{M}_t = \Lambda_{r_t}$, сходящуюся к пределу M'.

Доказательство проводим по индукции. Результатом j-го шага ($1 \leqslant j \leqslant n$) является следующее утверждение.

[1]) Не смешивать с совершенно другим понятием последовательных минимумов, рассмотренным в гл. II.

[2]) Читатель вместо изучения доказательства, данного здесь, может перейти к чтению § 1 и 2 гл. VIII, которые не зависят от промежуточного материала.

[3]) Как отмечает проф. Касселс в своем письме, он пришел к выводу, что изложение самого Шаботи [2] проще приводимого здесь. — *Прим. ред.*

($\mathfrak{S}_j$) существуют j линейно независимых точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j$ и подпоследовательность $\mathrm{N}_t = \mathrm{N}_t^{(j)}$ ($1 \leqslant t < \infty$) последовательности Λ_r, удовлетворяющие следующим условиям:

($\mathfrak{S}'_j$) каждая точка $\mathbf{a}_l$ ($1 \leqslant l \leqslant j$) является пределом последовательности точек

$$\mathbf{a}_l^{(t)} \in \mathrm{N}_t = \mathrm{N}_t^{(j)}; \tag{1}$$

($\mathfrak{S}''_j$) пусть $t_1 < t_2 < \ldots$ — произвольная возрастающая последовательность целых чисел, и пусть существуют такие точки $\mathbf{c}_{t_s} \in \mathrm{N}_{t_s}$, что

$$\lim_{s \to \infty} \mathbf{c}_{t_s} = \gamma_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \gamma_j \mathbf{a}_j, \tag{2}$$

причем $\gamma_1, \ldots, \gamma_j$ — вещественные числа; тогда числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_j$ — целые.

Перед тем как продолжить доказательство теоремы, заметим, что из утверждения ($\mathfrak{S}_j$) вытекает, что решетки $\mathrm{M}_t = \mathrm{N}_t^{(n)}$ сходятся к решетке M' с базисом $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, а условия ($\mathfrak{S}'_j$) и ($\mathfrak{S}''_j$) соответствуют условиям (i) и (ii) теоремы I. Таким образом, достаточно доказать утверждение ($\mathfrak{S}_j$).

Мы не будем давать отдельно доказательство утверждения ($\mathfrak{S}_1$), поскольку оно является простым видоизменением перехода от ($\mathfrak{S}_j$) к ($\mathfrak{S}_{j+1}$). Поэтому во всей последующей части пункта мы будем предполагать, что ($\mathfrak{S}_j$) справедливо для некоторого j, $1 \leqslant j < n$, и выведем из этого предположения утверждение ($\mathfrak{S}_{j+1}$). Последовательность $\mathrm{N}_t^{(j+1)}$ будет подпоследовательностью последовательности $\mathrm{N}_t = \mathrm{N}_t^{(j)}$, а точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j$ для ($\mathfrak{S}_j$) и ($\mathfrak{S}_{j+1}$) берутся одни и те же.

Невырожденное однородное линейное преобразование переменных не отражается ни на справедливости утверждения ($\mathfrak{S}_j$), ни на предположениях теоремы, хотя, вообще говоря, числа K и $\varkappa$ в (i) и (ii) могут измениться. Поэтому, не умаляя общности, можно полагать, что

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{i-1}, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-i}). \tag{3}$$

Определим число ψ уравнением

$$\left(\frac{3}{4}\right)^j \psi^{n-j} = K, \tag{4}$$

где K — число, указанное в предположении (i) теоремы. По теореме III гл. III каждая решетка N_t содержит такую точку $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, что [1])

$$\left.\begin{aligned} |x_l| &\leqslant \frac{3}{4} \quad (1 \leqslant l \leqslant j), \\ |x_l| &\leqslant \psi \quad (j+1 \leqslant l \leqslant n). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

[1]) Единственное свойство дроби 3/4, используемое нами, заключается в том, что она удовлетворяет неравенствам $1/2 < 3/4 < 1$.

Пусть $\mathbf{c}^{(t)}$ — одна из конечного числа точек решетки N_t, отличных от $\mathbf{o}$ и удовлетворяющих условию (5), для которой число

$$\max_{j+1 \leqslant i \leqslant n} |x_i| \tag{6}$$

является наименьшим. Поскольку последовательность $\mathbf{c}^{(t)}$ находится в ограниченном множестве (5), она содержит сходящуюся подпоследовательность, например

$$\mathbf{c}^{(t_s)} \to \mathbf{a}_{j+1} \tag{7}$$

где

$$t_1 < t_2 < \ldots .$$

Пусть

$$\mathbf{a}_{j+1} = (A_1, \ldots, A_n), \tag{8}$$

так что

$$\left.\begin{aligned} |A_i| &\leqslant \tfrac{3}{4} \quad (1 \leqslant i \leqslant j), \\ |A_i| &\leqslant \psi \quad (j+1 \leqslant i \leqslant n). \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Предположим сначала, что $A_{j+1} = \ldots = A_n = 0$; тогда точка $\mathbf{a}_{j+1}$ линейно зависит от точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j$. Мы предполагаем, что утверждение $(\mathfrak{S}_j)$ справедливо. Поэтому в силу (7) можно применить $(\mathfrak{S}_j'')$ при $\gamma_i = A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant j)$. Тогда из (9) вытекает, что $A_1 = \ldots = A_j = 0$, откуда

$$\lim_{s\to\infty} \mathbf{c}^{(t_s)} = \mathbf{o},$$

что противоречит условию (ii) теоремы, поскольку $\mathbf{c}^{(t_s)} \in \mathrm{N}_{t_s} = \Lambda_r$ при некотором r и $\mathbf{c}^{(t_s)} \neq \mathbf{o}$. Таким образом, векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j+1}$ линейно независимы. Положим $\Gamma_s = \mathrm{N}_{t_s}$ и покажем, что утверждение $(\mathfrak{S}_{j+1})$ имеет место при $\mathrm{N}_s^{(j+1)} = \Gamma_s$.

Условие $(\mathfrak{S}_{j+1}')$ тривиально. Для точки $\mathbf{a}_{j+1}$ условие $(\mathfrak{S}_{j+1}')$ вытекает из (7), а для остальных точек $\mathbf{a}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant j)$ условие $(\mathfrak{S}_{j+1}')$ вытекает из $(\mathfrak{S}_j')$, поскольку Γ_s — подпоследовательность последовательности N_t.

Остается доказать условие $(\mathfrak{S}_{j+1}'')$. Предположим противное: пусть найдется такая возрастающая последовательность целых чисел

$$s_1 < s_2 < \ldots < s_m < \ldots \tag{10}$$

и векторов

$$\mathbf{d}^{(s_m)} \in \Gamma_{s_m},$$

что

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{d}^{(s_m)} = \mathbf{d} = \delta_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \delta_{j+1} \mathbf{a}_{j+1}, \tag{11}$$

где не все числа $\delta_1, \ldots, \delta_{j+1}$ — целые. В силу уже доказанного условия $(\mathfrak{S}_{j+1}')$ мы можем прибавлять к правой части равенства (11) целые кратные точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j+1}$, производя соответствующее изменение последовательности $\mathbf{d}^{(s_m)}$. Поэтому мы можем предполагать, во-первых, что

$$|\delta_{j+1}| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{12}$$

а, во-вторых, в силу (3), что

$$|d_i| \leqslant \frac{1}{2} < \frac{3}{4} \quad (1 \leqslant i \leqslant j), \tag{13}$$

где, как обычно, $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$. Из (8) и (12) вытекает, что

$$\max_{j+1 \leqslant i \leqslant n} |d_i| \begin{cases} = |\delta_{j+1}| \max\limits_{j+1 \leqslant i \leqslant n} |A_i| \leqslant \frac{1}{2} \max\limits_{j+1 \leqslant i \leqslant n} |A_i|, & (14) \\ < \psi. & (15) \end{cases}$$

Покажем теперь, что это противоречит определению векторов $\mathbf{c}^{(t)}$ как векторов $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ решетки N_t, удовлетворяющих условию (5), для которых число (6) минимально. Поскольку $\mathbf{c}^{(t_s)} \to \mathbf{a}_{j+1}$,

$$\lim_{r\to\infty} \max_{j+1 \leqslant i \leqslant n} |c_{it_s}| = \max_{j+1 \leqslant i \leqslant n} |A_i|, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{c}^{(t)} = (c_{1t}, \ldots, c_{nt}).$$

В силу (13) и (15) для достаточно большого m вектор $\mathbf{d}^{(s_m)}$ заведомо лежит в области, заданной условием (5). Более того, $\mathbf{d}^{(s_m)} \in \mathrm{N}_T$ при $T = t_{s_m}$. Однако в силу (14) и (16) для достаточно большого m функция (6), во всяком случае, больше для вектора $\mathbf{c}^{(T)}$, чем для вектора $\mathbf{d}^{(s_m)}$, а это противоречит выбору вектора $\mathbf{c}^{(T)}$. Противоречие показывает, что если имеет место равенство (11), то все числа $\delta_1, \ldots, \delta_{j+1}$ целые. Таким образом, условие $(\mathfrak{S}_{j+1}'')$ справедливо.

Итак, утверждение $(\mathfrak{S}_{j+1})$ следует из утверждения $(\mathfrak{S}_j)$.

Теорема IV доказана.

Отметим другую формулировку критерия, часто удобную для приложений и не зависящую от специальной лучевой функции $|\mathbf{x}|$.

Следствие. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — произвольная лучевая функция, и пусть Λ_r — любая бесконечная последовательность решеток, причем*

(i) *при всех r $d(\Lambda_r) \leqslant K$, где K не зависит от r;*

(ii) *при всех r $F(\Lambda_r) \geqslant \varkappa > 0$, где $\varkappa$ не зависит от r, и, как обычно,*

$$F(\Lambda) = \inf_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{o}}} F(\mathbf{a}).$$

Тогда последовательность Λ_r содержит сходящуюся подпоследовательность.

Действительно, в силу леммы 1 гл. IV найдется такое число $C > 0$, что $F(\mathbf{x}) \leqslant C|\mathbf{x}|$, откуда

$$|\Lambda_r| \geqslant C^{-1}F(\Lambda_r) \geqslant C^{-1}\varkappa > 0.$$

3. Почти непосредственным следствием теоремы IV является следующее предложение (Малер [12]).

Теорема V. *Пусть $\mathcal{S}$ — любое открытое множество, а $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \ldots, \mathcal{S}_r, \ldots$ — такая последовательность открытых подмножеств $\mathcal{S}$, что*

(i) *$\mathcal{S}_r$ лежит в $\mathcal{S}_t$ при $r < t$;*

(ii) *начало координат является внутренней точкой подмножества $\mathcal{S}_1$;*

(iii) *каждая точка $\mathbf{x}$ множества $\mathcal{S}$ лежит в $\mathcal{S}_r$ для некоторого r.*

Тогда

$$\Delta(\mathcal{S}) = \lim_{r\to\infty} \Delta(\mathcal{S}_r).$$

Доказательство. Вспомним, что $\Delta(\mathcal{S})$ является точной нижней границей определителей $d(\Lambda)$, взятой по всем $\mathcal{S}$-допустимым решеткам Λ, т. е. по Λ, имеющим в $\mathcal{S}$ единственную точку $\mathbf{o}$. Ясно, что для всех r

$$\Delta(\mathcal{S}_r) \leqslant \Delta(\mathcal{S}). \tag{1}$$

Предположим, что

$$\liminf_{r\to\infty} \Delta(\mathcal{S}_r) < \Delta(\mathcal{S}). \tag{2}$$

Тогда найдется такая возрастающая последовательность целых чисел $r_1 < r_2 < \ldots$ и такая последовательность решеток Λ_{r_t}, что

$$\lim_{t\to\infty} d(\Lambda_{r_t}) < \Delta(\mathcal{S}),$$

причем решетки Λ_{r_t} являются $\mathcal{S}_{r_t}$-допустимыми. В силу условия (ii) и теоремы IV из последовательности Λ_{r_t} можно выделить такую сходящуюся подпоследовательность решеток, что, не умаляя общности,

$$\lim_{t\to\infty} \Lambda_{r_t} = \Lambda', \quad d(\Lambda') < \Delta(\mathcal{S}).$$

Следовательно, в $\mathcal{S}$ найдется точка $\mathbf{p} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ'. Тогда ввиду (iii) для некоторого R $\mathbf{p} \in \mathcal{S}_R$. Поскольку по предположению $\mathcal{S}_r$ — открытое множество, из условия (i) выводим, что найдется окрестность

$$|\mathbf{x} - \mathbf{p}| < \eta, \tag{3}$$

каждая точка которой лежит в $\mathcal{S}_r$ для всех $r \geqslant R$.

Но тогда по теореме I

$$\mathbf{p} = \lim_{r\to\infty} \mathbf{p}^{(r)}, \quad \mathbf{p}^{(r)} \in \Lambda_r.$$

Поэтому для всех r, больших некоторого r_1, $\mathbf{x} = \mathbf{p}^{(r)}$ удовлетворяет неравенству (3). При $r > \max(R, r_1)$ это означает, что вопреки нашему предположению $\mathbf{p}_r$ лежит в $\mathcal{S}$. Противоречие возникло из предположения о том, что выполнено неравенство (2). Остается учесть (1).

Теорема V доказана.

Если $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}_r$ являются звездными телами, то теорема V непосредственно[1]) вытекает из теоремы II, но в гл. VIII нам придется применять теорему V в случае, когда $\mathcal{S}$ не является звездным телом.

Следствие. *Пусть при $1 \leqslant r < \infty$ имеются $\mathcal{S}_r$-допустимые решетки Λ_r, причем для некоторого Δ_1*

$$d(\Lambda_r) = \Delta_1.$$

Тогда найдется $\mathcal{S}$-допустимая решетка Λ с определителем $d(\Lambda) = \Delta_1$.

§ 5. Критические решетки

1. Пусть $F(\mathbf{x})$ — лучевая функция. Может оказаться, что $F(\Lambda) = 0$ для каждой решетки Λ. В таком случае мы, следуя Малеру, говорим, что лучевая функция и соответствующее звездное тело имеют бесконечный тип (в противном случае мы говорим, что тело имеет конечный тип). Примером двумерной лучевой функции бесконечного типа является

$$F(\mathbf{x}) = |x_1^2 x_2|^{\frac{1}{3}}.$$

Действительно, для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ по теореме III гл. III любая решетка Λ с определителем $d(\Lambda) = d$ содержит такую точку $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \neq \mathbf{o}$, что

$$|a_1| \leqslant \varepsilon, \quad |a_2| \leqslant \frac{d}{\varepsilon}.$$

Тогда

$$F(\mathbf{a}) \leqslant |\varepsilon d|^{\frac{1}{3}}$$

сколь угодно мало, так что $F(\Lambda) = 0$. Далеко не всегда легко решить, какой тип имеет лучевая функция. Например, это неизвестно

[1]) Если $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}_r$ — звездные тела с лучевыми функциями $F(\mathbf{x})$ и $F_r(\mathbf{x})$, то из условия теоремы V вытекает, что для любого $\mathbf{x}$ последовательность $F_r(\mathbf{x})$ монотонно сходится к $F(\mathbf{x})$. Поскольку $F_r(\mathbf{x})$ и $F(\mathbf{x})$ — непрерывные функции, эта сходимость должна быть равномерной; поэтому применима теорема II.

в случае пятимерных лучевых функций

$$F(\mathbf{x}) = |x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_5^2|^{\frac{1}{2}}$$

и

$$F(\mathbf{x}) = |x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 - x_5^2|^{\frac{1}{2}}.$$

В этом случае проблема нахождения типа функции эквивалентна проблеме представления сколь угодно малого числа (включая и нетривиальные представления нуля) любыми неопределенными квадратичными формами от пяти переменных, когда последние принимают целые значения (см. § 3 гл. I). Классическая теорема Мейера гласит, что если коэффициенты формы рациональны, то она представляет нуль. Недавно Давенпорт и затем Берч исследовали эту проблему, но, по-видимому, занимались только неопределенными формами от более чем пяти переменных (см. Давенпорт [20] и более позднюю работу Давенпорта и Берча). Результаты гл. VI и X иногда дают возможность решить, имеет ли данная лучевая функция $F(\mathbf{x})$ конечный тип или нет, однако, за исключением этого, известно очень мало. Относительно других нерешенных проблем такого рода с важными следствиями см. Касселс и Суиннертон-Дайер [1].

Большая часть исследований в геометрии чисел связана с лучевыми функциями F конечного типа. В этом случае число

$$\delta(F) = \sup_{\Lambda} \frac{\{F(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)} \tag{1}$$

строго положительно. Тогда по теореме VII гл. IV

$$0 < \delta(F) < \infty \tag{2}$$

и

$$\delta(F)\,\Delta(\mathscr{S}) = 1, \tag{3}$$

где $\Delta(\mathscr{S})$ — критический определитель множества $\mathscr{S}$

$$F(\mathbf{x}) < 1. \tag{4}$$

Напомним, что критической решеткой множества $\mathscr{S}$ является $\mathscr{S}$-допустимая решетка Λ с определителем $d(\Lambda) = \Delta(\mathscr{S})$ (§ 5 гл. III). Общая теорема Малера утверждает, что если множество $\mathscr{S}$ вида (4) имеет допустимые решетки, то оно всегда имеет критические решетки.

Теорема VI. *Пусть лучевая функция $F(\mathbf{x})$ имеет конечный тип. Тогда найдется такая решетка Λ, что*

$$F(\Lambda) = 1, \quad d(\Lambda) = \{\delta(F)\}^{-1} = \Delta(\mathscr{S}),$$

где число $\delta(F)$ определено равенством (1), *а $\Delta(\mathscr{S})$ — критический определитель области* (4).

Доказательство. По определению числа $\Delta(\mathscr{S})$ существует такая последовательность решеток Λ_r, что

$$F(\Lambda_r) \geqslant 1, \quad d(\Lambda_r) \to \Delta(\mathscr{S}). \tag{5}$$

Применим следствие 1 теоремы IV; условия (i) и (ii) этого следствия в силу (5) выполнены. Существует сходящаяся подпоследовательность решеток, и поэтому, изменив обозначения, можно считать, что

$$\Lambda_r \to \Lambda'$$

для некоторой решетки Λ'. В силу (5)

$$d(\Lambda') = \lim_{r\to\infty} d(\Lambda_r) = \Delta(\mathscr{S}).$$

Применяя (5) и теорему II, получаем

$$F(\Lambda') \geqslant \lim_{r\to\infty} \sup F(\Lambda_r) \geqslant 1.$$

Если бы $F(\Lambda') > 1$, то нашлось бы такое положительное число $\vartheta < 1$, что

$$F(\vartheta\Lambda') \geqslant 1, \quad d(\vartheta\Lambda') = \vartheta^n d(\Lambda') < \Delta(\mathscr{S}),$$

что противоречит определению числа $\Delta(\mathscr{S})$ как точной нижней границы. Поэтому $F(\Lambda') = 1$.

Теорема VI доказана.

Таким образом, при вычислении $\Delta(\mathscr{S})$ для звездных тел мы можем ограничиться критическими решетками.

Имеется иная формулировка теоремы VI, в которой нет необходимости различать случай $\delta(F) = 0$ и случай $\delta(F) > 0$.

Следствие. *Для каждой лучевой функции $F(\mathbf{x})$ в n-мерном пространстве найдется такая решетка* M, *что*

$$d(\mathrm{M}) = 1$$

и

$$\{F(\mathrm{M})\}^n = \delta(F) = \sup_{\Lambda} \frac{\{F(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)}.$$

Действительно, если $\delta(F) = 0$, то годится любая решетка M с определителем $d(\mathrm{M}) = 1$. В противном случае подходит решетка $\mathrm{M} = \vartheta\Lambda'$, где Λ' — критическая решетка, а число ϑ выбрано так, что $d(\mathrm{M}) = 1$.

2. Естественно предположить, что каждая критическая решетка Λ звездного тела

$$\mathscr{S}\colon\ F(\mathbf{x}) < 1$$

должна содержать точку $\mathbf{a}$, для которой $F(\mathbf{a}) = 1$, однако оказывается, что это неверно даже для двумерных звездных тел. Мы построим здесь опровергающий пример, используя процесс последовательных минимумов, рассмотренный в § 4 гл. II. Пусть

$$F_0(\mathbf{x}) = |x_1 x_2|^{\frac{1}{2}}. \tag{1}$$

Из теоремы IV гл. I, сформулированной в наших новых терминах, следует, что

$$\{F_0(\Lambda)\}^2 \leqslant \frac{d(\Lambda)}{8^{\frac{1}{2}}}. \tag{2}$$

Исключение представляет случай, когда Λ — решетка Λ_c с таким базисом

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11},\ a_{21}),\quad \mathbf{a}_2 = (a_{12},\ a_{22}), \tag{3}$$

что при некотором k равенство

$$(u_1 a_{11} + u_2 a_{12})(u_1 a_{21} + u_2 a_{22}) = k(u_1^2 + u_1 u_2 - u_2^2) \tag{4}$$

выполняется тождественно относительно u_1, u_2. В этом случае

$$\{F_0(\Lambda_c)\}^2 = \frac{d(\Lambda_c)}{5^{\frac{1}{2}}}, \tag{5}$$

в частности

$$\delta(F_0) = 5^{-\frac{1}{2}}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь лучевую функцию

$$F_1(\mathbf{x}) = F_0(\mathbf{x})\left[1 + \frac{|x_1 x_2|}{100\{|x_1| + |x_2|\}^2}\right], \tag{7}$$

так что

$$F_0(\mathbf{x}) \leqslant F_1(\mathbf{x}) \leqslant \frac{401}{400} F_0(\mathbf{x}). \tag{8}$$

Из (8) и (2) или (5) вытекает, что если $\Lambda \neq \Lambda_c$, то

$$\{F_1(\Lambda)\}^2 \leqslant \left(\frac{401}{400}\right)^2 \frac{d(\Lambda)}{8^{\frac{1}{2}}}, \tag{9}$$

а если $\Lambda = \Lambda_c$, то

$$\{F_1(\Lambda_c)\}^2 \geqslant \frac{d(\Lambda_c)}{5^{\frac{1}{2}}}. \tag{10}$$

Так как

$$8^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{401}{400}\right)^2 < 5^{-\frac{1}{2}},$$

то критической решеткой тела $F_1(\mathbf{x}) < 1$ может быть только Λ_c.

Теперь покажем, что в (10) имеет место равенство. Поменяв, если нужно, x_1 и x_2 местами и разложив на множители правую часть

равенства (4), можно считать, что

$$u_1 a_{11} + u_2 a_{12} = a_{11}(u_1 + \omega u_2),$$
$$u_1 a_{21} + u_2 a_{22} = a_{21}(u_1 + \psi u_2),$$

где

$$2\omega = 1 + 5^{\frac{1}{2}},\quad 2\psi = 1 - 5^{\frac{1}{2}},\quad k = a_{11} a_{21};$$

таким образом,

$$\omega\psi = -1.$$

Поскольку

$$\omega^2 = \omega + 1,\quad \psi^2 = \psi + 1,$$

то для любого положительного целого t и некоторых целых $u_1^{(t)}$, $u_2^{(t)}$

$$\omega^t = u_1^{(t)} + u_2^{(t)}\omega,\quad \psi^t = u_1^{(t)} + u_2^{(t)}\psi.$$

Таким образом, найдется

$$\mathbf{y}^{(t)} = (a_{11}\omega^t,\ a_{21}\psi^t) \in \Lambda_c.$$

Однако ввиду того что $\omega\psi = -1$, мы имеем

$$F_1(\mathbf{y}^{(t)}) = |a_{11}a_{21}|^{\frac{1}{2}}\left[1 + \frac{|a_{11}a_{21}|}{100\{|a_{11}|\omega^t + a_{21}\omega^{-t}\}^2}\right] \to |a_{11}a_{21}|^{\frac{1}{2}} = k^{\frac{1}{2}}$$

при $t \to \infty$. Следовательно,

$$\{F_1(\Lambda_c)\}^2 \leqslant k = \frac{d(\Lambda_c)}{5^{\frac{1}{2}}}.$$

Отсюда, учитывая (10), получаем

$$\{F_1(\Lambda_c)\}^2 = \frac{d(\Lambda_c)}{5^{\frac{1}{2}}}.$$

Но теперь, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ — точка решетки Λ_c, то, очевидно,

$$\{F_1(\mathbf{a})\}^2 > \{F_0(\mathbf{a})\}^2 \geqslant \frac{d(\Lambda_c)}{5^{\frac{1}{2}}}.$$

В частности, если $k = 1$, то $d(\Lambda_c) = 5^{\frac{1}{2}} = \Delta(\mathscr{S}_1)$, где $\mathscr{S}_1$ — область $F_1(\mathbf{x}) < 1$, и точек $\mathbf{a}$ решетки Λ_c на границе $F_1(\mathbf{x}) = 1$ тела $\mathscr{S}_1$ не существует.

С помощью аналогичных рассуждений, используя, как и здесь, процесс последовательных минимумов, Роджерс (C. A. Rogers) [3] построил такую лучевую функцию $F(\mathbf{x})$, что критическая решетка неограниченного звездного тела $F(\mathbf{x}) < 1$ имеет только одну пару точек $\pm \mathbf{a}$, для которых $F(\pm \mathbf{a}) = 1$. Все остальные точки $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ при некотором явно заданном $t > 1$ удовлетворяют неравенству $F(\mathbf{b}) \geqslant t$. Этот факт составляет поразительный контраст с результатами, которые мы получим в § 6 для ограниченных звездных тел.

§ 6. Ограниченные звездные тела

1. Очень много известно о критических решетках ограниченных звездных тел (см., в частности, Малер [5] и весьма детальное исследование двумерного случая — Малер [4]). В противоположность отрицательному результату п. 2 § 5 теперь имеет место следующее предложение.

Теорема VII. *Каждая критическая решетка ограниченного звездного тела $\mathscr{S}$ имеет n линейно независимых точек на границе тела $\mathscr{S}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда найдется такой базис $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ решетки Λ, что для любой точки

$$\mathbf{p} = u_1\mathbf{b}_1 + \ldots + u_n\mathbf{b}_n \quad (u_1, \ldots, u_n \text{ — целые числа}) \qquad (1)$$

решетки Λ, лежащей на границе тела $\mathscr{S}$, $u_n = 0$. Поскольку $\mathscr{S}$ ограничено, найдется такое число Y, что если точка

$$y_1\mathbf{b}_1 + \ldots + y_n\mathbf{b}_n$$

с вещественными $y_1, \ldots, y_n$ лежит либо в $\mathscr{S}$, либо на границе тела $\mathscr{S}$, то заведомо

$$|y_i| \leqslant Y \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Пусть число ε удовлетворяет условиям

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2},$$

и пусть Λ_ε — решетка с базисом

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1} \quad \text{и} \quad (1-\varepsilon)\mathbf{b}_n.$$

Рассмотрим точку решетки Λ_ε

$$\mathbf{p}_\varepsilon = u_1\mathbf{b}_1 + \ldots + u_{n-1}\mathbf{b}_{n-1} + u_n(1-\varepsilon)\mathbf{b}_n \qquad (2)$$

с целыми $u_1, \ldots, u_n$. Если $u_n = 0$, то точка $\mathbf{p}_\varepsilon$ лежит в Λ, а потому либо на границе $\mathscr{S}$, либо вне $\mathscr{S}$. Если

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |u_j| > 2Y,$$

то $\mathbf{p}_\varepsilon$ заведомо лежит вне $\mathscr{S}$.

Поэтому нам достаточно рассмотреть только те точки, для которых

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |u_j| \leqslant 2Y, \quad u_n \neq 0. \qquad (3)$$

Но для таких u_j соответствующая точка $\mathbf{p}$, заданная формулой (1), является внешней точкой тела $\mathscr{S}$, поскольку $u_n \neq 0$, т. е. некоторая окрестность точки $\mathbf{p}$ лежит вне $\mathscr{S}$. Следовательно, для всех ε, меньших некоторого ε_0, точки $\mathbf{p}_\varepsilon$ не лежат в $\mathscr{S}$. Число ε_0 зависит от $u_1, \ldots, u_n$. Но в силу условия (3) имеется только конечное число подлежащих рассмотрению совокупностей $u_1, \ldots, u_n$. Поэтому для достаточно малого ε (зависящего только от Y) решетка Λ_ε является $\mathscr{S}$-допустимой. Однако теперь

$$d(\Lambda_\varepsilon) = (1-\varepsilon)\, d(\Lambda) = (1-\varepsilon)\, \Delta(\mathscr{S}),$$

так как по предположению Λ — критическая решетка. Но это противоречит определению числа $\Delta(\mathscr{S})$ как точной нижней границы определителей допустимых решеток.

Теорема VII доказана.

Случаи, когда может быть только n пар линейно независимых точек $\pm \mathbf{a}_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ критической решетки на границе тела $\mathscr{S}$, являются исключительными.

Весьма удивительно, однако, что по крайней мере при $n = 2$ для звездного тела может существовать континуум критических решеток, каждая из которых имеет лишь n пар точек на границе (см. Олленшоу [1]).

Следствие. *Предположим, что точки $\pm \mathbf{a}_j (1 \leqslant j \leqslant n)$ являются единственными точками критической решетки Λ, лежащими на границе тела $\mathscr{S}$. Тогда найдется такое ε_0, что все точки*

$$\mathbf{a}_n + \varepsilon_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1}\mathbf{a}_{n-1}, \qquad (4)$$

для которых

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n-1} |\varepsilon_j| \leqslant \varepsilon_0, \qquad (5)$$

лежат либо внутри $\mathscr{S}$, либо на его границе.

Действительно, в силу теоремы точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы, поэтому существует такой базис $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$, что

$$\mathbf{a}_i = v_{i1}\mathbf{b}_1 + \ldots + v_{ii}\mathbf{b}_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \qquad (6)$$

причем v_{ij} — целые, а $v_{ii} \neq 0$. Пусть Λ_η — решетка с базисом

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n^{(\eta)},$$

где

$$\mathbf{b}_n^{(\eta)} = \mathbf{b}_n + \eta_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \eta_{n-1}\mathbf{b}_{n-1}. \qquad (7)$$

а $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ — некоторые вещественные числа. Как и в доказательстве теоремы, можно показать, что если $\max_j |\eta_j|$ — достаточно мал, то единственными точками решетки Λ_η, лежащими на границе тела $\mathscr{S}$, являются точки $\pm \mathbf{a}_1, \ldots, \pm \mathbf{a}_{n-1}$ (не меняющиеся при замене точки $\mathbf{b}_n^{(\eta)}$ на $\mathbf{b}_n$) и точка $\pm \mathbf{a}_n^{(\eta)}$, где

$$\mathbf{a}_n^{(\eta)} = v_{n1}\mathbf{b}_1 + \ldots + v_{n,\,n-1}\mathbf{b}_{n-1} + v_{nn}\mathbf{b}_n^{(\eta)}. \tag{8}$$

Однако

$$d(\Lambda_\eta) = |\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n^{(\eta)})| = \\ = |\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)| = d(\Lambda) = \Delta(\mathscr{S});$$

следовательно, либо точка $\mathbf{a}_n^{(\eta)}$ лежит в $\mathscr{S}$ и тогда все доказано, либо $\Lambda_n^{(\eta)}$ — критическая решетка, и тогда в силу теоремы точка $\mathbf{a}_n^{(\eta)}$ лежит на границе тела $\mathscr{S}$. Поскольку каждый вектор вида (4) можно представить в форме (8), где $\max|\eta_i|$ мал вместе с $\max|\varepsilon_j|$, то следствие доказано.

2. Чтобы продолжить изучение точек критической решетки на границе ограниченного звездного тела, нам понадобится оценка определителя $\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$, выраженная через

$$|\mathbf{a}_j| \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

где $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — произвольные n-мерные векторы. Здесь нам достаточно грубой оценки, но, имея в виду дальнейшее, сразу докажем следующее предложение, принадлежащее Адамару.

Лемма 9. *Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ суть n-мерные векторы. Тогда*

$$|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)| \leqslant |\mathbf{a}_1| \ldots |\mathbf{a}_n|$$

Заметим, что простой пример

$$\mathbf{a}_j = \mathbf{e}_j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{j-1}, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-j})$$

показывает, что, вообще говоря, эту оценку нельзя улучшить заменой $\leqslant$ на $<$. Это неравенство является n-мерным аналогом того факта, что объем параллелепипеда не превосходит произведения длин его сторон.

Доказательство леммы 9. Если определитель равен нулю, то нечего доказывать, поэтому можно предполагать, что векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы. Построим такую последовательность векторов $\mathbf{c}_j (1 \leqslant j \leqslant n)$, ортогональных друг другу

$$\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j = 0 \quad (i \neq j), \tag{1}$$

что для некоторых вещественных чисел t_{ij} $(1 \leqslant j < i \leqslant n)$

$$\mathbf{a}_i = t_{i1}\mathbf{c}_1 + \ldots + t_{i,\,i-1}\mathbf{c}_{i-1} + \mathbf{c}_i. \tag{2}$$

Действительно, если $\mathbf{c}_1 = \mathbf{a}_1$, а $\mathbf{c}_i$ определен рекурсивной формулой

$$\mathbf{c}_i = \mathbf{a}_i - \sum_{j<i} (\mathbf{a}_i\mathbf{c}_j)\,|\mathbf{c}_j|^{-2}\,\mathbf{c}_j,$$

то легко проверить, что вектор $\mathbf{c}_i$ обладает требуемыми свойствами. В силу (1) и (2) имеем

$$|\mathbf{a}_i|^2 = \mathbf{a}_i\mathbf{a}_i = t_{i1}^2|\mathbf{c}_1|^2 + \ldots + t_{i,\,i-1}^2|\mathbf{c}_{i-1}|^2 + |\mathbf{c}_i|^2 \geqslant |\mathbf{c}_i|^2 \tag{3}$$

и

$$\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n). \tag{4}$$

С другой стороны, рассматривая в $\det(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)$ векторы $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$ сначала как строки, а затем как столбцы и перемножая оба определителя, в силу (1) получаем, что[1])

$$\{\det(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)\}^2 = \det\{\mathbf{c}_i\mathbf{c}_j\} = \Pi\,|\mathbf{c}_i|^2. \tag{5}$$

Теперь искомое неравенство вытекает из (3), (4) и (5).

Лемма 9 доказана.

3. Теперь мы сможем показать, что в принципе вычисление $\Delta(\mathscr{S})$ для ограниченного n-мерного звездного тела может быть сведено к решению конечного ряда обычных задач на минимум. За исключением выпуклых тел (относительно которых см. ниже § 7), такой подход практически едва ли эффективен, хотя он может оказаться вполне приемлемым для машинного вычисления.

Не умаляя общности, можно полагать, что тело $\mathscr{S}$ задано формулой

$$\mathscr{S}\colon\ F(\mathbf{x}) < 1, \tag{1}$$

где $F(\mathbf{x})$ — лучевая функция. В силу лемм 1 и 2 гл. IV найдутся такие числа $c > 0$ и C, что

$$c\,|\mathbf{x}| \leqslant F(\mathbf{x}) \leqslant C\,|\mathbf{x}|. \tag{2}$$

В частности, решетка Λ, допустимая для тела $\mathscr{S}$, не имеет точек в шаре

$$|\mathbf{x}| < C^{-1},$$

откуда по теореме Минковского о выпуклом теле

$$d(\Lambda) \geqslant 2^{-n}C^{-n}V_n, \tag{3}$$

где V_n — объем единичного шара $|\mathbf{x}| < 1$.

[1]) Несколько по-иному: можно заметить, что в силу (1) $\left|\sum_i x_i\mathbf{c}_i\right|^2 = \sum x_i^2|\mathbf{c}_i|^2$, и сравнить определители.

Пусть теперь Λ — критическая решетка, так что существуют по меньшей мере n линейно независимых точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ решетки Λ, лежащих на границе $F(\mathbf{x})=1$ тела $\mathcal{S}$. Тогда в силу (2)

$$|\mathbf{a}_j| \leqslant c^{-1} \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{4}$$

так что по лемме 9

$$|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)| \leqslant c^{-n}. \tag{5}$$

Таким образом, используя терминологию гл. I, можно сказать, что индекс I векторов $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ в Λ удовлетворяет неравенству

$$I = \frac{|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)|}{d(\Lambda)} \leqslant \left(\frac{2C}{c}\right)^n V_n^{-1} = I_0. \tag{6}$$

Следовательно, в силу следствий из теоремы I гл. I существует такой базис $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ решетки Λ, что

$$\mathbf{a}_i = v_{i1}\mathbf{b}_1 + \ldots + v_{ii}\mathbf{b}_i, \tag{7}$$

где v_{ij} — целые числа,

$$0 \leqslant v_{ij} < v_{ii} \quad (j < i) \tag{8}$$

и

$$0 < \prod v_{ii} = I \leqslant I_0. \tag{9}$$

Таким образом, для целых чисел v_{ij} имеется только конечное число возможностей. Для каждой совокупности целых чисел v_{ij} точки $\mathbf{a}_i$, лежащие на границе, в силу (6) определяют точки $\mathbf{b}_i$. Точки $\mathbf{a}_i$ должны быть выбраны так, чтобы

$$d(\Lambda) = \frac{|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)|}{v_{11} \ldots v_{nn}}$$

был минимальным, причем ни одна точка Λ не должна лежать в $\mathcal{S}$ и, в частности, должно выполняться неравенство (3). Тогда очевидно, что $\Delta(\mathcal{S})$ — минимум чисел $d(\Lambda)$, взятых по всем так полученным решеткам Λ и по всем выборам чисел v_{ij}.

Покажем теперь, что если Λ — решетка, порожденная лежащими на границе точками $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ и удовлетворяющая условиям (3), (5) — (9), и если $\mathbf{d}$ — любая точка Λ, лежащая в $\mathcal{S}$, то $\mathbf{d}$ имеет вид

$$\mathbf{d} = u_1\mathbf{b}_1 + \ldots + u_n\mathbf{b}_n,$$

где целые числа u_j можно ограничить. Действительно, $|\mathbf{d}| \leqslant c^{-1}$, так что для каждого целого j в силу (4) и леммы Адамара

$$|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{d}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)| \leqslant c^{-n}.$$

Следовательно, если неравенство (3) справедливо, то индекс $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{d}, \mathbf{a}_{j+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ в Λ не превосходит I_0 для $j=1, \ldots, n$. Легко проверить, что этот факт дает ограничение для чисел u_j. Таким образом, в принципе задача нахождения $\Delta(\mathcal{S})$ конечна.

Были вычислены критические определители многих двумерных ограниченных звездных тел. Часть таких тел перечислена Келлером [1]; к ним можно добавить также среди прочих тела, рассмотренные Оллереншоу [1, 2, 4]. Рассмотрение такими методами ограниченного невыпуклого n-мерного тела при $n > 2$ представляется неизбежно трудоемким. Примеры, по-видимому единственные, рассмотрел Муллино [1].

4. При нахождении оценки числа $\Delta(\mathcal{S})$ для данного звездного тела $\mathcal{S}$ как правило лучше всего комбинировать только что введенные методы с методами, рассмотренными в гл. III. Мы приведем поучительный пример, принадлежащий Муллино [1]. Нам представится случай рассмотреть этот пример еще раз ниже, в § 7.

Лемма 10. *Пусть k — произвольное положительное число. Положим*

$$D = (k^2 + 4k)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$g = \frac{1}{2}(k + 2 + D),$$

так что

$$g^{-1} = \frac{1}{2}(k + 2 - D).$$

Пусть $\mathcal{S}$ — двумерное звездное тело, определенное формулами

$$-1 < x_1x_2 < k, \quad |x_1 + x_2| < D;$$

тогда

$$\Delta(\mathcal{S}) = D.$$

Критические решетки исчерпываются решетками с базисами одного из следующих двух видов:

(i) *точка* $(1, -1)$ *и любая точка прямой* $x_1 + x_2 = D$,

(ii) *точки*

$$\mathbf{p} = (-g^{-1}t, \; gt^{-1}), \quad \mathbf{q} = (-t, \; t^{-1}),$$

где t — любое число интервала $(1, g)$.

Проверим сначала, что определенные выше решетки $\mathcal{S}$-допустимы. Это очевидно для случая (i). Покажем, что это справедливо и для случая (ii). Легко проверить, что линия $x_1 + x_2 = D$ пересекается с кривой $x_1x_2 = -1$ в точках

$$(-g^{-1}, \; g), \quad (g, \; -g^{-1});$$

следовательно, точки $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ лежат на части границы тела $\mathcal{S}$, заданной уравнениями $x_1x_2 = -1$. Точка

$$\mathbf{r} = \mathbf{p} - \mathbf{q} = \left\{\frac{1}{2}(-k + D)\,t, \;\; \frac{1}{2}(k + D)\,t^{-1}\right\} = (r_1, \; r_2)$$

лежит на кривой

$$r_1 r_2 = k.$$

Далее, поскольку $1 < t < g$ и выражение

$$\frac{1}{2}(-k+D)t + \frac{1}{2}(k+D)t^{-1}$$

равно D при $t=1$ и $t=g$, то

$$0 < r_1 + r_2 < D.$$

Следовательно, решетка вида (ii) имеет шесть точек $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$ на границе тела $\mathcal{S}$. В $\mathcal{S}$ больше не может быть точек этой решетки, поскольку легко показать, что каждая точка тела $\mathcal{S}$, за исключением $\pm\mathbf{r}$, либо лежит между прямой λ, проходящей через точки $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$, и ее образом $-\lambda$ при центральной симметрии относительно $\mathbf{o}$, либо между прямой μ, проходящей через точки $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$, и ее образом $-\mu$. Например, прямая λ пересекается с кривыми $x_1x_2=-1$ и $x_1x_2=k$ помимо точек $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ в точках

$$(gt, \ -g^{-1}t^{-1}), \quad \left\{\frac{1}{2}(k+D)t \quad \frac{1}{2}(-k+D)t^{-1}\right\}$$

соответственно, причем для обеих имеет место неравенство $|x_1+x_2| > D$.

Для использования в дальнейшем заметим, что весь отрезок, соединяющий точки $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$, за исключением концов, лежит в $\mathcal{S}$, ибо прямая может пересекаться с гиперболой $x_1x_2=-1$ или $x_1x_2=k$ самое большее в двух точках. Таким образом, весь замкнутый параллелограмм с вершинами $\mathbf{o}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ и $-\mathbf{q}$ лежит в $\mathcal{S}$, за исключением точек $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ и $-\mathbf{q}$.

Доказательство леммы 10. Пусть M — критическая решетка. Предположим, что на участке

$$x_1x_2 = -1, \quad |x_1+x_2| < D$$

границы $\mathcal{S}$ точек решетки M нет. Тогда, поскольку

$$\{(1-\varepsilon)x_1 + \varepsilon x_2\} + \{\varepsilon x_1 + (1-\varepsilon)x_2\} = x_1 + x_2$$

и

$$\{(1-\varepsilon)x_1 + \varepsilon x_2\}\{\varepsilon x_1 + (1-\varepsilon)x_2\} = x_1x_2 + (\varepsilon-\varepsilon^2)(x_1-x_2)^2 \geqslant x_1x_2,$$

совокупность точек [1])

$$\mathrm{M}_\varepsilon\colon \ \{(1-\varepsilon)x_1+\varepsilon x_2, \ \varepsilon x_1 + (1-\varepsilon)x_2\}, \quad (x_1, x_2) \in \mathrm{M},$$

[1]) Эти рассуждения станут более наглядными, если временно ввести координаты $y_1 = \frac{1}{2}(x_1+x_2)$, $y_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$.

при достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет также $\mathcal{S}$-допустимой. Так как

$$d(\mathrm{M}_\varepsilon) = (1-2\varepsilon)\, d(\mathrm{M}) < \Delta(\mathcal{S}),$$

то это противоречит предположению, что решетка M является критической. Таким образом, на границе $x_1x_2=-1$ тела $\mathcal{S}$ найдется точка $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$, а в силу симметрии можно считать, что

$$-q_1 \geqslant 1 \geqslant q_2 > 0.$$

Предположим сначала, что $\mathbf{q} \neq (-1, 1)$. Тогда для некоторого t

$$(q_1, q_2) = (-t, \ t^{-1}),$$

$1 < t < g$. Отождествим эту точку $\mathbf{q}$ с введенной ранее точкой $\mathbf{q}$ решетки Λ; пусть символы $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ означают то же, что и раньше. Так как Λ — допустимая решетка, а M — критическая, то

$$d(\mathrm{M}) \leqslant d(\Lambda).$$

Прямая λ, заданная условием

$$\det(\mathbf{x}, \ \mathbf{q}) = d(\Lambda),$$

проходит через точки $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$, поэтому прямая

$$\det(\mathbf{x}, \ \mathbf{q}) = d(\mathrm{M}) \tag{1}$$

либо совпадает с ней, либо лежит между ней и прямой, проходящей через точки $\mathbf{o}$ и $\mathbf{q}$. Но в таком случае $\mathbf{q}$ — примитивная точка решетки M, поскольку $r^{-1}\mathbf{q} \in \mathcal{S}$ для любого целого $r > 1$. Таким образом, на прямой (1) и на расстоянии $|\mathbf{q}|$ от нее имеются точки решетки M. Следовательно, в замкнутом параллелограмме с вершинами $\mathbf{o}$, $-\mathbf{q}$, $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ обязательно содержится точка решетки M, отличная от $\mathbf{o}$ и $\mathbf{q}$. Но мы уже видели, что единственными точками этого параллелограмма, не лежащими в $\mathcal{S}$, являются вершины $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ и $-\mathbf{q}$. Таким образом, либо $\mathbf{p}$, либо $\mathbf{r}$ лежат в M и в обоих случаях решетка M совпадает с решеткой Λ.

Остается возможность $\mathbf{q} = (-1, 1)$. Если определение точек $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$ очевидным образом расширить на случай $t=1$, ситуация остается прежней, за исключением того, что теперь целый отрезок, соединяющий точки $\mathbf{p}$ и $\mathbf{r}$, является частью границы $x_1+x_2=D$ тела $\mathcal{S}$. Поэтому мы можем отсюда вывести лишь то, что M имеет базис, состоящий из точки $(-1, 1)$ и некоторой точки, лежащей на прямой $x_1+x_2=D$.

Лемма 10 доказана.

Относительно доказательства такого типа см. Оллеретшоу [2]. Для использования в дальнейшем отметим, что мы уже доказали

Следствие 1. *Единственные критические решетки тела*

$$-1 < x_1x_2 < k, \quad |x_1 + x_2| \leqslant D$$

имеют вид (ii), *где t может принимать также значение* 1.

Действительно, решетки вида (i) имеют точку на $-1 < x_1x_2 < D$, $|x_1 + x_2| = D$. Здесь наша терминология расходится с терминологией Малера [4], поскольку он называет решетку допустимой для множества $\mathscr{S}$, если она не имеет точек, отличных от $\mathbf{o}$ внутри $\mathscr{S}$. Таким образом, решетку вида (i) Малер называет допустимой (а значит, критической) для множества, указанного в следствии.

Лемму 10 можно рассматривать как более точный вариант теоремы IV гл. II. Чтобы сделать эту связь более ясной, докажем

Следствие 2. *Если k — целое число, то критическая решетка вида* (ii) *допустима для множества*

$$-1 < x_1x_2 < k.$$

Действительно, $\mathbf{x} = u_1\mathbf{p} + u_2\mathbf{r}$ (где u_1 и u_2 — целые числа) — общая точка решетки вида (ii); тогда

$$x_1x_2 = (u_1p_1 + u_2r_1)(u_1p_2 + u_2r_2) = -u_1^2 + ku_1u_2 + ku_2^2.$$

В п. 4 § 4 гл. II мы показали, что $-u_1^2 + ku_1u_2 + ku_2^2$ не принимает никаких значений в промежутке $(-1, k)$, если k — положительное целое число и u_1, u_2 — целые числа, не равные одновременно нулю.

§ 7. Приводимость

1. Может оказаться, что если $\mathscr{S}_1$ — некоторое звездное тело, то найдется звездное тело $\mathscr{S}_2$, строго содержащееся в $\mathscr{S}_1$ и имеющее тот же критический определитель: $\Delta(\mathscr{S}_2) = \Delta(\mathscr{S}_1)$. Тогда мы говорим, что $\mathscr{S}_1$ ***приводимо***. Если указанного тела $\mathscr{S}_2$ не существует, то $\mathscr{S}_1$ называется ***неприводимым*** телом. Критерии приводимости ограниченного звездного тела были даны Малером [4] и Роджерсом (C. A. Rogers) [1]. Впоследствии Роджерс [10] указал очень остроумный пример приводимого звездного тела, не содержащего неприводимого звездного тела с тем же критическим определителем. Однако он показал, что если рассматривается более широкий класс точечных множеств, которые он назвал „звездными множествами“, то каждое ограниченное приводимое звездное множество содержит неприводимое звездное множество. Выпуклые двумерные множества были очень подробно рассмотрены Малером [8]. Оллереншоу [4] показала, что n-мерный единичный куб неприводим при всех n, а единичный шар неприводим, во всяком случае при $n \leqslant 5$. Далее она показала, что трехмерный цилиндр неприводим, если неприводима его двумерная база.

За общей теорией мы отсылаем читателя к цитированным работам. Следующая лемма на простом примере демонстрирует характер идей, лежащих в основе доказательства неприводимости звездного тела.

Лемма 11. *Звездное тело*

$$\mathscr{D}: \quad x_1^2 + x_2^2 < 1$$

неприводимо.

Доказательство. Предположим, что какое-то звездное тело $\mathscr{S}$ строго содержится в $\mathscr{D}$. Тогда на границе тела $\mathscr{D}$ найдется точка $\mathbf{p}$, не лежащая на границе тела $\mathscr{S}$. Пусть (п. 4 § 6 гл. III) Λ — критическая решетка тела $\mathscr{D}$, содержащая точки $\pm\mathbf{p}$. Сверх того на границе $\mathscr{D}$ лежат точки $\pm\mathbf{q}$ и $\pm\mathbf{r}$ решетки Λ, так что точки $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$ суть вершины правильного шестиугольника; других точек решетки на границе $\mathscr{D}$ нет. Так как $\mathscr{S} \subset \mathscr{D}$, то решетка Λ допустима для $\mathscr{S}$. Но $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$ суть единственные точки решетки Λ, которые могут лежать на границе $\mathscr{S}$. Эти точки, очевидно, не удовлетворяют критерию следствия теоремы VII. Значит, Λ не является критической решеткой тела $\mathscr{S}$, т. е.

$$\Delta(\mathscr{S}) < d(\Lambda) = \Delta(\mathscr{D}).$$

Лемма 11 доказана.

Простое рассуждение показывает, что звездное тело Муллино $\mathscr{S}$, определенное в лемме 10, неприводимо. Действительно, если $\mathbf{p}$ — граничная точка тела $\mathscr{S}$, то, за исключением конечного числа „особых“ точек $\mathbf{p}$, найдется критическая решетка для $\mathscr{S}$, имеющая только три пары точек $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$ на границе тела $\mathscr{S}$, и точки $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$ не могут быть единственными лежащими на границе тела $\mathscr{S}$ точками критической решетки произвольного множества $\mathscr{T}$, содержащегося в $\mathscr{S}$. Конечное число исключительных точек $\mathbf{p}$, для которых такая решетка не существует, не может отразиться на этом рассуждении, поскольку если $\mathscr{T}$ строго содержится в $\mathscr{S}$, то имеется бесконечно много граничных точек тела $\mathscr{S}$, не являющихся граничными точками тела $\mathscr{T}$.

2. Если $\mathscr{S}$ — неограниченное звездное множество и если имеется такое ограниченное звездное множество $\mathscr{T}$, содержащееся в $\mathscr{S}$, что $\Delta(\mathscr{T}) = \Delta(\mathscr{S})$, то говорят, что $\mathscr{S}$ ***ограниченно приводимо***. Следствие 2 леммы 10 показывает, что двумерное звездное тело

$$\mathscr{S}_k: \quad -1 < x_1x_2 < k \tag{1}$$

ограниченно приводимо, если k — положительное целое число. Действительно, $\Delta(\mathscr{S}_k) = \Delta(\mathscr{T}_k)$, где $\mathscr{T}_k$ — множество Муллино:

$$\mathscr{T}_k:\quad -1 < x_1x_2 < k, \quad |x_1 + x_2| < (k^2 + 4k)^{\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

С другой стороны, $\mathscr{S}_k$ не для любого k является ограниченно приводимым. Так, в п. 4 § 4 гл. II мы видели, что критические решетки M тела $\mathscr{S}_{11/10}$ допустимы для $|x_1x_2| < \frac{11}{10}$ и потому не имеют точек на кривой $x_1x_2 = -1$. Но тогда, как в доказательстве леммы 10, M не может быть критической решеткой ограниченного множества $\mathscr{T}$, содержащегося в $\mathscr{S}_{11/10}$, поскольку для достаточно малого ε решетка M_ε точек

$$\{(1-\varepsilon)x_1 + \varepsilon x_2,\ \varepsilon x_1 + (1-\varepsilon)x_2\}, \quad (x_1, x_2) \in M$$

допустима для $\mathscr{T}$.

Доказательство теоремы VII гл. III показывает, что двумерное звездное тело

$$|x_1^3 + x_2^3| < 1$$

ограниченно приводимо, поскольку это доказательство использует только ограниченные части указанного множества. Малер [4] развил критерии ограниченной приводимости некоторых типов множеств, критические решетки которых известны. В дальнейшем ограниченная приводимость рассматривалась Давенпортом и Роджерсом [2], которые ввели понятие полной приводимости. Если множество $\mathscr{T}$ содержится в множестве $\mathscr{S}$ и $\Delta(\mathscr{T}) = \Delta(\mathscr{S})$, то, очевидно, каждая критическая решетка множества $\mathscr{S}$ является также критической решеткой множества $\mathscr{T}$, но, вообще говоря, $\mathscr{T}$ может иметь больше критических решеток. Например, когда k — натуральное число, множества, определенные формулами (1) и (2), имеют одинаковые критические определители, однако критические решетки $\mathscr{T}_k$, имеющие тип (i), указанный в формулировке леммы 10, вообще говоря, имеют точки, лежащие в $\mathscr{S}_k$. С другой стороны, в силу следствия 1 леммы 10 множество

$$\mathscr{T}'_k:\quad -1 < x_1x_2 < k, \quad |x_1 + x_2| \leqslant (k^2 + 4k)^{\frac{1}{2}}$$

имеет не больше критических решеток, чем $\mathscr{S}_k$. Если неограниченное множество $\mathscr{S}$ содержит ограниченное множество $\mathscr{T}$ с тем же критическим определителем и $\mathscr{T}$ не имеет критических решеток, кроме критических решеток множества $\mathscr{S}$, то Давенпорт и Роджерс [2] называют тело $\mathscr{S}$ *вполне приводимым* [1]). Следуя Малеру, этим понятием пользуются, чтобы показать, что некоторые типы решеток в определенных областях имеют бесконечно много точек.

Позже, в гл. X мы рассмотрим это с совершенно другой точки зрения. Больше мы не будем рассматривать ограниченную и полную приводимость, отсылая читателя к цитированным работам. Следующий пример иллюстрирует связь этих понятий с существованием бесконечного числа точек решетки в множествах.

Лемма 12. *Пусть k — целое положительное число и Λ — такая решетка, что*

$$d(\Lambda) \leqslant (k^2 + 4k)^{\frac{1}{2}};$$

тогда в теле

$$\overline{\mathscr{S}}_k:\quad -1 \leqslant x_1x_2 \leqslant k \tag{3}$$

содержится бесконечно много точек решетки Λ. Если Λ не является критической решеткой тела

$$\mathscr{S}_k:\quad -1 < x_1x_2 < k, \tag{4}$$

то в $\mathscr{S}_k$ содержится бесконечно много точек решетки Λ.

Доказательство. Если Λ содержит точку $(0, x_2)$, $x_2 \neq 0$, то Λ содержит все точки вида $(0, rx_2)$ $(r = 1, 2, 3, \ldots)$, и в этом случае лемма тривиальна. В противном случае достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ в $\overline{\mathscr{S}}_k$ найдется такая точка $(x_1, x_2) \in \Lambda$, что $|x_1| \leqslant \varepsilon$, и что эта точка лежит в $\mathscr{S}_k$, если Λ не является критической решеткой тела $\mathscr{S}_k$.

Пусть t — произвольное положительное число. Тогда решетка Λ_t, состоящая из точек

$$(x_1, x_2) = (tX_1, t^{-1}X_2), \quad (X_1, X_2) \in \Lambda, \tag{5}$$

имеет тот же определитель, что и решетка Λ. Следовательно, по следствию 1 леммы 10 в множестве

$$-1 \leqslant x_1x_2 \leqslant k, \quad |x_1 + x_2| \leqslant (k^2 + 4k)^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

найдется точка решетки Λ_t. Эта точка лежит в $\mathscr{S}_k$, если Λ_t не является критической решеткой тела $\mathscr{S}_k$. Но область (6) ограничена, так что все точки области (6) для некоторого числа γ, зависящего только от k, удовлетворяют неравенству

$$|x_1| \leqslant \gamma.$$

[1]) Их определение не совсем совпадает с нашим, так как они пользуются определением допустимой решетки по Малеру. Однако нетрудно видеть, что оно эквивалентно нашему.

Поэтому в силу (5) первоначальная решетка Λ содержит такую точку $(X_1, X_2) \neq \mathbf{o}$, что

$$-1 \leqslant X_1 X_2 \leqslant k, \quad |X_1| \leqslant \gamma t^{-1}.$$

Заметим далее, что решетка Λ является критической для тела $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда Λ_t является критической. Но γt^{-1} может быть сколь угодно малым, когда t достаточно велико.

Лемма 12 доказана.

§ 8. Выпуклые тела

1. Для точек критической решетки на границе выпуклого тела имеет место результат более сильный, чем теорема VII. Следующее предложение Суиннертон-Дайера [1] обобщает старый результат Коркина и Золотарева для сфер.

Теорема VIII. *Пусть $\mathcal{K}$ есть n-мерное ограниченное открытое симметричное выпуклое множество, и пусть Λ — критическая решетка множества $\mathcal{K}$. Тогда Λ имеет по меньшей мере $\frac{1}{2}n(n+1)$ пар точек $\pm\mathbf{a}$ на границе множества $\mathcal{K}$.*

Доказательство. Мы воспроизведем изящное доказательство, принадлежащее Суиннертон-Дайеру. Пусть $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ — базис решетки Λ, и пусть Λ' — решетка с базисом $\mathbf{b}'_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, где

$$\mathbf{b}'_j - \mathbf{b}_j = \eta \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{b}_i, \tag{1}$$

а a_{ij} и η — вещественные числа, которые будут определены далее. Пусть $\pm\mathbf{p}_1, \ldots, \pm\mathbf{p}_N$ — все точки решетки Λ, лежащие на границе тела $\mathcal{K}$, и пусть $\pm\mathbf{p}'_1, \ldots, \pm\mathbf{p}'_N$ — естественным образом соответствующие им точки решетки Λ'. Пусть $\pi_1, \ldots, \pi_N$ — опорные плоскости тела $\mathcal{K}$ в точках $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_N$ (теорема IV гл. IV). Если имеется несколько опорных плоскостей, выберем произвольным образом одну из них. Теперь потребуем от Λ', чтобы точки $\mathbf{p}'_J$ $(1 \leqslant J \leqslant N)$ лежали на π_J. Так как выполнено (1) и $\mathbf{p}_J$ лежит на π_J, то это требование дает условие вида

$$\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij} t_{ij}^{(J)} = 0 \quad (1 \leqslant J \leqslant N), \tag{2}$$

где числа $t_{ij}^{(J)}$ зависят только от точки $\mathbf{p}_J$ и выбора опорной плоскости π_J. Потребуем также, чтобы

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (i \neq j). \tag{3}$$

Общее число линейных условий (2) и (3), наложенных на n^2 чисел a_{ij}, равно $\frac{1}{2}n(n-1)+N$. Поэтому, если $N < \frac{1}{2}n(n+1)$, то существует набор вещественных чисел a_{ij}, не равных одновременно 0 и удовлетворяющих условиям (2) и (3). Выберем одно из таких решений и зафиксируем его при дальнейших рассуждениях.

Поскольку точки $\mathbf{p}_J$ лежат на опорных плоскостях открытого множества $\mathcal{K}$, внутри $\mathcal{K}$ они лежать не могут. Рассуждая, как в п. 1 § 6, получаем, что при достаточно малом η в $\mathcal{K}$ нет точек решетки Λ', отличных от $\mathbf{o}$; поэтому Λ' является допустимой решеткой множества $\mathcal{K}$. Так как Λ — критическая решетка, то

$$d(\Lambda') = |\det(\mathbf{b}'_1, \ldots, \mathbf{b}'_n)| \geqslant |\det(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n)| = d(\Lambda) = \Delta(\mathcal{K}),$$

т. е.

$$1 \leqslant \det\begin{pmatrix} 1+a_{11}\eta & a_{12}\eta & \ldots & a_{1n}\eta \\ a_{21}\eta & 1+a_{22}\eta & \ldots & a_{2n}\eta \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\eta & a_{n2}\eta & \ldots & 1+a_{nn}\eta \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + A_1\eta + A_2\eta^2 + \ldots + A_n\eta^n.$$

Так как это справедливо для всех достаточно малых значений $|\eta|$, то

$$A_1 = \sum_i a_{ii} = 0$$

и

$$A_2 = -\sum_{i<j} a_{ij}a_{ji} + \sum_{i<j} a_{ii}a_{jj} \geqslant 0.$$

Следовательно, используя условие симметрии (3), получаем

$$0 \leqslant 2A_2 - A_1^2 = -\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

Таким образом, $a_{ij} = 0$ для всех i и j, что противоречит выбору a_{ij}. Противоречие возникает из предположения, что число пар точек решетки Λ, лежащих на границе множества $\mathcal{K}$, меньше $\frac{n(n+1)}{2}$.

Теорема VIII доказана.

2. Для ограниченных симметричных выпуклых звездных тел рассуждения п. 3 § 6 о наибольшем числе точек критической решетки, лежащих на границе, и об их индексе можно сделать значительно более точными. Это показал уже Минковский. Фактически его результаты применимы не только к критическим, но и ко всем допустимым решеткам. Напомним, что тело $\mathcal{K}$ называется строго вы-

13*

пуклым, когда каждая точка отрезка $t\mathbf{p}+(1-t)\mathbf{q}$ $(0<t<1)$ является внутренней точкой тела $\mathscr{K}$, если точки $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ являются различными точками, лежащими внутри или на границе тела $\mathscr{K}$.

Теорема IX. *Пусть Λ — допустимая решетка выпуклого симметричного открытого множества $\mathscr{K}$. Тогда на границе множества $\mathscr{K}$ найдется не больше $\frac{1}{2}(3^n-1)$ пар точек $\pm\mathbf{a}$ решетки Λ. Если $\mathscr{K}$ строго выпукло, то число пар не превосходит 2^n-1.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathscr{K}$ — строго выпуклое множество. Пусть $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ — произвольный базис решетки Λ, и пусть

$$\mathbf{a}=u_1\mathbf{b}_1+\ldots+u_n\mathbf{b}_n$$

— точка решетки Λ, лежащая на границе тела $\mathscr{K}$. Тогда не все числа $u_1, \ldots, u_n$ — четные, ибо в противном случае $\frac{1}{2}\mathbf{a}$ является внутренней точкой тела $\mathscr{K}$, принадлежащей решетке Λ. Пусть теперь

$$\mathbf{a}'=u_1'\mathbf{b}_1+\ldots+u_n'\mathbf{b}_n$$

— такая точка решетки Λ, лежащая на границе тела $\mathscr{K}$ и отличная от точки $\mathbf{a}$, что

$$u_j'\equiv u_j \pmod 2 \quad 1\leqslant j\leqslant n.$$

Тогда $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{a}')\in\Lambda$. В силу строгой выпуклости $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{a}')$ является внутренней точкой тела Λ и поэтому совпадает с $\mathbf{o}$; таким образом, $\mathbf{a}'=-\mathbf{a}$. Следовательно, общее количество граничных точек не превосходит числа классов вычетов $(u_1, \ldots, u_n)$ по модулю 2, исключая $(0, 0, \ldots, 0)$, т. е. равно 2^n-1.

Если $\mathscr{K}$ не является строго выпуклым, то рассуждения нужно вести по модулю 3. Детали доказательства мы оставляем читателю.

Теорема IX доказана.

Теорема X. *Пусть $\mathscr{K}$ — выпуклое симметричное открытое n-мерное множество, а Λ — допустимая решетка множества $\mathscr{K}$. Если $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — точки решетки Λ, лежащие на границе множества $\mathscr{K}$, то их индекс I удовлетворяет неравенству*

$$I\leqslant n!. \tag{1}$$

Если $\mathscr{K}$ строго выпукло, то в (1) имеет место строгое неравенство.

Доказательство. Если точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы, то их индекс равен нулю и доказывать нечего. В противном случае

каждую точку $\mathbf{c}\in\Lambda$ можно представить в виде

$$\mathbf{c}=v_1\mathbf{a}_1+\ldots+v_n\mathbf{a}_n, \tag{2}$$

где $v_1, \ldots, v_n$ — рациональные числа. Множества таких чисел $\mathbf{v}$, что (2) лежит в Λ, очевидно, образуют решетку M с определителем

$$d(\mathrm{M})=\frac{d(\Lambda)}{|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)|}=I^{-1}.$$

Поэтому по теореме Минковского о выпуклом теле (теорема II гл. III) имеется такая точка $\mathbf{v}\neq\mathbf{o}$ решетки M, что

$$|v_1|+\ldots+|v_n|\leqslant(n!/I)^{1/n}. \tag{3}$$

Пусть F — лучевая функция, ассоциированная с множеством $\mathscr{K}$, так что имеем

$$F(\mathbf{a}_j)=1 \quad (1\leqslant j\leqslant n).$$

Таким образом, для точки $\mathbf{c}$, заданной условиями (2) и (3), в силу выпуклости и симметричности множества $\mathscr{K}$ получаем

$$F(\mathbf{c})\leqslant|v_1|F(\mathbf{a}_1)+\ldots+|v_n|F(\mathbf{a}_n)\leqslant(n!/I)^{1/n}. \tag{4}$$

Но $F(\mathbf{c})\geqslant 1$, поскольку Λ — допустимая решетка множества $\mathscr{K}$, поэтому $I\leqslant n!$, что и требовалось доказать. Если $I=n!$ и $\mathscr{K}$ строго выпукло, то $F(\mathbf{c})<1$.

В противном случае M является критической решеткой тела $|v_1|+\ldots+|v_n|<1$, и каждая граничная точка решетки M имеет $n-1$ координат, равных нулю. Но эти два требования по теореме VIII Суиннертон-Дайера несовместимы.

Теорема X доказана [1]).

Как правило, оценку I, данную в теореме X, можно значительно улучшить и получить гораздо больше информации о связи точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ с базисом решетки. Так, при $n=3$ имеем

Следствие. *Если $\mathscr{K}$ строго выпукло и $n=3$, то $I=1$ или 2. Если $I=2$, то $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3)\in\Lambda$.*

Действительно, $I\leqslant 5$. Если $I=5$, то найдутся такие целые, не делящиеся одновременно на 5 числа u_1, u_2, u_3, что

$$\mathbf{c}=\frac{1}{5}(u_1\mathbf{a}_1+u_2\mathbf{a}_2+u_3\mathbf{a}_3)\in\Lambda.$$

Мы можем считать, что u_1 не делится на 5 и, взяв, если нужно, вместо $\mathbf{c}$ точку $2\mathbf{c}$, можно полагать, что

$$u_1\equiv\pm 1 \pmod 5).$$

[1]) Остальной частью этого пункта мы в дальнейшем пользоваться не будем, однако сошлемся на нее в конце п. 5.

Поэтому, не умаляя общности, можно прибавить к $\mathbf{c}$ целые кратные $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ и считать, что

$$u_1 = \pm 1, \quad |u_2| \leqslant 2, \quad |u_3| \leqslant 2.$$

Но тогда в силу строгой выпуклости получаем противоречие:

$$F(\mathbf{c}) < \frac{1}{5} F(\mathbf{a}_1) + \frac{2}{5} F(\mathbf{a}_2) + \frac{2}{5} F(\mathbf{a}_3) = 1.$$

Таким образом, $I \neq 5$. Аналогично $I \neq 3$.

Предположим теперь, что $I = 4$. Тогда найдется такой базис $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ решетки Λ, что

$$\mathbf{a}_1 = v_{11}\mathbf{b}_1,$$
$$\mathbf{a}_2 = v_{21}\mathbf{b}_1 + v_{22}\mathbf{b}_2,$$
$$\mathbf{a}_3 = v_{31}\mathbf{b}_1 + v_{32}\mathbf{b}_2 + v_{33}\mathbf{b}_3,$$

где

$$0 \leqslant v_{ij} < v_{ii} \qquad (j < i)$$

и

$$v_{11}v_{22}v_{33} = 4.$$

Далее $v_{11} = 1$, поскольку в противном случае $\frac{1}{2}\mathbf{a}_1 \in \Lambda$ и $F\left(\frac{1}{2}\mathbf{a}_1\right) < F(\mathbf{a}_1) = 1$. Если $v_{22} \neq 1$, то либо $\frac{1}{2}\mathbf{a}_2$, либо $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$ лежит в Λ, и мы снова получаем противоречие. Следовательно,

$$v_{11} = v_{22} = 1, \qquad v_{33} = 4.$$

Если бы число v_{31} было четным, то либо $\frac{1}{2}\mathbf{a}_3$, либо $\frac{1}{2}(\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3)$ лежат в Λ; поэтому v_{31} нечетно. Точно так же нечетно и v_{32}. Поэтому найдется точка

$$\mathbf{c} = \frac{1}{4}(u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2 + u_3\mathbf{a}_3) \in \Lambda$$

с нечетными u_1 и u_2. Прибавив к $\mathbf{c}$ целые кратные точек $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, можно полагать, что $u_1 = \pm 1$, $u_2 = \pm 1$, но тогда

$$F(\mathbf{c}) < \frac{1}{4}\{F(\mathbf{a}_1) + F(\mathbf{a}_2) + F(\mathbf{a}_3)\} = \frac{3}{4} < 1.$$

Таким образом, $I \neq 4$.

Наконец, при $I = 2$, точно так же как при $I = 4$, оказывается, что $v_{11} = v_{22} = 1$, $v_{21} = 0$ и $v_{33} = 2$. Рассуждения, показывающие нечетность v_{31}, v_{32}, остаются в силе, поэтому

$$\frac{1}{2}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3) \in \Lambda.$$

3. Когда $\mathscr{K}$ является ограниченным симметричным строго выпуклым двумерным множеством, нижняя граница количества пар граничных точек $\pm\mathbf{a}$ критической решетки, согласно теореме VIII равная 3, совпадает с верхней границей, указанной в теореме IX. В самом деле, имеет место следующее предложение.

Теорема XI. (A) *Пусть $\mathscr{K}$ — открытое выпуклое симметричное двумерное тело. Тогда критическая решетка Λ имеет шесть точек $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$ на границе тела $\mathscr{K}$, причем*

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{o}, \tag{1}$$

и любые две из трех точек $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ составляют базис решетки Λ.

(B) *Более того, если $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$ — произвольные точки границы тела $\mathscr{K}$, для которых имеет место равенство* (1), *то решетка* M *с базисом $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ допустима для тела $\mathscr{K}$. Никаких других точек решетки* M *на границе нет, за исключением случая, когда $\mathscr{K}$ — параллелограмм и две из точек $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ являются серединами его сторон.*

Доказательство. Первая часть теоремы XI является почти непосредственным следствием последних трех теорем. По теореме VIII на границе тела $\mathscr{K}$ имеются три пары точек $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$. По теореме IX индекс точек $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ равен либо 1, либо 2. Поскольку $\frac{1}{2}\mathbf{p}$, $\frac{1}{2}\mathbf{q}$ — внутренние точки тела $\mathscr{K}$, они не могут быть точками решетки Λ. Следовательно, если индекс равен 2, то точка $\frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$ лежит в Λ, а также и в $\mathscr{K}$ или на границе $\mathscr{K}$, причем последнее имеет место лишь тогда, когда $\mathscr{K}$ не является строго выпуклым. Таким образом, если индекс равен 2, то вместо $\mathbf{q}$ можно взять $\mathbf{q}' = \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{q})$. Индекс точек $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}'$ равен 1. Не уменьшая общности, считаем, что индекс $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ равен 1. Поэтому для некоторых целых u и v $\mathbf{r} = u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$, причем $|u| \leqslant 2$, $|v| \leqslant 2$, поскольку индекс $\mathbf{p}$, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ не превосходит 2. Числа u и v не могут быть одновременно четными, ибо в противном случае $\frac{1}{2}\mathbf{r} \in \Lambda$. Если, например, $u = \pm 2$ — четное, то $v = \pm 1$ нечетное и $\mathbf{r}' = \frac{1}{2}(\mathbf{r} + v\mathbf{q}) = \frac{1}{2}u\mathbf{p} + v\mathbf{q}$ лежит либо внутри, либо на границе тела $\mathscr{K}$. Поскольку Λ — допустимая решетка, $\mathbf{r}'$ лежит на границе. Поэтому, взяв $\mathbf{r}'$ вместо $\mathbf{r}$, можно, не умаляя общности, полагать, что $|u| = |v| = 1$. Изменив, если нужно, знаки $\mathbf{p}$ или $\mathbf{q}$, можно считать, что $u = v = -1$, т. е. что имеет место (1). Таким образом, часть (A) доказана.

Осталось доказать (В). Предположим, что точка

$$\mathbf{c} = u\mathbf{p} + v\mathbf{q} = (v-u)\mathbf{q} + (-u)\mathbf{r} = (u-v)\mathbf{p} + (-v)\mathbf{r}$$

для некоторых целых u и v лежит либо на границе, либо внутри $\mathcal{K}$. Если, например, $|u| > |v| + 1$, то точка

$$\mathbf{p} = u^{-1}\mathbf{c} - vu^{-1}\mathbf{q}$$

является внутренней точкой тела $\mathcal{K}$, потому что $|u^{-1}| + |vu^{-1}| < 1$. Поэтому из трех выражений вектора $\mathbf{c}$ мы получаем

$$||u| - |v|| \leqslant 1,$$
$$||u-v| - |u|| \leqslant 1,$$
$$||u-v| - |v|| \leqslant 1.$$

Легко видеть, что единственными целыми решениями этих неравенств, дающих примитивные точки решетки, отличные от $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$, являются пары

$$\pm(u,\ v) = (2,\ 1),\ (1,\ 2) \quad \text{или} \quad (1,\ -1).$$

Поэтому, переставив, если нужно, точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ циклически, можно считать, что $\mathbf{c} = \mathbf{p} - \mathbf{q}$ лежит внутри или на границе тела $\mathcal{K}$. Далее, поскольку

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{q} = -\frac{1}{2}\mathbf{c} - \frac{1}{2}\mathbf{r},$$

точка $\mathbf{c}$ может быть только граничной.

Покажем теперь, что $\mathcal{K}$ содержит весь параллелограмм $\mathcal{P}$, состоящий из точек

$$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q},$$

причем

$$\max\{|\lambda|,\ |\mu|\} < 1.$$

Действительно,

$$\mathbf{x} = \rho\mathbf{c} + \sigma\mathbf{r},$$

где

$$|\rho| + |\sigma| = \frac{1}{2}|\lambda - \mu| + \frac{1}{2}|\lambda + \mu| = \max\{|\lambda|,\ |\mu|\}.$$

Далее, площадь $V(\mathcal{P})$ параллелограмма $\mathcal{P}$ равна

$$V(\mathcal{P}) = 4|\det(\mathbf{p},\ \mathbf{q})| = 4d(\mathrm{M}).$$

С другой стороны, по теореме Минковского о выпуклом теле

$$V(\mathcal{K}) \leqslant 4d(\mathrm{M}).$$

Поскольку $\mathcal{K} \supset \mathcal{P}$ и $\mathcal{K}$ является открытым множеством, то $\mathcal{K} = \mathcal{P}$. Теорема XI доказана.

Теорема XI дает готовый критерий для нахождения критических определителей двумерных выпуклых звездных тел. Легко видеть, что если $\mathbf{p}$ — произвольная фиксированная граничная точка тела $\mathcal{K}$, то найдется только один шестиугольник с вершинами в граничных точках $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$, для которого справедливо (1). Таким образом, критический определитель тела $\mathcal{K}$ равен нижней границе $\det(\mathbf{p},\ \mathbf{q})$, взятой по этим шестиугольникам.

4. В качестве приложения теоремы XI докажем следующее предложение.

Лемма 13. *Пусть $\mathcal{S}$ — выпуклый симметричный открытый шестиугольник. Тогда*

$$\Delta(\mathcal{S}) = \frac{1}{4}V(\mathcal{S}). \tag{1}$$

Решетка M, *имеющая точки в серединах всех сторон шестиугольника, является единственной критической решеткой тела $\mathcal{S}$.*

Доказательство. По теореме Минковского о выпуклом теле

$$\Delta(\mathcal{S}) \geqslant \frac{1}{4}V(\mathcal{S}). \tag{2}$$

Пусть

$$\mathbf{a},\ -\mathbf{b},\ \mathbf{c},\ -\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ -\mathbf{c}$$

— вершины шестиугольника $\mathcal{S}$, отсчитываемые против часовой стрелки. Тогда решетка M, указанная в лемме, имеет базис $\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\frac{1}{2}\left(\mathbf{b}-\mathbf{c}\right)$. Очевидно, $\frac{1}{2}(\mathbf{c}-\mathbf{a}) \in \mathrm{M}$; поэтому в силу теоремы XI решетка M является $\mathcal{S}$-допустимой. Покажем, что

$$d(\mathrm{M}) = \frac{1}{4}V(\mathcal{S}). \tag{3}$$

Разбив шестиугольник $\mathcal{S}$ на треугольники с вершинами в точке $\mathbf{o}$, получим

$$-V(\mathcal{S}) = \det(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) + \det(\mathbf{b},\ \mathbf{c}) + \det(\mathbf{c},\ \mathbf{a}) = 4\det(\mathbf{u},\ \mathbf{v}),$$

где $\mathbf{b} = \mathbf{a} + 2\mathbf{u}$, $\mathbf{c} = \mathbf{a} + 2\mathbf{v}$. Отсюда вытекает равенство (3). Тогда (1) вытекает из (2) и (3), поскольку решетка M $\mathcal{S}$-допустима.

Пусть теперь Λ — произвольная критическая решетка для $\mathcal{S}$. Тогда $d(\Lambda)=\frac{1}{4}V(\mathcal{S})$. Если бы Λ не имела ни одной точки на стороне тела $\mathcal{S}$, то нашлось бы симметричное выпуклое множество, большее чем $\mathcal{S}$, которое не содержало бы никаких точек тела $\mathcal{S}$, кроме $\mathbf{o}$, что противоречит теореме Минковского о выпуклом теле. Поэтому по теореме XI Λ имеет ровно 6 точек $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$ на границе шестиугольника $\mathcal{S}$ — по одной на каждой стороне. Если, например, $\pm\mathbf{p}$ не являются серединами сторон, то, повернув эти стороны вокруг точек $\pm\mathbf{p}$ и оставив остальные пары сторон неизменными, можно найти выпуклое симметричное множество $\mathcal{T}$ с объемом $V(\mathcal{T})>V(\mathcal{S})$, не содержащее никаких точек решетки Λ, за исключением $\mathbf{o}$, а это опять противоречит теореме Минковского о выпуклом теле. Таким образом, $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$ — середины сторон шестиугольника и $\Lambda=\mathsf{M}$.

Лемма 13 доказана.

Можно было бы, конечно, прямо вычислить детерминанты всех решеток, имеющих точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ с условием $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}=\mathbf{o}$ на границе тела $\mathcal{S}$, и показать, что M дает минимум детерминанту.

5. Минковский [2] обобщил рассуждения теоремы XI на три измерения и доказал следующее предложение.

Теорема XII. *Для того чтобы найти критический определитель $\Delta(\mathcal{K})$ открытого симметричного выпуклого трехмерного множества $\mathcal{K}$, достаточно рассмотреть минимум определителей решеток, порожденных тремя точками $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ границы множества $\mathcal{K}$ и удовлетворяющих одному из следующих трех условий:*

(A) *точки* $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_1$ *лежат на границе* $\mathcal{K}$, *а точки* $-\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2-\mathbf{a}_3$ *лежат вне тела* $\mathcal{K}$;

(B) *точки* $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_1$ *лежат на границе тела* $\mathcal{K}$, *а* $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$ — *вне* $\mathcal{K}$;

(C) *точки* $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_1$ *и* $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3$ *лежат на границе тела* $\mathcal{K}$.

За доказательством мы отсылаем читателя к оригинальному труду; это доказательство можно построить, комбинируя идеи доказательства теоремы XI с идеями, изложенными в конце п. 2 § 8. Соответствующий значительно более сложный результат в четырехмерном пространстве был сформулирован Вольфом [1], который отметил, что часть вспомогательных результатов принадлежит Бруннграберу [1]

Минковский [2] использовал теорему XII для нахождения критического определителя октаэдра

$$|x_1|+|x_2|+|x_3|<1,$$

который оказался равным $\frac{19}{108}$. Критические определители других выпуклых трехмерных тел были определены Чоком [3] и Уитвортом [1, 2]. Во всех этих случаях требуется значительное количество весьма специальных деталей,

§ 9. Шары

1. Более детально рассмотрим n-мерные шары

$$\mathcal{D}_n:\ |\mathbf{x}|^2=x_1^2+\ldots+x_n^2<1. \tag{1}$$

Обозначим через

$$\Gamma_n=\Delta(\mathcal{D}_n) \tag{2}$$

критический определитель шара $\mathcal{D}_n$. При $1\leqslant n\leqslant 8$ значения Γ_n известны (см. Приложение). Здесь мы вновь вычислим Γ_3. Значение этой постоянной мы уже находили в теореме III гл. II. Значение Γ_4 будет вытекать отсюда почти тотчас же в силу общей теоремы Морделла (см. гл. X).

Сначала нам нужно доказать один результат для n-мерных шаров. Этот результат — нечто более точное, чем простое приложение теоремы X.

Теорема XIII. *Пусть Λ — допустимая решетка шара $\mathcal{D}_n:|\mathbf{x}|^2<1$, и пусть $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ — точки решетки Λ, лежащие на границе области $\mathcal{D}_n$. Тогда индекс I точек $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n$ удовлетворяет неравенствам*

$$I\leqslant\{d(\Lambda)\}^{-1}\leqslant\{\Delta(\mathcal{D}_n)\}^{-1}=\Gamma_n^{-1}. \tag{3}$$

Доказательство. Имеем $|\mathbf{a}_j|=1$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, а потому по лемме Адамара

$$|\det(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)|\leqslant|\mathbf{a}_1|\cdot\ldots\cdot|\mathbf{a}_n|=1.$$

Так как

$$I=\frac{|\det(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)|}{d(\Lambda)},$$

то отсюда следует первое из неравенств (3). Второе неравенство (3) является тривиальным следствием определения числа Γ_n.

Теорема XIII доказана.

Следствие. *При $n=3$ индекс равен либо 0, либо 1.*

Действительно, объем шара $\mathcal{D}_n$ равен $\frac{4}{3}\pi$, и поэтому по теореме Минковского о выпуклом теле

$$\Gamma_3\geqslant\frac{\pi}{6}>\frac{1}{2}.$$

Теорема XIV. *Имеет место формула*

$$\Gamma_3=2^{-\frac{1}{2}}.$$

Критическая решетка $\mathcal{D}_3$ имеет такой базис $\{\mathbf{m}_1,\mathbf{m}_2,\mathbf{m}_3\}$, что равенство

$$|u_1\mathbf{m}_1+u_2\mathbf{m}_2+u_3\mathbf{m}_3|^2=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_2u_3+u_3u_1+u_1u_2$$

выполняется тождественно относительно u_1, u_2, u_3.

Доказательство. Пусть Λ — критическая решетка шара $\mathscr{D}_3$. По теореме VIII найдется по меньшей мере $\frac{n(n+1)}{2}=6$ пар точек $\pm\mathfrak{m}$ решетки Λ на границе $\mathscr{D}_3$, а по теореме VII имеется линейно независимое множество трех векторов, например $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3$. По теореме XIII $\{\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3\}$ — базис решетки Λ. Если

$$\mathfrak{m}=u_1\mathfrak{m}_1+u_2\mathfrak{m}_2+u_3\mathfrak{m}_3$$

— какая-нибудь другая точка решетки Λ, лежащая на границе, то по теореме XIII u_j могут принимать только значения 0, ± 1. Пара $\pm\mathfrak{m}$, для которой $u_1u_2u_3\neq 0$, единственна. Действительно, пусть

$$\mathfrak{m}=u_1\mathfrak{m}_1+u_2\mathfrak{m}_2+u_3\mathfrak{m}_3, \qquad u_1u_2u_3\neq 0,$$
$$\mathfrak{m}'=u_1'\mathfrak{m}_1+u_2'\mathfrak{m}_2+u_3'\mathfrak{m}_3, \qquad u_1'u_2'u_3'\neq 0;$$

тогда индекс $|u_2u_3'-u_3u_2'|$ векторов $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}, \mathfrak{m}'$ четен, а поэтому равен нулю. Аналогично

$$u_2u_3'-u_2'u_3=u_1u_3'-u_1'u_3=u_1u_2'-u_1'u_2=0,$$

откуда $\mathfrak{m}'=\pm\mathfrak{m}$. Таким образом, должна быть по крайней мере одна точка $u_1\mathfrak{m}_1+u_2\mathfrak{m}_2+u_3\mathfrak{m}_3$ на границе тела $\mathscr{D}_3$, для которой $u_1u_2u_3=0$ и которая отлична от $\pm\mathfrak{m}_1$, $\pm\mathfrak{m}_2$, $\pm\mathfrak{m}_3$. Не умаляя общности, можно считать, что это точка $\mathfrak{m}_4=\mathfrak{m}_1-\mathfrak{m}_2$. Тогда ни $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2$, ни $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2\pm\mathfrak{m}_3$ не могут быть граничными точками, поскольку они вместе с точками $\mathfrak{m}_3$ и $\mathfrak{m}_4$ дают индекс 2. Следовательно, должны реализоваться по меньшей мере две из оставшихся возможностей

$$\mathfrak{m}_1\pm\mathfrak{m}_3, \qquad \mathfrak{m}_2\pm\mathfrak{m}_3, \qquad \mathfrak{m}_1-\mathfrak{m}_2\pm\mathfrak{m}_3.$$

Поскольку $\mathfrak{m}_1-\mathfrak{m}_2+\mathfrak{m}_3$ и $\mathfrak{m}_1-\mathfrak{m}_2-\mathfrak{m}_3$ не могут реализоваться одновременно, то, не умаляя общности, можно полагать, что реализуется возможность $\mathfrak{m}_5=\mathfrak{m}_2-\mathfrak{m}_3$. Тогда возможности $\mathfrak{m}_2+\mathfrak{m}_3$ и $\mathfrak{m}_1-\mathfrak{m}_2-\mathfrak{m}_3$ исключаются, ибо они вместе с $\mathfrak{m}_2$ и $\mathfrak{m}_5$ дают индекс 2; точка же $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_3$ исключается, ввиду того что вместе с $\mathfrak{m}_4$ и $\mathfrak{m}_5$ она дает индекс 2. Поэтому

$$\pm\mathfrak{m}_6=\mathfrak{m}_3-\mathfrak{m}_1 \qquad \text{или} \qquad \mathfrak{m}_1-\mathfrak{m}_2+\mathfrak{m}_3.$$

Если выполняется вторая из этих возможностей, то заменим $\mathfrak{m}_3$ на $\mathfrak{m}_5$. Поэтому, не умаляя общности, можно всегда считать, что

$$\mathfrak{m}_6=\mathfrak{m}_3-\mathfrak{m}_1.$$

Пусть

$$f(u_1, u_2, u_3)=|u_1\mathfrak{m}_1+u_2\mathfrak{m}_2+u_3\mathfrak{m}_3|^2,$$

где u_1, u_2, u_3 — переменные, так что $f(\mathfrak{u})$ — квадратичная форма; тогда

$$f(1, 0, 0)=f(0, 1, 0)=f(0, 0, 1)=$$
$$=f(1, 0, -1)=f(0, 1, -1)=f(1, -1, 0)=1.$$

Поэтому

$$f(\mathfrak{u})=u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_2u_3+u_3u_1+u_1u_2,$$

причем определитель $D(f)=\frac{1}{2}$, откуда

$$\{\det(\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3)\}^2=\frac{1}{2}.$$

Теорема XIV доказана.

2. Пусть $\mathscr{S}$ — звездное тело и Λ есть $\mathscr{S}$-допустимая решетка. Говорят, что Λ является *экстремальной* [1]) решеткой тела $\mathscr{S}$, если найдется окрестность $\mathfrak{L}$ решетки M (в смысле п. 2 § 3), в которой каждая $\mathscr{S}$-допустимая решетка M удовлетворяет условию

$$d(\mathrm{M})\geqslant d(\Lambda).$$

Очевидно, критическая решетка экстремальна, однако экстремальная решетка может не быть критической. Некоторые из уже доказанных результатов распространяются и на экстремальные решетки. В частности, что особенно замечательно, переносится теорема VIII Суиннертона-Дайера.

Экстремальные решетки n-мерных шаров были весьма детально изучены. Например, как показал Бернс [9], для шестимерного шара имеются шесть различных типов экстремальных решеток. Существует общий критерий Вороного [1], характеризующий экстремальные решетки n-мерного шара (они „совершенны“ и „эвтектичны“). Бернс [8] дал необыкновенно изящное доказательство критерия Вороного. К сожалению, мы не сможем рассматривать здесь эти вопросы и поэтому отсылаем читателя к двум статьям Бернса, где имеются дальнейшие ссылки на литературу по этим вопросам.

§ 10. Приложения к диофантовым приближениям [2])

1. Теория диофантовых приближений имеет дело с приближением рациональных или иррациональных чисел рациональными числами, обладающими специальными свойствами. Геометрия чисел имеет много приложений к диофантовым приближениям. Специально диофантовым приближениям посвящена монография автора [8], и у нас нет намерения повторять то, что излагается там. Однако мы докажем теорему Давенпорта, обобщающую работу Фуртвенглера и являющуюся интересным приложением метода компактности Малера.

Сначала отметим очевидное следствие из теоремы Минковского о линейных формах (теорема III гл. III). Пусть $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ — веще-

[1]) В русской литературе вместо термина „экстремальный“ встречается термин „предельный“. — *Прим. ред.*

[2]) В дальнейшем в книге этот параграф не используется.

ственные числа, а Q — целое число. По теореме III гл. III существуют такие $n+1$ целых чисел $u_0, \ldots, u_n$, одновременно не равных нулю, что

$$|u_0\vartheta_j - u_j| < Q^{-1/n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{1}$$

$$|u_0| \leqslant Q, \tag{2}$$

ибо выражения $u_0\vartheta_j - u_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и u_0 образуют $n+1$ линейных форм от $u_0, \ldots, u_n$ с определителем 1. Если $u_0 = 0$, то $|u_j| < Q^{-1/n}$, откуда $u_j = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Поэтому $u_0 \neq 0$, и заменив, если нужно, $u_0, \ldots, u_n$ на $-u_0, -u_1, \ldots, -u_n$, можно полагать, что

$$0 < u_0 < Q. \tag{2'}$$

Далее, (1) можно переписать в виде

$$\left|\vartheta_j - \frac{u_j}{u_0}\right| < \frac{1}{u_0 Q^{1/n}}, \tag{1'}$$

откуда видно, что дроби $\frac{u_j}{u_0}$ являются хорошими рациональными приближениями чисел ϑ_j, причем все эти дроби имеют один и тот же знаменатель u_0.

Выражения (1) и (2') можно рассмотреть с другой точки зрения. Исключив Q, мы получим

$$u_0 \left\{ \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |u_0\vartheta_j - u_j| \right\}^n < 1. \tag{3}$$

В действительности существует бесконечно много решений $u_0 > 0$, $u_1, \ldots, u_n$ неравенства (3). Это очевидно, если все числа $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ рациональны, поскольку существуют такие целые числа $v_0 > 0$, $v_1, \ldots, v_n$, что

$$v_0\vartheta_j = v_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

и тогда можно положить

$$u_j = rv_j \qquad (0 \leqslant j \leqslant n),$$

где r — произвольное натуральное число; в этом случае левая часть неравенства (3) равна 0. В противном случае можно считать, что ϑ_1 — иррациональное число. Предположим, что мы уже нашли R целых решений $u_j^{(r)}$ $(0 \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant r \leqslant R)$, причем $u_0^{(r)} > 0$. Так как ϑ_1 иррационально, то Q можно выбрать настолько большим, что

$$|u_0^{(r)}\vartheta_1 - u_1^{(r)}| > Q^{-1/n} \qquad (1 \leqslant r \leqslant R).$$

Для этого значения Q решение неравенств (1) и (2) дает решение неравенства (3), очевидно не совпадающее с любым из ранее найденных.

2. Для различных целей представляют интерес некоторые свойства приближений $\frac{u_j}{u_0}$ к числам ϑ_j. Например, вместо того чтобы минимизировать выражение

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |u_0\vartheta_j - u_j|,$$

мы можем попытаться минимизировать выражение

$$\sum_{j=1}^{n} (u_0\vartheta_j - u_j)^2 \tag{1}$$

или выражение

$$\prod_{j=1}^{n} |u_0\vartheta_j - u_j|. \tag{2}$$

Точно так же может возникнуть необходимость в „асимметричных" неравенствах типа

$$-k_0 u_0^{-1/n} \leqslant u_0\vartheta_j - u_j \leqslant k_1 u_0^{-1/n}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{3}$$

где k_0 и k_1 — положительные целые числа. Все эти различные задачи можно объединить в следующей общей проблеме. Пусть $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — лучевая функция от n переменных. Каково наименьшее значение [1]

$$u_0\Phi^n(u_0\vartheta_1 - u_1, \ldots, u_0\vartheta_n - u_n)$$

для различных наборов целых $u_0 > 0$ и $u_1, \ldots, u_n$? Положим

$$D(\Phi;\ \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n) = \liminf_{\substack{u_0 \to \infty \\ u_0,\ u_1, \ldots,\ u_n - \text{целые}}} u_0\Phi^n(u_0\vartheta_1 - u_1, \ldots, u_0\vartheta_n - u_n) \tag{4}$$

и

$$D(\Phi) = \sup_{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n} D(\Phi;\ \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n). \tag{5}$$

Наша задача — оценить сверху число $D(\Phi)$.

Неотрицательная функция $F(x_0, \ldots, x_n)$ от $n+1$ вещественного аргумента, определенная равенствами

$$F^{n+1}(x_0, \ldots, x_n) = \begin{cases} x_0\Phi^n(x_1, \ldots, x_n) & \text{при } x_0 \geqslant 0, \\ -x_0\Phi^n(-x_1, \ldots, -x_n) & \text{при } x_0 \leqslant 0, \end{cases} \tag{6}$$

является лучевой, если $\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ — лучевая функция. Действительно, эта функция, очевидно, удовлетворяет всем трем определяющим условиям, т. е. является неотрицательной, непрерывной и при $t > 0$

$$F(tx_0, \ldots, tx_n) = tF(x_0, \ldots, x_n).$$

[1] Под Φ^n понимается n-я степень функции Φ.

В силу определения F симметрична,

$$F(-x_0, \ldots, -x_n) = F(x_0, \ldots, x_n), \tag{7}$$

и при $t > 0$ удовлетворяет тождеству

$$F\left(t^n x_0, t^{-1}x_1, \ldots, t^{-1}x_n\right) = F(x_0, \ldots, x_n), \tag{8}$$

ибо

$$\Phi\left(t^{-1}x_1, \ldots, t^{-1}x_n\right) = t^{-1}\Phi(x_1, \ldots, x_n).$$

Так же, как в § 4 гл. IV, положим

$$\delta(F) = \sup_{\Lambda} \frac{F^{n+1}(\Lambda)}{d(\Lambda)},$$

где точная верхняя граница берется по всем $(n+1)$-мерным решеткам; тогда

$$\delta(F) = \{\Delta(\mathscr{S})\}^{-1},$$

где $\mathscr{S}$ есть $(n+1)$-мерное звездное тело

$$\mathscr{S}:\ F(x_0, \ldots, x_n) < 1.$$

Теперь результат Давенпорта можно представить в следующем виде.

Теорема XV. *Пусть Φ и F связаны так, как указано выше. Тогда во всяком случае*

$$D(\Phi) \leqslant \delta(F). \tag{9}$$

Если же $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ только при $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, то

$$D(\Phi) = \delta(F). \tag{10}$$

Доказательство. Первая часть теоремы XV по существу принадлежит Малеру и связана с теорией автоморфных тел, которую мы изучим в гл. X. Если $D(\Phi) = 0$, то доказывать нечего. В противном случае пусть c — такое положительное число, что

$$c < D(\Phi). \tag{11}$$

Тогда по определению числа $D(\Phi)$ найдутся такие вещественные числа $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ и такое целое число U_0, что

$$u_0\Phi^n(u_0\vartheta_1 - u_1, \ldots, u_0\vartheta_n - u_n) \geqslant c \tag{12}$$

для любых целых $u_0, \ldots, u_n$, причем

$$u_0 \geqslant U_0. \tag{13}$$

В частности, числа $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ не все рациональны; поэтому существует такое число $\varkappa > 0$, что для всех целых $u_0, \ldots, u_n$, $0 < u_0 \leqslant U_0$

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} |u_0\vartheta_j - u_j| \geqslant \varkappa > 0. \tag{14}$$

Очевидно, что

$$\varkappa \leqslant \frac{1}{2} < 1. \tag{15}$$

Пусть M_1 есть $(n+1)$-мерная решетка точек

$$(x_0, \ldots, x_n) = (u_0, u_0\vartheta_1 - u_1, \ldots, u_0\vartheta_n - u_n), \tag{16}$$

где $u_0, \ldots, u_n$ пробегают все целые числа. Ясно, что

$$d(\mathrm{M}_1) = 1. \tag{17}$$

Функция

$$F_1(x_0, \ldots, x_n) = \max\left[F(x_0, \ldots, x_n), \frac{c^{1/(n+1)}}{\varkappa}\max_{1 \leqslant j \leqslant n}|x_j|\right], \tag{18}$$

очевидно, является $(n+1)$-мерной лучевой функцией, причем в силу (7)

$$F_1(-\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}). \tag{19}$$

Покажем теперь, что

$$F_1^{n+1}(\mathrm{M}_1) \geqslant c. \tag{20}$$

Рассмотрим точку (16) решетки M_1. По (19) можно полагать, что $u_0 \geqslant 0$. Если $u_0 = 0$, но не все $u_1, \ldots, u_n$ равны 0, то второй член внешнего максимума в формуле (18) в силу (15) равен

$$\frac{c^{1/(n+1)}}{\varkappa}\max_{1 \leqslant j \leqslant n}|u_j| \geqslant \frac{c^{1/(n+1)}}{\varkappa} \geqslant c^{1/(n+1)}.$$

Если $0 < u_0 \leqslant U_0$, то по (14) второй член внешнего максимума в формуле (18) не меньше $c^{1/(n+1)}$. Если $u_0 \geqslant U_0$, то в силу (12) первый член внешнего максимума в (18) не меньше $c^{1/(n+1)}$. Следовательно, во всяком случае для всех $\mathbf{x} \in \mathrm{M}_1$, за исключением $\mathbf{o}$,

$$F_1(\mathbf{x}) \geqslant c^{1/(n+1)}.$$

Этим доказательство неравенства (20) завершается.

В более общем виде положим для положительных целых чисел $r = 1, 2, \ldots$

$$F_r(x_0, \ldots, x_n) = \max\left[F(x_0, \ldots, x_n), \frac{c^{1/(n+1)}}{r\varkappa}\max_{1 \leqslant j \leqslant n}|x_j|\right]. \tag{21}$$

Тогда

$$F(\mathbf{x}) \leqslant F_r(\mathbf{x}) \leqslant F_1(\mathbf{x}) \tag{21'}$$

и

$$\lim_{r \to \infty} F_r(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}), \tag{22}$$

причем сходимость является равномерной в любом ограниченном множестве точек $\mathbf{x}$. В силу (8) имеет место тождество

$$F_1(x_0, \ldots, x_n) = F_1(r^n x_0, r^{-1}x_1, \ldots, r^{-1}x_n). \tag{23}$$

14 Зак. 1029

Пусть M_r — решетка точек
$$(r^{-n}x_0, \ rx_1, \ \ldots, \ rx_n), \quad \mathbf{x} \in M_1.$$
Очевидно,
$$d(M_r) = d(M_1) = 1, \tag{24}$$
и в силу (17), (20) и (23)
$$F_r^{n+1}(M_r) = F_1^{n+1}(M_1) \geqslant c. \tag{25}$$
Следовательно, ввиду (21′) имеет место более слабое утверждение
$$F_r^{n+1}(M_r) \geqslant c > 0 \quad (1 \leqslant r < \infty). \tag{26}$$

По (24), (26) и следствию теоремы IV существует сходящаяся подпоследовательность последовательности M_r, скажем
$$M_{r_s} \to N.$$
Из (24) вытекает
$$d(N) = 1. \tag{27}$$
Поскольку сходимость (22) равномерна в любом ограниченном множестве, то по (25) и теореме II
$$F^{n+1}(N) \geqslant \limsup_{s \to \infty} F_{r_s}^{n+1}(M_{r_s}) \geqslant c. \tag{28}$$
Таким образом,
$$\delta(F) = \sup_{\Lambda} \frac{F^{n+1}(\Lambda)}{d(\Lambda)} \geqslant \frac{F^{n+1}(N)}{d(N)} \geqslant c.$$
Поскольку c — произвольное положительное число меньшее $D(\Phi)$, то $\delta(F) \geqslant D(\Phi)$ и первая часть теоремы XV доказана.

Для доказательства второй части теоремы требуется совершенно другой метод и используется базис, построенный в теореме II гл. I. По следствию теоремы VI найдется такая решетка Λ, что
$$d(\Lambda) = 1 \tag{29}$$
и
$$F^{n+1}(\Lambda) = \delta(F). \tag{30}$$

Пусть
$$\mathbf{e}_j = (\overbrace{0, \ \ldots, \ 0}^{j}, \ 1, \ \overbrace{0, \ \ldots, \ 0}^{n-j}) \quad (0 \leqslant j \leqslant n).$$
В силу теоремы II гл. I $\left(\text{при } \varepsilon = \frac{1}{2} \text{ и замене } n \text{ на } n+1\right)$ для всех достаточно больших чисел N существует такой базис $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\}$ решетки Λ, что
$$|\mathbf{a}_j - N\mathbf{e}_j| < N^{\frac{1}{2}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{31}$$
Тогда
$$\mathbf{a}_j = N \sum_{i=0}^{n} t_{ji}\mathbf{e}_i, \tag{32}$$

где
$$|t_{jj} - 1| \leqslant N^{-\frac{1}{2}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n) \tag{33}$$
и
$$|t_{ji}| \leqslant N^{-\frac{1}{2}} \quad (1 \leqslant j \leqslant n, \ 0 \leqslant i \leqslant n, \ i \neq j). \tag{34}$$

Поскольку $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы, найдутся такие вещественные числа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что
$$\mathbf{e}_0 = \lambda_0\mathbf{a}_0 + \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n,$$
причем взяв, если нужно, вместо $\mathbf{a}_0$ вектор $-\mathbf{a}_0$, можно полагать, что
$$\lambda_0 \geqslant 0.$$
Теперь, поскольку $d(\Lambda) = 1$, имеем
$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda_0 \, |\det(\mathbf{a}_0, \ \ldots, \ \mathbf{a}_n)| = \\ &= |\det(\mathbf{e}_0, \ \mathbf{a}_1, \ \ldots, \ \mathbf{a}_n)| = \\ &= N^n \left\{1 + O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}, \end{aligned}$$
причем постоянная, входящая в O, зависит только от n. Таким образом, можно записать, что
$$\mathbf{a}_0 = \mu\mathbf{e}_0 + \vartheta_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \vartheta_n\mathbf{a}_n, \tag{35}$$
где $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ — некоторые вещественные числа и
$$\mu = \lambda_0^{-1} = N^{-n}\left\{1 + O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)\right\}. \tag{36}$$
Пусть δ' — такое число, что
$$\delta' < \delta(F).$$
Покажем, что для только что построенных чисел $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$
$$\liminf_{u_0 \to \infty} u_0\Phi^n(u_0\vartheta_1 - u_1, \ \ldots, \ u_0\vartheta_n - u_n) > \delta', \tag{37}$$
при условии, что N больше некоторого N_0, зависящего от δ' и функции Φ.

Закончим доказательство теоремы. Если $\delta(F) = 0$, то доказывать нечего. В противном случае, не умаляя общности, можно полагать, что
$$0 < \delta' < \delta(F). \tag{37′}$$
Чтобы доказать неравенство (37), мы можем, очевидно, сосредоточить внимание на таких целых числах $u_0, \ldots, u_n$, что
$$u_0 > 0, \quad u_0\Phi^n(y_1, \ \ldots, \ y_n) \leqslant \delta(F), \tag{38}$$
где
$$y_j = u_0\vartheta_j - u_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{39}$$

До сих пор мы не использовали тот факт, что $\Phi(\mathbf{x})=0$ только при $\mathbf{x}=\mathbf{o}$. В силу леммы 2 гл. IV отсюда следует, что для некоторого $c>0$

$$\Phi(\mathbf{x})\geqslant c\,|\mathbf{x}|\geqslant c\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

Следовательно, по (38)

$$u_0\max_{1\leqslant j\leqslant n}|y_j|^n\leqslant c^{-n}\delta(F). \tag{40}$$

Рассмотрим теперь точку

$$\mathbf{Y}=u_0\mathbf{a}_0-u_1\mathbf{a}_1-\ \ldots\ -u_n\mathbf{a}_n$$

решетки Λ. Из (35) и (39) выводим, что она имеет вид

$$\mathbf{Y}=\mu u_0\mathbf{e}_0+\sum_{j=1}^{n}y_j\mathbf{a}_j,$$

а потому по (32) имеет координаты $(Y_0, \ldots, Y_n)$, где

$$Y_0=\mu u_0+N\sum_{j=1}^{n}y_jt_{j0}, \tag{41}$$

$$Y_i=N\sum_{j=1}^{n}y_jt_{ji}\qquad (1\leqslant i\leqslant n). \tag{42}$$

Пусть ε — произвольно малое положительное число, подлежащее дальнейшему определению. В силу (33), (34) и леммы 3 неравенство

$$\Phi\left(\sum_{j=1}^{n}t_{j1}y_j, \ \ldots, \ \sum_{j=1}^{n}t_{jn}y_j\right)\leqslant(1+\varepsilon)\,\Phi(y_1, \ldots, y_n)$$

справедливо для произвольных вещественных чисел $y_1, \ldots, y_n$ при условии, что N больше некоторого числа, зависящего только от ε и функции Φ. Следовательно, по (42)

$$\Phi(Y_1, \ldots, Y_n)\leqslant(1+\varepsilon)N\Phi(y_1, \ldots, y_n). \tag{43}$$

В силу (40) и (41)

$$0<Y_0\leqslant\mu(1+\varepsilon)\,u_0\quad(\text{для всех } u_0\geqslant U_0) \tag{44}$$

для некоторого U_0, зависящего, конечно, от N. Но $\mathbf{Y}\in\Lambda$ и по предположению $F^{n+1}(\Lambda)=\delta(F)$. Следовательно, по определению (6) функции F

$$\delta(F)\leqslant Y_0\Phi^n(Y_1, \ldots, Y_n). \tag{45}$$

Из (36), (37'), (43) и (44) вытекает, что

$$u_0\Phi^n(y_1, \ldots, y_n)\geqslant(N^n\mu)^{-1}(1+\varepsilon)^{-n-1}\delta(F)>\delta'\quad(\text{для всех } u_0\geqslant U_0)$$

при условии, что, во-первых, ε выбрано достаточно малым, во-вторых, N выбрано достаточно большим и, наконец, U_0 также выбрано достаточно большим. На этом доказательство неравенства (37), а значит, и всей теоремы, заканчивается.

Теорема XV доказана.

3. Условие $\Phi(\mathbf{x})=0$ только при $\mathbf{x}=\mathbf{o}$ необходимо для второй части теоремы XV. Случай, когда $n=2$ и

$$\Phi^2(x_1, x_2)=|x_1x_2|,$$

представляет собой замечательную проблему Литтлвуда. Неизвестно, существуют ли такие числа ϑ_1 и ϑ_2, что

$$\liminf_{u_0\to\infty}u_0|u_0\vartheta_1-u_1|\,|u_0\vartheta_2-u_2|>0,$$

где u_0, u_1, u_2 — целые числа. Соответствующая функция $F(x_0, x_1, x_2)$ задается формулой

$$F^3(x_0, x_1, x_2)=|x_0x_1x_2|;$$

для нее имеется результат Давенпорта

$$\delta(F)=\frac{1}{7},$$

который мы докажем в гл. X. Из работы Касселса и Суиннертон-Дайера [1] и из результата Давенпорта о последовательных минимумах функции F вытекает, что по меньшей мере

$$D(\Phi)\leqslant\frac{1}{9}\cdot 1.$$

Имеется соответствующий результат, связанный с теоремой XV, который также принадлежит Давенпорту. Он касается приближения одной линейной формы к 0. Здесь мы имеем дело с величиной

$$D'(\Phi;\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)=\\ =\liminf_{\substack{\max_i|u_i|\to\infty\\ u_0+u_1\vartheta_1+\ldots+u_n\vartheta_n\geqslant 0\\ u_0,\,u_1,\ldots,\,u_n\ \text{целые}}}|u_0+u_1\vartheta_1+\ \ldots\ +u_n\vartheta_n|\,\Phi^n(u_1, \ldots, u_n),$$

причем если Φ симметрична, то условие $u_0+u_1\vartheta_1+\ \ldots\ +u_n\vartheta_n\geqslant 0$ можно, очевидно, опустить. Тогда теорема XV остается верной при замене $D(\Phi)$ на

$$D'(\Phi)=\sup_{\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n}D'(\Phi;\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n)$$

и доказательство по существу аналогично предыдущему.

4. Отметим, что во второй части теоремы XV мы не показали существования таких $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$, что

$$\lim_{u_0\to\infty} \inf u_0 \Phi^n (u_0\vartheta_1 - u_1, \ldots, u_0\vartheta_n - u_n) = \delta(F),$$

и на самом деле таких $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$, вообще говоря, не существует[1]. Однако при $n=1$ такое ϑ_1, как легко показать, существует. В этом случае, конечно, единственная возможность для лучевой функции $\Phi(x_1)$ от одной переменной такова:

$$\Phi(x_1) = \begin{cases} kx_1 & \text{при } x_1 \geqslant 0, \\ -lx_1 & \text{при } x_1 \leqslant 0, \end{cases}$$

где k и l — положительные числа. Как и в доказательстве второй части теоремы XV, рассмотрим решетку Λ, для которой

$$d(\Lambda) = 1, \qquad F^2(\Lambda) = \delta(F).$$

Пусть

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1), \qquad \mathbf{b} = (b_0, b_1)$$

— базис решетки Λ, причем, не умаляя общности, можно полагать, что

$$b_1 > 0, \qquad a_0 b_1 - a_1 b_0 = d(\Lambda) = 1. \tag{1}$$

Положим

$$\vartheta = \vartheta_1 = \frac{a_1}{b_1}. \tag{2}$$

Нам достаточно показать (см. теорему XV), что

$$\lim_{u_0\to\infty} \inf u_0 \Phi(u_0\vartheta + u_1) \geqslant \delta(F).$$

Как и при доказательстве теоремы XV, можно ограничиться рассмотрением таких значений u_0 и u_1, что

$$u_0 |u_0\vartheta + u_1| \leqslant c^{-2}\delta(F), \tag{3}$$

где c — такая постоянная, что $\Phi(x_1) \geqslant c\,|x_1|$ для всех x_1.

Рассмотрим теперь точку

$$\mathbf{Y} = u_0\mathbf{a} + u_1\mathbf{b} = (u_0 a_0 + u_1 b_0,\ u_0 a_1 + u_1 b_1) = (Y_0, Y_1)$$

решетки Λ. В силу (1) и (2)

$$\Phi(Y_1) = b_1 \Phi(u_0\vartheta + u_1). \tag{4}$$

[1] Например, при $n=2$ и $\Phi^2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ это можно показать с помощью метода „изоляции", см. гл. X.

Но тогда на основании (3), (1) и (2) мы имеем

$$\lim_{u_0\to\infty} \frac{Y_0}{u_0} = \lim \left(a_0 + b_0 \frac{u_1}{u_0}\right) = a_0 - b_0\vartheta = b_1^{-1}. \tag{5}$$

Далее,

$$Y_0 \Phi(Y_1) \geqslant \delta(F),$$

откуда в силу (4) и (5)

$$\lim\inf u_0 \Phi(u_0\vartheta + u_1) \geqslant \delta(F).$$

В частности, из теоремы IV гл. II вытекает, что для всех ϑ

$$\lim_{u_0\to\infty} \inf u_0 |u_0\vartheta + u_1| \leqslant 5^{-\frac{1}{2}},$$

причем существуют такие числа ϑ, для которых выполнено равенство. Действительно, „последовательные минимумы" теоремы IV из гл. II соответствуют ряду последовательных минимумов в данной ситуации. Первоначальные доказательства этого факта использовали цепные дроби, однако имеется доказательство, принадлежащее Роджерсу (C. A. Rogers), которое использует метод изоляции, рассмотренный в гл. X и изложенный автором в его монографии (Касселс [8]).

5. Доказательство теоремы XV дает простой пример случая, когда знак неравенства в теореме II необходим, т. е. случая, когда существует сходящаяся последовательность решеток

$$\mathrm{M}_r \to \mathrm{M}'$$

и такая лучевая функция F, что

$$F(\mathrm{M}') > \lim_{r\to\infty} \sup F(\mathrm{M}_r).$$

Пусть F — лучевая функция и M_r — последовательность решеток, встречающаяся в первой части доказательства. Тогда для всех r

$$F(\mathrm{M}_r) = 0,$$

поскольку M_r содержит точки, для которых $x_0 = 0$. С другой стороны, мы построили такую сходящуюся подпоследовательность M_{r_s} последовательности M_r, что

$$\mathrm{M}_{r_s} \to \mathrm{N},$$

причем

$$F^{n+1}(\mathrm{N}) \geqslant D(\Phi;\ \vartheta_1, \ldots, \vartheta_n).$$

Как показывает п. 4, правая часть этого неравенства вполне может оказаться строго положительной.

ГЛАВА VI

ТЕОРЕМА МИНКОВСКОГО — ГЛАВКИ

§ 1. Введение

1. До сих пор мы занимались главным образом оценкой снизу критического определителя $\Delta(\mathscr{S})$ множества $\mathscr{S}$, иными словами, нахождением таких чисел Δ_0, что в каждой решетке Λ, удовлетворяющей условию $d(\Lambda) < \Delta_0$, заведомо найдется точка, отличная от начала координат $\mathbf{o}$ и принадлежащая множеству $\mathscr{S}$. В этой главе мы займемся оценкой постоянной $\Delta(\mathscr{S})$ сверху; иными словами, мы хотим найти такие числа Δ_1, что существуют решетки Λ с определителем $d(\Lambda) = \Delta_1$, которые не имеют общих точек с множеством $\mathscr{S}$, кроме начала $\mathbf{o}$, т. е. являются $\mathscr{S}$-допустимыми.

Главка [1] показал, что если $\mathscr{S}$ — любое ограниченное n-мерное множество, имеющее объем V в смысле Жордана [1]), и если $\Delta_1 > V$, то существует решетка Λ, для которой $d(\Lambda) = \Delta_1$ и которая является допустимой для множества $\mathscr{S}$. Он доказал, кроме того, что если $\mathscr{S}$ является ограниченным симметричным звездным телом, то достаточно, чтобы

$$\Delta_1 > \frac{V}{2\zeta(n)}, \tag{1}$$

где

$$\zeta(n) = 1 + 2^{-n} + 3^{-n} + \ldots, \tag{2}$$

что является подтверждением предположения Минковского. Эти результаты были обобщены Зигелем [3]. Обозначим через $N_{\mathscr{S}}(\Lambda) = N(\Lambda)$ количество точек решетки Λ, отличных от $\mathbf{o}$ и принадлежащих множеству $\mathscr{S}$, а через $P_{\mathscr{S}}(\Lambda) = P(\Lambda)$ количество примитивных [2]) точек Λ, принадлежащих множеству $\mathscr{S}$. Зигель предложил очень естественный способ усреднения [3]) по множеству всех решеток Λ с фиксированным определителем $d(\Lambda) = \Delta_1$.

Пусть $\psi(\Lambda)$ — произвольная функция решетки Λ; обозначим это среднее через

$$\underset{\Lambda}{\mathfrak{M}}\{\psi(\Lambda)\}. \tag{3}$$

[1]) Это требование является несколько более ограничительным, чем требование существования объема в смысле Лебега; однако если объем существует в смысле Жордана, то существует и объем в смысле Лебега, и они равны. Пусть $\chi(\mathbf{x})$ — характеристическая функция множества $\mathscr{S}$, т. е. такая функция, что $\chi(\mathbf{x}) = 1$ при $\mathbf{x} \in \mathscr{S}$ и $\chi(\mathbf{x}) = 0$ в противном случае. Множество $\mathscr{S}$ имеет объем в смысле Жордана, если функция $\chi(\mathbf{x})$ интегрируема в смысле Римана, и тогда этот объем равен интегралу от $\chi(\mathbf{x})$, взятому по всему пространству.

[2]) То есть точек $\mathbf{a} \in \Lambda$, которые нельзя представить в виде $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$, где $\mathbf{b} \in \Lambda$, а $k > 1$ — целое число.

[3]) Особенно простое изложение процесса усреднения Зигеля содержится в статье Макбета и Роджерса [2].

Зигель показал, что

$$\underset{\Lambda}{\mathfrak{M}}\{N_{\mathscr{S}}(\Lambda)\} = V(\mathscr{S})/\Delta_1 \tag{4}$$

и что

$$\underset{\Lambda}{\mathfrak{M}}\{P_{\mathscr{S}}(\Lambda)\} = V(\mathscr{S})/\zeta(n)\,\Delta_1 \tag{5}$$

для любого ограниченного множества $\mathscr{S}$ жорданова объема $V(\mathscr{S})$, не обязательно звездного тела и не обязательно выпуклого. Теоремы Главки сразу следуют из (4) и (5). Действительно, если $\Delta_1 > V(\mathscr{S})$, то из определения среднего на основании соотношения (4) следует, что найдется по меньшей мере одна решетка, скажем M, для которой $N_{\mathscr{S}}(\mathrm{M}) \leqslant \underset{\Lambda}{\mathfrak{M}}(N_{\mathscr{S}}(\Lambda)) < 1$. Поскольку $N_{\mathscr{S}}(\mathrm{M})$ является целым числом, то $N_{\mathscr{S}}(\mathrm{M}) = 0$, и, стало быть, решетка M является $\mathscr{S}$-допустимой. Аналогично если $\mathscr{S}$ является симметричным звездным телом и $\Delta_1 > V(\mathscr{S})/2\zeta(n)$, то найдется некоторая решетка N, для которой $P_{\mathscr{S}}(\mathrm{N}) < 2$. Поскольку $\mathscr{S}$ является симметричным, то точки решетки N, отличные от начала и принадлежащие $\mathscr{S}$, встречаются парами $\pm\mathbf{a}$; таким образом, $P_{\mathscr{S}}(\mathrm{N}) = 0$. Отсюда следует, что $\mathscr{S}$ не содержит примитивных точек решетки N, а значит, поскольку $\mathscr{S}$ является звездным телом, оно не содержит никаких точек решетки N, отличных от начала.

Наличие постоянной $\zeta(n)$ в соотношении (5) объясняется, грубо говоря, тем, что вероятность того, что случайно выбранная точка решетки Λ окажется примитивной, равна $\{\zeta(n)\}^{-1}$. Точнее говоря, отношение числа примитивных точек решетки Λ к общему числу точек Λ в большом шаре $|\mathbf{x}| < R$ стремится к $\{\zeta(n)\}^{-1}$ при $R \to \infty$.

В случае когда тело $\mathscr{S}$ выпуклое, вскоре после оригинального доказательства теоремы Минковского — Главки были получены ее усиления (см., например, Малер [9], Давенпорт и Роджерс [1] и Леккеркеркер [2]). Однако наименьшая величина отношения

$$Q(\mathscr{S}) = \frac{V(\mathscr{S})}{\Delta(\mathscr{S})} \tag{6}$$

неизвестна даже для двумерных симметричных выпуклых множеств. Рейнхардт [1] и Малер [10] независимо предположили, что указанное отношение достигает своего минимума, когда $\mathscr{S}$ является некоторым „сглаженным восьмиугольником“, т. е. восьмиугольником, у которого углы заменены специально подобранными гиперболическими дугами.

Оллереншоу [3] указала пример двумерного невыпуклого симметричного звездного тела $\mathscr{S}$, для которого величина $Q(\mathscr{S})$ меньше, чем для выпуклого восьмиугольника Рейнхардта—Малера, и построила на основе этого множество, не являющееся звездным телом, для которого

$$Q = 1{,}3173\ldots.$$

До сих пор неизвестно, является ли это число наименьшим возможным для двумерных множеств.

Долгое время не было получено никаких улучшений теоремы Минковского—Главки для общих множеств или для звездных тел. Такие улучшения были найдены почти одновременно Роджерсом [16, 17, 18] и Шмидтом [2, 3]. Метод Роджерса основан на тщательных оценках среднего

$$\mathfrak{M}_{\Lambda}[\{N_{\mathscr{S}}(\Lambda)\}^k] \tag{7}$$

для положительных целых k; при этом мы используем те же обозначения, что и в соотношении (4). В более поздней статье [20] Роджерс, комбинируя свои идеи с идеями Шмидта, доказал, что существует такая абсолютная постоянная C, что

$$Q(\mathscr{S}) = \frac{V(\mathscr{S})}{\Delta(\mathscr{S})} \geqslant \frac{1}{2} n \log \frac{4}{3} - 2 \log n - C \tag{8}$$

для всех симметрических множеств [1]) при условии, что размерность n больше некоторой абсолютной постоянной n_0. Мы не будем более останавливаться на результатах Роджерса и отсылаем читателя к оригинальным работам. С другой стороны, Шмидт использует тонкий аппарат, который является более эффективным, чем метод Роджерса для небольших размерностей, но гораздо менее эффективен, чем последний, когда размерности велики. Мы рассмотрим этот метод подробнее в § 4.

Только что описанные результаты могут быть обобщены в нескольких направлениях. Прежде всего вместо рассмотрения чисел $N_{\mathscr{S}}(\Lambda)$, определенных выше, можно более общо рассматривать суммы

$$\sum_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{o}}} f(\mathbf{a}), \tag{9}$$

где $f(\mathbf{x})$ — некоторая функция, которая определена во всех точках пространства и которая может быть подчинена определенным условиям (например, быть неотрицательной или интегрируемой по Риману). Если $f(\mathbf{x})$ является характеристической функцией множества $\mathscr{S}$, то сумма (9) равна $N_{\mathscr{S}}(\Lambda)$. Как и раньше, можно рассмотреть сумму типа (9), но взятую по примитивным точкам; тогда она будет аналогична величине $P_{\mathscr{S}}(\Lambda)$. Фактически большинство результатов, полученных к настоящему времени, относятся к обобщениям именно этого рода. С другой стороны, как показали Макбет и Роджерс [1], теорему Минковского — Главки можно распространить на более общие точечные множества, чем решетки. Достаточно, чтобы Λ было любым множеством точек с тем условием, что отношение числа точек множества Λ, лежащих в шаре $|\mathbf{x}| < R$, к объему шара стремилось бы к конечному ненулевому пределу d при $R \to \infty$. При этом оказывается, что при подходящей модификации понятия среднего $\mathfrak{M}$ соотношение (4) сохраняет свою силу с $\Delta_1 = d^{-1}$.

[1]) Проф. Роджерс сообщил мне, что доктор Шмидт [5] получил улучшение неравенства (8).

Наконец, заметим, что следствие из теоремы Малера (теорема V гл. V) часто позволяет распространить результаты этой главы на неограниченные множества $\mathscr{S}$, если взять за $\mathscr{S}_r$ множество точек $\mathscr{S}$, лежащих в шаре $|\mathbf{x}| < r$.

2. В этой книге мы не будем детально рассматривать какие-либо из этих обобщений. В § 3 мы докажем теорему Минковского — Главки в ее первоначальной формулировке, т. е. докажем, что существуют решетки Λ, допустимые для симметричного звездного тела $\mathscr{S}$ с конечным объемом $V(\mathscr{S})$, определитель которых сколь угодно близок к $V(\mathscr{S})$. Мы воспользуемся аргументами, основанными на усреднении, однако тип среднего выбирается из соображений облегчения доказательства, а не по каким-либо более глубоким причинам [1]). Затем в § 4 мы приведем усиление теоремы Минковского — Главки, основанное на идеях Шмидта, однако без той разработки деталей, которая сделана у него.

Доказательства в § 3 и 4 основаны, в частности, на подробном исследовании свойств подрешеток простого индекса в решетке. Это исследование проводится в § 2 и позволяет нам далее доказать одну гипотезу Роджерса, а именно предположение о том, что если $\mathscr{S}$ является симметричным звездным телом и для некоторого целого m и некоторой решетки Λ имеет место неравенство $md(\Lambda) < \Delta(\mathscr{S})$, то $\mathscr{S}$ содержит по меньшей мере m пар точек $\pm \mathbf{a} \in \Lambda$, отличных от $\mathbf{o}$. Мы проводим это доказательство в § 5.

В § 6 приводится совершенно иное обобщение теоремы Минковского — Главки, относящееся только к двум измерениям. А именно мы докажем, что определенные множества $\mathscr{S}$, имеющие бесконечный объем (т. е. в нашем случае площадь), являются множествами конечного типа, т. е. обладают допустимыми решетками. Доказательство опирается на данное автором (Касселс [7]) обобщение теоремы Холла [1].

Содержание этой главы далее в книге не используется.

§ 2. Подрешетки простого индекса

1. Важным фактором исследования в работах Роджерса и Шмидта является существование подрешеток данной решетки с определенными специальными свойствами. Мы будем использовать определение и свойства индекса, приведенные в гл. I.

[1]) Использовались и другие процессы усреднения. Особенно краткое доказательство теоремы II с использованием одного из таких процессов см. в статье Касселса [5]. Роджерс [16] показал, что многие из процессов усреднения, использованные для доказательства теоремы Минковского — Главки, по существу эквивалентны процессу Зигеля.

Лемма 1. *Пусть заданы простое число p и n-мерная решетка* Λ. *Пусть* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_R$ — *любое множество примитивных* $(\mathrm{mod}\, p)$[1]) *точек решетки* Λ, *и пусть* $k_1, \ldots, k_R$ — *вещественные числа. Тогда существует такая подрешетка* M *индекса* p *решетки* Λ, *что*

$$\sum_{\mathbf{a}_r \in \mathrm{M}} k_r \leqslant \frac{p^{n-1}-1}{p^n-1} \sum_{1 \leqslant r \leqslant R} k_r. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис решетки Λ. Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — целые числа, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant c_j < p \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{2}$$

$$(c_1, \ldots, c_n) \neq (0, \ldots, 0). \tag{3}$$

Обозначим через $\mathrm{M}(c_1, \ldots, c_n)$ решетку, состоящую из точек вида $u_1\mathbf{b}_1 + \ldots + u_n\mathbf{b}_n$, где $u_1, \ldots, u_n$ — целые числа и

$$u_1c_1 + \ldots + u_nc_n \equiv 0 \pmod p.$$

Ясно, что индекс подрешетки $\mathrm{M}(c_1, \ldots, c_n)$ равен p. Существует ровно $p^n - 1$ таких решеток, и мы покажем, что $\mathbf{a}_r\,(1 \leqslant r \leqslant R)$ принадлежит точно к $p^{n-1} - 1$ из них. Пусть

$$\mathbf{a}_r = v_{r1}\mathbf{b}_1 + \ldots + v_{rn}\mathbf{b}_n,$$

где $v_{r1}, \ldots, v_{rn}$ — целые числа. По предположению не все $v_{r1}, \ldots, v_{rn}$ делятся на p. Не умаляя общности, можно считать, что v_{r1} не делится на p. Тогда из сравнения

$$v_{r1}c_1 + \ldots + v_{rn}c_n \equiv 0 \pmod p \tag{4}$$

величина c_1 определяется однозначно при любых заданных $c_2, \ldots, c_n$, удовлетворяющих неравенствам (3). В частности, из сравнения (4) следует, что если $c_2 = \ldots = c_n = 0$, то и $c_1 = 0$, что противоречит условию (3). Таким образом, величины $c_2, \ldots, c_n$ могут быть заданы точно $p^{n-1} - 1$ способами и, значит, действительно $\mathbf{a}_r$ принадлежит ровно к $p^{n-1} - 1$ решеткам $\mathrm{M}(c_1, \ldots, c_n)$.

Усредняя левую часть неравенства (1) по всем решеткам $\mathrm{M} = \mathrm{M}(c_1, \ldots, c_n)$, мы получаем правую часть этого неравенства, и, стало быть, неравенство (1) верно по меньшей мере для одной из решеток M. Лемма 1 доказана.

Следствие 1. *Пусть p — простое число, и пусть* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$ — *примитивные* $(\mathrm{mod}\, p)$ *точки решетки* Λ. *Тогда существует подрешетка* M *индекса* p *решетки* Λ, *которая не содержит ни одной из точек* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_p$.

[1]) Точка $\mathbf{a}$ решетки Λ называется примитивной $(\mathrm{mod}\, p)$, если нет точки $\mathbf{b}$ решетки Λ с условием $\mathbf{a} = p\mathbf{b}$.

Действительно, полагая $k_r = 1$ $(1 \leqslant r \leqslant p)$, мы по лемме 1 находим решетку M, для которой

$$\sum_{\mathbf{a}_r \in \mathrm{M}} 1 \leqslant \frac{p^{n-1}-1}{p^n-1}\, p < 1,$$

откуда вытекает наше утверждение.

Заметим, что число p точек, о котором говорится в следствии, не может быть заменено на $p+1$. Фактически легко видеть, что если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ — любые две точки решетки Λ, то по меньшей мере одна из $p+1$ точек

$$\mathbf{a}_1, \ \mathbf{a}_2 + r\mathbf{a}_1 \qquad (0 \leqslant r \leqslant p-1)$$

принадлежит заданной подрешетке индекса p.

Справедливо также следующее предложение, обобщающее лемму 1 и принадлежащее по существу Шмидту.

Следствие 2. *В условиях леммы* 1 *пусть*

$$R < \frac{p^{m+1}-1}{p-1}$$

для некоторого целого m. *Тогда существует такая подрешетка* M *индекса* p *решетки* Λ, *что*

$$\sum_{\mathbf{a}_r \in \mathrm{M}} k_r \leqslant \frac{p^{m-1}-1}{p^m-1} \sum_{1 \leqslant r \leqslant R} k_r \tag{5}$$

(*т. е. в неравенстве* (1) *можно заменить* n *на* m).

Доказательство. Если размерность n пространства не превосходит m, то результат сразу следует из леммы 1, так как при $n \leqslant m$

$$\frac{p^{m-1}-1}{p^m-1} \geqslant \frac{p^{n-1}-1}{p^n-1}.$$

В случае $n > m$ применим индукцию по размерности n. Будем говорить, что две примитивные $(\mathrm{mod}\, p)$ точки $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ решетки Λ пропорциональны $(\mathrm{mod}\, p)$, если существует целое число u и точка $\mathbf{c}$ решетки Λ, для которых

$$\mathbf{a} = u\mathbf{a}' + p\mathbf{c}. \tag{6}$$

Ясно, что целое число u взаимно просто с p. Соотношение пропорциональности симметрично, ибо найдется целое число v с условием $uv \equiv 1 \pmod p$, и тогда

$$v\mathbf{a} = \mathbf{a}' + p\mathbf{c}'$$

для некоторой точки $\mathbf{c}' \in \Lambda$. Кроме того, если точка $\mathbf{a}$ пропорциональна точкам $\mathbf{a}'$ и $\mathbf{a}''$, то $\mathbf{a}'$ пропорциональна $\mathbf{a}''$. Таким образом, точки решетки Λ разбиваются на классы пропорциональных точек, или „лучи“. Число лучей равно, очевидно,

$$\frac{p^n-1}{p-1}.$$

Поскольку мы теперь предполагаем, что $n>m$, то найдется по крайней мере один луч, не содержащий ни одной из точек $\mathbf{a}_r$ $(1\leqslant r\leqslant R)$. Пусть точка $\mathbf{c}$ принадлежит этому лучу; тогда она имеет вид $\mathbf{c}=w\mathbf{b}$, где $\mathbf{b}$ — примитивная точка, а w — целое число, взаимно простое с p. Поэтому примитивная точка $\mathbf{b}$ также принадлежит этому лучу, и мы можем считать, что $\mathbf{b}=\mathbf{b}_1$, где векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ образуют базис решетки Λ. Тогда каждая точка $\mathbf{a}_r$ имеет вид

$$\mathbf{a}_r=v_{r1}\mathbf{b}_1+\ldots+v_{rn}\mathbf{b}_n,$$

где в силу выбора $\mathbf{b}_1$ по меньшей мере один из коэффициентов $v_{r2}, \ldots, v_{rn}$ не делится на p. Таким образом, если мы сопоставим точке $\mathbf{a}_r$ точку

$$\tilde{\mathbf{a}}_r=(v_{r2}, \ldots, v_{rn})$$

$(n-1)$-мерной решетки Λ_0, образованной точками с целыми координатами, то $\tilde{\mathbf{a}}_r$ примитивна $(\operatorname{mod} p)$. Так как мы предполагаем, что следствие уже доказано для размерностей, меньших n, то существуют такие целые числа $c_2, \ldots, c_n$, что

$$\sum_{c_2v_{r2}+\ldots+c_nv_{rn}\equiv 0 \ (\operatorname{mod} p)} k_r \leqslant \frac{p^{m-1}-1}{p^m-1}\sum_{1\leqslant r\leqslant R} k_r.$$

В таком случае решетка M, образованная точками

$$u_1\mathbf{b}_1+\ldots+u_n\mathbf{b}_n,$$

где

$$c_2u_2+\ldots+c_nu_n\equiv 0 \ (\operatorname{mod} p),$$

является искомой.

Следствие доказано.

2. Если числа k_r неотрицательны, то мы, уточняя доказательство леммы 1, приходим к более сильному результату.

Лемма 2. *Пусть заданы простое число p и n-мерная решетка Λ. Пусть $\mathbf{a}_0, \ldots, \mathbf{a}_R$ — примитивные* $(\operatorname{mod} p)$ *точки решетки Λ. Пусть $k_1, \ldots, k_R$ — неотрицательные вещественные числа. Тогда существует такая подрешетка M индекса p решетки Λ, что*

$$\mathbf{a}_0\notin\mathrm{M}$$

и

$$\sum_{\mathbf{a}_r\in\mathrm{M}} k_r\leqslant p^{-1}\sum_{1\leqslant r\leqslant R} k_r. \qquad (1)$$

Доказательство. Мы можем выбрать базис $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ решетки Λ таким образом, что

$$\mathbf{a}_0=v_0\mathbf{b}_1,$$

где v_0 — целое число, которое по предположению не делится на p. Пусть c_j $(2\leqslant j\leqslant n)$ — набор целых чисел, удовлетворяющих условиям

$$0\leqslant c_j<p \qquad (2\leqslant j\leqslant n). \qquad (2)$$

Обозначим через $\mathrm{N}(c_2, \ldots, c_p)$ решетку, образованную точками вида

$$u_1\mathbf{b}_1+\ldots+u_n\mathbf{b}_n,$$

где целые числа $u_1, \ldots, u_n$ удовлетворяют условию

$$u_1+c_2u_2+\ldots+c_nu_n\equiv 0 \ (\operatorname{mod} p). \qquad (3)$$

Ясно, что $\mathbf{a}_0\notin\mathrm{N}(c_2, \ldots, c_p)$.

Пусть для $1\leqslant r\leqslant R$

$$\mathbf{a}_r=v_{r1}\mathbf{b}_1+\ldots+v_{rn}\mathbf{b}_n.$$

По предположению не все числа $v_{r1}, \ldots, v_{rn}$ делятся на p. Если все числа $v_{r2}, \ldots, v_{rn}$ делятся на p, то v_{r1} не делится на p, и, таким образом, $\mathbf{a}_r$ не принадлежит ни к одной из решеток $\mathrm{N}(c_2, \ldots, c_n)$. Если же, скажем, v_{r2} не делится на p, то при фиксированных $c_3, \ldots, c_n$ условие

$$v_{r1}+c_2v_{r2}+\ldots+c_nv_{rn}\equiv 0 \ (\operatorname{mod} p)$$

удовлетворяется точно для одного значения c_2. Это означает, что тогда $\mathbf{a}_r$ принадлежит точно к p^{n-2} из p^{n-1} решеток вида $\mathrm{N}(c_2, \ldots, c_n)$. Таким образом, если решетка M пробегает все множество из p^{n-1} решеток вида $\mathrm{N}(c_2, \ldots, c_n)$, то среднее значение левой части неравенства (1) равно

$$p^{-1}\sum{}' k_r,$$

где штрих у знака суммы означает, что те значения r, для которых все коэффициенты $v_{r2}, \ldots, v_{rn}$ делятся на p, должны быть опущены. Так как по предположению $k_r\geqslant 0$ для всех r, то это показывает, что найдется по меньшей мере одна решетка $\mathrm{M}=\mathrm{N}(c_2, \ldots, c_n)$, удовлетворяющая неравенству (1).

Лемма 2 доказана.

§ 3. Теорема Минковского — Главки

1. Следуя Роджерсу [2, 9], мы докажем теперь следующую теорему Главки.

Теорема I. *Пусть $f(\mathbf{x})$—интегрируемая по Риману финитная*[1]) *функция переменной $\mathbf{x}=(x_1, \ldots, x_n)$, $n \geqslant 2$. Пусть заданы $\Delta_1>0$ и $\varepsilon>0$. Тогда существует такая решетка* M *с определителем Δ_1, что*

$$\Delta_1 \sum_{\substack{\mathbf{a}\in M\\ \mathbf{a}\neq \mathbf{o}}} f(\mathbf{a}) < \int f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \varepsilon, \tag{1}$$

где интеграл берется по всему n-мерному пространству.

Доказательство. Мы можем считать, что $f(\mathbf{x})$ обращается в нуль вне куба

$$\max_j |x_j| \leqslant S \qquad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{2}$$

Пусть p — простое число, и пусть $\eta>0$ — величина, определяемая уравнением

$$p\eta^n = \Delta_1. \tag{3}$$

Полагая p достаточно большим, мы можем считать, что

$$p\eta > S. \tag{4}$$

Пусть Λ — решетка, состоящая из точек

$$\eta(u_1, \ldots, u_n), \tag{5}$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — целые числа; тогда

$$d(\Lambda) = \eta^n. \tag{6}$$

Если η достаточно мало (что будет при достаточно большом p, см. (3)), то из определения интегрирования по Риману выводим неравенство

$$\eta^n \sum_{\substack{\mathbf{a}\in \Lambda\\ \mathbf{a}\neq \mathbf{o}}} f(\mathbf{a}) < \int f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \frac{1}{2}\varepsilon. \tag{7}$$

Точки $\mathbf{a}$ решетки Λ, для которых $f(\mathbf{a}) \neq 0$, лежат в кубе (2), а потому в силу неравенства (4) примитивны $(\mathrm{mod}\, p)$. Применим лемму 1 к множеству $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_R$ всех точек $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ, для которых $f(\mathbf{a}) \neq 0$, полагая

$$k_r = f(\mathbf{a}_r).$$

В нашем случае определитель решетки M равен

$$d(M) = p\, d(\Lambda) = p\eta^n = \Delta_1 \tag{8}$$

[1]) То есть обращающаяся в нуль вне некоторого ограниченного множества. — *Прим. ред.*

и

$$\sum_{\substack{\mathbf{a}\in M\\ \mathbf{a}\neq \mathbf{o}}} f(\mathbf{a}) \leqslant \frac{p^{n-1}-1}{p^n-1} \sum_{\substack{\mathbf{a}\in \Lambda\\ \mathbf{a}\neq \mathbf{o}}} f(\mathbf{a}). \tag{9}$$

Неравенство (1) следует из соотношения (3) и неравенств (7) и (9), когда p взято достаточно большим.

Теорема I доказана.

Следствие. *Пусть $\mathscr{S}$ — множество с жордановым объемом $V(\mathscr{S})$, и пусть $\Delta_1 > V(\mathscr{S})$. Тогда существует решетка* M *с определителем Δ_1, являющаяся допустимой для множества $\mathscr{S}$.*

Действительно, пусть $f(\mathbf{x})$ — характеристическая функция множества $\mathscr{S}$. Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы выполнялось неравенство $\Delta_1 > V(\mathscr{S}) + \varepsilon$. Согласно теореме I, найдется решетка M, для которой

$$\sum_{\substack{\mathbf{a}\in M\\ \mathbf{a}\neq \mathbf{o}\\ \mathbf{a}\in\mathscr{S}}} 1 = \sum_{\substack{\mathbf{a}\in M\\ \mathbf{a}\neq \mathbf{o}}} f(\mathbf{a}) < \Delta_1^{-1}\{V(\mathscr{S})+\varepsilon\} < 1,$$

т. е. в множестве $\mathscr{S}$ нет точек $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ решетки M.

2. Имеет место следующий результат, аналогичный теореме I и относящийся к суммированию по примитивным точкам.

Теорема II. *Пусть $f(\mathbf{x})$, Δ_1 и ε удовлетворяют условиям теоремы* I. *Тогда существует решетка* M *с определителем Δ_1, для которой справедливо неравенство*

$$\zeta(n)\, \Delta_1 \sum_{\mathbf{a}\in M}^{*} f(\mathbf{a}) < \int f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \varepsilon,$$

где суммирование $\sum^*$ ведется по всем примитивным точкам решетки M.

Доказательство этой теоремы весьма близко к доказательству теоремы I. Кратко укажем видоизменения, которые при этом необходимо внести. Теорема II, во всяком случае, содержится в обобщении теоремы I на точечные множества Λ, более общие, чем решетки, которое было дано Макбетом и Роджерсом [1] и которое мы упоминали в п. 1. Ниже мы следуем изложению Роджерса [2, 9].

Прежде всего очевидно, что точки решетки M, принадлежащие кубу (2) п. 1 этого параграфа, являются примитивными точками решетки M в том и только в том случае, когда они примитивны как точки решетки Λ. Поэтому нам достаточно доказать, что

$$\lim_{\eta\to 0} \eta^n \sum_{\mathbf{a}\in\Lambda}^{*} f(\mathbf{a}) = \{\zeta(n)\}^{-1} \int f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{1}$$

Так как

$$\sum_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}} f(\mathbf{a})=\sum_{r=1}^{\infty}\ \sum_{\mathbf{a}\in\Lambda}{}^{*} f(r\mathbf{a}),$$

по формуле обращения Мёбиуса (см., например, Харди и Райт [1], гл. XVI) мы получаем, что

$$\sum_{\mathbf{a}\in\Lambda}{}^{*} f(\mathbf{a})=\sum_{r}\mu(r)\sum_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}} f(r\mathbf{a}),$$

откуда

$$\eta^n\sum_{\mathbf{a}\in\Lambda}{}^{*} f(\mathbf{a})=\sum_{r\geqslant 1}\frac{\mu(r)}{r^n}\,\sigma(r\eta),$$

где

$$\sigma(\xi)=\xi^n\sum_{\substack{\mathbf{u}\in\Lambda\\ \mathbf{u}\neq\mathbf{o}}} f(\xi\mathbf{u})$$

для любого $\xi>0$. Но тогда $\sigma(\xi)$ ограничена для всех ξ и

$$\lim_{\xi\to 0}\sigma(\xi)=\int f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Так как $\eta>0$ мало при достаточно больших p и так как

$$\sum_{r\geqslant 1}\frac{\mu(r)}{r^n}=\{\zeta(n)\}^{-1},$$

то мы приходим к утверждению теоремы II.

Как и в п. 1, доказывается следующее важное предложение.

Следствие (теорема Минковского — Главки). *Пусть $\mathscr{S}$ — ограниченное симметричное звездное тело с объемом $V(\mathscr{S})$, и пусть $2\zeta(n)\Delta_1>V(\mathscr{S})$. Тогда существует решетка* M *с определителем $d(\mathrm{M})=\Delta_1$, являющаяся допустимой для множества $\mathscr{S}$.*

§ 4. Теоремы Шмидта

1. Мы теперь располагаем всеми необходимыми средствами, чтобы проиллюстрировать метод Шмидта уточнения следствий к двум последним теоремам. Сначала докажем следующее простое предложение.

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{S}$ — симметричное звездное тело в n-мерном пространстве с жордановым объемом $V(\mathscr{S})$, и пусть Δ_1 — любое число, удовлетворяющее условию*

$$3\zeta(n)\Delta_1>\left(1+2^{1-n}\right)V(\mathscr{S});$$

***тогда существует** $\mathscr{S}$-**допустимая решетка** M **с определителем** Δ_1.*

Доказательство. Пусть $g(\mathbf{x})$ — характеристическая функция множества $\mathscr{S}$, и пусть

$$f(\mathbf{x})=g(\mathbf{x})+2g(2\mathbf{x}),$$

так что

$$f(\mathbf{x})=\begin{cases}3, & \text{если}\quad \mathbf{x}\in\frac{1}{2}\mathscr{S},\\ 1, & \text{если}\quad \mathbf{x}\in\mathscr{S},\ \mathbf{x}\notin\frac{1}{2}\mathscr{S},\\ 0 & \text{в противном случае}\end{cases}$$

и

$$\int f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=\left(1+2^{1-n}\right)V(\mathscr{S}).$$

Выберем $\varepsilon>0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$3\zeta(n)\Delta_1>\left(1+2^{1-n}\right)\{V(\mathscr{S})+\varepsilon\}.$$

Применяя теорему II с выбранным ε и с заменой Δ_1 на $\frac{\Delta_1}{2}$, мы заключаем, что существует решетка Λ с определителем

$$d(\Lambda)=\frac{1}{2}\Delta_1,$$

для которой

$$\sum_{\mathbf{a}\in\Lambda}{}^{*} f(\mathbf{a})<6;$$

здесь, как обычно, суммирование $\sum^*$ ведется по всем примитивным точкам решетки Λ. Так как в силу симметрии множества $\mathscr{S}$ $f(-\mathbf{x})=f(\mathbf{x})$, то из неравенства следует, что не существует примитивных точек решетки Λ, для которых $f(\mathbf{a})=3$, а, значит, в множестве $\frac{1}{2}\mathscr{S}$ нет точек решетки Λ, отличных от $\mathbf{o}$. По той же причине существует не более двух пар примитивных точек, скажем $\pm\mathbf{a}_1$, $\pm\mathbf{a}_2$, решетки Λ, принадлежащих множеству $\mathscr{S}$. Согласно следствию 1 леммы 1, найдется подрешетка M индекса 2 решетки Λ, которая не содержит ни $\mathbf{a}_1$, ни $\mathbf{a}_2$. Так как точки $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ не принадлежат $\frac{1}{2}\mathscr{S}$, то точки $2\mathbf{a}_1$, $2\mathbf{a}_2$, принадлежащие M, не принадлежат множеству $\mathscr{S}$. Таким образом, решетка M является $\mathscr{S}$-допустимой. Так как

$$d(\mathrm{M})=2d(\Lambda)=\Delta_1,$$

то решетка M является искомой.

Лемма 3 доказана.

2. В случае когда $n=2$, результат леммы 3 не сильнее, чем следствие теоремы II.

Путем дальнейшего уточнения метода Шмидт [2] несколько улучшил лемму 3, однако для больших значений n лемма 3 остается слабее следующей теоремы III, которая применима ко всем измеримым по Жордану ограниченным множествам (а не только к симметричным звездным телам). Чтобы получить результаты для симметричных множеств $\mathscr{S}$, теорему III следует применять не прямо к множеству $\mathscr{S}$, но, скажем, к „полумножеству" $\mathscr{S}_1$, состоящему из точек

$$\mathbf{x} \in \mathscr{S}, \quad x_1 \geqslant 0.$$

Тогда

$$V(\mathscr{S}_1) = \frac{1}{2} V(\mathscr{S}),$$

и решетка M является $\mathscr{S}_1$-допустимой в том и только в том случае, когда она $\mathscr{S}$-допустима. Это дает возможность получить в неравенстве теоремы для симметричных множеств добавочный множитель 2.

Теорема III. *Пусть $\mathscr{S}$ — ограниченное n-мерное измеримое по Жордану множество объема $V(\mathscr{S})$, и пусть Δ_1 — любое число, удовлетворяющее неравенству*

$$(1+2^{1-n})(1+3^{1-n}) V(\mathscr{S}) < 2\Delta_1. \tag{1}$$

Тогда существует решетка M *с определителем Δ_1, ни одна из точек которой, кроме* **o**, *не принадлежит множеству $\mathscr{S}$.*

Доказательство. Пусть $g(\mathbf{x})$ — характеристическая функция множества $\mathscr{S}$. Положим

$$f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + 2g(2\mathbf{x}) + 3g(3\mathbf{x}) + 6g(6\mathbf{x}); \tag{2}$$

тогда

$$\int f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = (1 + 2\cdot 2^{-n} + 3\cdot 3^{-n} + 6\cdot 6^{-n}) \int g(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = $$
$$= (1+2^{1-n})(1+3^{1-n}) V(\mathscr{S}).$$

По теореме I существует такая решетка Λ с определителем

$$d(\Lambda) = \frac{\Delta_1}{6}, \tag{3}$$

что

$$\sum_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{o}}} f(\mathbf{a}) < 12. \tag{4}$$

Мы построим искомую решетку M как подрешетку индекса 6 решетки Λ. Разобьем точки **a** решетки Λ, принадлежащие множеству $\mathscr{S}$ и отличные от начала **o**, на четыре типа: $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ и $\mathfrak{T}_6$:

(i) точка **a** принадлежит $\mathfrak{T}_1$ в том и только в том случае, когда ее нельзя представить в виде $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$ или $\mathbf{a} = 3\mathbf{b}$, где $\mathbf{b} \in \Lambda$;

(ii) точка **a** принадлежит $\mathfrak{T}_2$ в том и только в том случае, когда ее можно представить в виде $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$, но нельзя представить в виде $\mathbf{a} = 3\mathbf{b}$, где $\mathbf{b} \in \Lambda$;

(iii) точка **a** принадлежит $\mathfrak{T}_3$ в том и только в том случае, когда ее можно представить в виде $\mathbf{a} = 3\mathbf{b}$, но нельзя представить в виде $\mathbf{a} = 2\mathbf{b}$, где $\mathbf{b} \in \Lambda$;

(iv) точка **a** принадлежит $\mathfrak{T}_6$ в том и только в том случае, когда ее можно представить в виде $\mathbf{a} = 6\mathbf{b}$, где $\mathbf{b} \in \Lambda$.

Пусть N_1, N_2, N_3, N_6 — количество точек решетки в соответствующих классах. Тогда, согласно соотношениям (2) и (4), мы получаем неравенство

$$N_1 + 3N_2 + 4N_3 + 12N_6 < 12. \tag{5}$$

Действительно, если, например, $\mathbf{a} \in \mathfrak{T}_6$, то в левой части неравенства (4) она учитывается $1+2+3+6=12$ раз. В частности, согласно неравенству (5),

$$N_6 = 0.$$

Предположим сначала, что $N_3 > 0$. В этом случае применим лемму 2, положив $p = 2$ и взяв в качестве $\mathbf{a}_0$ одну из N_3 точек множества $\mathfrak{T}_3$, а в качестве $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_R$ — объединение оставшихся точек множества $\mathfrak{T}_3$ (если они есть) с точками множества $\mathfrak{T}_1$, и при этом полагаем $k_r = 1$, если $\mathbf{a}_r \in \mathfrak{T}_1$, и $k_r = 4$, если $\mathbf{a}_r \in \mathfrak{T}_3$. Тогда по лемме 2 существует подрешетка Γ индекса 2 решетки Λ, которая содержит соответственно N_1' и N_3' точек множеств $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_3$; при этом выполняется неравенство

$$N_1' + 4N_3' \leqslant \frac{1}{2}(N_1 + 4N_3 - 4) \tag{6}$$

(слагаемое -4 обусловлено тем, что точка $\mathbf{a}_0 \in \mathfrak{T}_3$ не учитывается). Все точки множества $\mathfrak{T}_2$, конечно, принадлежат решетке Γ. Из соотношений (5) и (6) мы получаем, что

$$2N_1' + 3N_2 + 8N_3' + 4 \leqslant 11.$$

Отсюда следует, что $N_3' = 0$ и $N_1' + N_2 \leqslant \frac{7}{2}$, так что $N_1' + N_2 \leqslant 3$. Но тогда по следствию 1 леммы 1 существует подрешетка M решетки Γ индекса 3, которая не содержит ни одной из этих $N_1' + N_2$ точек. В этом случае решетка M является, очевидно, искомой.

Мы можем теперь считать, что

$$N_3 = 0.$$

Тогда мы применим следствие 2 леммы 1, положив $p = 3$, взяв в качестве множества точек $\mathbf{a}_r$ объединение множеств $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ и положив $k_r = 1$, если $\mathbf{a}_r \in \mathfrak{T}_1$, и $k_r = 3$, если $\mathbf{a}_r \in \mathfrak{T}_2$. Так как имеется самое большее

$$11 < \frac{3^3 - 1}{3 - 1}$$

точек $\mathbf{a}_r$, мы можем взять $m = 2$, и тогда в обозначениях следствия

$$\frac{p^{m-1} - 1}{p^m - 1} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, существует подрешетка Γ индекса 3, которая содержит N_1', N_2' точек множеств $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ соответственно, где

$$N_1' + 3N_2' \leqslant \frac{1}{4}(N_1 + 3N_2) \leqslant \frac{11}{4} < 3.$$

Отсюда следует, что $N_2' = 0$ и $N_1' \leqslant 2$. Тогда по следствию 1 леммы 1 существует подрешетка M решетки Γ индекса 2, которая не содержит ни одной из этих N_1' точек. Решетка M в этом случае является искомой.

Таким образом, в любом случае мы можем построить подрешетку M индекса 6 решетки Λ, являющуюся допустимой для множества $\mathcal{S}$. Так как

$$d(\mathrm{M}) = 6d(\Lambda) = \Delta_1,$$

то решетка M обладает всеми необходимыми свойствами.

Теорема III доказана.

Как отмечает Шмидт, теорема III может быть несколько улучшена путем дальнейшей разработки деталей; однако для больших n она все же слабее, чем упомянутые нами в § 1 результаты Роджерса, доказательство которых выходит за рамки этой книги. В частности, множитель $(1 + 2^{1-n})(1 + 3^{1-n})$ в левой части неравенства (1) может быть заменен несколько меньшим, если $\mathcal{S}$ является звездным телом, так как в этом случае точки множества $r^{-1}\mathcal{S}$ автоматически принадлежат множеству $t^{-1}\mathcal{S}$, если $t \leqslant r$.

§ 5. Гипотеза Роджерса

Мы отклонимся теперь от главной темы этой главы, чтобы доказать результат, высказанный в качестве предположения Роджерсом [8], который сравнил его с обобщением теоремы II гл. III со случая $m = 1$ на случай $m > 1$. Этот результат был доказан Роджерсом в случае, когда входящее в его формулировку число m является простым. Затем Шмидт [1] доказал его для „почти" всех m [1]). В общем виде это предположение было доказано автором (Касселс [9]) в несколько более широком контексте. В дальнейшем этот результат не используется.

Теорема IV. *Пусть $\mathcal{S}$ — симметричное звездное тело с критическим определителем $\Delta(\mathcal{S})$, и пусть Λ — решетка с определителем $d(\Lambda)$, причем*

$$md(\Lambda) < \Delta(\mathcal{S}), \tag{1}$$

[1]) Согласно реферату в *Math. Reviews*, для всех $m \leqslant 10^7$ и для всех достаточно больших m.

где m — целое, $m \geqslant 1$. Тогда тело $\mathcal{S}$ содержит по крайней мере m пар точек $\pm\mathbf{a}$ решетки Λ, отличных от начала $\mathbf{o}$.

Теорема IV непосредственно вытекает из следующего предложения, в котором не содержится никакой ссылки на звездные тела.

Теорема V. *Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_R$ — примитивные точки решетки Λ, и пусть*

$$j_r \quad (1 \leqslant r \leqslant R) \tag{2}$$

— положительные целые числа. Тогда существует подрешетка решетки Λ индекса, не большего, чем

$$j_1 + \ldots + j_R + 1 = J + 1, \tag{3}$$

которая не содержит ни одной из точек

$$\pm i_r\mathbf{a}_r \quad (1 \leqslant i_r \leqslant j_r,\ 1 \leqslant r \leqslant R). \tag{4}$$

Мы покажем сначала, что теорема IV вытекает из теоремы V. Предположим, что решетка Λ, фигурирующая в формулировке теоремы IV, содержит меньше чем m пар точек множества $\mathcal{S}$. Поскольку $\mathcal{S}$ является симметричным звездным телом, точки решетки Λ, принадлежащие $\mathcal{S}$, могут быть представлены в виде (4), где по предположению число пар J удовлетворяет неравенству

$$J < m.$$

Поэтому в силу теоремы V существует подрешетка M решетки Λ индекса, не превосходящего m, которая не содержит ни одной из этих точек, т. е. является $\mathcal{S}$-допустимой. Поскольку, согласно (1),

$$d(\mathrm{M}) \leqslant md(\Lambda) < \Delta(\mathcal{S}),$$

то мы приходим к противоречию с определением величины $\Delta(\mathcal{S})$.

Доказательство теоремы V опирается на следующую лемму, которая обеспечивает существование простых чисел с определенными свойствами. Эта лемма была доказана Сильвестром [1] и переоткрыта Шуром [2], который дал несколько более простое доказательство. Доказательство, во всяком случае, довольно сложное, так что мы не приводим его здесь и отсылаем читателя к оригинальным работам.

Лемма 4 (Сильвестр). *Пусть X, Y — целые числа и*

$$1 \leqslant X \leqslant Y.$$

Тогда существует простое число $p > X$, делящее одно из чисел

$$Y + 1, \ldots, Y + X.$$

Доказательство теоремы V. Предположим сначала, что $R = 1$. Так как точка $\mathbf{a}_1$ является примитивной, ее можно взять в качестве элемента базиса решетки Λ

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n,$$

где n — размерность решетки. Тогда ясно, что решетка М, состоящая из точек

$$u_1\mathbf{b}_1+\ldots+u_n\mathbf{b}_n,$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — целые и

$$u_1\equiv 0 \pmod{(J+1)},$$

обладает всеми необходимыми свойствами.

Рассмотрим теперь случай $R>1$ и используем индукцию по J. Не умаляя общности, можно считать, что

$$j_1=\max_{1\leqslant r\leqslant R} j_r. \tag{5}$$

Пусть p — простое число, существование которого обеспечивается леммой Сильвестра при

$$X=\min(j_1,\ j_2+\ldots+j_R),$$
$$Y=\max(j_1,\ j_2+\ldots+j_R);$$

тогда

$$p>X\geqslant j_r \quad (2\leqslant r\leqslant R). \tag{6}$$

Так как p делит одно из чисел $Y+1, \ldots, Y+X$, то мы получаем, что

$$\left[\frac{X}{p}\right]+\left[\frac{Y}{p}\right]<\left[\frac{X+Y}{p}\right],$$

т. е.

$$\left[\frac{j_1}{p}\right]+\left[\frac{j_2+\ldots+j_R}{p}\right]<\left[\frac{j_1+\ldots+j_R}{p}\right]; \tag{7}$$

здесь для любого вещественного числа x через $[x]$ обозначается целое число, удовлетворяющее неравенствам $[x]\leqslant x<[x]+1$. По лемме 2 найдется подрешетка Γ индекса p, которая не содержит точку $\mathbf{a}_1$, причем

$$p\sum_{\mathbf{a}_r\in\Gamma} j_r\leqslant\sum_{2\leqslant r\leqslant R} j_r,$$

т. е.

$$\sum_{\mathbf{a}_r\in\Gamma} j_r\leqslant\left[\frac{j_2+\ldots+j_R}{p}\right]. \tag{8}$$

Если какая-либо точка вида $i_r\mathbf{a}_r$ из (4), где $r>1$, принадлежит Γ, то в силу неравенства (6) и $\mathbf{a}_r$ принадлежит Γ. Так как $\mathbf{a}_1$ не принадлежит Γ, то единственными точками из множества (4) с $r=1$, принадлежащими Γ, являются точки

$$\pm i_1'(p\mathbf{a}_1) \quad \left(1\leqslant i_1'\leqslant\left[\frac{j_1}{p}\right]\right). \tag{9}$$

Но тогда по индукционному предположению существует подрешетка М решетки Γ индекса, не превосходящего

$$1+\left[\frac{j_1}{p}\right]+\sum_{\mathbf{a}_r\in\Gamma} j_r\leqslant 1+\left[\frac{j_1}{p}\right]+\left[\frac{j_2+\ldots+j_R}{p}\right],$$

которая вовсе не содержит ни одной из точек множества (4). Индекс решетки М в Λ равен умноженному на p индексу М в Γ, так что в силу (7) он не превышает

$$p\left\{1+\left[\frac{j_1}{p}\right]+\left[\frac{j_2+\ldots+j_R}{p}\right]\right\}\leqslant J<J+1.$$

Теорема V, а с ней и теорема IV доказаны.

§ 6. Неограниченные звездные тела

1. Результаты § 3 и 4 распространяются и на неограниченные звездные тела. Например, имеет место следующее предложение.

Теорема VI. *Пусть $\mathscr{S}$ — симметричное звездное тело (ограниченное или неограниченное) с критическим определителем $\Delta(\mathscr{S})$ и объемом $V(\mathscr{S})$. Тогда*

$$\Delta(\mathscr{S})\leqslant\{2\zeta(n)\}^{-1}V(\mathscr{S}). \tag{1}$$

Доказательство. Если тело $\mathscr{S}$ является ограниченным, то утверждение теоремы совпадает со следствием теоремы II. В случае когда тело $\mathscr{S}$ не ограничено, утверждение следует из следствия теоремы II и следствия теоремы V гл. V.

Теорема VI доказана.

Точно так же любая из оценок § 3 и 4 может быть распространена на неограниченные звездные тела $\mathscr{S}$ или даже на любые открытые множества конечного объема, для которых начало координат является внутренней точкой.

2. Существуют звездные тела $\mathscr{S}$ конечного типа (т. е. тела, для которых $\Delta(\mathscr{S})<\infty$) и бесконечного объема. Примером такого тела в двумерном пространстве является тело

$$\mathscr{S}_1:\quad |x_1x_2|<1, \tag{1}$$

для которого, как мы видели в гл. II, $\Delta(\mathscr{S}_1)=5^{1/2}$. Более общо, в n-мерном пространстве тело

$$|x_1\ldots x_n|<1$$

имеет конечный тип и бесконечный объем, поскольку допустимые решетки существуют и задаются норменными формами вполне вещественных полей алгебраических чисел степени n (см. гл. X).

Вообще говоря, в пространствах более чем двух измерений очень трудно решить, имеет ли данное звездное тело конечный тип или нет. Касселс и Суиннертон-Дайер [1] рассмотрели два трехмерных примера, изучение которых с точки зрения конечности типа привело бы к интересным следствиям. В двух измерениях, однако, существует общий критерий для решения этих вопросов, который мы теперь рассмотрим.

3. С этого места мы будем считать[1]), что

$$n = 2.$$

Тело $\mathscr{S}_1$, определенное неравенством (1) п. 2, имеет в очевидном смысле две пары асимптотических ветвей, асимптотами которых являются оси x_1 и x_2. В тело $\mathscr{S}_1$ можно вписать сколь угодно узкий параллелограмм площади 1, у которого одна из пар сторон параллельна асимптоте, например параллелограмм

$$|x_1| < \varepsilon, \qquad |x_2| < \varepsilon^{-1}.$$

В некотором смысле тело $\mathscr{S}_1$ представляет собой предельный случай, так как если в звездное тело $\mathscr{S}$ возможно вписать параллелограммы с центром в начале и со сколь угодно большим объемом (площадью), то по теореме Минковского о выпуклом теле (теорема II гл. III) тело $\mathscr{S}$ имеет бесконечный тип. Грубо говоря, любое звездное тело с парой ветвей, расположенных шире, чем у тела $\mathscr{S}_1$, имеет бесконечный тип. Мы покажем теперь, что двумерное звездное тело может иметь любое конечное число ветвей, подобных ветвям тела $\mathscr{S}_1$, и, однако, оставаться телом конечного типа.

Теорема VII. *Пусть для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$f_0(x_1, x_2) = \varepsilon(x_1^2 + x_2^2), \tag{1}$$

и пусть

$$f_j(x_1, x_2) \qquad (1 \leqslant j \leqslant J)$$

— любое конечное число неопределенных квадратичных форм. Предположим, что лучевая функция $F(x_1, x_2)$ *удовлетворяет условию*

$$F^2(x_1, x_2) \geqslant \min_{0 \leqslant j \leqslant J} |f_j(x_1, x_2)| \tag{2}$$

для всех пар (x_1, x_2). *Тогда звездное тело*

$$\mathscr{S}: \quad F(x_1, x_2) < 1 \tag{3}$$

является телом конечного типа.

[1]) Принято называть двумерные звездные тела „звездными областями", однако мы не будем следовать этому обычаю. Точно так же мы можем иногда продолжать говорить об объеме там, где слово „площадь" более обычно.

Показатель степени 2 в неравенстве (2) объясняется соображениями однородности.

Мы выведем теорему VII из следующего обобщения теоремы Холла [1], которое принадлежит автору (Касселс [7]).

Теорема VIII. *Пусть* $\beta_1, \ldots, \beta_K$ *— любые вещественные числа. Тогда существует такое вещественное число* α, *что*

$$|u|\,|(\alpha + \beta_k)u + v| > \frac{1}{8(K+1)^2} \qquad (1 \leqslant k \leqslant K) \tag{4}$$

для всех целых чисел $u \neq 0$ *и* v.

Сначала мы из теоремы VIII выведем теорему VII, а затем в п. 4 докажем теорему VIII. После подходящего поворота системы координат мы без уменьшения общности можем предполагать, что

$$f_j(1, 0) \neq 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant J),$$

так что

$$f_j(x_1, x_2) = \lambda_j(x_1 + \vartheta_j x_2)(x_1 + \varphi_j x_2) \qquad (1 \leqslant j \leqslant J), \tag{5}$$

где λ_j, ϑ_j, φ_j — вещественные числа, для которых

$$\lambda_j \neq 0, \qquad \vartheta_j \neq \varphi_j.$$

Но тогда

$$|f_j(x_1, x_2)| \geqslant \mu_j \min\{|x_2(x_1 + \vartheta_j x_2)|,\ |x_2(x_1 + \varphi_j x_2)|\}, \tag{6}$$

где

$$\mu_j = \frac{1}{2}|\lambda_j|\,|\vartheta_j - \varphi_j| > 0;$$

действительно, если, например,

$$|x_1 + \vartheta_j x_2| \leqslant |x_1 + \varphi_j x_2|,$$

то мы получаем, что

$$|(\vartheta_j - \varphi_j)x_2| = |(x_1 + \vartheta_j x_2) - (x_1 + \varphi_j x_2)| \leqslant 2|x_1 + \varphi_j x_2|.$$

Применим теорему VIII, полагая числа $\beta_1, \ldots, \beta_K$ равными числам ϑ_j, φ_j, расположенным в некотором порядке, так что $K = 2J$. Пусть α — вещественное число, о существовании которого говорится в теореме VIII, так что

$$\left.\begin{aligned} |u\{(\alpha + \vartheta_j)u + v\}| \geqslant \eta > 0, \\ |u\{(\alpha + \varphi_j)u + v\}| \geqslant \eta > 0 \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

для любых целых чисел $u \neq 0$ и любых целых чисел v, где

$$\eta = \{8(2J+1)^2\}^{-1}.$$

Пусть Λ — решетка, состоящая из точек

$$(x_1, x_2) = R(\alpha u + v,\ u), \tag{8}$$

где u, v пробегают все целые числа и R — положительное число, которое еще предстоит выбрать. Если $u \neq 0$, то на основании неравенств (6) и (7) мы получаем, что

$$|f_j\{R(\alpha u + v),\ Ru\}| \geqslant \mu_j R^2 \eta. \qquad (9)$$

Если же $u = 0$, но $v \neq 0$, то на основании неравенства (5) мы получаем неравенство

$$|f_j(Rv,\ 0)| \geqslant |\lambda_j| R^2. \qquad (10)$$

Аналогично, рассматривая для точек решетки (8) два случая: $u \neq 0$ и $u = 0$, $v \neq 0$, мы получаем, что

$$f_0(x_1,\ x_2) = \varepsilon(x_1^2 + x_2^2) \geqslant \varepsilon R^2 \qquad (11)$$

для всех точек $(x_1,\ x_2) \in \Lambda$, отличных от начала $\mathbf{o}$. Мы можем выбрать R столь большим, что правые части неравенств (9), (10) и (11) будут не меньше, чем 1. Тогда для всех точек $(x_1,\ x_2) \neq \mathbf{o}$ решетки Λ мы из неравенства (2) выводим неравенство

$$F^2(x_1,\ x_2) \geqslant \min_{0 \leqslant j \leqslant J} |f_j(x_1,\ x_2)| \geqslant 1,$$

так что решетка Λ является $\mathcal{S}$-допустимой.

4. Доказательство теоремы VIII. Положим

$$\varkappa = \{2(K+1)\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Мы будем строить последовательность открытых интервалов $\mathcal{J}_{-1}$, $\mathcal{J}_0$, $\mathcal{J}_1$, ..., обладающих следующими индуктивными свойствами:

$(\mathrm{i})_m$ $\mathcal{J}_{m+1}$ содержится в $\mathcal{J}_m$;

$(\mathrm{ii})_m$ длина интервала $\mathcal{J}_m$ равна $\varkappa^{-2m-2}$;

$(\mathrm{iii})_m$ неравенство

$$u\,|(\alpha + \beta_k)u + v| > \frac{1}{2}\varkappa^{-4} \qquad (1 \leqslant k \leqslant K) \qquad (2)$$

справедливо для всех чисел α из интервала $\mathcal{J}_m$ и для всех целых чисел v и u с условием

$$0 < u \leqslant \varkappa^m. \qquad (3)$$

Если мы сможем построить систему интервалов $\mathcal{J}_m$, то теорема VIII будет доказана, так как тогда существует число α, содержащееся во всех интервалах $\mathcal{J}_m$; для этого числа неравенство (2) справедливо при всех целых числах $u > 0$ и v.

Поскольку не существует целых чисел u, удовлетворяющих неравенству (3) при $m = -1$, мы можем взять в качестве $\mathcal{J}_{-1}$ интервал $0 < \alpha < 1$. Предположим, что интервал $\mathcal{J}_m$ уже построен; построим интервал $\mathcal{J}_{m+1}$. Согласно условию $(\mathrm{ii})_m$, открытый интервал $\mathcal{J}_m$ является множеством чисел α, удовлетворяющих условию

$$\alpha' < \alpha < \alpha'', \qquad (4)$$

где α' и α'' — некоторые числа, такие, что

$$\alpha'' - \alpha' = \varkappa^{-2m-2}. \qquad (5)$$

Так как две дроби v/u, где $0 < u \leqslant \varkappa^{m+1}$, отличаются по меньшей мере на $\varkappa^{-2m-2}$, то для каждого k $(1 \leqslant k \leqslant K)$ найдется не более одной дроби v_k/u_k, удовлетворяющей условиям

$$-\left(\frac{v_k}{u_k} + \beta_k\right) \in \mathcal{J}_m, \qquad 0 < u_k \leqslant \varkappa^{m+1}. \qquad (6)$$

Согласно условию $(\mathrm{iii})_m$, мы получаем, что

$$u_k > \varkappa^m \qquad (1 \leqslant k \leqslant K). \qquad (7)$$

Пусть $\mathcal{S}$ будет множеством таких чисел α, что

$$\alpha' + \frac{1}{2}\varkappa^{-2m-4} < \alpha < \alpha'' - \frac{1}{2}\varkappa^{-2m-4}, \qquad (8)$$

и

$$u_k\,|(\alpha + \beta_k)u_k + v_k| > \frac{1}{2}\varkappa^{-4} \qquad (9)$$

для всех тех k между 1 и K, для которых существует дробь v_k/u_k, удовлетворяющая условиям (6). Тогда множество $\mathcal{S}$ состоит самое большее из $K+1$ интервала. Их общая длина, согласно условиям (1), (5) и (7), равна

$$\alpha'' - \alpha' - \varkappa^{-2m-4} - \sum_k \varkappa^{-4} u_k^{-2} \geqslant$$
$$\geqslant \varkappa^{-2m-2} - (K+1)\varkappa^{-2m-4} = (K+1)\varkappa^{-2m-4}.$$

Таким образом, мы можем найти в множестве $\mathcal{S}$ открытый интервал $\mathcal{J}_{m+1}$, длина которого точно равна $\varkappa^{-2m-4}$. Тогда, согласно построению, $\mathcal{J}_{m+1}$ удовлетворяет условиям $(\mathrm{i})_m$ и $(\mathrm{ii})_{m+1}$. Остается проверить условия $(\mathrm{iii})_{m+1}$. Согласно условиям $(\mathrm{i})_m$ и $(\mathrm{iii})_m$, можно, очевидно, считать, что числа u и v взаимно просты и что

$$\varkappa^m < u \leqslant \varkappa^{m+1}. \qquad (10)$$

Если $v/u = v_k/u_k$ является дробью, удовлетворяющей условию (6), то, согласно (9), для всех $\alpha \in \mathcal{J}_{m+1}$ верно неравенство

$$u\,|(\alpha + \beta_k)u + v| > \frac{1}{2}\varkappa^{-4}. \qquad (11)$$

В противном случае число $-\left(\frac{v}{u} + \beta_k\right)$ не принадлежит интервалу $\mathcal{J}_m$, а тогда, согласно (8), для всех $\alpha \in \mathcal{J}_{m+1}$ справедливо неравенство

$$\left|\frac{v}{u} + (\alpha + \beta_k)\right| > \frac{1}{2}\varkappa^{-2m-4},$$

откуда на основании условия (10) следует неравенство (11). Таким образом, интервал $\mathcal{J}_{m+1}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Теорема VIII, а с нею и теорема VII доказаны.

ГЛАВА VII

ФАКТОРПРОСТРАНСТВО

§ 1. Введение

Прежде чем продолжать изучение геометрии чисел, удобно ввести здесь понятие факторпространства n-мерного пространства по решетке. Это понятие играет важную роль в гл. XI при рассмотрении неоднородных проблем; кроме того, оно понадобится нам в гл. VIII, так как это понятие позволяет дать наиболее естественную интерпретацию теоремы Минковского о последовательных минимумах выпуклого тела по отношению к решетке.

В § 2 мы приводим определение и наиболее важные свойства факторпространства. В § 3 мы доказываем результат, являющийся основным для одной из тем гл. XI.

§ 2. Общие свойства

1. Пусть Λ — решетка в n-мерном евклидовом пространстве. Две точки $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ этого пространства назовем сравнимыми по модулю Λ

$$\mathbf{y}_1 \equiv \mathbf{y}_2 \ (\Lambda), \tag{1}$$

если их разность $\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$ принадлежит Λ. Ясно, что это соотношение симметрично относительно $\mathbf{y}_1$ и $\mathbf{y}_2$. Кроме того, если

$$\mathbf{y}_1 \equiv \mathbf{y}_2 \ (\Lambda), \quad \mathbf{y}_2 \equiv \mathbf{y}_3 \ (\Lambda),$$

то

$$\mathbf{y}_1 \equiv \mathbf{y}_3 \ (\Lambda).$$

Таким образом, точки $\mathbf{y}$ можно разбить на классы $\mathfrak{y}$, так что две точки $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}'$ сравнимы в том и только в том случае, когда они принадлежат к одному и тому же классу. Класс $\mathfrak{y}$ состоит из всех точек вида $\mathbf{y}_0 + \mathbf{a}$, где $\mathbf{y}_0$ — некоторая фиксированная точка этого класса, а $\mathbf{a}$ пробегает все точки решетки Λ.

Если

$$\mathbf{y}' \equiv \mathbf{y} \ (\Lambda), \quad \mathbf{z}' \equiv \mathbf{z} \ (\Lambda),$$

то, очевидно,

$$\mathbf{y}' + \mathbf{z}' \equiv \mathbf{y} + \mathbf{z} \ (\Lambda).$$

Таким образом, не возникает двусмысленности, если мы определим сумму $\mathfrak{y} + \mathfrak{z}$ двух классов как класс, содержащий точку $\mathbf{y} + \mathbf{z}$, где $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ — соответственно любые элементы классов $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$. Аналогично,

определяя для любого целого числа t класс $t\mathfrak{y}$ как класс, содержащий точку $t\mathbf{y}$, где $\mathbf{y} \in \mathfrak{y}$, мы снова получаем непротиворечивое определение. С другой стороны, если t не целое число, то из сравнения $\mathbf{y}' \equiv \mathbf{y}$, вообще говоря, не следует сравнение $t\mathbf{y}' \equiv t\mathbf{y}$. Таким образом, произведение $t\mathfrak{y}$ для вещественных не целых t остается неопределимым.

До сих пор, конечно, мы следовали только стандартному процессу определения факторгруппы абелевой группы (а именно аддитивной группы всех векторов) по некоторой подгруппе (а именно по аддитивной группе векторов решетки Λ). Мы будем говорить, что класс $\mathfrak{y}$ является точкой факторпространства $\mathscr{R}/\Lambda$, где $\mathscr{R}$ — первоначальное n-мерное евклидово пространство.

2. Пусть $F(\mathbf{x})$ — любая лучевая функция, определенная в $\mathscr{R}$; положим [1])

$$F(\mathfrak{y}) = \inf_{\mathbf{y} \in \mathfrak{y}} F(\mathbf{y}), \tag{1}$$

где $\mathfrak{y} \in \mathscr{R}/\Lambda$. Эта функция будет играть важную роль в неоднородных проблемах (гл. XI). Заметим, что для класса $\mathfrak{o}$, к которому принадлежит $\mathbf{o}$,

$$F(\mathfrak{o}) = 0. \tag{2}$$

Для дальнейших ссылок мы перечислим важнейшие свойства функции $F(\mathfrak{x})$ в следующем предложении.

Лемма 1. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — лучевая функция, а $F(\mathfrak{x})$, где $\mathfrak{x} \in \mathscr{R}/\Lambda$, — определенная выше функция. Тогда*

(i) *$F(t\mathfrak{x}) \leqslant tF(\mathfrak{x})$ для целых $t \geqslant 0$;*

(ii) *если функция $F(\mathbf{x})$ является выпуклой, то то же верно и для $F(\mathfrak{x})$, т. е. для любых $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$,*

$$F(\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) \leqslant F(\mathfrak{x}) + F(\mathfrak{y});$$

(iii) *если $F(\mathbf{x}) = 0$ только для $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, то и $F(\mathfrak{x}) = 0$ только для $\mathfrak{x} = \mathfrak{o}$; для каждого $\mathfrak{y} \in \mathscr{R}/\Lambda$ существует такая точка $\mathbf{y} \in \mathfrak{y}$, что $F(\mathfrak{y}) = F(\mathbf{y})$;*

(iv) *если $F_1(\mathbf{x})$, $F_2(\mathbf{x})$ — две лучевые функции и для некоторого числа c и всех $\mathbf{x} \in \mathscr{R}$ имеет место неравенство $F_1(\mathbf{x}) \leqslant cF_2(\mathbf{x})$, то для всех $\mathfrak{x} \in \mathscr{R}/\Lambda$ справедливо неравенство $F_1(\mathfrak{x}) \leqslant cF_2(\mathfrak{x})$.*

Доказательство. Утверждение (iv) непосредственно следует из определения (формула (1)). Далее по определению лучевой функции

[1]) Это не приведет к смешению с обозначениями гл. IV, так как там аргументами являются решетки, а здесь — классы по отношению к решетке.

для всех вещественных $t>0$ справедливо соотношение $F(t\mathbf{x}) = tF(\mathbf{x})$. Отсюда следует, что если $t>0$ является целым числом, то

$$F(t\mathfrak{x}) = \inf_{\mathbf{y}\in t\mathfrak{x}} F(\mathbf{y}) \leqslant \inf_{\mathbf{x}\in\mathfrak{x}} F(t\mathbf{x}) = t \inf_{\mathbf{x}\in\mathfrak{x}} F(\mathbf{x}) = tF(\mathfrak{x}).$$

Это доказывает утверждение (i). Утверждение (ii) доказывается аналогично, и его проверку мы предоставляем читателю.

Остается доказать утверждение (iii). Пусть $\mathfrak{y}\in\mathscr{R}/\Lambda$, и пусть $\mathbf{y}_0\in\mathfrak{y}$; тогда любой элемент из класса $\mathfrak{y}$ имеет вид $\mathbf{y}_0+\mathbf{a}$, где $\mathbf{a}\in\Lambda$. По лемме 2 гл. IV существует такая постоянная $c>0$, что для всех $\mathbf{x}$ справедливо неравенство $F(\mathbf{x})\geqslant c|\mathbf{x}|$. Таким образом,

$$F(\mathbf{y}_0+\mathbf{a}) \geqslant c|\mathbf{y}_0+\mathbf{a}| \geqslant c\,||\mathbf{a}|-|\mathbf{y}_0||.$$

В частности, если $F(\mathbf{a}+\mathbf{y}_0)\leqslant F(\mathbf{y}_0)$, то

$$|\mathbf{a}| \leqslant |\mathbf{y}_0| + c^{-1}F(\mathbf{y}_0). \tag{3}$$

Имеется лишь конечное число точек $\mathbf{a}\in\Lambda$, для которых удовлетворяется неравенство (3). Таким образом, найдется такая точка $\mathbf{a}_0\in\Lambda$, что $F(\mathbf{y}_0+\mathbf{a}_0) = \inf\limits_{\mathbf{a}\in\Lambda} F(\mathbf{y}_0+\mathbf{a})$. По определению $F(\mathfrak{y}) = F(\mathbf{y}_0+\mathbf{a}_0)$, поэтому $F(\mathfrak{y})=0$ только в том случае, когда $F(\mathbf{y}_0+\mathbf{a}_0)=0$, иными словами, когда $\mathfrak{y}=\mathfrak{o}$.

Лемма 1 доказана.

3. Пусть $\mathfrak{y}_r$ $(1\leqslant r<\infty)$ — последовательность элементов из $\mathscr{R}/\Lambda$. Будем говорить, что эта последовательность стремится к пределу $\mathfrak{y}'\in\mathscr{R}/\Lambda$, если

$$\lim_{r\to\infty} |\mathfrak{y}_r - \mathfrak{y}'| = 0. \tag{1}$$

где в соответствии с обозначениями п. 2 § 2 мы полагаем

$$|\mathfrak{x}| = \inf_{\mathbf{x}\in\mathfrak{x}} |\mathbf{x}|. \tag{2}$$

Лемма 2. *Для того чтобы $\mathfrak{y}_r\to\mathfrak{y}'$, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие элементы $\mathbf{y}_r\in\mathfrak{y}_r$, $\mathbf{y}'\in\mathfrak{y}'$, что*

$$\mathbf{y}_r\to\mathbf{y}'. \tag{3}$$

Доказательство. Сначала предположим, что такие элементы $\mathbf{y}_r$, $\mathbf{y}'$ существуют. Тогда

$$|\mathfrak{y}_r-\mathfrak{y}'| \leqslant |\mathbf{y}_r-\mathbf{y}'|,$$

откуда на основании соотношения (3) следует равенство (1).

Предположим теперь, что справедливо равенство (1). По лемме 1 (iii) найдется точка $\mathbf{z}_r\in\mathfrak{y}_r-\mathfrak{y}'$, для которой

$$|\mathbf{z}_r| = |\mathfrak{y}_r-\mathfrak{y}'|.$$

Пусть $\mathbf{y}'$ — произвольная точка из класса $\mathfrak{y}'$; положим $\mathbf{y}_r=\mathbf{y}'+\mathbf{z}_r$. Тогда, очевидно, последовательность элементов $\mathbf{y}_r$ обладает всеми необходимыми свойствами.

Лемма 2 доказана.

4. Пусть

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \tag{1}$$

— какой-нибудь базис решетки Λ. Тогда каждая точка $\mathbf{x}$ пространства $\mathscr{R}$ может быть однозначно записана в виде

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \xi_n\mathbf{b}_n, \tag{2}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — некоторые вещественные числа; $\mathbf{x}\in\Lambda$ в том и только в том случае, когда числа $\xi_1, \ldots, \xi_n$ целые. Отсюда следует, что для каждой точки $\mathbf{x}$ существует однозначно определенная точка $\mathbf{a}$ решетки Λ, для которой

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}-\mathbf{a} = \eta_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \eta_n\mathbf{b}_n, \tag{3}$$

где

$$0 \leqslant \eta_j < 1. \tag{4}$$

Иными словами, каждый класс $\mathfrak{x}\in\mathscr{R}/\Lambda$ имеет точно по одному представителю $\mathbf{y}\in\mathfrak{x}$ в полуоткрытом параллелепипеде $\mathscr{P}$, определяемом условиями (3) и (4). Будем говорить, что этот параллелепипед является фундаментальным параллелепипедом решетки Λ. Различные базисы $\mathbf{b}_j$ приводят, вообще говоря, к различным фундаментальным параллелепипедам.

Из леммы 2 и факта существования фундаментального параллелепипеда непосредственно вытекает следующее предложение.

Лемма 3. *Факторпространство $\mathscr{R}/\Lambda$ компактно. Иными словами, каждая последовательность $\mathfrak{y}_r$ $(1\leqslant r<\infty)$ элементов из $\mathscr{R}/\Lambda$ содержит сходящуюся подпоследовательность*

$$\mathfrak{y}_{r_s}\to\mathfrak{y}'. \tag{5}$$

Доказательство. Фундаментальный параллелепипед $\mathscr{P}$ не является компактным, так как хотя он и ограничен, но не замкнут. Пусть $\overline{\mathscr{P}}$ — его замыкание, т. е. множество точек вида (3), где $0\leqslant\eta_j\leqslant 1$ $(1\leqslant j\leqslant n)$. Пусть $\mathbf{y}_r$ — представитель класса $\mathfrak{y}_r$, лежащий в $\mathscr{P}$. По теореме Вейерштрасса о компактности (п. 3 § 1 гл. III) существует сходящаяся подпоследовательность

$$\mathbf{y}_{r_s}\to\mathbf{y}',$$

где $\mathbf{y}'\in\overline{\mathscr{P}}$. Тогда соотношение (5), где $\mathbf{y}'\in\mathfrak{y}'$, вытекает из леммы 2.

Лемма 3 доказана.

16 Зак. 1029

5. Введем теперь меру на факторпространстве $\mathscr{R}/\Lambda$. Пусть S — любое множество элементов из $\mathscr{R}/\Lambda$. Назовем множество $\mathscr{S}$ элементов пространства $\mathscr{R}$ множеством представителей для множества S, если: (i) для каждого $\mathfrak{x} \in \mathsf{S}$ существует точно одна точка $\mathbf{x} \in \mathfrak{x}$, принадлежащая множеству $\mathscr{S}$, и (ii) каждая точка $\mathbf{x} \in \mathscr{S}$ принадлежит некоторому элементу $\mathfrak{x} \in \mathsf{S}$. Будем говорить, что множество S измеримо, если измеримо по крайней мере одно множество $\mathscr{S}$ представителей для множества S.

Пусть $\mathscr{S}_1$ — множество элементов $\mathbf{x} \in \mathscr{P}$ вида

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{u}, \quad \mathbf{y} \in \overline{\mathscr{S}}, \quad \mathbf{u} \in \Lambda,$$

где $\overline{\mathscr{S}}$ — любое измеримое множество представителей для множества S и $\mathscr{P}$ — фундаментальный параллелепипед. По следствию из теоремы I гл. III множество $\mathscr{S}_1$ измеримо и

$$V(\mathscr{S}_1) = V(\mathscr{S}).$$

В частности, если $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$ — любые два измеримых множества представителей для множества S, то $V(\mathscr{S}) = V(\mathscr{S}')$. Это общее значение объема мы будем обозначать через

$$m(\mathsf{S})$$

и называть мерой множества S.

Ясно, что мера всего факторпространства равна объему фундаментального параллелепипеда $\mathscr{P}$, т. е. равна $d(\Lambda)$.

Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — любое однородное отображение n-мерного пространства $\mathscr{R}$ на себя. Естественным образом это отображение индуцирует отображение пространства $\mathscr{R}/\Lambda$ в пространство $\mathscr{R}/\boldsymbol{\tau}\Lambda$, которое мы также будем обозначать через $\boldsymbol{\tau}$. Если m' — мера, определенная в пространстве $\mathscr{R}/\boldsymbol{\tau}\Lambda$ аналогично тому, как определена мера m в $\mathscr{R}/\Lambda$, то, очевидно, что

$$m'(\boldsymbol{\tau}\mathsf{S}) = |\det(\boldsymbol{\tau})|\, m(\mathsf{S})$$

для любого множества S пространства $\mathscr{R}/\Lambda$.

§ 3. Теорема о сумме [1])

Пусть C и D — два множества точек факторпространства $\mathscr{R}/\Lambda$; обозначим через $\mathsf{C} + \mathsf{D}$ множество всех точек вида

$$\mathfrak{c} + \mathfrak{d}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{c} \in \mathsf{C}, \quad \mathfrak{d} \in \mathsf{D}.$$

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема I. *Пусть C и D — непустые множества точек пространства $\mathscr{R}/\Lambda$, меры которых равны соответственно $m(\mathsf{C})$ и $m(\mathsf{D})$. Тогда*

[1]) Результаты § 3 не понадобятся до гл. XI.

(i) *если* $m(\mathsf{C}) + m(\mathsf{D}) > d(\Lambda)$, *то* $\mathsf{C} + \mathsf{D}$ *совпадает со всем пространством* $\mathscr{R}/\Lambda$;

(ii) *если* $m(\mathsf{C}) + m(\mathsf{D}) \leqslant d(\Lambda)$, *то* $m(\mathsf{C} + \mathsf{D}) \geqslant m(\mathsf{C}) + m(\mathsf{D})$.

Эта теорема принадлежит Макбету [3]. Она была независимо получена Кнезером [1], который впервые отметил ее важность для геометрии чисел. Фактически теорема I является только частью гораздо более широкой теории, по поводу которой мы отсылаем к статье Кнезера [2] и указанной там литературе. Эта теорема относится к тому же кругу идей, что и известная гипотеза о плотности суммы двух последовательностей натуральных чисел, впервые доказанная Манном. Поскольку эти вопросы несколько выходят за рамки главной темы настоящей книги, мы не будем далее их касаться. Нам представляется удобным привести здесь доказательство теоремы I, откладывая ее применение до гл. XI.

Доказательство теоремы I. Утверждение (i) теоремы доказывается легко. Предположим, что существует точка $\mathfrak{x}$ пространства $\mathscr{R}/\Lambda$, которая не принадлежит сумме $\mathsf{C} + \mathsf{D}$. Тогда ни одна из точек

$$\mathfrak{x} - \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} \in \mathsf{C} \tag{1}$$

не может принадлежать множеству D. Будем обозначать множество точек вида (1) через $\mathfrak{x} - \mathsf{C}$. Очевидно,

$$m(\mathfrak{x} - \mathsf{C}) = m(\mathsf{C}). \tag{2}$$

Но множества D и $\mathfrak{x} - \mathsf{C}$ не имеют общих точек, а значит,

$$m(\mathfrak{x} - \mathsf{C}) + m(\mathsf{D}) \leqslant m(\mathscr{R}/\Lambda) = d(\Lambda). \tag{3}$$

Тогда на основании соотношений (2), (3) мы получаем, что $m(\mathsf{C}) + m(\mathsf{D}) \leqslant d(\Lambda)$. Тем самым утверждение (i) доказано.

В дальнейшем, как это принято, мы будем обозначать через $\mathsf{C} \cap \mathsf{D}$ и $\mathsf{C} \cup \mathsf{D}$ соответственно пересечение и объединение множеств C и D. Отметим тождество

$$m(\mathsf{C} \cap \mathsf{D}) + m(\mathsf{C} \cup \mathsf{D}) = m(\mathsf{C}) + m(\mathsf{D}), \tag{4}$$

которое становится очевидным, если заметить, что точки множества $\mathsf{C} \cap \mathsf{D}$ принадлежат двум множествам в левой и правой частях соотношения (4), тогда как точки множества $\mathsf{C} \cup \mathsf{D}$, отличные от точек из $\mathsf{C} \cap \mathsf{D}$, принадлежат точно одному множеству в обоих частях указанного равенства. Покажем, что

$$\mathsf{C} + \mathsf{D} \supset (\mathsf{C} \cap \mathsf{D}) + (\mathsf{C} \cup \mathsf{D}) \tag{5}$$

(знак $\supset$ означает „содержит"). Пусть

$$\mathfrak{a} \in \mathsf{C} \cap \mathsf{D}, \quad \mathfrak{b} \in \mathsf{C} \cup \mathsf{D}.$$

Предположим, что $\mathfrak{b}$ принадлежит C; тогда мы можем считать, что $\mathfrak{a}$ принадлежит D, поскольку $\mathfrak{a}$ принадлежит и C и D. Отсюда следует, что $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}=\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\in\mathsf{C}+\mathsf{D}$. Аналогично, если $\mathfrak{b}$ принадлежит D, мы рассматриваем $\mathfrak{a}$ как принадлежащее C и снова приходим к искомому включению.

Из соотношений (4) и (5) следует, что если теорема I справедлива для множеств $\mathsf{C}\cap\mathsf{D}$ и $\mathsf{C}\cup\mathsf{D}$ (взятых вместо C и D), то она справедлива и для самих множеств C и D. Этот факт является одной из важных составных частей доказательства теоремы. Другой факт содержится в следующем предложении.

Лемма 4. *Существует такая точка* $\mathfrak{x}\in\mathscr{R}/\Lambda$, *что*

$$d(\Lambda)\, m\{(\mathsf{C}+\mathfrak{x})\cap\mathsf{D}\}=m(\mathsf{C})\, m(\mathsf{D}).$$

Прежде чем доказывать лемму 4, покажем, как из нее выводится теорема I. Пусть C, D — любые два множества, для которых

$$m(\mathsf{C})=\gamma\, d(\Lambda),\quad m(\mathsf{D})=\delta\, d(\Lambda)$$

и

$$\gamma+\delta\leqslant 1.$$

Если $\gamma=0$, то утверждение теоремы справедливо, так как по предположению C не пусто, и если $\mathfrak{c}\in\mathsf{C}$, то множество $\mathfrak{c}+\mathsf{D}$, содержащееся в $\mathsf{C}+\mathsf{D}$, имеет меру $m(\mathsf{D})=m(\mathsf{C})+m(\mathsf{D})$. Мы можем, таким образом, не умаляя общности, считать, что

$$0<\gamma\leqslant\delta,\quad \gamma+\delta\leqslant 1. \tag{6}$$

Пусть $\mathfrak{x}$ — точка, о существовании которой говорится в лемме 4. Положим

$$\mathsf{C}_1=(\mathsf{C}+\mathfrak{x})\cap\mathsf{D},\quad \mathsf{D}_1=\{(\mathsf{C}+\mathfrak{x})\cup\mathsf{D}\}-\mathfrak{x}.$$

Пусть

$$m(\mathsf{C}_1)=\gamma_1\, d(\Lambda),\quad m(\mathsf{D}_1)=\delta_1\, d(\Lambda);$$

тогда на основании равенства (4), примененного к $\mathsf{C}+\mathfrak{x}$ и D, и леммы 4 соответственно мы получаем, что

$$\gamma_1+\delta_1=\gamma+\delta$$

и

$$\gamma_1=\gamma\delta.$$

Далее, на основании включения (5), примененного к $\mathsf{C}+\mathfrak{x}$ и D, мы получаем, что

$$\mathsf{C}+\mathsf{D}\supset\mathsf{C}_1+\mathsf{D}_1.$$

Мы можем теперь повторить этот процесс по отношению к множествам C_1, D_1 и т. д. Таким образом, мы получим последовательность таких множеств C_r, D_r с мерами $\gamma_r d(\Lambda)$, $\delta_r d(\Lambda)$ соответственно, что

$$\mathsf{C}+\mathsf{D}\supset\mathsf{C}_r+\mathsf{D}_r \tag{7}$$

и

$$\gamma_r+\delta_r=\gamma+\delta, \tag{8}$$

$$\gamma_r=\gamma_{r-1}\delta_{r-1}. \tag{9}$$

Но тогда на основании аргументов, использованных при рассмотрении случая $\gamma=0$, имеет место неравенство

$$m(\mathsf{C}_r+\mathsf{D}_r)\geqslant m(\mathsf{D}_r)=\delta_r\, d(\Lambda). \tag{10}$$

Используя соотношения (6) и (8), где вместо r положено $r-1$, а также равенство (9), мы получаем, что

$$\gamma_r\leqslant\gamma_{r-1}(1-\gamma_{r-1})$$

и, таким образом,

$$\gamma_r\to 0\quad (r\to\infty). \tag{11}$$

Отсюда на основании (8) следует, что

$$\delta_r\to\gamma+\delta\quad (r\to\infty), \tag{12}$$

однако, согласно (7) и (10),

$$m(\mathsf{C}+\mathsf{D})\geqslant\delta_r\, d(\Lambda). \tag{13}$$

Полагая в неравенстве (13) $r\to\infty$ и используя (12), мы получаем, что

$$m(\mathsf{C}+\mathsf{D})\geqslant(\gamma+\delta)\, d(\Lambda)=m(\mathsf{C})+m(\mathsf{D}),$$

что и требовалось доказать. Остается только доказать лемму 4.

Доказательство леммы 4. Заметим, что мера

$$m\{(\mathsf{C}+\mathfrak{x})\cap\mathsf{D}\} \tag{14}$$

непрерывна по $\mathfrak{x}$. Это, очевидно, справедливо для „хороших“ множеств C и D, к которым мы и собираемся применять теорему I, но фактически это верно и для любых измеримых C и D (см., например, А. Вейль [1]).

Далее, в соответствующем смысле, который будет определен ниже, среднее значение меры (14), когда $\mathfrak{x}$ пробегает все пространство $\mathscr{R}/\Lambda$, равно $m(\mathsf{C})\, m(\mathsf{D})/d(\Lambda)$. Чтобы обосновать это, проще всего, по-видимому, естественным образом ввести интегрирование на пространстве $\mathscr{R}/\Lambda$. Пусть $\varphi(\mathfrak{x})$ — функция, определенная в $\mathscr{R}/\Lambda$, и $f(\mathbf{x})$ — такая функция в $\mathscr{R}$, что

$$f(\mathbf{x})=\varphi(\mathfrak{x}),$$

если $\mathbf{x}$ принадлежит к классу $\mathfrak{x}$. Тогда мы полагаем

$$\int\limits_{\mathscr{R}/\Lambda}\varphi(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{x}=\int\limits_{\mathscr{P}} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

где $\mathscr{P}$ — фундаментальный параллелепипед. Как и в п. 5 § 2, можно показать, что это определение не зависит от выбора фундаментального параллелепипеда $\mathscr{P}$. Пусть $\varphi(\mathfrak{x})$, $\chi(\mathfrak{x})$ — характеристические функции множеств C, D соответственно, так что

$$m\{(\mathsf{C}+\mathfrak{x})\cap\mathsf{D}\}=\int\limits_{\mathscr{R}/\Lambda}\varphi(\mathfrak{y}+\mathfrak{x})\chi(\mathfrak{y})\,d\mathfrak{y}.$$

Тогда

$$\int\limits_{\mathscr{R}/\Lambda} m\{(\mathsf{C}+\mathfrak{x})\cap\mathsf{D}\}\,d\mathfrak{x}=\int\limits_{\mathscr{R}/\Lambda}\left\{\int\limits_{\mathscr{R}/\Lambda}\varphi(\mathfrak{y}+\mathfrak{x})\chi(\mathfrak{y})\,d\mathfrak{y}\right\}d\mathfrak{x}, \qquad (15)$$

но

$$\int\limits_{\mathscr{R}/\Lambda}\varphi(\mathfrak{y}+\mathfrak{x})\chi(\mathfrak{y})\,d\mathfrak{x}=\chi(\mathfrak{y})\,m(\mathsf{C}),$$

отсюда, меняя в равенстве (15) порядок интегрирования, мы получаем

$$\int\limits_{\mathscr{R}/\Lambda} m\{(\mathsf{C}+\mathfrak{x})\cap\mathsf{D}\}\,d\mathfrak{x}=m(\mathsf{C})\int\limits_{\mathscr{R}/\Lambda}\chi(\mathfrak{y})\,d\mathfrak{y}=m(\mathsf{C})\,m(\mathsf{D}).$$

Так как мера пространства $\mathscr{R}/\Lambda$ равна

$$m(\mathscr{R}/\Lambda)=\int\limits_{\mathscr{R}/\Lambda}1\,d\mathfrak{x}=d(\Lambda),$$

то справедливость леммы 4 следует теперь из непрерывности функции $m\{(\mathsf{C}+\mathfrak{x})\cap\mathsf{D}\}$ и связности пространства $\mathscr{R}/\Lambda$.

Лемма 4, а с нею и теорема I доказаны.

ГЛАВА VIII

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ МИНИМУМЫ

§ 1. Введение

1. Для некоторых целей требуется знать, что не просто существует точка решетки Λ, принадлежащая множеству $\mathscr{S}$, но что имеется некоторое число таких линейно независимых точек.

Пусть заданы n-мерная лучевая функция $F(\mathbf{x})$ и решетка Λ. Если для некоторого целого числа k из множества $1\leqslant k\leqslant n$ и некоторого числа λ звездное тело

$$\lambda\mathscr{S}:\quad F(\mathbf{x})<\lambda \qquad (1)$$

содержит k линейно независимых точек

$$\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_k \qquad (2)$$

решетки Λ, то это же верно и для тела $\mu\mathscr{S}$ при любом $\mu>\lambda$, так как точки (2) принадлежат, очевидно, и телу $\mu\mathscr{S}$. Назовем k-м последовательным минимумом $\lambda_k=\lambda_k(F,\ \Lambda)$ лучевой функции F по отношению к решетке Λ[1]) нижнюю грань множества чисел λ, для которых тело $\lambda\mathscr{S}$ содержит k линейно независимых точек решетки. Очевидно, что

$$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ \ldots\ \leqslant\lambda_n. \qquad (3)$$

Числа $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$, определенные выше, конечно, всегда существуют, так как если $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ — любые n линейно независимых точек решетки Λ то, очевидно,

$$\lambda_k\leqslant\lambda_n\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}F(\mathbf{a}_j).$$

В обозначениях § 4 гл. IV можно написать, что

$$\lambda_1=F(\Lambda)=\inf_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}}F(\mathbf{a}), \qquad (4)$$

отсюда по определению функции

$$\delta(F)=\sup_{\Lambda}\frac{F^n(\Lambda)}{d(\Lambda)} \qquad (5)$$

мы получаем, что

$$\lambda_1^n\leqslant\delta(F)\,d(\Lambda). \qquad (6)$$

[1]) Или решетки по отношению к лучевой функции.

Роджерс (C. A. Rogers) [4] и Шаботи [1] независимо открыли замечательное неравенство:

$$\lambda_1 \ldots \lambda_n \leqslant 2^{(n-1)/2} \delta(F) d(\Lambda). \tag{7}$$

Шаботи [1] и Малер [12] независимо построили примеры, которые показывают, что если $\varkappa$—любое число, меньшее, чем $2^{(n-1)/2}$, то существуют лучевые функции F и решетки Λ, для которых

$$\lambda_1 \ldots \lambda_n > \varkappa \delta(F) d(\Lambda). \tag{8}$$

В § 3 мы приведем изящное доказательство неравенства (7); для $n=2$ построим контрпример, показывающий, что это неравенство не может быть улучшено. Трудности в распространении этого контрпримера на n измерений носят чисто алгебраический характер. При помощи построения примеров легко показать, что величина

$$\frac{\lambda_1 \ldots \lambda_n}{\delta(F) d(\Lambda)}$$

может быть сколь угодно малой, так что в этом случае не существует оценки снизу, аналогичной оценке сверху (7) (это не относится к симметричным выпуклым функциям F, см. ниже неравенство (13)).

При подходящем определении понятий неравенство (7) справедливо не только для звездных тел $F(\mathbf{x}) < 1$, но и для произвольных точечных множеств $\mathscr{S}$. Имеется несколько различных определений последовательных минимумов для произвольного множества $\mathscr{S}$. Мы не будем здесь более касаться этого вопроса, а отсылаем читателя к цитированным статьям, в которых он найдет дальнейшие указания на литературу.

Еще Минковский ([1], § 51) доказал, что в случае, когда $F(\mathbf{x})$ является евклидовым расстоянием $|\mathbf{x}|$, неравенство (7) может быть заменено неравенством

$$\lambda_1 \ldots \lambda_n \leqslant \delta(F) d(\Lambda). \tag{9}$$

Мы докажем это неравенство в § 2. Было выдвинуто предположение о том, что неравенство (9) справедливо вообще для всех симметричных выпуклых лучевых функций. В § 4 мы докажем, что для таких функций F имеет место неравенство

$$\lambda_1^{n-1}\lambda_n \leqslant \delta(F) d(\Lambda), \tag{10}$$

что в случае, когда $n=2$, эквивалентно неравенству (9). Неравенство (10) было, по-видимому, независимо открыто Чоком и Роджерсом [2] и Шаботи [1]. Вудс [1, 3] показал, что неравенство (9) сохраняет силу для $n=3$, если функция F является симметричной и выпуклой, и для $n=2$, если функция F выпуклая, но не симметричная. Доказательство этих фактов чрезвычайно сложно, и мы не будем на нем здесь останавливаться. Ранкин [3] доказал, что для произвольного n и симметричной выпуклой функции F постоянная $2^{(n-1)/2}$ в неравенстве (7) может быть заменена несколько меньшей постоянной.

Для симметричной выпуклой функции F и для произвольного n имеет место восходящий к Минковскому [3] результат, который можно рассматривать как замену недоказанного предположения о справедливости неравенства (9). В наших обозначениях теорема Минковского о выпуклом теле (теорема II гл. III) утверждает, что

$$\lambda_1^n V_F \leqslant 2^n d(\Lambda), \tag{11}$$

где V_F — объем тела $F(\mathbf{x}) < 1$, а, значит, $\lambda_1^n V_F$ — объем тела $F(\mathbf{x}) < \lambda_1$, которое по предположению не содержит точек решетки Λ, отличных от начала $\mathbf{o}$. Минковский доказал, что имеет место более сильное неравенство

$$\lambda_1 \ldots \lambda_n V_F \leqslant 2^n d(\Lambda). \tag{12}$$

Доказательство неравенства (12) до сих пор остается трудным. Доказательства более простые, чем первоначальное доказательство Минковского, были предложены Давенпортом [4] и Г. Вейлем [2]. В § 4 мы следуем доказательству Вейля, поскольку введенные им идеи понадобятся нам в гл. XI.

Для симметричной выпуклой лучевой функции F справедливо и неравенство

$$\lambda_1 \ldots \lambda_n V_F \geqslant \frac{2^n}{n!} d(\Lambda), \tag{13}$$

почти тривиальное доказательство которого также приведено в § 4. Из неравенств (12) и (13) следует, что произведение $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ определяется величинами V_F и $d(\Lambda)$ с точностью до множителя, ограниченного пределами, зависящими только от n.

Вообще говоря, безнадежно ожидать получения большей информации о последовательных минимумах, чем та, которая может быть извлечена из формул для их произведения $\lambda_1 \ldots \lambda_n$. Например, пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — любые числа, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n, \quad \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = 1.$$

Тогда, как нетрудно проверить, решетка Λ, состоящая из точек

$$(\lambda_1 u_1, \lambda_2 u_2, \ldots, \lambda_n u_n) \qquad (u_1, \ldots, u_n \text{ — целые}),$$

имеет определитель $d(\Lambda)=1$ и по отношению к лучевой функции

$$F(\mathbf{x}) = \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |x_j|$$

имеет последовательные минимумы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

2. Далее нам неоднократно понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — последовательные минимумы решетки Λ по отношению к лучевой функции F, определяющей ограниченное звездное тело $F(\mathbf{x}) < 1$. Пусть существуют такие n линейно независимых точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \in \Lambda$, что*

$$F(\mathbf{a}_j) = \lambda_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n).$$

Если $\mathbf{a} \in \Lambda$ и $F(\mathbf{a}) < \lambda_j$, то точка $\mathbf{a}$ линейно зависит от точек $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{j-1}$.

Доказательство. По определению величины λ_n существует n линейно независимых точек решетки Λ, удовлетворяющих неравенству

$$F(\mathbf{x}) < \lambda_n + 1. \tag{1}$$

По лемме 2 гл. IV множество точек, удовлетворяющих неравенству (1), ограничено и, стало быть, содержит лишь конечное число точек решетки. Поскольку для определения величины λ_j достаточно ограничиться лишь этими точками, то утверждение леммы теперь становится очевидным.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — последовательные минимумы лучевой функции F по отношению к решетке Λ. Тогда существует такой базис*

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$$

решетки Λ, что для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ и $\mathbf{x} \in \Lambda$ из неравенства

$$F(\mathbf{x}) < \lambda_j$$

следует, что

$$\mathbf{x} = u_1\mathbf{b}_1 + \ldots + u_{j-1}\mathbf{b}_{j-1},$$

где коэффициенты $u_1, \ldots, u_{j-1}$ — целые числа.

Доказательство. Если равенство $F(\mathbf{x}) = 0$ имеет место только для точки $\mathbf{x} = \mathbf{o}$, то утверждение леммы тривиально следует из леммы 1, так как в этом случае по теореме I гл. I можно выбрать точки $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ так, чтобы для любого j точка $\mathbf{a}_j$ зависела только от $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_j$.

В противном случае необходимо более детальное рассмотрение. Вообще говоря, в этом случае не все числа λ_j будут различны. Точнее говоря, существуют такие числа

$$\mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_s \qquad (1 \leqslant s \leqslant n),$$

что

$$\lambda_k = \mu_t, \quad \text{если} \quad k_{t-1} < k \leqslant k_t;$$

здесь

$$0 = k_0 < k_1 < \ldots < k_s = n.$$

По определению последовательных минимумов не существует точек решетки Λ, за исключением, быть может, точки $\mathbf{o}$[1]), для которых $F(\mathbf{a}) < \mu_1$. Так как

$$\mu_2 > \lambda_{k_1},$$

то найдется k_1 линейно независимых точек

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k_1} \tag{2}$$

решетки Λ, для которых выполняется неравенство $F(\mathbf{x}) < \mu_2$, и так как

$$\mu_2 = \lambda_{k_1+1},$$

то любая другая точка решетки Λ, удовлетворяющая неравенству $F(\mathbf{x}) < \mu_2$, линейно выражается через них. Аналогично мы можем найти k_2 линейно независимых точек решетки Λ, удовлетворяющих неравенству $F(\mathbf{x}) < \mu_3$, так что любая другая точка решетки Λ, удовлетворяющая неравенству $F(\mathbf{x}) < \mu_3$, линейно выражается через них. Так как $\mu_2 < \mu_3$, то мы можем считать, что первые k_1 из этих k_2 точек совпадают с уже определенными точками $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k_1}$. Таким образом, не входя в противоречие с уже введенными обозначениями (2), мы можем обозначить через

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k_2}$$

максимальное линейно независимое множество точек решетки Λ, удовлетворяющих неравенству $F(\mathbf{x}) < \mu_3$. Продолжая этот процесс, мы на $s-1$ шагу получим множество точек

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{k_{s-1}}$$

решетки Λ с условием

$$F(\mathbf{a}_j) < \mu_t, \quad \text{если} \quad j \leqslant k_{t-1} \quad (t \leqslant s).$$

По теореме I гл. I существует такой базис $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ решетки Λ, что для каждого $j = 1, \ldots, k_{s-1}$ точка $\mathbf{a}_j$ линейно зависит только от $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_j$. Этот базис, очевидно, обладает всеми требуемыми свойствами.

Лемма 2 доказана.

§ 2. Шары

1. Мы рассмотрим сначала шары, поскольку этот случай является простейшим, а используемые для его рассмотрения методы аналогичны методам, применяемым в общем случае.

[1]) Если $F(\mathbf{x})$ — общая лучевая функция, то, конечно, возможен случай $\lambda_1 = 0$. Действительно, если, например, $F(\mathbf{x}) = |x_1 \ldots x_n|^{1/n}$, то $\lambda_1 = \ldots \lambda_n = 0$ для решетки Λ_0, состоящей из точек с целыми координатами.

Теорема I. *Пусть*

$$F_0(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|, \tag{1}$$

и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — *последовательные минимумы решетки* Λ *по отношению к лучевой функции* F_0. *Тогда*

$$d(\Lambda) \leqslant \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \leqslant \delta(F_0)\, d(\Lambda). \tag{2}$$

Доказательство. Левая часть неравенства (2) была по существу доказана при доказательстве теоремы XIII гл. V. Действительно, с одной стороны,

$$|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)| = I d(\Lambda) \geqslant d(\Lambda),$$

где I — индекс решетки натянутой на точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ относительно Λ; с другой стороны (лемма 9 гл. V),

$$|\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)| \leqslant |\mathbf{a}_1| \cdot \ldots \cdot |\mathbf{a}_n|.$$

Если теперь $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ — такие линейно независимые точки решетки Λ, что $F(\mathbf{a}_j) = \lambda_j$ (их существование следует из леммы 1), то приведенные неравенства доказывают левую часть неравенства (2).

Остается доказать правую часть неравенства (2). Как и при доказательстве леммы 9 гл. V, можно найти такое множество попарно ортогональных[1]) векторов $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n$, что

$$\mathbf{b}_j = t_{j1}\mathbf{c}_1 + \ldots + t_{jj}\mathbf{c}_j,$$

где t_{ji} $(n \geqslant j)$ — некоторые вещественные числа, а $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис решетки Λ, существующий на основании леммы 2. Умножив векторы $\mathbf{c}_i$ на подходящие множители, мы, не уменьшая общности, можем считать, что

$$|\mathbf{c}_i|^2 = 1 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Тогда

$$\sum_j u_j \mathbf{b}_j = \sum_i \sum_{j \geqslant i} u_j t_{ji} \mathbf{c}_i,$$

так что

$$\left|\sum u_j \mathbf{b}_j\right|^2 = \sum_i \Big(\sum_{j \geqslant i} u_j t_{ji}\Big)^2. \tag{3}$$

Покажем теперь, что для любых целых векторов $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \neq \mathbf{o}$ имеет место неравенство

$$\sum_i \lambda_i^{-2} \Big(\sum_{j \geqslant i} u_j t_{ji}\Big)^2 \geqslant 1. \tag{4}$$

Действительно, пусть $u_1, \ldots, u_n$ — целые числа; предположим, что

$$u_J \neq 0, \qquad u_j = 0 \qquad (j > J). \tag{5}$$

[1]) Мы говорим, что два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны, если их скалярное произведение $\mathbf{ab}$ равно нулю.

Тогда вектор $u_1\mathbf{b}_1 + \ldots + u_n\mathbf{b}_n$ не выражается через векторы $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{J-1}$, так что

$$\left|\sum u_j \mathbf{b}_j\right|^2 \geqslant \lambda_J^2. \tag{5'}$$

Из предположений (5) следует, что все слагаемые в неравенствах (3) и (4) с индексами $i > J$ равны нулю. Отсюда, учитывая, что $\lambda_j \leqslant \lambda_J$, если $j \leqslant J$, мы на основании соотношений (3) и (5′) получаем

$$\sum_{i \leqslant J} \lambda_i^{-2} \Big(\sum_{j \geqslant i} u_j t_{ji}\Big)^2 \geqslant \sum_{i \leqslant J} \lambda_J^{-2} \Big(\sum_{j \geqslant i} u_j t_{ji}\Big)^2 = \lambda_J^{-2} \left|\sum_j u_j \mathbf{b}_j\right|^2 \geqslant 1.$$

Таким образом, если Λ' — решетка, натянутая на базис

$$\mathbf{b}'_j = t_{j1}\lambda_1^{-1}\mathbf{c}_1 + \ldots + t_{jj}\lambda_j^{-1}\mathbf{c}_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

то для каждой точки $\sum u_j \mathbf{b}'_j \neq \mathbf{o}$ решетки Λ' имеет место неравенство

$$\left|\sum u_j \mathbf{b}'_j\right|^2 \geqslant 1,$$

т. е.

$$F_0(\Lambda') = |\Lambda'| \geqslant 1. \tag{6}$$

С другой стороны,

$$d(\Lambda') = \lambda_1^{-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_n^{-1}\, d(\Lambda). \tag{7}$$

Но по определению величины $\delta(F_0)$ имеет место неравенство

$$\frac{|\Lambda'|^n}{d(\Lambda')} \leqslant \sup_{\mathrm{M}} \frac{|\mathrm{M}|^n}{d(\mathrm{M})} = \delta(F_0). \tag{8}$$

Вторая часть неравенства (2) следует теперь из неравенств (6), (7) и (8).

Теорема I доказана.

2. Как было отмечено в гл. V, теория последовательных минимумов позволяет показать, что предположения теорем III и IV гл. V эквивалентны. Докажем это.

Лемма 3. *Следующие два утверждения* (A) *и* (B) *относительно некоторого множества* $\mathfrak{L}$ *n-мерных решеток* Λ *эквивалентны*:

(A) *существуют такие постоянные* $\Delta_1 < \infty$ *и* $\varkappa > 0$, *что для всех решеток* $\Lambda \in \mathfrak{L}$, $d(\Lambda) \leqslant \Delta_1$ *и* $|\Lambda| \geqslant \varkappa > 0$;

(B) *существуют такие постоянные* $\Delta_0 > 0$ *и* $K < \infty$, *что для любой решетки* $\Lambda \in \mathfrak{L}$, $d(\Lambda) \geqslant \Delta_0 > 0$, *а шар* $|\mathbf{x}| \leqslant K$ *содержит n линейно независимых точек решетки* Λ.

Здесь предполагается, что постоянные $\varkappa$, K, Δ_0, Δ_1 *зависят лишь от множества* $\mathfrak{L}$, *а не от входящих в него решеток* Λ.

Доказательство. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — последовательные минимумы функции $F_0(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ по отношению к решетке Λ, то очевидно, что утверждения (A) и (B) эквивалентны соответственно следующим двум утверждениям:

$$\text{(A)} \quad d(\Lambda) \leqslant \Delta_1, \quad \lambda_1 \geqslant \varkappa > 0,$$

и

$$\text{(B)} \quad d(\Lambda) \geqslant \Delta_0 > 0, \quad \lambda_n \leqslant K.$$

Используем теперь неравенство теоремы I:

$$d(\Lambda) \leqslant \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \leqslant \delta(F_0)\, d(\Lambda). \tag{1}$$

Пусть справедливо условие (A); тогда

$$d(\Lambda) \geqslant \{\delta(F_0)\}^{-1} \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \geqslant \{\delta(F_0)\}^{-1} \varkappa^n = \Delta_0$$

и

$$\lambda_n \leqslant (\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_{n-1})^{-1} \delta(F_0)\, d(\Lambda) \leqslant \varkappa^{-n+1} \delta(F_0)\, \Delta_1 = K$$

(равенства определяют величины Δ_0 и K). Эти два неравенства составляют условие (B).

Предположим теперь, что справедливо условие (B); тогда

$$\lambda_1 \geqslant (\lambda_n \lambda_{n-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_2)^{-1} d(\Lambda) \geqslant K^{-n+1} \Delta_0 = \varkappa$$

и

$$d(\Lambda) \leqslant \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \leqslant K^n = \Delta_1$$

(равенства определяют величины $\varkappa$ и Δ_1), что доказывает справедливость условия (A).

Лемма 3 доказана.

§ 3. Общие лучевые функции

1. Прежде всего мы докажем лемму, которая потребуется позднее. В этом параграфе мы будем обозначать через $\{x\}$ дробную часть числа x, т. е. число $\{x\}$, удовлетворяющее условиям: $0 \leqslant \{x\} < 1$, $x - \{x\}$ — целое число.

Лемма 4. *Пусть $\eta_1, \ldots, \eta_n$ — любые вещественные числа. Тогда существует такое число η, что*

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\eta_j - \eta\} \leqslant \frac{1}{2}(n-1). \tag{1}$$

Доказательство. Для любого числа ξ мы, очевидно, имеем

$$\{\xi\} + \{-\xi\} = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & \text{если } \{\xi\} = 0, \\ 1 & \text{в противном случае} \end{array} \right\} \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} \{\eta_j - \eta_k\} = \sum_{1 \leqslant k < j \leqslant n} (\{\eta_j - \eta_k\} + \{\eta_k - \eta_j\}) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} n(n-1).$$

Таким образом, найдется по крайней мере одно k, для которого справедливо неравенство (1), если положить $\eta = \eta_k$.

Лемма 4 доказана.

Фактически нам потребуется более частное утверждение.

Следствие. *Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — такие вещественные числа, что*

$$0 < \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n. \tag{2}$$

Тогда существует вещественное число $\mu > 0$ и положительные целые числа $m_1, \ldots, m_n$ с условиями:

(i) m_{j+1}/m_j *суть целые числа* $(1 \leqslant j < n)$;

(ii) $\mu m_j \leqslant \mu_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$;

(iii) $\mu_1 \cdot \ldots \cdot \mu_n \leqslant 2^{(n-1)/2} (\mu m_1) \ldots (\mu m_n)$.

Действительно, ищем $m_1, \ldots, m_n$ в виде

$$m_j = 2^{l_j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{3}$$

где $l_1, \ldots, l_n$ — целые числа, которые нам необходимо подобрать. Пусть

$$\mu_j = 2^{\eta_j} \qquad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{4}$$

где η_j — вещественные числа, и пусть η — число, фигурирующее в формулировке леммы 4. Вычтя из η подходящее целое число, мы на основании соотношений (2) и (4) можем считать, что

$$\eta \leqslant \eta_1 \leqslant \eta_2 \leqslant \ldots \leqslant \eta_n.$$

Если теперь положить $\mu = 2^\eta$ и определить целые числа l_j из соотношений

$$\eta_j - \eta = l_j + \{\eta_j - \eta\},$$

то числа m_j, определяемые равенствами (3), очевидно, удовлетворяют условиям (i) и (ii). Кроме того, на основании леммы,

$$\prod \left(\frac{\mu_j}{\mu m_j}\right) = 2^{\Sigma \{\eta_j - \eta\}} \leqslant 2^{(n-1)/2},$$

что доказывает условие (iii).

2. Докажем теперь следующее предложение.

Теорема II. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — лучевая функция, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — ее последовательные минимумы по отношению к решетке Λ; тогда*

$$\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \leqslant 2^{(n-1)/2}\,\delta(F)\,d(\Lambda). \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ базис решетки Λ, который удовлетворяет условиям леммы 2. Пусть μ и m_j — числа со свойствами (i), (ii), (iii) следствия леммы 4, где положено $\mu_j = \lambda_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Пусть Λ' — решетка с базисом

$$\mathbf{b}_j' = (\mu m_j)^{-1}\,\mathbf{b}_j \qquad (1 < j \leqslant n);$$

тогда

$$d(\Lambda') = \prod_j (\mu m_j)^{-1}\,d(\Lambda). \tag{2}$$

Покажем теперь, что

$$F(\Lambda') \geqslant 1. \tag{3}$$

Любая точка $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ' может быть представлена в виде

$$\mathbf{a} = u_1\mathbf{b}_1' + \ldots + u_J\mathbf{b}_J', \quad u_J \neq 0,$$

где $u_1, \ldots, u_J$ — целые числа. Тогда

$$(\mu m_J)\,\mathbf{a} = v_1\mathbf{b}_1 + \ldots + v_J\mathbf{b}_J,$$

где числа

$$v_j = \frac{m_J}{m_j}\,u_j \quad (1 \leqslant j < J), \quad v_J = u_J \neq 0$$

являются целыми, так как целыми являются u_j и m_J/m_j. На основании леммы 2 (так как $v_J \neq 0$) мы получаем, что

$$F(\mu m_J\mathbf{a}) \geqslant \lambda_J,$$

отсюда выводим

$$F(\mathbf{a}) \geqslant \frac{\lambda_J}{\mu m_J} \geqslant 1,$$

что доказывает неравенство (3).

Наконец, по определению величины $\delta(F)$

$$\frac{F^n(\Lambda')}{d(\Lambda')} \leqslant \delta(F). \tag{4}$$

Требуемое неравенство (1) следует теперь из соотношений (2), (3), (4) и неравенства

$$\prod_j \left(\frac{\lambda_j}{\mu m_j}\right) \leqslant 2^{(n-1)/2},$$

даваемого следствием к лемме 4.

Теорема II доказана.

Несколько более детальное исследование показывает, что в неравенстве (1) не может стоять знак равенства, если тело $F(\mathbf{x}) < 1$ является ограниченным звездным телом. В этом случае можно показать, что не существует n линейно независимых точек $\mathbf{a}$ решетки Λ', удовлетворяющих условию $F(\mathbf{a}) = 1$; таким образом, решетка Λ' не может быть критической и, стало быть, в неравенстве (4) не может быть знака равенства. Подробнее об этом см. у Роджерса (C. A. Rogers) [4].

3. Покажем теперь, что постоянная $2^{(n-1)/2}$ в теореме II не может быть улучшена. Во избежание сложностей алгебраического характера мы рассмотрим только случай

$$n = 2.$$

По поводу произвольного n см. Малер [12] и Шаботи [1].

Сначала мы рассмотрим точечное множество, не являющееся звездным телом. Обозначим через $\mathscr{C}'$ множество точек

$$\mathscr{C}':\quad (\pm t,\ 0),\ t \geqslant 2^{\frac{1}{2}}$$

и через $\mathscr{C}''$ множество точек

$$\mathscr{C}'':\ (su_1,\ su_2),$$

где $s \geqslant 1$; u_1, u_2 — целые числа, $u_2 \neq 0$. Наконец, пусть $\mathscr{S}$ — множество точек, которые не принадлежат ни $\mathscr{C}'$, ни $\mathscr{C}''$. Ясно, что множество $\mathscr{S}$ является открытым и что если какая-нибудь точка $\mathbf{x}$ принадлежат $\mathscr{S}$, то и $r\mathbf{x}$ $(0 \leqslant |r| \leqslant 1)$ принадлежит $\mathscr{S}$, так что множество $\mathscr{S}$ обладает некоторыми свойствами звездных тел. Позднее мы заменим множество $\mathscr{S}$ множеством $\mathscr{S}_\varepsilon$, которое действительно является звездным телом.

Мы утверждаем, что существуют $\mathscr{S}$-допустимые решетки Λ, т. е. решетки, которые пересекаются с $\mathscr{S}$ только по точке $\mathbf{o}$. Действительно, решетка Λ_2, например, состоящая из точек

$$(2u_1,\ u_2),$$

где числа u_1, u_2 — целые, является $\mathscr{S}$-допустимой, так как если $u_2 \neq 0$, то точка $(2u_1, u_2)$ принадлежит множеству $\mathscr{C}''$; если же $u_2 = 0$, а $u_1 \neq 0$, то точка $(2u_1, u_2)$ принадлежит $\mathscr{C}'$.

Покажем теперь, что

$$\Delta(\mathscr{S}) = d(\Lambda_2) = 2, \tag{1}$$

т. е. что каждая $\mathscr{S}$-допустимая решетка Λ имеет определитель $d(\Lambda) \geqslant 2$.

Пусть Λ — любая $\mathscr{S}$-допустимая решетка. По теореме Минковского о выпуклом теле (теорема II гл. III) в области

$$|x_1| \leqslant 2d(\Lambda), \quad |x_2| \leqslant \frac{1}{2}$$

найдется точка $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ. Эта точка не принадлежит множеству $\mathscr{S}$, а потому принадлежит к одному из множеств $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$. Отсюда следует, что эта точка имеет вид

$$\mathbf{b}_1 = (b_{11}, 0), \qquad b_{11} \neq 0.$$

Не уменьшая общности, мы можем предположить, что точка $\mathbf{b}_1$ является примитивной. Тогда найдется вектор

$$\mathbf{b}_2 = (b_{12}, b_{22}) \in \Lambda,$$

который вместе с вектором $\mathbf{b}_1$ составляет базис решетки Λ. Отсюда следует, что

$$b_{11}b_{22} = \pm d(\Lambda) \neq 0.$$

Так как точка $\mathbf{b}_2$ принадлежит $\mathscr{S}$-допустимой решетке Λ, то она должна принадлежать либо $\mathscr{C}'$, либо $\mathscr{C}''$; таким образом, дробь

$$b_{12}/b_{22}$$

рациональна. Аналогично точка $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2$ принадлежит множеству $\mathscr{C}'$ или $\mathscr{C}''$, откуда следует, что рациональна дробь $(b_{11} + b_{12})/b_{22}$, а следовательно, рациональна дробь

$$b_{11}/b_{22}.$$

Таким образом, существует такое вещественное число $\xi > 0$ и такие целые числа B_{11}, B_{12}, B_{22}, что

$$\mathbf{b}_1 = (\xi B_{11}, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (\xi B_{12}, \xi B_{22}).$$

Не уменьшая общности, можно считать, что числа B_{11}, B_{12} и B_{22} не имеют общих делителей, отличных от ± 1.

Пусть v — произведение простых чисел, которые делят B_{22} и не делят B_{12}. Положим

$$B'_{12} = vB_{11} + B_{12}.$$

Покажем, что числа B'_{12} и B_{22} взаимно просты. Для этого рассмотрим два случая в зависимости от поведения простых делителей p числа B_{22}. Если p не делит B_{12}, то оно делит v. Если p делит B_{12}, то, так как числа B_{11}, B_{12}, B_{22} не имеют нетривиальных общих делителей, p не делит B_{11}; кроме того, в этом случае p не делит v. В обоих случаях p не делит B'_{12}. Отсюда следует, что, заменив точку $\mathbf{b}_2$ на $\mathbf{b}_2 + v\mathbf{b}_1$, мы можем считать, что числа B_{12} и B_{22} взаимно просты.

Теперь точка $\mathbf{b}_2$ принадлежит $\mathscr{S}$-допустимой решетке Λ и, значит, принадлежит одному из множеств $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$. Отсюда, поскольку числа B_{12} и B_{22} взаимно просты, следует, что

$$|\xi| \geqslant 1.$$

Аналогично, так как $\mathbf{b}_1$ принадлежит одному из множеств $\mathscr{C}'$, $\mathscr{C}''$, то

$$|\xi B_{11}| \geqslant 2^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда следует, что

$$\text{либо} \quad |B_{11}| = 1, \quad |\xi| \geqslant 2^{\frac{1}{2}},$$
$$\text{либо} \quad |B_{11}| \geqslant 2, \quad |\xi| \geqslant 1;$$

в обоих случаях

$$d(\Lambda) = |B_{11}B_{22}\xi^2| \geqslant |B_{11}\xi^2| \geqslant 2.$$

Тем самым равенство (1) доказано.

Обозначим, как обычно, через $\mu\mathscr{S}$ множество точек

$$\mu\mathscr{S}\colon \quad \mu\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathscr{S},$$

а через Λ_0 — решетку, образованную точками (u_1, u_2) с целыми координатами u_1, u_2. Ясно, что если $\mu \leqslant 2^{-\frac{1}{2}}$, то никакая точка решетки Λ_0, исключая начало $\mathbf{o}$, не принадлежит множеству $\mu\mathscr{S}$; если же $2^{-\frac{1}{2}} < \mu \leqslant 1$, то, кроме того, к множеству $\mu\mathscr{S}$ принадлежат только точки $(\pm 1, 0)$ решетки Λ_0; если, наконец, $\mu > 1$, то множеству $\mu\mathscr{S}$ принадлежат точки $(\pm 1, 0)$ и $(0, \pm 1)$. Если бы множество $\mathscr{S}$ было звездным телом, определяемым неравенством вида $F(\mathbf{x}) < 1$, то из приведенных выше утверждений следовало бы, что последовательные минимумы решетки Λ_0 равны $\lambda_1 = 2^{-\frac{1}{2}}$, $\lambda_2 = 1$. Поэтому

$$\lambda_1\lambda_2 = 2^{\frac{1}{2}}(\Delta(\mathscr{S}))^{-1} d(\Lambda_0),$$

что дает случай равенства в теореме II, где вместо величины $\delta(F)$ фигурирует величина $(\Delta(\mathscr{S}))^{-1}$, равная в случае звездных тел первой.

Остается теперь видоизменить множество $\mathscr{S}$ так, чтобы получить ограниченное звездное тело, чтобы при этом его последовательные минимумы по отношению к решетке Λ_0 остались равными $2^{-\frac{1}{2}}$ и 1 и чтобы его критический определитель был сколь угодно близким к 2. Мы сделаем это, заменяя прямые в множествах $\mathscr{C}'$ и $\mathscr{C}''$ узкими клиньями.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Для любого вектора $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \neq 0$ обозначим через $\mathscr{W}_\varepsilon(\mathbf{y})$ множество точек $\mathbf{x}$, для которых

$$\mathscr{W}_\varepsilon(\mathbf{y}): \quad x_1 y_1 + x_2 y_2 - \varepsilon^{-1} |x_1 y_2 - x_2 y_1| \geqslant y_1^2 + y_2^2. \tag{2}$$

Тогда множество $\mathscr{W}_\varepsilon(\mathbf{y})$ является бесконечным клином с вершиной в точке $\mathbf{y}$ (см. рис. 9). Его точный вид не имеет значения. Две стороны клина образуют малый угол, равный $\pm \operatorname{arc\,tg} \varepsilon$, с продолжением радиуса-вектора, идущего из точки $\mathbf{o}$ в точку $\mathbf{y}$.

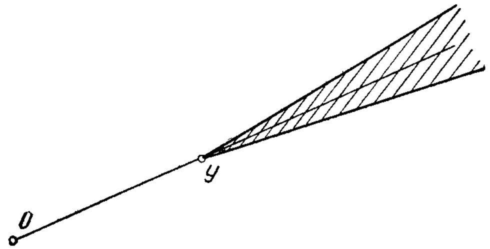

Рис. 9.
Заштрихована область $\mathscr{W}_\varepsilon(\mathbf{y})$.

Пусть теперь $\mathscr{C}'_\varepsilon$ — объединение множеств

$$\mathscr{W}_\varepsilon\left(2^{\frac{1}{2}}, 0\right) \quad \text{и} \quad \mathscr{W}_\varepsilon\left(-2^{\frac{1}{2}}, 0\right),$$

и пусть $\mathscr{C}''_\varepsilon$ — объединение множеств $\mathscr{W}_\varepsilon(u_1, u_2)$ для всех пар целых чисел с условием $u_2 \neq 0$. Наконец, пусть $\mathscr{S}_\varepsilon$ — множество точек в области

$$|\mathbf{x}| < \varepsilon^{-1}, \tag{3}$$

которые не принадлежат ни множеству $\mathscr{C}'_\varepsilon$, ни множеству $\mathscr{C}''_\varepsilon$. Поскольку имеется только конечное число клиньев, составляющих множества $\mathscr{C}'_\varepsilon$ и $\mathscr{C}''_\varepsilon$, которые пересекаются с кругом (3), то, очевидно, множество $\mathscr{S}_\varepsilon$ является звездным телом. С помощью неравенств (2) и (3) лучевую функцию $F_\varepsilon(\mathbf{x})$, определяющую тело $\mathscr{S}_\varepsilon$, можно записать в явном виде.

Так как множество $\mathscr{S}_\varepsilon$ содержится в множестве $\mathscr{S}$ и так как точки $\left(\pm 2^{\frac{1}{2}}, 0\right)$, $(0, \pm 1)$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$ остаются еще граничными точками множества $\mathscr{S}_\varepsilon$, то минимумы λ_1 и λ_2 решетки Λ_0 по отношению к функции $F_\varepsilon(\mathbf{x})$ равны соответственно $2^{-\frac{1}{2}}$ и 1.

Далее,

$$\Delta(\mathscr{S}_\varepsilon) \leqslant \Delta(\mathscr{S}) = 2.$$

По теореме V гл. V

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \Delta(\mathscr{S}_\varepsilon) = \Delta(\mathscr{S}) = 2.$$

Отсюда следует, что существует такое $\varepsilon > 0$, что величина

$$2^{\frac{1}{2}} \delta(F_\varepsilon)\, d(\Lambda_0) = 2^{\frac{1}{2}} (\Delta(\mathscr{S}_\varepsilon))^{-1}$$

сколь угодно близка к $\lambda_1 \lambda_2$. Это показывает, что для $n = 2$ постоянная $2^{\frac{1}{2}(n-1)} = 2^{\frac{1}{2}}$ в теореме II не может быть улучшена.

§ 4. Выпуклые множества

1. Мы будем часто ссылаться на результаты п. 1—4 § 3 гл. IV, в частности на свойства опорных плоскостей. Прежде всего нам потребуется следующее вспомогательное предложение о выпуклых функциях.

Лемма 5. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — симметричная выпуклая лучевая функция, ассоциированная с ограниченным выпуклым телом $F(\mathbf{x}) < 1$. Пусть $\mathbf{c} \neq \mathbf{o}$, и пусть π — плоскость, проходящая через начало координат параллельно опорной плоскости тела $F(\mathbf{x}) < F(\mathbf{c})$ в точке $\mathbf{c}$. Тогда для всех $\mathbf{y}$, принадлежащих плоскости π, всех вещественных s и всех μ в интервале*

$$0 < \mu < 1$$

имеет место неравенство

$$F(\mathbf{y} + \mu s \mathbf{c}) \geqslant \mu F(\mathbf{y} + s\mathbf{c}). \tag{1}$$

Доказательство. Если $s = 0$, то утверждение очевидно. В противном случае в силу соображений однородности мы можем считать, что

$$s = 1,$$

так как наряду с точкой $\mathbf{y}$ плоскости π принадлежит и точка $s^{-1}\mathbf{y}$. По определению опорной плоскости

$$F(\mathbf{y} + \mathbf{c}) \geqslant F(\mathbf{c}). \tag{2}$$

Кроме того, на основании выпуклости

$$\begin{aligned} F(\mathbf{y} + \mathbf{c}) &\leqslant F(\mathbf{y} + \mu\mathbf{c}) + F\{(1-\mu)\mathbf{c}\} = \\ &= F(\mathbf{y} + \mu\mathbf{c}) + (1-\mu) F(\mathbf{c}). \end{aligned} \tag{3}$$

Требуемое неравенство (1), где $s = 1$, следует теперь из неравенств (2) и (3).

Лемма 5 доказана.

Мы можем теперь доказать следующее предложение.

Теорема III. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — симметричная выпуклая лучевая функция, ассоциированная с ограниченным телом $F(\mathbf{x})<1$, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — последовательные минимумы решетки Λ по отношению к F. Тогда существует решетка Λ' с определителем*

$$d(\Lambda')=\left(\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\right)d(\Lambda), \tag{4}$$

последовательные минимумы λ'_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ которой равны

$$\lambda'_j=\lambda_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1), \qquad \lambda'_n \geqslant \lambda_{n-1}. \tag{5}$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис решетки Λ, о котором говорится в лемме 2. Пусть $\pm\mathbf{c}$ — точки на границе тела $F(\mathbf{x})<1$, в которых опорные плоскости параллельны плоскости π, проходящей через точки $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}$ (теорема IV гл. IV). Тогда каждая точка пространства однозначно может быть записана в виде

$$\mathbf{x}=\mathbf{y}+s\mathbf{c}, \quad \mathbf{y}\in\pi. \tag{6}$$

Положим

$$\mu=\lambda_{n-1}/\lambda_n$$

и определим Λ' как решетку, состоящую из всех точек вида

$$\mathbf{y}+\mu s\mathbf{c}, \quad \mathbf{y}+s\mathbf{c}\in\Lambda. \tag{7}$$

Тогда равенство (4), очевидно, выполняется. Кроме того, если в (7) $s\neq 0$, то точка $\mathbf{y}+s\mathbf{c}$ линейно не зависит от точек $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}$ и, таким образом,

$$F(\mathbf{y}+s\mathbf{c})\geqslant\lambda_n.$$

Отсюда на основании леммы 5 следует, что

$$F(\mathbf{y}+\mu s\mathbf{c})\geqslant\mu\lambda_n=\lambda_{n-1} \quad (s\neq 0). \tag{8}$$

С другой стороны, точки решетки Λ', для которых $s=0$, суть те точки решетки Λ, которые линейно зависят от точек $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}$. Таким образом, неравенство (5) следует из неравенства (8).

Теорема III доказана.

Следствие 1. *Имеет место неравенство*

$$\lambda_1^{n-1}\lambda_n\leqslant\delta(F)\,d(\Lambda).$$

Доказательство. Положим в доказательстве теоремы III

$$\mu=\lambda_1/\lambda_n$$

вместо λ_{n-1}/λ_n. Тогда неравенство (8) переходит в неравенство

$$F(\mathbf{y}+\mu s\mathbf{c})\geqslant\mu\lambda_n=\lambda_1 \quad (s\neq 0); \tag{8'}$$

откуда следует, что для всех точек $\mathbf{a}'\in\Lambda'$ (кроме начала $\mathbf{o}$) выполняется неравенство

$$F(\mathbf{a}')\geqslant\lambda_1.$$

Это означает, что

$$F(\Lambda')\geqslant\lambda_1;$$

кроме того,

$$d(\Lambda')=\mu d(\Lambda)=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)d(\Lambda). \tag{4'}$$

Но по определению величины $\delta(F)$

$$F^n(\Lambda')\leqslant\delta(F)\,d(\Lambda').$$

Таким образом, следствие вытекает из соотношения (4′) и (8′).

Следствие доказано.

Следствие 2. *Имеет место неравенство*

$$\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n\leqslant 2^{(n-1)/2-1/n}\,\delta(F)\,d(\Lambda).$$

Доказательство этого следствия мы только наметим. Варьируя μ в доказательстве теоремы, мы можем получить решетку Λ' с последовательными минимумами λ'_j, где

$$\lambda'_j=\lambda_j \quad (1\leqslant j<n), \qquad \lambda'_n=\lambda_{n-1}=\lambda'_{n-1}$$

и

$$d(\Lambda')\leqslant\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}\,d(\Lambda);$$

тогда

$$\frac{\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n}{d(\Lambda)}\leqslant\frac{\lambda'_1\cdot\ldots\cdot\lambda'_n}{d(\Lambda')}.$$

Отсюда следует, что для доказательства следствия достаточно ограничиться случаем, когда $\lambda_{n-1}=\lambda_n$. Но легко видеть, что если два числа из чисел η_j в лемме 4 равны, то правая часть неравенства (1) п. 1 § 3 может быть заменена на $\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{n}$. Применяя это усиленное неравенство при доказательстве теоремы, мы и приходим к утверждению следствия.

2. Прежде чем доказывать оценки Минковского для произведения последовательных минимумов ограниченного симметричного выпуклого тела в терминах объема, мы должны сначала получить одно утверждение относительно выпуклых тел и факторпространства $\mathscr{R}/\Lambda$, которое находит применения и в дальнейшем. Мы будем использовать понятия и обозначения гл. VII. Как и там, точки пространства $\mathscr{R}$ мы будем обозначать строчными жирными буквами, а точки пространства $\mathscr{R}/\Lambda$ — строчными готическими буквами.

Теорема IV. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — выпуклая симметричная лучевая функция, ассоциированная с ограниченным выпуклым множеством*

$$\mathscr{S}:\ F(\mathbf{x}) < 1 \tag{1}$$

объема

$$V_F = V(\mathscr{S}). \tag{2}$$

Пусть Λ — решетка, последовательные минимумы которой по отношению к функции F равны $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Обозначим через $\mathsf{S}(t)$, где t — вещественное число, $t > 0$, множество классов $\mathfrak{y} \in \mathscr{R}/\Lambda$, которые имеют по меньшей мере одного представителя $\mathbf{y}$ в множестве $t\mathscr{S}$ (т. е. в множестве $F(\mathbf{y}) < t$). Тогда мера $m(\mathsf{S}(t))$ множества $\mathsf{S}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$m\{\mathsf{S}(t)\}\left\{\begin{array}{ll} = t^n V_F, & \text{если } t \leqslant \frac{1}{2}\lambda_1, \\ \geqslant \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\lambda_J\right)t^{n-J}V_F, & \text{если } \frac{1}{2}\lambda_J \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\lambda_{J+1}, \\ \geqslant \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}\lambda_n\right)V_F, & \text{если } t \geqslant \frac{1}{2}\lambda_n. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Доказательство. Изучим действие, которое оказывает однородное линейное преобразование $\boldsymbol{\tau}$ пространства $\mathscr{R}$ на предположения и заключение теоремы. Пусть $\Lambda' = \boldsymbol{\tau}\Lambda$, $F'(\mathbf{x}) = F(\boldsymbol{\tau}^{-1}\mathbf{x})$. Последовательные минимумы решетки Λ' по отношению к функции F' те же, что и решетки Λ по отношению к F. Очевидно,

$$V_{F'} = |\det(\boldsymbol{\tau})|\, V_F;$$

кроме того, на основании замечания в конце п. 5 § 2 гл. VII мы заключаем, что

$$m'\{\boldsymbol{\tau}(\mathsf{S}(t))\} = |\det(\boldsymbol{\tau})|\, m\{\mathsf{S}(t)\},$$

где $\boldsymbol{\tau}\mathsf{S}(t)$ — образ множества $\mathsf{S}(t)$ при естественном отображении пространства $\mathscr{R}/\Lambda$ на $\mathscr{R}/\boldsymbol{\tau}\Lambda$, а m' — мера в пространстве $\mathscr{R}/\boldsymbol{\tau}\Lambda$. Однако множество $\boldsymbol{\tau}\mathsf{S}(t) = \mathsf{S}'(t)$ в пространстве $\mathscr{R}/\boldsymbol{\tau}\Lambda$ определяется по отношению к F' и Λ' так же, как множество $\mathsf{S}(t)$ определяется в терминах F и Λ. Отсюда следует, что при применении однородного линейного преобразования обе части неравенства (3) умножаются на один и тот же множитель $|\det(\boldsymbol{\tau})|$.

Поэтому, не уменьшая общности, мы можем считать, что базис $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ решетки Λ, о существовании которого говорится в лемме 2, задается равенствами

$$\mathbf{b}_j = \mathbf{e}_j = (\overbrace{0, \ldots, 0}^{j-1}, 1, \overbrace{0, \ldots, 0}^{n-j}) \tag{4}$$

и что $\Lambda = \Lambda_0$ является решеткой точек с целочисленными координатами.

Мы получим теперь формулу для $m\{\mathsf{S}(t)\}$, справедливую при

$$t \leqslant \frac{1}{2}\lambda_{J+1}, \tag{5}$$

и $J = 1, 2, \ldots, n-1$. Пусть $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1})$, $\mathbf{x}_2 = (x_{12}, \ldots, x_{n2})$ — две точки множества $F(\mathbf{x}) < t \leqslant \frac{1}{2}\lambda_{J+1}$, и пусть

$$\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_2 \quad (\Lambda_0); \tag{6}$$

тогда

$$F(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \leqslant F(\mathbf{x}_1) + F(\mathbf{x}_2) < \lambda_{J+1}.$$

Так как $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \Lambda_0$, то из (4) мы выводим, что

$$x_{j1} = x_{j2} \qquad (j > J); \tag{7}$$

кроме того,

$$(x_{11}, \ldots, x_{J1}) \equiv (x_{12}, \ldots, x_{J2}) \quad (\Lambda_0^J), \tag{8}$$

где Λ_0^J есть J-мерная решетка, состоящая из точек с целочисленными координатами. Очевидно, что из условий (7) и (8) следует условие (6). Обозначим через $\mathscr{R}_J$ J-мерное евклидово пространство, а через m_J — меру в пространстве $\mathscr{R}_J/\Lambda_0^J$. Пусть $\mathbf{z} = (z_{J+1}, \ldots, z_n)$ есть $(n-J)$-мерный вектор; обозначим через $\mathsf{S}_J(t, \mathbf{z})$ множество тех точек пространства $\mathscr{R}_J/\Lambda_0^J$, которые содержат такие представители $(x_1, \ldots, x_J) \in \mathscr{R}_J$, что

$$F(x_1, \ldots, x_J, z_{J+1}, \ldots, z_n) < t. \tag{9}$$

Мы утверждаем тогда, что при выполнении условия (5) имеет место равенство

$$m\{\mathsf{S}(t)\} = \int m_J\{\mathsf{S}_J(t, \mathbf{z})\}\, d\mathbf{z} \qquad (d\mathbf{z} = dz_{J+1}\ldots dz_n). \tag{10}$$

Множество $\mathsf{S}_J(t, \mathbf{z})$ имеет J-мерную меру m_J, что следует из непрерывности лучевой функции $F(\mathbf{x})$. Если точка $\mathbf{z}$ пробегает все $(n-J)$-мерное пространство, а точка $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_J)$ пробегает для каждого $\mathbf{z}$ полное множество представителей для множества $\mathsf{S}_J(t, \mathbf{z})$, то из эквивалентности условия (6) условиям (7) и (8) следует, что точка

$$\mathbf{x} = (y_1, \ldots, y_J, z_{J+1}, \ldots, z_n)$$

пробегает полное множество представителей для множества $\mathsf{S}(t)$. Мы можем, например, нормализовать $\mathbf{y}$, считая, что всегда $0 \leqslant y_j < 1$ $(1 \leqslant j \leqslant J)$. Это доказывает равенство (10).

Следующий этап заключается в доказательстве того, что если s — любое число, большее или равное 1, так что

$$0 < t \leqslant st, \tag{11}$$

то для любого $(n-J)$-мерного вектора $\mathbf{z}$ имеет место неравенство

$$m_J\{\mathsf{S}_J(st,\ s\mathbf{z})\} \geqslant m_J\{\mathsf{S}_J(t,\ \mathbf{z})\}. \tag{12}$$

Конечно, это неравенство справедливо, если его правая часть равна нулю. В противном случае существует некоторый J-мерный вектор $\mathbf{y}_0=(y_{10},\ \ldots,\ y_{J0})$, такой, что

$$F(\mathbf{y}_0,\ \mathbf{z})<t,$$

где, как и дальше, в очевидных обозначениях

$$(\mathbf{y}_0,\ \mathbf{z})=(y_{10},\ \ldots,\ y_{J0},\ z_{J+1},\ \ldots,\ z_n).$$

Пусть $\mathbf{y}$ — любой J-мерный вектор, удовлетворяющий условию

$$F(\mathbf{y},\ \mathbf{z})<t;$$

тогда из выпуклости и однородности функции F следует, что

$$\begin{aligned} F\{\mathbf{y}+(s-1)\mathbf{y}_0,\ s\mathbf{z}\} &= F\{(\mathbf{y},\ \mathbf{z})+(s-1)(\mathbf{y}_0,\ \mathbf{z})\}\leqslant \\ &\leqslant F(\mathbf{y},\ \mathbf{z})+(s-1)F(\mathbf{y}_0,\ \mathbf{z})< \\ &< t+(s-1)t=st. \end{aligned}$$

Поэтому если точка $\mathbf{y}$ пробегает полное множество представителей для множества $\mathsf{S}_J(t,\ \mathbf{z})$, то точка $\mathbf{y}+(s-1)\mathbf{y}_0$ при фиксированном $\mathbf{y}_0$ пробегает множество представителей различных элементов[1]) множества $\mathsf{S}_J(st,\ s\mathbf{z})$. Тем самым неравенство (12) доказано.

Предположим теперь, что

$$0<t\leqslant st\leqslant \frac{1}{2}\lambda_{J+1}; \tag{13}$$

тогда на основании соотношений (10) и (12) мы получаем

$$\begin{aligned} m\{\mathsf{S}(st)\} &= \int m_J\{\mathsf{S}_J(st,\ \mathbf{z})\}\,d\mathbf{z}= \\ &= s^{n-J}\int m_J\{\mathsf{S}_J(st,\ s\mathbf{z})\}\,d\mathbf{z}\geqslant \\ &\geqslant s^{n-J}\int m_J\{\mathsf{S}_J(t,\ \mathbf{z})\}\,d\mathbf{z}= \\ &= s^{n-J}m\{\mathsf{S}(t)\}; \end{aligned} \tag{14}$$

во второй строке мы заменили $\mathbf{z}$ на $s\mathbf{z}$, а в третьей использовали неравенство (12).

[1]) Конечно, не каждый элемент множества $\mathsf{S}_J(st,\ s\mathbf{z})$ обладает обязательно представителем вида $\mathbf{y}+(s-1)\mathbf{y}_0$. Важно то, что различные по модулю Λ_0^J точки $\mathbf{y}$ приводят к различным по модулю Λ_0^J точкам $\mathbf{y}+(s-1)\mathbf{y}_0$.

Если

$$t\leqslant \frac{1}{2}\lambda_1, \tag{15}$$

то имеет место простое равенство

$$m\{\mathsf{S}(t)\}=V(t\mathscr{S})=t^nV_F, \tag{16}$$

где $t\mathscr{S}$ — множество, определяемое неравенством $F(\mathbf{x})<t$. Действительно, если $\mathbf{x}_1\equiv\mathbf{x}_2\ (\Lambda_0)$ — любые две точки множества $t\mathscr{S}$, то

$$F(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2)\leqslant F(\mathbf{x}_1)+F(\mathbf{x}_2)<2t\leqslant\lambda_1,$$

откуда следует, что $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$.

Докажем теперь неравенство (3). Если $t\leqslant\frac{1}{2}\lambda_1$, то справедливость (3) следует из равенства (16). Предположим, что (3) уже доказано при $t\leqslant\frac{1}{2}\lambda_J$, где $1\leqslant J\leqslant n-1$. Тогда его справедливость при $\frac{1}{2}\lambda_J\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}\lambda_{J+1}$ следует из неравенств (13) и (14), где положено $t=\frac{1}{2}\lambda_J$. Наконец, справедливость неравенства (3) при $t\geqslant\frac{1}{2}\lambda_n$ очевидна, так как если $t_1\geqslant t_2$, то $\mathscr{S}(t_2)\subset\mathscr{S}(t_1)$; следовательно, при возрастании t мера $m\{\mathsf{S}(t)\}$ возрастает.

Теорема IV доказана.

3. Теорема IV является основой для доказательства следующей теоремы Минковского.

Теорема V. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — симметричная выпуклая лучевая функция, ассоциированная с ограниченным множеством $F(\mathbf{x})<1$ объема V_F. Пусть $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ — последовательные минимумы решетки Λ по отношению к функции F; тогда*

$$\frac{2^n}{n!}d(\Lambda)\leqslant\lambda_1\ldots\lambda_nV_F\leqslant 2^nd(\Lambda). \tag{1}$$

Доказательство. В теореме IV мера $m\{\mathsf{S}(t)\}$ для любого t не превосходит меры всего пространства $\mathscr{R}/\Lambda$, равной $d(\Lambda)$. Применяя это замечание к неравенству (3) п. 2 § 4 для $t=\frac{1}{2}\lambda_n$, мы сразу получим правое неравенство (1).

Пусть теперь $\mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_n$ — линейно независимые точки решетки Λ, для которых

$$F(\mathbf{a}_j)=\lambda_j$$

(такие точки существуют на основании леммы 1). Из однородности и выпуклости функции $F(\mathbf{x})$ следует, что все точки

$$\mathbf{x}=t_1\mathbf{a}_1+\ \ldots\ +t_n\mathbf{a}_n, \tag{2}$$

для которых

$$\sum \lambda_j |t_j| < 1, \tag{3}$$

принадлежат множеству $F(\mathbf{x}) < 1$. Поэтому $V_F \geqslant V'$, где V' — объем множества точек вида (2), удовлетворяющих условию (3). Но легко видеть, что

$$V' = \frac{2^n}{n!} |\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)| = \frac{2^n I}{n!} d(\Lambda), \tag{4}$$

где I — индекс решетки, натянутой на точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ в решетке Λ. Так как $I \geqslant 1$, то это доказывает левую часть неравенства (1).

Теорема V доказана.

Следствие. *Индекс I решетки, натянутой на точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ в решетке Λ, не превосходит $n!$.*

Это утверждение следует из равенства (4) и правой части неравенства (1) (ср. с доказательством теоремы X гл. V).

§ 5. Взаимные выпуклые тела

1. Пусть Λ^* — решетка, взаимная решетке Λ (см. § 5 гл. I); F^* — функция, взаимная симметричной выпуклой лучевой функции F (см. § 3 гл. IV). Малер [3] доказал, что последовательные минимумы решетки Λ^* по отношению к функции F^* определяются последовательными минимумами решетки Λ по отношению к функции F с точностью до множителей, ограниченных пределами, зависящими только от размерности n. Эта взаимосвязь будет использована в гл XI при изучении неоднородных задач; кроме того, она важна и при рассмотрении других вопросов. Доказываемое ниже предложение связано, конечно, с теоремой VI гл. IV, где рассматриваются критические определители взаимных выпуклых тел.

Теорема VI. *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — последовательные минимумы решетки Λ по отношению к симметричной выпуклой лучевой функции F, и пусть $\lambda_1^*, \ldots, \lambda_n^*$ — последовательные минимумы решетки Λ^*, взаимной с Λ, по отношению к лучевой функции F^*, взаимной с F; тогда*

$$1 \leqslant \lambda_j \lambda_{n+1-j}^* \leqslant n! \qquad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{1}$$

Доказательство. Докажем сначала левое из неравенств (1). По лемме 1 существуют такие линейно независимые векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$, $\mathbf{a}_1^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*$, принадлежащие соответственно решеткам Λ, Λ^*, что

$$F(\mathbf{a}_j) = \lambda_j, \quad F^*(\mathbf{a}_j^*) = \lambda_j^*. \tag{2}$$

По теореме III гл. IV мы получаем, что для любых двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}^*$ имеет место неравенство

$$F(\mathbf{x}) F^*(\mathbf{x}^*) \geqslant \mathbf{x}\mathbf{x}^*$$

(справа — скалярное произведение). Применяя это неравенство к векторам $\mathbf{x} = \pm \mathbf{a}_i$, $\mathbf{x}^* = \pm \mathbf{a}_j^*$ для произвольной пары индексов i, j, мы получаем, учитывая симметричность функций $F(\mathbf{x})$ и $F^*(\mathbf{x})$, что

$$\lambda_i \lambda_j^* \geqslant |\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^*|. \tag{3}$$

Но по лемме 5 гл. I числа $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^*$ являются целыми, откуда следует, что

$$\text{либо } \lambda_i \lambda_j^* \geqslant 1, \qquad \text{либо } \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j^* = 0. \tag{4}$$

Пусть I — фиксированный номер. Векторы $\mathbf{x}$, для которых $\mathbf{x}\mathbf{a}_i^* = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant I)$, образуют $(n-I)$-мерное подпространство. Поэтому в силу линейной независимости векторов $\mathbf{a}_j$ найдется некоторый вектор $\mathbf{a}_j$ $(j \leqslant n+1-I)$, который не лежит в этом подпространстве, т. е.

$$\mathbf{a}_j \mathbf{a}_i^* \neq 0$$

для некоторых i, j, удовлетворяющих условиям

$$i \leqslant I, \qquad j \leqslant n+1-I.$$

Тогда, так как $\lambda_i^* \leqslant \lambda_I^*$, $\lambda_j \leqslant \lambda_{n+1-I}$, мы из неравенства (4) получаем, что

$$\lambda_{n+1-I} \lambda_I^* \geqslant \lambda_j \lambda_i^* \geqslant 1.$$

Так как последнее неравенство справедливо для любого I, то тем самым левое из неравенств (1) доказано.

Докажем теперь правое неравенство в формулировке теоремы. Пусть векторы $\mathbf{a}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ те же, что и прежде. Тогда (ср. § 5 гл. I) существуют такие n примитивных векторов $\mathbf{b}_j^* \in \Lambda^*$, что

$$\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j^* = 0 \qquad (i \neq j). \tag{5}$$

Так как векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы, то система уравнений $\mathbf{a}_i \mathbf{x}^* = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеет единственное решение $\mathbf{x}^* = \mathbf{o}$, откуда следует, что

$$\mathbf{a}_i \mathbf{b}_i^* \neq 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{6}$$

Таким образом, векторы $\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*$ линейно независимы.

По следствию 1 теоремы III гл. IV существует такой вектор $\mathbf{x}_j$, что

$$F(\mathbf{x}_j) F^*(\mathbf{b}_j^*) = \mathbf{x}_j \mathbf{b}_j^*. \tag{7}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что

$$\mathbf{x}_j \mathbf{b}_j^* = 1 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{8}$$

Покажем теперь, что при фиксированном J определитель D_J, образованный из векторов $\mathbf{x}_J$ и $\mathbf{a}_i$ $(i \neq J)$, по абсолютной величине не

меньше, чем $d(\Lambda)$. Действительно, для фиксированного J существует базис $\mathbf{c}_1^*, \ldots, \mathbf{c}_n^*$ решетки Λ^*, для которого
$$\mathbf{c}_n^* = \mathbf{b}_J^*. \tag{9}$$
Пусть $\mathbf{c}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$—взаимный базис, так что на основании равенств (5) и (9)
$$\mathbf{a}_i = \sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} v_{ij}\mathbf{c}_j \qquad (i \neq J), \tag{10}$$
где v_{ij} — некоторые целые числа. Кроме того, из равенств (8) и (9) выводим
$$\mathbf{x}_J = \pm \mathbf{c}_n + \sum_{1 \leqslant j \leqslant n-1} t_j \mathbf{c}_j,$$
где t_j — некоторые вещественные числа. Отсюда следует, что
$$D_J = |\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{J-1}, \mathbf{x}_J, \mathbf{a}_{J+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)| =$$
$$= |\det(v_{ij})_{\substack{i \neq J \\ j \neq n}}| \, |\det(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)|.$$
Здесь первый множитель — ненулевое целое число, ибо векторы $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независимы; второй же множитель равен $d(\Lambda)$. Таким образом, как и требовалось,
$$D_J \geqslant d(\Lambda). \tag{11}$$
Все точки вида
$$t_J\mathbf{x}_J + \sum_{i \neq J} t_i \mathbf{a}_i,$$
для которых
$$|t_J| F(\mathbf{x}_J) + \sum_{i \neq J} |t_i| F(\mathbf{a}_i) < 1,$$
принадлежат множеству $F(\mathbf{x}) < 1$ объема V_F. Объем указанного множества точек равен
$$\frac{2^n}{n!} D_J \Big\{F(\mathbf{x}_J) \prod_{i \neq J} F(\mathbf{a}_i)\Big\}^{-1}.$$
Отсюда на основании неравенств (11) получаем неравенство
$$V_F F(\mathbf{x}_J) \prod_{i \neq J} F(\mathbf{a}_i) \geqslant \frac{2^n}{n!} d(\Lambda). \tag{12}$$
Но $F(\mathbf{a}_i) = \lambda_i$ и $V_F \prod_i \lambda_i \leqslant 2^n d(\Lambda)$ по теореме V, так что
$$F(\mathbf{x}_J) \geqslant \lambda_J / n!$$
и окончательно на основании равенств (7) и (8)
$$F^*(\mathbf{b}_J^*) \leqslant n! \, \lambda_J^{-1}. \tag{13}$$

Неравенство (13) справедливо для каждого целого J и независимых векторов $\mathbf{b}_J^*$ решетки Λ^*.

Так как $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n$, то для каждого целого J найдется $n+1-J$ линейно независимых векторов $\mathbf{b}^* = \mathbf{b}_j^*$ $(J \leqslant j \leqslant n)$ решетки Λ^*, для которых $F(\mathbf{b}^*) \leqslant n! \, \lambda_J^{-1}$. Отсюда следует, если учесть определение минимума λ_{n+1-J}^*, что
$$\lambda_{n+1-J}^* \leqslant n! \, \lambda_J^{-1}.$$
Тем самым правая часть неравенства (1) также доказана.

Теорема VI доказана.

Приложения этой теоремы обычно носят только качественный характер, так как множитель $n!$ в правой части обычно оказывается слишком грубым. Малер [3] показал, что более слабое неравенство
$$\lambda_J \lambda_{n+1-J}^* \leqslant (n!)^2$$
может быть выведено очень просто из левого неравенства (1) теоремы V и теоремы VI гл. IV. Действительно, мы знаем, что
$$V_F \lambda_1 \ldots \lambda_n \leqslant 2^n d(\Lambda),$$
$$V_{F^*} \lambda_1^* \ldots \lambda_n^* \leqslant 2^n d(\Lambda^*),$$
откуда
$$V_F V_{F^*} \prod_j \lambda_j \lambda_{n+1-j}^* \leqslant 2^{2n} d(\Lambda) \, d(\Lambda^*).$$
Далее, по лемме 5 гл. I
$$d(\Lambda) \, d(\Lambda^*) = 1$$
и по теореме VI гл. IV
$$V_F V_{F^*} \geqslant \frac{2^{2n}}{(n!)^2}.$$
Кроме того, из левого неравенства теоремы VI следует, что для любого фиксированного J имеет место неравенство
$$\prod_j \lambda_j \lambda_{n+1-j}^* \geqslant \lambda_J \lambda_{n+1-J}^*.$$
Таким образом, как и требовалось, $\lambda_J \lambda_{n+1-J}^* \leqslant (n!)^2$.

2. В гл. XI нам понадобится также следующий результат, доказательство которого аналогично доказательству теоремы VI.

Теорема VII. *Пусть $F(\mathbf{x})$ и $F^*(\mathbf{x})$ — две взаимные симметричные выпуклые лучевые функции. Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — произвольный базис решетки Λ, а $\mathbf{b}_1^*, \ldots, \mathbf{b}_n^*$ — взаимный ему базис* *решетки Λ^*, взаимной к решетке Λ. Тогда для каждого $J = 1, 2, \ldots, n$ имеет место неравенство*

$$2^n d(\Lambda) F^*(\mathbf{b}_J^*) \leqslant n!\, V_F \prod_{j \neq J} F(\mathbf{b}_j). \tag{1}$$

Доказательство. Заметим, что вывод неравенства (12) из соотношений (5) и (6) п.1 § 5 не опирается на тот факт, что векторы $\mathbf{a}_j$ дают последовательные минимумы для функции F. Таким образом, неравенство (12) п.1 § 5 остается справедливым при замене векторов $\mathbf{a}_j$ на векторы $\mathbf{b}_j$; при этом векторы $\mathbf{x}_j$ задаются условиями (7) и (8) п.1 § 5. Подставляя соотношения (7) и (8) в неравенство (12) п.1 § 5, мы и получаем неравенство (1).

Теорема VII доказана.

Следствие (Рисс [1], Малер [2, 3]). *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — последовательные минимумы функции F по отношению к решетке Λ. Тогда базис $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ решетки Λ может быть выбран так, что выполняются соотношения*

$$\left.\begin{aligned} &F(\mathbf{b}_1) = \lambda_1, \\ &2F(\mathbf{b}_j) \leqslant j\lambda_j \quad (2 \leqslant j \leqslant n), \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

причем

$$F(\mathbf{b}_j) F^*(\mathbf{b}_j^*) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n!)^2. \tag{3}$$

Существование базиса $\mathbf{b}_j$, удовлетворяющего условиям (2), сразу следует из леммы 8 гл. V, если взять в качестве векторов $\mathbf{a}_j$, фигурирующих в этой лемме, линейно независимые векторы $\mathbf{a}_j$, удовлетворяющие условиям $F(\mathbf{a}_j) = \lambda_j$. Но тогда, умножая неравенство (1) на $F(\mathbf{b}_J)$ и используя теорему V, мы получаем, что

$$2^n d(\Lambda) F(\mathbf{b}_J) F^*(\mathbf{b}_J^*) \leqslant n!\, V_F \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} F(\mathbf{b}_j) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n!)^2 V_F \prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j \leqslant 2(n!)^2 d(\Lambda),$$

так что неравенство (3) также выполняется.

ГЛАВА IX

УКЛАДКИ

§ 1. Введение

1. Пусть $\mathscr{S}$ — любое n-мерное множество, а $\mathbf{y}$ — точка пространства; через $\mathscr{S} + \mathbf{y}$ обозначим множество точек вида

$$\mathscr{S} + \mathbf{y}: \quad \mathbf{x} + \mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathscr{S}. \tag{1}$$

Под *укладкой* (или упаковкой) множества $\mathscr{S}$ в некотором другом множестве $\mathscr{T}$ мы будем понимать набор множеств

$$\mathscr{S}_r = \mathscr{S} + \mathbf{y}_r, \tag{2}$$

каждое из которых содержится в $\mathscr{T}$, причем никакие два из них не имеют общих точек. Если множество $\mathscr{T}$ совпадает со всем пространством $\mathscr{R}$, мы говорим просто об укладке множества $\mathscr{S}$. Если точки $\mathbf{y}_r$ в (2) пробегают множество точек некоторой решетки Λ, то мы говорим, что укладка является решетчатой. В этой главе мы рассмотрим применения идеи укладки множеств к геометрии чисел. Гл. IX может рассматриваться как продолжение гл. III, однако нам потребуются и некоторые свойства выпуклых тел, рассмотренные в гл. IV. Как мы увидим, общая теория укладок связана даже с чистыми задачами теории решеток.

Превосходный обзор теории укладок можно найти в книге Фейеша Тота [2]; конспективное изложение наиболее важных результатов содержится в статье Бамба и Роджерса (C. A. Rogers) [1].

2. Следующие три теоремы иллюстрируют связь теории укладок с исследованиями, изложенными в гл. III. Мы дадим здесь простые доказательства.

Теорема I. *Для того чтобы решетка Λ давала укладку множества $\mathscr{S}$, необходимо и достаточно, чтобы никакая разность $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ двух различных точек множества $\mathscr{S}$ не принадлежала решетке Λ.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{a} \in \Lambda$. Тогда оба множества $\mathscr{S} = \mathscr{S} + \mathbf{o}$ и $\mathscr{S} + \mathbf{a}$ содержат точку $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{a}$ и, стало быть, пересекаются. Обратно, пусть множества $\mathscr{S} + \mathbf{a}_1$ и $\mathscr{S} + \mathbf{a}_2$, где точки $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ принадлежат Λ, имеют общую точку $\mathbf{y}$. Тогда точки $\mathbf{y} - \mathbf{a}_1 = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{y} - \mathbf{a}_2 = \mathbf{x}_2$ принадлежат множеству $\mathscr{S}$ и их разность $\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1$ принадлежит решетке Λ.

Теорема I доказана.

Из теоремы Блихфельдта (теорема I гл. III) следует, что если решетка Λ дает укладку множества $\mathscr{S}$, то

$$V(\mathscr{S}) \leqslant d(\Lambda).$$

Следующее предложение исследует случай, когда последнее неравенство обращается в равенство. Чтобы избежать утомительных топологических рассуждений, мы ограничимся специальными множествами $\mathscr{S}$.

Теорема II. *Пусть $\mathscr{S}$ — ограниченное открытое звездное тело, а Λ — решетка, для которой*

$$V(\mathscr{S}) = d(\Lambda). \tag{1}$$

(A) *Если решетка Λ дает укладку множества $\mathscr{S}$, то каждая точка пространства либо принадлежит точно одному множеству вида $\mathscr{S} + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Lambda$, и не является граничной точкой никакого другого множества вида $\mathscr{S} + \mathbf{a}$, либо является граничной точкой по меньшей мере двух множеств вида $\mathscr{S} + \mathbf{a}$.*

(B) *Если каждая точка пространства принадлежит по крайней мере одному из множеств вида $\mathscr{S} + \mathbf{a}$ или является граничной точкой этого множества, то решетка Λ дает укладку множества $\mathscr{S}$.*

Доказательство. По предположению найдется такое число R, что множество $\mathscr{S}$ содержится в шаре

$$|\mathbf{x}| < R.$$

Докажем утверждение (A). Пусть решетка Λ дает укладку множества $\mathscr{S}$ и существует некоторая точка $\mathbf{y}$, которая не лежит внутри или на границе ни одного из множеств вида $\mathscr{S} + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Lambda$. Мы можем выбрать столь малое ε в интервале $0 < \varepsilon < 1$, чтобы шар $\mathscr{S}_1$, состоящий из точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенству

$$\mathscr{S}_1\colon\ |\mathbf{x} - \mathbf{y}| < \varepsilon, \tag{2}$$

не пересекался ни с одним из конечного числа тел вида $\mathscr{S} + \mathbf{a}$, где $\mathbf{a} \in \Lambda$ и $|\mathbf{a} - \mathbf{y}| < R + 1$. По определению числа R множество $\mathscr{S} + \mathbf{a}$ не содержит ни одной точки $\mathbf{x}$ из $\mathscr{S}_1$, если $|\mathbf{a} - \mathbf{y}| \geqslant R + 1$. Мы можем считать ε столь малым, что единственной точкой решетки Λ, принадлежащей множеству $|\mathbf{x}| < 2\varepsilon$, является начало $\mathbf{o}$. Пусть

$$\mathscr{S}' = \mathscr{S} \cup \mathscr{S}_1$$

— объединение множеств $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}_1$. Ясно, что если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — различные точки множества $\mathscr{S}'$, то разность $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ не может принадлежать решетке Λ. Отсюда по теореме Блихфельдта (теорема I гл. III)

$$V(\mathscr{S}') \leqslant d(\Lambda).$$

Но тогда $V(\mathscr{S}) < V(\mathscr{S}')$, что противоречит предположению теоремы.

Допустим теперь, что предположение пункта (A) выполняется, но существует точка $\mathbf{y}$, которая является граничной точкой только одного множества вида $\mathscr{S} + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Lambda$. Без уменьшения общности можно считать, что $\mathbf{y}$ является граничной точкой множества $\mathscr{S}$. Как и прежде, найдется такое $\varepsilon > 0$, что множество $\mathscr{S}_1$, определяемое неравенством (2), не содержит ни одной внутренней или граничной точки никакого из множеств вида $\mathscr{S} + \mathbf{a}$, где $\mathbf{a} \in \Lambda$, $\mathbf{a} \neq 0$. Но тогда точка $(1 + \eta)\mathbf{y}$, где η достаточно мало, принадлежит множеству $\mathscr{S}_1$ и в то же время не является внутренней или граничной точкой множества $\mathscr{S}$. Заменяя точку $\mathbf{y}$ на точку $(1 + \eta)\mathbf{y}$, мы приходим к уже рассмотренному случаю.

По определению укладки никакая точка не может принадлежать более чем одному множеству вида $\mathscr{S} + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Lambda$. Если бы точка $\mathbf{y}$ принадлежала множеству $\mathscr{S} + \mathbf{a}$ и являлась граничной точкой множества $\mathscr{S} + \mathbf{b}$, где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in \Lambda$, то, так как множество $\mathscr{S}$ является открытым, в окрестности точки $\mathbf{y}$ существовали бы точки, принадлежащие одновременно множествам $\mathscr{S} + \mathbf{a}$ и $\mathscr{S} + \mathbf{b}$. Тем самым пункт (A) теоремы доказан.

Докажем теперь пункт (B). Если решетка Λ не дает укладки множества $\mathscr{S}$, то по теореме I существуют такие точки $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, что

$$\mathbf{o} \neq \mathbf{a}_0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \Lambda.$$

Так как по предположению множество $\mathscr{S}$ является открытым, то существует такое число $\varepsilon > 0$, что оба шара

$$\mathscr{S}_1\colon\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_1| < \varepsilon,$$

$$\mathscr{S}_2\colon\ |\mathbf{x} - \mathbf{x}_2| < \varepsilon$$

содержатся в множестве $\mathscr{S}$. Мы можем считать ε настолько малым, что шары $\mathscr{S}_1$ и $\mathscr{S}_2$ не пересекаются. Пусть $\mathscr{S}'$ — множество точек, которые принадлежат множеству $\mathscr{S}$, но не принадлежат множеству $\mathscr{S}_1$. Так как каждая точка множества $\mathscr{S}$ принадлежит либо множеству $\mathscr{S}'$, либо сдвинутому множеству $\mathscr{S}' + \mathbf{a}_0$, то ясно, что каждая точка пространства является внутренней или граничной точкой множества вида $\mathscr{S}' + \mathbf{a}$ для некоторого $\mathbf{a} \in \Lambda$. Пусть $\bar{\mathscr{S}}'$ — замыкание множества $\mathscr{S}'$. Так как $\mathscr{S}$ является звездным телом и $\mathscr{S}_1$ является подмножеством множества $\mathscr{S}$, то

$$V(\bar{\mathscr{S}}') = V(\mathscr{S}') < V(\mathscr{S}) = d(\Lambda).$$

Но это противоречит следствию теоремы I гл. III, так как мы предполагаем, что любая точка пространства и, стало быть, любая точка фундаментального параллелепипеда имеет вид $\mathbf{z} + \mathbf{a}$, где $\mathbf{z} \in \bar{\mathscr{S}}'$ и $\mathbf{a} \in \Lambda$.

Теорема II доказана.

Теорема III. *Пусть $\mathcal{S}$ — выпуклое симметричное множество. Для того чтобы решетка Λ была $\mathcal{S}$-допустимой, необходимо и достаточно, чтобы решетка Λ давала укладку тела $\frac{1}{2}\mathcal{S}$.*

Доказательство. Утверждение теоремы тотчас следует из теоремы I и следствия теоремы II гл. III.

Теорема III доказана.

Ниже мы будем рассматривать только укладки выпуклых множеств $\mathcal{S}$ и, если это дает какое-либо упрощение доказательств и формулировок, считать множество $\mathcal{S}$ симметричным.

3. Теорема Минковского о выпуклом теле (теорема II гл. III) утверждает, что если $\mathcal{S}$ является n-мерным симметричным выпуклым телом объема $V(\mathcal{S})>2^n d(\Lambda)$, то решетка Λ не может быть $\mathcal{S}$-допустимой. В § 2 мы рассмотрим случаи, когда решетка Λ_c может быть допустимой для симметричного выпуклого тела объема $2^n d(\Lambda_c)$. Конечно, тогда по теореме Минковского о выпуклом теле

$$\Delta(\mathcal{S}) = 2^{-n}V(\mathcal{S}), \tag{1}$$

и решетка Λ_c является критической.

Даже в случае, когда $\mathcal{S}$ является кубом $|x_j|<1$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, критические решетки не были полностью известны до тех пор, пока Хайош [1] не доказал старую гипотезу Минковского. Мы приведем здесь этот результат, но не будем его доказывать, поскольку доказательство основывается на результатах из теории групп, что выходит за рамки нашей книги.

Теорема IV. *Для того чтобы решетка Λ была критической для куба $|x_j|<1$ $(1\leqslant j\leqslant n)$, необходимо и достаточно, чтобы после надлежащей перестановки осей координат она имела базис вида*

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_1 &= (1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\\
\mathbf{b}_2 &= (b_{12},\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\\
\mathbf{b}_3 &= (b_{13},\ b_{23},\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{b}_n &= (b_{1n},\ \ldots,\ b_{n-1,n},\ 1).
\end{aligned}$$

Читатель легко проверит, что решетка указанного вида имеет определитель 1 и не содержит точек, отличных от $\mathbf{o}$, принадлежащих множеству $|x_j|<1$ $(1\leqslant j\leqslant n)$. По поводу доказательства обратного утверждения см. оригинальную статью Хайоша [1] и работу Редеи [1], где имеются ссылки на значительное количество более ранней литературы. Между прочим, теорема Хайоша для $n=2$ совпадает с леммой 7 гл. III.

Минковский [1] показал, что любое выпуклое симметричное множество $\mathcal{S}$, для которого $\Delta(\mathcal{S})=2^{-n}V(\mathcal{S})$, должно иметь очень специальные свойства, например оно должно быть полиэдром, ограниченным не более чем 2^n-1 парами гиперплоскостей. Мы докажем это в § 2.

4. Вороной [2] предложил простой способ для нахождения открытых выпуклых симметричных множеств $\mathcal{S}$, для которых

$$V(\mathcal{S}) = d(\Lambda)$$

и укладку которых дает данная решетка Λ. Если $g(\mathbf{x})$ — любая положительно определенная квадратичная форма, то множество точек $\mathbf{x}$, для которых

$$g(\mathbf{x}) < \inf_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}} g(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \tag{1}$$

обладает этим свойством. Неравенство

$$g(\mathbf{x}) < g(\mathbf{x}+\mathbf{a})$$

для любого данного $\mathbf{a}$ является линейным относительно $x_1, \ldots, x_n$, так что $\mathcal{S}$ является выпуклым множеством. Множество $\mathcal{S}$, очевидно, симметрично. Нетрудно проверить, что множество $\mathcal{S}$ является ограниченным и что точная нижняя грань в условии (1) может быть заменена минимумом, распространенным на конечное число векторов $\mathbf{a}$, зависящих от решетки Λ и функции $g(\mathbf{x})$, а не от индивидуального вектора $\mathbf{x}$. Не каждое открытое выпуклое симметричное множество $\mathcal{S}$ с условием $V(\mathcal{S})=2^n d(\Lambda)$, для которого решетка Λ является допустимой, может быть получено этим способом; однако Вороной смог доказать, что в некотором смысле все такие достаточно общие множества $\mathcal{S}$ могут быть получены так. К сожалению, в число исключительных случаев попадают некоторые особенно интересные, как, например, те, о которых говорится в теореме Хайоша (теорема IV).

В этой книге мы не рассматриваем случай произвольной размерности n, ограничиваясь детальным изучением в § 3 случая $n=2$. В качестве побочного продукта мы получим один результат относительно неоднородных задач для определенных бинарных квадратичных форм.

5. Пусть $\mathcal{K}$ — любое открытое двумерное множество, и пусть $\mathcal{C}$ — трехмерное множество, определяемое условиями

$$\mathcal{C}\colon\ (x_1,\ x_2,\ x_3),\quad (x_1,\ x_2)\in\mathcal{K},\quad |x_3|<1, \tag{1}$$

т. е. $\mathcal{C}$ — обобщенный цилиндр высоты 2, поперечное сечение которого совпадает с $\mathcal{K}$. Тогда плоское сечение

$$x_3 = \text{const}$$

решетчатой укладки множества $\mathscr{C}$ дает очевидным образом укладку множества $\mathscr{K}$, хотя и не обязательно решетчатую. Идея использования в этой связи нерешетчатых укладок принадлежит, по-видимому, Малеру [7]. Эта идея приводит нас к рассмотрению нерешетчатых укладок двумерных множеств. После нескольких предварительных лемм в § 4 мы проведем это рассмотрение в § 5. Оказывается, как независимо было доказано Роджерсом [8] и Фейешем Тотом [1] (см. также Фейеш Тот [2]), что в известном смысле, который будет уточнен позднее, никакая упаковка открытого симметричного выпуклого множества не является более плотной, чем плотнейшая решетчатая упаковка. По-видимому, этот результат не распространяется на высшие размерности. По поводу затронутых вопросов см. книгу Фейеша Тота [2].

В § 6 мы используем результаты об укладках, чтобы показать, что

$$\Delta(\mathscr{C})=\Delta(\mathscr{K}) \tag{2}$$

в случае когда множество $\mathscr{K}$ является выпуклым и симметричным, а множество $\mathscr{C}$ задается условиями (1). Этот результат был первоначально независимо доказан Чоком и Роджерсом [1] и Йе [1]. Роджерс [5] дал пример, который показывает, что равенство (2) может не выполняться, если $\mathscr{K}$ является симметричным невыпуклым двумерным звездным телом, а Давенпорт и Роджерс [3] построили пример, который показывает, что отношение $\Delta(\mathscr{C})/\Delta(\mathscr{K})$ может быть сколь угодно мало. Варнавайдс [1] показал, что соотношение (2) продолжает сохранять силу в одном интересном невыпуклом случае. Неравенство $\Delta(\mathscr{C})\leqslant\Delta(\mathscr{K})$ тривиально, так как если Λ является двумерной $\mathscr{K}$-допустимой решеткой, то трехмерная решетка, состоящая из точек

$$(x_1,\ x_2,\ x_3),\quad (x_1,\ x_2)\in\Lambda,\quad x_3 \text{ — целое число},$$

является, очевидно, $\mathscr{C}$-допустимой и имеет тот же определитель, что и Λ.

В этой связи имеется интересная нерешенная проблема. Пусть $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$—выпуклые симметричные тела размерностей n_1 и n_2 соответственно, и пусть $\mathscr{C}$ есть (n_1+n_2)-мерное топологическое произведение множеств $\mathscr{K}_1$ и $\mathscr{K}_2$, т. е. множество точек вида

$$\mathbf{x}=(\mathbf{y},\ \mathbf{z}),\quad \mathbf{y}\in\mathscr{K}_1,\quad \mathbf{z}\in\mathscr{K}_2.$$

Рассуждения приведенного выше типа показывают, что

$$\Delta(\mathscr{C})\leqslant\Delta(\mathscr{K}_1)\,\Delta(\mathscr{K}_2). \tag{3}$$

Возможны ли в (3) случаи строгого неравенства? В случае цилиндра $(n_1=2,\ n_2=1)$, как указывалось выше, в (3) должен стоять знак равенства. Вудс [2] показал, что то же верно для $n_1=3,\ n_2=1$ в случае, когда $\mathscr{K}_1$ является трехмерным шаром.

6. В § 7—8 мы даем приложения метода Блихфельдта, основанного на рассмотрении укладок, или по меньшей мере теоремы Блихфельдта (теорема I гл. III) к оценке критических определителей множеств

$$x_1^2+\ldots+x_n^2<1$$

и

$$|x_1\ \ldots\ x_n|<1.$$

Там же будет рассмотрена связь результатов Блихфельдта с последующими работами.

§ 2. Множества, для которых $V(\mathscr{S})=2^n\Delta(\mathscr{S})$

1. Мы докажем здесь следующий результат Минковского [1].

Теорема V. *Пусть $\mathscr{S}$ — открытое симметричное n-мерное выпуклое множество, для которого существует допустимая решетка Λ с определителем $d(\Lambda)=2^{-n}V(\mathscr{S})$. Тогда множество $\mathscr{S}$ определяется $m\leqslant 2^n-1$ неравенствами вида*

$$\Big|\sum_j f_{ij}x_j\Big|<1. \tag{1}$$

Для каждого I $(1\leqslant I\leqslant m)$ плоскости

$$\sum_j f_{Ij}x_j=\pm 1 \tag{2}$$

задают пару $(n-1)$-мерных граней множества $\mathscr{S}$, и каждая такая грань содержит некоторую точку решетки Λ как внутреннюю точку (т. е. для каждого I найдется точка решетки, удовлетворяющая равенству (2) и неравенствам (1) для $i\neq I$).

Доказательство. Так как $0<V(\mathscr{S})<\infty$, то по лемме 4 гл. IV множество $\mathscr{S}$ является ограниченным. На основании теорем II и III каждая точка либо принадлежит точно одному множеству

$$\mathscr{T}(\mathbf{a}):\quad \frac{1}{2}\mathscr{S}+\mathbf{a},\quad \mathbf{a}\in\Lambda,$$

и в этом случае не является граничной точкой ни одного из множеств вида $\mathscr{T}(\mathbf{b})$, $\mathbf{b}\in\Lambda$, либо является граничной точкой по меньшей мере двух множеств $\mathscr{T}(\mathbf{a})$. Отсюда следует, что каждая граничная точка множества $\mathscr{T}(\mathbf{o})=\frac{1}{2}\mathscr{S}$ является также граничной точкой некоторых множеств $\mathscr{T}(\mathbf{a})$, $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$, и ввиду ограниченности $\mathscr{S}$ только конечное число точек $\mathbf{a}$ может фигурировать в этой связи.

Заметим теперь, что для фиксированного $\mathbf{a}$ множество точек, являющихся граничными одновременно для обоих множеств $\mathscr{T}(\mathbf{o})$ и

$\mathcal{T}(\mathbf{a})$, является выпуклым. Действительно, если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ — две такие точки, то точка

$$t\mathbf{x}+(1-t)\mathbf{y} \quad (0<t<1), \tag{3}$$

конечно, либо является граничной точкой выпуклого множества $\mathcal{T}(\mathbf{a})$, либо принадлежит ему; то же верно для $\mathcal{T}(\mathbf{o})$. Отсюда по теореме II точка (3) является граничной точкой обоих множеств $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{a})$.

В частности, если $\mathbf{z}$ принадлежит границам множеств $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{a})$, то в силу симметричности множества $\mathcal{S}$ это же утверждение верно[1]) и для точки $\mathbf{a}-\mathbf{z}$. Поэтому точка

$$\frac{1}{2}\mathbf{a}=\frac{1}{2}\mathbf{z}+\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{z})$$

также является общей граничной точкой.

Обозначим через

$$\pm\mathbf{c}_k \quad (1\leqslant k\leqslant K) \tag{4}$$

такие точки решетки Λ, что пересечение границы множества $\mathcal{T}(\mathbf{c}_k)$ с границей множества $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ содержит n линейно независимых точек[2]); обозначим через

$$\pm\mathbf{b}_l \quad (1\leqslant l\leqslant L) \tag{5}$$

остающиеся точки решетки Λ, для которых границы множеств $\mathcal{T}(\mathbf{b}_l)$ и $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ имеют непустое пересечение. Как только что было показано, общие граничные точки множеств $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{b}_l)$ лежат в линейном подпространстве размерности, не превосходящей $n-2$ (которое, конечно, не содержит начала координат).

Покажем теперь, что каждая граничная точка $\mathbf{z}$ множества $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ является в то же время граничной точкой некоторого множества $\mathcal{T}(\mathbf{c}_k)$. Действительно, множество граничных точек $\mathbf{x}$ множества $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ в любой окрестности

$$|\mathbf{z}-\mathbf{x}|<\varepsilon \tag{6}$$

точки $\mathbf{z}$ является $(n-1)$-мерным и, стало быть, не может быть исчерпано пересечениями с границами множеств $\mathcal{T}(\mathbf{b}_l)$, размерность которых не превосходит $n-2$. Отсюда следует, что существуют точки, удовлетворяющие неравенству (6) и являющиеся общими граничными точками множества $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ и каких-либо множеств $\mathcal{T}(\mathbf{c}_k)$. Таким образом, как и требовалось, сама точка $\mathbf{z}$ должна быть граничной точкой некоторого множества $\mathcal{T}(\mathbf{c}_k)$, поскольку имеется лишь конечное число точек $\mathbf{c}_k$.

[1]) В силу симметрии точка $-\mathbf{z}$ принадлежит границе множества $\mathcal{T}(\mathbf{o})$, а тогда $\mathbf{a}-\mathbf{z}$ принадлежит границе множества $\mathcal{T}(\mathbf{a})$.

[2]) То есть общая граница множеств $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{c})$ является выпуклым $(n-1)$-мерным множеством с центром $\frac{1}{2}\mathbf{c}$.

[Точнее, пусть множество $\mathcal{S}$ задается условием $F(\mathbf{x})<1$, где $F(\mathbf{x})$ — лучевая функция. Не уменьшая общности, мы можем предполагать, что $\mathbf{z}=(1, 0, \ldots, 0)$. Если точка $\mathbf{z}$ является общей граничной точкой множеств $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{b}_l)$, то общие граничные точки множеств $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{b}_l)$ удовлетворяют по крайней мере двум различным уравнениям вида

$$r_1(x_1-1)+\sum_{j\geqslant 2} r_j x_j=0$$

и, стало быть, по крайней мере одному уравнению вида

$$\sum_{j\geqslant 2} s_j x_j=0.$$

Уравнение такого вида имеет место для каждого l, для которого $\mathbf{z}$ является граничной точкой множества $\mathcal{T}(\mathbf{b}_l)$. Если числа $x_2, \ldots, x_n$ выбраны так, что они не удовлетворяют ни одному из этих условий и, кроме того, являются произвольно малыми, то точка

$$\frac{1}{2}\{F(1, x_2, \ldots, x_n)\}^{-1}(1, x_2, \ldots, x_n)$$

сколь угодно близка к точке $\mathbf{z}$ и не принадлежит ни одной из границ множеств $\mathcal{T}(\mathbf{b}_l)$.]

Рассмотрим теперь общую границу множеств $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ и $\mathcal{T}(\mathbf{c}_k)$. Мы уже видели, что $\frac{1}{2}\mathbf{c}_k$ является одной из точек этой общей границы. Пусть

$$\frac{1}{2}\mathbf{c}_k, \quad \frac{1}{2}\mathbf{c}_k+\mathbf{y}_{kj} \quad (1\leqslant j\leqslant n-1) \tag{7}$$

— n линейно независимых точек, принадлежащих общей границе. (Они существуют по определению точек $\mathbf{c}_k$.) Тогда в силу симметрии точки

$$\frac{1}{2}\mathbf{c}_k-\mathbf{y}_{kj}$$

также принадлежат общей границе, и на основании выпуклости[1]) то же можно сказать и о всех точках вида

$$\frac{1}{2}\mathbf{c}_k+\sum_{1\leqslant j\leqslant n-1} t_j\mathbf{y}_{kj}, \tag{8}$$

где

$$\sum|t_j|\leqslant 1. \tag{8'}$$

[1]) Точки (8) можно записать в виде

$$t_0\left(\frac{1}{2}\mathbf{c}_k\right)+\sum_{1\leqslant j\leqslant n-1}|t_j|\left(\frac{1}{2}\mathbf{c}_k\pm\mathbf{y}_{kj}\right),$$

где знак $\pm$ перед $\mathbf{y}_{kj}$ совпадает со знаком t_j и

$$t_0+|t_1|+\ldots+|t_{n-1}|=1.$$

Пусть π_k — плоскость, проходящая через точки $\frac{1}{2}\mathbf{c}_k$ и $\frac{1}{2}\mathbf{c}_k \pm \mathbf{y}_{kj}$. Ясно, что любая плоскость, отличная от π_k и проходящая через точку $\frac{1}{2}\mathbf{c}_k$, содержит точки множества $\mathcal{T}(\mathbf{o})$. Таким образом, π_k должна быть единственной опорной плоскостью множества $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ в точке $\frac{1}{2}\mathbf{c}_k$. Поскольку плоскость π_k не может проходить через внутреннюю точку $\mathbf{o}$ множества $\mathcal{T}(\mathbf{o})$, то уравнение этой плоскости может быть записано в виде

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant n} f_{kj}x_j = \frac{1}{2}; \tag{9}$$

соответствующая опорная плоскость $-\pi_k$, проходящая через точку $-\frac{1}{2}\mathbf{c}_k$, получается изменением знака коэффициентов f_{kj} в уравнении (9). Отсюда следует, что каждая точка открытого множества $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ удовлетворяет неравенствам

$$\Big|\sum_j f_{kj}x_j\Big| < \frac{1}{2}. \tag{10}$$

Каждая точка $\mathbf{y}$, которая не принадлежит множеству $\mathcal{T}(\mathbf{o})$, имеет вид $\mathbf{y} = t\mathbf{y}_0$, где $t \geqslant 1$ и $\mathbf{y}_0$ является граничной точкой. Мы уже видели, что каждая граничная точка множества $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ является также граничной точкой некоторого множества $\mathcal{T}(\pm\mathbf{c}_k)$, а поэтому удовлетворяет уравнению

$$\pm\sum f_{kj}x_j = \frac{1}{2}$$

для этого k. Поэтому точка $\mathbf{y}_0$, а тем более и точка $\mathbf{y}$, не может удовлетворять неравенству (10). Таким образом, множество $\mathcal{T}(\mathbf{o})$ совпадает с множеством точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенству (10). Так как $\mathcal{S} = 2\mathcal{T}(\mathbf{o})$, то неравенствами, определяющими множество $\mathcal{S}$, являются неравенства (1).

Некоторые из неравенств (10) могут совпадать, поскольку вполне может оказаться, что для различных k пары опорных плоскостей $\pm\pi_k$ совпадают. Можно считать, что неравенства (10) для $1 \leqslant k \leqslant m$, где $m \leqslant K$, составляют полное множество различных неравенств. Мы видели, что существует единственная опорная плоскость, проходящая через точку $\mathbf{c}_k$; поэтому поскольку плоскости $\pm\pi_l$ ($1 \leqslant l \leqslant m$, $l \neq k$) являются опорными плоскостями и отличны от π_k, они не могут проходить через точку $\mathbf{c}_k$. Отсюда следует, что точка $\mathbf{x} = \mathbf{c}_k$ удовлетворяет неравенствам

$$\Big|\sum_j f_{lj}x_j\Big| < \frac{1}{2} \quad (1 \leqslant l \leqslant m,\ l \neq k) \tag{11}$$

и уравнению

$$\Big|\sum_j f_{kj}x_j\Big| = \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что $m \leqslant 2^n - 1$. Как и при доказательстве теоремы IX гл. V, для этого достаточно показать, что для $1 \leqslant k < r \leqslant m$ точки $\frac{1}{2}(\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_r)$ не принадлежат решетке Λ. Но из доказанных выше утверждений следует, что точка $\frac{1}{2}(\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_r)$ удовлетворяет неравенствам $\Big|\sum_j f_{lj}\Big| < 1$ для $1 \leqslant l \leqslant m$, причем указанные точные неравенства справедливы также и для $l = k$, r ввиду того, что неравенство (11) справедливо при $\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{c}_r$, $\frac{1}{2}\mathbf{c}_k$. Таким образом, $\frac{1}{2}(\mathbf{c}_k - \mathbf{c}_r) \in \mathcal{S}$ и, стало быть, не может принадлежать решетке Λ, так как последняя, по предположению, является $\mathcal{S}$-допустимой.

Теорема V доказана.

2. В случае $n = 2$ оказывается возможным полностью охарактеризовать выпуклые симметричные множества $\mathcal{S}$, для которых $\Delta(\mathcal{S}) = \frac{1}{4}V(\mathcal{S})$.

Теорема VI. *Решетка Λ является допустимой для двумерного выпуклого открытого симметричного множества $\mathcal{S}$, удовлетворяющего условию*

$$V(\mathcal{S}) = 4d(\Lambda)$$

в следующих двух и только двух случаях:

(i) *$\mathcal{S}$ — параллелограмм, решетка Λ порождается средней точкой одной из его сторон и некоторой точкой, принадлежащей паре других сторон;*

(ii) *$\mathcal{S}$ — центрально-симметричный шестиугольник, решетка Λ порождается средними точками любой пары не противоположных сторон (при этом Λ содержит средние точки всех сторон).*

Доказательство. То, что $\mathcal{S}$ является параллелограммом или шестиугольником, следует из теоремы V, так как $2^2 - 1 = 3$. Решетки Λ являются критическими по теореме Минковского о выпуклом теле. Критические решетки параллелограммов и шестиугольников были уже определены в лемме 7 гл. III и лемме 13 гл. V соответственно.

Теорема VI доказана.

§ 3. Результаты Вороного

1. В § 1 мы уже видели, что если $g(\mathbf{x})$ — положительно определенная квадратичная форма и Λ — решетка, то множество точек x, удовлетворяющих условию

$$g(\mathbf{x}) < \inf_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda \\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}} g(\mathbf{x}+\mathbf{a}),$$

является выпуклым симметричным телом $\mathscr{S}$ объема $2^n d(\Lambda)$. Мы покажем, что в случае $n=2$ каждый симметричный выпуклый шестиугольник $\mathscr{H}$ и его единственная критическая решетка могут быть получены именно этим способом при помощи выбора подходящей квадратичной формы $g(\mathbf{x})$. Если же $\mathscr{S}$ является параллелограммом, то выбор формы $g(\mathbf{x})$ возможен при условии, что решетка Λ должна быть специальной критической решеткой, порожденной средними точками сторон.

Ясно, что эти результаты остаются инвариантными при однородных линейных преобразованиях, так что мы, не уменьшая общности, можем считать, что $\Lambda=\Lambda_0$ является решеткой, состоящей из точек с целыми координатами, и что форма

$$g(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2$$

является приведенной в том смысле, что

$$0 \leqslant -2h \leqslant a \leqslant b. \tag{1}$$

Если u_1, u_2 — целые числа, не равные одновременно нулю, то условие

$$g(x_1, x_2) < g(x_1-u_1, x_2-u_2) \tag{2}$$

можно записать в виде

$$2\{u_1(ax_1+hx_2)+u_2(hx_1+bx_2)\} < g(u_1, u_2).$$

Поскольку вместе с точкой (u_1, u_2) решетке принадлежит и точка $(-u_1, -u_2)$, то мы имеем бесконечно много условий вида

$$2|u_1X_1+u_2X_2| < g(u_1, u_2), \tag{3}$$

где

$$X_1 = ax_1+hx_2, \quad X_2 = hx_1+bx_2. \tag{4}$$

В частности,

$$\left.\begin{aligned} 2|X_1| &< a, \\ 2|X_2| &< b, \\ 2|X_1+X_2| &< a+2h+b=c, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

где

$$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant c \leqslant a+b. \tag{1'}$$

Множество $\mathscr{H}$, определяемое неравенствами (5), является шестиугольником, если $h\neq 0$; в противном же случае $\mathscr{H}$ вырождается в параллелограмм.

Площадь $V(\mathscr{H})$ множества $\mathscr{H}$ легко вычисляется на основании соотношений (4) и (5) и равна

$$V(\mathscr{H}) = 4 = 4d(\Lambda_0).$$

Но $\mathscr{S}$ является подмножеством множества $\mathscr{H}$, и $V(\mathscr{S})=4$ по теореме II. Так как оба множества являются открытыми, то отсюда следует, что $\mathscr{S}=\mathscr{H}$. Поэтому вся бесконечная система неравенств (3) является следствием неравенств (5) (что читатель может легко проверить и непосредственно).

Теперь докажем, что каждый невырожденный выпуклый симметричный шестиугольник $\mathscr{H}$ вместе с его критической решеткой может быть получен этим способом. Шестиугольник задается тремя неравенствами

$$|\mathbf{l}_j\mathbf{x}| < k_j \quad (j=1, 2, 3), \tag{6}$$

где

$$\mathbf{l}_j = (l_{1j}, l_{2j})$$

и

$$\mathbf{l}_j\mathbf{x} = l_{1j}x_1 + l_{2j}x_2$$

является скалярным произведением. Три двумерных вектора $\mathbf{l}_j$ линейно зависимы; умножив их на подходящие множители, мы можем без уменьшения общности предполагать, что

$$\mathbf{l}_1+\mathbf{l}_2+\mathbf{l}_3=\mathbf{o},$$

а изменяя в случае необходимости их индексацию, считать, что

$$k_1 \leqslant k_2 \leqslant k_3. \tag{7}$$

Положим $X_j=\mathbf{l}_j\mathbf{x}$ $(j=1, 2)$; тогда неравенства (6) запишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} |X_1| &< k_1, \\ |X_2| &< k_2, \\ |X_1+X_2| &< k_3. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Так как по предположению шестиугольник $\mathscr{H}$ является невырожденным, имеет место неравенство

$$k_3 < k_1+k_2.$$

Мы можем идентифицировать неравенства (8) и (5), полагая

$$2k_1=a, \quad 2k_2=b, \quad 2k_3=c=a+2h+b,$$

хотя, конечно, x_1, x_2 в формулах (4) не обязательно совпадают с x_1, x_2 в соотношениях (6). Пусть величины x_1', x_2' определяются величинами

X_1, X_2 по формулам

$$X_1 = ax_1' + hx_2', \quad X_2 = hx_1' + bx_2',$$

аналогичным формулам (4). Сравнивая с началом этого пункта, мы видим, что единственная критическая решетка множества $\mathscr{H}$ должна задаваться целочисленными значениями величин x_1', x_2'. Таким образом, не уменьшая общности, мы можем считать, что на самом деле система координат (x_1', x_2') была первоначальной системой координат (x_1, x_2), и тогда мы приходим к уже рассмотренной ситуации.

2. Здесь из результатов предыдущего пункта мы выведем так называемую лемму о шестиугольнике, принадлежащую Дирихле[1]). Эта лемма иллюстрирует связь между однородными и неоднородными задачами, которые более подробно будут рассматриваться в гл. XI.

Теорема VII. *Пусть*

$$g(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2hx_1x_2 + bx_2^2 \tag{1}$$

— положительно определенная квадратичная форма, приведенная в том смысле, что

$$0 \leqslant -2h \leqslant a \leqslant b. \tag{2}$$

Тогда для каждой вещественной точки $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})$ *существует точка* $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ *с целыми координатами, удовлетворяющая условию*

$$4(ab - h^2)\, g(\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}) \leqslant abc, \quad c = a + 2h + b. \tag{3}$$

Знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда

$$2(ab - h^2)(\mathbf{x}_0 + \mathbf{v}) = \pm \{b(a+h), -a(b+h)\}, \tag{4}$$

где точка $\mathbf{v}$ *имеет целые координаты.*

Доказательство. На основании результатов предыдущего пункта и теоремы II в замкнутом шестиугольнике

$$\mathscr{H}: \quad 2|X_1| \leqslant a, \quad 2|X_2| \leqslant b, \quad 2|X_1 + X_2| \leqslant c,$$

где

$$X_1 = ax_1 + hx_2, \quad X_2 = hx_1 + bx_2, \tag{5}$$

существует точка вида $\mathbf{x}_0 + \mathbf{u}$, где $\mathbf{u}$ — некоторая точка с целыми координатами. Но положительно определенная квадратичная форма $g(\mathbf{x})$ может достигать своего максимума в области $\overline{\mathscr{H}}$ только в ее

[1]) По поводу другого вывода леммы и ее частичного обобщения на n измерений см. Морделл [14].

вершинах[1]). Теперь легко проверить, что вершины имеют вид (4) и что значения формы $g(\mathbf{x})$ во всех вершинах равны величине, стоящей в правой части неравенства (3). Вычисления можно упростить, применяя тождество

$$g(X_2, -X_1) = (ab - h^2)\, g(\mathbf{x}),$$

где X_1, X_2 задаются равенствами (5).

Неравенство (3) превращается в равенство, если $\mathbf{x}_0$ является какой-либо из вершин множества $\overline{\mathscr{H}}$, так как для всех точек $\mathbf{x} \in \overline{\mathscr{H}}$

$$g(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{u} \in \Lambda_0} g(\mathbf{x} + \mathbf{u}).$$

Это последнее замечание показывает также, что достаточно вычислить значение $g(\mathbf{x})$ в любой заданной вершине, скажем $\mathbf{x}_1$, так как из свойств критической решетки следует, что все другие вершины имеют вид $\pm \mathbf{x}_1 + \mathbf{w}$, где $\mathbf{w}$ — точка с целыми координатами.

Теорема VII доказана.

3. Теорема VII позволяет дать новое доказательство того факта (см. п. 4 § 3 гл. II), что для определенной тернарной квадратичной формы $f(\mathbf{x})$ с определителем D существует точка $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{o}$ с целыми координатами, для которой

$$a = f(\mathbf{x}_0) \leqslant (2D)^{\frac{1}{3}}.$$

Не уменьшая общности, мы можем считать, что форма $f(\mathbf{x})$ является приведенной в смысле Минковского (ср. п. 1 § 2 гл. II). Для некоторых α, β, γ форму $f(\mathbf{x})$ можно записать в виде

$$f(\mathbf{x}) = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2 + 2hx_1x_2 + 2gx_1x_3 + 2fx_2x_3 =$$
$$= a(x_1 + \alpha x_3)^2 + 2h(x_1 + \alpha x_3)(x_2 + \beta x_3) + b(x_2 + \beta x_3)^2 + \gamma x_3^2. \tag{1}$$

Мы можем считать, что $h \leqslant 0$; тогда

$$0 \leqslant -2h \leqslant a \leqslant b, \tag{2}$$

и так как форма f является приведенной, то для всех целых u_1, u_2 имеет место неравенство

$$f(u_1, u_2, 1) \geqslant b. \tag{3}$$

Но по теореме VII можно выбрать u_1, u_2 так, чтобы выполнялось неравенство

$$f(u_1, u_2, 1) \leqslant \frac{ab(a + 2h + b)}{4(ab - h^2)} + \gamma. \tag{4}$$

[1]) Вероятно, простейший способ убедиться в этом следующий: надо произвести однородное линейное преобразование $\mathbf{y} = \tau\mathbf{x}$ так, чтобы $g(\mathbf{x}) = |\mathbf{y}|^2$; тогда утверждение очевидно.

Из соотношений (1), (3), (4) мы получаем, что

$$4D = 4(ab - h^2)\gamma \geqslant 4b(ab - h^2) - ab(a + 2h + b) =$$
$$= -b\left(2h + \frac{1}{2}a\right)^2 + 3ab^2 - \frac{3}{4}a^2b.$$

Кроме того, из неравенств (2) следует, что

$$\left|2h + \frac{1}{2}a\right| \leqslant \frac{1}{2}a;$$

еще раз применяя неравенства (2), мы получаем, что

$$4D \geqslant 3ab^2 - a^2b \geqslant 2ab^2 \geqslant 2a^3.$$

Это и есть требуемый результат. Используя наше знание случаев равенства в теореме VII, легко проверить, что равенство $2D = a^3$ может иметь место только для форм, эквивалентных кратным критической формы

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1.$$

§ 4. Подготовительные леммы

1. В § 5 и 6 нам понадобятся три леммы, каждая из которых имеет и самостоятельный интерес. § 4 посвящен доказательству этих лемм. Мы используем термин „многоугольник" как для обозначения двумерного множества, ограниченного конечным числом отрезков, так и для обозначения границы такого множества; из контекста каждый раз будет ясно, какое из значений имеется в виду. Мы будем говорить, что выпуклый многоугольник описан около выпуклого множества $\mathscr{K}$, если он содержит $\mathscr{K}$ и если каждая сторона многоугольника является опорной прямой[1]) множества $\mathscr{K}$. Первая лемма — аналог теоремы XI гл. V — была доказана Рейнхардтом [1] и независимо открыта Малером [10].

Лемма 1. *Пусть $\mathscr{K}$ — двумерное выпуклое симметричное открытое множество; тогда*

$$\Delta(\mathscr{K}) = \frac{1}{2}\inf V(\mathscr{H}), \tag{1}$$

где $\mathscr{H}$ пробегает все симметричные описанные шестиугольники и $V(\mathscr{H})$ — площадь области $\mathscr{H}$.

Доказательство. Пусть $\mathscr{H}$ — любой описанный шестиугольник и $\Lambda(\mathscr{H})$ — критическая решетка множества $\mathscr{H}$, так что по лемме 13 гл. V

$$d\{\Lambda(\mathscr{H})\} = \frac{1}{4}V(\mathscr{H}).$$

[1]) В двумерном случае вместо термина „опорная плоскость" мы используем термин „опорная прямая".

Но решетка $\Lambda(\mathscr{H})$, конечно, является допустимой для множества $\mathscr{K}$, и, стало быть, левая часть неравенства (1) не превосходит правой части.

В случае когда $\mathscr{K}$ является параллелограммом, лемма очевидна, так что мы можем считать, что $\mathscr{K}$ не параллелограмм. Пусть M — критическая решетка для множества $\mathscr{K}$. Тогда по теореме XI гл. V на границе множества $\mathscr{K}$ лежит ровно 6 точек $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$ решетки M, причем точки $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ образуют базис M и имеет место соотношение

$$\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{r} = \mathbf{o}.$$

Пусть $\mathscr{H}_0$ — шестиугольник, образованный опорными прямыми к множеству $\mathscr{K}$ в точках $\pm\mathbf{p}$, $\pm\mathbf{q}$, $\pm\mathbf{r}$, причем если опорные прямые неоднозначны, то за опорную прямую в точке $-\mathbf{p}$ берется прямая $-\pi$, где π — опорная прямая в точке $\mathbf{p}$ и т. д. Тогда $\mathscr{H}_0$ является симметричным шестиугольником, описанным около множества $\mathscr{K}$. По теореме XI гл. V решетка M является допустимой для множества $\mathscr{H}_0$, так что по лемме 13 гл. V

$$\Delta(\mathscr{K}) = d(\mathrm{M}) \geqslant \Delta(\mathscr{H}_0) = \frac{1}{4}V(\mathscr{H}_0).$$

Лемма 1 доказана.

2. Следующая лемма принадлежит Даукеру [1] и относится к площадям многоугольников, описанных около выпуклого множества $\mathscr{K}$, которое не обязательно является симметричным. Доказательство мы только наметим. Подробнее об этом см. Фейеш Тот [2].

Лемма 2. *Предположим, что существуют $(n+1)$-угольник $\mathscr{P}_{n+1}$ и $(n-1)$-угольник $\mathscr{P}_{n-1}$, описанные около выпуклого множества $\mathscr{K}$. Тогда для некоторого $m \leqslant n$ существует описанный m-угольник площади, не превышающей*

$$\frac{1}{2}\{V(\mathscr{P}_{n-1}) + V(\mathscr{P}_{n+1})\}.$$

Доказательство. Если $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ — три точки, лежащие на границе множества $\mathscr{K}$, то мы будем здесь писать, что

$$\mathbf{a}_1 \prec \mathbf{a}_2 \prec \mathbf{a}_3,$$

если точки $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ расположены именно в этом порядке при обходе границы множества $\mathscr{K}$ в направлении, скажем, против часовой стрелки.

Пусть сторонами $\mathscr{P}_{n-1}$ являются прямые $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$. По определению они являются опорными прямыми для множества $\mathscr{K}$. Пусть $\mathbf{a}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n-1)$ — точки на границе множества $\mathscr{K}$, опорными прямыми в которых являются соответственно прямые α_j. Если α_j является опорной прямой в нескольких точках, то в качестве $\mathbf{a}_j$ возьмем и зафиксируем одну из них. Не уменьшая общности, мы можем считать, что

$$\mathbf{a}_{n-1} \prec \mathbf{a}_1 \prec \mathbf{a}_2 \prec \ldots \prec \mathbf{a}_{n-1} \prec \mathbf{a}_1.$$

Пусть β_j и $\mathbf{b}_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$ — прямые и точки, аналогично определенные по отношению к многоугольнику $\mathscr{P}_{n+1}$.

Рассмотрим два случая. Предположим сначала, что три точки $\mathbf{b}_j$ лежат между двумя точками $\mathbf{a}_j$, скажем,

$$\mathbf{a}_1 \preceq \mathbf{b}_1 \prec \mathbf{b}_2 \prec \mathbf{b}_3 \prec \mathbf{a}_2,$$

где символ, стоящий между $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}_1$, означает возможность равенства $\mathbf{a}_1 = \mathbf{b}_1$, тогда как в противном случае $\mathbf{a}_1 \prec \mathbf{b}_1 \prec \mathbf{b}_2$. Пусть $\mathscr{P}'_n$ — многоугольник со сторонами $\alpha_1, \beta_2, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, а $\mathscr{P}''_n$ — многоугольник со сторонами $\beta_1, \beta_3, \ldots, \beta_{n+1}$. Тогда, как ясно из рис. 10,

$$V(\mathscr{P}_{n+1}) + V(\mathscr{P}_{n-1}) \geqslant V(\mathscr{P}'_n) + V(\mathscr{P}''_n). \qquad (1)$$

Действительно, разность между левой и правой частями неравенства (1) равна сумме площадей двух четырехугольников, стороны которых образованы прямыми $\alpha_1, \beta_3, \beta_1, \beta_2$ и $\alpha_1, \alpha_2, \beta_3, \beta_2$ соответственно. Из неравенства (1) следует, что

$$\min\{V(\mathscr{P}'_n),\ V(\mathscr{P}''_n)\} \leqslant \frac{1}{2}\{V(\mathscr{P}_{n-1}) + V(\mathscr{P}_{n+1})\},$$

что доказывает в этом случае утверждение леммы.

Многоугольники $\mathscr{P}'_n$, $\mathscr{P}''_n$ могут иметь менее чем n сторон, так как некоторые стороны многоугольника $\mathscr{P}_{n+1}$ могут совпадать со сторонами многоугольника $\mathscr{P}_{n-1}$. Однако эта возможность предусматривается формулировкой леммы. Мы не будем более повторять это замечание, которое будет применяться на более поздней стадии доказательства, а также при доказательстве леммы 3.

Если первый случай не имеет места, то поскольку точек $\mathbf{b}$ на две больше, чем точек $\mathbf{a}$, меняя, если необходимо, индексы, мы получаем, что для некоторого s

$$\mathbf{a}_1 \preceq \mathbf{b}_1 \prec \mathbf{b}_2 \prec \mathbf{a}_2 \preceq \mathbf{a}_{s-1} \preceq \mathbf{b}_s \prec \mathbf{b}_{s+1} \prec \mathbf{a}_s.$$

Пусть $\mathscr{P}'_n$, $\mathscr{P}''_n$ — многоугольники со сторонами

$$\alpha_1, \beta_2, \ldots, \beta_s, \alpha_s, \ldots, \alpha_{n-1}$$

и

$$\beta_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{s-1}, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_{n+1}$$

соответственно. Тогда снова

$$V(\mathscr{P}_{n+1}) + V(\mathscr{P}_{n-1}) \geqslant V(\mathscr{P}'_n) + V(\mathscr{P}''_n),$$

так как разность между левой и правой частями этого неравенства равна сумме площадей четырехугольников $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2$ и $\alpha_{s-1}\alpha_s\beta_s\beta_{s+1}$ (см. рис. 11).

Лемма 2 доказана.

Следствие 1. *Пусть $U(n)$ — точная нижняя граница площадей описанных m-угольников $(m \leqslant n)$; тогда*

$$U(n) \leqslant U(n-1) \qquad (2)$$

и

$$2U(n) \leqslant U(n-1) + U(n+1). \qquad (3)$$

Первое неравенство тривиально следует из определения, второе же тотчас следует из леммы 2.

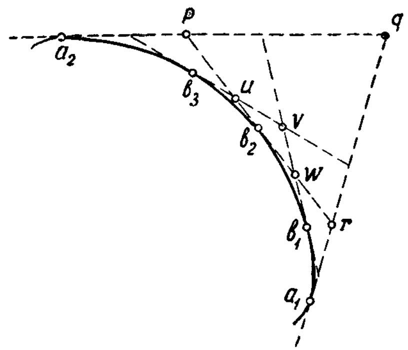

Рис. 10.
Из чертежа видно, что

$$V(\mathscr{P}_{n-1}) - V(\mathscr{P}'_n) = V(\mathbf{pqr}),$$
$$V(\mathscr{P}''_n) - V(\mathscr{P}_{n+1}) = V(\mathbf{uvw})$$

и

$$V(\mathbf{p\,r}) \geqslant V(\mathbf{uvw}).$$

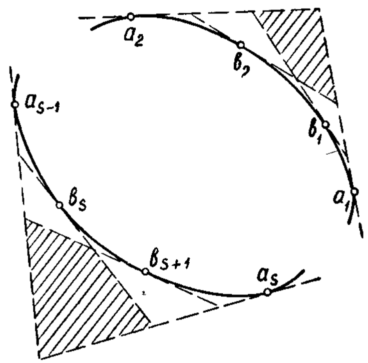

Рис. 11.
Сумма площадей заштрихованных областей равна

$$V(\mathscr{P}_{n+1}) + V(\mathscr{P}_{n-1}) - V(\mathscr{P}'_n) - V(\mathscr{P}''_n).$$

Удобно распространить определение функции $U(n)$ на нецелые значения аргумента. Пусть $t \geqslant 3$; тогда

$$U(t) = (1-l)\,U(n) + lU(n+1),$$

если

$$t = n + l, \qquad 0 \leqslant l \leqslant 1.$$

Следствие 2. *Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_R$ — числа, удовлетворяющие условиям*

$$\mu_r \geqslant 0 \quad (1 \leqslant r \leqslant R), \qquad \sum_r \mu_r = 1;$$

тогда при любых вещественных числах $t_r \geqslant 3$ $(r=1, \ldots, R)$

$$U\left(\sum_r \mu_r t_r\right) \leqslant \sum_r \mu_r U(t_r). \tag{4}$$

При $R=2$ неравенство вытекает из следствия 1. Для $R>2$ оно легко доказывается индукцией.

Применяя рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве леммы 2, докажем следующее предложение (см. Даукер [1]).

Лемма 3. *Пусть $\mathscr{K}$ — выпуклое симметричное множество, и пусть $\mathscr{P}_{2n}$ есть $2n$-угольник, описанный около множества $\mathscr{K}$. Тогда существует симметричный $2m$-угольник ($m \leqslant n$), также описанный около $\mathscr{K}$, площадь которого не превышает $V(\mathscr{P}_{2n})$.*

Доказательство. Пусть стороны

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n}$$

многоугольника $\mathscr{P}_{2n}$ являются опорными прямыми в граничных точках

$$\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{2n}$$

множества $\mathscr{K}$; при этом будем считать, что

$$\mathbf{a}_{2n} < \mathbf{a}_1 < \mathbf{a}_2 \ldots < \mathbf{a}_{2n} < \mathbf{a}_1.$$

Пусть

$$\beta_j = \overline{\alpha}_{j\pm n}, \qquad \mathbf{b}_j = \overline{\mathbf{a}}_{j\pm n}, \tag{5}$$

где черточка означает зеркальное отражение относительно начала координат. Тогда в силу симметричности $\mathscr{K}$ прямые β_j суть стороны описанного многоугольника $\overline{\mathscr{P}}_{2n}$, являющегося зеркальным образом многоугольника $\mathscr{P}_{2n}$ относительно начала координат. По свойству выпуклости и симметричности для каждого j

$$\overline{\mathbf{a}}_{j+1} < \mathbf{a}_j < \mathbf{a}_{j+1} < \overline{\mathbf{a}}_j.$$

Если многоугольник $\mathscr{P}_{2n}$ уже не является симметричным, мы можем без уменьшения общности считать, что $\mathbf{a}_n \neq \mathbf{b}_n$, и, кроме того, изменив, если необходимо, порядок ориентации индексов, предполагать, что

$$\overline{\mathbf{b}}_n \leqq \mathbf{a}_n < \mathbf{b}_n \leqq \overline{\mathbf{a}}_n.$$

Тогда на основании (5)

$$\overline{\mathbf{a}}_{2n} \leqq \mathbf{b}_{2n} \leqq \overline{\mathbf{a}}_{2n} \leqq \overline{\mathbf{b}}_{2n}.$$

Таким образом, найдется наибольшее j, удовлетворяющее условию $n \leqslant j < 2n$, для которого

$$\overline{\mathbf{b}}_j \leqq \mathbf{a}_j < \mathbf{b}_j \leqq \overline{\mathbf{a}}_j;$$

тогда для этого j выполняются, очевидно, условия

$$\mathbf{a}_j \leqq \mathbf{b}_j < \mathbf{b}_{j+1} \leqq \mathbf{a}_{j+1}.$$

Не исключено, что $\mathbf{b}_{j+2}$ также лежит между $\mathbf{a}_j$ и $\mathbf{a}_{j+1}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $j=n$; в силу (5)

$$\mathbf{a}_n \leqq \mathbf{b}_n < \mathbf{b}_{n+1} \leqq \mathbf{a}_{n+1}, \quad \mathbf{b}_{2n} \leqq \mathbf{a}_{2n} < \mathbf{a}_1 \leqq \mathbf{b}_1.$$

Пусть $\mathscr{P}'_{2n}$, $\mathscr{P}''_{2n}$ — многоугольники со сторонами

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_{n+1}, \ldots, \beta_{2n} \quad \text{и} \quad \beta_1, \ldots, \beta_n, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n},$$

так что на основании (5) многоугольники $\mathscr{P}'_{2n}$ и $\mathscr{P}''_{2n}$ симметричны. Так же как и при рассмотрении второго случая в доказательстве леммы 2, мы получаем, что

$$V(\mathscr{P}'_{2n}) + V(\mathscr{P}''_{2n}) \geqslant V(\mathscr{P}_{2n}) + V(\overline{\mathscr{P}}_{2n}) = 2V(\mathscr{P}_{2n}),$$

откуда следует, что по крайней мере один из многоугольников $\mathscr{P}'_{2n}$ или $\mathscr{P}''_{2n}$ удовлетворяет условиям леммы.

Лемма 3 доказана.

Следствие. *Если $\mathscr{K}$ — выпуклое симметричное множество, то*

$$\Delta(\mathscr{K}) = \frac{1}{4} U(6),$$

где $U(6)$ — точная нижняя граница площадей описанных m-угольников с $m \leqslant 6$.

Утверждение следует из леммы 1 и леммы 3.

3. Нам понадобится также формула Эйлера для выпуклого многоугольника, но в несколько необычной форме (ср. Фейеш Тот [2]). Пусть $\mathbf{v}_n$ $(1 \leqslant n \leqslant N)$ — точки на плоскости (вершины). Пусть λ_s $(1 \leqslant s \leqslant S)$ — кривые, соединяющие одну вершину с другой, или, возможно, возвращающиеся обратно в первоначальную вершину (ребра). Читатель может представлять себе λ_s как отрезки прямых или как ломаные, состоящие из конечного числа звеньев. Мы предполагаем, что на кривых λ_s не лежит никаких точек $\mathbf{v}_n$, кроме их концов, и что эти кривые попарно не пересекаются. Наконец, мы предполагаем, что любая вершина соединена с любой другой вершиной кривыми λ_s. Тогда вся плоскость рассекается путями λ_s на φ связных кусков (граней), один из которых содержит все точки, внешние по отношению к достаточно большому кругу $|\mathbf{x}| = R$. Тогда имеет место следующая формула Эйлера.

Лемма 4. *Если φ, N и S означают то же, что и выше, то*

$$\varphi + N = S + 2.$$

Доказательство этой формулы можно легко провести, используя индукцию по S.

§ 5. Теорема Фейеша Тота

1. В этом параграфе мы докажем результат, принадлежащий Фейешу Тоту [1] (см. также Фейеш Тот [2]). Фейеш Тот доказывает более общее утверждение, а также приводит интересные смежные результаты. Здесь мы изложим только то, что необходимо для изучения критических определителей цилиндров.

Теорема VIII. *Пусть $\mathscr{H}$ — выпуклый открытый многоугольник, имеющий не более чем 6 сторон. Пусть $\mathscr{K}$ — любое выпуклое открытое множество. Предположим, что множества*

$$\mathscr{K}_r = \mathscr{K} + \mathbf{x}_r \quad (1 \leqslant r \leqslant R)$$

дают укладку $\mathscr{K}$ в $\mathscr{H}$, т. е. что множества $\mathscr{K}_r$ являются подмножествами множества $\mathscr{H}$, причем никакие два из них не пересекаются. Тогда

$$RU(6) \leqslant V(\mathscr{H}),$$

где $U(6)$ — нижняя грань площадей m-угольников с $m \leqslant 6$, описанных около $\mathscr{K}$.

Обозначение $U(6)$ согласуется с соответствующим обозначением в следствии леммы 2. Доказательство самого Фейеша Тота очень компактно, и нам представляется целесообразным подробно его изложить.

2. Доказательство теоремы VIII. Для удобства мы разбиваем его на ряд предложений.

Предложение 1. *Пусть $\mathscr{H}$ — выпуклый открытый двумерный многоугольник, и пусть $\mathscr{K}_r$ $(1 \leqslant r \leqslant R)$ — открытые выпуклые множества, уложенные в $\mathscr{H}$. Тогда существуют такие выпуклые многоугольники $\mathscr{L}_r$ $(1 \leqslant r \leqslant R)$, что $\mathscr{L}_r$ содержит $\mathscr{K}_r$ и*

(i) *$\mathscr{L}_r$ уложены в $\mathscr{H}$;*

(ii) *если σ — сторона многоугольника $\mathscr{L}_r$, то либо*

(ii_1) *σ является частью границы $\mathscr{H}$, либо*

(ii_2) *существует внутренняя точка сегмента σ, принадлежащая границе некоторого многоугольника $\mathscr{L}_s$ $(s \neq r)$;*

(iii) *если σ — сторона многоугольника $\mathscr{H}$, то некоторый сегмент σ', содержащийся в σ и не сводящийся к одной точке, является частью границы некоторого многоугольника $\mathscr{L}_r$.*

Доказательство. Заметим, что множества $\mathscr{K}_r$ не предполагаются подобными друг другу. Мы дадим два доказательства предложения 1. Первое доказательство основано на трансфинитной индукции (лемма Цорна). Это доказательство содержит минимум геометрических аргументов, но не является конструктивным. Второе доказательство, которое мы только наметим, дает процесс построения многоугольников $\mathscr{L}_r$ за конечное число шагов.

Если $\{\mathscr{K}'\}$ и $\{\mathscr{K}''\}$ — две укладки в множестве $\mathscr{H}$, каждая из которых состоит из R открытых выпуклых множеств, то мы будем писать, что

$$\{\mathscr{K}'\} \prec \{\mathscr{K}''\},$$

если $\mathscr{K}'_r$ содержится в $\mathscr{K}''_r$ для $1 \leqslant r \leqslant R$, причем включения могут и не являться строгими. Мы обозначим множество всех таких укладок через Π и проверим следующие три утверждения относительно символа включения „$\prec$“.

(I) Если $\{\mathscr{K}'\} \prec \{\mathscr{K}''\}$ и $\{\mathscr{K}''\} \prec \{\mathscr{K}'\}$, то $\{\mathscr{K}'\} = \{\mathscr{K}''\}$ в том смысле, что для $1 \leqslant r \leqslant R$ множества $\mathscr{K}'_r$ и $\mathscr{K}''_r$ совпадают.

(II) Если $\{\mathscr{K}'\} \prec \{\mathscr{K}''\}$ и $\{\mathscr{K}''\} \prec \{\mathscr{K}'''\}$, то $\{\mathscr{K}'\} \prec \{\mathscr{K}'''\}$.

(III) Пусть $\tilde{\Pi}$ — любое подмножество множества укладок Π, обладающее тем свойством, что если $\{\mathscr{K}'\}$ и $\{\mathscr{K}''\}$ содержатся в $\tilde{\Pi}$, то либо $\{\mathscr{K}'\} \prec \{\mathscr{K}''\}$, либо $\{\mathscr{K}''\} \prec \{\mathscr{K}'\}$. Утверждается что существует такая укладка $\tilde{\mathscr{K}}$, содержащаяся в Π (не обязательно в $\tilde{\Pi}$), что $\{\mathscr{K}'\} \prec \{\tilde{\mathscr{K}}\}$ для всех $\{\mathscr{K}'\}$ из $\tilde{\Pi}$.

Свойства (I) и (II) очевидны. Чтобы доказать (III), мы возьмем за $\tilde{\mathscr{K}}_r$ объединение всех $\mathscr{K}_r$ для всех $\{\mathscr{K}\}$, содержащихся в $\tilde{\Pi}$. Докажем, что $\{\tilde{\mathscr{K}}\}$ является укладкой, состоящей из открытых выпуклых множеств. Для этого по очереди проверим необходимые свойства $\{\tilde{\mathscr{K}}\}$.

Во-первых, $\tilde{\mathscr{K}}_r$ — открытое множество. Действительно, если точка $\mathbf{z}_0$ принадлежит $\tilde{\mathscr{K}}_r$, то она принадлежит множеству $\mathscr{K}'_r$ для некоторой укладки $\{\mathscr{K}'\}$ из $\tilde{\Pi}$. Так как $\mathscr{K}'_r$ открыто, некоторая окрестность точки $\mathbf{z}_0$ принадлежит множеству $\mathscr{K}'_r$, а значит, и множеству $\tilde{\mathscr{K}}_r$, что и требовалось доказать.

Во-вторых, $\tilde{\mathscr{K}}_r$ — выпуклое множество. Действительно, пусть $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$ — любые две точки множества $\tilde{\mathscr{K}}_r$, причем, скажем $\mathbf{z}_1 \in \mathscr{K}'_r$, $\mathbf{z}_2 \in \mathscr{K}''_r$, где $\{\mathscr{K}'\}$ и $\{\mathscr{K}''\}$ — укладки из $\tilde{\Pi}$. Согласно предположениям о множестве $\tilde{\Pi}$, мы, поменяв в случае необходимости ролями точки $\mathbf{z}_1$ и $\mathbf{z}_2$, можем считать, что $\{\mathscr{K}'\} \prec \{\mathscr{K}''\}$; тогда $\mathbf{z}_1 \in \mathscr{K}'_r \subset \mathscr{K}''_r$. Так как $\mathbf{z}_2 \in \mathscr{K}''_r$, то весь сегмент

$$t\mathbf{z}_1 + (1-t)\mathbf{z}_2 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

принадлежит $\mathscr{K}''_r$, а стало быть, и $\tilde{\mathscr{K}}_r$, как и требовалось.

В третьих, множества $\tilde{\mathscr{K}}_r$ и $\tilde{\mathscr{K}}_s$ $(r \neq s)$ не пересекаются. Действительно, пусть $\mathbf{z}_0 \in \tilde{\mathscr{K}}_r$, $\mathbf{z}_0 \in \tilde{\mathscr{K}}_s$. Тогда $\mathbf{z}_0 \in \mathscr{K}'_r$, $\mathbf{z}_0 \in \mathscr{K}''_s$ для некоторых укладок $\{\mathscr{K}'\}$, $\{\mathscr{K}''\}$ из $\tilde{\Pi}$, где снова без уменьшения общности можно считать, что $\{\mathscr{K}'\} \prec \{\mathscr{K}''\}$. Тогда $\mathbf{z}_0 \in \mathscr{K}'_r \subset \mathscr{K}''_r$, так что $\mathbf{z}_0$ принадлежит пересечению множеств $\mathscr{K}''_r$ и $\mathscr{K}''_s$, а это противоречит предположению о том, что $\{\mathscr{K}''\}$ является укладкой. Тем самым свойства (I), (II) и (III) проверены.

Мы говорим, что укладка $\{\mathscr{K}^{\mu}\}$ является максимальной, если из соотношения

$$\{\mathscr{K}^{\mu}\} \prec \{\mathscr{K}'\}$$

следует, что $\{\mathscr{K}^{\mu}\} = \{\mathscr{K}'\}$. В силу условий (I), (II) и (III) по лемме Цорна для каждой упаковки $\{\mathscr{K}\}$ существует по меньшей мере одна такая максимальная упаковка $\{\mathscr{K}^{\mu}\}$, что

$$\{\mathscr{K}\} \prec \{\mathscr{K}^{\mu}\}.$$

Но легко видеть, что множества $\mathscr{K}^{\mu}_r$ в максимальной укладке $\{\mathscr{K}^{\mu}\}$ должны быть многоугольниками $\mathscr{L}_r$, которые удовлетворяют условиям (i), (ii) и (iii) предложения 1. Поскольку это будет ясно из конструктивного доказательства, которое мы приведем позднее, мы не будем останавливаться на детальном обосновании этого утверждения. Этим заканчивается первое доказательство предложения 1.

Наметим теперь второе (конструктивное) доказательство предложения 1. Основной процесс заключается в следующем. Если $\mathscr{K}$ — любое открытое выпуклое ограниченное множество и $\mathbf{p}$ — любая точка, не принадлежащая $\mathscr{K}$, то открытая выпуклая оболочка $\mathscr{K}$ и $\mathbf{p}$ является наименьшим выпуклым множеством, которое содержит $\mathscr{K}$ и граничной точкой которого является $\mathbf{p}$, иными словами, это множество точек вида

$$t\mathbf{p} + (1-t)\mathbf{q}, \quad \mathbf{q} \in \mathscr{K}, \quad 0 \leqslant t < 1.$$

Если точка $\mathbf{p}$ лежит на границе множества $\mathscr{K}$, то открытая выпуклая оболочка $\mathbf{p}$ и $\mathscr{K}$ совпадает с $\mathscr{K}$. В противном случае граница выпуклой оболочки состоит из двух опорных прямых к множеству $\mathscr{K}$, проходящих через $\mathbf{p}$, и части границы $\mathscr{K}$.

Если теперь $\mathscr{K}_1, \ldots, \mathscr{K}_R$ — множества, упоминаемые в формулировке предложения 1, то можно построить многоугольники $\mathscr{L}_r$, последовательно переходя к выпуклым оболочкам множеств $\mathscr{K}_r$ и подходящим образом выбранных точек. Пусть $\mathbf{a}$ — любая граничная точка множества $\mathscr{K}_1$ и α — опорная прямая в точке $\mathbf{a}$. Рассмотрим

точки $\mathbf{q}$, лежащие на прямой α в одном направлении, скажем вправо от $\mathbf{a}$ (см. рис. 12).

Если точка $\mathbf{q}_2$ лежит правее точки $\mathbf{q}_1$, то открытая выпуклая оболочка $\mathbf{q}_2$ и $\mathscr{K}_1$ содержит открытую выпуклую оболочку $\mathbf{q}_1$ и $\mathscr{K}_1$. Может оказаться, что для некоторой точки $\mathbf{q}$, лежащей справа от $\mathbf{a}$ на прямой α, открытая выпуклая оболочка $\mathscr{K}_1$ и $\mathbf{q}$ пересекается с некоторым другим множеством $\mathscr{K}_2$ первоначальной укладки. Так как множества $\mathscr{K}_r$ открыты, существует точка $\mathbf{p}$, наиболее удаленная вправо вдоль прямой α, причем открытая выпуклая оболочка $\mathbf{p}$ и $\mathscr{K}_1$ не содержит точек ни одного из множеств $\mathscr{K}_r$ $(r \neq 1)$. Может оказаться, что $\mathbf{p} = \mathbf{a}$. Затем мы перейдем к новой укладке $\{\mathscr{K}'\}$, заменяя множество $\mathscr{K}_1$ той частью открытой выпуклой оболочки $\mathscr{K}_1$ и $\mathbf{p}$, которая лежит в $\mathscr{H}$[1]).

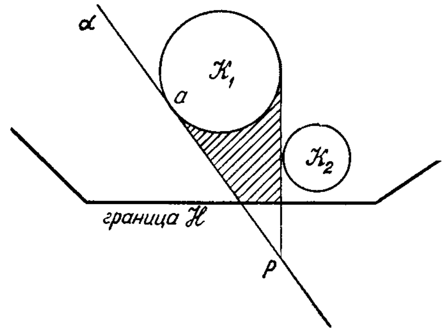

Рис. 12.

$\mathscr{K}'_1$ является объединением $\mathscr{K}_1$ и заштрихованной области.

Если открытая выпуклая оболочка $\mathbf{p}$ и $\mathscr{K}_1$ не пересекается ни с одним из множеств $\mathscr{K}_r$ $(r \neq 1)$ для всех точек $\mathbf{q}$, лежащих справа от $\mathbf{a}$, то возьмем за $\mathscr{K}'_1$ множество, состоящее из всех точек $\mathscr{H}$, которые принадлежат выпуклой оболочке $\mathscr{K}_1$ и любой точки $\mathbf{q}$, лежащей справа от $\mathbf{a}$ на прямой α. Аналогично мы можем рассматривать точки, лежащие слева от точки $\mathbf{a}$ на прямой α.

Этот процесс можно повторить по отношению к множествам укладки $\{\mathscr{K}'\}$. Укажем теперь, как после конечного числа таких шагов можно прийти к многоугольникам $\mathscr{L}_r$ со свойствами (i), (ii), (iii) предложения 1. Мы обозначим множества, получающиеся на j-м этапе, через $\{\mathscr{K}^j\}$, так что $\{\mathscr{K}^{j-1}\} \prec \{\mathscr{K}^j\}$.

Предположим сначала, что существует пара индексов r, s, для которых множества $\mathscr{K}^j_r$ и $\mathscr{K}^j_s$ имеют общую граничную точку $\mathbf{a}$. Тогда для построения $\mathscr{K}^{j+1}_r$, $\mathscr{K}^{j+1}_s$ из $\mathscr{K}^j_r$, $\mathscr{K}^j_s$ мы возьмем в качестве α общую опорную прямую (лемма 6 гл. IV) множеств $\mathscr{K}^j_r$, $\mathscr{K}^j_s$ в точке $\mathbf{a}$ и применим описанный выше процесс одновременно и к $\mathscr{K}^j_r$ и $\mathscr{K}^j_s$, и к обеим сторонам прямой α. Сделав это раз для пары индексов s, r на j-й стадии процесса, нам не при-

[1]) Напомним, что $\mathscr{H}$ — это множество, в котором уложены множества $\mathscr{K}_r$.

дется повторять указанную операцию по отношению к этой паре индексов на более поздних стадиях.

Если уже нет пар индексов r, s, для которых множества $\mathcal{K}_r^j$, $\mathcal{K}_s^j$ имеют общую граничную точку и которые еще не рассмотрены, то, быть может, существует множество $\mathcal{K}_r^j$, имеющее общую граничную точку **a** с множеством $\mathcal{H}$. В этом случае мы возьмем в качестве α сторону $\mathcal{H}$, на которой лежит точка **a** (обе стороны, если **a** является вершиной $\mathcal{H}$), и применим указанный выше процесс. Снова, поскольку указанная операция один раз произведена для множества $\mathcal{K}_r^j$ и некоторой стороны множества $\mathcal{H}$, нам нет необходимости повторять это опять для того же индекса r и той же стороны многоугольника $\mathcal{H}$.

Может оказаться, что ни один из первых двух шагов неприменим. Предположим, что одно из множеств $\mathcal{K}_r^j$ не является многоугольником. Тогда в качестве **a** возьмем любую точку на границе $\mathcal{K}_r^j$, которая не принадлежит никакому линейному сегменту, являющемуся частью границы множества $\mathcal{K}_r^j$, и не принадлежит границе никакого из множеств $\mathcal{K}_s^j$ $(s \neq r)$. Наконец, если все множества $\mathcal{K}_r^j$ являются многоугольниками и первые два шага неприменимы, то возьмем в качестве **a** любую вершину многоугольника $\mathcal{K}_r^j$, для которой по меньшей мере одна из двух сходящихся в ней сторон не является опорной прямой для некоторого множества $\mathcal{K}_s^j$ $(s \neq r)$.

Ясно, что описанный выше процесс содержит конечное число шагов. И очевидно, что получающиеся в окончательном результате множества $\mathcal{K}_r^j$ являются многоугольниками $\mathcal{L}_r$ со свойствами (i), (ii), (iii), как и требовалось.

Предложение 1 доказано.

3. Следующий этап заключается в применении формулы Эйлера (лемма 4) к конфигурации предложения 1.

Предложение 2. *Пусть многоугольник $\mathcal{L}_r$ со свойствами* (i), (ii), (iii) *предложения* 1 *имеет q_r сторон* $(1 \leqslant r \leqslant R)$; *тогда*

$$\sum q_r \leqslant 6R.$$

Доказательство. При применении формулы Эйлера в качестве граней будут фигурировать многоугольники $\mathcal{L}_r$ и многоугольник $\mathcal{L}_0$, являющийся множеством точек, лежащих на границе многоугольника $\mathcal{H}$ или вне его. Так как имеются точки плоскости, не принадлежащие ни одному из многоугольников $\mathcal{L}_r$ или их границам, то лемма 4 непосредственно неприменима. Множество всех таких точек, очевидно, открыто и является объединением конечного числа $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_L$ открытых связных множеств. Согласно условиям (ii) и (iii) предложения 1, замыкание любого из этих множеств, скажем множества $\mathcal{M}_l$, не может содержать полной стороны σ какого-либо из множеств $\mathcal{L}_r$. Применим лемму 4, считая „вершинами":

(α) множества $\mathcal{M}_l$ $(1 \leqslant l \leqslant L)$;

(β) точки, не принадлежащие границе ни одного из множеств $\mathcal{M}_l$, но принадлежащие границе по меньшей мере трех множеств $\mathcal{L}_r$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$;

(γ) вершины многоугольника $\mathcal{H}$, не являющиеся вершинами множеств $\mathcal{M}_l$.

„Ребрами" являются отрезки сторон многоугольников $\mathcal{L}_r$, соединяющие „вершины". Тогда каждая сторона $\mathcal{L}_r$ порождает по меньшей мере одно ребро (но возможно и большее число „ребер"). Пусть q'_r — количество „ребер", составляющих границу многоугольника $\mathcal{L}_r$, так что

$$q'_r \geqslant q_r. \tag{1}$$

Так как каждое „ребро" принадлежит ровно двум множествам $\mathcal{L}_r$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$, то общее число ребер равно

$$S = \frac{1}{2} \sum_{0 \leqslant r \leqslant R} q'_r. \tag{2}$$

Пусть многоугольник $\mathcal{H}$ имеет точно h сторон, так что

$$h \leqslant 6. \tag{3}$$

Каждая вершина типа (α) или (β) принадлежит по меньшей мере трем множествам $\mathcal{L}_r$ $(0 \leqslant r \leqslant R)$, и существует не более чем h вершин типа (γ). Вершины типа (γ) принадлежат границе множества $\mathcal{L}_0$ и по меньшей мере одному из множеств $\mathcal{L}_r (r \neq 0)$. Отсюда следует, что общее число „вершин" N удовлетворяет неравенству

$$3N \leqslant h + \sum_{0 \leqslant r \leqslant R} q'_r. \tag{4}$$

Наконец, число граней φ равно

$$\varphi = R + 1. \tag{5}$$

Из неравенств (1), (3), (4) и формулы Эйлера (лемма 4) мы получаем, что

$$\sum_{0 \leqslant r \leqslant R} q'_r \leqslant 6R - 6 + 2h.$$

Но на основании неравенств (1) $q'_0 \geqslant q_0 = h$, так что, используя неравенства (1), (3), мы получаем, что

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant R} q_r \leqslant \sum_{1 \leqslant r \leqslant R} q'_r \leqslant 6R.$$

Предложение 2 доказано.

4. Теперь уже нетрудно доказать саму теорему VIII. Пусть обозначения $U(t)$ и $\mathscr{L}_r$, q_r имеют тот же смысл, что и в следствиях 1, 2 леммы 2 и предложениях 1, 2. Очевидно, что

$$V(\mathscr{L}_r) \geqslant U(q_r) \quad (1 \leqslant r \leqslant R),$$

и так как множества $\mathscr{L}_r$ уложены в $\mathscr{H}$, то

$$V(\mathscr{H}) \geqslant \sum V(\mathscr{L}_r) \geqslant \sum U(q_r).$$

Отсюда на основании следствий 1, 2 леммы 2 и предложения 2 мы получаем, что

$$R^{-1}V(\mathscr{H}) \geqslant \sum_{1 \leqslant r \leqslant R} R^{-1}U(q_r) \geqslant U\Big\{R^{-1} \sum_{1 \leqslant r \leqslant R} q_r\Big\} \geqslant U(6).$$

Теорема VIII доказана.

§ 6. Цилиндры

Применим теорему VIII к вычислению критических определителей цилиндров, определенных в п. 5 § 1.

Теорема IX. *Пусть $\mathscr{K}$ — двумерное выпуклое симметричное тело; $\mathscr{C}$ — трехмерное множество точек (x_1, x_2, x_3), задаваемых условиями*

$$\mathscr{C}:\ (x_1, x_2, x_3),\ (x_1, x_2) \in \mathscr{K},\ |x_3| < 1;$$

тогда

$$\Delta(\mathscr{C}) = \Delta(\mathscr{K}).$$

Доказательство. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $\mathscr{K}$, а значит, и $\mathscr{C}$ являются открытыми множествами, так как присутствие или отсутствие граничных точек не влияет на критические определители $\Delta(\mathscr{C})$, $\Delta(\mathscr{K})$. Как уже было показано,

$$\Delta(\mathscr{C}) \leqslant \Delta(\mathscr{K})$$

независимо от того, является ли множество $\mathscr{K}$ выпуклым. Поэтому остается лишь показать, что для любой $\mathscr{C}$-допустимой решетки Λ имеет место неравенство

$$d(\Lambda) \geqslant \Delta(\mathscr{K}). \tag{1}$$

Для того чтобы доказать неравенство (1), мы двумя способами вычислим число $N = N(X)$ точек решетки Λ, лежащих в большом кубе

$$|x_j| < X \quad (1 \leqslant j \leqslant 3).$$

Прежде всего, при $X \to \infty$ имеет место следующая асимптотическая формула:

$$d(\Lambda)N = 2^3X^3 + O(X^2). \tag{2}$$

С другой стороны, так как решетка Λ является $\mathscr{C}$-допустимой, то по теореме III она укладывает множество $\frac{1}{2}\mathscr{C}$. Обозначим через $\mathbf{C}$ множество, состоящее из N цилиндров вида

$$\frac{1}{2}\mathscr{C} + \mathbf{a}, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{a} \in \Lambda, \quad \max_j |a_j| < X. \tag{4}$$

Если множество $\frac{1}{2}\mathscr{C}$ содержится в кубе $|\mathbf{x}| < R$, то все указанные цилиндры содержатся в кубе

$$\max_j |x_j| < X + R. \tag{5}$$

Мы рассмотрим укладку цилиндров $\mathbf{C}$ в множестве (5).

Пусть $|y| < X + R$; обозначим через $L(y)$ количество цилиндров из множества $\mathbf{C}$, которые пересекаются с плоскостью $x_3 = y$, т. е. количество точек $\mathbf{a} \in \Lambda$, удовлетворяющих условию (4), для которых

$$|a_3 - y| < \frac{1}{2}.$$

Эти $L(y)$ цилиндров определяют укладку квадрата

$$|x_j| < X + R \quad (j = 1, 2)$$

такими же $L(y)$ множествами, как и множества $\frac{1}{2}\mathscr{K}$, и одинаково с ними расположенными. Отсюда по теореме VIII следует, что

$$L(y)U'(6) < 4(X+R)^2, \tag{6}$$

где $U'(6)$ — точная нижняя граница площадей m-угольников, $m \leqslant 6$, описанных около множества $\frac{1}{2}\mathscr{K}$. Но по определению функции $L(y)$

$$\int_{-X-R}^{X+R} L(y)\,dy = N,$$

откуда на основании неравенства (6) следует, что

$$U'(6)N < 8(X+R)^3. \tag{7}$$

Так как величины R и $U'(6)$ не зависят от X, то сравнение выражений (2) и (7) при $X \to \infty$ приводит к неравенству

$$d(\Lambda) \geqslant U'(6).$$

Но по следствию леммы 3

$$U'(6)=4\Delta\left(\frac{1}{2}\mathscr{K}\right)=\Delta(\mathscr{K}),$$

откуда вытекает неравенство (1).

Теорема IX доказана.

§ 7. Укладки шаров

1. Единичный шар

$$\mathscr{D}_n:\qquad |\mathbf{x}|<1$$

в n-мерном пространстве имеет объем

$$V_n=V(\mathscr{D}_n)=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)}, \tag{1}$$

где $\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)$ — обычная гамма-функция. В этом параграфе мы оценим критический определитель

$$\Gamma_n=\Delta(\mathscr{D}_n) \tag{2}$$

и в первую очередь изучим поведение Γ_n при больших n.

В литературе обычно рассматривается величина γ_n, определяемая как точная нижняя граница чисел γ'_n, для которых каждая положительно определенная квадратичная форма $\sum f_{ij}x_ix_j$ n переменных целочисленно представляет положительное число, не превосходящее $\gamma'_n|\det(f_{ij})|^{1/n}$ („постоянная Эрмита"). Из рассуждений § 3 гл. I мы получаем, что

$$\gamma_n^n=\Gamma_n^{-2}. \tag{3}$$

Нам нужно выяснить асимптотическое поведение объема V_n. По формуле Стирлинга[1]) мы получаем

$$\lim_{n\to\infty} nV_n^{2/n}=2\pi e, \tag{4}$$

где

$$e=\sum_{r=1}^{\infty}(r!)^{-1}.$$

Из теоремы Минковского о выпуклом теле (теорема II гл. III) и теоремы Минковского — Главки (следствие теоремы II гл. VI) мы выводим

$$(2\zeta(n))^{-1}V_n\geqslant\Gamma_n\geqslant 2^{-n}V_n; \tag{5}$$

[1]) См. любой курс анализа, например Уиттекер и Ватсон [1] (или Фихтенгольц Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, М., 1959, гл. XI. — *Ред.*).

здесь $\zeta(n)$ — дзета-функция Римана. Из этих неравенств, учитывая (3) и (4), выводим

$$\limsup_{n\to\infty} n\gamma_n^{-1}\leqslant 2\pi e \tag{6}$$

и

$$\liminf_{n\to\infty} n\gamma_n^{-1}\geqslant\frac{1}{2}\pi e. \tag{7}$$

Конечно, множитель $2\zeta(n)$ в неравенстве (5) не оказывает влияния на неравенство (6) и вполне может быть заменен единицей. Ни одно из усилений теоремы Минковского — Главки, рассмотренных в главе VI, не оказывает влияния на правую часть неравенства (6). Блихфельдт [2] усилил неравенство (7), показав, что

$$\liminf n\gamma_n^{-1}\geqslant\pi e. \tag{8}$$

Это неравенство остается лучшим до настоящего времени[1]). Доказательство основано исключительно на соображениях теории общих укладок шаров без использования свойства решетчатости укладки (а только такие укладки имеют отношение к постоянной Эрмита γ_n). Результаты Блихфельда были улучшены Ранкиным [1] и позднее на основании более прозрачных соображений — Роджерсом [22]. Их методы позволяют значительно улучшить оценки для малых n, но не приводят к улучшению правой части в неравенстве (8).

Методы Блихфельдта могут быть применены к множествам, отличным от сфер (см. по этому поводу Ранкин [2], а также Ранкин [4] и цитированную там литературу).

Произвольные (не обязательно решетчатые) укладки трехмерных шаров детально рассмотрел Фейеш Тот [2] (см. также Мелмор [1]).

Мне значительно помогли мои воспоминания о семинарах проф. Ранкина по методу Блихфельдта (Кембридж, конец 1940 г.).

2. Прежде всего отметим, что теорема Блихфельдта (теорема I гл. III) может быть обобщена на произвольные укладки, причем тогда она принимает совсем простой вид. Пусть $\mathscr{S}$ — любое ограниченное n-мерное множество; пусть множества

$$\mathscr{S}_r=\mathscr{S}+\mathbf{x}_r\qquad(1\leqslant r\leqslant R) \tag{1}$$

уложены в некотором множестве $\mathscr{T}$. Тогда, очевидно,

$$V(\mathscr{T})\geqslant RV(\mathscr{S}). \tag{2}$$

Предположим теперь, что существует такая функция $\varphi(\mathbf{x})$ точки $\mathbf{x}$, что

[1]) Усиление неравенства (8), анонсированное Шаботи [3], содержит ошибку (см. реферат Ранкина в *Math. Reviews*, 14, 541).

(i) $\varphi(\mathbf{x}) = 0$, если $|\mathbf{x}| \geqslant \rho$ для некоторого ρ;

(ii) $\psi(\mathbf{x}) = \sum_r \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \leqslant 1$ для всех $\mathbf{x}$,

если (1) является укладкой множества $\mathcal{S}$.

Пусть $\mathcal{T}(\rho)$ есть ρ-окрестность множества $\mathcal{T}$, т. е. множество точек, расположенных на расстоянии, не большем ρ, от множества $\mathcal{T}$ (включая и точки самого множества $\mathcal{T}$). Тогда, с одной стороны, на основании (ii)

$$\int_{\mathcal{T}(\rho)} \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \leqslant V(\mathcal{T}(\rho)) \qquad (d\mathbf{x} = dx_1 \ldots dx_n), \tag{3}$$

с другой стороны, на основании (i)

$$\int_{\mathcal{T}(\rho)} \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \sum_r \int \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r)\, d\mathbf{x} = R \int \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = RV(\varphi), \tag{4}$$

так как все точки, для которых $\varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \neq 0$, принадлежат $\mathcal{T}(\rho)$. Сравнивая (3) и (4), мы получаем неравенство

$$R \leqslant V\{\mathcal{T}(\rho)\}/V(\varphi). \tag{5}$$

Конечно, характеристическая функция множества $\mathcal{S}$, которая равна 1 на $\mathcal{S}$ и нулю вне $\mathcal{S}$, обладает свойствами (i) и (ii). Если в качестве функции φ использовать характеристическую функцию, то получающееся неравенство (5) несколько слабее, чем неравенство (2), так как мы заменяем $V(\mathcal{T})$ на $V\{\mathcal{T}(\rho)\}$, хотя, конечно, проводя более подробное рассмотрение, этого можно избежать. Блихфельдт заметил, что иногда существуют функции φ, которые приводят к лучшим оценкам, чем характеристическая функция.

Например, если $\mathcal{S} = \mathcal{D}_n$ является шаром единичного радиуса, то необходимым и достаточным условием для того, чтобы два открытых шара радиуса 1 с центрами в точках $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ не пересекались, является условие $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \geqslant 2$. Следующую лемму эвристически можно рассматривать как отражение того факта, что в укладке шаров некоторые точки могут принадлежать границе двух шаров, но нет точек, которые лежали бы достаточно близко к границам более чем двух шаров одновременно.

Лемма 5. *Обозначим*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \max\left\{0,\ 1 - \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2\right\}. \tag{6}$$

Пусть $\mathbf{x}_r$ $(1 \leqslant r \leqslant R)$ — любой набор точек, удовлетворяющих условиям

$$|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_s| \geqslant 2 \qquad (1 \leqslant r < s \leqslant R). \tag{7}$$

Тогда для всех точек $\mathbf{x}$

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant R} \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) \leqslant 1. \tag{8}$$

Доказательство. Не уменьшая общности, мы можем считать, что для $1 \leqslant r \leqslant R$

$$0 < \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r) = 1 - \frac{1}{2}|\mathbf{x} - \mathbf{x}_r|^2.$$

Если $y_1, \ldots, y_R$ и y — любые вещественные числа, то

$$R \sum_r (y - y_r)^2 = \sum_{r<s} (y_r - y_s)^2 + (Ry - \sum_r y_r)^2 \geqslant \sum_{r<s} (y_r - y_s)^2.$$

Применяя это неравенство покоординатно и учитывая, что $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$, мы получаем на основании неравенства (7), что

$$R \sum_{1 \leqslant r \leqslant R} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_r|^2 \geqslant \sum_{r<s} |\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_s|^2 \geqslant 2R(R-1).$$

Но это и означает справедливость неравенства (8).

Лемма 5 доказана.

Отсюда легко вытекает следующее предложение.

Теорема X. *Пусть $\mathbf{x}_r$ $(1 \leqslant r \leqslant R)$ — точки, лежащие в n-мерном шаре*

$$|\mathbf{x}| < X, \tag{9}$$

и пусть

$$|\mathbf{x}_r - \mathbf{x}_s| \geqslant 2 \qquad (1 \leqslant r < s \leqslant R);$$

тогда

$$R \leqslant 2^{-\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{n}{2}\right) \left(X + 2^{\frac{1}{2}}\right)^n. \tag{10}$$

Доказательство. Взяв в качестве $\varphi(\mathbf{x})$ функцию, введенную в лемме 5, мы получим

$$V(\varphi) = \int \varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{|\mathbf{x}|^2 < 2} \left(1 - \frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2\right) d\mathbf{x} = 2^{\frac{n}{2}} \left(1 + \frac{n}{2}\right)^{-1} V_n,$$

где V_n — объем единичного шара. Утверждение теоремы следует теперь из неравенства (5), поскольку $\mathcal{T}(\rho)$ является в нашем случае шаром

$$|\mathbf{x}| < X + 2^{\frac{1}{2}},$$

объем которого равен $\left(X + 2^{\frac{1}{2}}\right)^n V_n$.

Теорема X доказана.

Следствие 1. *Критический определитель Γ_n и объем V_n единичного шара $|\mathbf{x}| < 1$ удовлетворяют соотношению*

$$\Gamma_n \geqslant 2^{-\frac{n}{2}}\left(1+\frac{n}{2}\right)^{-1} V_n.$$

Доказательство. Если Λ — допустимая решетка для шара $|\mathbf{x}| < 1$, то точки $\mathbf{x}_r$ решетки 2Λ удовлетворяют условиям теоремы. Число точек решетки 2Λ в множестве

$$\mathcal{T}: \quad |\mathbf{x}| < X$$

равно

$$\{d(2\Lambda)\}^{-1} V(\mathcal{T}) + O(X^{n-1}) = 2^{-n}\{d(\Lambda)\}^{-1} X^n V_n + O(X^{n-1}).$$

Применяя теперь теорему X и устремляя X к бесконечности, мы получаем требуемое неравенство.

Следствие доказано.

Следствие 2. *Выполняется неравенство*

$$\liminf n\gamma_n^{-1} \geqslant \pi e,$$

где $\gamma_n^n = \Gamma_n^{-2}$.

Это утверждение вытекает из следствия 1 и соотношения (4) п.1.

§ 8. Произведение n линейных форм

1. Пусть $\mathcal{N}_n$ означает n-мерное множество

$$\mathcal{N}_n: \quad |x_1 \ldots x_n| < 1,$$

и пусть

$$\Delta(\mathcal{N}_n) = \nu_n^n.$$

Множество $\mathcal{N}_n$ играет важную роль в алгебраической теории чисел (см. гл. X); однако точные значения величины ν_n известны только для $n=2$ и $n=3$:

$$\nu_2^2 = 5^{\frac{1}{2}}, \qquad \nu_3^3 = 7$$

(см. теорему IV гл. II и теорему V гл. X соответственно). В этом параграфе, как и в предыдущем, мы изучаем поведение величины ν_n для больших n. По поводу известных результатов для случаев $n=4$ и $n=5$ см. п. 4 § 6 гл. II.

В п.3 § 5 гл. III мы уже получили неравенство Минковского:

$$\Delta(\mathcal{N}_n) \geqslant \frac{n^n}{n!},$$

которое после применения формулы Стирлинга приводит к оценке

$$\liminf_{n\to\infty} \nu_n \geqslant e = 2{,}71828\ldots,$$

Блихфельдт предложил изящное доказательство более сильного неравенства

$$\liminf_{n\to\infty} \nu_n \geqslant (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{4}} = 5{,}30653\ldots, \tag{1}$$

которое мы и докажем в этом параграфе.

В настоящее время известны более сильные оценки, чем оценка (1). Роджерс [6] доказал, что

$$\liminf_{n\to\infty} \nu_n \geqslant 4\pi^{-1} e^{\frac{3}{2}} = 5{,}70626\ldots.$$

Его запутанное и утомительное доказательство можно рассматривать как разработку доказательства Блихфельдта.

Поскольку множество $\mathcal{N}_n$ имеет бесконечный объем, то теорема Минковского — Главки не позволяет оценить $\Delta(\mathcal{N}_n)$ сверху. Работа Шольца [1] о дискриминантах полей алгебраических чисел дает некоторые основания предположить, что $\limsup_{n\to\infty} \nu_n = \infty$.

В п. 2 и 3 этого параграфа мы докажем две леммы, а затем в п. 4 изложим доказательство Блихфельдта неравенства (1).

2. Следующая лемма Шура [1] используется также и в теории „трансфинитного диаметра“ в анализе.

Лемма 6. *Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — вещественные числа; тогда*

$$\prod_{i<j} (\xi_i - \xi_j)^2 \leqslant \vartheta_m \left(\sum_i \xi_i^2\right)^{m(m-1)/2}, \tag{1}$$

где

$$\vartheta_m = \{m(m-1)\}^{-m(m-1)/2} 1^2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot m^m. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть непрерывная функция $\prod_{i<j}(\xi_i-\xi_j)^2$ от m переменных ξ_i достигает своего максимума ϑ на сфере $\sum \xi_i^2 = 1$ в точке $\xi_i = \eta_i$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$. Тогда в силу однородности

$$\left(\sum_i \xi_i^2\right)^{-m(m-1)/2} \prod_{i<j} (\xi_i - \xi_j)^2 \leqslant \vartheta \tag{3}$$

для всех ξ_i, причем для $(\xi_i) = (\eta_i)$ имеет место равенство. Логарифмическая производная от левой части неравенства (3) по каждой неизвестной обращается в нуль в точке максимума $(\xi_i) = (\eta_i)$, и так как $\sum \eta_i^2 = 1$, то мы получаем

$$\sum_{j \neq i} \frac{1}{\eta_i - \eta_j} = \frac{m(m-1)\eta_i}{2} \quad (1 \leqslant i \leqslant m). \tag{4}$$

Пусть

$$f(\eta) = \prod_i (\eta - \eta_i) \tag{5}$$

— многочлен от переменной η. Тогда соотношения (4) записываются в следующей форме:

$$\frac{f''(\eta_i)}{2f'(\eta_i)} = \frac{m(m-1)\eta_i}{2}. \tag{6}$$

Степень многочлена

$$h(\eta) = f''(\eta) - m(m-1)\eta f'(\eta) + m^2(m-1)f(\eta)$$

не превосходит $m-1$, так как коэффициент при η^m равен нулю. Из (5) и (6) следует, что $h(\eta_i)=0$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, а потому многочлен $h(\eta)$ равен нулю тождественно:

$$f''(\eta) - m(m-1)\eta f'(\eta) + m^2(m-1)f(\eta) = 0. \tag{7}$$

Функция $f(\eta)$ при заданных $f(0)$ и $f'(0)$ однозначно определяется дифференциальным уравнением (7). Отсюда следует, что симметрические функции корней $\sum \eta_j^2$ и $\prod (\eta_i - \eta_j)^2$ выражаются через $f(0)$ и $f'(0)$. Так как $\sum \eta_j^2 = 1$ и коэффициент при η^m в $f(\eta)$ равен 1, то эти условия полностью определяют функцию $f(\eta)$, а значит, и величину

$$\prod (\eta_i - \eta_j)^2 = \vartheta. \tag{8}$$

Однако проще использовать менее прямой подход, который мы теперь и опишем.

Напомним, что результат двух многочленов, например

$$\varphi(\eta) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant I} (\eta - \alpha_i), \quad \psi(\eta) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant J} (\eta - \beta_j),$$

с единичными старшими коэффициентами определяется следующим образом:

$$R(\varphi, \psi) = \prod_{i, j} (\alpha_i - \beta_j) = \tag{9_1}$$

$$= \prod_i \psi(\alpha_i) = \tag{9_2}$$

$$= (-1)^{IJ} \prod_j \varphi(\beta_j) = \tag{9_3}$$

$$= (-1)^{IJ} R(\psi, \varphi). \tag{9_4}$$

Если

$$\omega(\eta) = \prod_{1 \leqslant k \leqslant K} (\eta - \gamma_k)$$

— третий многочлен с единичным старшим коэффициентом и если равенство

$$\omega(\eta) = \lambda\psi(\eta) + \chi(\eta)\varphi(\eta)$$

имеет место тождественно для некоторого числа λ и многочлена $\chi(\eta)$, то на основании (9_2)

$$R(\varphi, \omega) = \lambda^I R(\varphi, \psi). \tag{10}$$

В частности, если многочлен $f(\eta)$ задается равенством (5), мы получаем, что

$$\vartheta = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (\eta_i - \eta_j)^2 = (-1)^{\frac{1}{2} m(m-1)} \prod_{1 \leqslant i \leqslant m} f'(\eta_i) =$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2} m(m-1)} m^m R(f, f_1), \tag{11}$$

где многочлен

$$f_1(\eta) = m^{-1} f'(\eta)$$

имеет единичный старший коэффициент.

Более общо, положим

$$f_k(\eta) = \frac{(m-k)!}{m!} f^{(k)}(\eta),$$

так что старший коэффициент многочлена $f_k(\eta)$ равен 1. Тогда, дифференцируя равенство (7) k раз, мы получаем, что

$$(m-k-1) f_{k+2}(\eta) - m(m-1)\eta f_{k+1}(\eta) + m(m-1) f_k(\eta) = 0. \tag{12}$$

Отсюда, используя соотношения (9_4) и (10), получаем

$$R(f_k, f_{k+1}) = R(f_{k+1}, f_k) = \left\{ \frac{-(m-k-1)}{m(m-1)} \right\}^{m-k-1} R(f_{k+1}, f_{k+2}). \tag{13}$$

Однако $f_m(\eta) = 1$ и $f_{m-1}(\eta) = \eta + \gamma$, где γ — некоторое число (фактически $\gamma = 0$); таким образом, на основании (9_2)

$$R(f_{m-1}, f_m) = 1. \tag{14}$$

Искомое выражение (2) для ϑ следует теперь из соотношений (11), (13) и (14).

Лемма 6 доказана.

3. Нам потребуется также оценка постоянной ϑ_m из последней леммы.

Лемма 7. *Если*

$$G_m = 1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot m^m,$$

то

$$\limsup_{m \to \infty} \left\{ m^{-2} \log G_m - \frac{1}{2} \log m \right\} \leqslant -\frac{1}{4}.$$

Доказательство. Обозначим

$$g(x) = x \log x \quad (x > 0);$$

тогда функция

$$g'(x) = \log x + 1$$

является возрастающей, поэтому для любого t

$$g(x+t) + g(x-t) \geqslant 2g(x). \tag{1}$$

Действительно, если $t > 0$, то

$$g(x+t) - g(x) = t\,g'(\xi_1),$$
$$g(x) - g(x-t) = tg'(\xi_2),$$

где $\xi_2 < x < \xi_1$, так что $g'(\xi_2) < g'(\xi_1)$.

В частности, для любого целого l

$$\int\limits_{l-\frac{1}{2}}^{l+\frac{1}{2}} g(x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \{g(l+t) + g(l-t)\}\,dt \geqslant g(l). \tag{2}$$

Таким образом,

$$\log G_m = \sum_{2 \leqslant l \leqslant m} g(l) \leqslant \int\limits_{\frac{3}{2}}^{m+\frac{1}{2}} g(x)\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 \log\left(m+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4}\left(m+\frac{1}{2}\right)^2 + \gamma,$$

где постоянная γ не зависит от m. Искомая оценка тотчас следует из последнего соотношения.

Лемма 7 доказана.

Следствие. *Если* $\vartheta_m = \{m(m-1)\}^{-m(m-1)/2} G_m$ — *постоянная, определенная в лемме* 6, *то*

$$\limsup_{m \to \infty} \left\{ m^{-2} \log \vartheta_m + \frac{1}{2} \log m \right\} \leqslant -\frac{1}{4}.$$

Утверждение немедленно следует из леммы 7. Нетрудно показать, что lim sup можно заменить на lim, но нам это не понадобится.

4. Мы можем теперь доказать уже упомянутую в п. 1 теорему Блихфельдта о произведении линейных форм.

Теорема XI. *Пусть* ν_n^n — *критический определитель множества*

$$\mathscr{N}:\ |x_1 \ldots x_n| < 1;$$

тогда

$$\liminf \nu_n \geqslant (2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{4}}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть Λ — решетка, допустимая для множества $\mathscr{N}$, и пусть m — целое число, которое будет уточнено позднее.

Рассмотрим шар

$$\mathscr{D}:\ |\mathbf{x}| < \rho,$$

где ρ выбрано так, что

$$V(\mathscr{D}) = md(\Lambda),$$

т. е.

$$\rho^n V_n = md(\Lambda), \tag{2}$$

где V_n — объем шара $|\mathbf{x}| < 1$.

По теореме Блихфельдта (теорема I гл. III), существуют m точек $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ в $\mathscr{D}$, все разности которых $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ принадлежат решетке Λ. Положим

$$\mathbf{x}_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni}) \quad (1 \leqslant i \leqslant m)$$

и

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} x_{ki}^2 \quad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

тогда

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k = \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} |\mathbf{x}_i|^2 \leqslant m\rho^2,$$

откуда, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем, что

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} S_k \leqslant \left(\frac{m}{n}\rho^2\right)^n. \tag{3}$$

Положим теперь

$$P_k = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (x_{ki} - x_{kj})^2;$$

тогда, с одной стороны, по лемме 6

$$P_k \leqslant \vartheta_m S_k^{m(m-1)/2}, \tag{4}$$

где ϑ_m — постоянная, определенная в этой лемме. С другой стороны,

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} P_k = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} f^2(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j),$$

где

$$f(\mathbf{x}) = x_1 \ldots x_n.$$

Точки $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$ принадлежат решетке Λ, которая является $\mathscr{N}$-допустимой, а потому

$$|f(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)| \geqslant 1 \quad (i \neq j).$$

Отсюда следует, что

$$\prod_{1 \leqslant k \leqslant n} P_k \geqslant 1. \tag{5}$$

Исключая P_k и S_k из неравенств (3), (4) и (5), мы приходим к неравенству

$$1 \leqslant \vartheta_m^n \left(\frac{m}{n}\rho^2\right)^{nm(m-1)/2}. \tag{6}$$

Отсюда, исключая ρ из неравенств (2) и (6), мы получаем, что

$$\{d(\Lambda)\}^{1/n} \geqslant \chi_1\chi_2\chi_3, \tag{7}$$

где

$$\chi_1 = m^{-\frac{1}{2}}\vartheta_m^{-1/m(m-1)},$$

$$\chi_2 = n^{\frac{1}{2}}V_n^{1/n}$$

и

$$\chi_3 = m^{-1/n}.$$

Далее, χ_1 не зависит от n и по следствию леммы 7

$$\liminf_{m\to\infty} \chi_1 \geqslant e^{-\frac{1}{4}}, \tag{8}$$

а χ_2 не зависит от m и на основании соотношения (4) п. 1 § 7

$$\lim_{n\to\infty} \chi_2 = (2\pi e)^{-\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Наконец,

$$\lim \chi_3 = 1, \tag{10}$$

если, например, $m = n \to \infty$.

Так как постоянная ν_n равна точной нижней границе величин $\{d(\Lambda)\}^{1/n}$, где Λ пробегает все $\mathcal{N}$-допустимые решетки, и так как произведение правых частей соотношений (8), (9) и (10) равно правой части неравенства (1), то на основании неравенства (7) мы приходим к утверждению теоремы.

Теорема XI доказана.

ГЛАВА X

АВТОМОРФИЗМЫ

§ 1. Введение

1. Говорят, что однородное линейное преобразование $\boldsymbol{\omega}$ является автоморфизмом точечного множества $\mathcal{S}$, если $\mathcal{S}$ является одновременно множеством всех точек вида $\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}$, если $\mathbf{x}$ пробегает точки $\mathcal{S}$. Автоморфизмы множества $\mathcal{S}$, очевидно, образуют группу. Многие из точечных множеств $\mathcal{S}$, рассматриваемых в геометрии чисел или естественно возникающих в задачах из других разделов теории чисел, обладают большой группой автоморфизмов, которая естественным образом переносится на множество $\mathcal{S}$-допустимых решеток. Уже в работе Малера [5], в которой вводится понятие предела последовательности решеток, заложены основания для будущих исследований в этом направлении и указаны некоторые основные теоремы. С тех пор многое было сделано, однако некоторые увлекательные и естественные вопросы, остались открытыми.

Малер [5] рассматривает звездные тела с группой автоморфизмов, обладающей специальными свойствами. Эти звездные тела Малер называет автоморфными. В нашем изложении мы будем каждый раз формулировать свойства групп автоморфизмов, которые предполагаются выполненными.

Мы будем говорить, что однородное линейное преобразование $\boldsymbol{\omega}$ является автоморфизмом решетки Λ, если $\boldsymbol{\omega}\Lambda = \Lambda$, т. е. если Λ совпадает с множеством всех точек вида $\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Lambda$. Это — частный случай определения, приведенного в начале главы, ибо Λ является точечным множеством. Так как

$$d(\boldsymbol{\omega}\Lambda) = |\det(\boldsymbol{\omega})|\, d(\Lambda),$$

то должно выполняться равенство

$$\det(\boldsymbol{\omega}) = \pm 1.$$

Мы говорим, что $\boldsymbol{\omega}$ является автоморфизмом функции $f(\mathbf{x})$ векторного аргумента $\mathbf{x}$, если

$$f(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$$

для всех $\mathbf{x}$. В частности, преобразование $\boldsymbol{\omega}$ является автоморфизмом лучевой функции $F(\mathbf{x})$ в том и только в том случае, когда оно является автоморфизмом звездного тела

$$\mathcal{S}:\quad F(\mathbf{x}) < 1,$$

так как $\mathscr{S}$ и $F(\mathbf{x})$ однозначно определяют друг друга. Если ω является автоморфизмом лучевой функции $F(\mathbf{x})$, то для любой решетки Λ

$$F(\omega\Lambda) = F(\Lambda),$$

ибо по определению

$$F(\omega\Lambda) = \inf_{\substack{\omega\mathbf{a}\in\omega\Lambda \\ \omega\mathbf{a}\neq\mathbf{o}}} F(\omega\mathbf{a}) = \inf_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda \\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}} F(\mathbf{a}) = F(\Lambda).$$

Пусть $\mathscr{S}$ — любое точечное множество и τ — невырожденное однородное линейное преобразование; так как решетка Λ является допустимой для множества $\mathscr{S}$ в том и только в том случае, когда $\tau\Lambda$ допустима для $\tau\mathscr{S}$, то имеет место равенство

$$\Delta(\tau\mathscr{S}) = |\det(\tau)|\,\Delta(\mathscr{S}).$$

В этой главе мы постоянно будем пользоваться свойствами однородных линейных преобразований (см. § 2 гл. V). В частности, мы обозначаем соответственно

$$\varphi = \rho + \sigma, \quad \psi = \rho\sigma,$$

если

$$\varphi\mathbf{x} = \rho\mathbf{x} + \sigma\mathbf{x}, \quad \psi\mathbf{x} = \rho(\sigma\mathbf{x})$$

для всех $\mathbf{x}$.

2. Сначала мы получим три теоремы, которые имеются уже в работе Малера [4], хотя и в несколько иной форме. Краткость доказательств иллюстрирует силу метода Малера; в частности, это относится к замечательной теореме III.

Теорема I. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — лучевая функция, обладающая таким автоморфизмом ω, что*

$$\det(\omega) \neq \pm 1;$$

тогда $F(\Lambda) = 0$ для всех решеток Λ.

Доказательство. Заменив в случае необходимости ω на ω^{-1}, мы можем предполагать, что

$$|\det(\omega)| < 1.$$

Если существует решетка Λ, для которой $F(\Lambda) \neq 0$, то по теореме VI гл. V для множества $F(\mathbf{x}) < 1$ существует критическая решетка M. Но тогда

$$F(\omega\mathrm{M}) = F(\mathrm{M}) = 1$$

и

$$d(\omega\mathrm{M}) = |\det(\omega)|\,d(\mathrm{M}) < d(\mathrm{M}),$$

что противоречит определению критической решетки.

Теорема I доказана.

Теорема I, например, показывает, что множество

$$|x_1^2 x_2| < 1$$

имеет бесконечный тип, так как оно имеет автоморфизм $x_1 \to \frac{1}{2}x_1$, $x_2 \to 4x_2$ с определителем 2. Этот пример мы приводили уже в § 5 гл. V как пример звездного тела бесконечного типа.

Теорема II. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — лучевая функция. Предположим, что каждая точка $\mathbf{x}_0$, для которой $F(\mathbf{x}_0) = 1$, имеет вид*

$$\mathbf{x}_0 = \omega\mathbf{c}_0, \tag{1}$$

где ω — автоморфизм F, а точка $\mathbf{c}_0$ принадлежит компактному множеству $\mathscr{C}$. Тогда для каждой решетки Λ с условием $F(\Lambda) = 1$ существует решетка M, удовлетворяющая условиям

$$F(\mathrm{M}) = 1, \quad d(\Lambda) = d(\mathrm{M})$$

и имеющая непустое пересечение с $\mathscr{C}$.

Доказательство. Так как функция $F(\mathbf{x})$ непрерывна, то множество $\mathscr{C}'$, состоящее из точек $\mathbf{c} \in \mathscr{C}$, для которых $F(\mathbf{c}) = 1$, является компактным, поскольку компактно множество $\mathscr{C}$. Так как, согласно (1), для точек $\mathbf{c}_0$ выполняется равенство $F(\mathbf{c}_0) = F(\mathbf{x}_0) = 1$, то, не уменьшая общности, мы можем считать, что

$$F(\mathbf{c}) = 1 \qquad (\mathbf{c} \in \mathscr{C}). \tag{2}$$

Так как $F(\Lambda) = 1$, то существует последовательность точек $\mathbf{a}_r \in \Lambda$ (не обязательно различных), для которых

$$F(\mathbf{a}_r) \geqslant 1, \quad F(\mathbf{a}_r) \to 1 \qquad (r \to \infty).$$

Тогда точки $\mathbf{b}_r = \{F(\mathbf{a}_r)\}^{-1}\mathbf{a}_r$ удовлетворяют условию $F(\mathbf{b}_r) = 1$, а потому

$$\mathbf{b}_r = \omega_r\mathbf{c}_r$$

для некоторого автоморфизма ω_r функции F и некоторого $\mathbf{c}_r \in \mathscr{C}$. Так как множество $\mathscr{C}$ компактно, то, выделив из нашей последовательности подходящую подпоследовательность и изменив индексы, мы можем считать, что

$$\mathbf{c}_r \to \mathbf{c}' \in \mathscr{C} \qquad (r \to \infty).$$

Пусть

$$\Lambda = \omega_r\Lambda_r;$$

тогда так как $|\det(\omega_r)| = 1$ по теореме I, то

$$F(\Lambda_r) = F(\Lambda) = 1, \quad d(\Lambda_r) = d(\Lambda)$$

и

$$F(\mathbf{a}_r)\, \mathbf{c}_r \in \Lambda_r.$$

По следствию теоремы IV гл. V последовательность Λ_r содержит сходящуюся подпоследовательность, а потому, не уменьшая общности, можно считать, что

$$\Lambda_r \to \mathrm{M},$$

где M — некоторая решетка. Тогда

$$d(\mathrm{M}) = \lim_{r\to\infty} d(\Lambda_r) = d(\Lambda),$$

и по теореме II гл. V

$$F(\mathrm{M}) \geqslant \limsup_{r\to\infty} F(\Lambda_r) = F(\Lambda) = 1. \tag{3}$$

Решетка M содержит точку

$$\mathbf{c}' = \lim_{r\to\infty} F(\mathbf{a}_r)\, \mathbf{c}_r,$$

откуда на основании (2)

$$F(\mathrm{M}) \leqslant F(\mathbf{c}') = 1. \tag{4}$$

Сравнивая неравенства (3) и (4), мы заключаем, что $F(\mathrm{M}) = 1$.
Теорема II доказана.

Следствие. *В предположениях теоремы для множества $F(\mathbf{x}) < 1$ существует критическая решетка, в которой имеется точка* $\mathbf{c}$ *с условием* $F(\mathbf{c}) = 1$, *принадлежащая множеству* $\mathscr{C}$.

Действительно, если решетка Λ является критической, то критической является и решетка M.

Интересно сопоставить это следствие с приведенным в п. 2 § 5 гл. V примером звездного тела, ни одна из критических решеток которого не имеет точек на его границе. Заметим, что следствие не утверждает, что каждая критическая решетка множества $F(\mathbf{x}) < 1$ содержит точки, удовлетворяющие условию $F(\mathbf{x}) = 1$; автор (Касселс [2]) дал несколько искусственный [1]) контрпример тела $F(\mathbf{x}) < 1$, удовлетворяющего условиям теоремы II и имеющего критические решетки, которые не содержат точек с условием $F(\mathbf{x}) = 1$.

Как пример применения теоремы II рассмотрим множество $\mathscr{N}$: $|x_1x_2x_3| < 1$ с лучевой функцией $|x_1x_2x_3|^{1/3}$. Так как каждая точка $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$, удовлетворяющая условию $|x_{10}x_{20}x_{30}| = 1$,

[1]) Как отмечает проф. Роджерс, весьма вероятно, что трехмерное тело $|x_1| \max(x_2^2, x_3^2) < 1$ дает естественный пример.

может быть записана в виде

$$\mathbf{x}_0 = \boldsymbol{\omega}\mathbf{c},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — автоморфизм множества $\mathscr{N}$, задаваемый условиями

$$x_j \to x_{j0}x_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant 3)$$

и где $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$, то в этом примере в качестве множества $\mathscr{C}$ можно взять множество, состоящее из единственной точки $\mathbf{c}$. Отсюда следует, что для множества $\mathscr{N}$ существуют критические решетки, содержащие точку (1, 1, 1). Таким образом, если нас интересует не перечисление всех критических решеток, а только вычисление величины $\Delta(\mathscr{N})$, то достаточно рассматривать лишь критические решетки, содержащие точку (1, 1, 1).

Теорема III. *Пусть точечное множество $\mathscr{T}$ является подмножеством звездного тела $\mathscr{S}$ конечного типа, $\Delta(\mathscr{S}) < \infty$. Предположим, что для каждого целого положительного числа r существует такой автоморфизм ω_r множества $\mathscr{S}$, что множество $\omega_r\mathscr{T}$ содержит все точки множества $\mathscr{S}$, принадлежащие шару $|\mathbf{x}| < r$. Тогда*

$$\Delta(\mathscr{T}) = \Delta(\mathscr{S}).$$

Доказательство. Очевидно,

$$\Delta(\mathscr{T}) \leqslant \Delta(\mathscr{S}).$$

По теореме I $\det(\omega_r) = \pm 1$; а потому

$$\Delta(\mathscr{T}) = \Delta(\omega_r\mathscr{T}) \geqslant \Delta(\mathscr{S}_r),$$

где $\mathscr{S}_r$ — множество точек $\mathscr{S}$, принадлежащих шару $|\mathbf{x}| < r$. Но по теореме V гл. V

$$\lim_{r\to\infty} \Delta(\mathscr{S}_r) = \Delta(\mathscr{S}),$$

откуда $\Delta(\mathscr{T}) = \Delta(\mathscr{S})$.
Теорема III доказана.

Ясно, что, используя в полном объеме теоремы II и V гл. V, можно получить некоторые более сильные аналоги теоремы III. Заметим, что рассуждение, использованное при доказательстве теоремы III, уже использовалось при доказательстве теоремы XV гл. V.

В качестве примера применения теоремы III рассмотрим

$$\mathscr{S}: \quad |x_1x_2x_3| < 1$$

и

$$\mathscr{T}: \quad |x_1x_2x_3| < 1, \quad |x_2| < \varepsilon, \quad |x_3| < \varepsilon,$$

где ε — любое фиксированное положительное число. Тогда в качестве автоморфизма ω_r можно взять автоморфизм, задаваемый условиями

$$X_1 = r^{-2}\varepsilon^2 x_1, \quad X_2 = r\varepsilon^{-1}x_2, \quad X_3 = r\varepsilon^{-1}x_3,$$

где $X = \omega_r \mathbf{x}$. Утверждается, что любая решетка Λ, для которой $d(\Lambda) < \Delta(\mathscr{S})$, имеет бесконечно много точек, принадлежащих множеству $\mathscr{S}$. Действительно, для каждого $\varepsilon > 0$ такая решетка Λ должна содержать точки, принадлежащие множеству $\mathscr{T}$. Поэтому, если Λ не содержит точки $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, для которой $a_2 = a_3 = 0$, то бесконечно много точек решетки Λ принадлежат множеству $\mathscr{S}$. С другой стороны, если точка $\mathbf{a} = (a_1, 0, 0)$ принадлежит решетке Λ, то решетке Λ принадлежат и все точки вида $m\mathbf{a}\,(m = 1, 2, \ldots)$, так что и в этом случае бесконечно много точек решетки Λ принадлежат множеству $\mathscr{S}$.

Приведенные выше рассуждения показывают, что для каждого $\varepsilon > 0$ бесконечно много точек решетки Λ принадлежат множеству $\mathscr{T}$. Соображения такого рода уже использовались при доказательстве леммы 12 гл. V о существовании бесконечного числа точек в множестве $-1 < x_1x_2 < k$. Мы могли бы доказать несколько больше, если бы было доказано, что это множество является ограниченно приводимым. В § 7 мы, следуя Давенпорту и Роджерсу [2], систематически изучим случаи, когда бесконечное число точек решетки принадлежит звездному телу.

3. Точечные множества с большой группой автоморфизмов, которые мы будем рассматривать, возникают главным образом при изучении алгебраических форм $\varphi(\mathbf{x})$. Например, в качестве $\varphi(\mathbf{x})$ можно взять формы x_1x_2, $x_1x_2x_3$, $x_1(x_2^2 + x_3^2)$ или $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ и определить множество $\mathscr{S}$ одним из следующих условий:

$$|\varphi(\mathbf{x})| < 1, \tag{1}$$

или

$$0 \leqslant \varphi(\mathbf{x}) < 1, \tag{2}$$

или

$$0 < \varphi(\mathbf{x}) < 1, \tag{3}$$

или

$$-k < \varphi(\mathbf{x}) < l, \tag{4}$$

где k и l — положительные числа. Конечно, множества (2) и (3) не являются звездными телами. Кроме множеств, специально построенных из множеств типа (1)—(4) в качестве контрпримеров, множества с большой группой автоморфизмов с трудом поддаются исследованию. Например, критический определитель множества

$$|x_1| \max(x_2^2, x_3^2) < 1$$

до сих пор неизвестен, хотя это представляло бы некоторый интерес в теории одновременных приближений и хотя эта задача привлекала большое внимание (см. Давенпорт [17], Касселс [6], а также ссылки, приведенные в этих работах).

В этой главе мы постоянно будем использовать результаты § 4 гл. I о связи решеток и форм.

В связи с множествами типа (1)—(4), где $\varphi(\mathbf{x})$ — алгебраическая форма, специальную роль играют решетки частного вида. Введем некоторые новые понятия. Будем говорить, что форма φ целочисленна на решетке Λ, если для любого $\mathbf{a} \in \Lambda$ $\varphi(\mathbf{a})$ является целым числом. Если из равенства $\varphi(\mathbf{a}) = 0$ для $\mathbf{a} \in \Lambda$ следует, что $\mathbf{a} = \mathbf{o}$, то мы будем говорить, что форма φ отлична от нуля на решетке Λ (тривиальный нуль в точке $\mathbf{o}$ не учитывается). Наконец, если существует такое целое число $t \neq 0$, что форма $t\varphi$ целочисленна на решетке Λ, то мы говорим, что форма φ пропорциональна форме, целочисленной на Λ. В этом случае форма φ целочисленна на решетке $|t|^{1/m}\Lambda$, где m — степень формы φ.

Во многих (если не во всех) случаях, когда форма φ имеет бесконечно много автоморфизмов и известны критические решетки Λ_c для одного из множеств (1)—(4), оказывается, что форма φ пропорциональна форме, целочисленной на Λ_c. В некоторых случаях φ пропорциональна целочисленной форме на каждой известной допустимой решетке и предполагается (но еще не доказано), что других допустимых решеток не существует. В других случаях заведомо существуют допустимые решетки, на которых форма φ не пропорциональна целочисленной форме, однако эти решетки не являются критическими.

Прежде чем рассматривать общие свойства решеток Λ, на которых форма[1]) φ пропорциональна целочисленной форме, и демонстрировать их на конкретных примерах, удобно доказать одно простое предложение.

Лемма 1. *Пусть $r > 0$ и $m > 0$ — целые числа, и пусть*

$$\gamma(u_1, \ldots, u_r)$$

— числа, произвольно заданные для каждого набора целых чисел u_ρ с условием

$$0 \leqslant u_\rho \leqslant m \quad (1 \leqslant \rho \leqslant r). \tag{5}$$

Тогда существует такой однозначно определенный многочлен $f(\mathbf{u})$ степени m от переменных $u_1, \ldots, u_r$, что

$$f(\mathbf{u}) = \gamma(\mathbf{u}) \tag{6}$$

для всех целых $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_r)$, удовлетворяющих условиям (5).

[1]) Напомним, что слово „форма" подразумевает однородность.

Доказательство. Утверждение, конечно, справедливо, если $r=1$. При $r>1$ используем индукцию по r. Мы можем записать $f(\mathbf{u})$ в виде

$$f(\mathbf{u})=\sum_{0\leqslant\mu\leqslant m} u_r^{\mu} g_{\mu}(u_1, \ldots, u_{r-1}), \tag{7}$$

где многочлены g_{μ} подлежат определению. Для любых фиксированных значений $u_1, \ldots, u_{r-1}$, удовлетворяющих условию (5), уравнения (6) однозначно определяют значения, которые должны принимать многочлены $g_{\mu}(u_1, \ldots, u_{r-1})$; но по индукционному предположению существуют однозначно определенные многочлены, принимающие эти значения. Для завершения доказательства леммы достаточно заметить, что определитель системы $(m+1)^r$ линейных уравнений для $(m+1)^r$ коэффициентов многочлена $f(\mathbf{u})$ равен

$$\prod_{0\leqslant u<v\leqslant m}(v-u)^{2m}\neq 0.$$

Лемма 1 доказана.

Следствие. *Если числа $\gamma(u_1, \ldots, u_r)$ рациональны, то рациональны и коэффициенты многочлена f.*

Это утверждение сразу следует из доказательства леммы.

Пусть теперь φ — форма, целочисленная на решетке Λ с базисом $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$, и пусть

$$f(\mathbf{u})=f(u_1, \ldots, u_n)=\varphi\left(\sum_j u_j\mathbf{b}_j\right). \tag{8}$$

По следствию леммы 1 коэффициенты формы $f(\mathbf{u})$ являются рациональными числами. Обратно, если коэффициенты формы $f(\mathbf{u})$ рациональны, то форма φ пропорциональна форме, целочисленной на решетке Λ.

Опишем теперь несколько детальнее ситуацию, возникающую в некоторых подробно исследованных частных случаях.

Предположим, например, что

$$\varphi(\mathbf{x})=x_1^2+x_2^2-x_3^2,$$

так что форма $f(\mathbf{u})$, определяемая условиями (8), является произвольной тернарной квадратичной формой сигнатуры (2, 1) (ср. § 4 гл. I). До сих пор не известно ни одной неопределенной тернарной квадратичной формы, кроме форм, кратных формам с целыми коэффициентами, которая не принимала бы сколь угодно малых значений для целочисленных векторов $\mathbf{u}$. Оппенгейм [6, 7] показал[1]), что неопределенная квадратичная форма, принимающая сколь угодно малые значения одного знака, принимает также сколь угодно малые значения и другого знака. Поскольку для этих форм

$$f(r\mathbf{u})=r^2f(\mathbf{u})$$

и $f(\mathbf{u})$ может принимать произвольно малые значения любого знака, указанные формы принимают значения в любых интервалах.

Ситуация в значительной мере аналогична и для

$$\varphi(\mathbf{x})=x_1x_2x_3.$$

В этом случае функция $f(\mathbf{u})$, задаваемая условиями (8), является произведением трех вещественных линейных форм:

$$f(\mathbf{u})=\prod_{1\leqslant j\leqslant 3}(b_{j1}u_1+b_{j2}u_2+b_{j3}u_3), \tag{9}$$

и, обратно, каждое произведение трех линейных форм вида (9), где

$$\det(b_{ik})\neq 0$$

приводит этим способом к некоторой решетке Λ. Классическая теорема, которую мы докажем в § 4, утверждает, что если коэффициенты формы $f(\mathbf{u})$ являются рациональными числами, $f(\mathbf{u})$ может быть выражена как произведение трех вещественных линейных форм и, кроме того, $f(\mathbf{u})\neq 0$ для целочисленных векторов $\mathbf{u}\neq\mathbf{o}$, то

$$f(\mathbf{u})=t\prod_{1\leqslant j\leqslant 3}(\beta_{j1}u_1+\beta_{j2}u_2+\beta_{j3}u_3),$$

где β_{11}, β_{12}, β_{13} — числа, принадлежащие некоторому вполне вещественному[1]) кубическому полю $\mathfrak{K}_1$, а числа β_{jk} сопряжены с β_{1k} в полях $\mathfrak{K}_j$, сопряженных с полем $\mathfrak{K}_1$.

С другой стороны, заведомо существуют решетки Λ, которые допустимы для множества

$$|x_1x_2|<1$$

и на которых форма x_1x_2 не пропорциональна целочисленной форме. Это утверждение непосредственно следует из теории цепных дробей; кроме того, это не трудно доказать, видоизменив доказательство теоремы VIII гл. VI.

Несколько более интересен случай, когда

$$\varphi(\mathbf{x})=x_1(x_2^2+x_3^2). \tag{10}$$

Так как

$$\varphi(\mathbf{x})=x_1(x_2+ix_3)(x_2-ix_3),$$

где $i^2=-1$, то этот случай связан с кубическими полями, не все из сопряженных которых вещественны, аналогично тому как форма

[1]) Он доказал также, что если неопределенная квадратичная форма не кратна форме с целыми коэффициентами и нетривиально представляет нуль, то она также принимает сколь угодно малые ненулевые значения для целочисленных значений переменных, если число переменных больше пяти.

[1]) Вещественному вместе со всеми своими сопряженными. — *Прим. ред.*

21 Зак. 1029

$x_1x_2x_3$ связана с кубическими полями, которые вещественны вместе со всеми сопряженными. Классический результат, который будет доказан в п. 4 § 4, утверждает, что если форма $x_1(x_2^2+x_3^2)$ пропорциональна форме, целочисленной и отличной от нуля на Λ, то решетка Λ возникает из кубического поля. Однако для множества

$$|x_1(x_2^2+x_3^2)|<1 \tag{11}$$

заведомо существуют и другие допустимые решетки.

Пусть $\boldsymbol{\tau}$ — любое преобразование $\mathbf{X}=\boldsymbol{\tau}\mathbf{x}$, имеющее следующий специальный вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= \tau_{11}x_1, \\ X_2 &= \quad \tau_{22}x_2+\tau_{23}x_3, \\ X_3 &= \quad \tau_{32}x_2+\tau_{33}x_3, \end{aligned}$$

где

$$\tau_{11}\neq 0, \qquad \tau_{22}\tau_{33}-\tau_{23}\tau_{32}\neq 0.$$

Тогда, очевидно, существуют такие постоянные C, c, зависящие только от $\boldsymbol{\tau}$, что для всех $\mathbf{x}$

$$\infty > C \geqslant \frac{|\varphi(\boldsymbol{\tau}\mathbf{x})|}{|\varphi(\mathbf{x})|} \geqslant c > 0.$$

Отсюда следует, что если решетка Λ является допустимой для множества $|\varphi(\mathbf{x})|<1$, то для некоторого числа t решетка $t\boldsymbol{\tau}\Lambda$ также является допустимой и, вообще говоря, форма $\varphi(\mathbf{x})$ не будет пропорциональна форме, целочисленной на решетке $\boldsymbol{\tau}\Lambda$, если она пропорциональна такой форме на Λ.

Этими решетками не исчерпываются все допустимые для множества $x_1(x_2^2+x_3^2)<1$ решетки. Один из способов доказательства этого утверждения основан на использовании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим в следующем виде:

$$|x_1(x_2^2+x_3^2)|\geqslant 2\,|x_1x_2x_3|.$$

Из этого неравенства следует, что любая решетка, допустимая для множества $|x_1x_2x_3|<{}^1/_2$, допустима также для $|x_1(x_2^2+x_3^2)|<1$; например, этим свойством обладает решетка $2^{-1/3}$M, если форма $x_1x_2x_3$ целочисленна и отлична от нуля на M (т. е. если решетка M происходит от вполне вещественного кубического поля); как легко видеть, форма $x_1(x_2^2+x_3^2)$ не может быть пропорциональна форме, целочисленной на решетке M. (В действительности x_1-координаты решетки M, на которой форма $x_1x_2x_3$ или $x_1(x_2^2+x_3^2)$ отлична от нуля и пропорциональна целочисленной форме, полностью определяют соответствующее кубическое поле, а оно либо вещественно вместе со всеми своими сопряженными, либо нет.) Более общо допустимые решетки можно строить, используя методы теоремы VIII гл. VI. (По поводу смежных вопросов ср. Касселс [6].)

Интересна следующая проблема: определить для любой заданной формы $\varphi(\mathbf{x})$, существуют ли допустимые для множества $|\varphi(\mathbf{x})|<1$ решетки, на которых форма $\varphi(\mathbf{x})$ не пропорциональна целочисленной форме. Касселс и Суиннертон-Дайер [1] рассмотрели случаи, когда $\varphi(\mathbf{x})=x_1x_2x_3$ и $x_1^2+x_2^2-x_3^2$, однако они только свели указанную проблему к другой. По поводу других подходов см. Роджерс [12]. Вероятно, даже для исследования форм $x_1x_2x_3$ или $x_1^2+x_2^2-x_3^2$ потребуются существенно новые идеи.

4. Важную роль в этой теории играют так называемые теоремы изоляции. Их значение впервые отметили Давенпорт и Роджерс [2], хотя это уже намечается у Малера [5] и по существу у Ремака [2]. Теорема изоляции нового типа доказана и использована в работе Касселса и Суиннертона-Дайера [1].

Явление изоляции принимает различные формы; общее для них заключается, грубо говоря, в том, что решетки, лежащие в окрестности данной решетки M, за некоторыми исключениями, ведут себя гораздо хуже, чем сама решетка M. Так, один результат, который мы докажем, утверждает, что если форма $x_1x_2x_3$ целочисленна и отлична от нуля на решетке M, то для каждого $\varepsilon>0$ существует такая окрестность $\mathfrak{L}$ решетки M (в смысле п. 2 § 3 гл. V), зависящая от ε, что

$$\inf_{\substack{\mathbf{x}\in\Lambda\\ \mathbf{x}\neq\mathbf{o}}} |x_1x_2x_3|<\varepsilon$$

для всех $\Lambda\in\mathfrak{L}$, исключая решетки Λ вида tM, где t — некоторое число. Этот результат в некотором смысле является исключительным. По-видимому, более типичной является теорема изоляции для формы $x_1(x_2^2+x_3^2)$. Она утверждает, что если

$$\inf_{\substack{\mathbf{x}\in \mathrm{M}\\ \mathbf{x}\neq\mathbf{o}}} |x_1(x_2^2+x_3^2)|=1$$

и если форма $x_1(x_2^2+x_3^2)$ пропорциональна форме, целочисленной на решетке M, то существуют такие $\eta_0>0$ и окрестность $\mathfrak{L}$ решетки M, что

$$\inf_{\substack{\mathbf{x}\in\Lambda\\ \mathbf{x}\neq\mathbf{o}}} |x_1(x_2^2+x_3^2)|<1-\eta_0$$

для всех $\Lambda\in\mathfrak{L}$, исключая решетки вида $\boldsymbol{\tau}$M, где $\boldsymbol{\tau}$ — автоморфизмы специального вида, для которых $\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{21}=\tau_{31}=0$ и которые уже рассматривались в п. 3. Заметим, что для формы $x_1x_2x_3$ число ε

может быть выбрано произвольно, в то время как для формы $x_1(x_2^2+x_3^2)$ и η_0 и $\mathfrak{L}$ фиксированы выбором решетки M.

Все теоремы изоляции доказываются по общей схеме. Прежде всего доказывается, что если форма $\varphi(\mathbf{x})$, скажем, является целочисленной или целочисленной и отличной от нуля на решетке M, то $\varphi(\mathbf{x})$ и M имеют общую группу $\mathbf{\Omega}_M$ автоморфизмов $\boldsymbol{\omega}$, т. е.

$$\varphi(\boldsymbol{\omega}\mathbf{x})=\varphi(\mathbf{x}), \qquad \boldsymbol{\omega}\mathrm{M}=\mathrm{M}.$$

Для специальных форм x_1x_2, $x_1x_2x_3$, $x_1(x_2^2+x_3^2)$ существование этих автоморфизмов следует из теории единиц полей алгебраических чисел, а для формы $x_1^2+x_2^2-x_3^2$ — из теории неопределенных тернарных квадратичных форм. Однако нам представляется более простым изучать группы $\mathbf{\Omega}_M$, не прибегая к этим теоремам, а используя только теорему Малера о компактности[1]). Решетка Λ, близкая (в смысле Малера) к решетке M, — это одна из решеток вида

$$\Lambda=\boldsymbol{\tau}\mathrm{M},$$

где $\boldsymbol{\tau}$ мало отличается от тождественного преобразования. Пусть существует такая точка $\mathbf{a}_0\in\mathrm{M}$, что $\varphi(\mathbf{a}_0)$ имеет некоторое интересующее нас значение α; тогда

$$\varphi(\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}_0)=\varphi(\mathbf{a}_0)=\alpha, \qquad \boldsymbol{\omega}\in\mathbf{\Omega}_M.$$

Кроме того, решетка Λ содержит точку $\boldsymbol{\tau\omega}\mathbf{a}_0$. Хотя величина $|\boldsymbol{\tau}\mathbf{a}_0-\mathbf{a}_0|$ мала, когда $\boldsymbol{\tau}$ мало отличается от тождественного преобразования, отсюда не следует, что $|\boldsymbol{\tau\omega}\mathbf{a}_0-\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}_0|$ равномерно мала для всех $\boldsymbol{\omega}$, так как, вообще говоря, $\boldsymbol{\omega}$ может быть выбрано так, чтобы $\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}_0$ было сколь угодно велико. Если преобразование $\boldsymbol{\tau}$ не удовлетворяет определенным условиям, то, выбирая подходящим образом $\boldsymbol{\omega}\in\mathbf{\Omega}_M$, можно затем доказать существование точки $\boldsymbol{\tau\omega}\mathbf{a}_0$, принадлежащей решетке $\Lambda=\boldsymbol{\tau}\mathrm{M}$, которая обладает требуемыми в рассматриваемой задаче свойствами.

Иногда, когда на $\boldsymbol{\tau}$ накладываются ограничения другого рода, необходимо исходить не из одной точки $\mathbf{a}_0$, а из нескольких $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$. Этот общий подход станет яснее после рассмотрения примеров в § 5. Как будет показано в § 7 вслед за Давенпортом и Роджерсом [2], теоремы изоляции могут быть использованы при рассмотрении вопроса о существовании бесконечного числа точек решетки, лежащих в данной области.

5. Прежде чем переходить к главной теме этой главы, мы рассмотрим в § 2 некоторые специальные формы и их группы автомор-

[1]) Одним из первых приложений геометрии чисел было приложение ее к теории единиц в алгебраических полях (Минковский).

физмов. Затем в § 3 мы изложим метод Морделла, который показывает, как может быть получена граница для критического определителя n-мерного тела, если она известна для связанного с ним $(n-1)$-мерного тела. Если первоначальное n-мерное тело является телом специального типа, имеющим много автоморфизмов, то, как показал Морделл, этот процесс может быть продолжен. В частности, это позволяет найти критические определители множеств $|x_1x_2x_3|<1$ и $|x_1(x_2^2+x_3^2)|<1$. В § 8 мы кратко рассмотрим связь цепных дробей с формами и телами, обладающими автоморфизмами, а также возможность обобщений этих исследований.

§ 2. Специальные формы

1. Начнем с рассмотрения автоморфизмов формы

$$\varphi(\mathbf{x})=\Big\{\prod_{1\leqslant j\leqslant r} x_j\Big\}\Big\{\prod_{1\leqslant k\leqslant s}\left(x_{r+k}^2+x_{r+s+k}^2\right)\Big\}, \qquad n=r+2s, \tag{1}$$

где допускаются обе возможности: $r=0$ и $s=0$. Мы можем переписать φ в виде

$$\varphi(\mathbf{x})=\psi(\mathbf{z})=\prod_{1\leqslant l\leqslant n} z_l, \tag{2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} z_j&=x_j && (1\leqslant j\leqslant r),\\ z_{r+k}&=x_{r+k}+ix_{r+s+k}, && \\ z_{r+s+k}&=x_{r+k}-ix_{r+s+k} && (1\leqslant k\leqslant s) \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

и $i^2=-1$. Если все x_l вещественны, то $z_j (j=1, \ldots, r)$ вещественны, а z_{r+k} и $z_{r+s+k} (k=1, \ldots, s)$ являются сопряженными комплексными числами; обратно, если $z_l (1\leqslant l\leqslant n)$ имеют указанные свойства, то все x_l вещественны. Пусть теперь $\boldsymbol{\omega}$ — вещественный автоморфизм формы $\varphi(\mathbf{x})$. Очевидным образом ему соответствует автоморфизм $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ формы $\psi(\mathbf{z})$. Положим $\mathbf{Z}=\tilde{\boldsymbol{\omega}}\mathbf{z}$. Тогда равенство

$$\prod z_l=\prod Z_l, \tag{4}$$

где Z_l — линейные формы от $z_1, \ldots, z_n$, выполняется тождественно относительно переменных $z_1, \ldots, z_n$. Это может быть только в том случае, когда $Z_L=\lambda_l z_l$, где $L=L(l)$ — некоторая перестановка чисел $1, \ldots, n$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — вещественные или комплексные числа. Для наших целей достаточно рассматривать автоморфизмы вида

$$Z_l=\lambda_l z_l \qquad (1\leqslant l\leqslant n), \tag{5}$$

где на основании (4)

$$\prod_{1\leqslant l\leqslant n}\lambda_l=1. \tag{6}$$

Но вещественное преобразование ω переводит вещественные точки $\mathbf{x}$ в вещественные точки $\mathbf{X} = \omega\mathbf{x}$. Отсюда следует, что формы $Z_1, \ldots, Z_r$ являются вещественными, а Z_{r+k}, Z_{r+s+k} — комплексными сопряженными, и поэтому

$$\left.\begin{array}{ll} \lambda_j \text{ — вещественные числа} & (1 \leqslant j \leqslant r), \\ \lambda_{r+k}, \lambda_{r+s+k} \text{ — комплексно сопряженные числа} & (1 \leqslant k \leqslant s). \end{array}\right\} \quad (7)$$

Обратно, если числа λ_l удовлетворяют условиям (6) и (7), то равенства (5) задают вещественный автоморфизм ω формы $\varphi(\mathbf{x})$.

Нам понадобится также преобразование ω^*, взаимное с преобразованием ω, т. е. преобразование, для которого тождественно выполняются равенства

$$\sum_{1 \leqslant l \leqslant n} x_l y_l = \sum_{1 \leqslant l \leqslant n} X_l Y_l,$$

где

$$\mathbf{X} = \omega\mathbf{x}, \quad \mathbf{Y} = \omega^*\mathbf{y}.$$

Но очевидно, что

$$\sum_l x_l y_l = \sum_l z_l w_l,$$

где величины z_l задаются условиями (3) и где

$$w_j = y_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant r),$$

$$\left.\begin{array}{l} 2w_{r+k} = y_{r+k} - iy_{r+s+k}, \\ 2w_{r+s+k} = y_{r+k} + iy_{r+s+k} \end{array}\right\} \ (1 \leqslant k \leqslant s).$$

Отсюда следует, что если ω^* индуцирует в $\mathbf{w}$-координатах преобразования $\tilde{\omega}^*$, то

$$W_l = \lambda_l^{-1} w_l,$$

где $\mathbf{W} = \tilde{\omega}^*\mathbf{w}$. В частности, преобразование ω^* также является автоморфизмом формы $\varphi(\mathbf{x})$.

2. Нам потребуются также некоторые сведения об автоморфизмах формы

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_n^2, \qquad (1)$$

где, возможно, $r = n$, так что в этом случае отрицательные члены отсутствуют. Для полноты изложения докажем следующую известную лемму.

Лемма 2. *Если форма $\varphi(\mathbf{x})$ определена равенством (1) и $\mathbf{x}_0$ — произвольная точка, то существует такой автоморфизм ω формы $\varphi(\mathbf{x})$, что для некоторого числа t*

$$\omega(\mathbf{x}_0) = (t, 0, \ldots, 0),$$

или

$$\omega(\mathbf{x}_0) = (0, \ldots, 0, t),$$

или

$$\omega(\mathbf{x}_0) = (t, 0, \ldots, 0, t)$$

соответственно случаям $\varphi(\mathbf{x}_0) > 0$, $\varphi(\mathbf{x}_0) < 0$ или $\varphi(\mathbf{x}_0) = 0$.

Доказательство. Утверждение леммы заведомо справедливо в случае $n = 2$, так как в этом случае имеются хорошо известные автоморфизмы $\mathbf{X} = \omega\mathbf{x}$, задаваемые равенствами

$$X_1 = x_1 \cos\vartheta + x_2 \sin\vartheta, \qquad X_2 = -x_1 \sin\vartheta + x_2 \cos\vartheta, \qquad (2)$$

если $r = n = 2$, где ϑ — любое вещественное число, и равенствами

$$X_1 + X_2 = k(x_1 + x_2), \qquad X_1 - X_2 = k^{-1}(x_1 - x_2), \qquad (3)$$

если $r = 1$, $n = 2$, где k может принимать любое отличное от нуля значение.

Докажем, что лемма справедлива при $r = n$. Мы можем считать, что для $n - 1$ это утверждение уже доказано. Тогда существует автоморфизм ω_1, действующий только на первые $n - 1$ координат так, что

$$\mathbf{x}_1 = \omega_1\mathbf{x}_0 = (u, 0, \ldots, 0, x_{n0}),$$

где u — некоторое число. Опять-таки по предположению найдется автоморфизм ω_2, который действует только на первую и последнюю координаты и для которого

$$\omega_2\mathbf{x}_1 = (t, 0, \ldots, 0),$$

где t — некоторое число. Тогда автоморфизм $\omega = \omega_2\omega_1$ является искомым.

Наконец, лемма справедлива в общем случае. Действительно, по доказанному мы можем последовательно найти такие автоморфизмы $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, что для некоторых чисел u, v выполняются равенства

$$\mathbf{x}_1 = \omega_1\mathbf{x}_0 = (u, 0, \ldots, 0, x_{r+1,0}, \ldots, x_{n0}),$$

$$\mathbf{x}_2 = \omega_2\mathbf{x}_1 = (u, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, v),$$

а тогда

$$\mathbf{x}_3 = \omega_3\mathbf{x}_2 = (t, 0, \ldots, 0), \text{ или } (0, \ldots, 0, t), \text{ или } (t, 0, \ldots, 0, t).$$

Лемма 2 доказана.

Следствие. *Если ω — построенный выше автоморфизм, то взаимное ему преобразование ω^* также является автоморфизмом.*

Действительно, легко проверить, что преобразования, взаимные с преобразованиями, задаваемыми формулами (2) и (3), являются автоморфизмами. Требуемое утверждение выводится тогда по индукции.

[На самом деле: преобразование, взаимное с любым автоморфизмом ω формы $\varphi(\mathbf{x})$, снова является автоморфизмом этой формы. Проще всего доказать это, используя теорию матриц. Для этой цели обозначим через ω матрицу, элементы которой являются коэффициентами преобразования ω; пусть ε — диагональная матрица, первые r диагональных элементов которой равны 1, а остальные -1. Тогда тот факт, что ω является автоморфизмом, можно записать в виде

$$\omega'\varepsilon\omega = \varepsilon, \tag{4}$$

где штрих означает транспонирование. Переходя в равенстве (4) к обратным матрицам, мы получаем

$$\omega^{-1}\varepsilon^{-1}(\omega')^{-1} = \varepsilon^{-1}, \tag{5}$$

но матрица ω^*, взаимная с ω, равна, очевидно, $(\omega')^{-1}$, откуда, так как $\varepsilon^{-1} = \varepsilon$, мы и получаем, что ω^* является автоморфизмом.]

§ 3. Метод Морделла

1. В этом параграфе мы изложим метод Морделла для оценки критического определителя n-мерного множества, основанный на сведении этой задачи к такой же задаче для $(n-1)$-мерного множества.

Пусть $\mathscr{S}$ — любое n-мерное множество, об автоморфизмах которого пока ничего не предполагается, и пусть Λ — некоторая решетка. В § 5 гл. I было показано, что для любой точки $\mathbf{b}$ решетки Λ^*, взаимной с решеткой Λ, в плоскости

$$\pi_{\mathbf{b}}: \quad \mathbf{xb} = 0$$

(скалярное произведение) лежит $(n-1)$ линейно независимых точек решетки Λ. Плоскости $\pi_{\mathbf{b}}$ вырезают из множества $\mathscr{S}$ $(n-1)$-мерные множества $\mathscr{S}_{\mathbf{b}}$. Имеется $(n-1)$-мерная решетка $\Lambda_{\mathbf{b}}$, которая состоит из точек решетки Λ, лежащих на $\pi_{\mathbf{b}}$. Таким образом, если мы сможем показать, что в множестве $\mathscr{S}_{\mathbf{b}}$ имеются отличные от нуля точки $(n-1)$-мерной решетки $\Lambda_{\mathbf{b}}$, то тогда заведомо множество $\mathscr{S}$ содержит отличную от нуля точку решетки Λ. Если, например, $b_n \neq 0$, то можно спроектировать множество $\mathscr{S}_{\mathbf{b}}$ на гиперплоскость $x_n \neq 0$ и использовать следствие леммы 6 гл. I. Чтобы этот процесс был эффективным, вектор $\mathbf{b} \in \Lambda^*$ должен быть выбран так, чтобы он приводил к „хорошей“ $(n-1)$-мерной задаче в плоскости $\pi_{\mathbf{b}}$. Таким образом, мы заменим n-мерную задачу другой, несколько туманной задачей о взаимной решетке и аналогичной $(n-1)$-мерной задачей.

В таком виде этот метод применяется Мюллендером [3] и Девенпортом [17] для исследования загадочного звездного тела

$$|x_1| \max(x_2^2, x_3^2) < 1.$$

Используя известный критический определитель (ср. п. 3) множества

$$|x_1|(x_2^2 + x_3^2) < 1,$$

они выбирают точку $\mathbf{b} \in \Lambda^*$, для которой величина $b_1(b_2^2 + b_3^2)$ мала, и затем рассматривают двумерную задачу в плоскости $\pi_{\mathbf{b}}$.

Морделл [5, 6, 9] заметил, что иногда можно трактовать n-мерную задачу для взаимной решетки так же, как и первоначальную задачу, и тогда n-мерная задача целиком сводится к одной или нескольким $(n-1)$-мерным задачам без необходимости решения вспомогательной n-мерной задачи. Множествами $\mathscr{S}$, к которым применим указанный метод, являются множества с большой группой автоморфизмов, так что уместно рассматривать их в этой главе. С определенной точки зрения это можно рассматривать как обобщение на невыпуклые тела результатов гл. VIII о взаимных выпуклых телах.

2. Обратимся сначала к квадратичным формам, изящное исследование которых принадлежит Оппенгейму [4], следовавшему Морделлу [9].

Теорема IV. *Пусть $\Gamma_{r,s} = \Delta(\mathscr{D}_{r,s})$ — критический определитель $(r+s)$-мерного звездного тела*

$$\mathscr{D}_{r,s}: \quad |x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_{r+s}^2| < 1, \tag{1}$$

где $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$. Тогда

$$\Gamma_{r,s}^{r+s-2} \geqslant \min\left(\Gamma_{r-1,s}^{r+s}, \Gamma_{r,s-1}^{r+s}\right), \tag{2}$$

где первый или второй член опускаются, если $r=0$ или $s=0$ соответственно.

Доказательство. Положим

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_{r,s}(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_{r+s}^2, \tag{3}$$

и для любой решетки Λ

$$|\varphi|(\Lambda) = \inf_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{o}}} |\varphi(\mathbf{a})|. \tag{4}$$

Тогда по однородности

$$\Gamma_{r,s}^{-2} = \sup_{\Lambda} \frac{\{|\varphi|(\Lambda)\}^{r+s}}{d^2(\Lambda)}, \tag{5}$$

где Λ пробегает все решетки, причем считается, что $\Gamma_{r,s} = \infty$, если $|\varphi|(\Lambda) = 0$ для всех решеток. Последнее обстоятельство чаще всего имеет место, когда $r > 0$, $s > 0$ и $r+s \geqslant 5$ (см. Приложение).

Мы покажем сначала, что

$$\{|\varphi|(\Lambda)\}^{r+s-1} \leqslant \zeta^{-2}\{|\varphi|(\Lambda^*)\}\, d^2(\Lambda), \tag{6}$$

где Λ^* — решетка, взаимная с решеткой Λ, и

$$\zeta = \min(\Gamma_{r-1,s}, \Gamma_{r,s-1}). \tag{7}$$

Для этого достаточно показать, что

$$\{|\varphi|(\Lambda)\}^{r+s-1} \leqslant \zeta^{-2}|\varphi(\mathbf{b})|\,d^2(\Lambda), \tag{8}$$

где $\mathbf{b}$ — любая примитивная точка решетки Λ^*. На основании леммы 2 мы можем предположить, что $\mathbf{b}$ — одна из точек вида

$$\mathbf{b}_1 = (t,\ 0,\ \ldots,\ 0),\quad \mathbf{b}_2 = (0,\ \ldots,\ 0,\ t),\quad \mathbf{b}_3 = (t,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ t), \tag{9}$$

где точки вида $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ имеются в случаях, когда $r > 0$, $s > 0$ или одновременно $r > 0$, $s > 0$ соответственно.

Пусть сначала

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_1,$$

где

$$\varphi(\mathbf{b}_1) = t^2. \tag{10}$$

На основании результатов § 5 гл. I существует такой базис $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ решетки Λ, что

$$\mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 = 1, \qquad \mathbf{b}_1\mathbf{a}_j = 0 \qquad (2 \leqslant j \leqslant n),$$

так что $\mathbf{a}_1 = (t^{-1},\ \mathbf{a}_1')$ и $\mathbf{a}_j = (0,\ \mathbf{a}_j')$ для $j \neq 1$, где $\mathbf{a}_j'$ есть $(n-1)$-мерный вектор. Отсюда следует, что точки решетки Λ, удовлетворяющие условию $x_1 = 0$, образуют $(n-1)$-мерную решетку M с базисом $\mathbf{a}_j'$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$ в пространстве $\{x_2, \ldots, x_n\}$. Далее,

$$d(\Lambda) = |\det(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)| = |t^{-1}|\,|\det(\mathbf{a}_2', \ldots, \mathbf{a}_n')| = |t|^{-1} d(\mathrm{M}). \tag{11}$$

Но тогда, применяя соотношение (5) для пары $r-1$, s и используя соотношения (10) и (11), мы получаем

$$\{|\varphi_{r-1,s}|(\mathrm{M})\}^{r+s-1} \leqslant \Gamma_{r-1,s}^{-2} d^2(\mathrm{M}) = \Gamma_{r-1,s}^{-2}|\varphi(\mathbf{b}_1)|\,d^2(\mathrm{M}). \tag{12}$$

Это доказывает неравенство (8) в случае, когда $\mathbf{b} = \mathbf{b}_1$, так как левая часть неравенства (12) не меньше чем $\{|\varphi|(\Lambda)\}^{r+s-1}$.

Доказательство неравенства (8) во втором случае, т. е. в случае, когда в (9) $\mathbf{b} = \mathbf{b}_2$, аналогично приведенному выше с тем лишь исключением, что r и s меняются ролями.

Остается рассмотреть случай, когда

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_3 = (t,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ t),$$

что может случиться только при $r > 0$, $s > 0$ и

$$\varphi(\mathbf{b}) = 0.$$

В этом случае существует такой базис $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ решетки Λ, что

$$\mathbf{b}\mathbf{a}_j = 0 \qquad (2 \leqslant j \leqslant n).$$

Введем новые координаты x_j', полагая

$$x_1' = x_1 + x_n, \qquad x_n' = x_1 - x_n, \qquad x_j' = x_j \qquad (j \neq 1,\ n),$$

так что

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1'x_n' + x_2'^2 + \ldots + x_r'^2 - x_{r+1}'^2 - \ldots - x_{r+s-1}'^2,$$

и точки $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ лежат в подпространстве $x_1' = 0$. Точки решетки Λ, удовлетворяющие условию $x_1' = 0$, образуют $(n-1)$-мерную решетку M, и форма $\varphi(x)$, если $x_1' = 0$, зависит только от $n-2$ переменных $x_2, \ldots, x_{n-1}$. Отсюда следует, что $|\varphi(\mathbf{x})|$ принимает на решетке M сколь угодно малые значения; например, по вырожденному случаю теоремы Минковского о выпуклом теле существуют точки решетки M, отличные от начала и удовлетворяющие условиям

$$x_1' = 0, \qquad |x_j'| < \varepsilon \qquad (2 \leqslant j \leqslant n-1),$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало. Это следует из того, что указанное множество имеет бесконечный $(n-1)$-мерный объем. Таким образом, неравенство (8) справедливо также и в случае $\mathbf{b} = \mathbf{b}_3$.

Тем самым неравенство (6) полностью доказано.

Применяя неравенство (6) к решетке Λ^* определителя $d(\Lambda^*) = d^{-1}(\Lambda)$ и взаимной с ней решетке Λ, получаем

$$\{|\varphi|(\Lambda^*)\}^{r+s-1} \leqslant \zeta^{-2}\{|\varphi|(\Lambda)\}\,d^{-2}(\Lambda). \tag{6'}$$

Исключая из неравенств (6) и (6') $|\varphi|(\Lambda^*)$, мы приходим к неравенству

$$\{|\varphi|(\Lambda)\}^{(r+s)(r+s-2)} \leqslant \zeta^{-2(r+s)}\{d(\Lambda)\}^{2(r+s-2)},$$

откуда, используя соотношения (5) и (7), мы и получаем требуемое неравенство (2).

Теорема IV доказана.

В общем случае нет оснований ожидать, что в неравенстве (2) имеет место знак равенства, однако, как показывает приведенное ниже следствие, это иногда случается.

Следствие. *Имеют место равенства*

$$\Gamma_{4,0} = \frac{1}{2}, \qquad \Gamma_{2,2} = \frac{3}{2}.$$

Действительно, из теорем III и VII гл. II мы выводим

$$\Gamma_{3,0} = 2^{-\frac{1}{2}}, \qquad \Gamma_{2,1} = \Gamma_{1,2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда, используя теорему IV, мы получаем, что $\Gamma_{4,0}$ и $\Gamma_{2,2}$ не меньше указанных в формулировке значений. Как легко проверить, формы

$$\frac{1}{2}\{(x_2 + x_3 + x_4)^2 + (x_2 + x_1)^2 + (x_3 + x_1)^2 + x_4^2\}$$

и

$$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + x_4x_1 + x_4x_2 + x_4x_3 + 2x_1x_3 + 2x_1x_2$$

сигнатуры (4, 0), (2, 2) и определителей $\frac{1}{4}$, $\frac{9}{4}$ соответственно не представляют чисел, меньших по абсолютной величине чем 1 для целочисленных значений переменных, не равных одновременно нулю. Отсюда, используя рассмотренное в § 4 гл. I (см., в частности, лемму 4) соотношение между формами и решетками, мы приходим к утверждению следствия.

Как заметил Морделл, теорема IV позволяет найти $\Gamma_{8,0}$, поскольку $\Gamma_{7,0}$ известен. Кроме того, метод доказательства теоремы IV позволяет найти критический определитель (равный $\frac{1}{4}$, см. Оппенгейм [6]) множества

$$0 < x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 < 1,$$

поскольку критический определитель множества

$$0 < x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 1$$

известен $\left(\text{равен } \frac{1}{2}, \text{ см. Давенпорт [14]}\right)$.

Эти множества не являются звездными телами. Для получения указанного результата необходимо так выбрать точку $\mathbf{b} \in \Lambda^*$, чтобы величина $b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 - b_4^2$ была численно мала и неотрицательна. Метод Морделла можно использовать также для получения информации о критических решетках в тех случаях, когда в (2) имеет место равенство. Мы не будем здесь этого рассматривать, поскольку в п. 3 будут рассматриваться аналогичные вопросы для произведений линейных форм.

3. Прежде чем применять метод Морделла к тернарным кубическим формам, мы должны перевести теорему VIII гл. II с языка форм на язык решеток.

Лемма 3. *Критический определитель $\Delta(\mathcal{T})$ двумерного множества*

$$\mathcal{T}: \ |\psi(\mathbf{x})| < 1, \tag{1}$$

где

$$\psi(\mathbf{x}) = x_1 x_2 (x_1 + x_2), \tag{2}$$

равен $\Delta(\mathcal{T}) = 7^{1/3}$. Для этого множества существуют ровно две критические решетки M_1 и M_2. Пересечение этих решеток состоит только из **o**. *Пусть $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ — корни уравнения*

$$\vartheta^3 + \vartheta^2 - 2\vartheta - 1 = 0, \tag{3}$$

расположенные в известном порядке. Тогда решетка $\mathrm{M}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ с базисом $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, определяемым условиями

$$7^{\frac{1}{3}}\mathbf{a}_1 = (\vartheta_2 - \vartheta_3,\ \vartheta_3 - \vartheta_1), \quad 7^{\frac{1}{3}}\mathbf{a}_2 = \{\vartheta_1(\vartheta_2 - \vartheta_3),\ \ \vartheta_2(\vartheta_3 - \vartheta_1)\}, \tag{4}$$

является одной из двух критических решеток. Если $\vartheta_1', \vartheta_2', \vartheta_3'$ — перестановка чисел $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, то равенство $\mathrm{M}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) = \mathrm{M}(\vartheta_1', \vartheta_2', \vartheta_3')$ имеет место в том и только в том случае, когда эта перестановка четная.

Геометрический смысл этой леммы становится яснее, если ввести новые координаты, полагая

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = -\frac{1}{2} y_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} y_2,$$

так что

$$-x_1 - x_2 = -\frac{1}{2} y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} y_2.$$

В $\{y_1, y_2\}$-координатах область $\mathcal{T}$ имеет три асимптоты, составляющие друг с другом угол $2\pi/3$, и переходит в себя как при вращении на угол $2\pi/3$ вокруг начала координат, так и при отражении относительно асимптот. Тогда обе указанные в лемме критические решетки инвариантны при вращении плоскости на угол $2\pi/3$ и переходят друг в друга при отражении относительно асимптоты. Для читателя, быть может, будет поучительно нарисовать эти критические решетки, каждая из которых содержит 6 пар точек, лежащих на границе рассматриваемого множества. По поводу изучения геометрическими методами множеств $\mathcal{T}'$, которые в отношении симметричности и выпуклости аналогичны множеству $\mathcal{T}$, см. Бамба [1].

В дальнейшем мы не вводим координат y_1, y_2, как это было сделано выше, однако мы будем существенно использовать циклическую симметрию между x_1, x_2 и $-x_1 - x_2$.

Доказательство леммы 3. Заметим, что корни уравнения (3) имеют вид

$$\Theta_1 = 2\cos\frac{2\pi}{7}, \quad \Theta_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7}, \quad \Theta_3 = 2\cos\frac{6\pi}{7}, \tag{5}$$

так что числа $\vartheta_1, \vartheta_1, \vartheta_3$ получаются некоторой перестановкой из чисел $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$. Имеют место тривиальные тождества

$$\Theta_2 = \Theta_1^2 - 2, \quad \Theta_3 = \Theta_2^2 - 2, \quad \Theta_1 = \Theta_3^2 - 2, \quad \Theta_1 = 1 - \Theta_2 - \Theta_2^2 \text{ и т. д.} \tag{6}$$

Величина $\Delta(\mathcal{T})$ тотчас следует из теоремы VIII гл. II, так что остается лишь проверить утверждения леммы относительно критических решеток. Если M критическая решетка, то по теореме VIII гл. II существует такой базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ решетки M, что

$$\psi(u_1\mathbf{a}_1 + u_2\mathbf{a}_2) = -f_0(u_1, u_2), \tag{7}$$

где
$$f_0(u_1, u_2) = u_1^3 - u_1^2u_2 - 2u_1u_2^2 + u_2^3; \tag{8}$$
чтобы убедиться в этом, можно изменить порядок базисных элементов, существование которых утверждается в теореме VIII гл. II, или взять $-\mathbf{a}_k$ вместо $\mathbf{a}_k$ $(k=1, 2)$. Пусть
$$\mathbf{a}_k = (a_{1k}, a_{2k}) \qquad (k=1, 2); \tag{9}$$
определим числа a_{3k} условиями
$$a_{1k} + a_{2k} + a_{3k} = 0 \qquad (k=1, 2). \tag{10}$$
Тогда равенство (7) можно записать в виде
$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant 3} (a_{j1}u_1 + a_{j2}u_2) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant 3} (u_1 + \Theta_j u_2). \tag{11}$$
Отсюда
$$a_{j2} = \vartheta_j a_{j1} \qquad (j=1, 2, 3), \tag{12}$$
где $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ — некоторая перестановка чисел $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$. Из соотношений (10) и (12) мы получаем
$$\left.\begin{aligned} \lambda a_{j1} &= \vartheta_{j+1} - \vartheta_{j+2}, \\ \lambda a_{j2} &= \vartheta_j(\vartheta_{j+1} - \vartheta_{j+2}) \end{aligned}\right\} \qquad (j=1, 2, 3), \tag{13}$$
где $\vartheta_4 = \vartheta_1$, $\vartheta_5 = \vartheta_2$ и λ — некоторое число. На основании (11) мы получаем
$$\prod_j a_{j1} = 1,$$
а потому
$$\lambda^3 = (\vartheta_1 - \vartheta_2)(\vartheta_2 - \vartheta_3)(\vartheta_3 - \vartheta_1) = \tag{14}$$
$$= \pm 7, \tag{15}$$
где значение ± 7 может быть найдено либо прямо из равенств (5), либо на основании того факта, что квадрат правой части выражения (14) является по определению (п. 1 § 5 гл. II) дискриминантом многочлена $f_0(u_1, u_2)$. Отметим, что на основании равенства (14) векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ однозначно определяются числами $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$.

Однако имеет место тождество
$$f_0(w+v, v) = f_0(-v, w),$$
откуда следует, что если определить точку $\mathbf{a}_3$ решетки $\mathsf{M}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ условием
$$\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3 = \mathbf{o},$$
то
$$\psi(u_1\mathbf{a}_2 + u_2\mathbf{a}_3) = -f_0(u_1, u_2),$$
а потому точки $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ должны соответствовать некоторой перестановке $\vartheta_1', \vartheta_2', \vartheta_3'$ чисел $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, которая, как явствует из последнего замечания предыдущего параграфа, не может быть тождественной. Отсюда следует, что циклические замены базисов решетки $\mathsf{M}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$:
$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \to (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \to (\mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1) \to (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \to \ldots$$
должны соответствовать циклическим перестановкам чисел $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$. Таким образом, существует не более двух различных решеток вида $\mathsf{M}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$, где $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ — перестановка чисел $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.

Остается доказать, что для нечетной перестановки $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ чисел $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ решетки $\mathsf{M}(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ и $\mathsf{M}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ различны. Не умаляя общности, мы можем считать теперь, что
$$\vartheta_1 = \Theta_2, \quad \vartheta_2 = \Theta_1, \quad \vartheta_3 = \Theta_3.$$
Из соотношений (4), (6), (13) и (15) следует, что для произвольной точки $\mathbf{b}$ решетки $\mathsf{M}(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$
$$7^{\frac{1}{3}} b_j = P(\Theta_j) \qquad (j=1, 2, 3), \tag{16}$$
где $P(t)$ — многочлен от переменной t с целыми рациональными коэффициентами. На основании (3) мы можем считать, что степень $P(t)$ не превосходит 2; этот многочлен полностью определяется одним из чисел b_1, b_2, b_3. Если точка $\mathbf{b}$ принадлежит и решетке $\mathsf{M}(\Theta_2, \Theta_1, \Theta_3)$, то она одновременно имеет вид
$$7^{\frac{1}{3}} b_1 = Q(\Theta_2), \quad 7^{\frac{1}{3}} b_2 = Q(\Theta_1), \quad 7^{\frac{1}{3}} b_3 = Q(\Theta_3),$$
где $Q(t)$ — некоторый многочлен степени не выше 2 с целыми коэффициентами. Но тогда $P(\Theta_3) = Q(\Theta_3)$ и, стало быть, многочлены $P(t)$ и $Q(t)$ совпадают. А тогда
$$P(\Theta_2) = P(\Theta_1), \tag{17}$$
и так как числа $P(\Theta_j)$ $(j=1, 2, 3)$ сопряжены[1]), то
$$P(\Theta_3) = P(\Theta_2) = P(\Theta_1). \tag{18}$$

Наконец, используя (16) и (18), получаем
$$b_1 = b_2 = -b_1 - b_2,$$
откуда
$$b_1 = b_2 = 0.$$

[1]) Равенства (18) можно получить также, замечая, что на основании (17) $P(\Theta_1^2 - 2) = P(\Theta_1)$, а потому многочлен $P(t^2-2) - P(t)$ делится на $t^3 + t^2 - 2t - 1$. Отсюда, полагая $t = \Theta_2$, получаем $P(\Theta_2) = P(\Theta_3)$.

Таким образом, как и требовалось, точка о является единственной общей точкой решеток $M(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3)$ и $M(\Theta_2, \Theta_1, \Theta_3)$.

Лемма 3 доказана.

4. Применим метод Морделла для исследования форм $x_1x_2x_3$ и $x_1(x_2^2+x_3^2)$. Доказываемые нами результаты эквивалентны ослабленным формам теорем X и XI гл. II, где можно найти ссылки на соответствующую литературу. Позднее мы, используя теоремы изоляции, докажем несколько более сильные утверждения, однако в полном объеме теорема X гл. II в этой книге доказана не будет. Применяемые методы, как будет ясно из нашего рассмотрения, можно распространить на произведения n вещественных или комплексных форм от n переменных, однако в этих случаях они не приводят к нахождению точных критических определителей (Морделл [4, 6]).

Теорема V. (A) *Критический определитель трехмерного множества*

$$\mathcal{N}_1\colon\ |x_1x_2x_3| < 1 \tag{1}$$

равен $\Delta(\mathcal{N}_1)=7$. *Обозначим через* N_1 *решетку с базисом*

$$\mathbf{b}_1=(1,\ 1,\ 1),\quad \mathbf{b}_2=(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3),\quad \mathbf{b}_3=(\vartheta_1^2,\ \vartheta_2^2,\ \vartheta_3^2), \tag{2}$$

где $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ — *корни уравнения*

$$\vartheta^3+\vartheta^2-2\vartheta-1=0, \tag{3}$$

взятые в определенном порядке. Все критические решетки Λ *множества* $\mathcal{N}_1$, *содержащие точку* **a**, *для которой*

$$|a_1a_2a_3|=1, \tag{4}$$

имеют вид

$$\Lambda=\omega N_1, \tag{5}$$

где ω — *некоторый автоморфизм множества* $\mathcal{N}_1$.

(B) *Критический определитель трехмерного множества*

$$\mathcal{N}_2\colon\ |x_1|(x_2^2+x_3^2)<1 \tag{6}$$

равен $\Delta(\mathcal{N}_2)=\frac{1}{2}(23)^{\frac{1}{2}}$. *Обозначим через* N_2 *решетку с базисом*

$$\left.\begin{array}{l}(1,\ 1,\ 1),\quad \left\{\vartheta_1,\ \frac{1}{2}(\vartheta_2+\vartheta_3),\ \frac{1}{2i}(\vartheta_2-\vartheta_3)\right\},\\ \left\{\vartheta_1^2,\ \frac{1}{2}(\vartheta_2^2+\vartheta_3^2),\ \frac{1}{2i}(\vartheta_2^2-\vartheta_3^2)\right\},\end{array}\right\} \tag{7}$$

где $i^2=-1$, ϑ_1 — *вещественный, а* ϑ_2, ϑ_3 — *комплексные корни уравнения*

$$\vartheta^3-\vartheta^2+1=0. \tag{8}$$

Тогда каждая критическая решетка Λ *для множества* $\mathcal{N}_2$, *содержащая точку* **a**, *для которой*

$$|a_1(a_2^2+a_3^2)|=1, \tag{9}$$

имеет вид

$$\Lambda=\omega N_2, \tag{10}$$

где ω — *некоторый автоморфизм множества* $\mathcal{N}_2$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение (A). Решетка N_1, указанная в формулировке теоремы, заведомо является $\mathcal{N}_1$-допустимой. Действительно, координаты произвольной точки **a** решетки N_1 имеют вид

$$a_j=u_1+u_2\vartheta_j+u_3\vartheta_j^2\qquad (j=1,\ 2,\ 3), \tag{11}$$

где числа u_1, u_2, u_3 целые. Тогда, так как произведение $a_1a_2a_3$ симметрично относительно $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$, оно является целым рациональным числом. Если $a_1a_2a_3=0$, то равно нулю одно из чисел a_j, например $u_1+u_2\vartheta_1+u_3\vartheta_1^2=0$, откуда, так как ϑ_1 не удовлетворяет никакому уравнению степени меньше чем 3, следует, что $u_1=u_2=u_3=0$. Как было уже проверено при доказательстве леммы 3,

$$d(N_1)=|\det(\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \mathbf{b}_3)|=|(\vartheta_1-\vartheta_2)(\vartheta_2-\vartheta_3)(\vartheta_3-\vartheta_1)|=7. \tag{12}$$

Решетки, получающиеся после перестановок чисел $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ в равенствах (2), отличаются друг от друга на некоторые автоморфизмы множества $\mathcal{N}_1$, а именно на автоморфизмы, отвечающие перестановкам осей координат.

Положим

$$\varphi(\mathbf{x})=x_1x_2x_3$$

и, как прежде,

$$|\varphi|(\Lambda)=\inf_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}}|\varphi(\mathbf{a})|.$$

Мы покажем сначала, что для любой решетки Λ

$$\{|\varphi|(\Lambda)\}^2\leqslant 7^{-1}\{|\varphi|(\Lambda^*)\}\,d^3(\Lambda), \tag{13}$$

где Λ^* — решетка, взаимная с решеткой Λ. Доказательство этого факта близко следует схеме доказательства теоремы IV. Нам достаточно получить неравенство

$$\{|\varphi|(\Lambda)\}^2\leqslant 7^{-1}|\varphi(\mathbf{b})|\,d^3(\Lambda), \tag{14}$$

где **b** — любая примитивная точка решетки Λ^*.

Пусть сначала $\varphi(\mathbf{b})=0$. Тогда, применив подходящий автоморфизм множества $\mathcal{N}_1$ (см. п. 1 § 2), мы, не уменьшая общности, можем считать, что [1])

$$\mathbf{b}=(1,\ 0,\ 0) \tag{15}$$

[1]) Поскольку мы можем предположить, что $b_1\neq 0$, $b_3=0$. Точка (15) получается при $b_2=0$, точка (16) — при $b_2\neq 0$.

или

$$\mathbf{b}=(1,\ 1,\ 0). \tag{16}$$

В случае (15) плоскость

$$\mathbf{bx}=0,$$

содержащая две линейно независимые точки решетки Λ, является плоскостью $x_1=0$, и все лежащие на ней точки удовлетворяют уравнению $\varphi(\mathbf{x})=0$. Поэтому неравенство (14) заведомо справедливо в этом случае. В случае (16) на плоскости

$$x_1+x_2=0 \tag{17}$$

имеются две линейно независимые точки решетки Λ. Для этих точек

$$\varphi(\mathbf{x})=x_1x_2x_3=-x_2^2x_3, \tag{18}$$

и двумерное множество $|x_2^2x_3|<\varepsilon$ для любого $\varepsilon>0$ является множеством бесконечного типа. Поэтому заведомо существуют точки $\mathbf{a}\in\Lambda$, отличные от начала $\mathbf{o}$, для которых $|\varphi(\mathbf{a})|<\varepsilon$. Это доказывает неравенство (14) в случае, когда точка $\mathbf{b}$ имеет вид (16).

Пусть теперь $\varphi(\mathbf{b})\neq 0$. В этом случае после применения подходящего автоморфизма можно считать, что

$$\mathbf{b}=(t,\ t,\ t), \qquad t>0, \tag{19}$$

а потому

$$\varphi(\mathbf{b})=t^3. \tag{20}$$

Предположим, что точка $\mathbf{b}$ является примитивной, так что по следствию леммы 6 гл. I двумерное множество, состоящее из точек $(x_1,\ x_2)$, для которых

$$(x_1,\ x_2,\ -x_1-x_2)\in\Lambda,$$

является решеткой M определителя

$$d(\mathrm{M})=td(\Lambda).$$

Но по лемме 3

$$\inf_{\substack{(a_1,\ a_2)\in \mathrm{M}\\ (a_1,\ a_2)\neq \mathbf{o}}}|a_1a_2(a_1+a_2)|\leqslant\left\{7^{-\frac{1}{3}}d(\mathrm{M})\right\}^{\frac{3}{2}}=7^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{2}}d^{\frac{3}{2}}(\Lambda),$$

где показатель степени $\frac{3}{2}$ объясняется соображениями однородности. Тем более

$$|\varphi|(\Lambda)\leqslant 7^{-\frac{1}{2}}t^{\frac{3}{2}}d^{\frac{3}{2}}(\Lambda).$$

Это доказывает неравенство (14) в случае, когда $\mathbf{b}$ задается условиями (19) и (20). Тем самым неравенства (13) и (14) полностью доказаны.

Меняя ролями Λ и Λ^* в неравенстве (13) и используя равенство $d(\Lambda^*)=d^{-1}(\Lambda)$, мы получаем

$$\{|\varphi|(\Lambda^*)\}^2\leqslant 7^{-1}\{|\varphi|(\Lambda)\}\,d^{-3}(\Lambda). \tag{13'}$$

Исключая $|\varphi|(\Lambda^*)$ из неравенств (13) и (13′), мы получаем

$$|\varphi|(\Lambda)\leqslant 7^{-1}d(\Lambda), \tag{21}$$

откуда, так как $\mathcal{N}_1$ является множеством точек $\mathbf{x}$, удовлетворяющих неравенству $|\varphi(\mathbf{x})|<1$, мы выводим $\Delta(\mathcal{N}_1)\leqslant 7$ и, значит, $\Delta(\mathcal{N}_1)=7$, так как мы уже указали допустимую решетку N_1, для которой $d(\mathrm{N}_1)=7$.

Остается рассмотреть критические решетки Λ_c, имеющие точки на границе множества $\mathcal{N}_1$. Применив подходящий автоморфизм, мы можем считать, что

$$(1,\ 1,\ 1)\in\Lambda_c, \quad d(\Lambda_c)=7. \tag{22}$$

Очевидно, что рассмотренные выше двумерные решетки могут оказаться критическими решетками для соответствующих двумерных множеств, и необходимо лишь проверить, что это возможно только тогда, когда $\Lambda_c=\mathrm{N}_1$ при надлежащем выборе $\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3$ (N_1 определено в теореме V. (A)).

Отметим сначала, что по (13) и (13′)

$$|\varphi|(\Lambda_c^*)=7^{-2}; \tag{23}$$

поэтому решетка M_c', которая состоит из точек

$$(x_1,\ x_2), \quad \text{где} \quad (x_1,\ x_2,\ -x_1-x_2)\in\Lambda_c^*, \tag{24}$$

и определитель которой равен

$$d(\mathrm{M}_c')=d(\Lambda_c^*)=7^{-1},$$

должна быть одной из двух критических решеток множества

$$|x_1x_2(x_1+x_2)|<7^{-2}, \tag{25}$$

указанных в лемме 3. Но мы уже видели, что при любом выборе чисел $\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3$ решетка N_1 является критической; поэтому решетка

$$\mathrm{M}_1'=\mathrm{M}_1'(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3),$$

определяемая равенствами (24), в которых решетка Λ_c заменена на решетку $\mathrm{N}_1=\mathrm{N}_1(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3)$, также является критической. Из доказательства леммы 3 ясно, что обе критические решетки множества (25) имеют вид $\mathrm{M}_1'(\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3)$ при подходящих выборах чисел $\vartheta_1,\ \vartheta_2,\ \vartheta_3$. Поэтому, не уменьшая общности, мы можем считать, что $\mathrm{M}_c'=\mathrm{M}_1'$, т. е. что взаимные решетки Λ_c^* и N_1^* совпадают по крайней мере на плоскости $x_1+x_2+x_3=0$. Пусть теперь $\mathbf{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ — любая точка решетки Λ_c^* (а значит, и N_1^*), удовлетворяющая условиям

$$|b_1b_2b_3|=7^{-2}, \quad b_1+b_2+b_3=0. \tag{26}$$

Тогда обе решетки $\Lambda_c^{\mathbf{b}}$, $\mathrm{N}_1^{\mathbf{b}}$, состоящие из точек решеток Λ_c и N_1 соответственно, лежащих в плоскости

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=0, \qquad (27)$$

должны быть критическими для двумерного сечения множества $|x_1x_2x_3|<1$ гиперплоскостью (27). По лемме 3 имеются только две критические решетки, и их пересечение состоит только из начала координат. Так как на основании (27) точка (1, 1, 1) принадлежит и решетке $\Lambda_1^{\mathbf{b}}$ и решетке $\Lambda_c^{\mathbf{b}}$, то эти решетки должны совпадать. Таким образом, решетки Λ_c и Λ_1 совпадают на любой гиперплоскости (27), где точка $\mathbf{b}$ удовлетворяет условиям (26).

Но решетка N_1^* имеет базис $\mathbf{b}_1^*$, $\mathbf{b}_2^*$, $\mathbf{b}_3^*$ (например), где точки $\mathbf{b}=\mathbf{b}_1^*$, $\mathbf{b}_2^*$ удовлетворяют условиям (26); чтобы убедиться в этом, нам достаточно только выбрать подходящий базис $\mathbf{b}_1^*$, $\mathbf{b}_2^*$ для сечения решетки N_1^* плоскостью $x_1+x_2+x_3=0$ и дополнить его до базиса N_1^*. Пусть $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ — взаимный базис решетки N_1. Тогда, полагая в неравенстве (25) $\mathbf{b}=\mathbf{b}_1^*$, $\mathbf{b}_2^*$, мы видим, что решетка Λ_c содержит все точки $\mathbf{a}$ решетки N_1, для которых

$$\mathbf{b}_1^*\mathbf{a}=0 \quad \text{или} \quad \mathbf{b}_2^*\mathbf{a}=0,$$

т. е. все точки решетки N_1, имеющие вид

$$u_2\mathbf{b}_2+u_3\mathbf{b}_3 \quad \text{или} \quad v_1\mathbf{b}_1+v_3\mathbf{b}_3,$$

где u_2, u_3, v_1, v_3 — любые целые числа. Отсюда следует, что решетка Λ_c должна содержать любую точку

$$u_1\mathbf{b}_1+u_2\mathbf{b}_2+u_3\mathbf{b}_3=(u_2\mathbf{b}_2+u_3\mathbf{b}_3)+(u_1\mathbf{b}_1+0\mathbf{b}_3)$$

решетки N_1. Так как $d(\mathrm{N}_1)=d(\Lambda_c)$, то, как и требовалось, $\Lambda_c=\mathrm{N}_1$.

Тем самым теорема V. (A) доказана. Теорема V. (B) доказывается аналогично, за исключением того, что вместо леммы 3 используются теоремы VII и VII A гл. III. Детальное проведение этого доказательства мы предоставляем читателю.

Теорема V доказана.

§ 4. Существование автоморфизмов

1. В этом параграфе мы докажем существование общих автоморфизмов решетки Λ и формы $\varphi(\mathbf{x})$, которая целочисленна и отлична от нуля на Λ, и сделаем отсюда выводы относительно существования таких решеток Λ в одном частном случае.

Нам потребуется количественная форма критерия компактности Малера (теорема IV гл. V).

Лемма 4. *Существует число*

$$N_0=N_0(n,\ \Delta_1,\ \varkappa,\ \varepsilon), \qquad (1)$$

зависящее только от целого числа $n>0$ и от чисел $\Delta_1>0$, $\varkappa>0$, $\varepsilon>0$ и обладающее следующим свойством: среди любых N_0 решеток $\Lambda_j\,(1\leqslant j\leqslant N_0)$ в n-мерном пространстве, для которых

$$d(\Lambda_j)\leqslant\Delta_1 \qquad (2)$$

и

$$|\Lambda_j|\geqslant\varkappa, \qquad (3)$$

найдется по меньшей мере одна такая пара решеток, скажем Λ_1, Λ_2, что

$$\Lambda_2=\boldsymbol{\tau}\Lambda_1, \qquad (4)$$

где $\boldsymbol{\tau}$ — линейное преобразование, удовлетворяющее условиям

$$\|\boldsymbol{\tau}-\boldsymbol{\iota}\|<\varepsilon, \quad \|\boldsymbol{\tau}^{-1}-\boldsymbol{\iota}\|<\varepsilon; \qquad (5)$$

здесь $\boldsymbol{\iota}$ — тождественное преобразование.

Доказательство. Напомним, что

$$|\Lambda|=\inf_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}}|\mathbf{a}| \qquad (6)$$

и что для линейного преобразования $\mathbf{X}=\boldsymbol{\sigma}\mathbf{x}$, где $X_j=\sum\sigma_{jk}x_k$, $\|\boldsymbol{\sigma}\|=n\max|\sigma_{jk}|$.

Для доказательства леммы можно было бы видоизменить доказательство теоремы IV, данное в гл. V; однако проще взять за основу другое доказательство, намеченное в п. 2 § 2 гл. VIII. Мы предполагаем, что у нас имеется N_0 решеток Λ_j, где число N_0 будет определено позднее. По лемме 3 гл. VIII существуют такие числа $\Delta_0>0$ и K, зависящие только от Δ_1 и $\varkappa$, что для любой решетки Λ_j, удовлетворяющей условиям (2) и (3),

$$d(\Lambda_j)\geqslant\Delta_0>0, \qquad (7)$$

причем в шаре

$$|\mathbf{x}|\leqslant K$$

имеется n линейно независимых точек этой решетки.

Тогда по лемме 8 гл. V существует базис

$$\mathbf{b}_{1j},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{nj}$$

решетки Λ_j, для которого

$$|\mathbf{b}_{ij}|\leqslant nK \quad (1\leqslant i\leqslant n,\quad 1\leqslant j\leqslant N_0). \qquad (8)$$

Пусть $\eta>0$ — произвольно малое число, которое будет уточнено позднее. Тогда на основании (8), если N_0 больше некоторого числа N_1, зависящего только от n, η, Δ_0, K, т. е. от n, η, Δ_1, $\varkappa$, то найдутся такие две решетки Λ_j, скажем Λ_1 и Λ_2, что

$$|\mathbf{b}_{i1} - \mathbf{b}_{i2}| < \eta \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{9}$$

Так как точки $\mathbf{b}_{i1}$ линейно независимы, то

$$\mathbf{b}_{i2} - \mathbf{b}_{i1} = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}\mathbf{b}_{j1},$$

где σ_{ij} — некоторые числа. Но тогда для чисел σ_{ij} из неравенств (7), (8) и (9) мы получаем оценки

$$|\sigma_{ij}| \leqslant \sigma_0\eta \quad (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant n),$$

где σ_0 — некоторое число, зависящее только от Δ_0, K и n. Грубая оценка, получающаяся, если оценить элементы матрицы, обратной к матрице, составленной из столбцов $\mathbf{b}_{i1}\,(1 \leqslant i \leqslant n)$, дает

$$\sigma_0 = n!\ \Delta_0^{-1}(nK)^{n-1}.$$

Отсюда

$$\|\boldsymbol{\sigma}\| < \varepsilon,$$

если η выбрано так, что $n\sigma_0\eta < \varepsilon$. Полагая $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\iota} + \boldsymbol{\sigma}$, мы получаем, что $\boldsymbol{\tau}\Lambda_1 = \Lambda_2$ и $\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\| < \varepsilon$. Так как $\Lambda_1 = \boldsymbol{\tau}^{-1}\Lambda_2$, то имеет место и неравенство $\|\boldsymbol{\tau}^{-1} - \boldsymbol{\iota}\| < \varepsilon$, ввиду того что (9) симметрично относительно Λ_1 и Λ_2.

Лемма 4 доказана.

2. Нам потребуется также следующая довольно тривиальная лемма, которая, грубо говоря, утверждает, что форма $\varphi(\mathbf{x})$ не может быть целочисленной на двух существенно различных решетках.

Лемма 5. *Пусть $\varphi(\mathbf{x})$ — форма, целочисленная на решетке Λ. Тогда существует $\eta > 0$, зависящее только от $\varphi(\mathbf{x})$ и Λ, которое обладает следующим свойством: если $\varphi(\mathbf{x})$ целочисленна на решетке $\boldsymbol{\tau}\Lambda$ и*

$$\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\| < \eta, \tag{1}$$

то $\boldsymbol{\tau}$ является автоморфизмом формы $\varphi(\mathbf{x})$.

Доказательство. Пусть степень формы $\varphi(\mathbf{x})$ равна m, и пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис решетки Λ. Если преобразование $\boldsymbol{\tau}$ удовлетворяет неравенству (1) с достаточно малым η, то мы получим неравенство

$$\left|\varphi\left(\boldsymbol{\tau}\sum_j u_j\mathbf{b}_j\right) - \varphi\left(\sum_j u_j\mathbf{b}_j\right)\right| < 1, \tag{2}$$

справедливое для всех таких целых чисел u_j, что

$$0 \leqslant u_j \leqslant m \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{3}$$

Из неравенства (2) следует, что

$$\varphi\left(\boldsymbol{\tau}\sum_j u_j\mathbf{b}_j\right) = \varphi\left(\sum_j u_j\mathbf{b}_j\right) \tag{4}$$

для всех целых чисел, удовлетворяющих условию (3), ибо обе части равенства (4) являются целыми числами. По лемме 1 отсюда следует, что соотношение (4) справедливо для всех вещественных чисел u_j. Так как каждая точка $\mathbf{x}$ имеет вид $\sum u_j\mathbf{b}_j$ с вещественными u_j, то мы получаем, что $\varphi(\boldsymbol{\tau}\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x}$.

Лемма 5 доказана.

Следствие. *Предположим, кроме того, что форма $\varphi(\mathbf{x})$ отлична от нуля на решетке Λ и что для некоторого Δ_1*

$$d(\Lambda) \leqslant \Delta_1.$$

Тогда η можно считать зависящим только от φ и Δ_1, а не от решетки Λ.

Действительно, в этом случае

$$|\varphi(\mathbf{a})| \geqslant 1 \quad (\mathbf{a} \in \Lambda,\ \mathbf{a} \neq \mathbf{o}),$$

а потому

$$|\Lambda| \geqslant c > 0,$$

где c зависит только от φ. Как и при доказательстве леммы 4, отсюда следует, что существует базис $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ решетки Λ, для которого

$$|\mathbf{b}_j| \leqslant nK \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

где K зависит только от Δ_1 и c, т. е. от Δ_1 и φ. Таким образом, все точки $\sum u_j\mathbf{b}_j$, удовлетворяющие условию (3), лежат в шаре

$$|\mathbf{x}| \leqslant n^2mK. \tag{5}$$

А тогда неравенство (2) справедливо для достаточно малых $\eta > 0$, зависящих только от φ и от K, так как $\varphi(\mathbf{x})$ равномерно непрерывна в шаре (5). Отсюда вытекает следствие.

3. Мы теперь располагаем всем необходимым, чтобы доказать основную теорему о существовании автоморфизмов.

Теорема VI. *Пусть форма $\varphi(\mathbf{x})$ целочисленна и отлична от нуля на решетке Λ, и пусть $\boldsymbol{\sigma}$ — любой автоморфизм формы $\varphi(\mathbf{x})$. Предположим, что $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Тогда существует автоморфизм $\boldsymbol{\tau}$ формы $\varphi(\mathbf{x})$, удовлетворяющий неравенству*

$$\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\| < \varepsilon \tag{1}$$

и такой, что преобразование

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\sigma}^{-u}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\sigma}^{v}, \tag{2}$$

где u, v — некоторые целые числа с условием

$$0 \leqslant u < v, \tag{3}$$

является автоморфизмом решетки Λ.

Не исключено, конечно, что ω может быть тождественным преобразованием.

Доказательство. По предположению

$$|\varphi|(\Lambda) = \inf_{\substack{\mathbf{a} \in \Lambda \\ \mathbf{a} \neq \mathbf{o}}} |\varphi(\mathbf{a})| \geqslant 1, \tag{4}$$

а потому для всех целых u

$$|\varphi|(\sigma^u \Lambda) \geqslant 1. \tag{5}$$

Отсюда следует, что для всех целых u

$$|\sigma^u \Lambda| \geqslant c > 0, \tag{6}$$

где c — некоторая постоянная. Так как по теореме I $\det(\sigma) = \pm 1$, то для всех целых u имеет место равенство

$$d(\sigma^u \Lambda) = d(\Lambda). \tag{7}$$

В силу соотношений (6) и (7) к множеству решеток $\sigma^u \Lambda$ $(1 \leqslant u \leqslant N)$, где N достаточно велико, применима лемма 4. Согласно этой лемме, найдутся такие решетки $\sigma^u \Lambda$ и $\sigma^v \Lambda$, что

$$\sigma^u \Lambda = \tau \sigma^v \Lambda \quad (u < v), \tag{8}$$

где

$$\|\tau - \iota\| < \varepsilon, \quad \|\tau^{-1} - \iota\| < \varepsilon. \tag{9}$$

Уменьшив, если это необходимо, число ε, мы можем считать, что $0 < \varepsilon < \eta$, где η — число, фигурирующее в следствии леммы 5 с $\Delta_1 = d(\Lambda)$. Тогда мы можем применить следствие леммы 5 к решетке $\sigma^v \Lambda$ вместо решетки Λ и на основании (8) и (9) заметить, что τ является автоморфизмом формы $\varphi(\mathbf{x})$. Таким образом, преобразование ω, определенное равенством (2), обладает всеми требуемыми свойствами.

Теорема VI доказана.

Теорема VI становится неверной, если опустить условие о том, что форма $\varphi(\mathbf{x})$ не обращается в нуль на решетке Λ. В качестве примера можно рассмотреть случай, когда $\Lambda = \Lambda_0$ — решетка целочисленных двумерных векторов, $\varphi(\mathbf{x}) = x_1 x_2$ и σ — автоморфизм, задаваемый условиями $x_1 \to 2x_1$, $x_2 \to \frac{1}{2} x_2$. Однако в пространствах большего числа измерений иногда оказывается возможным, используя дополнительные соображения, например ограничиваясь рассмотрением автоморфизмов, не меняющих один или несколько элементов решетки Λ или взаимной решетки Λ^*, строить автоморфизмы решетки Λ даже в том случае, когда $\varphi(\mathbf{x})$ может обращаться на Λ в нуль.

4. Теорема VI принимает особенно простой вид для

$$\varphi(\mathbf{x}) = \left\{ \prod_{1 \leqslant j \leqslant r} x_j \right\} \left\{ \prod_{1 \leqslant k \leqslant s} (x_{r+k}^2 + x_{r+s+k}^2) \right\}, \tag{1}$$

где $n = r + 2s$. В этом случае она, по существу, эквивалентна теореме Дирихле о существовании единиц в полях алгебраических чисел, но несколько сильнее ее. Мы, как обычно, положим

$$\left.\begin{aligned} &z_j = x_j && (1 \leqslant j \leqslant r), \\ &\left.\begin{aligned} z_{r+k} &= x_{r+k} + i x_{r+s+k}, \\ z_{r+s+k} &= x_{r+k} - i x_{r+s+k} \end{aligned}\right\} && (1 \leqslant k \leqslant s). \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

С координатами z_j работать удобнее, чем с x_j, так что мы будем говорить о z_j как о соответствующих комплексных координатах. Для краткости мы будем говорить, что множество чисел λ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ согласовано с формой $\varphi(\mathbf{x})$, если

λ_j — вещественные числа $(1 \leqslant j \leqslant n)$,

λ_{r+k}, λ_{r+s+k} — комплексные сопряженные числа $(1 \leqslant k \leqslant s)$.

Теорема VII. *Пусть $\varphi(\mathbf{x})$ — форма (1), и пусть λ_j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ — числа, согласованные с формой $\varphi(\mathbf{x})$, причем*

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \lambda_j = 1.$$

Предположим, что $\varphi(\mathbf{x})$ целочисленна на решетке Λ и что $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Тогда существуют числа ω_j, согласованные с формой $\varphi(\mathbf{x})$, и целое число $m > 0$, для которых

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant n} \omega_j = 1, \quad \left| \frac{\lambda_j^m}{\omega_j} - 1 \right| < \varepsilon \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{3}$$

причем преобразование ω, задаваемое в соответствующих комплексных координатах условиями

$$Z_j = \omega_j z_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n),$$

является автоморфизмом решетки Λ.

Доказательство. Автоморфизмы формы $\varphi(\mathbf{x})$ рассматривались в п. 1 § 2. Из полученных там результатов ясно, что если $\mathbf{Z} = \tau \mathbf{z}$ — некоторый автоморфизм формы φ, заданный в соответствующих комплексных координатах, и если

$$\|\tau - \iota\| < n, \tag{4}$$

где n — размерность, то τ должно иметь вид

$$Z_j = \tau_j z_j \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{5}$$

т. е. формы в правой части не могут переставляться. Действительно, если τ записывается в виде $Z_j=\sum_k \tau_{jk}z_k$, то из неравенств (4) следует, что $|\tau_{jj}-1|<1$, откуда $\tau_{jj}\neq 0\,(1\leqslant j\leqslant n)$, а единственными автоморфизмами такого вида являются автоморфизмы (5). Если преобразование $\mathbf{Z}=\boldsymbol{\lambda}\mathbf{z}$ задано в комплексных координатах уравнениями

$$Z_j=\lambda_j z_j \quad (1\leqslant j\leqslant n),$$

то отсюда следует теперь, что преобразования $\boldsymbol{\lambda}$ и $\boldsymbol{\tau}$ коммутируют. Поэтому, применяя теорему VI при $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\lambda}$, мы получаем, что

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{\lambda}^{-u}\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\lambda}^{v}=\boldsymbol{\lambda}^{m}\boldsymbol{\tau},$$

где $m=v-u$. Преобразование $\boldsymbol{\omega}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Теорема VII доказана.

Впоследствии нам потребуется более подробная информация об автоморфизмах $\boldsymbol{\omega}$ решеток, на которых целочисленна форма $\varphi(\mathbf{x})$, задаваемая равенством (1); ее удобно изложить здесь.

Лемма 6. *Пусть форма $\varphi(\mathbf{x})$, задаваемая уравнением* (1), *целочисленна на решетке Λ, и пусть автоморфизм $\mathbf{Z}=\boldsymbol{\omega}\mathbf{z}$ решетки Λ задается в соответствующих комплексных координатах уравнениями*

$$Z_j=\omega_j z_j \quad (1\leqslant j\leqslant n).$$

Тогда числа ω_j являются алгебраическими единицами; иными словами, они удовлетворяют уравнению вида

$$f(\omega_j)=0,$$

где

$$f(t)=t^m+c_1t^{m-1}+\ \ldots\ +c_{m-1}t\pm 1=0; \tag{6}$$

здесь m — некоторое натуральное число, а $c_1, \ldots, c_{m-1}$ — целые рациональные числа.

Доказательство. Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис решетки Λ, так что

$$\boldsymbol{\omega}\mathbf{b}_j=\sum_{1\leqslant k\leqslant n} m_{jk}\mathbf{b}_k, \tag{7}$$

где m_{jk} — некоторые целые числа. Так как векторы $\boldsymbol{\omega}\mathbf{b}_j$ снова образуют базис, то

$$\det(m_{jk})=\pm 1.$$

Пусть в соответствующих комплексных координатах

$$\mathbf{b}_k=(\beta_{1k}, \ldots, \beta_{nk}) \quad (1\leqslant k\leqslant n), \tag{8}$$

и пусть $\mathbf{B}$ — матрица, строки которой имеют вид (8). Тогда равенства (7) записываются в виде

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\omega}=\mathbf{mB}, \tag{9}$$

где $\mathbf{m}$ — матрица с элементами m_{jk}, $\boldsymbol{\omega}$ — диагональная матрица с диагональными элементами $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Поэтому

$$\boldsymbol{\omega}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{mB},$$

и числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ удовлетворяют уравнению $f(\omega_j)=0$, где

$$f(t)=\det(t\boldsymbol{\iota}-\mathbf{m}),$$

которое имеет вид (6).

Лемма 6 доказана.

Из леммы непосредственно вытекают два предложения.

Следствие 1. *Числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ удовлетворяют одному и тому же уравнению вида* (6) *степени $m=n$.*

Следствие 2. *Если число ω_j рационально, то $\omega_j=\pm 1$.*

Хотя это и не понадобится в дальнейшем, интересно отметить, что теорема VII и лемма 6 легко позволяют получить полную характеристику решеток Λ, на которых форма $\varphi(\mathbf{x})$ отлична от нуля и пропорциональна целочисленной форме, по крайней мере в случае, когда $r>0$. Мы лишь наметим доказательство; по поводу деталей см. Бахман [1], гл. 12.

Лемма 7. *Все решетки Λ, на которых форма $\varphi(\mathbf{x})$ пропорциональна целочисленной форме, могут быть получены следующим образом. Пусть $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_n$ — множество сопряженных алгебраических полей степени n над полем рациональных чисел, где $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_r$ — вещественные и $\mathfrak{K}_{r+k}$, $\mathfrak{K}_{r+s+k}$ — комплексные сопряженные поля $(1\leqslant k\leqslant s)$. Пусть $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1n}$ — линейно независимые над полем рациональных чисел элементы поля $\mathfrak{K}_1$, и пусть $\gamma_{lk}\,(1\leqslant l\leqslant n)$ — сопряженное с γ_{1k} число поля $\mathfrak{K}_l$. Пусть M — решетка с базисом*

$$\mathbf{c}_k=(\gamma_{1k}, \ldots, \gamma_{nk}) \qquad (1\leqslant k\leqslant n)$$

в соответствующих комплексных координатах. Тогда, для того чтобы форма $\varphi(\mathbf{x})$ дыла отлична от нуля на решетке Λ и пропорциональна на ней целочисленной форме, необходимо и достаточно, чтобы решетка Λ имела вид

$$\Lambda=t\boldsymbol{\tau}\mathrm{M},$$

где t — вещественное число, $\boldsymbol{\tau}$ — автоморфизм формы $\varphi(\mathbf{x})$ и M — решетка описанного выше типа.

Доказательство. В случае, когда $r>0$, доказательство короче, чем формулировка. Применяя теорему VII к случаю, когда

$$\lambda_1=2^{n-1}, \quad \lambda_j=\frac{1}{2} \qquad (2\leqslant j\leqslant n),$$

мы приходим к выводу о существовании автоморфизма $\boldsymbol{\omega}$ формы $\varphi(\mathbf{x})$ и решетки Λ, для которого

$$\omega_1>1, \quad |\omega_j|<1 \qquad (2\leqslant j\leqslant n). \tag{10}$$

Так как числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ удовлетворяют одному и тому же уравнению степени n, то, согласно неравенствам (10), степень каждого из них должна быть равна точно n и, стало быть, они сопряжены. Пусть $\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ — базис решетки Λ. Используем обозначения равенств (7) и (8). Тогда из (9) следует, что вектор

$$(\beta_{j1}, \ldots, \beta_{jn})$$

является собственным вектором матрицы $\mathbf{m}$, принадлежащим к собственному числу ω_j. Но, очевидно, матрица $\mathbf{m}$ имеет множество сопряженных собственных векторов

$$(\gamma_{j1}, \ldots, \gamma_{jn})$$

в полях $\mathfrak{K}_j$, порожденных ω_j, и если отождествить эти векторы с векторами, фигурирующими в формулировке леммы, то легко убедиться, что получающаяся решетка M обладает всеми требуемыми свойствами.

В случае $r=0$ ситуация несколько сложнее, так как может оказаться невозможным достигнуть того, чтобы степень всех чисел ω_j была равна n, хотя можно добиться, чтобы все они имели степень $\frac{1}{2}n$. Пусть $\mathbf{a}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\mathbf{b}=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — два линейно независимых вектора решетки Λ, записанные в соответствующей комплексной системе координат. Тогда $\varphi(u\mathbf{a}+v\mathbf{b})$ является многочленом от переменных u и v с коэффициентами, пропорциональными целым числам, причем для целочисленных значений переменных u, v этот многочлен обращается в нуль только в случае $u=v=0$. Отсюда следует, что α_1/β_1 является алгебраическим числом. Аналогично, если точка $\mathbf{c}=(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\in\Lambda$ линейно не зависит от точек $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, то отношения α_1/γ_1, β_1/γ_1, так же как и $(p\alpha_1+q\beta_1)/\gamma_1$ для любых целых p и q, имеют степень n. Затем нетрудно вывести, что α_1/β_1 принадлежит полю степени n, которое зависит только от решетки Λ, а не от выбора точек $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; дальнейшие рассуждения проходят довольно легко. Мы не приводим подробно доказательства, поскольку в дальнейшем мы не будем использовать этот результат.

§ 5. Теоремы изоляции

1. Как было отмечено в § 1, существует много различных теорем изоляции, и, по-видимому, вряд ли целесообразно формулировать их во всей общности. Вместо этого мы рассмотрим только три конкретных случая.

Нам понадобится следующая простая лемма, которая, по существу, является простым частным случаем теоремы Кронекера и по характеру принадлежит к вопросам, рассматриваемым в гл. XI.

Лемма 8. *Пусть $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — вещественные числа, $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$. Предположим, что α/β иррационально. Тогда для каждого числа $\varepsilon>0$ существует число $\eta=\eta(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon)$, обладающее следующим свойством: для любых чисел λ, μ существуют такие целые числа m и n, что*

$$|m\alpha+n\beta-\lambda|<\varepsilon, \quad |m\gamma+n\delta-\mu|\leqslant\eta.$$

Доказательство. По теореме Минковского о линейных формах (теорема III гл. III) существуют такие целые числа $(m, n)\neq(0, 0)$, что $|m\alpha+n\beta|$ произвольно мало, причем $m\alpha+n\beta\neq 0$, так как α/β иррационально. Отсюда следует, что существуют такие целые точки (m_1, n_1) и (m_2, n_2), что

$$0<|m_1\alpha+n_1\beta|<\varepsilon, \quad 0<|m_2\alpha+n_2\beta|<\varepsilon$$

и

$$m_1n_2\neq m_2n_1.$$

Положим

$$X_j=m_j\alpha+n_j\beta, \; Y_j=m_j\gamma+n_j\delta \qquad (j=1, 2),$$

так что

$$|X_j|<\varepsilon \qquad (j=1, 2), \quad X_1Y_2\neq X_2Y_1.$$

Пусть ρ, σ — решение системы уравнений

$$\rho X_1+\sigma X_2=\lambda, \quad \rho Y_1+\sigma Y_2=\mu.$$

Выберем целые числа a и b так, чтобы

$$|a-\rho|\leqslant\frac{1}{2}, \quad |b-\sigma|\leqslant\frac{1}{2};$$

тогда

$$|aX_1+bX_2-\lambda|=|(a-\rho)X_1+(b-\sigma)X_2|\leqslant\frac{1}{2}(|X_1|+|X_2|)<\varepsilon$$

и

$$|aY_1+bY_2-\mu|\leqslant\frac{1}{2}(|Y_1|+|Y_2|)=\eta \text{ (скажем)}.$$

Полагая

$$m=am_1+bm_2, \quad n=an_1+bn_2,$$

мы приходим к утверждению леммы.

Лемма 8 доказана.

2. Вероятно, простейшая теорема изоляции — это теорема для формы x_1x_2, принадлежащая Роджерсу (C. A. Rogers, неопубликовано; однако см. Касселс [8] гл. II, где указано ее приложение к теореме Маркова, предложенное Роджерсом).

Теорема VIII. *Пусть форма x_1x_2 целочисленна и отлична от нуля на двумерной решетке Λ, и пусть точки $\mathbf{a}=(a_1, a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1, b_2)\in\Lambda$ таковы, что*

$$a_1a_2=-\alpha<0<b_1b_2=\beta. \tag{1}$$

Тогда существуют числа $\eta_0>0$ и $\eta_1>0$, обладающие следующими свойствами: пусть $\boldsymbol{\tau}$ — линейное преобразование, причем

$$\|\boldsymbol{\tau}-\iota\|<\eta_1 \tag{2}$$

и

$$\tau_{12}\neq 0, \tag{3}$$

где преобразование $\mathbf{X}=\boldsymbol{\tau}\mathbf{x}$ задается равенствами

$$X_1=\tau_{11}x_1+\tau_{12}x_2, \quad X_2=\tau_{21}x_1+\tau_{22}x_2.$$

Тогда существует такая точка $\mathbf{c} \neq \mathbf{o}$ *решетки* $\boldsymbol{\tau}\Lambda$, *что*

$$-\alpha(1-\eta_0) < c_1c_2 < \beta(1-\eta_0), \qquad |c_1| < 1.$$

Доказательство. Не умаляя общности, мы можем считать, что

$$a_1 > 0, \quad b_1 > 0,$$

а потому

$$a_2 < 0, \quad b_2 > 0.$$

По теореме VII существует автоморфизм $\mathbf{X} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{x}$ решетки Λ вида

$$X_1 = \omega_1 x_1, \quad X_2 = \omega_2 x_2,$$

где

$$0 < \omega_1 < 1 < \omega_2, \quad \omega_1\omega_2 = 1.$$

Тогда решетка Λ содержит все точки вида

$$\mathbf{a}_m = (\omega_2^{-m} a_1, \ \omega_2^m a_2), \quad \mathbf{b}_m = (\omega_2^{-m} b_1, \ \omega_2^m b_2), \tag{4}$$

где m — любое целое число (положительное, отрицательное или равное нулю).

Рассмотрим теперь два случая в зависимости от знака τ_{12}. Пусть

$$\tau_{12} > 0. \tag{5}$$

Определим целое число m условиями

$$\tau_{11} a_1 \omega_2^{-m} + \tau_{12} a_2 \omega_2^m > 0 \geqslant \tau_{11} a_1 \omega_2^{-m-1} + \tau_{12} a_2 \omega_2^{m+1}, \tag{6}$$

что возможно, так как $\tau_{11}a_1 > 0 > \tau_{12}a_2$. Тогда

$$-1 < \frac{\tau_{12}a_2}{\tau_{11}a_1} \omega_2^{2m} < -\omega_2^{-2}; \tag{6'}$$

отсюда

$$\omega_2^m = O\left(\tau_{12}^{-1/2}\right), \tag{7}$$

где постоянная, входящая в символ O, может зависеть от a_1, a_2 и где предполагается, что число η_1 в неравенстве (2) выбрано так, что $|\tau_{11} - 1| < \frac{1}{2}$. Положим

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{a}_m, \tag{8}$$

где $\mathbf{a}_m$ задается равенством (4). Тогда, во-первых, как следует из неравенств (6) и (7),

$$c_1 = \tau_{11} a_1 \omega_2^{-m} + \tau_{12} a_2 \omega_2^m = O\left(\tau_{12}^{1/2}\right),$$

так что, если η_1 выбрано достаточно малым, то

$$|c_1| < 1.$$

Во-вторых, как следует из (6) или (6'),

$$0 < \omega_2^m c_1 \leqslant \tau_{11} a_1 (1 - \omega_2^{-2}), \tag{9}$$

но тогда на основании (7)

$$\omega_2^{-m} c_2 = \tau_{21} a_1 \omega_2^{-2m} + \tau_{22} a_2 = \tau_{22} a_2 + O(\tau_{12}). \tag{10}$$

Положим $\eta_0 = \frac{1}{2}\omega_2^{-2}$. Так как $a_2 < 0 < a_1$, то, используя соотношения (7), (9) и (10), мы получаем, что

$$a_1a_2(1-\eta_0) < c_1c_2 < 0,$$

если τ_{12}, τ_{21} достаточно малы, а τ_{11}, τ_{22} достаточно близки к 1, что можно достигнуть, взяв в неравенстве (2) η_1 достаточно малым. Этим заканчивается доказательство в случае, когда $\tau_{12} > 0$. Доказательство для случая $\tau_{12} < 0$ совершенно аналогично, исключая то, что вместо точки $\mathbf{a}$ используется точка $\mathbf{b}$.

Теорема VIII доказана.

Следствие. *В предположениях теоремы, из которых исключено неравенство* (3), *существует такое число* $\eta_2 > 0$, *что если*

$$\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\| < \eta_2$$

и преобразование $\boldsymbol{\tau}$ *не является автоморфизмом формы* x_1x_2, *то решетка* $\boldsymbol{\tau}\Lambda$ *содержит точку* $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$, *для которой*

$$a_1a_2(1-\eta_0) < c_1c_2 < b_1b_2(1-\eta_0).$$

Действительно, раз $\boldsymbol{\tau}$ не является автоморфизмом, то либо $\tau_{12} \neq 0$, либо $\tau_{21} \neq 0$. Если $\tau_{12} \neq 0$, то применима теорема. Если же $\tau_{21} \neq 0$, то теорему можно применить, поменяв предварительно ролями x_1 и x_2.

Отметим, что теорема VIII имеет дело со значениями формы x_1x_2 в двух различных точках решетки Λ. Это несколько ограничивает область ее применения. Для других теорем изоляции, которые будут рассматриваться ниже, потребуется самое большее знать значение функции только в одной точке решетки.

3. Прежде чем переходить к теореме изоляции для формы

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1x_2x_3,$$

докажем следующую простую лемму.

Лемма 9. *Пусть форма* $x_1x_2x_3$ *целочисленна и отлична от нуля на решетке* Λ. *Тогда по каждому числу* $\varepsilon > 0$ *найдется число* $\eta > 0$, *зависящее от* Λ, *которое обладает следующим свойством: для любых чисел* $\rho > 0$, $\sigma > 0$ *существует автомор-*

физм $\mathbf{X} = \omega\mathbf{x}$ *решетки* Λ *вида*

$$X_j = \omega_j x_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant 3), \tag{1}$$

где

$$\omega_j > 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant 3), \quad \omega_1\omega_2\omega_3 = 1 \tag{2}$$

и

$$1 - \varepsilon < \frac{\rho\omega_1}{\omega_2} < 1 + \varepsilon, \quad \eta^{-1} < \frac{\omega_k}{\sigma} < \eta \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{3}$$

Доказательство. По теореме VII заведомо существуют автоморфизмы $\boldsymbol{\vartheta}$ и $\boldsymbol{\psi}$ решетки Λ, имеющие соответственно вид

$$X_j = \vartheta_j x_j, \quad X_j = \psi_j x_j \qquad (1 \leqslant j \leqslant 3),$$

где

$$\vartheta_1 > 1, \quad 0 < \vartheta_2 < 1, \quad 0 < \vartheta_3 < 1, \quad \vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 = 1,$$
$$0 < \psi_1 < 1, \quad \psi_2 > 1, \quad 0 < \psi_3 < 1, \quad \psi_1\psi_2\psi_3 = 1.$$

Положим

$$p_j = \log \vartheta_j, \quad q_j = \log \psi_j; \tag{4}$$

так что

$$p_1 + p_2 + p_3 = q_1 + q_2 + q_3 = 0 \tag{5}$$

и

$$p_1 > 0, \quad p_2 < 0, \quad p_3 < 0,$$
$$q_1 < 0, \quad q_2 > 0, \quad q_3 < 0;$$

тогда

$$p_1q_2 - p_2q_1 = p_2q_3 - p_3q_2 \neq 0. \tag{6}$$

Покажем теперь, что число

$$(p_1 - p_2)/(q_1 - q_2) \tag{7}$$

иррационально. Если бы это было не так, то существовал бы автоморфизм $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\vartheta}^u\boldsymbol{\psi}^v$ с целыми $(u, v) \neq (0, 0)$, для которого в очевидных обозначениях $\lambda_1 = \lambda_2$. Но тогда число λ_1 было бы рационально, так как по следствию 1 леммы 6 числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ удовлетворяют кубическому уравнению с целыми коэффициентами. Отсюда по следствию 2 леммы 6 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, т. е.

$$up_j + vq_j = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant 3),$$

что противоречит равенствам (6). В силу (6) мы можем теперь применить лемму 8, полагая

$$\lambda = \log \rho, \quad \alpha = p_2 - p_1, \quad \beta = q_2 - q_1,$$
$$\mu = \log \sigma, \quad \gamma = p_k, \qquad \delta = q_k$$

и принимая

$$\min_{\pm} |\log(1 \pm \varepsilon)|, \quad \log \eta$$

за ε и η соответственно. Тогда автоморфизм

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\vartheta}^m\boldsymbol{\psi}^n,$$

где m и n — числа, существующие на основании леммы 8, обладает, очевидно, всеми требуемыми свойствами.

Лемма 9 доказана.

Теперь нетрудно получить следующее предложение.

Теорема IX. *Пусть форма* $x_1x_2x_3$ *целочисленна и отлична от нуля на решетке* Λ, *и пусть* $\varepsilon_1 > 0$ *произвольно мало. Тогда существует такое число* $\eta_1 > 0$, *зависящее от* ε_1 *и* Λ, *что если*

$$\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\| < \eta_1 \tag{8}$$

и для любого числа t *преобразование* $t\boldsymbol{\tau}$ *не является автоморфизмом формы* $x_1x_2x_3$, *то решетка* $\boldsymbol{\tau}\Lambda$ *содержит точку* $\mathbf{c} \neq \mathbf{o}$, *для которой*

$$|c_1c_2c_3| < \varepsilon_1. \tag{9}$$

Доказательство. Пусть преобразование $\mathbf{X} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{x}$ задано уравнениями $X_i = \sum_j \tau_{ij}x_j$. Если $\boldsymbol{\tau}$ не является автоморфизмом, то $\tau_{ij} \neq 0$ $(i \neq j)$. Рассматривая один из двенадцати возможных случаев [1]) (остальные рассматриваются аналогично), мы можем предполагать, что

$$\tau_{12} = \max_{i \neq j} |\tau_{ij}| > 0. \tag{9'}$$

Теперь решетка Λ заведомо содержит некоторую точку $\mathbf{a}$, для которой

$$a_1 > 0 > a_2.$$

Мы выберем одну из таких точек и фиксируем ее на протяжении всего нашего исследования, так что о числах, зависящих от $\mathbf{a}$ и от Λ, будет говориться как о зависящих только от Λ и т. д.

По лемме 9, где число $\varepsilon > 0$ будет выбрано позднее и где

$$\rho = -\frac{a_1\tau_{11}}{a_2\tau_{12}} > 0, \quad \sigma = 1, \quad k = 3, \tag{10}$$

существует автоморфизм $\boldsymbol{\omega}$ решетки Λ, для которого

$$1 - \varepsilon < -\frac{a_1\tau_{11}\omega_1}{a_2\tau_{12}\omega_2} < 1 + \varepsilon, \qquad \eta^{-1} < \omega_3 < \eta, \tag{11}$$

где

$$\eta = \eta(\Lambda, \varepsilon) \tag{12}$$

не зависит от τ_{ij}. Так как по предположению число τ_{11} близко к единице, скажем $|\tau_{11} - 1| < \frac{1}{2}$, то из неравенств (11) и равенства

[1]) Ибо максимум в (9′) может соответствовать любой из шести пар индексов i, j $(i \neq j)$, и максимальное τ_{ij} может быть либо положительным, либо отрицательным.

$\omega_1\omega_2\omega_3 = 1$ следует, что

$$\eta'^{-1}\tau_{12}^{1/2} < \omega_1 < \eta'\tau_{12}^{1/2}, \quad \eta'^{-1}\tau_{12}^{-1/2} < \omega_2 < \eta'\tau_{12}^{-1/2}, \tag{13}$$

где

$$\eta' = \eta'(\varepsilon, \Lambda) \tag{14}$$

не зависит от τ_{ij}.

Положим

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\tau\omega}\mathbf{a} \in \boldsymbol{\tau}\Lambda;$$

тогда на основании (9′), (11) и (13) мы получаем

$$\omega_1^{-1}|c_1| = \omega_1^{-1}|a_1\tau_{11}\omega_1 + a_2\tau_{12}\omega_2 + a_3\tau_{13}\omega_3| \leqslant$$
$$\leqslant \omega_1^{-1}\{|a_1\tau_{11}\omega_1 + a_2\tau_{12}\omega_2| + |a_3\tau_{13}\omega_3|\} < \varkappa_1\varepsilon + \xi_1\tau_{12}^{1/2},$$

где

$$\varkappa_1 = \varkappa_1(\Lambda), \quad \xi_1 = \xi_1(\Lambda, \varepsilon).$$

Важно, что $\varkappa_1$ не зависит от ε. Считая, что τ_{12} меньше некоторого числа, зависящего от ε, мы получаем отсюда, что

$$\omega_1^{-1}|c_1| < 2\varkappa_1\varepsilon. \tag{15}$$

Аналогично, но еще проще, из (9′), (11) и (13) получаем

$$\omega_2^{-1}|c_2| < \omega_2^{-1}\omega_1|\tau_{21}a_1| + |\tau_{22}a_2| + \omega_2^{-1}\omega_3|\tau_{13}a_3| < |\tau_{22}a_2| + \xi_2\tau_{12}^{1/2},$$

где

$$\xi_2 = \xi_2(\Lambda, \varepsilon),$$

а потому

$$\omega_2^{-1}|c_2| < 2a_2, \tag{16}$$

если τ_{12} достаточно мало, а τ_{22} достаточно близко к 1. Аналогично

$$\omega_3^{-1}|c_3| < 2|a_3|, \tag{17}$$

если $\tau_{33} - 1$ и τ_{12} достаточно малы. Из неравенств (15), (16) и (17) мы получаем, что

$$|c_1c_2c_3| < 8|\varkappa_1a_2a_3|\varepsilon.$$

Так как ε произвольно мало, то мы можем положить $\varepsilon_1 = 8|\varkappa_1a_2a_3|\varepsilon$, где ε_1 — число, фигурирующее в формулировке теоремы.

Теорема IX доказана.

Отметим, что мы не использовали в полную силу ни лемму 9, ни неравенство (13).

Доказательство формулируемых ниже двух следствий мы предоставляем читателю.

Следствие 1. *Теорема* IX *остается справедливой, если заменить в ее формулировке неравенство* $|c_1c_2c_3| < \varepsilon_1$ *на неравенство* $0 < |c_1c_2c_3| < \varepsilon_1$.

Следствие 2. *Для каждого* $\varepsilon_2 > 0$ *найдется такое число* $\eta_2 > 0$, *зависящее только от* Λ *и* ε_2, *что если*

$$\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\| < \eta_2,$$

а одно из чисел $\tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{21}, \tau_{23}$ *отлично от нуля, то существует точка* $\mathbf{c} \in \boldsymbol{\tau}\Lambda$, *для которой*

$$0 < |c_1c_2c_3| < \varepsilon_2, \quad |c_1| < 1, \quad |c_2| < 1.$$

Следствие 1 доказано в работе Касселса и Суиннертона-Дайера [1]. Несколько более слабая форма следствия 2 доказана в статье Давенпорта и Роджерса [2].

4. Рассмотрим теперь форму

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1(x_2^2 + x_3^2).$$

Как и в п. 4 § 4, удобно ввести соответствующие комплексные координаты

$$z_1 = x_1, \quad z_2 = x_2 + ix_3, \quad z_3 = x_2 - ix_3 \qquad (i^2 = -1).$$

Преобразование $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\tau}\mathbf{z}$ тогда и только тогда соответствует вещественному преобразованию вещественных переменных $\mathbf{x}$, когда оно имеет вид

$$Z_j = \sum_k \tau_{jk}z_k, \tag{1}$$

где

$$\tau_{12} = \bar\tau_{13}, \quad \tau_{21} = \bar\tau_{31}, \quad \tau_{11} = \bar\tau_{11}, \quad \tau_{23} = \bar\tau_{32}, \quad \tau_{22} = \bar\tau_{33}, \tag{2}$$

$\bar\tau_{ij}$ — число, комплексно сопряженное числу τ_{ij}.

Теорема X. *Пусть форма*

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1(x_2^2 + x_3^2) \tag{3}$$

пропорциональна форме, целочисленной на точках решетки Λ, *и отлична на ней от нуля, и пусть*

$$A = |\varphi|(\Lambda) = \inf_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda \\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}} |\varphi(\mathbf{a})|. \tag{4}$$

Тогда существуют числа $\eta_1 > 0$, $\eta_2 > 0$, *обладающие следующими свойствами.*

Предположим, что $\boldsymbol{\tau}$ — *однородное преобразование, задаваемое в соответствующих комплексных координатах соотношениями* (1) *и* (2), *причем*

$$\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\| < \eta_1. \tag{5}$$

Тогда

(i) *если* $\tau_{12} = \bar{\tau}_{13} \neq 0$, *то существует точка* $\mathbf{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \neq \mathbf{o}$, *записанная в соответствующих комплексных координатах, которая принадлежит решетке* $\boldsymbol{\tau}\Lambda$ *и для которой*

$$|\gamma_1\gamma_2\gamma_3| < A(1-\eta_2), \qquad |\gamma_1| < 1; \tag{6}$$

(ii) *если* $\tau_{31} = \bar{\tau}_{21} \neq 0$, *то существует точка* $\mathbf{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \neq \mathbf{o}$, *принадлежащая решетке* $\boldsymbol{\tau}\Lambda$, *для которой*

$$|\gamma_1\gamma_2\gamma_3| < A(1-\eta_2), \qquad |\gamma_2| = |\gamma_3| < 1. \tag{7}$$

Доказательство. По теореме VII существует автоморфизм $\mathbf{Z} = \boldsymbol{\omega}\mathbf{z}$, который в комплексных координатах имеет вид

$$Z_j = \omega_j z_j, \qquad \omega_1\omega_2\omega_3 = 1, \qquad \omega_1 > 1, \qquad \omega_3 = \bar{\omega}_2.$$

Определим числа $T > 0$ и χ, полагая

$$\omega_1 = T^2, \qquad \omega_2 = T^{-1}e(\chi), \qquad \omega_3 = T^{-1}e(-\chi), \tag{8}$$

где

$$e(\chi) = e^{2\pi i\chi}.$$

Если бы число χ было рациональным, скажем $\chi = u/v$, то преобразование $\boldsymbol{\omega}^v$ имело бы два равных собственных числа ω_2^v, ω_3^v, которые поэтому должны были бы быть рациональны и, стало быть, равны 1, что противоречит предположению (ср. с доказательством леммы 9). Таким образом, число χ иррационально. Отсюда, применяя лемму 8 с $\varepsilon = \frac{1}{8}$, мы получаем, что существует число $\eta_3 > 0$, обладающее следующими свойствами: для каждой пары чисел $\rho > 0$ и ψ найдутся такие целые числа u и v, что

$$|u\chi + v - \psi| < \frac{1}{8} \tag{9}$$

и

$$\eta_3^{-1} < \frac{T^{3u}}{\rho} < \eta_3. \tag{10}$$

Докажем теперь утверждение (i). Так как форма $\varphi(\mathbf{x})$ пропорциональна форме, целочисленной на решетке Λ, то найдется точка $\mathbf{a} \in \Lambda$ вида

$$\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \qquad \alpha_2 = \zeta e(\vartheta), \qquad \alpha_3 = \zeta e(-\vartheta), \tag{11}$$

где

$$\alpha_1 > 0, \qquad \zeta > 0, \qquad A = \alpha_1\zeta^2,$$

A определено равенством (4). Положим

$$\tau_{12} = -\sigma e(\psi), \qquad \tau_{13} = -\sigma e(-\psi), \tag{12}$$

где $\sigma > 0$. Тогда σ мало, если $\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\|$ мало. Выберем теперь целые числа u и v так, чтобы выполнялись неравенство

$$|u\chi + v - (\psi + \vartheta)| < \frac{1}{8} \tag{13}$$

(ср. (9)) и неравенство (10), где

$$\rho = \frac{\alpha_1\tau_{11}}{2\eta_3\sigma\zeta}, \tag{14}$$

так что

$$\eta_3^{-2} < \frac{2\sigma\zeta T^{3u}}{\tau_{11}\alpha_1} < 1. \tag{15}$$

Так как число τ_{11} близко к 1, то найдутся такие постоянные η', η'', зависящие только от Λ (и $\mathbf{a}$), что

$$0 < \eta'\sigma^{-\frac{1}{3}} < T^u < \eta''\sigma^{-\frac{1}{3}}. \tag{16}$$

Покажем теперь, что точка

$$\mathbf{c} = \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\omega}^{-u}\mathbf{a} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \tag{17}$$

удовлетворяет условиям теоремы X в случае (i). Прежде всего, используя (11), (13), (15) и предполагая, что $\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\|$ достаточно мало, получаем

$$\begin{aligned} T^{2u}|\gamma_1| &= |\alpha_1\tau_{11} - T^{3u}\sigma\zeta\{e(\vartheta+\psi-u\chi) + e(-\vartheta-\psi+u\chi)\}| = \\ &= |\alpha_1\tau_{11} - 2T^{3u}\sigma\zeta\cos 2\pi(\vartheta+\psi-u\chi)| \leqslant \\ &\leqslant \alpha_1\tau_{11}\left(1 - \frac{1}{2}\eta_3^{-2}\right) < \alpha_1\left(1 - \frac{1}{4}\eta_3^{-2}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Для любого фиксированного $\varepsilon > 0$ при условии, что $\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\|$, а значит, и σ достаточно малы, имеем

$$T^{-u}|\gamma_3| = T^{-u}|\gamma_2| \leqslant |\tau_{21}|\alpha_1 T^{-3u} + \zeta|\tau_{22}| + \zeta|\tau_{23}| < \zeta(1+\varepsilon). \tag{19}$$

Из неравенств (18) и (19) при соответствующем выборе ε мы получаем

$$|\gamma_1\gamma_2\gamma_3| < \alpha_1\zeta^2\left(1 - \frac{1}{4}\eta_3^{-2}\right)(1+\varepsilon)^2 < \alpha_1\zeta^2\left(1 - \frac{1}{8}\eta_3^{-2}\right) = A\left(1 - \frac{1}{8}\eta_3^{-2}\right).$$

Так как из неравенств (16) и (18) при достаточно малом $\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\iota}\|$ следует, что $|\gamma_1| < 1$, пункт (i) теоремы полностью доказан, причем $\eta_2 = \frac{1}{8}\eta_3^{-2}$.

Доказательство второй части теоремы проводится аналогично и основано на рассмотрении точки $\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\omega}^u\mathbf{a}$ с подходящим целым положительным u. Детали этого доказательства мы предоставляем читателю.

Теорема X доказана.

Для целей дальнейшего применения отметим два следствия.

Следствие 1. *Числа* η_1 *и* η_2 *можно выбрать так, чтобы утверждение теоремы выполнялось равномерно для всех решеток* $\Lambda=\lambda M$, *где* M — *некоторая фиксированная решетка, на которой форма* $\varphi(\mathbf{x})$ *пропорциональна целочисленной форме и отлична от нуля, а* λ *пробегает все автоморфизмы формы* $\varphi(\mathbf{x})$.

Действительно, достаточно рассмотреть случай, когда автоморфизмы $\mathbf{Z}=\lambda\mathbf{z}$ имеют вид $Z_j=\lambda_j z_j$. Тогда преобразование ω является автоморфизмом решетки Λ, если оно является автоморфизмом M; поэтому неравномерность может произойти только за счет точки $\mathbf{a}$. Но очевидно, что существует такое число R, зависящее только от ω, т. е. только от M, что $|\omega^k\mathbf{a}|<R$ для некоторого k. Если теперь вместо $\mathbf{a}$ выбрать $\omega^k\mathbf{a}$, то тем самым будет достигнута полная равномерность в оценках.

Следствие 2. *Если* τ — *любой автоморфизм формы* $\varphi(\mathbf{x})$, *для которого*

$$0=\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{21}=\tau_{31},$$

то

$$\inf_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}}|\varphi(\tau\mathbf{a})|\leqslant|\tau_{11}|\{|\tau_{22}|-|\tau_{23}|\}^2 A.$$

Действительно, мы можем считать, что $A=1$ и что $\mathbf{a}=\mathbf{e}=(1,1,1)$. Для любого целого числа u (положительного или отрицательного) мы получаем

$$|\varphi(\tau\omega^u\mathbf{e})|=|\tau_{11}|\,|\tau_{22}e(u\chi)+\tau_{23}e(-u\chi)|^2,$$

где χ задано равенствами (8). По лемме 8 мы можем выбрать u так, чтобы величина

$$|\tau_{22}e(u\chi)+\tau_{23}e(-u\chi)|$$

была сколь угодно близка к $|\,|\tau_{22}|-|\tau_{23}|\,|$, откуда и вытекает следствие.

Заметим, что

$$\frac{d(\tau\Lambda)}{d(\Lambda)}=|\tau_{11}|\,|\,|\tau_{22}|^2-|\tau_{23}|^2\,|\geqslant|\tau_{11}|\{|\tau_{22}|-|\tau_{23}|\}^2,$$

где знак равенства имеет место только в случае $\tau_{22}=0$ или $\tau_{23}=0$, т. е. когда τ является автоморфизмом формы $\varphi(\mathbf{x})$.

§ 6. Применение теорем изоляции

1. Следуя Давенпорту и Роджерсу [2], мы используем сначала идею изоляции для усиления теоремы V. Для формы $x_1(x_2^2+x_3^2)$ это приводит к лучшему из известных в настоящее время результату, для формы же $x_1x_2x_3$ известен более сильный результат (см. не доказанную в этой книге теорему X гл. II).

Теорема XI. (A) *Существует такое* $\eta_1>0$, *что каждая решетка* Λ, *допустимая для множества*

$$\mathscr{N}_1:\ |x_1x_2x_3|<1$$

и удовлетворяющая условию

$$d(\Lambda)<7(1+\eta_1),$$

имеет вид

$$\Lambda=t\omega N_1,$$

где $t\geqslant1$, ω — *автоморфизм множества* $\mathscr{N}_1$ *и* N_1 — *решетка, определенная в теореме* V. (A).

(B) *Существует такое* $\eta_2>0$, *что каждая решетка* Λ, *допустимая для множества*

$$\mathscr{N}_2:\ |x_1(x_2^2+x_3^2)|<1$$

и удовлетворяющая условию

$$d(\Lambda)<\frac{1}{2}(23)^{\frac{1}{2}}(1+\eta_2),$$

имеет вид

$$\Lambda=\tau\omega N_2,$$

где N_2 — *решетка, определенная в теореме* V. (B), ω — *автоморфизм множества* $\mathscr{N}_2$ *и* τ — *преобразование вида* $X_j=\sum_k\tau_{jk}x_k$, *где* $\tau_{12}=\tau_{13}=\tau_{21}=\tau_{31}=0$.

Доказательство. Сначала от противного докажем утверждение (A). Предположим, что числа $\eta_1>0$ с указанными свойствами не существует. Тогда существует бесконечная последовательность допустимых решеток M_r $(1\leqslant r<\infty)$, ни одна из которых не имеет вида $t\omega N_1$, причем

$$d(M_r)\to7.$$

Используя теорему V и учитывая, что решетки M_r являются $\mathscr{N}_1$-допустимыми, мы получаем неравенства

$$1\leqslant\inf_{\substack{\mathbf{a}\in M_r\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}}|a_1a_2a_3|\leqslant\frac{1}{7}d(M_r),$$

откуда следует, что существует последовательность точек

$$\mathbf{a}_r=(a_{1r},\ a_{2r},\ a_{3r})\in M_r$$

с условием

$$|a_{1r}a_{2r}a_{3r}|\to1\qquad(r\to\infty).$$

Заменяя решетку M_r на $\omega_r \mathrm{M}_r$ с подходящим автоморфизмом ω_r множества $\mathscr{N}_1$, мы можем считать, что

$$\mathbf{a}_r = (s_r, s_r, s_r), \quad s_r \to 1 \quad (r \to \infty).$$

По принципу компактности Малера в последовательности решеток M_r имеется сходящаяся подпоследовательность, которую также обозначим через M_r, так что

$$\mathrm{M}_r \to \mathrm{M}. \tag{1}$$

Тогда $d(\mathrm{M}) = 7$, и решетка M является $\mathscr{N}_1$-допустимой, а стало быть, критической. Далее, $(1, 1, 1) \in \mathrm{M}$ и по теореме V мы получаем, что

$$\mathrm{M} = \vartheta \mathrm{N}_1,$$

где ϑ — автоморфизм множества $\mathscr{N}_1$. В частности, форма $x_1 x_2 x_3$ целочисленна на решетке M. Но

$$\mathrm{M}_r = \tau_r \mathrm{M},$$

где преобразования τ_r таковы, что

$$\|\tau_r - \iota\| \to 0 \quad (r \to \infty).$$

Так как решетка M_r является $\mathscr{N}_1$-допустимой, то по теореме IX при условии, что r достаточно велико, преобразование τ_r должно иметь вид $\tau_r = t_r \psi_r$ для некоторого числа t_r и некоторого автоморфизма ψ_r множества $\mathscr{N}_1$, но это противоречит определению решеток M_r. Тем самым утверждение (A) доказано.

Утверждение (B) доказывается аналогично; только вместо теоремы IX используется теорема X. Детали этого доказательства мы предоставляем читателю. Следует лишь отметить, что если τ и ω — преобразования, фигурирующие в формулировке теоремы, то для некоторых преобразований ω', τ' со свойствами, аналогичными свойствам ω, τ, имеет место равенство $\tau\omega = \omega'\tau'$.

Теорема XI доказана.

Следствие. *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* $\eta_3 = \eta_3(\varepsilon) > 0$, *что каждая* $\mathscr{N}_2$-*допустимая решетка* Λ, *для которой*

$$d(\Lambda) < \frac{1}{2}(23)^{\frac{1}{2}}(1 + \eta_3), \tag{2}$$

имеет вид $\Lambda = \tau\omega \mathrm{N}_2$, *где преобразования* τ, ω *обладают свойствами, указанными в теореме* XI. (B), *причем*

$$\|\tau - \iota\| < \varepsilon.$$

Это следствие теоремы XI. (B). Действительно, возьмем $\eta_3 < \eta_2$, где $\eta_2 > 0$ — число, существующее согласно теореме; тогда $\Lambda = \tau\omega \mathrm{N}_2$.

Мы можем предполагать, что $\tau_{11} > 0$, а тогда, умножив ω в случае необходимости на подходящий автоморфизм, можно считать

$$\tau_{11} = 1. \tag{3}$$

Следовательно,

$$1 + \eta_3 > \frac{d(\Lambda)}{d(\mathrm{N}_2)} = \{|\tau_{22}|^2 - |\tau_{23}|^2\}, \tag{4}$$

где для записи τ мы, как и в п. 4 § 5, используем соответствующие комплексные координаты. Но так как решетка Λ является $\mathscr{N}_2$-допустимой, то из следствия 2 теоремы X мы выводим неравенство

$$\{|\tau_{22}| - |\tau_{23}|\}^2 \geqslant 1, \tag{5}$$

откуда, в частности,

$$\frac{|\tau_{22}|^2 - |\tau_{23}|^2}{\{|\tau_{22}| - |\tau_{23}|\}^2} < 1 + \eta_3.$$

Поэтому если η_3 мало, то мало $|\tau_{22}|/|\tau_{23}|$ или $|\tau_{23}|/|\tau_{22}|$; умножив в случае необходимости ω на преобразование, переставляющее x_2 и x_3, мы можем считать, что мало второе из указанных отношений. Мы можем умножить преобразование ω на преобразование типа

$$x_1 \to x_1, \quad x_2 \to e(\chi)\, x_2, \quad x_3 \to e(-\chi)\, x_3,$$

где $e(\chi) = e^{2\pi i \chi}$ и χ выбрано так, чтобы сделать τ_{22} вещественным и положительным. Тогда из неравенств (4) и (5) вытекает, что числа $\tau_{22} - 1$ и τ_{32} малы, если мало η_3. Так как $\tau_{33} = \overline{\tau}_{22}$ и $\tau_{23} = \overline{\tau}_{32}$, то, используя равенство (3) и учитывая, что остающиеся коэффициенты τ_{ik} равны нулю, мы приходим к утверждению следствия.

2. Следующий интересный результат для формы $x_1 x_2 x_3$ не имеет аналога для формы $x_1(x_2^2 + x_3^2)$, так как он существенно зависит от того факта, что число ε в теореме IX может быть выбрано произвольно. Имеется, однако, соответствующий результат для формы $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ (см. Касселс и Суиннертон-Дайер [1]).

Теорема XII. *Пусть для некоторого числа* D *существует бесконечно много решеток* M_r $(1 \leqslant r < \infty)$ *с определителями* $d(\mathrm{M}_r) \leqslant D$, *допустимых для множества*

$$\mathscr{N}_1: \quad |x_1 x_3 x_3| < 1,$$

причем никакие две из них, скажем $\mathrm{M}', \mathrm{M}''$, *не связаны соотношением вида* $\mathrm{M}'' = t\omega \mathrm{M}'$, *где* t — *число, а* ω — *автоморфизм множества* $\mathscr{N}_1$. *Тогда существует решетка* Λ *с определителем* $d(\Lambda) \leqslant D$, *допустимая для множества* $\mathscr{N}_1$, *на которой форма* $x_1 x_2 x_3$ *не пропорциональна целочисленной форме.*

Доказательство. Так как в множестве решеток M_r имеется сходящаяся подпоследовательность, то, не уменьшая общности, мы можем считать, что

$$M_r \to \Lambda \quad (r \to \infty).$$

Если бы форма $x_1 x_2 x_3$ была пропорциональна форме, целочисленной на Λ, то, применяя теорему IX и учитывая, что решетки M_r являются $\mathscr{N}_1$-допустимыми, мы получили бы, что для всех достаточно больших r

$$M_r = t_r \omega_r \Lambda,$$

где t_r — некоторые числа, а ω_r — некоторые автоморфизмы множества $\mathscr{N}_1$. Это, очевидно, противоречит предположениям теоремы.

Теорема XII доказана.

Как отмечалось в § 1, неизвестно, существует ли такое D или такая решетка Λ.

§ 7. Бесконечность числа решений

1. Мы докажем теперь некоторые результаты Давенпорта и Роджерса [2], касающиеся существования бесконечного множества точек решетки в некоторых точечных множествах с группами автоморфизмов. Мы приводим здесь далеко не все результаты, полученные ими; по поводу деталей читатель отсылается к их интересной работе.

Следующая тривиальная лемма дает почти все, что необходимо для получения первого типа результатов.

Лемма 10. *Пусть Ω — некоторая группа однородных линейных преобразований ω, и пусть для каждого вектора $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ и каждого числа r существует такое преобразование $\omega \in \Omega$, что*

$$|\omega \mathbf{x}| > r.$$

Тогда для каждой пары чисел c, C, удовлетворяющей условию

$$0 < c < C < \infty, \tag{1}$$

и каждого числа r существует такое конечное множество элементов $\omega_1, \ldots, \omega_m$ из Ω, что

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant m} |\omega_j \mathbf{x}| > r \tag{2}$$

для всех $\mathbf{x}$ в области

$$c \leqslant |\mathbf{x}| \leqslant C. \tag{3}$$

Доказательство. Лемма является простым следствием теоремы Гейне — Бореля о покрытиях. Действительно, бесконечно много открытых множеств $\mathscr{T}_r(\omega)$ точек $\mathbf{x}$ с условием $|\omega \mathbf{x}| > r$ покрывают

открытое множество (3). Из покрытия $\mathscr{T}_r(\omega)$ может быть выбрано конечное покрытие.

Лемма 10 доказана.

Теорема XIII. *Пусть ограниченно приводимое*[1]) *звездное тело $\mathscr{S}$ обладает такой группой Ω автоморфизмов ω, что для каждой точки $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$ и каждого r найдется такой автоморфизм $\omega \in \Omega$, что $|\omega \mathbf{x}| > r$. Тогда для каждого целого числа $k > 0$ существует такое ограниченное множество $\mathscr{S}_k$, содержащееся в $\mathscr{S}$, что каждая решетка Λ с определителем $d(\Lambda) < \Delta(\mathscr{S})$ содержит по крайней мере k точек множества $\mathscr{S}_k$, отличных от $\mathbf{o}$.*

Доказательство. Существование множества $\mathscr{S}_1$ эквивалентно условию о том, что $\mathscr{S}$ ограниченно приводимо. Предположим, что множество $\mathscr{S}_k$ уже найдено; докажем, исходя из этого, существование множества $\mathscr{S}_{k+1}$. Не уменьшая общности, мы можем считать, что $\mathscr{S}_k$ является множеством точек из $\mathscr{S}$, лежащих в некотором шаре

$$|\mathbf{x}| \leqslant C = C_k.$$

Существует такое положительное число $c_k < C$, что весь шар

$$|\mathbf{x}| \leqslant (k+1) c_k \tag{4}$$

содержится в множестве $\mathscr{S}$. Обозначим через $\mathscr{S}_{k+1}$ множество точек $\mathscr{S}$, лежащих в шаре

$$|\mathbf{x}| \leqslant C_{k+1}, \tag{5}$$

где

$$C_{k+1} > \max\{C_k, (k+1) c_k\}$$

настолько велико, что множество (5) содержит все множества вида $\omega_j^{-1} \mathscr{S}_k$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$; здесь ω_j — автоморфизмы, существующие на основании леммы 10 (где положено $c = c_k$ и $r = C = C_k$). Покажем, что множество $\mathscr{S}_{k+1}$ обладает требуемыми свойствами.

По предположению, если $d(\Lambda) < \Delta(\mathscr{S})$, то в множестве $\mathscr{S}_k$ содержится k точек решетки Λ, отличных от $\mathbf{o}$. Если одна из них, скажем $\mathbf{a}$, принадлежит множеству $|\mathbf{x}| < c_k$, то все точки вида

$$l\mathbf{a} \quad (1 \leqslant l \leqslant k+1)$$

принадлежат одновременно множествам $|\mathbf{x}| \leqslant C_{k+1}$ и $\mathscr{S}$, так что в этом случае множество $\mathscr{S}_{k+1}$ удовлетворяет поставленным условиям. В противном случае существует точка $\mathbf{b}$, принадлежащая решетке Λ и множеству $\mathscr{S}_{k+1}$, для которой

$$c = c_k \leqslant |\mathbf{b}| \leqslant C = C_k.$$

[1]) По поводу определения см. п. 2 § 7 гл. V.

Тогда в множестве $\omega_1, \ldots, \omega_m$ найдется такой автоморфизм ω_j, что $|\omega_j \mathbf{b}| > C$. Следовательно, $\mathbf{b} \notin \omega_j^{-1}\mathcal{S}_k$. Но так как ω_j является автоморфизмом, то

$$|\det \omega_j| = 1,$$

а потому

$$d(\omega_j\Lambda) = d(\Lambda) < \Delta(\mathcal{S}).$$

По определению множества $\mathcal{S}_k$ отсюда следует, что существует k точек решетки $\omega_j\Lambda$, принадлежащих множеству $\mathcal{S}_k$, или (что то же самое) k точек решетки Λ, принадлежащих множеству $\omega_j^{-1}\mathcal{S}_k$. Эти точки вместе с точкой $\mathbf{b}$ дают $k+1$ точку решетки Λ, которые, как и требовалось, принадлежат множеству $\mathcal{S}_{k+1}$.

Теорема XIII доказана.

Следствие. *Если множество $\mathcal{S}$ вполне приводимо*[1], *то утверждения теоремы* XIII *сохраняют силу и в случае $d(\Lambda) = \Delta(\mathcal{S})$, при условии что решетка Λ не является критической для множества $\mathcal{S}$.*

Действительно, существование множества $\mathcal{S}_1$ в этом случае эквивалентно тому, что $\mathcal{S}$ вполне приводимо; индукция же проходит здесь, как и прежде.

В случае когда звездное тело $\mathcal{S}$ не является ограниченно приводимым, справедливо лишь несколько менее сильное утверждение, чем теорема XIII.

Теорема XIV. Пусть $\mathcal{S}$ — *звездное тело и Δ_1 — любое число с условием*

$$0 < \Delta_1 < \Delta(\mathcal{S}).$$

Тогда для каждого целого k существует такое ограниченное звездное тело $\mathcal{S}_k$ (зависящее также от Δ_1), что каждая решетка с определителем $d(\Lambda) \leqslant \Delta_1$ содержит по меньшей мере k точек множества $\mathcal{S}_k$, отличных от начала.

Доказательство. Мы можем считать, что множество $\mathcal{S}$ открыто. Пусть для каждого целого r существует решетка Λ_r с определителем $d(\Lambda_r) \leqslant \Delta_1$, которая не содержит отличных от нуля точек множества $\mathcal{S}$, принадлежащих шару $|\mathbf{x}| \leqslant r$. Применяя теорему Малера о компактности, мы приходим к выводу о существовании решетки Λ', которая является пределом сходящейся подпоследовательности решеток Λ_r. Так как $d(\Lambda') \leqslant \Delta_1$ и Λ' является $\mathcal{S}$-допустимой, то это противоречит определению величины $\Delta(\mathcal{S})$. Полученное противоречие показывает, что множество $\mathcal{S}_1$ существует.

[1]) Определение см. п. 2 § 7 гл. V.

Индукция от $\mathcal{S}_k$ к $\mathcal{S}_{k+1}$ проходит так же, как и при доказательстве теоремы XIII.

Теорема XIV доказана.

2. Как показывает следующий пример, в тех случаях, когда применимы теоремы изоляции, они могут привести к более сильным результатам, чем теоремы, полученные в п. 1.

Теорема XV. *Пусть*

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1(x_2^2 + x_3^2). \tag{1}$$

Существует такое число $\eta_0 > 0$, что каждая решетка Λ обладает одним из следующих двух свойств:

(i) *существует такое число t, что множество x_1-координат точек решетки $t\Lambda$ совпадает с множеством x_1-координат точек критической решетки N_2 множества $|\varphi(\mathbf{x})| < 1$, определенной в формулировке теоремы* V. (B);

(ii) *для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая точка $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ, что*

$$|\varphi(\mathbf{a})| \leqslant \frac{2}{(23)^{1/2}}(1 - \eta_0)\, d(\Lambda), \qquad |a_1| < \varepsilon. \tag{2}$$

Доказательство. Мы выберем η_0 позднее, в процессе доказательства. Пусть для некоторой решетки Λ и некоторого $\varepsilon > 0$ свойство (ii) не выполняется. Обозначим через Λ_r $(r = 1, 2, \ldots)$ множество точек вида $(r^2x_1, r^{-1}x_2, r^{-1}x_3)$, где $(x_1, x_2, x_3) \in \Lambda$. Тогда существует сходящаяся подпоследовательность

$$\mathrm{M}_k = \Lambda_{r_k} \to \mathrm{M} \tag{3}$$

и решетка M является допустимой для множества

$$|x_1(x_2^2 + x_3^2)| < \frac{2}{(23)^{1/2}}(1 - \eta_0)\, d(\Lambda).$$

По следствию теоремы XI. (B) для любого заданного ε_0 мы можем выбрать $\eta_0 = \eta_0(\varepsilon_0)$ настолько малым, что

$$\mathrm{M} = t\boldsymbol{\tau}\boldsymbol{\omega}\mathrm{N}_2, \qquad \|\boldsymbol{\tau} - \iota\| < \varepsilon_0, \tag{4}$$

где преобразования $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\omega}$ — те же, что и в теореме XI. (B), t — некоторое число. Мы возьмем в качестве ε_0 число η_1, фигурирующее в формулировке теоремы X и ее следствия в случае $\mathrm{M} = \mathrm{N}_2$. По (3) и (4) мы теперь получаем, что

$$\mathrm{M}_k = t\boldsymbol{\sigma}_k\boldsymbol{\omega}\Lambda_2 \tag{5}$$

для некоторых преобразований σ_k, таких, что

$$\|\sigma_k - \iota\| < \varepsilon_0$$

при достаточно больших k. Ясно, что M_r для достаточно большого r не содержит ни одной точки $\mathbf{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ с $|\gamma_1| < 1$ и $|\gamma_1\gamma_2\gamma_3| < \frac{2}{(23)^{1/2}}(1 - \eta_0)\, d(\Lambda)$. Используя теорему XI и ее следствие, мы выводим отсюда, что если η_0 достаточно мало, то существует $\sigma = \sigma_k$, для которого в очевидных обозначениях $\sigma_{12} = \sigma_{13} = 0$; на самом деле это имеет место для всех достаточно больших k. Но тогда на основании (5) отсюда следует, что выполняется свойство (i).

Теорема XV доказана.

Имеется аналогичный результат для случая, когда неравенство $|a_1| < \varepsilon$ в (ii) заменено неравенством $a_2^2 + a_3^2 < \varepsilon$ (ср. Давенпорт и Роджерс [2]).

§ 8. Локальные методы

Для многих вопросов, относящихся к неопределенным квадратичным формам, подходящим аппаратом является теория цепных дробей. Мы лишь кратко упомянем здесь эту тематику, так как применение этих методов к специфическим задачам нередко сопряжено со значительными вычислениями. Цепные дроби очень естественно возникают с точки зрения геометрии чисел. Мы наметим здесь эту связь для полноты изложения и удобства ссылок и рекомендуем читателю книгу автора (Касселс [8]), где цепные дроби введены в аналогичном стиле [1]), но в несколько другом контексте. При этом знание геометрии чисел не предполагается. По поводу других изложений связи цепных дробей с квадратичными формами см., например, Диксон [1].

Характерными применениями локальных методов являются первоначальное изложение Марковым его „цепной“ теоремы (Марков [1]; имеется изложение у Диксона [2]; ср. также § 4 гл. II), статья Блени [3], которая будет рассматриваться в § 4 гл. XI, и статья Бернса [2]. Приложения этих методов весьма распространены в литературе.

Предположим для удобства, что двумерная решетка Λ не содержит точек, лежащих на координатных осях, за исключением $\mathbf{o}$. Тогда никакие две различные точки решетки Λ не имеют одинаковых x_1-координат или x_2-координат. Заведомо существует такая точка $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20})$ решетки Λ, что $\mathbf{o}$ является единственной точкой решетки Λ в области

$$|x_1| < |x_{10}|, \quad |x_2| < |x_{20}|.$$

1) Этот стиль восходит к Клейну [1, 2].

Пусть $\pm \mathbf{x}_1 = \pm (x_{11}, x_{21}) \neq \mathbf{o}$ — та из точек решетки Λ, удовлетворяющих условию $|x_1| < |x_{10}|$, для которой величина $|x_2|$ наименьшая. Тогда в области

$$|x_1| < |x_{10}|, \quad |x_2| < |x_{21}|, \tag{1'}$$

а тем более и в области

$$|x_1| < |x_{11}|, \quad |x_2| < |x_{21}|,$$

нет точек решетки, отличных от начала. Мы можем затем повторить этот процесс, взяв вместо $\mathbf{x}_0$ точку $\mathbf{x}_1$ и т. д., так что в результате получается последовательность точек $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$. Аналогично мы можем исходить от точки $\mathbf{x}_0$ и поменять ролями координаты x_1 и x_2, что приведет нас к последовательности точек $\mathbf{x}_{-1}, \mathbf{x}_{-2}, \ldots$. Таким образом, существует такая последовательность точек

$$\mathbf{x}_j = (x_{1j}, x_{2j}) \quad (-\infty < j < \infty),$$

что в множествах

$$|x_1| < |x_{1j}|, \quad |x_2| < |x_{2,j+1}| \tag{1}$$

нет точек решетки Λ, отличных от $\mathbf{o}$. Ясно, что для того, чтобы точка $\mathbf{y} \in \Lambda$ имела бы вид $\pm \mathbf{x}_j$ для некоторого j, необходимо и достаточно, чтобы в множестве $|x_1| < |y_1|$, $|x_2| < |y_2|$ не было точек решетки Λ, отличных от $\mathbf{o}$. Таким образом, последовательность пар точек $\pm \mathbf{x}_j$ полностью определяется решеткой Λ, хотя специальный выбор пары $\pm \mathbf{x}_0$, конечно, произволен. Если $\boldsymbol{\omega}$ — любой автоморфизм формы x_1x_2, то последовательностью пар для решетки $\boldsymbol{\omega}\Lambda$ будет либо $\pm \boldsymbol{\omega}\mathbf{x}_j$, если $\boldsymbol{\omega}$ не переставляет осей координат, либо $\pm \boldsymbol{\omega}\mathbf{x}_{-j}$ (т. е. последовательность, записанная в обратном порядке), если $\boldsymbol{\omega}$ переставляет оси.

Так как в множестве (1) нет точек решетки Λ, отличных от $\mathbf{o}$, то, если исключить вершины, их нет также и в замкнутом треугольнике с вершинами $\mathbf{o}$, $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_{j+1}$, а потому по лемме 6 гл. III для каждого j точки $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_{j+1}$ образуют базис решетки Λ. Мы должны теперь ввести различие между x_1- и x_2-осями, чтобы изучить связь между различными базисами $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_{j+1}$. Мы выберем в качестве $\mathbf{x}_j$ ту точку из пары $\pm \mathbf{x}_j$, для которой

$$x_{2j} > 0 \quad (\text{для всех } j); \tag{2}$$

тогда

$$x_{1j}x_{1,j+1} < 0, \tag{3}$$

так как иначе точка $\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_j$ принадлежала бы множеству (1). Так как пары $\mathbf{x}_{j-1}$, $\mathbf{x}_j$ и $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_{j+1}$ являются базисами, то для некоторого целого числа a_j

$$\mathbf{x}_{j+1} \pm \mathbf{x}_{j-1} = a_j\mathbf{x}_j. \tag{4}$$

Так как
$$x_{2,j+1} > x_{2,j} > x_{2,j-1},$$
то
$$a_j > 0.$$
Кроме того, в равенстве (4) должен стоять знак минус, так как
$$|x_{1,j+1}| < |x_{1j}| < |x_{1,j-1}|$$
и неравенство (3) справедливо для всех j. Поэтому существует последовательность таких целых чисел $a_j > 0$, что
$$\mathbf{x}_{j+1} - \mathbf{x}_{j-1} = a_j \mathbf{x}_j.$$
Можно показать, что если две решетки имеют одинаковые последовательности целых a_j, то они совпадают с точностью до преобразования типа
$$x_1 \to \omega_1 x_1, \qquad x_2 \to \omega_2 x_2.$$
Для каждой последовательности положительных целых чисел a_j существует соответствующая решетка.

Таким образом, при рассмотрении двумерных задач о решетках для формы $x_1 x_2$ естественно оперировать не просто с решеткой Λ, а с последовательностью a_j. Оказывается, что на поведение любого частного базиса решетки Λ, скажем $\mathbf{x}_J$, $\mathbf{x}_{J+1}$, очень сильно влияют значения a_j для j, близких к J, и лишь очень слабо значения a_j для j, удаленных от J. Во многих задачах оказывается возможным изучить поведение только малого количества a_j одновременно. Отсюда термин — „локальные методы".

Было бы интересно распространить локальные методы на задачи в пространствах большего числа измерений, например на задачи, связанные с функциями $x_1 \max(x_2^2, x_3^2)$, $x_1(x_2^2 + x_3^2)$, $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ или $x_1 x_2 x_3$. Трудность заключается не в том, чтобы найти аналоги для точек $\mathbf{x}_j$, но в том, чтобы создать методы для изучения их связей. Цепные дроби были обобщены на двумерные решетки над мнимым квадратичным полем, т. е. по существу на некоторые специальные четырехмерные решетки (см. Пуату [1] и приведенные там ссылки).

ГЛАВА XI

НЕОДНОРОДНЫЕ ПРОБЛЕМЫ

§ 1. Введение

1. Как и раньше, мы говорим, что точки $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ сравнимы по модулю Λ,
$$\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_2 \quad (\Lambda),$$
где Λ — решетка, если $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \in \Lambda$. Множество точек $\mathbf{x}$, сравнимых с данной точкой $\mathbf{x}_0$ по модулю Λ, называется классом[1] $\mathfrak{G}$; Λ называется решеткой класса; число
$$d(\mathfrak{G}) = d(\Lambda)$$
называется определителем класса. Типичной неоднородной проблемой геометрии чисел является задача нахождения условий, при которых класс содержит точку из данного множества $\mathscr{S}$.

Эта задача имеет много различных вариантов. Так, можно рассматривать все классы с данным определителем $d(\mathfrak{G})$ или можно пытаться получать информацию о решетке Λ. Большая часть основного аппарата для изучения неоднородных проблем является естественным обобщением соответствующего аппарата для решеток (теоремы компактности и т. п.; относительно тел с автоморфизмами см. Суиннертон-Дайер [2]). Для некоторых специальных проблем был развит необыкновенно мощный и тонкий аппарат, соответствующее рассмотрение которого заняло бы слишком много места. Поэтому эта последняя глава не претендует на полноту.

2. Следующий простой результат, принадлежащий Макбету [1], поможет сформулировать основные идеи.

Теорема I. *Пусть множество $\mathscr{S}$ имеет конечный объем $V(\mathscr{S})$, и пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное сколь угодно малое число. Тогда существует такой класс $\mathfrak{G}$, что $d(\mathfrak{G}) = \varepsilon$ и $\mathfrak{G}$ не имеет точек в множестве $\mathscr{S}$.*

Доказательство. Выберем число R столь большим, чтобы часть множества $\mathscr{S}$, лежащая в множестве $|\mathbf{x}| \geqslant R$, имела объем $< \frac{1}{4}\varepsilon$.

[1] Другой термин: неоднородная решетка.

Пусть Λ — решетка с базисом

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{b}_1=(4R,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \mathbf{b}_2=(0,\ \eta,\ 0,\ \ldots,\ 0), \\ \mathbf{b}_3=(0,\ 0,\ \eta,\ \ldots,\ 0), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \mathbf{b}_n=(0,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ \eta), \end{array}\right\} \tag{1}$$

где

$$4R\eta^{n-1}=\varepsilon. \tag{2}$$

Каждая точка $\mathbf{x}_1$ пространства сравнима по модулю Λ с одной и только одной точкой параллелепипеда

$$\mathscr{P}:\ \left\{\begin{array}{l} y_1\mathbf{b}_1+\ \ldots\ +y_n\mathbf{b}_n \\ \left(-\frac{1}{2}\leqslant y_j<\frac{1}{2}\right) \end{array}\right\}. \tag{3}$$

В силу (2) объем параллелепипеда $\mathscr{P}$ равен $V(\mathscr{P})=d(\Lambda)=\varepsilon$. Если точка $\mathbf{x}'=\sum y_j'\mathbf{b}_j$ параллелепипеда $\mathscr{P}$ сравнима по модулю Λ с такой точкой $\mathbf{x}_1$, что $|\mathbf{x}_1|\leqslant R$, то $|y_1'|\leqslant\frac{1}{4}$. Следовательно, мера множества точек с этим свойством не превосходит $\frac{1}{2}\varepsilon$. Но по построению объем множества точек $\mathbf{x}_2\in\mathscr{S}$ с условием $|\mathbf{x}_2|>R$ не превосходит $\frac{1}{4}\varepsilon$, а потому такой же объем имеет множество точек $\mathbf{x}''\in\mathscr{P}$, сравнимых по крайней мере с одной такой точкой (ср. доказательство теоремы I гл. III). Таким образом, мера множества точек параллелепипеда $\mathscr{P}$, сравнимых хотя бы с одной точкой множества $\mathscr{S}$, не превосходит $\frac{1}{2}\varepsilon+\frac{1}{4}\varepsilon<\varepsilon=V(\mathscr{P})$. Поэтому существует точка $\mathbf{x}_0\in\mathscr{P}$, не сравнимая ни с одной точкой множества $\mathscr{S}$. Ясно, что класс $\mathfrak{G}$ всех точек, сравнимых с $\mathbf{x}_0$ по модулю Λ, обладает всеми требуемыми свойствами.

Теорема I доказана.

3. Мы будем иметь дело главным образом со звездными телами $\mathscr{S}$, заданными своими лучевыми функциями

$$\mathscr{S}:\ F(\mathbf{x})<1. \tag{1}$$

Для любой решетки Λ и любой точки $\mathbf{x}_0$ положим [1])

$$m(\mathbf{x}_0)=m(\mathbf{x}_0,\ \Lambda)=\inf_{\mathbf{x}\equiv\mathbf{x}_0\,(\Lambda)}F(\mathbf{x}) \tag{2}$$

[1]) Таким образом, в обозначениях п. 2 § 2 гл. VII $m(\mathbf{x}_0)=F(\mathfrak{x}_0)$, где $\mathfrak{x}_0$ — элемент факторпространства, которому принадлежит $\mathbf{x}_0$.

и

$$\mu(\Lambda)=\sup_{\mathbf{x}_0}m(\mathbf{x}_0,\ \Lambda). \tag{3}$$

Очевидно, для любого $t\neq 0$

$$\mu(t\Lambda)=|t|\mu(\Lambda). \tag{4}$$

Точная нижняя граница в формуле (2) может не достигаться; она, очевидно, достигается, если множество $F(\mathbf{x})<1$ ограничено. Функция $m(\mathbf{x}_0)$ может не быть непрерывной, однако она полунепрерывна:

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0}\sup m(\mathbf{x})\leqslant m(\mathbf{x}_0). \tag{5}$$

Действительно, для $\varepsilon>0$ найдется такая точка $\mathbf{a}\in\Lambda$, что

$$F(\mathbf{x}_0+\mathbf{a})<m(\mathbf{x}_0)+\varepsilon,$$

откуда по непрерывности функции $F(\mathbf{x})$

$$F(\mathbf{x}+\mathbf{a})<m(\mathbf{x}_0)+\varepsilon$$

для всех $\mathbf{x}$ из некоторой окрестности точки $\mathbf{x}_0$. А тогда в этой окрестности $m(\mathbf{x})<m(\mathbf{x}_0)+\varepsilon$. Если же множество $F(\mathbf{x})<1$ ограничено, то функция $m(\mathbf{x})$ непрерывна. Читатель легко сможет получить доказательства только что высказанных утверждений по аналогии с доказательством полунепрерывности функции $F(\Lambda)$ (см. п. 3 § 3 гл. V). Чтобы построить примеры, когда точная нижняя граница в (2) не достигается и когда $m(\mathbf{x})$ не непрерывна, в двумерном случае достаточно рассмотреть некоторые решетки Λ при $F(\mathbf{x})=|x_1x_2|^{1/2}$. Этот случай имеет приложения в теории алгебраических чисел и был весьма тщательно изучен как ввиду этого, так и ввиду самостоятельного интереса, который он вызывает; см. работы Бернса и Суиннертон-Дайера [1, 2, 3] и Бернса [3], где имеются многочисленные ссылки на более ранние работы. В этом же плане имеются некоторые работы для $|x_1x_2x_3|^{1/3}$ $(n=3)$, но они не были столь далеко идущими; см. Давенпорт [12], Кларк [1] и Самет [1].

Из определения (2) вытекает, что функцию $m(\mathbf{x})$ можно считать заданной на факторпространстве $\mathscr{R}/\Lambda$ (ср. гл. VII). Поскольку оно компактно, из неравенства (5) следует, что точная верхняя граница в (3) всегда достижима; иными словами, существует такая точка $\mathbf{x}_1$, что

$$\mu(\Lambda)=m(\mathbf{x}_1,\ \Lambda).$$

Разумеется, совсем необязательно, чтобы точная нижняя граница в (2) достигалась бы при $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_0$. При наличии неограниченных множеств

$F(\mathbf{x}) < 1$ снова может возникнуть ситуация последовательных минимумов, т. е. может оказаться, что

$$\sup_{m(\mathbf{x}_0) \neq \mu(\Lambda)} m(\mathbf{x}_0) < \mu(\Lambda).$$

По поводу некоторых довольно глубоко разработанных примеров найденных последовательных минимумов см. только что цитированные работы Бернса и Суиннертон-Дайера.

В силу (4) при замене Λ на $t\Lambda$ частное

$$\frac{\{\mu(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)} \tag{6}$$

не меняется. Положим

$$\mathfrak{d}(F) = \inf_{\Lambda} \frac{\{\mu(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)}, \tag{7}$$

причем может оказаться, что $\mathfrak{d}(F) = 0$. Если множество $F(\mathbf{x}) < 1$ имеет конечный объем V_F, то

$$\mathfrak{d}(F) \geqslant V_F^{-1}. \tag{8}$$

Действительно, пусть Λ — некоторая решетка и $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Существует точка $\mathbf{x}_1$, сравнимая с любой данной точкой $\mathbf{x}_0$ и удовлетворяющая неравенству

$$F(\mathbf{x}_1) < \mu(\Lambda) + \varepsilon. \tag{9}$$

Следовательно, множество (9) имеет объем, не меньший, чем $d(\Lambda)$. Поскольку объем множества точек $\mathbf{x}_1$, удовлетворяющих условию (9), равен $\{\mu(\Lambda) + \varepsilon\}^n V_F$, то утверждение (8) справедливо.

В § 3 мы покажем, что для ограниченного тела $F(\mathbf{x}) < 1$ точная нижняя граница в (7) достигается, т. е. существует такая решетка M, что

$$\{\mu(M)\}^n = \mathfrak{d}(F)\, d(M).$$

В § 2 мы дадим оценку $\mathfrak{d}(F)$ для выпуклых лучевых функций F и рассмотрим относящуюся к этому вопросу литературу.

Может оказаться, что $\mathfrak{d}(F) > 0$ даже при $V_F = \infty$. В частности, Давенпорт [16] показал, что это имеет место для двумерной лучевой функции

$$F(\mathbf{x}) = |x_1 x_2|^{\frac{1}{2}}. \tag{10}$$

Его оценка

$$\mathfrak{d}(F) \geqslant \frac{1}{128}$$

была улучшена до

$$\mathfrak{d}(F) \geqslant \frac{1}{45{,}2}$$

автором (Касселс [3]), причем доказательство оказалось более простым. В свою очередь эта оценка посредством модернизации первоначального метода Давенпорта недавно была улучшена Эннолой [1]

$$\mathfrak{d}(F) \geqslant \left(16 + 6^{\frac{3}{2}}\right)^{-1} = \frac{1}{30{,}69\ldots}.$$

С другой стороны, Питмен [1] показала, что

$$\mathfrak{d}(F) \leqslant \frac{1}{12},$$

а затем получила еще меньшую верхнюю границу для $\mathfrak{d}(F)$ [1]).

Задача определения $\mathfrak{d}(F)$ для функции (10) тесно связана с задачей нахождения вещественных квадратичных числовых полей с алгоритмом Евклида. Давенпорт обобщил свою работу на числовые поля двух других типов, соответствующих функциям

$$F^3 = x_1(x_2^2 + x_3^2) \quad \text{и} \quad F^4 = (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2).$$

Эти результаты были доказаны автором (Касселс [3]) значительно проще и с лучшей оценкой числа $\mathfrak{d}(F)$.

Главка [6] обобщил эти результаты на любые лучевые функции $F(\mathbf{x})$ от n переменных, представимые в виде

$$\{F(\mathbf{x})\}^n = \{F_r(x_1, \ldots, x_r)\}^r \{F_{n-r}(x_{r+1}, \ldots, x_n)\}^{n-r},$$

где F_r и F_{n-r} суть r-мерная и $(n-r)$-мерная лучевые функции, причем звездные тела $F_r(\mathbf{x}) < 1$ и $F_{n-r}(\mathbf{x}) < 1$ ограничены. Мы не будем излагать здесь эти исследования. Задача, тесно связанная с этой, изложена в монографии автора (Касселс [8], § 6 гл. V); там же приведена дополнительная библиография.

По-видимому, в общем случае решить вопрос, имеет ли место равенство $\mathfrak{d}(F) = 0$, весьма трудно. Бернс [2]) показал, что $\mathfrak{d}(F) = 0$ для

$$F(\mathbf{x}) = |x_1^2 + x_2^2 - x_3^2|^{\frac{1}{2}} \qquad (n = 3).$$

Для лучевой функции

$$F(\mathbf{x}) = |x_1 x_2 x_3|^{\frac{1}{3}} \qquad (n = 3)$$

этот вопрос остается открытым.

4. Из теоремы Макбета тотчас же вытекает, что если $V(F) < \infty$, то

$$\mathfrak{D}(F) = \sup_{\Lambda} \frac{\{\mu(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)} = \infty.$$

---

[1]) Pitman J., *Acta Arithm.*, 6 (1960), 37—46.
[2]) Barnes E. S., *J. Austral. Math. Soc.*, 2 (1961/1962), 9—10.

В § 4 мы будем рассматривать $\mathfrak{D}(F)$ для функции

$$F = |x_1 x_2 \ldots x_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Минковский высказал предположение, что $\mathfrak{D}(F) = 2^{-n}$, однако это доказано только при $n = 2, 3, 4$. Библиография и дальнейшее исследование будут приведены в § 4. Мы приведем также результат Чока относительно множества

$$x_1 x_2 \ldots x_n \leqslant 1, \qquad x_j > 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n)$$

(это тело не является звездным!) и процитируем другие работы о множествах, заданных посредством $x_1 \ldots x_n$.

Значение $\mathfrak{D}(F)$ для лучевой функции

$$F(\mathbf{x}) = |x_1^2 + x_2^2 - x_3^2|^{\frac{1}{2}} \qquad (n = 3)$$

было определено Давенпортом [13], который показал, что оно изолировано. Исследование последовательных минимумов было продолжено Бернсом [5]. Совсем недавно Берч [4] нашел $\mathfrak{D}(F)$ для

$$F(\mathbf{x}) = |x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_{2r}^2|^{\frac{1}{2}} \qquad (n = 2r)$$

для всех $r \geqslant 2$. Блени [1] дал оценки для функции

$$F(\mathbf{x}) = |x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_n^2|^{\frac{1}{2}}$$

при $r > 0$, $n - r > 0$, а Роджерс [10] и Фостер [1] улучшили их. Эти результаты естественным образом эквивалентны отысканию наилучшей постоянной $\eta_{r,s}$, для которой

$$\sup \inf |f(\mathbf{u} + \mathbf{u}_0)| \leqslant \eta_{r,s} |D|^{\frac{1}{n}}$$

для всех неопределенных квадратичных форм f с сигнатурой (r, s) $(r + s = n)$ и определителем D. В последнем неравенстве точная верхняя граница берется по всем вещественным $\mathbf{u}_0$, а точная нижняя граница — по всем целым $\mathbf{u}$. В дальнейшем эти работы мы рассматривать не будем и отсылаем читателя к оригинальным работам.

5. Для некоторых функций $F(\mathbf{x})$ имеются неравенства, связывающие

$$\mu(\Lambda) = \sup_{\mathbf{x}_0} \inf_{\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0 (\Lambda)} F(\mathbf{x})$$

и

$$F(\Lambda) = \inf_{\substack{\mathbf{x} \in \Lambda \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{o}}} F(\mathbf{x})$$

или, выражаясь более общо, связывающие $\mu(\Lambda)$ и последовательные минимумы функции $F(\mathbf{x})$ относительно решетки Λ. Когда $F(\mathbf{x})$ является выпуклой функцией, имеются соотношения, в которые входит взаимная лучевая функция $F^*(\mathbf{x})$ и взаимная решетка Λ^*. Соотношения такого вида называются теоремами переноса[1]) (Übertragungsätze). Так, теорему Дирихле о шестиугольнике (теорема VII гл. IX) можно рассматривать как очень точную теорему переноса для $|x_1^2 + x_2^2|^{\frac{1}{2}}$. Теоремы переноса для выпуклых функций мы рассмотрим в § 3. Интересные теоремы переноса были получены для невыпуклых функций $F(\mathbf{x})$ вида

$$\{F(\mathbf{x})\}^n = |x_1 \ldots x_r| \prod_{k=1}^{s} (x_{r+k}^2 + x_{r+s+k}^2),$$

где $n = r + 2s$. Но по этому вопросу нам придется отослать читателя к работе Давенпорта и Суиннертон-Дайера [1], в которой имеются ссылки на более ранние работы. В частности, имеется один любопытный результат в работе Суиннертон-Дайера [2].

Имеются результаты другого типа, о которых уместно упомянуть здесь, ибо они являются своего рода теоремами переноса. Бернс [1] показал, что если

$$F(\mathbf{x}) = |x_1 x_2|^{\frac{1}{2}}$$

и базис Λ состоит из $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$, то

$$2\mu(\Lambda) \leqslant \max\left\{F(\mathbf{a}_1),\ F(\mathbf{a}_2),\ \min_{\pm} F(\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2)\right\}.$$

Относительно других результатов этого вида, а также дальнейших ссылок см. Бамба и Роджерс (K. Rogers) [1]. В частности, Роджерс (K. Rogers) [1] показал, что результат Бернса справедлив для всех тех лучевых функций $F(\mathbf{x})$, области $F(\mathbf{x}) < 1$ которых имеют тот же общий вид, что и $|x_1 x_2| < 1$. Все доказательства элементарны, но в значительной мере сводятся к утомительному исследованию частных случаев. Здесь мы их рассматривать не будем.

§ 2. Выпуклые множества

1. Для размерности 2 проблема нахождения $\mathfrak{d}(F)$ (см. формулу (7) п. 3 § 1) для выпуклых функций F полностью решается следующей теоремой (Бамба и Роджерс (C. A. Rogers) [1]).

Теорема II. *Пусть $\mathscr{S}$ — замкнутое двумерное выпуклое множество и Δ_1 — некоторое число. Для того чтобы существовала*

[1]) Главным образом потому, что информация, полученная в одной задаче, переносится на другую.

решетка Λ с определителем $d(\Lambda)=\Delta_1$, обладающая тем свойством, что каждая точка пространства сравнима по модулю Λ с некоторой точкой множества $\mathcal{S}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал выпуклый шестиугольник[1] $\mathcal{H}$, *вписанный в* $\mathcal{S}$, *который был бы симметричен относительно некоторой точки и имел бы площадь* $V(\mathcal{H})=\Delta_1$.

Отметим, что от множества $\mathcal{S}$ не требуется, чтобы оно было симметрично относительно какой-либо точки.

Доказательство. Предположим сначала, что такой шестиугольник $\mathcal{H}$ существует. Можно считать, что центр $\mathcal{H}$ совпадает с началом координат. Пусть Λ — критическая решетка тела $2\mathcal{H}$. Тогда $d(\Lambda)=V(\mathcal{H})=\Delta_1$ по лемме 13 гл. V. Поэтому, применяя теоремы II и III гл. IX к телу $2\mathcal{H}$ и используя замкнутость шестиугольника $\mathcal{H}$, получаем, что каждая точка плоскости сравнима по модулю Λ с некоторой точкой шестиугольника $\mathcal{H}$, а значит, и множества $\mathcal{S}$.

Пусть теперь существует такая решетка Λ, что каждая точка плоскости сравнима по модулю Λ с некоторой точкой множества $\mathcal{S}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\mathcal{S}$ — ограниченное множество. Шестиугольник $\mathcal{H}$ мы построим в несколько этапов.

Предположим сначала, что имеется такая точка $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$ решетки Λ, что $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}+\mathbf{a}$ имеют общие внутренние точки. Подобрав подходящее целое число $s\geqslant 0$ и заменив $\mathbf{a}$ на $2^s\mathbf{a}$, мы, не уменьшая общности, можем полагать, что $\mathcal{S}+2\mathbf{a}$ и $\mathcal{S}$ не имеют общих внутренних точек. Тогда на границе множеств $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}+\mathbf{a}$ существуют такие точки $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$, что часть границы множества $\mathcal{S}$, заключенная между точками $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ (фиксируем направление обхода границы, скажем, против часовой стрелки), лежит в $\mathcal{S}+\mathbf{a}$, а часть границы множества $\mathcal{S}+\mathbf{a}$, заключенная между $\mathbf{d}$ и $\mathbf{c}$, лежит в $\mathcal{S}$. В таком случае $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}-\mathbf{a}$ являются общими точками границ $\mathcal{S}$ и $\mathcal{S}-\mathbf{a}$.

Пусть $\mathcal{S}_1$ — часть множества $\mathcal{S}$, лежащая между отрезком, соединяющим точки $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$, и отрезком, соединяющим точки $\mathbf{c}-\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}-\mathbf{a}$, причем $\mathcal{S}_1$ предполагается замкнутым, т. е. $\mathcal{S}_1$ включает точки множества $\mathcal{S}$, лежащие на этих отрезках. Ясно, что тогда множество $\mathcal{S}_1$ является выпуклым и каждая точка плоскости сравнима по модулю Λ с некоторой точкой множества $\mathcal{S}_1$. Так как множество $\mathcal{S}$ ограничено, то после конечного числа шагов мы получим такое замкнутое выпуклое множество $\mathcal{T}\subset\mathcal{S}$, что каждая точка плоскости сравнима по модулю Λ с некоторой точкой множества $\mathcal{T}$, но ни при какой точке $\mathbf{a}\in\Lambda$ множества $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}+\mathbf{a}$ не имеют общих внутренних точек. Тогда каждая граничная точка множества $\mathcal{T}$ является и граничной точкой множества $\mathcal{T}+\mathbf{a}$ при некотором $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}, \mathbf{a}\in\Lambda$.

[1]) Параллелограмм здесь рассматривается как вырожденный случай выпуклого шестиугольника.

Поскольку $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}+\mathbf{a}$ — выпуклые множества, эта общая граница является либо точкой, либо отрезком. Ввиду того что $\mathcal{T}$ ограничено, рассматривается только конечное число точек $\mathbf{a}$ и поэтому $\mathcal{T}$ является выпуклым многоугольником. Покажем, что он симметричен относительно некоторой точки.

Пусть $\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m$ — вершины многоугольника $\mathcal{T}$, причем отрезок $\mathbf{c}_j\mathbf{c}_{j+1}$ является общей границей $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}+\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_j\in\Lambda$. Тогда отрезок $(\mathbf{c}_j-\mathbf{a}_j)(\mathbf{c}_{j+1}-\mathbf{a}_j)$ является общей границей $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}-\mathbf{a}_j$. Следовательно, m — четное число, $m=2l$, и

$$\mathbf{a}_{j\pm l}=-\mathbf{a}_j,$$
$$\mathbf{c}_{j+l}=\mathbf{c}_{j+1}-\mathbf{a}_j, \quad \mathbf{c}_{j+l+1}=\mathbf{c}_j-\mathbf{a}_j.$$

Таким образом, для каждого j

$$\frac{1}{2}(\mathbf{c}_j+\mathbf{c}_{j+l})=\frac{1}{2}(\mathbf{c}_{j+1}+\mathbf{c}_{j+1+l});$$

поэтому $\mathbf{e}=\frac{1}{2}(\mathbf{c}_j+\mathbf{c}_{j+l})$ не зависит от j. Итак, $\mathcal{T}$ симметричен относительно $\mathbf{e}$.

Не уменьшая общности, можно положить $\mathbf{e}=\mathbf{o}$. Тогда решетка Λ является укладкой множества $\mathcal{T}$ (или, точнее, внутренности множества $\mathcal{T}$) и каждая точка плоскости сравнима по модулю Λ с некоторой точкой многоугольника $\mathcal{T}$. Поэтому в силу теорем II и VI гл. IX $\mathcal{T}$ является шестиугольником.

Теорема II доказана.

Используя известные результаты о шестиугольниках, вписанных в выпуклые множества, Бамба и Роджерс (C. A. Rogers) [1] доказали, что для выпуклой двумерной лучевой функции F имеет место (в обозначениях п. 3 § 1) неравенство

$$1\leqslant V_F\mathfrak{d}(F)\leqslant\frac{3}{2},$$

причем если F — симметричная функция, то имеет место более сильное неравенство

$$1\leqslant V_F\mathfrak{d}(F)\leqslant\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Равенства в правой части достигаются, когда тела $F(\mathbf{x})<1$ являются соответственно треугольником и кругом. Левое неравенство, справедливое, независимо от того, является ли F выпуклой функцией, было получено в п. 3 § 1.

Существует теория решетчатых и нерешетчатых покрытий, тесно связанная с теорией укладок, рассмотренной в гл. IX. Относительно подробностей для двумерного случая см. Фейеш Тот [1, 2] и Бамба и Роджерс (C. A. Rogers) [1].

О величине $\mathfrak{d}(F)$ для размерностей, больших 2, известно немного. В случае когда $F(\mathbf{x}) < 1$ — единичный трехмерный шар, точное значение $\mathfrak{d}(F)$ нашел Бамба [3]. Другие выводы формулы Бамба [3] были даны Бернсом [6] и Фью [1], но все они достаточно сложны. Бамба [2] получил оценку $\mathfrak{d}(F)$ для четырехмерного шара и высказал предположение[1]) о точном значении $\mathfrak{d}(F)$. Относительно полученных для n-мерных шаров оценок сверху и снизу для $\mathfrak{d}(F)$ и соответствующих чисел для нерешетчатых покрытий см. Бамба и Давенпорт [1], Давенпорт [18] и Ватсон [1] — для решетчатого случая, Эрдёш и Роджерс [1] и Роджерс [19] — для нерешетчатого случая, причем последняя работа рассматривает общие выпуклые множества. Совсем недавно Роджерс [23] получил более мощными методами значительно более сильные результаты.

2[2]). Роджерс [7] дал изящное доказательство следующего результата, связывающего $\mathfrak{d}(F)$ с функцией

$$\delta(F) = \sup_{\Lambda} \frac{\{F(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)},$$

введенной в § 4 гл. IV.

Теорема III. *Для всех симметричных выпуклых n-мерных лучевых функций, обращающихся в нуль только в начале координат,*

$$\mathfrak{d}(F) \leqslant 2^{-n} 3^{n-1} \delta(F).$$

Роджерс [7] доказал также аналогичный результат для нерешетчатых укладок и покрытий, причем с меньшей постоянной 2^{-1} (вместо $2^{-n}3^{n-1}$). Перед тем как доказывать теорему III, отметим следующее предложение, сразу же вытекающее из нее.

Следствие. *Пусть V_F — объем тела $F(\mathbf{x}) < 1$; тогда*

$$V_F \mathfrak{d}(F) \leqslant 3^{n-1}.$$

Действительно, по теореме Минковского о выпуклом теле $V_F \delta(F) \leqslant 2^n$.

Роджерс доказывает теорему III, исследуя критическую решетку M тела $F(\mathbf{x}) < 1$, т. е. такую решетку, что

$$F(\mathrm{M}) = 1, \quad d(\mathrm{M}) = \{\delta(F)\}^{-1}. \tag{1}$$

Далее мы используем обозначения п. 3 § 1, в частности

$$m(\mathbf{x}_0) = \inf_{\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0 (\mathrm{M})} F(\mathbf{x}).$$

[1]) Это предположение доказано Б. Н. Делоне и С. С. Рышковым (*ДАН СССР*, **152** (1963), 523—524). — *Прим. ред.*

[2]) Для достаточно больших n результаты этого пункта были улучшены Роджерсом [23].

Доказательство теоремы III. Как было показано в п. 3 § 1, существует такая точка $\mathbf{x}_1$, что

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x}_1) &= \sup_{\mathbf{x}_0} m(\mathbf{x}_0) = \\ &= \mu(\mathrm{M}) = \\ &= \mu. \end{aligned} \tag{2}$$

Поэтому

$$m(3\mathbf{x}_1) \leqslant \mu,$$

и так как $F(\mathbf{x}) < 1$ — ограниченное множество, то существует такая точка $\mathbf{a} \in \mathrm{M}$, что

$$F(3\mathbf{x}_1 - \mathbf{a}) = m(3\mathbf{x}_1) \leqslant \mu.$$

Тогда

$$F\left(\mathbf{x}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{a}\right) \leqslant \frac{1}{3}\mu < \mu \tag{3}$$

и, значит, точка $\frac{1}{3}\mathbf{a}$ не лежит в M.

Пусть Λ — решетка точек

$$\mathbf{b} + \frac{r}{3}\mathbf{a}, \quad \mathbf{b} \in \mathrm{M}, \quad r \text{ целое},$$

так что

$$d(\Lambda) = \frac{1}{3} d(\mathrm{M}).$$

По определению функции $\delta(F)$

$$\{F(\Lambda)\}^n \leqslant \delta(F)\, d(\Lambda) = \frac{1}{3}\delta(F)\, d(\mathrm{M}),$$

т. е. найдется такая точка $\mathbf{b} + \frac{r}{3}\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ, что

$$\left\{F\left(\mathbf{b} + \frac{r}{3}\mathbf{a}\right)\right\}^n \leqslant \frac{1}{3}\delta(F)\, d(\mathrm{M}). \tag{4}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что $r = 0$, или ± 1. Если $r = 0$, то $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$, так что

$$F(\mathbf{b}) \geqslant F(\mathrm{M}) = 1,$$

и выражения (1) и (4) противоречат друг другу. Поэтому $r = \pm 1$, и в силу (2) и (3)

$$\begin{aligned} F\left(\mathbf{b} \pm \frac{1}{3}\mathbf{a}\right) &= F\left\{\mathbf{b} \pm \mathbf{x}_1 \mp \left(\mathbf{x}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{a}\right)\right\} \geqslant \\ &\geqslant F(\mathbf{b} \pm \mathbf{x}_1) - F\left(\mathbf{x}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{a}\right) \geqslant \\ &\geqslant \mu - \frac{1}{3}\mu = \\ &= \frac{2}{3}\mu. \end{aligned} \tag{5}$$

Подставляя (5) в (4), получим

$$\frac{\mu^n}{d(\mathrm{M})} \leqslant 2^{-n}3^{n-1}\mathfrak{d}(F). \tag{6}$$

По определению $\mathfrak{d}(F)$ как точной нижней границы (п. 3 § 1) левая часть неравенства (6) не превосходит $\mathfrak{d}(F)$.

Теорема III доказана.

§ 3. Теоремы переноса для выпуклых множеств

1. В этом параграфе будут изучены связи между функцией

$$\mu = \mu(\Lambda) = \sup_{\mathbf{x}_0} \inf_{\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0(\Lambda)} F(\mathbf{x}), \tag{1}$$

рассмотренной в § 1, и последовательными минимумами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ n-мерной симметричной выпуклой лучевой функции F, обращающейся в нуль только в точке $\mathbf{o}$, относительно решетки Λ. Величины $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ были изучены в гл. VIII.

Сначала докажем неравенство

$$\lambda_n \leqslant 2\mu \leqslant \lambda_1 + \ldots + \lambda_n. \tag{2}$$

Пусть $\{\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n\}$ — произвольный базис решетки Λ. Тогда по определению числа μ ввиду ограниченности тела $F(\mathbf{x}) < 1$ найдутся такие точки $\mathbf{c}_j$ решетки Λ, что

$$F\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}_j - \mathbf{c}_j\right) \leqslant \mu.$$

Поэтому точки $\mathbf{d}_j = \mathbf{b}_j - 2\mathbf{c}_j$ удовлетворяют соотношению

$$F(\mathbf{d}_j) \leqslant 2\mu.$$

Поскольку точки $\mathbf{d}_j$ линейно независимы[1]), то отсюда следует левое неравенство (2).

Докажем теперь правую часть неравенства (2). Существуют такие линейно независимые точки $\mathbf{a}_j$ решетки Λ, что

$$F(\mathbf{a}_j) = \lambda_j.$$

Каждая точка $\mathbf{x}_0$ имеет вид

$$\mathbf{x}_0 = \xi_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \xi_n\mathbf{a}_n,$$

[1]) Действительно, предположим, что $\sum_j r_j\mathbf{d}_j = \mathbf{o}$, где r_j — целые числа, причем, не уменьшая общности, можно предположить, что они не имеют общего множителя. Тогда $\sum_j r_j\mathbf{b}_j = 2\sum r_j\mathbf{c}_j$. Поскольку $\{\mathbf{b}_j\}$ — базис, все r_j должны быть четными. Противоречие!

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — некоторые вещественные числа. Рассмотрим точку

$$\mathbf{a} = u_1\mathbf{a}_1 + \ldots + u_n\mathbf{a}_n,$$

где $u_1, \ldots, u_n$ — целые числа с условием

$$|u_j - \xi_j| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} F(\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}) &= F\left\{\sum_j (\xi_j - u_j)\mathbf{a}_j\right\} \leqslant \\ &\leqslant \sum_j |\xi_j - u_j| F(\mathbf{a}_j) \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{2}\sum F(\mathbf{a}_j) = \\ &= \frac{1}{2}\sum \lambda_j, \end{aligned}$$

что доказывает правое неравенство (2).

Используя неравенства

$$\frac{2^n}{n!} d(\Lambda) \leqslant V_F\lambda_1 \ldots \lambda_n \leqslant 2^n d(\Lambda) \tag{3}$$

(теорема V гл. VIII), мы можем вывести оценки для μ сверху и снизу в терминах

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{\mathbf{a} \neq \mathbf{o} \\ \mathbf{a} \in \Lambda}} F(\mathbf{a}) = F(\Lambda).$$

Из левых неравенств (2) и (3), учитывая, что

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n, \tag{4}$$

выводим

$$\frac{2}{n!} d(\Lambda) \leqslant V_F\lambda_1\mu^{n-1}. \tag{5}$$

С другой стороны, для данных λ_1 и произведения $\lambda_1 \ldots \lambda_n$ максимум суммы $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n$, очевидно, достигается при $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{n-1}$. Следовательно, в силу (2) и (3)

$$V_F\lambda_1^{n-1}\{2\mu - (n-1)\lambda_1\} \leqslant 2^n d(\Lambda). \tag{6}$$

Оба неравенства (5) и (6) могут быть улучшены. Проблема получения оценки сверху для μ в терминах λ_1 стара, и ее неоднократно пытались решить различными методами. Самый новый результат, принадлежащий Кнезеру [1] и Берчу [1], будет составлять содержание теоремы V. Неравенство (5) привлекало значительно меньше внимания. В теореме IV мы дадим набросок вывода улучшенной оценки, принадлежащей Берчу [2]. Берч на самом деле доказал результат, несколько более сильный, чем теорема IV, и привел примеры, показывающие, что этот результат не может быть улучшен.

Теорема IV. *Для выпуклой симметричной n-мерной лучевой функции*

$$\mu^{n-1}\lambda_1 V_F \geqslant \frac{2}{n} d(\Lambda).$$

Доказательство Берча весьма просто. Применив подходящее однородное линейное преобразование, мы можем считать, что $\Lambda = \Lambda_0$ является решеткой точек с целыми координатами и что

$$F(0, \ldots, 0, 1) = \lambda_1.$$

Пусть $\mathcal{T}$ есть $(n-1)$-мерная проекция множества

$$\mu\mathcal{S}: \quad F(\mathbf{x}) \leqslant \mu$$

на плоскость $x_n = 0$. Тогда каждая точка плоскости $x_n = 0$ сравнима по модулю Λ_0 с точкой множества $\mathcal{T}$, так что $\mathcal{T}$ имеет $(n-1)$-мерный объем $V_{n-1}(\mathcal{T}) \geqslant 1$. Множество $\mu\mathcal{S}$ содержит точки

$$\pm\left(0, \ldots, 0, \frac{\mu}{\lambda_1}\right).$$

Элементарные геометрические рассуждения[1]) показывают теперь, что для объема множества $\mu\mathcal{S}$ должны выполняться неравенства

$$V(\mu\mathcal{S}) \geqslant \frac{2}{n}\frac{\mu}{\lambda_1} V_{n-1}(\mathcal{T}) \geqslant \frac{2\mu}{n\lambda_1}.$$

Поскольку мы предположили, что $\Lambda = \Lambda_0$, то $d(\Lambda) = 1$. Отсюда и из того, что $V(\mu\mathcal{S}) = \mu^n V_F$, вытекает справедливость искомого неравенства.

Теорема IV доказана.

Теорема V. *Пусть*

$$Q = \frac{2^n d(\Lambda)}{\lambda_1^n V_F} = q + \varkappa, \tag{7}$$

где q — некоторое целое число и $0 \leqslant \varkappa < 1$. Тогда

$$\mu \leqslant \frac{1}{2}\lambda_1 (q + \varkappa^{1/n}). \tag{8}$$

[1]) Детали этих рассуждений изложены в монографии автора (Касселс [8], стр. 105, лемма 1). Наиболее простой путь состоит в замене тела $\mathcal{S}: F(\mathbf{x}) < 1$ телом того же объема, но симметричным относительно плоскости $x_n = 0$. Чтобы выполнить это, для каждой совокупности $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ сегмент тех чисел x_n, для которых $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}$, заменяется сегментом равной длины, но симметричным относительно гиперплоскости $x_n = 0$ (симметризация Штейнера). Для симметризованного множества результат тривиален.

При этом, если $Q \geqslant n$, то

$$\mu \leqslant \frac{1}{2}\lambda_1 Q. \tag{9}$$

Заметим, что в силу (3) $q + \varkappa^{1/n} \geqslant Q$ и $q \geqslant 1$. Неравенство (8) принадлежит Кнезеру [1][1]), а неравенство (9) — Берчу; замечание о том, что (9) справедливо уже при $Q \geqslant n$, принадлежит Кнезеру (см. Берч [1]). Берч доказал аналогичный результат для последующих минимумов $\lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Перед тем как перейти к доказательству, заметим, что (9) больше улучшить нельзя[2]).

Пусть

$$F(\mathbf{x}) = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

и пусть Λ — решетка точек

$$(u_1, \ldots, u_{n-1}, Qu_n),$$

где Q — произвольное число $\geqslant 1$, а $u_1, \ldots, u_n$ пробегают все целые числа. Очевидно, что

$$\lambda_1 = 1, \qquad V_F = 2^n,$$

так что Q удовлетворяет (7). Далее, $\mu = Q/2$, как видно из рассмотрения точки

$$\mathbf{x}_0 = \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{2}Q\right).$$

Довольно долго полагали, что (9) справедливо для всех Q, но следующий пример, принадлежащий Кнезеру и Берчу (см. Берч [1]), показывает, что на самом деле и более слабое неравенство (8) при $1 \leqslant Q \leqslant 2$ улучшить нельзя. Пусть

$$F(\mathbf{x}) = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\},$$

и пусть Λ — решетка точек

$$(u_1 - \varepsilon u_2, \quad u_2 - \varepsilon u_3, \ldots, u_{n-1} - \varepsilon u_n, \quad u_n + \varepsilon u_1),$$

причем $0 \leqslant \varepsilon < 1$ — фиксированное число, а $u_1, \ldots, u_n$ пробегают все целые числа (заметьте перемену знака в последней координате). Тогда, как легко проверить,

$$d(\Lambda) = 1 + \varepsilon^n, \qquad \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1, \qquad \mu = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon).$$

[1]) Профессор Кнезер сообщил мне, что, как он может показать, при нецелом числе Q в (8) знак $\leqslant$ можно заменить на $<$.

[2]) Бамба [7] показал, что (8) и (9) можно иногда улучшить, если известно $\delta(F)$.

Кажется, неизвестно ни одного случая, когда при $Q \geqslant 2$ неравенство (9) не выполняется.

Доказательство теоремы V. Рассмотрим факторпространство $\mathscr{R}/\Lambda$ и воспользуемся обозначениями гл. VII и теоремы IV гл. VIII. В частности, обозначим символом $\mathsf{S}(t)$ множество точек $\mathfrak{y} \in \mathscr{R}/\Lambda$, которые имеют таких представителей $\mathbf{y}$ в $\mathscr{R}$, что $F(\mathbf{y}) < t$. По теореме IV гл. VIII мера $m\{\mathsf{S}(t)\}$ удовлетворяет условиям

$$m\{\mathsf{S}(t)\}\begin{cases} = t^n V_F & \text{при} \quad t \leqslant \frac{1}{2}\lambda_1, \qquad (10)\\ \geqslant t\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^{n-1} V_F & \text{при} \quad \frac{1}{2}\lambda_1 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\lambda_n. \qquad (11)\end{cases}$$

Нам понадобится также следующее неравенство:

$$m\{\mathsf{S}(t_1+t_2)\} \geqslant \min[m\{\mathsf{S}(t_1)\}+m\{\mathsf{S}(t_2)\},\ d(\Lambda)] \qquad (12)$$

при любых $t_1 \geqslant 0$ и $t_2 \geqslant 0$, которое непосредственно вытекает из „теоремы о сумме" (теорема I гл. VII). Действительно, $\mathsf{S}(t_1+t_2)$ содержит сумму $\mathsf{S}(t_1)+\mathsf{S}(t_2)$ (сложение множеств определено в § 3 гл. VII), поскольку $F(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2) < t_1+t_2$ при $F(\mathbf{y}_1) < t_1$ и $F(\mathbf{y}_2) < t_2$.

Заметим также, что μ является нижней границей чисел t с условием $m\{\mathsf{S}(t)\} = d(\Lambda)$. Ясно, что $m\{\mathsf{S}(t)\} = d(\Lambda)$, если каждая точка $\mathscr{R}$ сравнима по модулю Λ с такой точкой $\mathbf{x}$, что $F(\mathbf{x}) < t$. Обратно, предположим, что $m\{\mathsf{S}(t_0)\} = d(\Lambda)$. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Тогда в силу (10) $m\{\mathsf{S}(\varepsilon)\} > 0$, так что по первой части „теоремы о сумме" (теорема I гл. VII) каждая точка факторпространства $\mathscr{R}/\Lambda$ принадлежит $\mathsf{S}(t_0)+\mathsf{S}(\varepsilon) \subset \mathsf{S}(t_0+\varepsilon)$.

Теперь неравенство (8) выводится очень просто. В силу (10)

$$m\left\{\mathsf{S}\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)\right\} = \left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^n V_F = Q^{-1} d(\Lambda)$$

и

$$m\left\{\mathsf{S}\left(\frac{1}{2}\varkappa^{\frac{1}{n}}\lambda_1\right)\right\} = \varkappa\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^n V_F = \varkappa Q^{-1} d(\Lambda).$$

Поэтому, применяя несколько раз (12), получаем

$$m\left[\mathsf{S}\left\{\frac{1}{2}\lambda_1\left(q+\varkappa^{\frac{1}{n}}\right)\right\}\right] \geqslant qm\left\{\mathsf{S}\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)\right\} + m\left\{\mathsf{S}\left(\frac{1}{2}\varkappa^{\frac{1}{n}}\lambda_1\right)\right\} =$$
$$= (q+\varkappa)Q^{-1} d(\Lambda) = d(\Lambda),$$

что и требовалось доказать.

Чтобы доказать (9), нам наряду с (10) понадобится (11), причем теперь

$$Q \geqslant n.$$

Рассмотрим два случая.

Пусть сначала

$$Q\lambda_1 \geqslant n\lambda_n;$$

тогда в силу (2) $2\mu \leqslant \lambda_1 Q$, что в этом случае доказывает неравенство (9).

В противном случае в силу (11) и определения (7) числа Q

$$m\left\{\mathsf{S}\left(\frac{Q}{n}\cdot\frac{\lambda_1}{2}\right)\right\} \geqslant \frac{Q}{n}\left(\frac{1}{2}\lambda_1\right)^n V_F = \frac{d(\Lambda)}{n}.$$

Таким образом, последовательно используя (12), мы получаем

$$m\left\{\mathsf{S}\left(\frac{1}{2}Q\lambda_1\right)\right\} \geqslant d(\Lambda),$$

что завершает доказательство неравенства (9).

Теорема V доказана.

2. Теперь мы в состоянии доказать результат, сформулированный в п. 3 § 1: если звездное тело $F(\mathbf{x}) < 1$ ограничено, то $\mathfrak{d}(F)$ — достижимый минимум, т. е. в обозначениях п. 3 § 1 существует такая решетка M, что

$$\frac{\{\mu(\mathrm{M})\}^n}{d(\mathrm{M})} = \mathfrak{d}(F) = \inf_{\Lambda} \frac{\{\mu(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)}.$$

Нам нужно воспользоваться теоремой переноса п. 1 § 3, чтобы убедиться в том, что мы можем применить критерий компактности Малера. Пусть

$$F_0(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|;$$

поскольку $F(\mathbf{x}) < 1$ ограничено, то

$$F(\mathbf{x}) \geqslant cF_0(\mathbf{x})$$

для некоторого $c > 0$ и любых $\mathbf{x}$. Тогда, очевидно,

$$\mu^{(0)}(\Lambda) \leqslant c^{-1}\mu(\Lambda),$$

где $\mu^{(0)}(\Lambda)$ отвечает F_0. В частности, если $\mu(\Lambda)$ ограничено сверху для некоторого множества $\mathfrak{L}$ решеток Λ, то и $\mu^{(0)}(\Lambda)$ ограничено, а потому по теореме IV (или по неравенству (5) п. 1 § 3) $\lambda_1^{(0)}$ ограничено снизу строго положительным числом, т. е. число

$$|\Lambda| = \inf_{\substack{\mathbf{a}\in\Lambda\\ \mathbf{a}\neq\mathbf{o}}} |\mathbf{a}|$$

ограничено снизу.

Выберем такую последовательность необязательно различных решеток Λ_r $(1 \leqslant r < \infty)$, что

$$d(\Lambda_r) = 1$$

и

$$\{\mu(\Lambda_r)\}^n \to \mathfrak{d}(F).$$

Из доказанного в последнем параграфе вытекает, что $|\Lambda_r|$ ограничено снизу положительным числом. Поэтому по критерию компактности Малера существует сходящаяся подпоследовательность; не умаляя общности, можно полагать, что

$$\Lambda_r \to \mathrm{M}.$$

Тогда решетка M, очевидно, обладает требуемыми свойствами.

3. Пусть Λ и Λ^* — решетки, взаимные в смысле § 5 гл. I. Было показано, что для того чтобы точка $\mathbf{x}$ принадлежала Λ, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение $\mathbf{xa}^*$ было бы целым для всех $\mathbf{a}^* \in \Lambda^*$. То, что мы изложим сейчас, можно рассматривать как количественное обобщение этого утверждения. Для вещественного числа ξ мы обозначаем через $\langle\xi\rangle$ абсолютную величину разности между ξ и ближайшим целым числом, большим или меньшим ξ, т. е.

$$\langle\xi\rangle = \inf_{m=0,\, \pm 1,\, \ldots} |\xi - m|.$$

Теорема VI. *Пусть $F(\mathbf{x})$ — симметричная выпуклая n-мерная лучевая функция, соответствующая ограниченному множеству $F(\mathbf{x}) < 1$, и пусть $F^*(\mathbf{x})$ — взаимная ей лучевая функция. Пусть Λ и Λ^* — взаимные друг другу решетки. Для любой точки $\mathbf{x}_0$ положим*

$$m(\mathbf{x}_0) = \inf_{\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0 (\Lambda)} F(\mathbf{x}) \tag{1}$$

и

$$K(\mathbf{x}_0) = \sup_{\substack{\mathbf{a}^* \in \Lambda^* \\ \mathbf{a}^* \neq \mathbf{o}}} \frac{\langle \mathbf{a}^* \mathbf{x}_0 \rangle}{F^*(\mathbf{a}^*)}, \tag{2}$$

где $\mathbf{a}^*\mathbf{x}_0$ — скалярное произведение. Тогда

$$\left\{\frac{n}{2^{n-1}}(n!)^2\right\}^{-1} m(\mathbf{x}_0) \leqslant K(\mathbf{x}_0) \leqslant m(\mathbf{x}_0). \tag{3}$$

Точное значение постоянных в (3) несущественно; важно лишь то, что отношение $\frac{K(\mathbf{x}_0)}{m(\mathbf{x}_0)}$ лежит между постоянными. По существу, теорема VI восходит к Хинчину [1]. Теорема Кронекера выводится из нее в несколько строк (ср. § 8 гл. V монографии автора [8], где приведена менее общая форма теоремы VI).

Доказательство теоремы VI. Докажем сначала правую часть (3). Пусть

$$\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_0 (\Lambda); \tag{4}$$

тогда $\mathbf{x}_1\mathbf{a}^*$ отличается от $\mathbf{x}_0\mathbf{a}^*$ на целое число $(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)\mathbf{a}^*$, откуда

$$\langle \mathbf{x}_0\mathbf{a}^* \rangle = \langle \mathbf{x}_1\mathbf{a}^* \rangle \leqslant |\mathbf{x}_1\mathbf{a}^*|. \tag{5}$$

Но тогда по определению взаимной функции (теорема III гл. IV), учитывая симметричность функции $F(\mathbf{x})$, имеем

$$|\mathbf{x}_1\mathbf{a}^*| \leqslant F(\mathbf{x}_1) F^*(\mathbf{a}^*); \tag{6}$$

следовательно,

$$\langle \mathbf{x}_0\mathbf{a}^* \rangle \leqslant F(\mathbf{x}_1) F^*(\mathbf{a}^*). \tag{7}$$

Поэтому, взяв точную границу правой части равенства (7) по всем $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_0$ (Λ), мы получаем

$$\langle \mathbf{x}_0\mathbf{a}^* \rangle \leqslant m(\mathbf{x}_0) F^*(\mathbf{a}^*). \tag{8}$$

Чтобы доказать левую часть (3), нам понадобятся взаимные базисы $\{\mathbf{b}_j\}$ и $\{\mathbf{b}_j^*\}$, для которых

$$F(\mathbf{b}_j) F^*(\mathbf{b}_j^*) \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (n!)^2 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n); \tag{9}$$

их существование утверждается в следствии теоремы VII гл. VIII. Пусть $\mathbf{x}_0$ — любая точка,

$$\mathbf{x}_0 = \xi_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \xi_n\mathbf{b}_n,$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — вещественные числа. Тогда в силу (2)

$$\langle\xi_j\rangle = \langle \mathbf{b}_j^*\mathbf{x}_0 \rangle \leqslant K(\mathbf{x}_0) F^*(\mathbf{b}_j^*) \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{10}$$

Выберем целые числа u_j так, чтобы

$$|u_j - \xi_j| = \langle\xi_j\rangle. \tag{11}$$

Пусть

$$\mathbf{x}_1 = (\xi_1 - u_1)\mathbf{b}_1 + \ldots + (\xi_n - u_n)\mathbf{b}_n,$$

так что

$$\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_0 \quad (\Lambda).$$

Тогда в силу (9), (10) и (11)

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x}_0) &\leqslant F(\mathbf{x}_1) \leqslant \\ &\leqslant \sum_j |\xi_j - u_j| F(\mathbf{b}_j) = \\ &= \sum_j \langle\xi_j\rangle F(\mathbf{b}_j) \leqslant \\ &\leqslant K(\mathbf{x}_0) \sum_j F^*(\mathbf{b}_j^*) F(\mathbf{b}_j) = \\ &= \frac{n}{2^{n-1}} (n!)^2 K(\mathbf{x}_0), \end{aligned}$$

что доказывает левую часть неравенства (3).

Теорема VI доказана.

4. В этом пункте мы докажем теорему переноса частного вида, которая понадобится нам в § 4. При доказательстве используется прием так называемой добавочной переменной, который часто приводит к успеху[1]). Например, до работы Кнезера лучший результат в направлении теоремы V был получен с использованием этого метода Главкой [3] (частный случай его изложен в монографии автора [8]).

Лемма 1. *Пусть* $F_0(\mathbf{x})=|\mathbf{x}|$, *где* $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ — *трехмерный вектор. Пусть* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — *последовательные минимумы решетки* Λ *относительно* F_0, *и пусть*

$$\mu=\sup_{\mathbf{x}_0}\inf_{\mathbf{x}\equiv\mathbf{x}_0(\Lambda)}F_0(\mathbf{x}).$$

Тогда

$$\frac{\mu^2}{\lambda_3^2}\leqslant 1-\left(\frac{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}{2\,d(\Lambda)}\right)^2 \tag{1}$$

и

$$4\mu^2\leqslant\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2\leqslant 3\lambda_3^2. \tag{2}$$

Доказательство. Докажем сначала (2). Существуют такие линейно независимые точки $\mathbf{a}_j$ решетки Λ, что $|\mathbf{a}_j|=\lambda_j$. Пусть $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ — совокупность таких попарно ортогональных точек, что для некоторых вещественных v_{ij}

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}_1&=\mathbf{c}_1,\\ \mathbf{a}_2&=v_{21}\mathbf{c}_1+\mathbf{c}_2,\\ \mathbf{a}_3&=v_{31}\mathbf{c}_1+v_{32}\mathbf{c}_2+\mathbf{c}_3;\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

тогда

$$|\mathbf{c}_j|^2\leqslant|\mathbf{a}_j|^2=\lambda_j^2\qquad(1\leqslant j\leqslant 3). \tag{4}$$

Для любой точки $\mathbf{x}_0$ можно последовательно выбрать целые числа u_3, u_2, u_1 так, чтобы

$$\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_0+u_1\mathbf{a}_1+u_2\mathbf{a}_2+u_3\mathbf{a}_3=\xi_1\mathbf{c}_1+\xi_2\mathbf{c}_2+\xi_3\mathbf{c}_3,$$

где числа ξ_j удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_j|\leqslant\frac{1}{2}\qquad(1\leqslant j\leqslant 3).$$

Следовательно, в силу (4)

$$|\mathbf{x}_1^2|=\xi_1^2|\mathbf{c}_1|^2+\xi_2^2|\mathbf{c}_2|^2+\xi_3^2|\mathbf{c}_3|^2\leqslant\frac{1}{4}(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2),$$

откуда вытекает неравенство (2).

[1]) Впервые этот прием употребил, по-видимому, Морделл [2].

Построим теперь четырехмерную решетку M следующим образом. Существует такая точка $\mathbf{x}_0$, что

$$\mu=\mu(\Lambda)=\inf_{\mathbf{x}\equiv\mathbf{x}_0(\Lambda)}|\mathbf{x}|. \tag{5}$$

Пусть число ρ определено уравнением

$$\rho^2+\mu^2=\lambda_3^2, \tag{6}$$

так что в силу (2)

$$\rho\geqslant\frac{1}{2}\lambda_3. \tag{7}$$

Тогда M состоит из множества всех четырехмерных точек

$$\mathbf{X}=(\mathbf{x},\ \rho u), \tag{8}$$

где u проб гает все целые числа, а точки $\mathbf{x}$ удовлетворяют сравнению

$$\mathbf{x}\equiv u\mathbf{x}_0\ \ (\Lambda). \tag{9}$$

Ясно, что

$$d(\mathrm{M})=\rho d(\Lambda).$$

Если $\mathbf{X}\in\mathrm{M}$ и $u\neq 0$, то в силу (5) и (6) при $u=\pm 1$ или (7) при $|u|>1$

$$|\mathbf{X}|^2=|\mathbf{x}|^2+\rho^2u^2\geqslant\lambda_3^2.$$

Значения, которые принимает $|\mathbf{X}|$ при $u=0$ и $\mathbf{X}\in\mathrm{M}$, в точности совпадают со значениями $|\mathbf{x}|$ при $\mathbf{x}\in\Lambda$. Следовательно, четырьмя последовательными минимумами функции $|\mathbf{X}|$ относительно M являются числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ — уже определенные минимумы функции $|\mathbf{x}|$ относительно Λ, а

$$\lambda_4\geqslant\lambda_3$$

(фактически $\lambda_4=\lambda_3$, но нам этот факт не нужен).

По теореме I гл. VIII и следствию теоремы IV гл. X

$$\begin{aligned}\lambda_1\lambda_2\lambda_3^2&\leqslant\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4\leqslant\\ &\leqslant\Gamma_{4,0}^{-1}d(\mathrm{M})=\\ &=2d(\mathrm{M})=\\ &=2\rho\, d(\Lambda),\end{aligned} \tag{10}$$

где $\Gamma_{4,0}$ — критический определитель четырехмерного шара $|\mathbf{X}|<1$. Исключая ρ из (6) и (10), получаем требуемое неравенство (1).

Лемма 1 доказана.

На самом деле лемма 1 понадобится нам в следующем виде.

Следствие. *Для любой точки* $\mathbf{x}_0$ *найдется такая точка* $\mathbf{x}_1\equiv\mathbf{x}_0\ (\Lambda)$, *что*

$$|\mathbf{x}_1|^2\leqslant\frac{3}{4}\lambda_3^2\left\{\frac{d(\Lambda)}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\right\}^{\frac{2}{3}}. \tag{11}$$

Действительно, в силу неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим для любого числа $e > 0$

$$3e + e^{-3} = e + e + e + e^{-3} \geqslant 4. \qquad (12)$$

Применив (12) при $e = \left\{ \frac{d(\Lambda)}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} \right\}^{\frac{2}{3}}$, получим из (1), что μ^2 не превосходит правой части неравенства (11). Но тогда, поскольку тело $|\mathbf{x}| < 1$ ограничено, заведомо найдется такое $\mathbf{x}_1$, что

$$|\mathbf{x}_1| = \inf_{\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0(\Lambda)} |\mathbf{x}| \leqslant \mu,$$

откуда вытекает следствие.

§ 4. Произведение n линейных форм

1. Пусть

$$F_1(\mathbf{x}) = |x_1 \ \ldots \ x_n|^{1/n}. \qquad (1)$$

Как и в п. 4 § 1, положим

$$\mu_1(\Lambda) = \sup_{\mathbf{x}_0} \inf_{\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0(\Lambda)} F_1(\mathbf{x}), \quad \mathfrak{D}_1 = \sup_{\Lambda} \frac{\{\mu_1(\Lambda)\}^n}{d(\Lambda)}. \qquad (2)$$

Существует знаменитое предположение Минковского о том, что

$$\mathfrak{D}_1 = 2^{-n}. \qquad (3)$$

Неравенство $\mathfrak{D}_1 \geqslant 2^{-n}$ вытекает тотчас же из исследования случая, когда в (2) $\Lambda = \Lambda_0$ является решеткой точек с целыми координатами, а $\mathbf{x}_0 = \left(\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right)$. Очевидно, что $F_1(\mathbf{x}) \geqslant \frac{1}{2}$ для всех $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0\ (\Lambda_0)$ и $d(\Lambda_0) = 1$.

Известно, что если Λ — подрешетка решетки Λ_0, то

$$\{\mu_1(\Lambda)\}^n \leqslant 2^{-n} d(\Lambda).$$

Доказательство элементарно. Действительно, решетка Λ имеет базис

$$\mathbf{b}_j = (b_{1j}, \ldots, b_{jj}, 0, \ldots, 0),$$

где b_{ij} — целые числа, $b_{jj} \neq 0$, $b_{ij} = 0$ при $i > j$. Для любых вещественных чисел $(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ можно последовательно выбрать целые числа $u_1, \ldots, u_n$ так, чтобы

$$|u_j b_{jj} + \ldots + u_n b_{jn} + x_{j0}| \leqslant \frac{1}{2} |b_{jj}|.$$

Тогда для точки $\mathbf{x}_1 = u_1\mathbf{b}_1 + \ldots + u_n\mathbf{b}_n + \mathbf{x}_0$ имеем

$$\{F(\mathbf{x}_1)\}^n \leqslant \left\{ \frac{1}{2} |b_{11}| \right\} \ldots \left\{ \frac{1}{2} |b_{nn}| \right\} = 2^{-n} d(\Lambda),$$

как и требовалось.

Предложение (3) пока доказано только для $n = 2, 3, 4$. Для случая $n = 2$ было дано много разных доказательств. В п. 2 мы изложим одно из них, принадлежащее Сойеру. Оно имеет то преимущество, что приводит естественным образом к результату для „асимметричных" лучевых функций [1])

$$F_{k,l}(\mathbf{x}) = \begin{cases} k\,|x_1x_2|^{\frac{1}{2}} & \text{при} \quad x_1x_2 \geqslant 0, \\ l\,|x_1x_2|^{\frac{1}{2}} & \text{при} \quad x_1x_2 \leqslant 0, \end{cases}$$

где k и l — положительные числа. Эти функции возникают совершенно естественным образом даже в первоначально симметричных проблемах. В самом деле, результат, который нам предстоит доказать, был впервые получен Давенпортом [13] в качестве вспомогательного средства в его работе по „симметричной" проблеме о неопределенных тернарных квадратичных формах. Дальнейшие заметные результаты о $F_{k,l}$ получили Блени [2], Бернс и Суиннертон-Дайер [3] и — как дополнение к другому исследованию — Бернс [5]. За дальнейшими деталями мы отсылаем читателя к этим работам.

При $n = 3$ гипотезу Минковского (3) доказал Ремак [1], а упрощенное доказательство дал Давенпорт [2]. Доказательство Давенпорта мы изложим в п. 3. Его путь был уже намечен нами в п. 4 § 3. Доказательство этого случая, использующее другие идеи, было дано Берчем и Суиннертон-Дайером [1].

При $n = 4$ доказательство гипотезы (3) было дано Дайсоном [1]. Оно следует тем же идеям, что и доказательство Ремака. Это необыкновенно трудоемкая работа, использующая не только аппарат собственно теории чисел, но и аппарат топологии.

При $n > 4$ известны только оценки $\mathfrak{D}_1$. Чеботарев [1] показал, что

$$\mathfrak{D}_1 \leqslant 2^{-n/2}.$$

Эта оценка была улучшена Морделлом [3] и Давенпортом [9]

$$\mathfrak{D}_1 \leqslant \eta_n 2^{-n/2},$$

где η_n — такое число, меньшее 1, что $\eta_n \to (2e - 1)^{-1}$ при $n \to \infty$. Вудс [4] недавно показал, что результат Чеботарева можно улучшить без труда, если использовать вместо теоремы Минковского о выпуклом теле теорему Блихфельдта. Морделл [15] показал, что это улучшение можно согласовать с прежним методом. В частности, коэффициент η_n Давенпорта можно заменить числом асимптотически

[1]) Разумеется, тело $F_{k,l} < 1$ симметрично относительно $\mathbf{o}$, но оно не симметрично во всех четырех квадрантах.

равным $\frac{1}{2}\eta_n$ для больших n. Результат Чеботарева вместе с его поразительно простым доказательством мы приводим в п. 4.

В связи с этой проблемой известны также несколько других результатов общего характера. Берч и Суиннертон-Дайер [1] показали, что

$$\{\mu_1(\Lambda)\}^n \leqslant 2^{-n} d(\Lambda)$$

для всех решеток Λ в некоторой окрестности целой решетки Λ_0. Они получили также некоторые другие результаты, связанные с этой гипотезой. Автор (Касселс [4]) показал, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого n существует бесконечно много таких решеток Λ, что

$$\{\mu_1(\Lambda)\}^n \geqslant \left(2^{-n} - \varepsilon\right) d(\Lambda),$$

и никакие две решетки Λ и Λ' из этого множества не имеют вида $\Lambda' = t\omega\Lambda$, где t — вещественное тело, а ω — автоморфизм функции $F_1(\mathbf{x})$. Таким образом, если гипотеза Минковского справедлива, то первый минимум наверное не изолирован. Роджерс [15] исследовал наименьшее число $\mu_1'(\Lambda)$, для которого при каждом $\varepsilon > 0$ и каждом $\mathbf{x}_0$ существует бесконечно много решений неравенства

$$F_1(\mathbf{x}) < \mu_1'(\Lambda) + \varepsilon, \quad \mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0 \ (\Lambda).$$

Он нашел общие условия, накладываемые на Λ, при которых $\mu_1'(\Lambda) = \mu_1(\Lambda)$.

Чок [1] получил полный ответ на вопрос, который можно рассматривать как крайне „асимметричный" аналог гипотезы Минковского. Именно он показал, что для любой решетки Λ и любой точки $\mathbf{x}_0$ существует такая точка $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1}) \equiv \mathbf{x}_0 \ (\Lambda)$, что

$$x_{j1} > 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n), \tag{4}$$

$$x_{11} \ \ldots \ x_{n1} \leqslant d(\Lambda). \tag{5}$$

То, что знак $\leqslant$ в (5) не всегда можно заменить на $<$, видно из простого примера, когда $\Lambda = \Lambda_0$ — решетка точек с целыми координатами, а $\mathbf{x}_0 = \mathbf{o}$. Случай $n = 2$ был получен Давенпортом и Гейльбронном [1]. Блени [3] при $n = 2$ дал интересное усиление теоремы; он доказал, что для каждого $\mathbf{x}_0$ существует такая точка $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{21}) \equiv \mathbf{x}_0 \ (\Lambda)$, что

$$x_{j1} > 0 \qquad (j = 1, 2)$$

и

$$\frac{1}{2}\left(126^{\frac{1}{2}} - 11\right) d(\Lambda) \leqslant x_{11}x_{21} \leqslant d(\Lambda),$$

где знак $\leqslant$ слева для некоторых решеток Λ нельзя заменить на знак $<$. Доказательство представляет собой классический пример

локальных методов, рассмотренных в общей формулировке в § 8 гл. X. Коул [1] показал, что для каждой точки $\mathbf{x}_0$ существует такая точка $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_0 \ (\Lambda)$, что

$$x_{j1} > 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant n - 1)$$

и

$$x_{11} \ \ldots \ x_{n-1,1} |x_{n1}| \leqslant \frac{1}{2} d(\Lambda).$$

Чок [1] рассматривает случай, когда для данной точки $\mathbf{x}_0$ существует бесконечно много точек $\mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}_0 \ (\Lambda)$, удовлетворяющих (4) и (5). Принцип, лежащий в основе теоремы Чока, похож на идею Чеботарева, и мы докажем эту теорему в п. 4. Эта идея была обобщена Макбетом [2] и Роджерсом [14]; здесь мы не останавливаемся на этом.

2. Доказательство гипотезы Минковского в двумерном случае можно связать со следующей леммой, принадлежащей Делоне [1], который использовал ее в качестве средства для изучения $\mu_1(\Lambda)$ (в обозначениях п. 1) при заданной двумерной решетке Λ. В дальнейшем этот так называемый „алгоритм разделенных параллелограммов" был использован Бернсом и Суиннертон-Дайером [3] и Бернсом [3, 7]. Делоне [1] заметил, что эта лемма на случай трех и более измерений не обобщается. Тот же опровергающий пример в трехмерном случае дал Берч [3], не зная примера Делоне.

Лемма 2. *Пусть Λ — двумерная решетка, и пусть $\mathbf{x}_0$ — точка, не сравнимая по модулю Λ ни с одной точкой на осях координат. Тогда существуют такие 4 точки $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$, сравнимые с $\mathbf{x}_0$ по модулю Λ, причем $\mathbf{x}_j$ лежит в j-м квадранте, что*

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 \tag{1}$$

и $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1$ — базис решетки Λ.

Четыре точки $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ образуют „разделенный параллелограмм" множества $\mathfrak{G}$ точек $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_0 \ (\Lambda)$. Более простые доказательства леммы 2 дали Бамба [6] и Редеи [2]. Мы следуем Редеи.

Доказательство опирается на следующие два вспомогательных предложения.

Предложение 1. *Пусть $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$, $\mathbf{y}_4$ — такие четыре точки множества $\mathfrak{G}$, что четырехугольник $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2\mathbf{y}_3\mathbf{y}_4$ выпуклый и не содержит никаких других точек множества $\mathfrak{G}$ внутри или на границе. Тогда $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2\mathbf{y}_3\mathbf{y}_4$ — параллелограмм и $\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1$ — базис решетки Λ.*

Это предложение почти непосредственно вытекает из леммы 6 гл. III.

Предложение 2. *Пусть π — прямая, содержащая точки множества $\mathfrak{G}$ в трех квадрантах. Пусть $\mathbf{y}_1$ — точка множества $\mathfrak{G}$ в оставшемся квадранте. Предположим, что на π лежат такие точки $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$ множества $\mathfrak{G}$, что, кроме точек $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_3$, треугольник $\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2\mathbf{y}_3$ не содержит никаких точек множества $\mathfrak{G}$. Тогда лемма 2 справедлива.*

Действительно, прямая π', проходящая через $\mathbf{y}_1$ и параллельная прямой π, также содержит точки множества $\mathfrak{G}$ из трех квадрантов. Поэтому легко указать разделенный параллелограмм с парой противоположных сторон, лежащих на π и π'.

Вернемся теперь к доказательству леммы 2. Мы можем найти такие 4 точки $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ ($\mathbf{z}_j$ лежит в j-м квадранте), что замкнутый (может быть, невыпуклый) четырехугольник $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{z}_3\mathbf{z}_4$ содержит наименьшее количество точек множества $\mathfrak{G}$. Могут представиться только следующие три случая.

(i) Четырехугольник $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{z}_3\mathbf{z}_4$ выпуклый. Тогда в силу предложения 1 он является разделенным параллелограммом.

(ii) Три из четырех точек $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ коллинеарны. Пусть, например, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ лежат на прямой π. Тогда лемма 2 вытекает из предложения 2, примененного к $\mathbf{z}_1$ и π.

(iii) Одна из точек, скажем $\mathbf{z}_1$, является внутренней точкой выпуклой оболочки оставшихся трех точек. В силу определяющего свойства минимальности точек $\mathbf{z}_1$, $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ любая точка множества $\mathfrak{G}$, отличная от $\mathbf{z}_2$, $\mathbf{z}_3$, $\mathbf{z}_4$ и лежащая в четырехугольнике $\mathbf{z}_1\mathbf{z}_2\mathbf{z}_3\mathbf{z}_4$, должна быть в первом квадранте. Такой точкой является, например, $\mathbf{z}_1$. Мы можем выбрать в первом квадранте и в треугольнике $\mathbf{z}_2\mathbf{z}_3\mathbf{z}_4$ такую точку $\mathbf{t}$ множества $\mathfrak{G}$, что в треугольнике $\mathbf{z}_2\mathbf{z}_3\mathbf{t}$, кроме вершин, не содержится никаких других точек $\mathfrak{G}$. Поэтому лемма 2 в нашем случае вытекает из предложения 2, если положить

$$\mathbf{y}_1=\mathbf{z}_3,\quad \mathbf{y}_2=\mathbf{z}_2,\quad \mathbf{y}_3=\mathbf{t}.$$

Лемма 2 доказана.

Следствие. *Если $\mathbf{x}_j=(x_{1j}, x_{2j})$, то*

$$\prod_j |x_{1j}x_{2j}| \leqslant 2^{-8}\{d(\Lambda)\}^4.$$

Действительно, площадь разделенного параллелограмма, равная $d(\Lambda)$, равна также сумме площадей четырех треугольников $\mathcal{T}_j$ с вершинами $\mathbf{o}$, $\mathbf{x}_j$, $\mathbf{x}_{j+1}$ ($1\leqslant j\leqslant 4$; $\mathbf{x}_5=\mathbf{x}_1$). Но площадь треугольника $\mathcal{T}_j$ равна

$$\frac{1}{2}\{|x_{1j}x_{2,\,j+1}|+|x_{1,\,j+1}x_{2j}|\},$$

откуда

$$2d(\Lambda)=\sum_j (|x_{1j}x_{2,\,j+1}|+|x_{2j}x_{1,\,j+1}|).$$

Мы получим теперь требуемое неравенство, если применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим к 8 слагаемым, стоящим справа.

Теперь мы сможем доказать при $n=2$ обобщение гипотезы Минковского, сделанное Давенпортом.

Теорема VII. *Пусть ρ, σ — положительные числа и*

$$16\rho\sigma\geqslant 1.$$

Тогда для каждой двумерной точки $\mathbf{x}_0$ и каждой решетки Λ найдется такая точка $\mathbf{x}'\equiv\mathbf{x}_0\ (\Lambda)$, что

$$-\rho d(\Lambda)\leqslant x_1'x_2'\leqslant \sigma d(\Lambda). \tag{2}$$

Полагая $\rho=\sigma=\frac{1}{4}$, мы, очевидно, придем к гипотезе Минковского при $n=2$.

Доказательство. Если точка $\mathbf{x}_0$ сравнима по модулю Λ с точкой, лежащей на оси, то доказывать нечего. В противном случае покажем, что подходит одна из четырех точек $\mathbf{x}_j$ ($1\leqslant j\leqslant 4$), указанных в лемме 2. Если бы это было не так, то мы имели бы

$$|x_{11}x_{21}|>\sigma d(\Lambda),\quad |x_{13}x_{23}|>\sigma d(\Lambda),$$
$$|x_{12}x_{22}|>\rho d(\Lambda),\quad |x_{14}x_{24}|>\rho d(\Lambda),$$

что противоречит следствию леммы 2.

Теорема VII доказана.

Читатель без труда проверит, что при $\rho=\sigma=\frac{1}{4}$ знак равенства в (2) нужен лишь тогда, когда $\Lambda=t\omega\Lambda_0$ и $\mathbf{x}_0\equiv t\omega\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)(\Lambda)$, где $t>0$, ω — автоморфизм функции x_1x_2 и Λ_0 — решетка целых чисел. Давенпорт [13] показал, что знак равенства может встретиться и при $\rho\neq\sigma$. С другой стороны, из теоремы Чока (п. 4 § 4) вытекает, что при $\rho>1$ или $\sigma>1$ справедливо некоторое усиление (2). Блени [2] получил более сильный результат, включающий случаи, когда ρ или σ близки к 1.

3. Теперь мы изложим доказательство Ремака — Давенпорта гипотезы Минковского при $n=3$. Оно основано на следующей лемме.

Лемма 3. *Пусть Λ — произвольная трехмерная решетка. Тогда найдутся такие числа $p_j>0$ ($1\leqslant j\leqslant 3$), что в эллипсоиде*

$$\mathscr{E}:\ p_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3x_3^2<1 \tag{1}$$

нет точек решетки Λ, отличных от $\mathbf{o}$, на границе же эллипсоида $\mathscr{E}$ имеются три линейно независимых точки решетки Λ.

Доказательство. Если $\mathbf{o}$ — единственная точка решетки Λ в $\mathscr{E}$, то $\mathscr{E}$ называется пустым эллипсоидом. Предположим, что для некоторой решетки Λ все пустые эллипсоиды не содержат на границе трех линейно независимых точек этой решетки. Выведем противоречие из этого предположения. Предварительно сделаем четыре замечания (в которых наше предположение предполагается справедливым).

Заметим, во-первых, что по теореме Минковского о выпуклом теле для любого пустого эллипсоида

$$p_1p_2p_3 \geqslant \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 \{d(\Lambda)\}^{-2} > 0; \tag{2}$$

постоянная в этом выражении не существенна; важно лишь то, что она положительна.

Во-вторых, если три пары точек $\pm\mathbf{a}_1$, $\pm\mathbf{a}_2$, $\pm\mathbf{a}_3$ решетки Λ, лежащие на границе пустого эллипсоида, линейно зависимы, то при некотором выборе знаков $\pm$

$$\pm\mathbf{a}_1 \pm \mathbf{a}_2 \pm \mathbf{a}_3 = \mathbf{o}.$$

Это вытекает из теоремы XI гл. V, если учесть, что $\pm\mathbf{a}_j$ лежат в плоскости, проходящей через начало, а потому являются точками двумерной решетки, лежащими на границе эллипса, не содержащего точек решетки.

В-третьих, если две пары точек $\pm\mathbf{a}_1$ и $\pm\mathbf{a}_2$ решетки Λ лежат на границе пустого эллипсоида, то они не могут лежать в одной и той же координатной плоскости, например в $x_1 = 0$. Действительно, в противном случае получим

$$p_2a_{21}^2 + p_3a_{31}^2 = 1, \qquad \mathbf{a}_1 = (0,\ a_{21},\ a_{31}),$$
$$p_2a_{22}^2 + p_3a_{32}^2 = 1, \qquad \mathbf{a}_2 = (0,\ a_{22},\ a_{32}).$$

Если p_1 уменьшается, а p_2, p_3 остаются постоянными, то точки $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ остаются на границе, а объем эллипсоида увеличивается. Поэтому в силу (2) для некоторого значения p_1 на границе эллипсоида должна появиться третья точка решетки Λ. Итак, при некотором p_1 эллипсоид пуст, а на его границе имеются точки $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3 \in \Lambda$, причем $\mathbf{a}_3$ не лежит в плоскости $x_1 = 0$. Это противоречит предположению, абсурдность которого мы хотим доказать.

В-четвертых, покажем, что если существует пустой эллипсоид (1) с точками $\pm\mathbf{a}_1$, $\pm\mathbf{a}_2 \in \Lambda$ на границе, то существует также и пустой эллипсоид, на границе которого лежат точки $\pm\mathbf{a}_1$, $\pm\mathbf{a}_2$ и $\pm(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$. Действительно, пусть $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_4 = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ и

$$\mathbf{a}_j = (a_{1j},\ a_{2j},\ a_{3j}) \qquad (1 \leqslant j \leqslant 4);$$

тогда

$$p_1a_{1j}^2 + p_2a_{2j}^2 + p_3a_{3j}^2 \begin{cases} = 1 & (j = 1,\ 2), \\ \geqslant 1 & (j = 3,\ 4). \end{cases} \tag{3}$$

Существуют такие числа q_1, q_2, q_3, не равные одновременно нулю, что

$$q_1a_{1j}^2 + q_2a_{2j}^2 + q_3a_{3j}^2 = 0 \qquad (j = 1,\ 2); \tag{4}$$

изменив, если нужно, знак, можно, не уменьшая общности, предположить, что[1])

$$q_1a_{14}^2 + q_2a_{24}^2 + q_3a_{34}^2 \geqslant 0. \tag{5}$$

Рассмотрим теперь эллипсоиды

$$(p_1 + tq_1)\,x_1^2 + (p_2 + tq_2)\,x_2^2 + (p_3 + tq_3)\,x_3^2 = 1,$$

где

$$t \geqslant 0.$$

В силу (4) по меньшей мере одно из чисел q_1, q_2, q_3 отрицательно, а потому при возрастании t от 0 до $+\infty$ при некотором t неравенство (2), в котором p_j заменено на $p_j + tq_j$, перестает быть верным. Таким образом, должно найтись некоторое значение t, при котором впервые точка решетки попадает на границу эллипсоида $\mathscr{E}$. В силу (5) эта точка отлична от $\mathbf{a}_4$, а потому по второму замечанию она совпадает с $\pm\mathbf{a}_3 = \pm(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$. Этим доказательство четвертого замечания заканчивается.

Теперь докажем лемму. Ясно, что пустые эллипсоиды с двумя парами точек $\pm\mathbf{a}_1$, $\pm\mathbf{a}_2 \in \Lambda$ на границе можно получить подходящим изменением параметров p_j. Тогда по четвертому замечанию существует пустой эллипсоид с точками $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ на границе. Применив еще раз четвертое замечание к точкам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, получим пустой эллипсоид с точками $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ и $2\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ на границе. По индукции найдем эллипсоид

$$p_1^{(n)}x_1^2 + p_2^{(n)}x_2^2 + p_3^{(n)}x_3^2 < 1$$

с точками $\mathbf{a}_1$, $n\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $(n+1)\,\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$ на границе. В частности,

$$p_1^{(n)}(na_{11} + a_{12})^2 + p_2^{(n)}(na_{21} + a_{22})^2 + p_3^{(n)}(na_{31} + a_{32})^2 = 1. \tag{6}$$

Рассмотрим три случая. Предположим сначала, что $a_{11} \neq 0$, $a_{21} \neq 0$, $a_{31} \neq 0$. Тогда в силу (6)

$$p_j^{(n)} \to 0 \qquad (j = 1,\ 2,\ 3) \qquad (n \to \infty),$$

[1]) Легко проверить, что в (5) равенства быть не может, поскольку определитель трех форм от q_1, q_2, q_3 в (4) и (5) отличен от нуля, однако это нам не понадобится.

что противоречит (2). Теперь предположим, что только одно из чисел a_{11}, a_{21}, a_{31} обращается в нуль, например $a_{11}=0$, $a_{21}\neq 0$, $a_{31}\neq 0$. Тогда в силу третьего замечания $a_{12}\neq 0$, откуда

$$p_1^{(n)}\leqslant a_{12}^{-2}<\infty,\qquad p_j^{(n)}\to 0\qquad (j=2,\ 3),$$

что снова противоречит (2). Наконец, предположим, что два из чисел a_{12}, a_{21}, a_{31} обращаются в нуль, например $a_{11}=a_{21}=0\neq a_{31}$. Тогда $a_{12}\neq 0\neq a_{22}$, откуда

$$p_j^{(n)}<a_{j2}^{-2}\qquad (j=1,\ 2),\qquad p_3^{(n)}\to 0,$$

что опять-таки противоречит (2).

Получив противоречие в каждом случае, мы привели к противоречию наше предположение.

Лемма 3 доказана.

Гипотеза Минковского при $n=3$ легко выводится теперь из леммы 3 и следствия леммы 1.

Теорема VIII. *Пусть Λ — произвольная трехмерная решетка и $\mathbf{x}_0$ — любая точка. Тогда найдется такая точка $\mathbf{x}_1=(x_{11},\ x_{21},\ x_{31})\equiv\mathbf{x}_0\ (\Lambda)$, что*

$$|x_{11}x_{21}x_{31}|\leqslant\frac{1}{8}d(\Lambda). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть p_1, p_2, p_3 — числа, задаваемые леммой 3, так что Λ не имеет точек внутри эллипсоида $p_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3x_3^2<1$, но три линейно независимые точки этой решетки лежат на его границе. Таким образом, три последовательных минимума решетки Λ относительно лучевой функции

$$F(\mathbf{x})=(p_1x_1^2+p_2x_2^2+p_3x_3^2)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

равны

$$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1. \tag{9}$$

Применим следствие леммы 1 к решетке M точек

$$\left(p_1^{\frac{1}{2}}x_1,\ p_2^{\frac{1}{2}}x_2,\ p_3^{\frac{1}{2}}x_3\right),\qquad (x_1,\ x_2,\ x_3)\in\Lambda$$

с определителем

$$d(\mathrm{M})=(p_1p_2p_3)^{\frac{1}{2}}\,d(\Lambda)$$

и с последовательными минимумами относительно $|\mathbf{x}|$, заданными формулой (9). Мы видим, что с любой точкой $\mathbf{x}_0$ сравнима такая точка $\mathbf{x}_1$, что

$$p_1x_{11}^2+p_2x_{21}^2+p_3x_{31}^2\leqslant\frac{3}{4}\left\{\frac{d(\mathrm{M})}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}\right\}^{\frac{2}{3}}=$$
$$=\frac{3}{4}(p_1p_2p_3)^{\frac{1}{3}}\{d(\Lambda)\}^{\frac{2}{3}}. \tag{10}$$

Требуемое неравенство (7) вытекает теперь из (10) и из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим.

Теорема VIII доказана.

Читатель без труда покажет, что в (7) знак равенства нужен лишь в случае, когда $\Lambda=t\omega\Lambda_0$, $\mathbf{x}_0\equiv t\omega_0\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\ (\Lambda)$, при некотором $t\neq 0$ и некотором автоморфизме ω функции $x_1x_2x_3$; Λ_0 — решетка точек с целыми координатами. Заметим, что для того, чтобы в (7) получить равенство, нужно иметь равенство в обоих случаях применения неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим, т. е. при переходе от леммы 1 к ее следствию и при переходе от (10) к (7).

4. Докажем теперь [1]) теоремы Чеботарева и Чока. Поскольку теорема Чока несколько проще, мы докажем ее первой.

Теорема IX. *Пусть Λ есть n-мерная решетка, а $\mathbf{x}_0$ — некоторая точка. Тогда найдется такая точка $\mathbf{x}_1=(x_{11},\ \ldots,\ x_{n1})\equiv\mathbf{x}_0\ (\Lambda)$, что*

$$x_{j1}>0\qquad (1\leqslant j\leqslant n), \tag{1}$$
$$x_{11}\ \ldots\ x_{n1}\leqslant d(\Lambda). \tag{2}$$

Доказательство. Всегда имеется такая точка $\mathbf{x}_2=(x_{12},\ \ldots,\ x_{n2})\equiv\mathbf{x}_0\ (\Lambda)$, что

$$x_{j2}>0\qquad (1\leqslant j\leqslant n). \tag{3}$$

Если $\prod x_{j2}\leqslant d(\Lambda)$, то можно положить $\mathbf{x}_1=\mathbf{x}_2$. В противном случае имеем

$$\prod x_{j2}>d(\Lambda), \tag{4}$$

откуда по теореме Минковского о выпуклом теле найдется такая точка $\mathbf{a}\neq\mathbf{o}$ решетки Λ, что

$$|a_j|<|x_{j2}|\qquad (1\leqslant j\leqslant n). \tag{5}$$

Рассматривая вместо $\mathbf{a}$ точку $2^r\mathbf{a}$ с подходяще выбранным целым $r\geqslant 0$, можно полагать по крайней мере для одного целого J

$$|a_J|\geqslant\frac{1}{2}|x_{J2}|. \tag{6}$$

[1]) Мы следуем Макбету [2], однако в наших специальных случаях рассуждения можно упростить.

Тогда обе точки

$$\mathbf{x}_2 \pm \mathbf{a} = \mathbf{x}^{\pm} = (x_1^{\pm}, \ldots, x_n^{\pm})$$

сравнимы с $\mathbf{x}_0$ и лежат в квадранте $x_j > 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$. Далее,

$$\frac{\prod_j x_j^+ \prod_j x_j^-}{\prod_j x_{j2}^2} = \prod_j \left(\frac{x_{j2}^2 - a_j^2}{x_{j2}^2}\right) \leqslant \frac{3}{4},$$

поскольку в силу (5) и (6) каждый сомножитель справа не превышает 1, а по крайней мере один из них не превышает $\frac{3}{4}$. Выбирая в качестве $\mathbf{x}_3$ ту из пары точек $\mathbf{x}^{\pm}$, для которой произведение $\prod x_j$ наименьшее, получаем

$$x_{j3} > 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \qquad \prod_j x_{j3} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_j x_{j2}.$$

Если $\prod x_{j3} \leqslant d(\Lambda)$, то можно взять $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_3$. В противном случае мы повторим такой же процесс для $\mathbf{x}_3$ вместо $\mathbf{x}_2$ и получим $\mathbf{x}_4$, для которой

$$x_{j4} > 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant n), \qquad \prod_j x_{j4} \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_j x_{j3} \leqslant \frac{3}{4} \prod_j x_{j2}$$

и т. д. Очевидно, что в ограниченное число шагов мы достигнем искомой точки $\mathbf{x}_1$, причем границу можно точно задать в терминах $\prod_j x_{j2}$.

Теорема IX доказана.

Аналогичная идея приводит к теореме Чеботарева.

Теорема X. *Пусть Λ есть любая n-мерная решетка, $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число и $\mathbf{x}_0$ — некоторая точка. Тогда найдется такая точка $\mathbf{x}_1 = (x_{11}, \ldots, x_{n1}) \equiv \mathbf{x}_0$ (Λ), что*

$$|x_{11} \ldots x_{n1}| \leqslant (2^{-n/2} + \varepsilon)\, d(\Lambda). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть t — такое число, что

$$(2^{-n/2} + \varepsilon)\, t^n = 1, \tag{8}$$

так что

$$0 < t < 2^{\frac{1}{2}}. \tag{9}$$

Если $\prod_j |x_{j0}| \leqslant (2^{-n/2} + \varepsilon)\, d(\Lambda)$, то доказывать нечего, поэтому можно считать, что

$$\prod_j |x_{j0}| > (2^{-n/2} + \varepsilon)\, d(\Lambda) = t^{-n} d(\Lambda). \tag{10}$$

По теореме Минковского о выпуклом теле найдется такая точка $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ решетки Λ, что

$$|a_j| \leqslant t\, |x_{j0}| \quad (1 \leqslant j \leqslant n). \tag{11}$$

Как и при доказательстве теоремы IX, взяв точку $2^r\mathbf{a}$ с подходящим целым $r \geqslant 0$, мы можем считать, что для некоторого J

$$|a_J| \geqslant \frac{1}{2} t\, |x_{J0}|. \tag{12}$$

Пусть

$$\mathbf{x}^{\pm} = \mathbf{x}_0 \pm \mathbf{a},$$

так что

$$\frac{\prod_j x_j^+ \prod_j x_j^-}{\prod_j x_{j0}^2} = \prod \left(1 - \frac{a_j^2}{x_{j0}^2}\right). \tag{13}$$

В силу (9) и (11)

$$-1 < 1 - t^2 \leqslant 1 - \frac{a_j^2}{x_{j0}^2} \leqslant 1;$$

далее, в силу (12)

$$1 - t^2 \leqslant 1 - \frac{a_J^2}{x_{J0}^2} \leqslant 1 - \frac{1}{4} t^2.$$

Таким образом, взяв в качестве $\mathbf{x}_2$ ту точку из пары $\mathbf{x}^{\pm}$, для которой $\prod |x_j|$ наименьшее, получим

$$\prod_j |x_{j2}| \leqslant s \prod_j |x_{j0}|,$$

где

$$s^2 = \max\left\{|1 - t^2|,\ \left|1 - \frac{1}{4} t^2\right|\right\} < 1.$$

Так же как и при доказательстве теоремы IX, после конечного числа шагов мы получим точку $\mathbf{x}_1$, удовлетворяющую неравенству (7), причем число шагов ограничено числом, зависящим только от n, $\prod_j |x_{j0}|$ и ε.

Теорема X доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

В этом приложении мы перечислим критические определители некоторых множеств, связанных с квадратичными формами, а также приведем дальнейшие ссылки и некоторые дополнительные комментарии. Пусть

$$\varphi_{r,s}(\mathbf{x}) = x_1^2 + \ldots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \ldots - x_{r+s}^2;$$

обозначим через $\Gamma_{r,s}$ критический определитель множества

$$|\varphi_{r,s}| < 1$$

в n-мерном пространстве

$$n = r + s.$$

Результаты относительно определенных форм даются обычно в терминах γ_n, где $\gamma_n^n = \Gamma_{n,0}^{-2}$. Известны первые 8 значений:

$$\gamma_1^1 = 1, \quad \gamma_2^2 = \frac{4}{3}, \quad \gamma_3^3 = 2, \quad \gamma_4^4 = 4,$$

$$\gamma_5^5 = 8, \quad \gamma_6^6 = \frac{64}{3}, \quad \gamma_7^7 = 64, \quad \gamma_8^8 = 2^8.$$

Значение γ_1 тривиально; значения γ_2, γ_3, γ_4 были найдены в этой книге (теоремы II, III гл. II; следствие теоремы IV гл. X). По поводу ссылок и списка соответствующих критических форм см. Чэнди [1], где предложены также доказательства того, что $\gamma_9^9 = 2^9$, $\gamma_{10}^{10} = 2^{10}/3$, однако эти доказательства содержат пробел. По-видимому, его способ рассуждений приведет к неверным результатам, начиная с $n = 12$; см. по поводу специальной формы от 12 переменных Кокстер и Тодд [1].

Для неопределенных форм имеют место следующие результаты:

$$\Gamma_{1,1}^2 = \frac{5}{4},$$

$$\Gamma_{2,1}^2 = \Gamma_{1,2}^2 = \frac{3}{4},$$

$$\Gamma_{2,2}^2 = \frac{9}{4},$$

$$\Gamma_{3,1}^2 = \Gamma_{1,3}^2 = \frac{7}{4};$$

первый из них принадлежит Гурвицу, второй — Маркову, третий и четвертый — Оппенгейму. Доказательства этих результатов приведены у Диксона [2]. Все эти результаты, кроме указанных в последней строке, были доказаны в настоящей книге (теоремы IV, VII гл. II; следствие теоремы IV гл. X). Все эти минимумы являются изолированными. Последовательные минимумы для множества $|\varphi_{1,1}| < 1$ дает цепь Маркова (см. § 4 гл. II). Первые 11 минимумов для множества $|\varphi_{2,1}| < 1$ и первые 7 минимумов для множества $|\varphi_{2,2}| < 1$ были найдены Венковым [1] и Оппенгеймом [2] соответственно. Существует предположение, что множества $|\varphi_{r,s}| < 1$ имеют бесконечный тип, когда $r > 0$, $s > 0$, $r + s \geqslant 5$ (см. Давенпорт [20][1])).

Пусть $B_{r,s}$ — критический определитель множества

$$0 < \varphi_{r,s} < 1;$$

тогда

$$B_{1,1}^2 = \frac{1}{4},$$

$$B_{2,1}^2 = \frac{1}{4}, \quad B_{1,2}^2 = \frac{4}{27},$$

$$B_{2,2}^2 = \frac{1}{16}, \quad B_{3,1}^2 = \frac{3}{16}, \quad B_{1,3}^2 = \frac{27}{256}.$$

Величина $B_{1,1}$ дается теоремой V гл. II. Результаты во второй строке принадлежат Давенпорту [14]; оба минимума являются изолированными; по поводу известных фактов о дальнейших минимумах см. Оппенгейм [5]. Результаты третьей строки принадлежат Оппенгейму [6]; в этом случае известны некоторые факты о последовательных минимумах. Во всех случаях критическая решетка содержит точку $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$, для которой $\varphi_{r,s}(\mathbf{a}) = 0$.

Пусть $A_{r,s}$ — критический определитель множества

$$0 \leqslant \varphi_{r,s} < 1;$$

тогда

$$A_{1,1}^2 = \frac{1}{4},$$

$$A_{2,1}^2 = \frac{3}{4}, \quad A_{1,2}^2 = \frac{5}{16},$$

$$A_{2,2}^2 = \frac{81}{64}, \quad A_{3,1}^2 \geqslant \frac{27}{32}, \quad A_{1,3}^2 \geqslant \frac{27}{64}.$$

---

[1]) По поводу более поздних работ в этом направлении, принадлежащих в основном Давенпорту и Берчу, см. Риду [1].

Значение $A_{1,1}$ сразу следует из теоремы VI гл. II. Остальные принадлежат Бернсу [4] и Бернсу и Оппенгейму [1].

Если квадратичная форма от $n \geqslant 3$ переменных принимает произвольно малые ненулевые значения одного знака, то она принимает также произвольно малые значения и другого знака. Если квадратичная форма представляет нуль, имеет иррациональное отношение каких-либо двух коэффициентов и имеет число переменных $n \geqslant 5$, то она принимает произвольно малые значения обоих знаков (Оппенгейм [7]).

ЛИТЕРАТУРА

Бамба (Bambah R. P.)

1. On the geometry of numbers of non-convex star-regions with hexagonal symmetry. *Phil. Trans. Roy. Soc. London,* **243** (1951), 431—462.
2. Lattice coverings with four-dimensional spheres. *Proc. Cambridge Phil. Soc.,* **50** (1954), 203—208.
3. On lattice coverings by spheres. *Proc. Nat. Inst. Sci. India,* **20** (1954), 25—52.
4. On polar reciprocal convex domains. *Proc. Nat. Inst. Sci. India,* **20** (1954), 119—120, 324—325.
5. Polar reciprocal convex bodies. *Proc. Cambridge Philos. Soc.,* **51** (1955), 377—378.
6. Divided cells. *Res. Bulletin Panjab Univ.,* **81** (1955), 173—174.
7. Some transference theorems in the geometry of numbers. *Mh. Math.,* **62** (1958), 243—249.

Бамба и Давенпорт (Bambah R. P., Davenport H.)

1. The covering of n-dimensional space by spheres. *J London Math. Soc.,* **27** (1952), 224—229.

Бамба и Роджерс (Bambah R. P., Rogers C. A.)

1. Covering the plane with convex sets. *J. London Math. Soc.,* **27** (1952), 304—314.

Бамба и Роджерс (Bambah R. P., Rogers K.)

1. An inhomogeneous minimum for non-convex star regions with hexagonal symmetry. *Canad. J. Math.,* **7** (1955), 337—346.

Бахман (Bachmann P.)

1. Die Arithmetik der quadratischen Formen, Abt. II, Leipzig und Berlin, 1923.

Бернс (Barnes E. S.)

1. Non-homogeneous binary quadratic forms. *Quart. J. Math.* (2), **1** (1950), 199—210.
2. The minimum of the product of two values of a quadratic form. I. *Proc. London Math. Soc.* (3), **1** (1951), 257—283.
3. The inhomogeneous minima of binary quadratic forms, IV. *Acta Math.,* **92** (1954), 235—264.
4. The non-negative values of quadratic forms. *Proc. London Math. Soc.* (3), **5** (1955), 185—196.
5. The inhomogeneous minimum of a ternary quadratic form. *Acta Math.,* **96** (1956), 67—97.
6. The coverings of space by spheres. *Canad. J. Math.,* **8** (1956), 293—304.
7. On linear inhomogeneous Diophantine approximation. *J. London Math. Soc.,* **31** (1956), 73—79.
8. On a theorem of Voronoï. *Proc. Cambridge Phil. Soc.,* **53** (1957), 537—539.
9. The complete enumeration of extreme senary forms. *Philos. Trans. Roy. Soc. London,* **249** (1957), 461—506.

Бернс и Оппенгейм (Barnes E. S., Oppenheim A.)
1. The non-negative values of a ternary quadratic form. *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 429—439.

Бернс и Суиннертон-Дайер (Barnes E. S., Swinnerton-Dyer H. P. F.)
1. The inhomogeneous minima of binary quadratic forms, I. *Acta Math.*, **87** (1952), 259—323.
2. The inhomogeneous minima of binary quadratic forms, II. *Acta Math.*, **88** (1952), 279—316.
3. The inhomogeneous minima of binary quadratic forms, III. *Acta Math.*, **92** (1954), 199—234.

Берч (Birch B. J.)
1. A transference theorem of the geometry of numbers. *J. London. Math. Soc.*, **31** (1956), 248—251.
2. Another transference theorem of the geometry of numbers. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **53** (1956), 269—272.
3 A grid with no split parallelopiped. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **53** (1957), 536.
4. The inhomogeneous minima of quadratic forms of signature 0. *Acta Arithm.*, **4** (1958), 85—98.

Берч и Суиннертон-Дайер (Birch B. J., Swinnerton-Dyer H. P. F.)
1. On the inhomogeneous minimum of the product of n linear forms. *Mathematika*, **3** (1956), 25—39.

Блени (Blaney H.)
1. Indefinite quadratic forms in n variables. *J. London Math. Soc.*, **23** (1948), 153—160.
2. Some asymmetric inequalities, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **46** (1950), 359—376.
3. On the Davenport — Heilbronn theorem. *Mh. Math.*, **61** (1957), 1—36.

Блихфельдт (Blichfeldt H. F.)
1. A new principle in the geometry of numbers with some applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **15** (1914), 227—235.
2. The minimum value of quadratic forms and the closest packing of spheres. *Math. Annalen*, **101** (1929), 605—608.
3. Note on the minimum value of the discriminant of an algebraic field. *Mh. Math. Phys.*, **48** (1939), 531—533.

Боннесен и Фенхель (Bonnesen T., Fenchel W.)
1. Theorie der konvexen Körper. Berlin, 1934.

Брунгрегер (Brunngraber E.)
1. Über Punktgitter, Diss., Wien, 1944.

ван дер Варден (Waerden B. L. van der)
1. Die Reduktionstheorie der positiven quadratischen Formen. *Acta Math.*, **96** (1956), 265—309.

Варнавайдс (Varnavides P.)
1. On lattice points in a hyperbolic cylinder. *J. London Math. Soc.*, **23** (1948), 195—199.

Ватсон (Watson G. L.)
1. The covering of space by spheres. *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **5** (1956), 1—8.

Венков Б. А.
1. Об экстремальной проблеме Маркова для неопределенных тройничных квадратичных форм. *ИАН СССР, сер. матем.*, **9** (1945), 429—494.

Вейль А. (Weil A.)
1. L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications. Paris, 1951; русский перевод 1-го изд.: Интегрирование в топологических группах и его применения, ИЛ, М., 1950.

Вейль Г. (Weyl H.)
1. The theory of reduction for arithmetical equivalence. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **48** (1940), 126—165; **51** (1942), 203—231.
2. On geometry of numbers. *Proc. London Math. Soc.* (2), **47** (1942), 268—289.

Вольф (Wolff K. H.)
1. Über kritische Gitter im vierdimensionalen Raum. *Mh. Math.*, **58** (1954), 38—56.

Вороной Г. Ф.
1. Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites. *J. reine angew. Math. (Crelle)*, **133** (1907), 97—178; русский перевод: О некоторых свойствах положительных совершенных квадратичных форм, Собрание сочинений, т. II, Киев, 1952, 171—238.
2. Récherches sur les parallélоèdres primitifs I, II. *J. reine angew. Math. (Crelle)*, **134** (1908), 198—287; **136** (1909), 67—181; русский перевод: Исследование о примитивных параллелоэдрах, Собрание сочинений, т. II, Киев, 1952, 239—368.

Вудс (Woods A. C.)
1. The anomaly of convex bodies. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **52** (1956), 406—423.
2. The critical determinant of a spherical cylinder. *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 357—368.
3. On two-dimensional convex bodies. *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 635—640.
4. On a theorem of Tschebotareff. *Duke Math. J.*, **25** (1958), 631—638.

Гаусс (Gauss C. F.)
1. Besprechung des Buchs von L. A. Seeber: Untersuchungen über die Eigenschaften der positiven ternären quadratischen Formen usw. Göttingsche Gelehrte Anzeigen, 1831, Juli 9 (Werke, Bd. II, 1876, 188—196).

Главка (Hlawka E.)
1. Zur Geometrie der Zahlen. *Math. Z.*, **19** (1944), 285—312.
2. Ausfüllung und Überdeckung konvexer Körper durch konvexe Körper. *Mh. Math.*, **53** (1949), 81—131.
3. Zur Theorie des Figurengitters. *Math. Ann.*, **125** (1952), 183—207.
4. Grundbegriffe der Geometrie der Zahlen. *Jber. DMV*, **57** (1954), 37—55.
5. Zur Theorie der Überdeckung durch konvexe Körper. *Mh. Math.*, **58** (1954), 287—291.
6. Inhomogene Minima von Sternkörpern. *Mh. Math.*, **58** (1954), 292—305.

Годуин (Godwin H. J.)
1. On the product of five homogeneous linear forms. *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 331—339.

Давенпорт (Davenport H.)
1. On the product of three homogeneous linear forms, I. *Proc. London Math. Soc.* (2), **44** (1938), 412—431.
2. A simple proof of Remak's theorem on the product of 3 linear forms. *J. London Math. Soc.*, **14** (1939), 47—51.

3. On the product of three homogeneous linear forms, III. *Proc. London Math. Soc.*, **45** (1939), 98—125.
4. Minkowski's inequality for the minima associated with a convex body. *Quart. J. Math.*, **10** (1939), 119—121.
5. Note on the product of three homogeneous linear forms. *J. London Math. Soc.*, **16** (1941), 98—101.
6. On a conjecture of Mordell concerning binary cubic forms. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **37** (1941), 325—330.
7. On the product of three homogeneous linear forms, IV. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **39** (1943), 1—21.
8. The reduction of a binary cubic form, I, II. *J. London Math. Soc.*, **20** (1945), 14—22, 139—157.
9. On a theorem of Tschebotareff. *J. London Math. Soc.*, **21** (1946), 28—34, **24** (1949), 316.
10. On a theorem of Markoff. *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 96—99.
11. The geometry of numbers. *Math. Gazette*, **31** (1947), 206—207.
12. On the product of three non-homogeneous linear forms. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **43** (1947), 137—152.
13. Non-homogeneous ternary quadratic forms. *Acta Mathem.*, **80** (1948), 65—95.
14. On indefinite ternary quadratic forms. *Proc. London Math. Soc.* (2), **51** (1949), 145—160.
15. Note on a binary quadratic form. *Quart. J. Math.*, **1** (1950), 253—261.
16. Indefinite quadratic forms and Euclid's algorithm in real quadratic fields. *Proc. London Math. Soc.* (2), **53** (1951), 65—82
17. Simultaneous diophantine approximation. *Proc. London Math. Soc.* (3), **2** (1952), 406—416.
18. The covering of space by spheres. *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2), **1** (1952), 92—107.
19. On a theorem of Furtwängler. *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 186—195.
20. Indefinite quadratic forms in many variables. *Mathematica*, **3** (1956), 81—101.

Давенпорт и Гейльбронн (Davenport H., Heilbronn H.)
1. Asymmetric inequalities for non-homogeneous linear forms. *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 53—61.

Давенпорт и Роджерс (Davenport H., Rogers C. A.)
1. Hlawka's theorem in the geometry of numbers. *Duke Math. J.*, **14** (1947), 367—375.
2. Diophantine inequalities with an infinity of solutions. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **242** (1950), 311—344.
3. On the critical determinants of cylinders. *Quart. J. Math.* (2), **1** (1950), 215—218.

Давенпорт и Суиннертон-Дайер (Davenport H., Swinnerton-Dyer H. P. F.)
1. Products of inhomogeneous linear forms. *Proc. London Math. Soc.* (3), **5** (1955), 474—499.

Давенпорт и Холл (Davenport H., Hall M.)
1. On the equation $ax^2+by^2+cz^2=0$. *Quart. J. Math.*, **19** (1948), 189—192.

Дайсон (Dyson F. J.)
1. On the product of four non-homogeneous forms. *Ann. of Math.* (2), **49** (1948), 82—109.

Даукер (Dowker C. H.)
1. On minimum circumscribed polygons. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 120—122.

Девис (Davis C. S.)
1. The minimum of a binary quartic form. *Acta Mathem.*, **84** (1951), 263—298

Делоне Б. Н.
1. Алгорифм разделенных параллелограммов. *ИАН СССР, сер. матем.*, **11** (1947), 505—538.

Джон (John F.)
1. Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. Studies and essays presented to R. Courant, New York, 1948, 187—204.

Диксон (Dickson L. E.)
1. Introduction to the theory of numbers. Chicago, 1929.
2. Studies in the theory of numbers. Chicago, 1930.

Жилинкас (Žilinkas G.)
1. On the product of four homogeneous linear forms. *J. London Math. Soc.*, **16** (1941), 27—37.

Зигель (Siegel C. L.)
1. Über Gitterpunkte in konvexen Körpern und ein damit zusammenhängendes Extremalproblem. *Acta Mathem.*, **65** (1935), 309—323.
2. Einheiten quadratischer Formen. *Abh. Math. Sem. Hansische Univ.*, **13** (1940), 209—239.
3. A mean value theorem in the geometry of numbers. *Ann. of Math.*, **46** (1945), 340—347.

Йе (Yeh Y.)
1. Lattice points in a cylinder over a convex domain. *J. London Math. Soc.*, **23** (1948), 188—195.

Касселс (Cassels J. W. S.)
1. On a theorem of Rado in the geometry of numbers. *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 196—200.
2. On two problems of Mahler. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **51** (1948), 854—857 (*Indag. Math.*, **10** (1948), 282—285).
3. The inhomogeneous minimum of binary quadratic; ternary cubic and quaternary quartic forms. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **48** (1952), 72—86, 519—520.
4. The product of n inhomogeneous linear forms in n variables. *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 485—492.
5. A short proof of the Minkowski — Hlawka theorem. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **49** (1953), 165—166.
6. Simultaneous diophantine approximation, I, II, *J. London Math. Soc.*, **30** (1955), 119—121; *Proc. London Math. Soc.* (3), **5** (1955), 435—448.
7. On a result of Marshall Hall. *Mathematika*, **3** (1956), 109—110.
8. An introduction to diophantine approximation. Cambridge, 1957; русский перевод: Введение в теорию диофантовых приближений, ИЛ, М, 1961.
9. On subgroups of infinite abelian groups. *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 281—284.

Касселс, Ледерман и Малер (Cassels J. W. S., Ledermann W., Mahler K.)
1. Farey section in $k(i)$ and $k(\rho)$. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **A243** (1951), 585—628.

Касселс и Суиннертон-Дайер (Cassels J. W. S., Swinnerton-Dyer H. P. F.)
1. On the product of three homogeneous linear forms and indefinite ternary quadratic forms. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **A248** (1955), 73—96.

27 Зак. 1029

Келлер (Keller O. H.)
1. Geometrie der Zahlen. Enzykl. math. Wiss., Bd I_2, Heft 11, Teil iii. Leipzig, 1954.

Кларк (Clarke L. E.)
1. On the product of three non-homogeneous forms. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47** (1951), 260—265.
2. The critical lattices of a star-shaped octagon. *Acta Math.*, **99** (1958), 1—32.

Клейн (Klein F.)
1. Über eine geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1895, 357—359.
2. Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, Leipzig, 1896.

Кнезер (Kneser M.)
1. Ein Satz über abelsche Gruppen mit Anwendungen auf die Geometrie der Zahlen. *Math. Z.*, **61** (1955), 429—434.
2. Summenmengen in lokalkompakten abelschen Gruppen. *Math. Z.*, **66** (1956), 88—110.

Кокстер и Тодд (Coxeter H. S. M., Todd J. A.)
1. An extreme duodenary form. *Canad. J. Math.*, **5** (1953), 384—392.

Кон (Cohn H.)
1. Stable lattices, I, II. *Canad. J. Math.* **5** (1953), 261—270; **6** (1954), 265—273.

ван дер Корпут (Corput J. G. van der)
1. Verallgemeinerung einer Mordellschen Beweismethode in der Geometrie der Zahlen. *Acta Arith.*, **2** (1936), 145—146.

Коул (Cole A. J.)
1. On the product of n linear forms. *Quart. J. Math.* (2), **3** (1952), 56—62.

Леккеркеркер (Lekkerkerker C. G.)
1. On the Minkowski — Hlawka theorem. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amsterdam*, **A59** (1956) (*Indag. math.*, **18**), 426—434.
2. On the volume of compound convex bodies. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **A60** (1957) (*Indag. math.*, **19**), 284—289.

Макбет (Macbeath A. M.)
1. The finite volume theorem for non-homogeneous lattices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **47** (1951), 627—628.
2. A theorem on non-homogeneous lattices. *Ann. of Math.* (2), **56** (1952), 269—293.
3. On measure of sum sets, II. The sum-theorem for the torus. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **49** (1953), 40—43.

Макбет и Роджерс (Macbeath A. M., Rogers C. A.)
1. A modified form of Siegel's mean-value theorem, I, II. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **51** (1955), 565—576; **54** (1958), 322—325.
2. Siegel's mean value theorem in the geometry of numbers. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **54** (1958), 139—151.

Малер (Mahler K.)
1. On Minkowski's theory of reduction of positive definite quadratic forms. *Quart. J. Math.*, **9** (1938), 259—263.
2. Ein Übertragungsprinzip für lineare Ungleichungen. *Časopis pest. mat. a fys.*, **68** (1939), 85—92.
3. Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper. *Časopis pest. mat. a fys.*, **68** (1939), 93—102.

4. Lattice points in two-dimensional star domains, I, II, III. *Proc. London Math. Soc.* (2), **49** (1946), 128—157, 158—167, 168—183.
5. On lattice points in n-dimensional star-bodies. I. Existence theorems. *Proc. Roy. Soc. London*, **A187** (1946), 151—187. II. Reducibility theorems. *Proc. Kon. Ned. Acad. Wet.*, **49** (1946), 331—343, 444—454, 524—532, 622—631.
6. The theorem of Minkowski — Hlawka. *Duke Math. J.*, **13**, (1946), 611—621.
7. On lattice points in a cylinder. *Quart. J. Math.*, **17** (1946), 16—18.
8. On irreducible convex domains. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **50** (1947), 98—107 (*Indag. Math.*, **9**, 3—12).
9. On the area and the densest packing of convex domains. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **50** (1947), 108—118 (*Indag. Math.*, **9**, 14—24).
10. On the minimum determinant and the circumscribed hexagons of a convex domain. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **50** (1947), 692—703 (*Indag. math.*, **9**, 326—337).
11. On lattice points in polar reciprocal convex domains. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **51** (1948), 482—485. (*Indag. Math.*, **10**, 176—179).
12. On the minimum determinant of a special point set. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **52** (1949), 633—642. (*Indag. Math.*, **11**, 195—204).
13. On the critical lattices of arbitrary point sets. *Canad. J. Math.*, **1** (1949), 78—87.
14. The geometry of numbers. Duplicated lectures. Boulder, Colorado, 1950.
15. On compound convex bodies, I, II. *Proc. London Math. Soc.* (3), **5** (1955), 358—384.

Марков А. А.
1. Sur les formes quadratiques binaires indéfinies. *Math. Ann.*, **15** (1879), 381—409, или: О бинарных квадратичных формах положительного определителя. СПБ, 1880; перепечатано с комментарием Б. Н. Делоне, *УМН*, III, № 5 (27) (1948), 3—51.

Мелмор (Melmore S.)
1. Densest packing of equal spheres. *Nature*, **159** (1947), 817.

Минковский (Minkowski H.)
1. Geometrie der Zahlen. Leipzig — Berlin, 1896; 2-е изд. 1910; есть более поздние перепечатки.
2. Dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Körper. *Nachr. Köning Ges. Wiss. Göttingen*, 1904, 311—355. Gesamm. Abh., Bd. II. Leipzig, 1911, 3—42.
3. Diophantische Approximationen. Leipzig, 1907.

Морделл (Mordell L. J.)
1. Indefinite quadratic forms in n variables. *Proc. Roy. Soc. London*, **A131** (1931), 99—108.
2. A theorem of Khintschine on linear diophantine approximation. *J. London Math. Soc.*, **12** (1937), 166—167.
3. Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms. *Vjschr. naturforsch. Ges. Zürich*, **85** (1940), Beiblatt (Festschrift Rudolf Fueter), 47—50.
4. The product of homogeneous linear forms. *J. London Math. Soc.*, **16** (1941), 4—12.
5. The product of three homogeneous linear ternary forms. *J. London Math. Soc.*, **17** (1942), 107—115.
6. The product of n homogeneous forms. *Матем. сб.*, **12** (1943), 273—276.
7. On numbers represented by binary cubic forms. *Proc. London Math. Soc.* (2), **48** (1943), 198—228.
8. Lattice points in the region $|x^3+y^3| \leqslant 1$. *J. London Math. Soc.*, **19** (1944), 92—99.

9. Observation on the minimum of a positive definite quadratic form in eight variables. *J. London Math. Soc.*, **19** (1944), 3—6.
10. Further contributions to the geometry of numbers for non-convex regions. *Trans. Amer. Math. Soc*, **59** (1946), 189—215.
11. The minimum of a definite ternary quadratic form. *J. London Math. Soc.*, **23** (1948), 175—178.
12. On the equation $ax^2+by^2-cz^2=0$. *Mh. Math.* **55** (1951), 323—327.
13. The minima of some non-homogeneous functions of two variables. *Duke Math. J.*, **19** (1952), 519—527.
14. The minimum of an inhomogeneous quadratic polynomial in n variables. *Math. Z.*, **63** (1956), 525—528.
15. Tschebotareff's theorem on the product of non-homogeneous linear forms, II. *J. London Math. Soc.*, **35** (1960), 91—97.

Муллино (Mullineux N.)
1. Lattice points in the star-body $|x_1^2+x_2^2-x_3^2|\leqslant 1$, $|x_3|\leqslant\sqrt{2}$. *Proc. London Math. Soc.* (2), **54** (1951), 1—41.

Мюллендер (Mullender P.)
1. Toepassing van de meetkunde der getallen op ongelijkheden in $K(1)$ en $K(i\sqrt{m})$. Diss., Amsterdam, 1945.
2. Lattice points in non-convex regions, I, II, III. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **51** (1948), 874—884, 1251—1261; **52** (1949), 50—60 (*Indag. Math.*, **10**, 302—312, 395—405; **11**, 18—28).
3. Simultaneous approximation. *Ann. of Math.*, **52** (1950), 417—426.

Оллереншоу (Ollerenshaw K.)
1. The minima of a pair of indefinite harmonic binary quadratic forms. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **41** (1945), 77—96.
2. The critical lattices of a circular quadrilateral formed by arcs of three circles. *Quart. J. Math.*, **17** (1945), 223—239.
3. An irreducible non-convex region. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **49** (1953), 194—200.
4. Irreducible convex bodies. *Quart. J. Math.* (2), **4** (1953), 293—302.

Оппенгейм (Oppenheim A.)
1. The lower bounds of indefinite Hermitian forms. *Quart J. Math.*, **3** (1932), 10—14.
2. Minima of quaternary quadratic forms of signature 0. *Proc. London Math. Soc.* (2), **37** (1934), 63—81.
3. The lower bounds of Hermitian quadratic forms in any quadratic field. *Proc. London Math. Soc.* (2), **40** (1936), 541—555.
4. Remark on the minimum of quadratic forms. *J. London Math. Soc.*, **21** (1946), 251—252.
5. One-sided inequalities for quadratic forms. (I) Ternary forms. *Proc. London Math. Soc.* (3), **3** (1953), 328—337.
6. One-sided inequalities for quadratic forms. (II) Quaternary forms. *Proc. London Math. Soc.* (3), **3** (1953), 417—429.
7. Value of quadratic forms, I, II. *Quart. J. Math.* (2), **4** (1953), 54—59, 60—66.
8. Value of quadratic forms, III. *Mh. Math.*, **57** (1953), 97—101.
9. One-sided inequalities for hermitian quadratic forms. *Mh. Math.*, **57** (1953), 1—5.

Питмен (Pitman J.)
1. The inhomogeneous minima of a sequence of symmetric Markov forms. *Acta arithm.*, **5** (1958), 81—116.

Прасад (Prasad A. V.)
1. A non-homogeneous inequality for integers in a special cubic field. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. Amst.*, **52** (1949), 240—250, 338—350 (*Indag. Math.*, **11**, 55—65, 112—124).

Пуату (Poitou G.)
1. Sur l'approximation des nombres complexes par les nombres des corps imaginaires quadratiques etc. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. Paris* (3), **70** (1953), 199—265.

Радо (Rado R.)
1. A theorem on the geometry of numbers. *J. London Math. Soc.*, **21** (1946), 34—47.

Ранкин (Rankin R. A.)
1. On the closest packing of spheres in n dimensions. *Ann. of Math.*, **48** (1947), 1062—1081.
2. On sums of powers of linear forms, I, II, III. *Ann. of Math.*, **50** (1949), 691—698; 699—704; *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **51** (1948), 846—853 (*Indag. Math.*, **10**, 274—281).
3. The anomaly of convex bodies. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **49** (1953), 54—58.
4. The closest packing of spherical caps in n dimensions. *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **2** (1955), 139—144.

Редеи (Rédei L.)
1. Neuer Beweis des Hajósschen Satzes über die endlichen abelschen Gruppen. *Acta Math. Hungarica*, **6** (1955), 27—40.
2. Neuer Beweis eines Satzes von Delone über ebene Punktgitter. *J. London Math. Soc.*, **34** (1959), 205—207.

Рейнхардт (Reinhardt K.)
1. Über die dichteste gitterförmige Lagerung kongruenter Bereiche in der Ebene uzw. *Abh. Math. Sem. Hansische Univ.*, **10** (1934), 216—230.

Ремак (Remak R.)
1. Verallgemeinerung eines Minkowskischen Satzes, I, II. *Math. Z.*, **17** (1923), 1—34; **18** (1924), 173—200.
2. Über die geometrische Darstellung der indefiniten binären quadratischen Formen. *Jber. DMV*, **33** (1925), 228—245.
3. Über die Minkowskische Reduction. *Comp. Math.*, **5** (1938), 368—391.

Риду (Ridout D.)
1. Indefinite quadratic forms. *Mathematika*, **5** (1958), 122—124.

Рисс (Riesz M.)
1. Modules réciproques. Comptes Rendus Congr. Intern. des Math., Oslo, v. 2, 1936 36—37.

Роджерс (Rogers C. A.)
1. A note on irreducible star-bodies. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **50** (1947), 868—872 (*Indag. Math.*, **9**, 379—383).
2. A note on a problem of Mahler. *Proc. Roy. Soc. London*, **A191** (1947), 503—517.
3. Existence theorems in the geometry of numbers. *Ann. of Math.*, **48** (1947), 994—1002.
4. The product of the minima and the determinant of a set. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, **52** (1949), 256—263 (*Indag. Math.*, **11**, 71—78).
5. On the critical determinant of a certain non-convex cylinder. *Quart. J. Math.*, **20** (1949), 45—47.

6. The product of n real homogeneous linear forms. *Acta Math.*, **82** (1950), 185—208.
7. A note on coverings and packings. *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 327—331.
8. The closest packing of convex two-dimensional domains. *Acta Math.*, **86** (1951), 309—321.
9. The number of lattice points in a star-body. *J. London Math. Soc.*, **26** (1951), 307—310.
10. The reduction of star-sets. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **A 245** (1952), 59—93.
11. Indefinite quadratic forms in n variables. *J. London Math. Soc.*, **27** (1952), 314—319.
12. Almost periodic critical lattices. *Arch. der Math.*, **4** (1953), 267—274.
13. The Minkowski — Hlawka theorem. *Mathematika*, **1** (1954), 111—124.
14. A note on the theorem of Macbeath. *J. London Math. Soc.*, **29** (1954), 133—143.
15. The product of n non-homogeneous linear forms. *Proc. London Math. Soc.* (3), **4** (1954), 50—83.
16. Mean values over the space of lattices. *Acta Math.*, **94** (1955), 249—287.
17. The moments of the number of points of a lattice in a bounded set. *Philos. Trans. Roy. Soc. London*, **A 248** (1955), 225—251.
18. The number of lattice points in a set. *Proc. London Math. Soc.* (3), **6** (1956), 305—320.
19. A note on coverings. *Mathematika*, **4** (1957), 1—6.
20. Lattice coverings of space: the Minkowski — Hlawka theorem. *Proc. London Math. Soc.* (3), **8** (1958), 447—465.
21. Lattice coverings of space with convex bodies. *J. London Math. Soc.*, **33** (1958), 208—212.
22. The packing of equal spheres. *Proc. London Math. Soc.* (3), **8** (1958), 609—620.
23. Lattice coverings of space. *Mathematika*, **6** (1959), 33—39.

Роджерс (Rogers K.)
1. The minima of some inhomogeneous functions of two variables. *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 394—402.
2. On the generators of an ideal, with an application to the geometry of numbers in unitary space U_2. *Amer. J. Math.*, **77** (1955), 621—627.
3. Indefinite binary Hermitian forms. *Proc. London Math. Soc.* (3), **6** (1956), 205—223.

Роджерс и Суиннертон-Дайер (Rogers K., Swinnerton-Dyer H. P. F.)
1. The geometry of numbers over algebraic number fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **88** (1958), 227—242.

Самет (Samet P. A.)
1. The product of linear non-homogeneous linear forms, I, II. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **50** (1954), 372—379, 380—390.

Серре (Segre B.)
1. Lattice points in infinite domains and asymmetric diophantine approximations. *Duke Math. J.*, **12** (1945), 337—365.

Сильвестр (Sylvester J. J.)
1. On arithmetical series. *Messenger Math.*, **21** (1892), 1—19, 87—120; Collected Works, v. 4, 687—731.

Сойер (Sawyer D. B.)
1. The product of two non-homogeneous linear forms. *J. London Math. Soc.*, **23** (1948), 250—251.

2. A note on the product of two non-homogeneous linear forms. *J. London Math. Soc.*, **25** (1950), 239—240.
3. The minima of indefinite binary quadratic forms. *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 387—394.

Суиннертон-Дайер (Swinnerton-Dyer H. P. F.)
1. Extremal lattices of convex bodies. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **49** (1953), 161—162.
2. Inhomogeneous lattices. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **50** (1954), 20—24.
3. The inhomogeneous minima of complex cubic norm forms. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **50** (1954), 209—219.

Торнхейм (Tornheim L.)
1. Asymmetric minima of quadratic forms and asymmetric diophantine approximation. *Duke Math. J.*, **22** (1955), 287—294.

Уитворт (Whitworth J. V.)
1. On the densest packing of sections of a cube. *Ann. Mat. pura appl.* (4), **27** (1948), 29—37.
2. The critical lattices of the double cone. *Proc. London Math. Soc.* (2), **53** (1951), 422—443.

Уиттекер и Ватсон (Whittaker E. T., Watson G. N.)
1. A course of modern analysis, Cambridge; русский перевод: Курс современного анализа, ч. I, II, Физматгиз, М., 1963.

Фейеш Тот (Feyes Toth L.)
1. Some packing and covering theorems. *Acta Univ. Szeged, Acta Sci. Math.* **12**/A (1950), 62—67.
2. Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum. Berlin, 1953; русский перевод: Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве, Физматгиз, М., 1958.

Фенхель (Fenchel W.)
1. Verallgemeinerung einiger Sätze aus der Geometrie der Zahlen. *Acta Arithm.*, **2** (1937), 230—241.

Фостер (Foster D. M. E.)
1. Indefinite quadratic polynomials in n variables. *Mathematika*, **3** (1956), 111—116.

Фью (Few L.)
1. Covering space by spheres. *Mathematika*, **3** (1956), 136—139.

Хайош (Hajós G.)
1. Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter. *Math. Z.*, **47** (1942), 427—467.

Харди и Райт (Hardy G. H., Wright E. M.)
1. An introduction to the theory of numbers. Oxford, 1938.

Хинчин А. Я.
1. Количественная концепция аппроксимационной теории Кронекера. *ИАН СССР, сер. матем.*, **12** (1948), 113—122.

Холл М. (Hall M.)
1. On the sum and product of continued fractions. *Ann. of Math.* (2), **48** (1947), 966—993.

Чеботарев Н. Г.
1. Заметки по алгебре и теории чисел. *Уч. зап. Казанск. Ун-та*, **94** (1934), 3—16; см. также: Доказательство теоремы Минковского о неоднородных линейных формах, Собр. соч., т. II, М. — Л., 1949, 361—364.

Черный (Černý K.)
1. О минимумах бинарных биквадратичных форм, I. *Чех. Мат. журнал*, **2** (1952), 1—56.

Чок (Chalk J. H. H.)
1. On the positive values of linear forms, I, II. *Quart. J. Math.*, **18** (1947), 215—227; **19** (1948), 67—80.
2. Reduced binary cubic forms. *J. London Math. Soc.*, **24** (1949), 280—284.
3. On the frustrum of a sphere. *Ann. of Math.* (2), **52** (1950), 199—216.

Чок и Роджерс (Chalk J. H. H., Rogers C. A.)
1. The critical determinant of a convex cylinder. *J. London Math. Soc.*, **23** (1948), 178—187.
2. The successive minima of a convex cylinder. *J. London Math. Soc.*, **24** (1949), 284—291.
3. On the product of three homogeneous linear forms. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **47** (1951), 251—259.

Чэнди (Chaundy T. W.)
1. The arithmetic minima of positive quadratic forms, I. *Quart. J. Math.*, **17** (1946), 166—192.

Шаботи (Chabauty C.)
1. Sur les minima arithmétiques des formes. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. Paris* (3), **66** (1949), 367—394.
2. Limite d'ensembles et géométrie des nombres. *Bull. Soc. Math. France*, **78** (1950), 143—151.
3. Empilement de sphères égales dans R^n etc. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **235**, (1952), 529—532; *Math. Rev.*, **14** (1952), 541.

Шмидт (Schmidt W.)
1. Über höhere kritische Determinanten von Sternkörpern. *Mh. Math.*, **59** (1955), 274—304.
2. Eine neue Abschätzung der kritischen Determinanten von Sternkörpern. *Mh. Math.*, **60** (1956), 1—10.
3. Eine Verschärfung des Satzes von Minkowski — Hlawka. *Mh. Math.*, **60** (1956), 110—113.
4. The measure of the set of admissible lattices. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **9** (1958), 390—403.
5. Masstheorie in der Geometrie der Zahlen. *Acta Mathem.*, **102** (1959), 159—224.

Шольц (Scholz A.)
1. Minimaldiskriminanten algebraischer Zahlkörper. *J. reine angew. Math. (Crelle)*, **179** (1938), 16—21.

Шур (Schur I.)
1. Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. *Math. Z.*, **1** (1918), 377—402.
2. Einige Sätze über Primzahlen mit Anwendungen auf Irreduzibilitätsfragen, I, II. *Sitzgsber. preuss. Akad. Wiss.*, 1929, 125—136, 370—391.

Эгглстон (Eggleston H. G.)
1. Convexity. Cambridge, 1958.

Эннола (Ennola V.)
1. On the first inhomogeneous minimum of indefinite binary quadratic forms and Euclid's algorithm in real quadratic fields. *Ann. Univ. Turkuensis* (Turun Yliopiston Julkaisuja) A 1, 28 (1958), 1—58.

Эрдёш и Роджерс (Erdös P., Rogers C. A.)
1. The covering of n-dimensional space by spheres. *J. London Math. Soc.*, **28** (1953), 287—293.

УКАЗАТЕЛЬ

(Сначала приведены используемые обозначения, а затем термины в алфавитном порядке)

$|\mathbf{x}|$ 8
$\|\tau\|$ 157
$\langle\xi\rangle$ 386
$\equiv (a \equiv b \ (k))$ 129
$(\mathbf{y}_1 \equiv \mathbf{y}_2 \ (\Lambda))$ 238, 369
$\{x\}$ 254
Γ_n 203, 302
$\Gamma_{m,n}$ 329
$d(\Lambda)$ 21
$D(f)$ (для квадратичных форм) 51
— (для кубических форм) 71
$\mathscr{D}_{r,s}$ 329
$\mathscr{D}_n$ 203, 302
$\mathfrak{d}(F)$, $\mathfrak{D}(F)$ 372, 373
$\delta(F)$ 153
$\Delta(\mathscr{S})$ 106
$\det(\tau)$ 156
$e(\chi) = \exp(2\pi i\chi)$ 356
$F(\Lambda)$ 153
$F(\mathfrak{x})$ 239
ι 157
$M(f)$ 40
$M_+(f)$ 64
$m(\mathbf{S})$ 242
$m(\mathbf{x}_0)$ 370
$\mu(\Lambda)$ 371
$\mathscr{R}$, $\mathscr{R}/\Lambda$ 239
$V(\mathscr{S})$ 8
$V(\psi)$ 98

Автоморфизм 313
Автоморфное звездное тело 313
Аффинное преобразование 31

Базис (решетки) 19
Бесконечно много точек решетки в множестве 193, 362
Бесконечный тип 106, 177
Блихфельдта теорема 92

Вектор 8, 13
Взаимная лучевая функция 145, 147
— решетка 36
Взаимное выпуклое тело 136, 145
— преобразование 39, 147
Взаимный базис 36
Вполне приводимое звездное тело 193
Выпуклая лучевая функция 135
Выпуклое множество 10, 87
Вырожденная кубическая форма 71
Вырожденное преобразование 156

Гессиан 75

Дирихле лемма о шестиугольнике 286
Длина (вектора) 8, 89
Допустимая решетка 15, 106
— — в смысле Малера 190

Жорданов объем 216

Звездное множество 135, 190
— тело 111

Изоляция 54, 348
Инвариант 72

Класс (вычетов) 369
— — по модулю решетки 238
Компактное множество 91
Конечный тип 107, 177
Критическая решетка 15, 107, 178
— — в смысле Малера 190
Критический определитель 8, 88, 106
Куб (обобщенный) 136

Линейное преобразование, см. Аффинное преобразование
Литтлвуда проблема 213
Локальные методы 366
Лучевая функция 134

Маркова теорема 51
Метрика (в пространстве решеток) 165
Минковского теорема о выпуклом теле 95
— — — линейных формах 97

Невырожденная форма см. Вырожденная форма
Неоднородная задача 17
Несобственная эквивалентность 35

Объем 92, 216
Ограниченно приводимое звездное тело 191
Однородная задача 9
Октаэдр (обобщенный) 136, 150
Опорная плоскость 135, 147
— прямая 135, 147
Определитель решетки 8, 14
Ортогональность 252
Отлична от нуля (форма отлична от нуля на решетке) 319

Параллелепипед (обобщенный) 150
Переноса теоремы 375, 380
Пересечение (двух точечных множеств) 136
Подрешетка 21
Полуопределенная форма 134
Последовательные минимумы (в неоднородных задачах) 372
— — (для однородных минимумов квадратичной формы) 52
Последовательные минимумы (лучевой функции по отношению к решетке) 247

Преобразование, см. Аффинное преобразование
Приведение в смысле Минковского 42
Приводимость 190, 192
Примитивная точка решетки 37, 113
Пропорциональность форме, целочисленной на решетке 319

Разделенных параллелограммов алгоритм 393
Решетка 8, 13
— неоднородная 369
Решетчатая укладка 273

Сигнатура (квадратичной формы) 32
Сильвестра лемма 231
Симметричное точечное множество 10, 87
Симплекса критический определитель 109
Собственная эквивалентность 35
Согласованность 345
Сравнимость 238, 369
Сходимость (решеток) 161

Треугольника неравенство 89, 135

Укладка 273

Факторпространство 238
Фундаментальный параллелепипед 93, 241

Цепные дроби 366
Цилиндр (обобщенный) 277

Эквивалентность (форм) 34, 35
Экстремальная решетка 205

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 5
Предисловие 7
Обозначения 8
Введение 9

Глава I. **Решетки** 19
§ 1. Введение 19
§ 2. Базисы и подрешетки 19
§ 3. Линейные преобразования решеток 31
§ 4. Формы и решетки 31
§ 5. Взаимная решетка 35

Глава II. **Теория приведения** 40
§ 1. Введение 40
§ 2. Основной процесс 41
§ 3. Определенные квадратичные формы 44
§ 4. Неопределенные квадратичные формы 50
§ 5. Бинарные кубические формы 71
§ 6. Другие формы 81

Глава III. **Теоремы Блихфельдта и Минковского** 87
§ 1. Введение 87
§ 2. Теоремы Блихфельдта и Минковского 92
§ 3. Обобщения на неотрицательные функции 98
§ 4. Характеризация решеток 104
§ 5. Критические определители 106
§ 6. Метод Морделла 111
§ 7. Представление целых чисел квадратичными формами . . . 128

Глава IV. **Лучевые функции** 134
§ 1. Введение 134
§ 2. Общие лучевые функции 137
§ 3. Выпуклые множества 140
§ 4. Лучевые функции и решетки 153

Глава V. **Теорема Малера о компактности** 155
§ 1. Введение 155
§ 2. Линейные преобразования 156
§ 3. Сходимость решеток 160

§ 4. Компактность решеток 169
§ 5. Критические решетки 177
§ 6. Ограниченные звездные тела 182
§ 7. Приводимость 190
§ 8. Выпуклые тела 194
§ 9. Шары 203
§ 10. Приложения к диофантовым приближениям 205

Глава VI. **Теорема Мннковского — Главки** 216
§ 1. Введение 216
§ 2. Подрешетки простого индекса 219
§ 3. Теорема Минковского — Главки 224
§ 4. Теоремы Шмидта 226
§ 5. Гипотеза Роджерса 230
§ 6. Неограниченные звездные тела 233

Глава VII. **Факторпространство** 238
§ 1. Введение 238
§ 2. Общие свойства 238
§ 3. Теорема о сумме 242

Глава VIII. **Последовательные минимумы** 247
§ 1. Введение 247
§ 2. Шары 251
§ 3. Общие лучевые функции 254
§ 4. Выпуклые множества 261
§ 5. Взаимные выпуклые тела 268

Глава IX. **Укладки** 273
§ 1. Введение 273
§ 2. Множества, для которых $V(\mathscr{S}) = 2^n \Delta(\mathscr{S})$ 279
§ 3. Результаты Вороного 284
§ 4. Подготовительные леммы 288
§ 5. Теорема Фейеша Тота 294
§ 6. Цилиндры 300
§ 7. Укладки шаров 302
§ 8. Произведение n линейных форм 306

Глава X. **Автоморфизмы** 313
§ 1. Введение 313
§ 2. Специальные формы 325
§ 3. Метод Морделла 328
§ 4. Существование автоморфизмов 340
§ 5. Теоремы изоляции 348
§ 6. Применение теорем изоляции 358

§ 7. Бесконечность числа решений 362
§ 8. Локальные методы 366

Глава XI. **Неоднородные проблемы** 369
§ 1. Введение 369
§ 2. Выпуклые множества 375
§ 3. Теоремы переноса для выпуклых множеств 380
§ 4. Произведение n линейных форм 390

Приложение 402
Литература 405
Указатель 417

ДЖ. В. С. КАССЕЛС

Введение в геометрию чисел

Редактор *Г. М. Ильичева*
Художник *А. Г. Антонова*
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Л. М. Харьковская*
Корректор *А. Ф. Рыбальченко*

Сдано в производство 6/I 1965 г.
Подписано к печати 3/VI 1965 г.
Бумага $60 \times 90^1/_{16}$ = 13,25 бум. л., 26,5 печ. л.
Уч.-изд. л. 21,9. Изд. № 1/2194
Цена 1 р. 68 к. Зак. 1029
(Темплан 1965 г. изд-ва «Мир», пор. № 4).

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета
Министров СССР по печати.
Измайловский проспект, 29.

Хейл Дж. **Колебания в нелинейных системах.** Нью-Йорк, 1963, перевод с английского, 12 изд. л., цена 1 р. 10 к.

Хейман У. **Мероморфные функции.** Оксфорд (Англия), 1964, перевод с английского, 14 изд. л., цена 1 р. 25 к.

Хилтон П., Уайли С. **Теория гомологий.** Введение в алгебраическую топологию. Лондон — Нью-Йорк, 1960, перевод с английского, 30 изд. л., цена 2 р. 30 к.

Библиотека сборника «математика»

Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф. **Потоки на однородных пространствах.** Принстон, 1963, перевод с английского, 8 изд. л., цена 60 коп.

Галлагер Р. **Коды с малой плотностью проверок на четность.** Нью-Йорк, 1963, перевод с английского, 8 изд. л., цена 60 коп.

Кокс Д., Смит У. **Теория очередей.** Лондон, 1961, перевод с английского, 8 изд. л., цена 60 коп.

Ленг С. **Алгебраические числа.** Лондон, 1964, перевод с английского, 10 изд. л., цена 70 коп.

Лере Ж., Гординг Л., Котаке С. **Решение задачи Коши.** Париж, 1963, перевод с французского, 8 изд. л., цена 60 коп.

Мак-Лейн Г. **Асимптотические значения голоморфных функций.** Хаустон (США), 1963, перевод с английского, 6 изд. л., цена 45 коп.

Месси Дж. **Пороговое декодирование.** Нью-Йорк, 1963, перевод с английского, 8 изд. л., цена 60 коп.

Райзер Г. Дж. **Комбинаторная математика.** Нью-Йорк, 1963, перевод с английского, 6 изд. л., цена 45 коп.

Сигал И. **Лекции по математическим методам в квантовой теории полей.** Издание оригинальное. Перевод с английского, 8 изд. л., цена 60 коп.

Современная математика (популярная серия)

Неванлинна Р. **Пространство, время и относительность.** Базель, 1964, перевод с немецкого, 12 изд. л., цена 1 р. 10 коп.

Нивен И. **Числа рациональные и иррациональные.** Нью-Йорк, 1961, перевод с английского, 8 изд. л., цена 60 коп.