DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
In Einzeldarstellungen
mit besonderer Berücksichtigung
der Anwendungsgebiete

Band 132

# Perturbation theory for linear operators

Dr. Tosio Kato

Professor of Mathematics

University of California, Berkeley

Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York

1966

Т. КАТО

# ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Перевод с английского

Г. А. Воропаевой, А. М. Стёпина и И. А. Шишмарёва

Под редакцией

В. П. Маслова

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» • МОСКВА 1972

УДК 517.43, 519.55, 517.5/9

Монография крупнейшего японского математика Т. Като представляет собой выдающееся явление в математической литературе. Она посвящена важному разделу функционального анализа, тесно связанному с современной теоретической физикой.

Книга написана с большим педагогическим мастерством, содержит значительное число интересных задач, часть из которых подробно разобрана. Предполагая знание лишь основ линейной алгебры, а также вещественного и комплексного анализа, автор вводит читателя в круг современных проблем теории возмущений.

Книга представляет интерес для научных работников, занимающихся функциональным анализом, математической физикой и смежными вопросами. Она будет, несомненно, полезна и физикам-теоретикам.

*Редакция литературы по математическим наукам*

2-2-3
10-72

# ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Начало спектральной теории возмущений было положено в работах Реллиха [36*] — [38*] [1]) и Фридрихса [48*]. С тех пор эта наука была существенно продвинута, в особенности благодаря работам автора этой книги проф. Тосио Като и его школы.

Настоящая книга является первым широко доступным учебником по теории возмущений, который включает в себя все основные достижения математической теории возмущений до 1965 года. В книге последовательно излагаются важнейшие факты функционального анализа, так что по этой книге можно изучить собственно функциональный анализ и теорию линейных операторов. Эта книга полезна не только для математиков, но и для физиков, в частности для специалистов по квантовой механике. Яркие примеры, иллюстрирующие теорию, помогут активно воспринять материал специалистам по дифференциальным уравнениям и физикам-теоретикам.

Хотя с 1965 года математическая теория возмущений сильно продвинулась, книга Т. Като не устарела. Мы приведем здесь, однако, перечень основных достижений в этой области за последние 6 лет, чтобы ориентировать читателя.

Наиболее бурно развивалась теория возмущений непрерывного спектра и теория рассеяния в работах Т. Като, М. Ш. Бирмана, В. С. Буслаева и др. (см. [2*], [4*]—[6*], [17*]—[20*], [22*], [24*], [25*], [27*]—[30*], [34*], [41*], [44*], [47*], [49*], [52*]—[54*]). Для класса дифференциальных операторов, включающих одночастичное уравнение Шрёдингера, в некотором смысле окончательные результаты получены Като и Куродой [20*] и [24*] (см. также [25*]).

Случаю, когда группы, порождаемые возмущенным и невозмущенным операторами, действуют в различных гильбертовых пространствах, посвящены работы [2*], [4*]—[6*], [17*], [25*], [44*], [53*]. Для гиперболических уравнений теория рассеяния развивалась Лаксом и Филлипсом [27*]—[29*] (см. также [47*], [52*]).

Задача о многоканальном рассеянии, отвечающем многочастичному уравнению Шрёдингера, после классической работы Л. Д. Фаддеева [45*] привлекла внимание столь обширного числа ученых, как математиков, так и физиков, что мы не в состоянии дать здесь перечень работ в этом направлении (см. [22*], [49*], [54*] и др.).

Для несамосопряженных операторов теория рассеяния развивалась в работах [18*], [27*], [30*]. В случае возмущения дискретного спектра (возможно меняющего характер спектра) неограниченным семейством операторов, зависящим от параметра $\varepsilon$ и сильно сходящимся к нулю при $\varepsilon \to 0$, в книге Като строится формально ряд теорий возмущений. Вопросу о том, какое отношение этот формальный ряд имеет к собственным функциям

---

[1]) См. в конце книги литературу, добавленную при переводе.

и собственным значениям возмущенного уравнения, а также регуляризации расходящихся членов ряда теории возмущений, посвящена книга [31*].

Коснемся еще одного, очень важного аспекта теории возмущений, не затронутого в книге Като. В физической литературе, в особенности в квантовой электродинамике, давно используется язык $T$-произведений, т. е. функций от упорядоченных операторов. Так, в предварительных замечаниях к работе [46*] Р. Фейнман отмечает, что если условиться обозначать $(\overset{1}{A}+\overset{2}{B})^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k B^k A^{n-k}$, где $A$ и $B$ — некоторые самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $H$, то $e^B \cdot e^A=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\overset{1}{A}+\overset{2}{B})^n}{n!}\overset{\text{def}}{=\!=} e^{\overset{1}{A}+\overset{2}{B}}$. Он отмечает, что если ввести обозначения, определяющие, какой из операторов действует первым, какой вторым, а какой третьим, то после этого мы можем обращаться с ними так же, как с коммутирующими операторами. Исходя из этого, Фейнман вычисляет интеграл, определяющий второй член теории возмущений для оператора $e^{i(A+\varepsilon B)}$:

$$\int_0^1 e^{i(1-\tau)A}Be^{i\tau A}q\,d\tau\overset{\text{def}}{=\!=}\int_0^1 e^{i(1-\tau)\overset{3}{A}}\overset{2}{B}e^{i\tau\overset{1}{A}}q\,d\tau=\overset{2}{B}\frac{e^{i\overset{3}{A}}-e^{i\overset{1}{A}}}{\overset{3}{A}-\overset{1}{A}}q,\qquad q\in H.$$

Он замечает, что выражение в правой части, когда оно имеет смысл, действительно совпадает со вторым членом теории возмущений. Заметим теперь, что если положить $B=i\partial/\partial x$, $A=x$, то

$$i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}\frac{e^{i\overset{3}{x}}-e^{i\overset{1}{x}}}{\overset{3}{x}-\overset{1}{x}}q(x)=\left[i\frac{\partial}{\partial\xi}\frac{e^{ix}-e^{i\xi}}{x-\xi}q(\xi)\right]_{\xi=x}.$$

Следовательно,

$$i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}\frac{e^{i\overset{3}{x}}-e^{i\overset{1}{x}}}{\overset{3}{x}-\overset{1}{x}}=i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}e^{i\overset{3}{x}}\frac{i\left(\overset{3}{x}-\overset{1}{x}\right)+\frac{(\overset{3}{x}-\overset{1}{x})^2}{2}}{\overset{3}{x}-\overset{1}{x}}.$$

Это равенство (которое следует также из того соображения, что $i\frac{\overset{2}{\partial}}{\partial x}(\overset{3}{x}-\overset{1}{x})^s=0$ при $s\geqslant 2$) не случайно. Оно, как оказалось, связано со спектральным разложением функций от упорядоченных операторов. Соответствующая теория, развитая в книге [32*], позволяет преодолеть ряд трудностей метода теории возмущений и установить тождества, отнюдь не столь очевидные, как написанные выше.

Наконец, теория возмущений «квазистационарных состояний» (полюсов аналитического продолжения резольвенты), построенная А. Н. Базем, Я. Б. Зельдовичем и А. М. Переломовым [1*], математически обоснована и распространена на трехмерный случай Т. М. Гатаулиным и М. В. Карасевым [13*].

*В. П. Маслов*

*ПАМЯТИ*
*МОИХ РОДИТЕЛЕЙ*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель этой книги — дать систематическое изложение теории возмущений для линейных операторов. Можно надеяться, что книга будет полезна как студентам, так и сложившимся ученым, работающим в математике и физике.

Теория возмущений для линейных операторов представляет собой набор довольно разнообразных результатов по спектральной теории линейных операторов, объединенных лишь тем, что в них речь идет о поведении спектральных характеристик при малом изменении операторов. Со времени ее создания Рэлеем и Шрёдингером эта теория заняла важное место в прикладной математике; в последние десятилетия она превратилась в математическую дисциплину со своим собственным кругом интересов. Книга нацелена на математическое исследование предмета, приложениям в ней также уделяется должное внимание.

Математической основой теории является функциональный анализ. Но так как книга частично предназначена для ученых-физиков, которые могут и не иметь опыта в функциональном анализе, знание даже элементов этой дисциплины не предполагается. Предполагается, что читатель знает основы линейной алгебры, а также вещественного и комплексного анализа. Необходимые методы функционального анализа (мы ограничиваемся наиболее элементарными сведениями) развиваются по мере необходимости в тексте, в главах I, III и части глав V, VI.

Я весьма обязан многочисленным друзьям за их советы в течение длительного периода работы над книгой. В частности, я выражаю глубокую благодарность профессорам К. Кларку, К. О. Фридрихсу, Х. Фудзите, С. Голдбергу, Е. Хилле, Т. Икэбэ, С. Какутани, С. Т. Куроде, Г. Нойбауэру, Р. С. Филлипсу, Д. и О. Тоддам, Ф. Вольфу и К. Иосиде. Особенно я обязан проф. Р. С. Риддслу за то, что он взял на себя труд прочитать всю рукопись и исправил многочисленные ошибки, как математические, так и лингвистические. Я обязан д-ру Д. Хоулэнду, д-ру Ф. Макграту, д-ру А. Макинтошу и м-ру С. С. Лину за помощь в чтении корректур различных частей книги. Я хочу поблагодарить проф. Ф. К. Шмидта, который предложил мне написать эту книгу и постоянная поддержка которого помогла окончить ее. И последняя по счету, но не по важности благодарность — моей жене, Мидзуе, за утомительный труд по перепечатке рукописи.

Беркли *Тосио Като*

# ВВЕДЕНИЕ

В этой книге термин «теория возмущений» означает «теория возмущений линейных операторов». Существуют и другие разделы математики, называемые теорией возмущений, например те, которые используются в аналитической (небесной) механике и нелинейной теории колебаний. Все эти теории возмущений основаны на изучении систем, слабо отклоняющихся от некоторой простой (идеальной) системы, которая полностью исследована. Однако задачи, которые исследуются в этих разделах математики, и используемые для их решений методы отличны от теории возмущений для линейных операторов. Поэтому теория, развиваемая ниже, по существу независима от упомянутых выше других теорий возмущений.

Теория возмущений была создана Рэлеем и Шрёдингером (см. Секефальви-Надь [1]). Рэлей дал формулу для вычислений собственных частот и мод колебаний системы, мало отличающейся от более простой системы, которая допускает полное описание частот и мод колебаний (см. Рэлей ⟦1⟧, § 90, 91). С математической точки зрения этот метод эквивалентен приближенному решению задачи на собственные значения для линейного оператора, мало отличающегося от более простого оператора, для которого эта задача полностью решена. Шрёдингер развил аналогичный метод для задач на собственные значения, возникающих в квантовой механике (см. Шрёдингер ⟦1⟧, [1]).

Эти первоначальные работы были, однако, с точки зрения математики весьма формальными и неполными. Неявно предполагалось, что собственные значения и собственные векторы (или собственные функции) могут быть разложены в степенные ряды по малому параметру, характеризующему отклонение «возмущенного» оператора от «невозмущенного». Не было сделано никаких попыток доказать сходимость этих рядов.

Окончательно вопрос о сходимости рядов был разрешен только в серии работ Реллиха (см. Реллих [1]—[5]); правда, попытки доказать сходимость рядов предпринимались и до Реллиха (см. Уилсон [1]), но они не были исчерпывающими. Фундаментальные результаты Реллиха, которые будут подробно изложены в гл. II и VII, можно сформулировать следующим образом. Пусть в гильбертовом пространстве **H** задан ограниченный самосопряженный оператор $T(\varkappa)$, зависящий от вещественного параметра $\varkappa$ и разлагающийся в сходящийся степенной ряд:

$$T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)} + \varkappa^2 T^{(2)} + \dots \qquad (1)$$

Предположим, что невозмущенный оператор $T = T(0)$ имеет собственное значение $\lambda$, изолированное от остальной части спектра и конечной кратности $m$. Тогда оператор $T(\varkappa)$ имеет в точности $m$ собственных значений $\mu_j(\varkappa)$, $j = 1, \dots, m$ (с учетом кратности), в окрестности точки $\lambda$ для достаточно малых значений $|\varkappa|$. Более того, эти собственные значения могут быть разложены в сходящиеся степенные ряды

$$\mu_j(\varkappa) = \lambda + \varkappa\mu_j^{(1)} + \varkappa^2\mu_j^{(2)} + \ldots . \qquad (2)$$

Соответствующие собственные векторы $\varphi_j(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ также можно разложить в сходящиеся ряды:

$$\varphi_j(\varkappa) = \varphi_j + \varkappa\varphi_j^{(1)} + \varkappa^2\varphi_j^{(2)} + \ldots, \qquad (3)$$

причем выполнены условия ортогональности и нормировки

$$(\varphi_j(\varkappa),\ \varphi_k(\varkappa)) = \delta_{jk}. \qquad (4)$$

(В формуле (3) векторы $\varphi_j$ суть векторы из ортонормированного семейства собственных векторов оператора $T$, отвечающих собственному значению $\lambda$.)

Эти результаты совпадают с теми утверждениями, которые сделали Рэлей, Шрёдингер и другие авторы, но строгое их доказательство было непростым делом. Даже в том случае, когда пространство **H** конечномерно (и, таким образом, проблема собственных значений решается алгебраически), доказательство не совсем тривиально. В этом случае очевидно, что функции $\mu_j(\varkappa)$ — ветви алгеброидной функции от переменной $\varkappa$, но возможность наличия точки ветвления при $\varkappa = 0$ может быть исключена только в предположении самосопряженности $T(\varkappa)$. В самом деле, собственные значения самосопряженного оператора вещественны, а поэтому функция $\varkappa_j(\varkappa)$, раэлагающаяся в ряд по дробным степеням $\varkappa$, не может быть вещественной одновременно для положительных и отрицательных значений $\varkappa$, если только этот ряд не сводится к ряду по целым степеням $\varkappa$. Доказательство существования собственных векторов, удовлетворяющих условиям (3) и (4), менее просто и требует более глубокого анализа.

В действительности Реллих рассмотрел более общий случай, в котором оператор $T(\varkappa)$ не ограничен. Тогда ряд (1) требует новой интерпретации, которая составляет значительную часть развитой теории. Реллихом были исследованы многие другие задачи, связанные с рассмотренной выше, такие, как оценки радиуса сходимости и точности приближения, проблема рассмотрения всех собственных значений и собственных векторов с вытекающим отсюда вопросом о равномерности, а также неаналитические возмущения.

Фундаментальные работы Реллиха стимулировали дальнейшие исследования по аналогичным или родственным проблемам теории линейных операторов. Новое направление было открыто Фридрихсом, создавшим теорию возмущений непрерывного спектра (см. Фридрихс [2]), которая чрезвычайно важна в теории рассеяния и в квантовой теории поля. В этой области пришлось создать совершенно новый метод исследования, так как непрерывный спектр имеет совсем другой характер, чем дискретный.

Главной задачей, решаемой теорией Фридрихса, является задача о подобии операторов $T(\varkappa)$ и $T$, т. е. о существовании обратимого оператора $W(\varkappa)$, такого, что $T(\varkappa) = W(\varkappa)\,TW(\varkappa)^{-1}$.

Оригинальные результаты Реллиха о возмущении изолированных собственных значений были также обобщены. Было обнаружено, что теория выигрывает в простоте и общности, если параметр $\varkappa$ может принимать комплексные значения. И хотя для аналитической теории это вполне естественная идея, тем не менее здесь приходится отказываться от предположения о том, что $T(\varkappa)$ самосопряжен для всех $\varkappa$, так как оператор $T(\varkappa)$, аналитически зависящий от $\varkappa$, не может быть в общем случае самосопряжен для всех $\varkappa$ в комплексной области (хотя он может быть самосопряжен, скажем, при вещественных $\varkappa$). Это приводит к формулировке результатов для несамосопряженных операторов и операторов в банаховых пространствах, в которых превалирует использование комплексных функций (Секефальви-Надь [2], Вольф [1], Т. Като [6]). Оказывается, что основные результаты Реллиха для самосопряженных операторов вытекают весьма просто из общей теории.

С другой стороны, было обнаружено (Титчмарш [1], [2], Т. Като [1]), что имеются случаи, в которых формальные ряды типа рядов (2) или (3) расходятся или даже имеют только конечное число членов, имеющих смысл; тем не менее эти члены приближают величины $\mu_j(\varkappa)$ и $\varphi_j(\varkappa)$ в асимптотическом смысле. Было найдено, что много задач, не поддававшихся ранее трактовке, принадлежат именно этой асимптотической теории, которая тесно связана с сингулярной теорией возмущений для дифференциальных уравнений.

Другие неаналитические подходы ведут к обобщенной теории возмущений спектра и к теоремам об устойчивости спектральных свойств операторов; одним из главных результатов в этой области является теорема об индексе (см. Гохберг и Крейн [1]).

В то же время Хилле и Филлипсом (см. Филлипс [1], Хилле и Филлипс [[1]]) была развита теория возмущений для однопараметрических полугрупп операторов. Она является одновременно и обобщением, и математической базой так называемой теории возмущений для операторов квантовой механики, зависящих от времени. Эта теория переплетается также с нестационарной теорией рассеяния, которая в свою очередь тесно связана с теорией возмущений непрерывного спектра.

Из этого краткого обзора очевидно, что теория возмущений не является четко очерченной дисциплиной. Можно сказать, что эту область математики скорее объединяет метод исследования. Истоки теории возмущений лежат в линейном функциональном анализе, и значительная часть книги посвящена их обсуждению. Упомянутые выше результаты вместе с некоторыми другими занимают остальную ее часть.

# ГЛАВА I

# ТЕОРИЯ ОПЕРАТОРОВ В КОНЕЧНОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Эта глава содержит предварительные сведения, необходимые для изложения в следующей главе теории возмущений линейных операторов в конечномерном пространстве. Мы предполагаем, что читатель знаком с элементарными понятиями линейной алгебры. В начальных параграфах этой главы для удобства последующих ссылок приведены, по большей части без доказательств, основные результаты линейной алгебры. Несколько более подробно обсуждаются понятия, связанные с нормированными векторными пространствами и анализом в этих пространствах (сходимость векторов и операторов, векторнозначные и операторнозначные функции и т. д.). Весьма подробно рассматривается задача на собственные значения, так как это один из основных разделов теории возмущений. Подход к задаче на собственные значения не алгебраический, а аналитический, основанный на теоретико-функциональном изучении резольвенты. Этот подход представляется наиболее естественным в связи с возможностью его распространения в последующих главах на бесконечномерный случай.

Хотя материал этой главы, равно как и используемые методы, вполне элементарны, в ней содержатся некоторые результаты, нигде, по-видимому, ранее не опубликованные (например, результаты о парах проекторов, приведенные в п. 4.6 и 6.8).

## § 1. Векторные пространства и нормированные векторные пространства

### 1. Основные понятия

Мы изложим здесь, в основном без доказательств, основные факты о конечномерных векторных пространствах[1]. *Векторное пространство* X — это совокупность элементов $u$, $v$, . . ., называемых *векторами*, для которых определены *линейные операции* (сложение $u + v$ двух векторов $u$, $v$ и умножение $\alpha u$ вектора $u$ на скаляр $\alpha$), подчиняющиеся обычным правилам. Во всей книге скаляры предполагаются *комплексными числами* (так что рассматриваются комплексные векторные пространства), если не оговорено противное. Вектор $\alpha u$ иногда для удобства записывают в виде $u\alpha$; вместо $\alpha^{-1}u$ часто пишут $u/\alpha$. *Нулевой вектор* обозначается символом 0, тем же, что и нулевой скаляр.

---

[1] См., например, Гельфанд [[1]], Халмош [[3]], Гофман и Кунце [[1]].

Векторы $u_1, \ldots, u_n$ называются *линейно независимыми*, если их *линейная комбинация* $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$ равна нулю только тогда, когда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$; в противном случае эти векторы *линейно зависимы*. *Размерность* пространства X, обозначаемая $\dim$ X,— это наибольшее число линейно независимых векторов в X. Если конечного такого числа не существует, мы полагаем $\dim \mathrm{X} = \infty$. В настоящей главе все векторные пространства предполагаются конечномерными ($0 \leqslant \dim \mathrm{X} < \infty$), если не оговорено противное.

Подмножество M в X называется *линейным подпространством* или *однородным линейным многообразием*, если M само есть векторное пространство относительно линейных операций в X. Размерность M не превосходит размерности X. Для любого подмножества S в X множество M всевозможных линейных комбинаций векторов из S есть линейное подпространство; оно называется линейным подпространством, *порожденным* S, или (*линейной*) *оболочкой* множества S. Согласно основной теореме о конечномерных векторных пространствах, линейная оболочка M множества $n$ векторов $u_1, \ldots, u_n$ самое большее $n$-мерна; она в точности $n$-мерна тогда и только тогда, когда векторы $u_1, \ldots, u_n$ линейно независимы.

В X существует только одно нульмерное линейное подпространство; оно содержит один-единственный нулевой вектор и будет обозначаться также через 0.

**Пример 1.1.** Множество $\mathrm{X} = \mathrm{C}^N$ всех упорядоченных наборов $u = (\xi_j) = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ комплексных чисел есть $N$-мерное векторное пространство (комплексное евклидово пространство) с обычными «покоординатными» линейными операциями. Вектор $u \in \mathrm{C}^N$ называется *числовым вектором* и записывается в виде *вектора-столбца* (компоненты $\xi_j$ расположены по вертикали) или в виде *вектора-строки* (компоненты расположены по горизонтали), как удобнее.

**Пример 1.2.** Множество всех комплекснозначных непрерывных функций $u$: $x \to u(x)$, определенных на интервале I вещественной оси, снабженное естественными линейными операциями, есть бесконечномерное векторное пространство. То же самое верно, если ограничиться функциями $u$ с непрерывными производными до фиксированного порядка $n$. Интервал I можно заменить произвольной областью[1] в $m$-мерном вещественном евклидовом пространстве $\mathrm{R}^m$.

**Пример 1.3.** Множество всех решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$u^{(n)} + a_1(x)\, u^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)\, u = 0$$

с непрерывными коэффициентами $a_j(x)$ есть $n$-мерное векторное пространство, так как каждое решение этого уравнения представимо в виде линейной комбинации $n$ *фундаментальных решений*, которые линейно независимы.

---

[1] Под *областью* в $\mathrm{R}^m$ мы понимаем либо открытое множество, либо объединение открытого множества и его границы (всей или некоторой ее части).

## 2. Базисы

Пусть X есть $N$-мерное векторное пространство и $\{x_1, \ldots, x_N\}$ — семейство[1] $N$ линейно независимых векторов в X. Линейная оболочка векторов $x_i$, $i = 1, \ldots, N$, совпадает с X, и каждый вектор $u \in$ X представляется в виде

$$u = \sum_{j=1}^{N} \xi_j u_j \tag{1.1}$$

единственным образом. Семейство $\{x_j\}_1^N$ называется *базисом*[2]) пространства X, а скаляры $\xi_j$ — *координатами* (*коэффициентами*) вектора $u$ относительно этого базиса. Отображение $u \to (\xi_j)$ есть *изоморфизм* X на $C^N$ (см. пример 1.1) в том смысле, что оно взаимно однозначно и сохраняет линейные операции, т. е.

$$\alpha u + \beta v \to (\alpha \xi_j + \beta \eta_j), \quad \text{если} \quad u \to (\xi_j) \quad \text{и} \quad v \to (\eta_j).$$

Как известно, любое семейство $x_1, \ldots, x_p$ линейно независимых векторов добавлением к нему некоторых векторов $x_{p+1}, \ldots, x_N$ можно расширить до базиса.

**Пример 1.4.** В пространстве $C^N$ векторы $x_j = (\ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ с единицей на $j$-м месте, $j = 1, \ldots, N$, образуют базис (*канонический базис*). Координатами вектора $u = (\xi_j)$ относительно канонического базиса служат сами $\xi_j$.

Любые два базиса $\{x_j\}$ и $\{x'_j\}$ в X связаны системой линейных соотношений

$$x_k = \sum_j \gamma_{jk} x'_j, \quad k = 1, \ldots, N. \tag{1.2}$$

Координаты $\xi_j$ и $\xi'_j$ одного и того же вектора $u$ относительно базисов $\{x_j\}$ и $\{x'_j\}$ удовлетворяют соотношениям

$$\xi'_j = \sum_k \gamma_{jk} \xi_k, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{1.3}$$

Преобразования, обратные к (1.2) и (1.3), имеют вид

$$x'_j = \sum_k \hat{\gamma}_{kj} x_k, \quad \xi_k = \sum_j \hat{\gamma}_{kj} \xi'_j, \tag{1.4}$$

где $(\hat{\gamma}_{jk})$ — матрица, обратная к матрице $(\gamma_{jk})$:

$$\sum_i \hat{\gamma}_{ji} \gamma_{ik} = \sum_i \gamma_{ji} \hat{\gamma}_{ik} = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\det(\gamma_{jk}) \det(\hat{\gamma}_{jk}) = 1. \tag{1.6}$$

Здесь $\det(\gamma_{jk})$ обозначает определитель матрицы $(\gamma_{jk})$.

---

[1]) Под семейством понимается множество элементов, зависящих от некоторого параметра.

[2]) Это *упорядоченный базис* (ср. Гофман и Кунце [1], стр. 47).

Соотношения (1.3) и (1.4) удобно записывать в матричных обозначениях:

$$(u)' = (C)(u), \quad (u) = (C)^{-1}(u)'; \tag{1.7}$$

здесь через $(C)$ и $(C)^{-1}$ обозначены матрица $(\gamma_{jk})$ и ее обратная, а $(u)$ и $(u)'$ обозначают векторы-столбцы с компонентами $\xi_j$ и $\xi'_j$ соответственно. Следует принципиально различать $(u)$ или $(u)'$ и «абстрактный» вектор $u$, который они представляют при специальном выборе базиса.

### 3. Линейные многообразия

Для любых подмножеств $\mathrm{S}$ и $\mathrm{S}'$ в $\mathrm{X}$ через $\mathrm{S}+\mathrm{S}'$ обозначается (*линейная*, или арифметическая) *сумма* $\mathrm{S}$ и $\mathrm{S}'$, т. е. множество всех векторов вида $u+u'$, где $u \in \mathrm{S}$, $u' \in \mathrm{S}'$ [1]. Если $\mathrm{S}$ состоит из одного вектора $u$, то вместо $\mathrm{S}+\mathrm{S}'$ пишут $u+\mathrm{S}'$. Если $\mathrm{M}$ — линейное подпространство, то $u+\mathrm{M}$ называется (*неоднородным*) *линейным многообразием* (или плоскостью), проходящим через $u$ параллельно $\mathrm{M}$. Совокупность линейных многообразий $u+\mathrm{M}$ при фиксированном $\mathrm{M}$ образует векторное пространство относительно линейных операций, определенных формулой

$$\alpha(u+\mathrm{M}) + \beta(v+\mathrm{M}) = (\alpha u + \beta v) + \mathrm{M}. \tag{1.8}$$

Это векторное пространство называется *факторпространством* $\mathrm{X}$ по $\mathrm{M}$ и обозначается через $\mathrm{X}/\mathrm{M}$. Элементы пространства $\mathrm{X}/\mathrm{M}$ называются также *смежными классами* линейного подпространства $\mathrm{M}$. Нулевым вектором пространства $\mathrm{X}/\mathrm{M}$ является $\mathrm{M}$, и $v+\mathrm{M} = u+\mathrm{M}$ тогда и только тогда, когда $u-v \in \mathrm{M}$. Размерность $\mathrm{X}/\mathrm{M}$ называется *коразмерностью* (или *дефектом*) подпространства $\mathrm{M}$ (относительно $\mathrm{X}$) и обозначается $\operatorname{codim} \mathrm{M}$. Имеет место равенство

$$\dim \mathrm{M} + \operatorname{codim} \mathrm{M} = \dim \mathrm{X}. \tag{1.9}$$

Если $\mathrm{M}_1$ и $\mathrm{M}_2$ — линейные подпространства, то $\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2$ и $\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2$ суть линейные подпространства и

$$\dim(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2) + \dim(\mathrm{M}_1 \cap \mathrm{M}_2) = \dim \mathrm{M}_1 + \dim \mathrm{M}_2. \tag{1.10}$$

Операция $\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2$ для линейных подпространств (и для любых подмножеств в $\mathrm{X}$) ассоциативна в том смысле, что $(\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2)+\mathrm{M}_3 = \mathrm{M}_1+(\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_3)$; это позволяет говорить о сумме $\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_3$. Аналогично можно определить $\mathrm{M}_1+\mathrm{M}_2+\ldots+\mathrm{M}_s$ для $s$ линейных подпространств $\mathrm{M}_j$.

---

[1] Следует отличать $\mathrm{S}+\mathrm{S}'$ от *объединения* $\mathrm{S}$ и $\mathrm{S}'$, обозначаемого через $\mathrm{S} \cup \mathrm{S}'$. Пересечение $\mathrm{S}$ и $\mathrm{S}'$ обозначается через $\mathrm{S} \cap \mathrm{S}'$.

Пространство X есть *прямая сумма* линейных подпространств $M_1, \ldots, M_s$, если $X = M_1 + \ldots + M_s$ и $\sum u_j = 0$ $(u \in M_j)$ только тогда, когда $u_j = 0$, $j = 1, \ldots, s$. В этом случае мы пишем

$$X = M_1 \oplus \ldots \oplus M_s. \tag{1.11}$$

Каждый вектор $u \in X$ допускает единственное представление в виде

$$u = \sum u_j, \quad u_j \in M_j, \quad j = 1, \ldots, s. \tag{1.12}$$

Кроме того,

$$\dim X = \sum_j \dim M_j. \tag{1.13}$$

**Задача 1.5.** Если $X = M_1 \oplus M_2$, то $\dim M_2 = \operatorname{codim} M_1$.

## 4. Сходимость и нормы

Пусть $\{x_j\}$ — базис в конечномерном векторном пространстве X и $u_n$, $n = 1, 2, \ldots$,— последовательность векторов из X с координатами $\xi_{nj}$ относительно базиса $\{x_j\}$. Говорят, что последовательность $u_n$ *сходится к нулю* или *имеет предел* 0, и пишут $u_n \to 0$ при $n \to \infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, если

$$\lim_{n\to\infty} \xi_{nj} = 0, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{1.14}$$

Последовательность $u_n$ *сходится* к $u$ (или имеет предел $u$), если $u_n - u \to 0$; в этом случае пишут $u_n \to u$ или $\lim u_n = u$. Если предел существует, то он единствен.

Определение сходимости не зависит от выбора базиса $\{x_j\}$. В самом деле, формула (1.3) преобразования координат вектора показывает, что равенство (1.14) влечет равенство $\lim \xi'_{nj} = 0$, где $\xi'_{nj}$, $j = 1, \ldots, N$, суть координаты вектора $u_n$ относительно нового базиса $\{x'_j\}$.

Линейные операции в X *непрерывны* относительно введенной сходимости в том смысле, что $\alpha_n u_n + v_n \to \alpha u + v$, если $\alpha_n \to \alpha$, $u_n \to u$ и $v_n \to v$.

Для многих целей сходимость векторов удобно выражать с помощью *нормы*. Фиксируем базис $\{x_j\}$ в X и положим

$$\| u \| = \max_j | \xi_j |, \tag{1.15}$$

где $\xi_j$ — координаты вектора $u$ относительно $\{x_j\}$. Равенство (1.14) показывает, что сходимость $u_n \to u$ эквивалентна сходимости $\| u_n - u \| \to 0$. Число $\| u \|$ называется «нормой» вектора $u$.

Функция $\| u \|$, определенная равенством (1.15), не является единственной возможной для описания сходимости векторов.

Мы могли бы взять также

$$\| u \| = \sum | \xi_j | \tag{1.16}$$

или

$$\| u \| = (\sum | \xi_j |^2)^{1/2}. \tag{1.17}$$

Все эти функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{gathered} \| u \| \geqslant 0; \ \| u \| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } u = 0; \\ \| \alpha u \| = | \alpha | \, \| u \| \quad \text{(однородность);} \\ \| u + v \| \leqslant \| u \| + \| v \| \quad \text{(неравенство треугольника).} \end{gathered} \tag{1.18}$$

Каждая функция $\| u \|$, определенная на $\mathrm{X}$ и удовлетворяющая этим условиям, называется *нормой*. Заменяя $u$ на $u - v$ в последнем из условий (1.18), получаем

$$| \, \| u \| - \| v \| \, | \leqslant \| u - v \|. \tag{1.19}$$

Вектор $u$ с $\| u \| = 1$ называется *нормированным*. Для любого $u \neq 0$ вектор $u_0 = \| u \|^{-1} u$ нормирован; говорят, что вектор $u_0$ получен *нормировкой* вектора $u$.

Для заданной нормы $\| \ \|$ сходимость $u_n \to u$ определяется естественным образом как сходимость $\| u_n - u \| \to 0$. Это определение сходимости в действительности не зависит от выбора нормы и и, следовательно, совпадает с прежним определением. Это следует из того факта, что любые две нормы $\| \ \|$ и $\| \ \|'$ в конечномерном пространстве $\mathrm{X}$ *эквивалентны* в том смысле, что

$$\alpha' \| u \| \leqslant \| u \|' \leqslant \beta' \| u \| \quad u \in \mathrm{X}, \tag{1.20}$$

где $\alpha'$ и $\beta'$ — положительные постоянные, не зависящие от $u$.

Заметим, кстати, что для *любой* нормы $\| \ \|$ и *любого* базиса $\{x_j\}$ координаты $\xi_j$ вектора $u$ относительно базиса $\{x_j\}$ удовлетворяют неравенствам

$$| \xi_j | \leqslant \gamma \| u \|, \quad j = 1, \ldots, N, \tag{1.21}$$

$$\| u \| \leqslant \gamma' \max_j | \xi_j |, \tag{1.22}$$

где $\gamma$, $\gamma'$ — положительные постоянные, зависящие только от нормы $\| \ \|$ и базиса $\{x_j\}$. Эти неравенства следуют из (1.20), если в качестве $\| \ \|'$ взять норму (1.15).

*Каждая норма $\| u \|$ является непрерывной функцией вектора $u$.* Это означает, что из $u_n \to u$ следует $\| u_n \| \to \| u \|$, и вытекает непосредственно из неравенства (1.19). Неравенство (1.19) показывает также, что каждая сходящаяся последовательность $u_n$ есть *последовательность Коши* (или *фундаментальная последовательность*), т. е. удовлетворяет *условию Коши*

$$\| u_n - u_m \| \to 0, \quad m, n \to \infty \tag{1.23}$$

Обратно, условие Коши достаточно для существования $\lim u_n$.

Хотя введение нормы не является необходимым для описания сходимости векторов, однако норма оказывается очень удобным инструментом для этого. В приложениях важно выбирать норму, наиболее подходящую к рассматриваемой задаче. Векторное пространство, в котором введена норма, называется *нормированным* (*векторным*) *пространством*. Каждое конечномерное векторное пространство можно сделать нормированным. Одно и то же векторное пространство можно превратить в нормированное разными способами, вводя в нем различные нормы. В последующем мы часто будем рассматривать то или иное векторное пространство как нормированное, вводя в нем подходящую норму. Понятие конечномерного нормированного пространства служит моделью (и частным случаем) понятия *банахова пространства*, которое будет введено в третьей главе.

## 5. Топологические понятия в нормированном пространстве

Этот пункт посвящен краткому обзору некоторых топологических понятий, относящихся к нормированным пространствам [1]. В наиболее интересующем нас здесь случае конечномерных пространств нет никаких существенных отличий по сравнению со случаем вещественных евклидовых пространств. Изменения, появляющиеся при переходе к бесконечномерным пространствам, будут отмечены ниже.

Нормированное пространство $\mathrm{X}$ есть частный случай *метрического пространства*, в котором определено расстояние между любыми двумя точками. За расстояние между двумя точками (векторами) $u$, $v$ в $\mathrm{X}$ примем $\| u - v \|$. (Открытый) *шар* в $\mathrm{X}$ есть множество точек $u$, удовлетворяющих условию $\| u - u_0 \| < r$; точка $u_0$ называется *центром*, а число $r > 0$ — *радиусом* шара. Множество точек $u$, удовлетворяющих условию $\| u - u_0 \| \leqslant r$, называется *замкнутым шаром*. В том случае, когда $u_0 = 0$ и $r = 1$, мы говорим о *единичном шаре*. Любое подмножество в $\mathrm{X}$, содержащее шар с центром в точке $u \in \mathrm{X}$, называется *окрестностью* этой точки. Подмножество в $\mathrm{X}$ называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре. Само $\mathrm{X}$ ограничено, только если $\dim \mathrm{X} = 0$.

Точка $u$ называется *внутренней точкой* множества $\mathrm{S}$, если $\mathrm{S}$ есть окрестность для $u$, и *внешней точкой* множества $\mathrm{S}$, если $u$ есть внутренняя точка его дополнения $\mathrm{S}' = \mathrm{X} \setminus \mathrm{S}$. Точка $u$ назы-

---

[1] Нам потребуются лишь элементарные понятия топологии метрических пространств. В качестве доступного руководства рекомендуем, например, книгу Ройдена [[1]]. (Или Шилова [[1*]].— *Ред.*)

вается *граничной* точкой множества $\mathrm{S}$, если она не является для него ни внутренней, ни внешней точкой . Множество граничных точек $\mathrm{S}$ есть *граница* $\partial\mathrm{S}$ множества $\mathrm{S}$. Объединение $\mathrm{S} \cup \partial\mathrm{S}$ называется *замыканием* множества $\mathrm{S}$ и обозначается через $\overline{\mathrm{S}}$. Множество $\mathrm{S}$ называется *открытым*, если оно состоит из одних внутренних точек, и *замкнутым*, если $\mathrm{S}'$ открыто или, что эквивалентно, если $\mathrm{S} = \overline{\mathrm{S}}$. Замыкание $\overline{\mathrm{S}}$ любого множества $\mathrm{S}$ замкнуто: $\overline{\overline{\mathrm{S}}} = \overline{\mathrm{S}}$. Если $\mathrm{X}$ конечномерно, то каждое линейное подпространство в $\mathrm{X}$ замкнуто.

Приведенные выше понятия могут быть определены и в терминах сходимости последовательностей. Например, $\overline{\mathrm{S}}$ есть множество таких $u \in \mathrm{X}$, что существует последовательность $u_n \in \mathrm{S}$, сходящаяся к $u$. Далее, $\mathrm{S}$ замкнуто тогда и только тогда, когда из $u_n \in \mathrm{S}$ и $u_n \to u$ следует $u \in \mathrm{S}$.

Обозначим через $\operatorname{dist}(u, \mathrm{S})$ расстояние от точки $u$ до множества $\mathrm{S}$:

$$\operatorname{dist}(u, \mathrm{S}) = \inf_{v \in \mathrm{S}} \| u - v \|. \tag{1.24}$$

Если $\mathrm{S}$ замкнуто и $u \notin \mathrm{S}$, то $\operatorname{dist}(u, \mathrm{S}) > 0$.

Важным свойством конечномерных пространств $\mathrm{X}$ является справедливость в них теоремы Больцано — Вейерштрасса: из каждой ограниченной последовательности векторов в $\mathrm{X}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Это свойство назовем *локальной компактностью* пространства $\mathrm{X}$ [1]. Подмножество $\mathrm{S} \subset \mathrm{X}$ *компактно*, если любая последовательность элементов $\mathrm{S}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из $\mathrm{S}$.

## 6. Бесконечные векторные ряды

Сходимость бесконечного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1.25}$$

векторов $u_n \in \mathrm{X}$ определяется так же, как и в случае числовых рядов. Ряд (1.25) *сходится* к $v$ (или имеет *сумму* $v$), если последовательность частичных сумм $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ сходится к $v$. Сумма ряда (1.25) обычно обозначается тем же символом, что и сам ряд.

Достаточным условием сходимости ряда (1.25) является сходимость числового ряда

$$\sum_{n} \| u_n \| < \infty. \tag{1.26}$$

---

[1] Локальная компактность $\mathrm{X}$ существенно используется при доказательстве неравенств (1.20).

Ввиду неравенств (1.20) сходимость этого ряда не зависит от выбора нормы. Если ряд (1.26) сходится, то говорят об *абсолютной сходимости* ряда (1.25). Имеем

$$\| \sum_n u_n \| \leqslant \sum_n \| u_n \|. \tag{1.27}$$

Задача 1.6. Пусть векторы $u_n$ и $v$ имеют соответственно координаты $\xi_{nj}$ и $\eta_j$ относительно базиса $\{x_j\}$. Ряд (1.25) сходится к $v$ тогда и только тогда, когда $\sum_n \xi_{nj} = \eta_j$, $j = 1, \ldots, N$. Для абсолютной сходимости ряда (1.25) необходима и достаточна абсолютная сходимость рядов $\sum_n \xi_{nj}$, $j = 1, \ldots, N$.

В абсолютно сходящихся рядах векторов можно произвольным образом менять порядок членов ряда, не изменяя суммы ряда. Это становится очевидным, если перейти к координатной записи векторных рядов (см. задачу 1.6). Дадим еще набросок непосредственного, «бескоординатного» доказательства этого факта. Пусть $\sum u'_n$ — ряд, полученный из ряда (1.25) некоторой перестановкой слагаемых. Очевидно, что $\sum \| u'_n \| = \sum \| u_n \| < \infty$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое целое $m$, что $\sum_{n=m+1}^{\infty} \| u_n \| < \varepsilon$. Пусть $p$ таково, что векторы $u_1, \ldots, u_m$ содержатся в наборе $u'_1, \ldots, u'_p$. Для любых $n > m$ и $q > p$ имеем неравенство $\| \sum_{j=1}^{q} u'_j - \sum_{k=1}^{n} u_k \| \leqslant \sum_{k=m+1}^{\infty} \| u_k \| < \varepsilon$; переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\| \sum_{j=1}^{q} u'_j - \sum_{k=1}^{\infty} u_k \| \leqslant \varepsilon$ для $q > p$. Отсюда следует, что $\sum u'_n = \sum u_n$.

На этом примере видно, каким образом теоремы о числовых рядах переносятся на векторные ряды. Аналогично можно доказать, например, что абсолютно сходящийся двойной ряд векторов можно суммировать в произвольном порядке: по строкам, по столбцам или перенумеровать его в обыкновенный ряд.

## 7. Вектор-функции

Наряду с последовательностями векторов, которые можно рассматривать как вектор-функции целочисленного аргумента, рассмотрим теперь функции $u_t = u(t)$ вещественной или комплексной переменной $t$, принимающие значения в X. По определению $\lim_{t \to a} u(t) = v$, если $\| u(t) - v \| \to 0$ при $t \to a$ (с обычной оговоркой $t \neq a$) для некоторой (и, следовательно, для любой) нормы в X. Функция $u(t)$ *непрерывна* при $t = a$, если $\lim_{t \to a} u(t) =$

$= u(a)$; $u(t)$ непрерывна в области E, если она непрерывна в каждой точке из E.

Производная функции $u(t)$ определяется равенством

$$u'(t) = \frac{du(t)}{dt} = \lim_{h \to 0} h^{-1}\,[u(t+h) - u(t)],$$

при условии, что предел в правой части существует. Как и в случае числовых функций, справедливы следующие формулы:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\,[u(t) + v(t)] = u'(t) + v'(t), \\ &\frac{d}{dt}\,[\varphi(t) \cdot u(t)] = \varphi(t)\,u'(t) + \varphi'(t)\,u(t), \end{aligned} \tag{1.29}$$

где $\varphi(t)$ — комплексная функция.

Можно определить интеграл от вектор-функции $u(t)$ так же, как и для числовых функций. Предположим, например, что $u(t)$ — непрерывная вектор-функция вещественной переменной $t$, $a \leqslant t \leqslant b$. Интеграл Римана $\int\limits_a^b u(t)\,dt$ определяется как предел сумм $\sum (t_j - t_{j-1})\,u(t_j)$, построенных по разбиению $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ интервала $[a, b]$. Аналогично можно определить интеграл $\int\limits_C u(t)\,dt$ непрерывной функции $u(t)$ комплексной переменной $t$ по спрямляемой кривой C. Доказательство существования такого интеграла аналогично соответствующему доказательству в случае числовых функций; достаточно лишь заменить модуль комплексного числа на норму вектора. Для введенных интегралов справедливы формулы

$$\begin{aligned} &\int [\alpha u(t) + \beta v(t)]\,dt = \alpha \int u(t)\,dt + \beta \int v(t)\,dt, \\ &\left\| \int u(t)\,dt \right\| \leqslant \int \|u(t)\|\,|dt|. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Нетрудно сформулировать и определение несобственного интеграла от вектор-функции. Ниже мы будем без специальных пояснений пользоваться формулами дифференциального и интегрального исчисления для вектор-функций.

Хотя определение производной вектор-функции комплексного аргумента совпадает по форме с соответствующим определением в случае вещественного аргумента, однако, так же как и для числовых функций, есть существенное различие между этими двумя случаями. Дифференцируемая в области D комплексной плоскости функция $u(t)$ называется *регулярной*, или *аналити-*

*ческой*, или *голоморфной* в D. Большая часть теории функций комплексной переменной переносится без существенных изменений на случай голоморфных вектор-функций[1]. Так, справедливы интегральная теорема Коши, теоремы о рядах Тейлора и Лорана, теорема Лиувилля и т. д. Например, если $t = 0$ — изолированная особая точка голоморфной вектор-функции $u(t)$, то

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} t^n a_n, \qquad a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C t^{-n-1} u(t)\, d(t), \tag{1.31}$$

где C — замкнутая кривая, скажем окружность, обходящая точку $t = 0$ в положительном направлении. Точка $t = 0$ представляет собой *регулярную точку* (устранимую особенность), если $a_n = 0$ при $n < 0$, *полюс* порядка $k > 0$, если $a_{-k} \neq 0$ и $a_n = 0$ при $n < -k$, и *существенно особую* точку в оставшемся случае.

**Задача 1.7.** Если $t = 0$ — полюс порядка $k$, то $\| u(t) \| = o(|t|^{-k})$ при $t \to 0$.

**Задача 1.8.** Пусть $\xi_j(t)$ — координаты вектора $u(t)$ относительно некоторого базиса в X. Функция $u(t)$ непрерывна (соотв. дифференцируема) тогда и только тогда, когда все $\xi_j(t)$ непрерывны (соотв. дифференцируемы). Координатами вектора $u'(t)$ в том же базисе служат $\xi'_j(t)$; вектор $\int u(t)\, dt$ имеет координаты $\int \xi_j(t)\, dt$.

## § 2. Линейные формы и сопряженное пространство

### 1. Линейные формы

Пусть X — векторное пространство. Комплексная функция $f[u]$, определенная на X, называется *линейной формой* или *линейным функционалом*, если

$$f[\alpha u + \beta u] = \alpha f[u] + \beta f[v] \tag{2.1}$$

для всех $u$, $v \in$ X и всех скаляров $\alpha$ и $\beta$.

**Пример 2.1.** Если X $= C^N$ (пространство $N$-мерных числовых векторов), то всякая линейная форма на X представима в виде

$$f[u] = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \xi_j, \quad \text{где} \quad u = (\xi_j). \tag{2.2}$$

---

[1] В этой книге мы часто будем применять методы теории функций комплексной переменной; однако нам потребуются лишь элементарные факты этой теории, излагаемые во всяком стандартном руководстве (см., скажем, Кнопп [[1, 2]] (или Шабат [[1*]].— *Ред.*). Мы будем использовать эти факты применительно к вектор-функциям или операторным функциям без особых пояснений, так как эти обобщения не представляют труда.

Обычно $u$ представляют как вектор-столбец с компонентами $\xi_j$; тогда $f$ рассматривают как *вектор-строку* с компонентами $\alpha_j$, а $f[u]$ будет матричным произведением этих двух векторов.

**Пример 2.2.** Пусть $\mathrm{X}$ — пространство непрерывных функций $u = u(x)$, рассмотренное в примере 1.2. Формулы

$$f[u] = u(x_0), \quad \text{где } x_0\text{—фиксированная точка,} \tag{2.3}$$

$$f[u] = \int_a^b \varphi(x)\, u(x)\, dx, \quad \text{где } \varphi\text{—фиксированная функция,} \tag{2.4}$$

определяют линейные функционалы на $\mathrm{X}$.

Пусть $\{x_j\}$ — базис в $\mathrm{X}$ ($\dim \mathrm{X} = N < \infty$). Если $u = \sum \xi_j x_j$, то согласно (2.1) имеем

$$f[u] = \sum \alpha_j \xi_j, \tag{2.5}$$

где $\alpha_j = f[x_j]$. Каждая линейная форма представляется, таким образом, числовым вектором $(\alpha_j)$ в некотором базисе и, обратно, каждый числовой вектор $(\alpha_j)$ определяет линейный функционал $f$ по формуле (2.5). Эта формула совпадает с формулой (2.2) для линейного функционала на $\mathrm{C}^N$.

Та же самая линейная форма $f$ в другом базисе $\{x'_j\}$ представляется другим числовым вектором $(\alpha'_j)$. Если новый базис $\{x'_j\}$ связан со старым преобразованием (1.2), или (1.4), то связь между представлениями $(\alpha'_j)$ и $(\alpha_j)$ дается формулами

$$\begin{aligned} \alpha'_j &= f[x'_j] = \sum_k \hat{\gamma}_{kj} f[x_k] = \sum_k \hat{\gamma}_{kj} \alpha_k, \\ \alpha_k &= \sum_j \gamma_{jk} \alpha'_j. \end{aligned} \tag{2.6}$$

В матричных обозначениях это можно записать так:

$$(f)' = (f)\,(C)^{-1}, \quad (f) = (f')\,(C), \tag{2.7}$$

где $(C)$ — матрица $(\gamma_{jk})$ (см. (1.7)), а $(f)$ и $(f')$ — *векторы-строки* с компонентами $(\alpha_j)$ и $(\alpha'_j)$ соответственно.

## 2. Сопряженное пространство

Комплексная функция $f[u]$, определенная на $\mathrm{X}$, называется *полулинейной* (или *сопряженно-линейной*, или *антилинейной*) формой, если

$$f[\alpha u + \beta v] = \bar{\alpha} f[u] + \bar{\beta} f[v], \tag{2.8}$$

где $\bar{\alpha}$ обозначает число, комплексно сопряженное к $\alpha$. Очевидно, что $f[u]$ — полулинейная форма тогда и только тогда, когда $\overline{f[u]}$ — линейная форма. Для удобства изложения мы будем работать с полулинейными формами, а не с линейными.

**Пример 2.3.** Всякая полулинейная форма $f$ на $C^N$ имеет вид $f[u] = \sum \alpha_j \bar{\xi}_j$, где $u = (\xi_j)$ (ср. (2.2)).

**Пример 2.4.** Пусть $X$ — пространство непрерывных функций (см. пример 2.2). Формулы

$$f[u] = \overline{u(x_0)}, \tag{2.9}$$

$$f[u] = \int_a^b \varphi(x)\overline{u(x)}\,dx \tag{2.10}$$

задают полулинейные функционалы на $X$.

Линейная комбинация $\alpha f + \beta g$ двух полулинейных форм $f$ и $g$, определенная формулой

$$(\alpha f + \beta g)[u] = \alpha f[u] + \beta g[u], \tag{2.11}$$

есть, очевидно, полулинейная форма. Таким образом, множество всех полулинейных форм на $X$ является векторным пространством. Это пространство называется *сопряженным* к $X$ и обозначается через $X^*$. Нулевой вектор пространства $X^*$, обозначаемый все тем же символом 0, есть функционал на $X$, переводящий каждый вектор $u \in X$ в нуль.

Удобно трактовать пространство $X^*$ как в некотором смысле «ровню» пространства $X$. А именно мы пишем

$$f[u] = (f, u) \tag{2.12}$$

и называем $(f, u)$ *скалярным произведением* элементов $f \in X^*$ и $u \in X$. Как следует из определения (2.12), скалярное произведение $(f, u)$ линейно по $f$ и полулинейно по $u$:

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g, u) &= \alpha (f, u) + \beta (g, u), \\ (f, \alpha u + \beta v) &= \bar{\alpha} (f, u) + \bar{\beta} (f, v). \end{aligned} \tag{2.13}$$

**Пример 2.5.** Пусть $X = C^N$. Если элементы из $X$ рассматриваются как векторы-столбцы, то элементы из $X^*$ можно рассматривать как векторы-строки. Скалярное произведение векторов $f = (\alpha_j) \in X^*$ и $u = (\xi_j) \in X$ задается формулой

$$(f, u) = \sum \alpha_j \bar{\xi}_j. \tag{2.14}$$

**Замечание 2.6.** В алгебраической теории векторных пространств сопряженное пространство к $X$ определяется как пространство всех *линейных* форм на $X$. Наше определение сопряженного пространства приспособлено для того, чтобы пространство, сопряженное к евклидову конечномерному пространству $X$ (см. § 6), можно было отождествить с самим $X$[1].

---

[1] См., например, Халмош [[2]]. Иногда определяют $X^*$ как множество всех линейных форм $f$ на $X$, но зато $\alpha f$ определяют формулой $(\alpha f)[u] = \bar{\alpha} f[u]$; при этом $f[u]$ линейно по $u$ и полулинейно по $f$ (см., например, Лорх [[1]]). Наше определение сопряженного пространства совпадает с определением Рисса и Секефальви-Надя [[1]].

### 3. Сопряженный базис

Пусть $\{x_j\}$ — базис в X. Так же как и в случае линейных форм, для каждого числового вектора $(\alpha_k)$ существует вектор $f \in X^*$ такой, что $(f, x_k) = \alpha_k$. В частности, для каждого $j$ существует единственный элемент $e_j \in X^*$ такой, что

$$(e_j, x_k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, N. \tag{2.15}$$

Легко видеть, что векторы $e_j$ линейно независимы. Каждый элемент $f \in X^*$ можно представить единственным образом в виде линейной комбинации элементов $e_j$:

$$f = \sum \alpha_j e_j, \quad \text{где} \quad \alpha_j = (f, x_j). \tag{2.16}$$

В самом деле, скалярное произведение разности $f - \sum \alpha_j e_j$ с каждым $x_j$ и, следовательно, с каждым $u \in X$ равно нулю; значит, $f - \sum \alpha_j e_j$ есть нулевая форма.

Таким образом, $N$ векторов $e_j$ образуют базис в $X^*$, называемый базисом, *сопряженным* к базису $\{x_j\}$ в X. Так как базис $\{e_j\}$ состоит из $N$ элементов, имеем

$$\dim X^* = \dim X = N. \tag{2.17}$$

Для каждого $u \in X$ имеем

$$u = \sum \xi_j x, \ {}_j\text{где} \ \xi_j = \overline{(e_j, u)}. \tag{2.18}$$

Из (2.16) и (2.18) следует, что

$$(f, u) = \sum \alpha_j \bar{\xi}_j = \sum (f, x_j)(e_j, u). \tag{2.19}$$

Пусть $\{x_j\}$ и $\{x'_j\}$ — базисы в X, связанные соотношением (1.2). Соответствующие им сопряженные базисы $\{e_j\}$ и $\{e'_j\}$ в $X^*$ связаны друг с другом формулами

$$e'_j = \sum_k \bar{\gamma}_{jk} e_k, \quad e_k = \sum_j \bar{\hat{\gamma}}_{kj} e'_j. \tag{2.20}$$

При этом

$$\bar{\gamma}_{jk} = (e'_j, x_k), \quad \bar{\hat{\gamma}}_{kj} = (e_k, x'_j). \tag{2.21}$$

### 4. Сопряженное к нормированному пространству

Так как $X^*$ конечномерно вместе с X, то можно так же, как в п. 1.4, ввести понятие сходимости векторов в $X^*$. В связи с этим полезно ввести норму в $X^*$. Обычно в $X^*$ вводят не произвольную норму, а специальным образом связанную с нормой в X.

В том случае, когда в X задана норма $\|\cdot\|$, в сопряженном пространстве X* норму определяют формулой [1])

$$\|f\| = \sup_{0\neq u\in X} \frac{|f(u)|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} |(f, u)|. \tag{2.22}$$

Конечность $\|f\|$ следует из того, что непрерывная функция $|(f, u)|$ от $u$ достигает максимума на сфере $\|u\| = 1$ (ввиду локальной компактности X). Легко проверить, что функция $\|f\|$ обладает свойствами нормы (1.18). Использование одного и того же символа $\|\cdot\|$ для двух разных норм не поведет к недоразумениям.

**Пример 2.7.** Предположим, что в X фиксирован базис $\{x_j\}$ и норма $\|\cdot\|$ определена формулой (1.15). Из (2.19) вытекает, что $|(f, u)| \leqslant \left(\sum |\alpha_j|\right) \|u\|$, где $\alpha_j = (f, x_j)$, причем равенство здесь действительно имеет место, если вектор $u = \sum \xi_j x_j$ таков, что $|\xi_1| = \ldots = |\xi_N|$ и все $\alpha_j \overline{\xi_j}$ вещественны и неотрицательны. Отсюда следует, что

$$\|f\| = \sum |\alpha_j|. \tag{2.23}$$

Аналогично можно показать, что норма в X* задается формулой

$$\|f\| = \max |\alpha_j|, \tag{2.24}$$

если норма в X определена формулой (1.16). Мы можем сказать, таким образом, что нормы (1.15) и (1.16) сопряжены друг другу.

Из (2.22) вытекает неравенство

$$|(f, u)| \leqslant \|f\| \, \|u\|, \quad f \in X^*, \quad u \in X, \tag{2.25}$$

называемое (обобщенным) *неравенством Шварца*. Оно является просто следствием нашего определения нормы в сопряженном пространстве и имеет содержательный смысл только в том случае, когда норму в X* можно охарактеризовать независимым образом (как, например, в случае евклидова конечномерного пространства, см. § 6).

Из (2.25) следует, что $\|u\| \geqslant |(f, u)|/\|f\|$. Справедливо даже более сильное утверждение [2]):

$$\|u\| = \sup_{0\neq f\in X^*} \frac{|(f, u)|}{\|f\|} = \sup_{\|f\|=1} |(f, u)|. \tag{2.26}$$

Это вытекает из того факта, что для любого $u_0 \in X$ существует функционал $f \in X^*$, удовлетворяющий условиям

$$(f, u_0) = 1, \quad \|f\| = 1. \tag{2.27}$$

Доказательство этого факта требует несколько бóльших знаний о свойствах нормы и будет дано в следующем пункте.

---

[1]) Мы предполагаем здесь, что $\dim X > 0$; случай $\dim X = 0$ тривиален.

[2]) В предположении, что $\dim X > 0$.

**Задача 2.8.** Если $(f, u) = 0$ для всех $u \in X$, то $f = 0$. Если $(f, u) = 0$ для всех $f \in X^*$, то $u = 0$.

Простым следствием неравенства Шварца является *непрерывность скалярного произведения* $(f, u)$ *по аргументам* $f$ *и* $u$. В самом деле [1]),

$$\begin{aligned} &|(f', u') - (f, u)| = \\ &\quad = |(f' - f, u) + (f, u' - u) + \\ &\qquad\qquad + (f' - f, u' - u)| \leqslant \\ &\quad \leqslant \|f' - f\| \, \|u\| + \|f\| \, \|u' - u\| + \|f' - f\| \, \|u' - u\|. \end{aligned} \tag{2.28}$$

В частности, $u_n \to u$ влечет $(f, u_n) \to (f, u)$ для каждого $f \in X^*$; аналогично $f_n \to f$ влечет $(f_n, u) \to (f, u)$ для каждого $u \in X$. Аналогично, сходимость ряда $\sum u_n$ к $u$ влечет сходимость $\sum (f, u_n)$ к $(f, u)$ для каждого $f \in X^*$ (т. е. скалярное умножение можно производить почленно). Обратно, если $(f, u_n) \to (f, u)$ для всех $f \in X^*$, то $u_n \to u$; это можно доказать, используя разложения векторов $u_n$ и $u$ в каком-нибудь фиксированном базисе в X.

## 5. Выпуклость шаров

Пусть S — открытый шар в X. Шар S — *выпуклое* множество, т. е. для любых векторов $u, v \in S$ соединяющий их отрезок содержится в S. Другими словами,

$$\lambda u + (1 - \lambda) v \in S, \quad \text{если} \quad u, v \in S, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1. \tag{2.29}$$

Действительно, обозначая через $u_0$ центр и через $r$ радиус шара S, имеем

$$\begin{aligned} &\|\lambda u + (1 - \lambda) v - u_0\| = \\ &\quad = \|\lambda (u - u_0) + (1 - \lambda)(v - u_0)\| \leqslant \lambda r + (1 - \lambda) r = r, \end{aligned}$$

чем и доказано наше утверждение. В дальнейшем через S мы обозначаем единичный шар ($u_0 = 0$, $r = 1$).

Так как пространство X изоморфно $N$-мерному комплексному координатному пространству $C^N$, то оно изоморфно (как *вещественное векторное пространство*) $2N$-мерному вещественному координатному пространству $R^{2N}$. Поэтому S можно рассматривать как выпуклое множество в $R^{2N}$. Воспользовавшись хорошо известной теоремой о существовании *опорной гиперплоскости* [2]),

---

[1]) Непрерывность $(f, u)$ следует сразу из (2.19). Однако доказательство, использующее (2.28), имеет то преимущество, что оно пригодно и в бесконечномерном случае.

[2]) См., например, Эглстон [[1]] (или Колмогоров и Фомин [[1*]].— *Ред.*).

заключаем, что для каждого $u_0$ с $\|u_0\| = 1$ существует *вещественно-линейная* форма $g[u]$ на $\mathrm{X}$ такая, что

$$g[u_0] = 1 \quad \text{и} \quad g[u] < 1 \quad \text{для} \quad u \in \mathrm{S}. \tag{2.30}$$

Вещественная линейность формы $g$ означает, что $g$ принимает вещественные значения и $g[\alpha u + \beta v] = \alpha g[u] + \beta g[v]$ для всех $u$, $v \in \mathrm{X}$ и всех вещественных $\alpha$ и $\beta$.

Форма $g$ не является ни линейной, ни полулинейной на *комплексном* векторном пространстве $\mathrm{X}$. Существует, однако, функционал $f \in \mathrm{X}^*$, связанный с $g$ соотношением[1])

$$(f, u) = f[u] = g[u] + ig[iu]. \tag{2.31}$$

Так как аддитивность $f$ очевидна, то для доказательства полулинейности $f$ достаточно установить равенство $f[(\alpha + i\beta)u] = (\alpha - i\beta) f[u]$ для вещественных $\alpha$ и $\beta$. Оно доказывается так:

$$\begin{aligned} f[(\alpha + i\beta)u] &= g[\alpha u + i\beta u] + ig[i\alpha u - \beta u] = \\ &= \alpha g[u] + \beta g[iu] + i\alpha g[iu] - i\beta g[u] = \\ &= (\alpha - i\beta)(g[u] + ig[iu]) = (\alpha - i\beta) f[u]. \end{aligned}$$

Построенная форма $f$ имеет следующие свойства:

$$(f, u_0) = 1, \quad \|f\| = 1. \tag{2.32}$$

Действительно, положим $(f, u) = Re^{i\theta}$, где $\theta$ вещественно и $R \geqslant 0$. Как только что было показано, $(f, e^{i\theta}u) = e^{-i\theta}(f, u) = R$ и, следовательно, $|(f, u)| = R = \mathrm{Re}\,(f, e^{i\theta}u) = g[e^{i\theta} \cdot u] < 1$, если $\|e^{i\theta}u\| = \|u\| < 1$. Отсюда видно, что $\|f\| \leqslant 1$. В частности, $|(f, u_0)| \leqslant 1$. Но поскольку $\mathrm{Re}\,(f, u_0) = g[u_0] = 1$, то $(f, u_0) = 1$ и $\|f\| = 1$.

Заметим, что свойства (2.32) эквивалентны свойствам (2.27) ввиду однородности нормы.

## 6. Второе сопряженное

Пространство $\mathrm{X}^{**}$, сопряженное к $\mathrm{X}^*$, есть совокупность полулинейных форм на $\mathrm{X}^*$. Примером такой формы является всякий функционал вида $F(f) = \overline{(f, u)}$, где $u$ — фиксированный вектор из $\mathrm{X}$. Таким образом, каждому $u \in \mathrm{X}$ сопоставлен некоторый элемент $F \in \mathrm{X}^{**}$. Это отображение *линейно*, ибо если векторам $u$ и $v$ соответствуют векторы $F$ и $G$, то вектору $\alpha u + \beta v$ соответствует вектор $\alpha F + \beta G$. Из того факта, что $\dim \mathrm{X}^{**} = \dim \mathrm{X}^* = \dim \mathrm{X}$, следует, что образом этого отображения будет все пространство $\mathrm{X}^{**}$; другими словами, каждому элементу $F \in \mathrm{X}^{**}$ отвечает некоторый вектор $u \in \mathrm{X}$. Далее, если $\mathrm{X}$, а значит и $\mathrm{X}^*$, $\mathrm{X}^{**}$ —нормированные пространства. то норма в $\mathrm{X}^{**}$

---

[1]) $i$ — мнимая единица.

совпадает с нормой в X: $\|F\| = \|u\|$; это вытекает из (2.26). Таким образом, X** можно *отождествить* с X не только как векторное, но и как нормированное пространство. В этом смысле мы можем записать $F[f]$ как $u[f] = (u, f)$, так что

$$(u, f) = \overline{(f, u)}. \tag{2.33}$$

Стоит отметить, что при отождествлении X и X** мы существенно использовали конечномерность X.

**Задача** 2.9. Если $\{e_j\}$ — базис в X*, сопряженный к базису $\{x_j\}$ в X, то $\{x_j\}$ — базис в X** = X, сопряженный к $\{e_j\}$.

Мы пишем $f \perp u$ или $u \perp f$, если $(f, u) = 0$. Если $f \perp u$ для всех $u$ из некоторого подмножества $\mathrm{S} \subset \mathrm{X}$, мы пишем $f \perp \mathrm{S}$. Аналогично вводится обозначение $u \perp \mathrm{S}'$ для $u \in \mathrm{X}$ и $\mathrm{S}' \subset \mathrm{X}^*$. Множество всех $f \in \mathrm{X}^*$ таких, что $f \perp \mathrm{S}$, называется *аннулятором* S и обозначается через $\mathrm{S}^\perp$. Аналогично, аннулятор $\mathrm{S}'^\perp$ подмножества $\mathrm{S}' \subset \mathrm{X}^*$ есть совокупность всех таких $u \in \mathrm{X}$, что $u \perp \mathrm{S}'$.

Для любого подмножества $\mathrm{S} \subset \mathrm{X}$ его аннулятор $\mathrm{S}^\perp$ является линейным подпространством. *Аннулятор* $\mathrm{S}^{\perp\perp}$ множества $\mathrm{S}^\perp$ *совпадает с линейной оболочкой множества* S. В частности, $\mathrm{M}^{\perp\perp} = \mathrm{M}$ для любого линейного подпространства M в X.

**Задача** 2.10. $\operatorname{codim} \mathrm{M} = \dim \mathrm{M}^\perp$.

## § 3. Линейные операторы

### 1. Определения. Матричные представления

Пусть X и Y — векторные пространства. Отображение $T$, сопоставляющее каждому вектору $u$ из X некоторый вектор $v = Tu$ из Y, называется *линейным отображением* или *линейным оператором* из X в Y, если $T$ сохраняет линейные соотношения, т. е. если

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T u_1 + \alpha_2 T u_2 \tag{3.1}$$

для всех $u_1, u_2 \in \mathrm{X}$ и всех скаляров $\alpha_1$ и $\alpha_2$. Пространство X называется *областью определения*, а Y — *пространством значений*. Если Y = X, мы говорим, что $T$ — линейный оператор *в* X. *В этой книге термин оператор означает линейный оператор, если не оговорено противное.*

Для любого подмножества S в X множество всех векторов вида $Tu$ с $u \in \mathrm{S}$ называется *образом* S относительно $T$ и обозначается через $T\mathrm{S}$. Если M — линейное подпространство в X, то $T\mathrm{M}$ — линейное подпространство в Y. В частности, линейное подпространство $T\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ называется *образом* $T$ и обозначается через

$\mathrm{R}(T)$. Размерность подпространства $\mathrm{R}(T)$ называется *рангом* оператора $T$ и обозначается $\operatorname{rank} T$. Коразмерность $\mathrm{R}(T)$ в $\mathrm{Y}$ называется *дефектом* оператора $T$ и обозначается $\operatorname{def} T$. Таким образом,

$$\operatorname{rank} T + \operatorname{def} T = \dim \mathrm{Y}. \tag{3.2}$$

Для любого подмножества $\mathrm{S}'$ в $\mathrm{Y}$ множество всех векторов $u \in \mathrm{X}$ таких, что $Tu \in \mathrm{S}'$, называется *прообразом* $\mathrm{S}'$ и обозначается через $T^{-1}\mathrm{S}'$. Прообраз нуля в $\mathrm{Y}$ есть линейное подпространство в $\mathrm{X}$; оно называется *ядром*[1] или *нуль-пространством* оператора $T$ и обозначается через $\mathrm{N}(T)$. Размерность ядра мы обозначаем символом $\operatorname{nul} T$. Имеем

$$\operatorname{rank} T + \operatorname{nul} T = \dim \mathrm{X}. \tag{3.3}$$

Для доказательства достаточно заметить, что $T$ взаимно однозначно отображает факторпространство $\mathrm{X}/\mathrm{N}(T)$ (имеющее размерность $\dim \mathrm{X} - \operatorname{nul} T$) на $\mathrm{R}(T)$.

Если $\operatorname{nul} T = \operatorname{def} T = 0$, то $T$ отображает $\mathrm{X}$ на $\mathrm{Y}$ взаимно однозначно. В этом случае существует всюду определенный *обратный оператор* $T^{-1}$; это оператор из $\mathrm{Y}$ в $\mathrm{X}$, переводящий $Tu$ в $u$. Очевидно, что $(T^{-1})^{-1} = T$. Оператор $T$ называется *невырожденным*, если $T^{-1}$ существует и всюду определен, и *вырожденным* — в противном случае. Для невырожденности $T$ необходимо, чтобы $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{Y}$. Если $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{Y}$, то условия $\operatorname{nul} T = 0$ и $\operatorname{def} T = 0$ эквивалентны и, следовательно, каждое из них влечет невырожденность оператора $T$.

Пусть $\{x_k\}$ — некоторый базис в $\mathrm{X}$. Каждый вектор $u \in \mathrm{X}$ имеет представление вида (1.1), так что

$$Tu = \sum_{k=1}^{N} \xi_k T x_k, \quad N = \dim \mathrm{X}. \tag{3.4}$$

Таким образом, оператор $T$ из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$ определяется своими значениями $Tx_k$, $k = 1, \ldots, N$. Обратно, можно произвольно задать эти значения в $\mathrm{Y}$, а затем определить оператор $T$ по линейности (т. е. по формуле (3.4)).

Если $\{y_j\}$ — базис в $\mathrm{Y}$, то каждый вектор $Tx_k$ представим в виде

$$Tx_k = \sum_{j=1}^{M} \tau_{jk} y_j, \quad M = \dim \mathrm{Y}. \tag{3.5}$$

Подставляя (3.5) в (3.4), видим, что координаты $\eta_j$ вектора $v = Tu$ относительно базиса $\{y_j\}$ выражаются через координаты $\xi_k$ вектора $u$ относительно базиса $\{x_k\}$ по формуле

$$\eta_j = \sum_{k} \tau_{jk} \xi_k, \quad j = 1, \ldots, M. \tag{3.6}$$

---

[1] Начиная с гл. III термин «ядро» будет использоваться и в другом смысле.— *Прим. перев.*

Таким образом, оператор $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ представляется $M \times N$-матрицей $(\tau_{jk})$ относительно базисов $\{x_k\}$ и $\{y_j\}$ в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответственно. Обратно, каждой $M \times N$-матрице $(\tau_{jk})$ отвечает оператор $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, представляемый ею при заданных базисах. .

Пусть $(\tau'_{jk})$ — матрица, представляющая тот же самый оператор $T$, но относительно новой пары базисов $\{x'_k\}$ и $\{y'_j\}$. Связь между матрицами $(\tau'_{jk})$ и $(\tau_{jk})$ получается комбинированием формулы (3.5) и формул (1.2) и (1.4) для координатных преобразований. В результате получаем

$$\tau'_{jk} = \sum_{i,h} \gamma'_{ji} \tau_{ih} \hat{\gamma}_{hk}. \tag{3.7}$$

Итак, матрица $(\tau'_{jk})$ есть произведение трех матриц: $(\gamma'_{jk})$, $(\tau_{jk})$ и $(\hat{\gamma}_{jk})$.

Если $T$ — оператор в $\mathbf{X}$, то естественно положить $y_j = x_j$ и $y'_j = x'_j$; в таком случае имеем

$$(\tau'_{jk}) = (\gamma_{jk})(\tau_{jk})(\hat{\gamma}_{jk}). \tag{3.8}$$

Из (1.6) следует, что

$$\det(\tau'_{jk}) = \det(\tau_{jk}). \tag{3.9}$$

Таким образом, число $\det(\tau_{jk})$ определяется самим оператором $T$ и не зависит от выбора базиса. Оно называется *детерминантом* оператора $T$ и обозначается $\det T$. Аналогично, след $\sum \tau_{jj}$ матрицы $(\tau_{jk})$ не зависит от выбора базиса; он называется *следом* оператора $T$ и обозначается $\operatorname{tr} T$.

**Задача 3.1.** Если $\{f_j\}$ — базис в $\mathbf{Y}^*$, сопряженный к базису $\{y_j\}$ в $\mathbf{Y}$, то

$$\tau_{jk} = (Tx_k, f_j). \tag{3.10}$$

**Задача 3.2.** Пусть $\{x_j\}$ и $\{e_j\}$ — сопряженные базисы в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}^*$ соответственно. Если $T$ — оператор в $\mathbf{X}$, то

$$\operatorname{tr} T = \sum_j (Tx_j, e_j). \tag{3.11}$$

## 2. Линейные операции над операторами

Если $T$ и $S$ — линейные операторы из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, то их линейная комбинация $\alpha T + \beta S$ определяется формулой

$$(\alpha S + \beta T) u = \alpha (Su) + \beta (Tu), \quad u \in \mathbf{X}, \tag{3.12}$$

и также является линейным оператором из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$. Обозначим через $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ множество всех операторов из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$; $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ с определенными выше линейными операциями есть векторное пространство. Нулевой вектор этого векторного пространства есть нулевой оператор 0, определяемый формулой $0u = 0$ для всех $u \in \mathbf{X}$.

**Задача 3.3.** $\operatorname{rank}(S + T) \leqslant \operatorname{rank} S + \operatorname{rank} T$.

Размерность векторного пространства $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ равна $NM$, где $N = \dim \mathbf{X}$ и $M = \dim \mathbf{Y}$. Действительно, выберем базисы $\{x_k\}$ и $\{y_j\}$ в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответственно и введем операторы $P_{jk}$ по формуле

$$P_{jk}x_h = \delta_{kh}y_j, \quad k, h = 1, \ldots, N, \quad j = 1, \ldots, M. \tag{3.13}$$

Эти $MN$ операторов суть линейно независимые элементы из $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$; в силу (3.5) имеем

$$T = \sum \tau_{jk}P_{jk}. \tag{3.14}$$

Таким образом, $\{P_{jk}\}$ — базис в $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, чем и доказано наше утверждение. Базис $\{P_{jk}\}$ назовем базисом в $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, ассоциированным с базисами $\{x_k\}$ и $\{y_j\}$ в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Формула (3.14) показывает, что матричные элементы $\tau_{jk}$ суть координаты «вектора» $T$ относительно базиса $\{P_{jk}\}$, а (3.7) или (3.8) — формулы координатных преобразований в $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Произведение $TS$ линейных операторов $T$ и $S$ определяется формулой

$$(TS)u = T(Su) \quad (u \in \mathbf{X}), \tag{3.15}$$

где $\mathbf{X}$ — область определения оператора $S$, причем область определения $T$ совпадает с пространством значений $\mathbf{Y}$ оператора $S$. Справедливы следующие соотношения [1]:

$$\begin{aligned}(TS)R &= T(SR) \equiv TSR,\\ (\alpha T)S &= T(\alpha S) = \alpha(TS) \equiv \alpha TS,\\ (T_1 + T_2)S &= T_1S + T_2S,\\ T(S_1 + S_2) &= TS_1 + TS_2.\end{aligned} \tag{3.16}$$

**Задача 3.4.** $\operatorname{rank}(TS) \leqslant \max(\operatorname{rank} T, \operatorname{rank} S)$.

**Задача 3.5.** Если операторы $S$ и $T$ относительно некоторых базисов имеют матрицы $(\sigma_{jk})$ и $(\tau_{jk})$, то $S + T$ и $TS$ имеют матрицы $(\sigma_{jk}) + (\tau_{jk})$ и $(\tau_{jk})(\sigma_{jk})$ соответственно. Если существует оператор $T^{-1}$, то его матрица есть матрица, обратная к $(\tau_{jk})$.

## 3. Алгебра линейных операторов

Если $S$ и $T$ — операторы в $\mathbf{X}$, то определено их произведение $TS$ и оно снова есть оператор в $\mathbf{X}$. Таким образом, множество $\mathscr{B}(\mathbf{X}) = \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ всех линейных операторов в $\mathbf{X}$ является

---

[1] $\equiv$ означает «обозначается через».— *Прим. ред.*

не только векторным пространством, но и *алгеброй*. Алгебра $\mathscr{B}(X)$ *не коммутативна*, если $\dim X \geqslant 2$, так как, вообще говоря, $ST \neq TS$. Если $TS = ST$, то говорят, что операторы $T$ и $S$ *коммутируют*. Имеем $T0 = 0T = 0$ и $T1 = 1T = T$ для каждого $T \in \mathscr{B}(X)$; здесь $1$ обозначает *тождественный оператор*, определяемый формулой $1u = u$, $u \in X$. Таким образом, $1$ есть *единичный элемент* [1]) алгебры $\mathscr{B}(X)$. Операторы вида $\alpha 1$ называются *скалярными* [2]) и по записи не будут отличаться от скаляров $\alpha$. Скалярный оператор коммутирует с каждым оператором из $\mathscr{B}(X)$.

Мы пишем $TT = T^2$, $TTT = T^3$ и т. д. и полагаем $T^0 = 1$ по определению. Имеем

$$T^m T^n = T^{m+n}, \quad (T^m)^n = T^{mn}, \quad m, n = 1, 2, \ldots . \tag{3.17}$$

Для каждого многочлена $p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_n z^n$ определим оператор

$$p(T) = \alpha_0 + \alpha_1 T + \ldots + \alpha_n T^n. \tag{3.18}$$

Отображение $p(z) \to p(T)$ есть *гомоморфизм* алгебры многочленов в $\mathscr{B}(X)$; это означает, что равенства $p(z) + q(z) = r(z)$, $p(z)\, q(z) = r(z)$ остаются справедливыми при замене $z$ на $T$. В частности, $p(T)$ и $q(T)$ коммутируют.

Задача 3.6. Операторы $P_{jk}$, определенные формулой (3.13), в случае $Y = X$ и $y_j = x_j$ удовлетворяют соотношениям

$$P_{jk} P_{ih} = \delta_{ki} P_{jh}, \quad j, k, i, h = 1, \ldots, N. \tag{3.19}$$

Задача 3.7. Положим $R_n = R(T^n)$ и $N_n = N(T^n)$, $n = 0, 1, \ldots$. Последовательность $\{R_n\}$ не возрастает, а последовательность $\{N_n\}$ не убывает. Существует неотрицательное целое число $m \leqslant \dim X$, такое, что $R_n \neq R_{n+1}$ для $n < m$ и $R_n = R_{n+1}$ для $n \geqslant m$.

Если оператор $T \in \mathscr{B}(X)$ невырожден, то

$$TT^{-1} = T^{-1}T = 1. \tag{3.20}$$

Если $T$ имеет *левый обратный* $T'$ (т. е. такой оператор $T' \in \mathscr{B}(X)$, что $T'T = 1$), то $\operatorname{nul} T = 0$, так как $Tu = 0$ влечет $u = T'Tu = 0$. Если $T$ имеет *правый обратный* $T''$ (т. е. $TT'' = 1$), то $T$ имеет нулевой дефект, так как каждый вектор $u \in X$ имеет вид $TT''u$ и, следовательно, принадлежит $R(T)$. В рассматриваемом нами конечномерном случае из существования любого из односторонних обратных для $T$ следуют невырожденность $T$ и равенство $T' = T^{-1}$ или $T'' = T^{-1}$.

---

[1]) Заметим, что $1 \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\dim X \geqslant 1$.

[2]) Не следует смешивать это понятие с понятием скалярного оператора в теории Данфорда спектральных операторов (см. Данфорд [1]).

Если $S$ и $T$ — невырожденные операторы, то и произведение $TS$ невырождено и

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}. \tag{3.21}$$

Для невырожденного $T$ отрицательные степени $T^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$, можно определить по формуле $T^{-n} = (T^{-1})^n$. При этом формула (3.17) верна для всех целых $m$ и $n$.

Следующие соотношения для детерминантов и следов непосредственно вытекают из задачи 3.5:

$$\begin{aligned} &\det TS = (\det T)(\det S), \\ &\mathrm{tr}\,(\alpha T + \beta S) = \alpha\,\mathrm{Tr}\,T + \beta\,\mathrm{tr}\,S, \\ &\mathrm{tr}\,ST = \mathrm{tr}\,TS. \end{aligned} \tag{3.22}$$

**Задача 3.8.** Последняя из формул (3.22) верна даже для $S \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $T \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, если только $ST \in \mathscr{B}(\mathbf{Y})$ и $TS \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$.

## 4. Проекторы. Нильпотентные операторы

Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — (взаимно) *дополнительные* линейные подпространства в $\mathbf{X}$; это значит, что

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{N} \tag{3.23}$$

(см. п. 1.3). Каждый вектор $u \in \mathbf{X}$ однозначно представим в виде $u = u' + u''$, где $u' \in \mathbf{M}$ и $u'' \in \mathbf{N}$. Вектор $u'$ называется *проекцией* $u$ *на* $\mathbf{M}$ *параллельно* $\mathbf{N}$. Если $v = v' + v''$, где $v' \in \mathbf{M}$, $v'' \in \mathbf{N}$, то $\alpha u' + \beta v'$ есть проекция на $\mathbf{M}$ параллельно $\mathbf{N}$ вектора $\alpha u + \beta v$. Положим $u' = Pu$; ясно, что $P$ — линейный оператор в $\mathbf{X}$. Он называется *оператором проектирования* (или просто *проектором*) *на* $\mathbf{M}$ *параллельно* $\mathbf{N}$. Оператор $1 - P$ есть проектор на $\mathbf{N}$ параллельно $\mathbf{M}$. Равенство $Pu = u$ имеет место тогда и только тогда, когда $u \in \mathbf{M}$; $Pu = 0$ тогда и только тогда, когда $u \in \mathbf{N}$. Образ оператора $P$ есть $\mathbf{M}$, а ядро — $\mathbf{N}$. Удобно писать $\dim P$ вместо $\dim \mathbf{M} = \dim \mathbf{R}(P)$. Так как $Pu \in \mathbf{M}$ для каждого $u \in \mathbf{X}$, то $PPu = Pu$, т. е. $P$ — *идемпотент*:

$$P^2 = P. \tag{3.24}$$

Обратно, любой идемпотентный оператор $P$ является проектором. Действительно, положим $\mathbf{M} = \mathbf{R}(P)$ и $\mathbf{N} = \mathbf{R}(1 - P)$. Если $u' \in \mathbf{M}$, то $u' = Pu$ для некоторого $u$ и, следовательно, $Pu' = P^2u = Pu = u'$. Если $u'' \in \mathbf{N}$, то $Pu'' = 0$, поэтому $u \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ влечет $u = Pu = 0$, что дает $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = 0$. Каждый вектор $u \in \mathbf{X}$ допускает представление в виде $u' + u''$, где $u' = Pu \in \mathbf{M}$ и $u'' = (1 - P)\,u \in \mathbf{N}$. Итак, $P$ есть проектор на $\mathbf{M}$ параллельно $\mathbf{N}$.

**Задача 3.9.** Если $P$ — проектор, то

$$\mathrm{tr}\,P = \dim P \tag{3.25}$$

Приведенные выше результаты можно распространить на случай нескольких линейных подпространств $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_s$ таких, что

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{M}_s. \tag{3.26}$$

Каждый вектор $u \in \mathbf{X}$ однозначно представим в виде $u_1 + \ldots + u_s$, $u_j \in \mathbf{M}_j$, $j = 1, \ldots, s$. Оператор $P_j$, определенный формулой $P_j u = u_j$, есть проектор на $\mathbf{M}_j$ параллельно $\mathbf{N}_j = \mathbf{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{M}_{j-1} \oplus \mathbf{M}_{j+1} \oplus \ldots \oplus \mathbf{M}_s$. Далее, имеем

$$\sum P_j = 1, \tag{3.27}$$

$$P_k P_j = \delta_{jk} P_j. \tag{3.28}$$

Обратно, пусть $P_1, \ldots, P_s$ — операторы, удовлетворяющие условиям (3.27) и (3.28) [1]. Если положить $\mathbf{M}_j = \mathbf{R}(P_j)$, то, как легко видеть, выполнено (3.26) и операторы $P_j$, $j = 1, \ldots, s$, совпадают с проекторами, построенными по разложению (3.26). Рассмотрим, в частности, случай $s = 3$ и положим $P = P_1 + P_2$. Тогда $P_1 = P_1 P = P P_1 = P P_1 P$; $P_1$ есть проектор, коммутирующий с $P$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{R}(P_1) \subset \mathbf{R}(P)$. Такой проектор $P_1$ назовем *подпроектором* для $P$ (*собственным* подпроектором, если кроме того $P_1 \neq P$); обозначение: $P_1 \leqslant P$.

Базис $\{x_j\}$ в $\mathbf{X}$ называется *присоединенным* к разложению (3.26), если несколько первых элементов базиса принадлежат $\mathbf{M}_1$, несколько последующих принадлежат $\mathbf{M}_2$ и т. д. Относительно такого базиса каждый оператор $P_j$ представляется диагональной матрицей, диагональными элементами которой являются нули и единицы, причем число единиц равно $\dim \mathbf{M}_j$. Обратно, каждая такая матрица представляет проектор.

Для каждого линейного подпространства $\mathbf{M}$ в конечномерном пространстве $\mathbf{X}$ существует дополнительное подпространство $\mathbf{N}$ (такое, что выполнено (3.23)). Таким образом, для каждого линейного подпространства существует проектор на него. Однако такой проектор не единствен.

Линейный оператор $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ называется *нильпотентным оператором*, или *нильпотентом*, если $T^n = 0$ для некоторого натурального $n$. Нильпотентный оператор всегда вырожден.

Рассмотрим подробнее строение нильпотентного оператора. Пусть $n$ таково, что $T^n = 0$, но $T^{n-1} \neq 0$ (мы предполагаем, что $\dim \mathbf{X} = N > 0$). Тогда $\mathbf{R}(T^{n-1}) \neq 0$; пусть $\{x_1^1, \ldots, x_{p_1}^1\}$ — базис в $\mathbf{R}(T^{n-1})$. Каждый вектор $x_i^1$ имеет вид $x_i^1 = T^{n-1} x_i^n$ для некото-

---

[1] Такой набор иногда называют полным ортогональным семейством проекторов. Мы не будем пользоваться этим термином, чтобы избежать возможной путаницы с понятием системы ортогональных проекторов в гильбертовом пространстве.

рого $x_i^n \in \mathrm{X}$, $i=1, \ldots, p_1$. Если $n>1$, то положим $T^{n-2}x_i^n = x_i^2$, так что $Tx_i^2 = x_i^1$. Векторы $x_i^k$, $k=1, 2$, $i=1, \ldots, p_1$, принадлежат $\mathrm{R}(T^{n-2})$ и линейно независимы; действительно, применяя оператор $T$ к обеим частям равенства $\sum(\alpha_i x_i^2 + \beta_i x_i^1) = 0$, получаем $\sum \alpha_i x_i^1 = 0$; следовательно, все $\alpha_i = 0$ и $\sum \beta_i x_i^1 = 0$, откуда все $\beta_i = 0$. Расширим семейство $\{x_i^k\}$ до базиса в $\mathrm{R}(T^{n-2})$, добавляя в случае надобности новые векторы $x_{p_1+1}^2, \ldots, x_{p_2}^2$; при этом можно считать, что $Tx_i^2 = 0$ при $i > p_1$.

Если $n>2$, то совершенно аналогично делаем следующий шаг. В итоге получаем базис $\{x_j^k\}$ в $\mathrm{X}$ со следующими свойствами: $k=1, \ldots, n$, $j=1, \ldots, p_k$, $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots \leqslant p_n$,

$$Tx_j^k = \begin{cases} x_j^{k-1}, & 1 \leqslant j \leqslant p_{k-1}, \\ 0, & p_{k-1}+1 \leqslant j \leqslant p_k; \end{cases} \tag{3.29}$$

здесь $p_0 = 0$.

Если базисные векторы $x_j^k$ упорядочить следующим образом: $\{x_1^1, \ldots, x_1^n, x_2^1, \ldots, x_2^n, \ldots\}$, то матрица оператора $T$ в этом базисе примет вид

$$\left(\begin{array}{c:c:c}
\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array} & & \\ \hdashline
& \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{array} & \\ \hdashline
& & \\
\end{array}\right)$$

(все неуказанные элементы равны нулю).

**Задача 3.10.** Если оператор $T$ нильпотентен, то $T^N = 0$ для $N = \dim \mathrm{X}$.

**Задача 3.11.** Если оператор $T$ нильпотентен, то $\operatorname{tr} T = 0$ и $\det(1+T) = 1$.

## 5. Инвариантность. Разложение

Линейное подпространство M называется *инвариантным* относительно оператора $T \in \mathscr{B}(X)$, если $TM \subset M$. В этом случае $T$ индуцирует линейный оператор $T_M$ в M, определяемый формулой $T_M u = Tu$, $u \in M$. Оператор $T_M$ называется *частью* оператора $T$ в M.

Задача 3.12. Подпространства $R_n = R(T^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, инвариантны относительно $T$. Пусть $m$ — число, определенное в задаче 3.7. Тогда часть оператора $T$ в $R_n$ вырождена, если $n < m$, и невырождена, если $n \geqslant m$.

Задача 3.13. Если M инвариантно относительно $T$, то M инвариантно относительно $p(T)$ для любого многочлена $p(z)$ и, кроме того, $p(T)_M = p(T_M)$.

Если для оператора $T$ существуют инвариантные линейные многообразия M и N такие, что $X = M \oplus N$, то говорят, что $T$ *приводится* парой M, N. Вообще оператор $T$ приводится семейством линейных подпространств $M_1, \ldots, M_s$, если выполнено (3.26) и каждое $M_j$ инвариантно относительно $T$ (иногда мы будем в этом случае говорить, что $T$ допускает *разложение*, соответствующее разложению (3.26)). При этом $T$ полностью определяется своими частями $T_{M_j}$, $j = 1, \ldots, s$. Оператор $T$ называется *прямой суммой* операторов $T_{M_j}$. Он коммутирует с каждым оператором $P_j$ из семейства проекторов, соответствующего разложению (3.26). В самом деле, $P_j u \in M_j$, $TP_j u \in M_j$ и $P_k T P_j u = \delta_{jk} T P_j u$; суммируя последние равенства по $j = 1, \ldots, s$, получаем $P_k T u = TP_k u$, или $TP_k = P_k T$. Как легко видеть, верно и обратное, т. е. что оператор $T$ приводится семейством $M_1, \ldots, M_s$, если $T$ коммутирует с каждым $P_j$.

В базисе $\{x_j\}$, присоединенном к разложению (3.26), оператор $T$ представляется матрицей, у которой ненулевые элементы имеются лишь в $s$ подматрицах вдоль главной диагонали (эти подматрицы являются матрицами операторов $T_{M_j}$). Таким образом, матрица оператора $T$ есть прямая сумма матриц операторов $T_{M_j}$.

Задача 3.14. Доказать, что, во введенных выше обозначениях,

$$\det T = \prod_j \det T_{M_j}, \quad \operatorname{tr} T = \sum_j \operatorname{tr} T_{M_j}. \tag{3.31}$$

**Замечание 3.15.** Оператор $P_j T = TP_j = P_j T P_j$ на векторах из $M_j$ совпадает с $T$, а также $T_{M_j}$ и потому отождествляется с $T_{M_j}$ в тех случаях, когда это не приводит к недоразумениям.

## 6. Сопряженный оператор

Пусть $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Для каждого $g \in \mathbf{Y}^*$ скалярное произведение $(g, Tu)$, $u \in \mathbf{X}$, является полулинейной формой на $\mathbf{X}$ и, следовательно, может быть записано в виде $f[u] = (f, u)$, где $f \in \mathbf{X}^*$. Определим отображение $T^*$ из $\mathbf{Y}^*$ в $\mathbf{X}^*$, положив $f = T^*g$. Таким образом, равенство

$$(T^*g, u) = (g, Tu), \quad g \in \mathbf{Y}^*, \quad u \in \mathbf{X}, \tag{3.32}$$

можно рассматривать как определение отображения $T^*$. Это отображение есть линейный оператор из $\mathbf{Y}^*$ в $\mathbf{X}^*$. Действительно, для каждого $u \in \mathbf{X}$ имеем $(T^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2), u) = (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2, Tu) = \alpha_1 (g_1, Tu) + \alpha_2 (g_2, Tu) = \alpha_1 (T^*g_1, u) + \alpha_2 (T^*g_2, u) = (\alpha_1 T^*g_1 + \alpha_2 T^*g_2, u)$ и поэтому $T^*(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2) = \alpha_1 T^*g_1 + \alpha_2 T^*g_2$. Оператор $T^*$ называется *сопряженным* к $T$.

Операция сопряжения обладает следующими свойствами:

$$(\alpha S + \beta T)^* = \bar{\alpha} S^* + \bar{\beta} T^*, \quad (TS)^* = S^*T^*. \tag{3.33}$$

Во второй из формул (3.33) предполагается, что $T \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$ и $S \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, при этом оператор $TS$ имеет смысл и принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$; отметим, что $S^* \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$, $T^* \in \mathscr{B}(\mathbf{Z}^*, \mathbf{Y}^*)$ и $S^*T^* \in \mathscr{B}(\mathbf{Z}^*, \mathbf{X}^*)$. Доказательства формул (3.33) просты; например, вторая формула следует из цепочки равенств

$$((TS)^*h, u) = (h, TSu) = (T^*h, Su) = (S^*T^*h, u),$$

справедливых для всех $h \in \mathbf{Z}^*$ и $u \in \mathbf{X}$.

Задача 3.16. Доказать, что $0^* = 0$ и $1^* = 1$ (нуль в левой части первого равенства есть нулевой оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, а нуль справа—нулевой оператор из $\mathbf{Y}^*$ в $\mathbf{X}^*$; аналогичное соглашение используется во втором равенстве, где, кроме того, предполагается, что $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$).

Если $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, то $T^* \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$ и $T^{**} \in \mathscr{B}(\mathbf{X}^{**}, \mathbf{Y}^{**})$. Отождествляя $\mathbf{X}^{**}$ и $\mathbf{Y}^{**}$ с $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответственно (см. п. 2.6), получаем из (3.32), что

$$T^{**} = T. \tag{3.34}$$

Выбрав базисы $\{x_k\}$ и $\{y_j\}$ в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, представим оператор $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ матрицей $(\tau_{jk})$. Относительно сопряженных базисов $\{e_k\}$ и $\{f_j\}$ в $\mathbf{X}^*$ и $\mathbf{Y}^*$ соответственно оператор $T^*$ представляется матрицей $(\tau^*_{kj})$. Согласно (3.10) матричные элементы операторов $T$ и $T^*$ вычисляются по формулам $\tau_{jk} = (T_{x_k}, f_j)$, $\tau^*_{kj} = (T^*f_j, x_k) = (f_j, Tx_k)$. Поэтому

$$\tau^*_{kj} = \bar{\tau}_{jk}, \quad \begin{matrix} k = 1, \ldots, N = \dim \mathbf{X}, \\ j = 1, \ldots, M = \dim \mathbf{Y}, \end{matrix} \tag{3.35}$$

и мы заключаем, что операторы $T$ и $T^*$ представляются взаимно *сопряженными* (эрмитово сопряженными) матрицами относительно сопряженных базисов.

Задача 3.17. Если $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, то

$$\det T^* = \overline{\det T}, \quad \operatorname{tr} T^* = \overline{\operatorname{tr} T}. \tag{3.36}$$

Пусть $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Элемент $g \in \mathrm{Y}^*$ содержится в аннуляторе подпространства $\mathrm{R}(T)$ тогда и только тогда, когда $(g, Tu) = 0$ для всех $u \in \mathrm{X}$. Отсюда и из (3.32) следует, что $T^*g = 0$. Таким образом, *аннулятор образа оператора $T$ совпадает с ядром оператора $T^*$* и, как следует из (3.34), то же самое верно, если $T$ и $T^*$ поменять местами. Итак,

$$\mathrm{N}(T^*) = \mathrm{R}(T)^{\perp}, \quad \mathrm{N}(T) = \mathrm{R}(T^*)^{\perp}. \tag{3.37}$$

Отсюда вытекает (см. (3.2), (3.3) и (2.17)), что

$$\operatorname{nul} T^* = \operatorname{def} T, \quad \operatorname{nul} T = \operatorname{def} T^*, \quad \operatorname{rank} T^* = \operatorname{rank} T. \tag{3.38}$$

Если, в частности, $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, то из (3.38) следует, что оператор $T^*$ невырожден тогда и только тогда, когда оператор $T$ невырожден; в этом случае имеем

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*. \tag{3.39}$$

Для доказательства достаточно заметить, что $T^*(T^{-1})^* = (T^{-1}T)^* = 1^* = 1$.

Задача 3.18. Для всякого $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$

$$\operatorname{nul} T^* = \operatorname{nul} T, \quad \operatorname{def} T^* = \operatorname{def} T. \tag{3.40}$$

Если $P \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ — проектор, то и сопряженный оператор $P^* \in \mathscr{B}(\mathrm{X}^*)$ — проектор, так как из $P^2 = P$ следует $P^{*2} = P^*$. Разложения

$$\mathrm{X} = \mathrm{M} \oplus \mathrm{N}, \quad \mathrm{M} = \mathrm{R}(P), \quad \mathrm{N} = \mathrm{R}(1 - P), \tag{3.41}$$

$$\mathrm{X}^* = \mathrm{M}^* \oplus \mathrm{N}^*, \quad \mathrm{M}^* = \mathrm{R}(P^*), \quad \mathrm{N}^* = \mathrm{R}(1 - P^*) \tag{3.42}$$

пространств $\mathrm{X}$ и $\mathrm{X}^*$ связаны друг с другом соотношениями

$$\begin{aligned} \mathrm{N}^* &= \mathrm{M}^{\perp}, \quad \dim \mathrm{M}^* = \dim \mathrm{M}, \\ \mathrm{M}^* &= \mathrm{N}^{\perp}, \quad \dim \mathrm{N}^* = \dim \mathrm{N}, \end{aligned} \tag{3.43}$$

как это видно из (3.37) и (3.40).

Аналогичные результаты справедливы и для семейства проекторов. Если $\{P_j\}$ — множество проекторов в $\mathrm{X}$, удовлетворяющих условиям (3.27) — (3.28), то и семейство проекторов $\{P_j^*\}$ в $\mathrm{X}^*$ удовлетворяет этим условиям. Многообразия $\mathrm{M}_j = \mathrm{R}(P_j)$, $\mathrm{M}_j^* =$

$= \mathbf{R}\,(P_j^*)$ связаны соотношениями

$$\dim \mathbf{M}_j^* = \dim \mathbf{M}_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{3.44}$$

$$\mathbf{M}_1^* = (\mathbf{M}_2 \oplus \ldots)^{\perp}, \quad \mathbf{M}_1^{\perp} = (\mathbf{M}_2^* \oplus \ldots)^{\perp} \quad \text{и т. д.} \tag{3.45}$$

**Задача 3.19.** Пусть $\{x_j\}$ — базис в $\mathbf{X}$, присоединенный к разложению $\mathbf{X} = \mathbf{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{M}_s$, и $\{e_j\}$ — сопряженный базис в $\mathbf{X}^*$. Базис $\{e_j\}$ присоединен к разложению $\mathbf{X}^* = \mathbf{M}_1^* \oplus \ldots \oplus \mathbf{M}_s^*$. Для любого $u \in \mathbf{X}$ имеем

$$P_j u = \sum_{r=1}^{m_j} (u,\ e_{j_r})\, x_{j_r}, \tag{3.46}$$

где $\{x_{j_1}, \ldots, x_{jm_j}\}$ — часть базиса $\{x_j\}$, содержащаяся в $\mathbf{M}_j$, и $m_j = \dim \mathbf{M}_j$.

# § 4. Анализ в пространстве операторов

## 1. Сходимость операторов и операторная норма

Так как множество $\mathscr{B}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ всех линейных операторов из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ есть $MN$-мерное векторное пространство, где $N = \dim \mathbf{X} < \infty$ и $M = \dim \mathbf{Y} < \infty$, то понятие сходимости последовательности операторов $\{T_n\}$ из $\mathscr{B}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ имеет смысл точно такой же, как и в случае последовательности векторов из $\mathbf{X}$. Введем матричные представления $(\tau_{njk})$ операторов $T_n \in \mathscr{B}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ относительно фиксированных базисов $\{x_k\}$ и $\{y_j\}$ в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ соответственно. Сходимость $T_n \to T$ эквивалентна сходимости $\tau_{njk} \to \tau_{jk}$ при каждых $j$ и $k$, ибо числа $\tau_{njk}$ суть координаты оператора $T_n$ в базисе $\{P_{jk}\}$ пространства $\mathscr{B}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ (см. п. 3.2). Числа $\tau_{njk}$, $j = 1, \ldots, M$, являются, кроме того, координатами вектора $Tx_k$ в базисе $\{y_j\}$; поэтому сходимость $T_n \to T$ эквивалентна сходимости $T_n x_k \to Tx_k$ для каждого $k$ и, следовательно, сходимости $T_n u \to Tu$ для каждого $u \in \mathbf{X}$. Каждое из этих свойств можно было бы принять за определение сходимости $T_n \to T$.

Сходимость операторов, так же как и сходимость векторов, удобно выражать с помощью нормы. Норма в пространстве операторов обычно вводится не произвольно, а в зависимости от норм в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Точнее, если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — нормированные пространства, то $\mathscr{B}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ наделяется нормой, определяемой формулой

$$\|T\| = \sup_{0 \neq u \in \mathbf{X}} \frac{\|Tu\|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} \|Tu\| = \sup_{\|u\| \leqslant 1} \|Tu\|, \quad T \in \mathscr{B}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y}) \tag{4.1}$$

и называемая *операторной нормой*. Совпадение различных выражений для нормы в (4.1) легко проверяется[1]).

---

[1]) Второй и третий члены в (4.1) не имеют смысла, если $\dim \mathbf{X} = 0$; в этом случае просто полагаем $\|T\| = 0$.

Ввиду компактности единичной сферы и единичного шара можно в (4.1) заменить «sup» на «max» (см. аналогичное замечание в п. 2.4 по поводу нормы элемента $f \in \mathrm{X}^*$); отсюда следует, что $\| T \|$ конечна. Нетрудно проверить, что функция $\| T \|$, определенная на $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ формулой (4.1), удовлетворяет условиям (1.18). Следовательно, сходимость $T_n \to T$ эквивалентна сходимости $\| T_n - T \| \to 0$. Необходимым и достаточным условием сходимости последовательности $\{T_n\}$ к некоторому $T$ является выполнение условия Коши: $\| T_n - T_m \| \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Другое удобное выражение для нормы $\| T \|$ таково[1]):

$$\| T \| = \sup_{\substack{0 \neq u \in \mathrm{X} \\ 0 \neq f \in \mathrm{Y}^*}} \frac{|(Tu, f)|}{\| f \| \| u \|} = \sup_{\substack{\|u\|=1 \\ \|f\|=1}} |(Tu, f)|. \tag{4.2}$$

Эквивалентность (4.2) и (4.1) следует из (2.26).

Если мы введем другие нормы в векторных пространствах X и Y, то и в $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ норма изменится. Однако, так же как и в случае норм в X, все эти операторные нормы эквивалентны в том смысле, что для любых двух норм $\| \ \|$ и $\| \ \|'$ существуют такие положительные константы $\alpha'$ и $\beta'$, что справедливы неравенства

$$\alpha' \| T \| \leqslant \| T \|' \leqslant \beta' \| T \|. \tag{4.3}$$

Это утверждение является частным случаем предложения (1.20) применительно к нормированному пространству $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Аналогично, неравенства (1.21) и (1.22) приводят к следующим неравенствам:

$$| \tau_{jk} | \leqslant \gamma \| T \|, \quad j = 1, \ldots, M; \quad k = 1, \ldots, N, \tag{4.4}$$

$$\| T \| \leqslant \gamma' \max | \tau_{jk} |, \tag{4.5}$$

где $(\tau_{jk})$ — матрица оператора $T$ относительно фиксированных базисов в X и Y. Константы $\gamma$ и $\gamma'$ зависят от этих базисов и нормы в $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, но не зависят от $T$.

Так же как и для векторов, $\alpha S + \beta T$ — непрерывная функция от скаляров $\alpha$, $\beta$ и операторов $S, T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, а $\| T \|$ — непрерывная функция от $T$. Специфическим свойством операторной нормы является следующее неравенство:

$$\| TS \| \leqslant \| T \| \cdot \| S \| \text{ при } T \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z}),\ S \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}). \tag{4.6}$$

Это вытекает из неравенств $\| TSu \| \leqslant \| T \| \| Su \| \leqslant \leqslant \| T \| \| S \| \| u \|$; заметим, что неравенство (4.6), вообще говоря, теряет силу, если заменить операторную норму на произвольную норму в $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

**Задача 4.1.** $\| 1 \| = 1$ (где $1 \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ — тождественный оператор, $\dim \mathrm{X} > 0$). Если $P \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ — проектор и $P \neq 0$, то $\| P \| \geqslant 1$.

---

[1]) Здесь предполагается, что $\dim \mathrm{X} \geqslant 1$, $\dim \mathrm{Y} \geqslant 1$.

Произведение $TS$ — непрерывная функция от $S$ и $T$. Другими словами, из $T_n \to T$ и $S_n \to S$ следует $T_nS_n \to TS$. Доказательство получается с помощью выкладки, аналогичной выкладке (2.28), нужно лишь применить неравенство (4.6). Точно так же можно доказать, что $Tu$ есть непрерывная функция от $T$ и $u$. В частности, из $u_n \to u$ следует $Tu_n \to Tu$. Таким образом, всякий линейный оператор в конечномерном пространстве непрерывен. Это позволяет, в частности, почленно применять линейный оператор $T$ к сходящимся рядам векторов:

$$T\left(\sum_n u_n\right) = \sum_n Tu_n. \tag{4.7}$$

Если X — нормированное пространство, то $\mathscr{B}$ (X) = $\mathscr{B}$ (X, X) есть *нормированная алгебра* (или *нормированное кольцо*) с нормой (4.2): для $T$, $S \in \mathscr{B}$ (X) выполняется неравенство (4.6).

Если $T \in \mathscr{B}$ (X, Y), то $T^* \in \mathscr{B}$ (Y*, X*) и

$$\| T^* \| = \| T \|. \tag{4.8}$$

Действительно, в силу (4.2) $\| T^* \| = \sup | (T^*f, u) | = \sup | (f, Tu) | = \| T \|$, где $u \in$ X** = X, $\| u \| = 1$ и $f \in$ Y*, $\| f \| = 1$.

## 2. Норма степени

В качестве примера использования нормы и имея в виду дальнейшие приложения, рассмотрим поведение норм $\| T^n \|$ для $T \in \mathscr{B}$ (X). Из (4.6) следует, что

$$\| T^{m+n} \| \leqslant \| T^m \| \, \| T^n \|, \quad \| T^n \| \leqslant \| T \|^n, \qquad m, n = 0, 1, 2, \ldots . \tag{4.9}$$

Покажем, что $\lim \| T^n \|^{1/n}$ *существует и равен* $\inf \| T^n \|^{1/n}$. Этот предел называется *спектральным радиусом* оператора $T$ и обозначается $\operatorname{spr} T$. Как мы увидим позднее, $\operatorname{spr} T$ не зависит от нормы, фигурирующей в определении.

Положим $a_n = \log \| T^n \|$. Требуется доказать, что

$$\frac{a_n}{n} \to b = \inf_n \frac{a_n}{n}. \tag{4.10}$$

Неравенство (4.9) дает

$$a_{m+n} \leqslant a_m + a_n \tag{4.11}$$

(такая последовательность $\{a_n\}$ называется *полуаддитивной*). Зафиксировав натуральное число $m$, положим $n = mq + r$, где $q$, $r$ — неотрицательные целые числа, причем $r < m$. Из (4.11) вытекает, что $a_n \leqslant qa_m + a_r$, так что

$$\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{q}{n} a_m + \frac{1}{n} a_r.$$

При $n \to \infty$ (и фиксированном $m$) $q/n \to 1/m$, а $r$ принимает одно из значений $0, 1, \ldots, m-1$. Поэтому $\limsup a_n/n \leqslant a_m/m$. Так как $m$ произвольно, то $\limsup a_n/n \leqslant b$. С другой стороны, $a_n/n \geqslant b$ и потому $\liminf a_n/n \geqslant b$. Этим доказано (4.10) [1].

**Замечание 4.2.** На основании полученного только что результата можно было бы предположить, что последовательность $\| T^n \|^{1/n}$ монотонно убывает (не возрастает). Это, однако, неверно, как видно из следующего примера. Пусть $\mathbf{X} = C^2$, с нормой (1.17) ($\mathbf{X}$ — двумерное евклидово пространство, см. § 6). Пусть оператор $T$ задан матрицей

$$T = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ b^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad a > b > 0.$$

Легко видеть, что

$$T^{2n} = a^{2n} b^{2n} 1, \quad T^{2n+1} = a^{2n} b^{2n} T, \quad \| T \| = a^2,$$

$$\| T^{2n} \|^{1/2n} = ab, \quad \| T^{2n+1} \|^{1/2n+1} = ab \, (a/b)^{1/2n+1} > ab.$$

Рассмотрим теперь норму $\| T^{-1} \|$ и выведем неравенство, дающее оценку $\| T^{-1} \|$ через $\| T \|$ и $\det T$, в предположении, что оператор $T$ невырожден. Векторное равенство $Tu = v$ эквивалентно системе линейных уравнений (3.6). Решая эту систему относительно $\xi_k$, получаем дробные выражения, в которых знаменателем служит $\det T$, а числители суть линейные комбинации переменных $\eta_k$, коэффициентами которых являются миноры матрицы $(\tau_{jk})$. Эти миноры — полиномы от $\tau_{jk}$ степени $N-1$, где $N = \dim \mathbf{X}$. Из неравенств $\| u \| \leqslant \gamma' \max | \xi_j |$ (см. (1.22)), $| \tau_{jk} | \leqslant \gamma'' \| T \|$ (см. (4.4)) и $| \eta_j | \leqslant \gamma''' \| v \|$ (см. (1.21)) следует, что существует такая константа $\gamma$, что

$$\| u \| \leqslant \gamma \, \| v \frac{\| T \|^{N-1}}{| \det T |},$$

или

$$\| T^{-1} \| \leqslant \gamma \frac{\| T \|^{N-1}}{| \det T |}. \tag{4.12}$$

Постоянная $\gamma$ не зависит от $T$, но зависит от выбора нормы, фигурирующей в (4.12) [2].

### 3. Примеры норм

Поскольку норма $\| T \|$ оператора $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ определяется через нормы в пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, то не существует такой свободы при выборе операторной нормы, как при выборе нормы в $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. По этой же причине не всегда легко вычислить точное значение нормы $\| T \|$. Однако часто требуется лишь знать оценку сверху для $\| T \|$. Мы покажем на примерах, как можно получить такую оценку.

---

[1] Ср. Пойа и Сегё ⟦1⟧, стр. 38. Ср. также Хилле и Филлипс ⟦1⟧.

[2] Если $\mathbf{X}$ — евклидово пространство, то можно считать, что $\gamma = 1$ (см. Т. Като [13]).

В качестве нормы в векторном пространстве наиболее часто используется *$p$-норма*, определяемая формулой

$$\| u \| = \| u \|_p = \left( \sum_j | \xi_j |^p \right)^{1/p} \tag{4.13}$$

с $p \geqslant 1$, где $\xi_j$ — координаты вектора $u$ относительно фиксированного базиса $\{x_j\}$ (который мы будем называть *каноническим базисом*).

Условия (1.18) выполняются для $p$-нормы (третье условие в (1.18) — это в нашем случае не что иное, как неравенство Минковского [1])). Частные случаи $p = 1,2$ уже встречались выше, см. (1.16) и (1.17). Норму $\| u \| = \max\limits_j | \xi_j |$ можно рассматривать как предельный случай $p$-нормы при $p = \infty$.

Предположим, что в пространствах X и Y введены $p$-нормы с одним и тем же $p$. Оценим соответствующую операторную норму $\| T \|$ через элементы матрицы $(\tau_{jk})$ оператора $T$ относительно канонических базисов в X и Y. Если $v = Tu$, то координаты $\xi_k$ и $\eta_j$ векторов $u$ и $v$ удовлетворяют соотношениям (3.6). Пусть

$$\tau'_j = \sum_k | \tau_{jk} |, \quad \tau''_k = \sum_j | \tau_{jk} | \tag{4.14}$$

— суммы соответственно по строкам и по столбцам элементов матрицы $(| \tau_{jk} |)$. Из (3.6) следует, что

$$\frac{| \eta_j |}{\tau'_j} \leqslant \sum_k \frac{| \tau_{jk} |}{\tau'_j} | \xi_k |.$$

Так как неотрицательные числа $| \tau_{jk} | / \tau'_j$, $k = 1, \ldots, N$, дают в сумме 1 (при фиксированном $j$), то правая часть предыдущего неравенства есть взвешенное среднее чисел $| \xi_k |$. Так как $\lambda^p$ — выпуклая функция [2]) от $\lambda$ при $\lambda \geqslant 0$, то $p$-я степень этого среднего не превосходит взвешенного среднего чисел $| \xi_k |^p$ с теми же весами. Итак,

$$\left( \frac{| \eta_j |}{\tau'_j} \right)^p \leqslant \sum_k \frac{| \tau_{jk} |}{\tau'_j} | \xi_k |^p$$

и потому

$$| \eta_j |^p \leqslant \tau'^{\,p-1}_j \sum_k | \tau_{jk} | \, | \xi_k |^p \leqslant (\max_j \tau'_j)^{p-1} \sum_k | \tau_{jk} | \, | \xi_k |^p,$$

$$\| v \|^p = \sum_j | \eta_j |^p \leqslant (\max_j \tau'_j)^{p-1} \sum_k \tau''_k | \xi_k |^p \leqslant (\max_j \tau'_j)^{p-1} (\max_k \tau''_k) \| u \|^p,$$

откуда

$$\| Tu \| = \| v \| \leqslant (\max_j \tau'_j)^{1 - \frac{1}{p}} (\max_k \tau''_k)^{\frac{1}{p}} \| u \|. \tag{4.15}$$

Окончательно получаем [3])

$$\| T \| \leqslant (\max_j \tau'_j)^{1 - \frac{1}{p}} (\max_k \tau''_k)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.16}$$

---

[1]) Доказательство можно найти в любом учебнике по анализу. См., например, Харди, Литлвуд и Пойа [[1]]; Ройден [[1]].

[2]) По поводу выпуклых функций см., например, Харди, Литлвуд и Пойа [[1]].

[3]) Это в действительности простое следствие теоремы выпуклости М. Рисса (см. Харди, Литлвуд и Пойа [[1]].

Если $p = 1$, то первый сомножитель в правой части (4.16) равен единице и не зависит, следовательно, от $\tau'_j$. Устремляя $p$ к бесконечности, видим, что (4.16) верно и при $p = \infty$; в этом случае второй множитель справа равен 1 и, значит, не зависит от $\tau''_k$.

**Задача 4.3.** Если $(\tau_{jk})$ — диагональная матрица (т. е. $\tau_{jk} = 0$ при $j \neq k$), то для любого $p$

$$\| T \| \leqslant \max_j | \tau_{jj} |. \tag{4.17}$$

## 4. Бесконечные операторные ряды

Сходимость бесконечных операторных рядов $\sum T_n$ определяется так же, как и в случае бесконечных векторных рядов; мы не будем повторять здесь это определение. Аналогично, *абсолютная сходимость* операторного ряда $\sum T_n$ означает сходимость ряда $\sum \| T_n \|$ для некоторой (и, следовательно, для любой) нормы $\| \ \|$. В этом случае ряд $\sum T_n$ сходится и $\| \sum T_n \| \leqslant \sum \| T_n \|$.

Ввиду возможности перемножения операторов имеются формулы, специфические для операторных рядов. Например:

$$S \left( \sum T_n \right) = \sum S T_n, \quad \left( \sum T_n \right) S = \sum T_n S; \tag{4.18}$$

здесь предполагается, что ряд сходится, а произведения имеют смысл. Формулы (4.18) следуют из непрерывности произведения $ST$ по $S$ и $T$. Далее, абсолютно сходящиеся ряды можно перемножить почленно, т. е.

$$\left( \sum S_m \right) \left( \sum T_n \right) = \sum S_m T_n, \tag{4.19}$$

если произведения имеют смысл. Порядок членов в правой части (4.19) произволен ($\sum S_m T_n$ можно также рассматривать как двойной ряд). Доказательство (4.19), по существу, не отличается от соответствующего доказательства в случае числовых рядов, и мы его не приводим.

**Пример 4.4** (показательная функция).

$$e^{tT} = \exp(tT) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n T^n, \quad T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}). \tag{4.20}$$

Этот ряд абсолютно сходится для любого комплексного числа $t$, так как $n$-й член ряда (4.20) оценивается по норме величиной $| t |^n \| T \|^n / n!$ Имеем

$$\| e^{tT} \| \leqslant e^{|t| \, \| T \|}. \tag{4.21}$$

Пример 4.5 (ряд Неймана).

$$(1-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty} T^n, \quad \|(1-T)^{-1}\| \leqslant (1-\|T\|)^{-1}, \quad T\in\mathscr{B}(\mathrm{X}). \tag{4.22}$$

Этот ряд абсолютно сходится при $\|T\|<1$, так как $\|T^n\| \leqslant \|T\|^n$. Обозначим его сумму через $S$. После почленного перемножения получим $TS=ST=S-1$. Следовательно, $(1-T)S=S(1-T)=1$ и $S=(1-T)^{-1}$. Отсюда вытекает, что *оператор* $R\in\mathscr{B}(\mathrm{X})$ *невырожден при* $\|1-R\|<1$. Следует отметить, что выполнение или невыполнение условия $\|T\|<1$ (или $\|1-R\|<1$) зависит от выбора нормы в $\mathrm{X}$; может случиться, что это условие выполнено для одной нормы, но не выполнено для другой.

**Задача 4.6.** Ряд (4.22) абсолютно сходится, если $\|T^m\|<1$ для некоторого натурального числа $m$ или, что эквивалентно, если $\operatorname{spr} T<1$ (определение спектрального радиуса $\operatorname{spr} T$ см. в п. 4.2); сумма ряда (4.22) и в этом случае равна $(1-T)^{-1}$.

В так называемых *итерационных методах* решения линейного уравнения $(1-T)u=v$ относительно неизвестной $u$ берут частичные суммы $S_n=\sum_{k=0}^{n} T^k$ в качестве приближений к оператору $S=(1-T)^{-1}$, а векторы $u_n=S_nv$ — в качестве приближений к истинному решению $u=Sv$. Ошибку такого приближения можно оценить следующим образом:

$$\|S-S_n\|=\Big\|\sum_{k=n+1}^{\infty} T^k\Big\| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\|T^k\|=\frac{\|T\|^{n+1}}{1-\|T\|}. \tag{4.23}$$

При $n=0$ формула (4.23) дает $\|(1-T)^{-1}-1\| \leqslant \|T\|(1-\|T\|)^{-1}$. Полагая $R=1-T$, видим, что $R^{-1}\to 1$ при $R\to 1$. Другими словами, $R^{-1}$ есть непрерывная функция от $R$ при $R=1$. Это частный случай общего утверждения, что $T^{-1}$ *есть непрерывная функция от* $T$. Точнее, если оператор $T\in\mathscr{B}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ невырожден, то всякий оператор $S\in\mathscr{B}(\mathrm{Y},\mathrm{X})$, для которого норма $\|S-T\|$ достаточно мала, тоже невырожден, причем $\|S^{-1}-T^{-1}\|\to 0$ при $\|S-T\|\to 0$. Отсюда следует, в частности, что *множество всех обратимых элементов в* $\mathscr{B}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ *открыто*. [Конечно, $\mathrm{X}$ и $\mathrm{Y}$ должны иметь одинаковые размерности, если в $\mathscr{B}(\mathrm{X},\mathrm{Y})$ существуют невырожденные элементы.]

Для доказательства положим $A=S-T$ и допустим, что $\|A\|<1/\|T^{-1}\|$. Тогда $\|AT^{-1}\| \leqslant \|A\|\,\|T^{-1}\|<1$ и по предыдущему $1+AT^{-1}$ — невырожденный оператор в $\mathscr{B}(\mathrm{Y})$. Так как $S=T+A=(1+AT^{-1})T$, то и оператор $S$ невырожден, причем $S^{-1}=T^{-1}(1+AT^{-1})^{-1}$.

Используя оценки (4.22) и (4.23) для $\|(1+AT^{-1})^{-1}\|$ и $\|(1+AT^{-1})^{-1}-1\|$, получаем следующие оценки для $\|S^{-1}\|$ и $\|S^{-1}-T^{-1}\|$, где $S=T+A$:

$$\|S^{-1}\|\leqslant\frac{\|T^{-1}\|}{1-\|A\|\,\|T^{-1}\|},\quad \|S^{-1}-T^{-1}\|\leqslant\frac{\|A\|\,\|T^{-1}\|^2}{1-\|A\|\,\|T^{-1}\|}$$
$$\text{при } \|A\|<1/\|T^{-1}\|. \tag{4.24}$$

**Замечание 4.7.** Существование оператора $S^{-1}=(T+A)^{-1}$ мы доказали выше при условии $\|A\|<1/\|T^{-1}\|$. Это условие можно ослабить, если $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$ и $TS=ST$. В этом случае $A$ коммутирует с $T$ и, следовательно, с $T^{-1}$. Поэтому

$$\begin{aligned}\operatorname{spr} AT^{-1} &= \lim \|(AT^{-1})^n\|^{1/n} = \lim \|A^nT^{-n}\|^{1/n} \leqslant\\ &\leqslant [\lim \|A^n\|^{1/n}]\,[\lim \|T^{-n}\|^{1/n}] =\\ &= (\operatorname{spr} A)\,(\operatorname{spr} T^{-1}).\end{aligned}\tag{4.25}$$

Отсюда вытекает, что $S^{-1}=T^{-1}(1+AT^{-1})^{-1}$ существует, если

$$\operatorname{spr} A<(\operatorname{spr} T^{-1})^{-1}. \tag{4.26}$$

## 5. Операторнозначные функции

Операторнозначные функции $T_t=T(t)$ вещественной или комплексной переменной $t$, принимающие значения в $\mathscr{B}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, определяются и рассматриваются точно так же, как вектор-функции (см. п. 1.7). Некоторые новые моменты, по сравнению с п. 1.7, возникают в связи с функциями $T(t)u(t)$ и $S(t)T(t)$, где $u(t)$ — вектор-функция и $S(t)$ — операторнозначная функция. Так, например, мы имеем формулы

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\,T(t)\,u(t)=T'(t)\,u(t)+T(t)\,u'(t),\\ &\frac{d}{dt}\,T(t)\,S(t)=T'(t)\,S(t)+T(t)\,S'(t)\end{aligned}\tag{4.27}$$

всякий раз, когда выражения, входящие в (4.27), имеют смысл. Кроме того,

$$\frac{d}{dt}\,T^{-1}(t)=-T(t)^{-1}\,T'(t)\,T(t)^{-1}, \tag{4.28}$$

если $T(t)^{-1}$ и $T'(t)$ существуют. Это следует из тождества

$$S^{-1}-T^{-1}=-S^{-1}(S-T)\,T^{-1} \tag{4.29}$$

и непрерывности $T^{-1}$ как функции от $T$ (см. п. 4).

Что касается интегралов от операторнозначных функций, то справедливы формулы, аналогичные формулам (1.30). Имеем, кроме того,

$$\begin{aligned} &\int Su(t)\,dt = S\int u(t)\,dt, \quad \int T(t)\,u\,dt = \left(\int T(t)\,dt\right)u, \\ &\int ST(t)\,dt = S\int T(t)\,dt, \quad \int T(t)\,S\,dt = \left(\int T(t)\,dt\right)S. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Для нас особенно будут важны *голоморфные* операторнозначные функции $T(t)$ комплексной переменной $t$. К ним применимы все замечания о голоморфных вектор-функциях (см. п. 1.7). Отметим, что произведения $S(t)\,T(t)$ и $T(t)\,u(t)$ голоморфны, если их сомножители голоморфны, а функция $T(t)^{-1}$ голоморфна, если $T(t)$ голоморфна и существует $T(t)^{-1}$ [последнее утверждение следует из (4.28)].

**Пример 4.8.** Показательная функция $e^{tT}$, определенная формулой (4.20), является *целой функцией* от $t$ (голоморфной во всей комплексной плоскости), причем

$$\frac{d}{dt}e^{tT} = Te^{tT} = e^{tT}T. \tag{4.31}$$

**Пример 4.9.** Рассмотрим ряд Неймана

$$S(t) = (1 - tT)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n T^n \tag{4.32}$$

с комплексным параметром $t$. Этот ряд абсолютно сходится при $|t| < 1/\operatorname{spr} T$ (см. задачу 4.6). Оказывается, что *радиус сходимости $r$ ряда* (4.32) *в точности равен* $1/\operatorname{spr} T$. В самом деле, так как функция $S(t)$ голоморфна при $|t| < r$, то, так же как и для числовых рядов, справедливы неравенства Коши [1] $\|T^n\| < M_{r'}r'^{-n}$ при всех $n$ и $r' < r$ ($M_{r'}$ не зависит от $n$). Следовательно, $\operatorname{spr} T = \lim \|T^n\|^{1/n} \leqslant r'^{-1}$; переходя к пределу при $r' \to r$, получаем $\operatorname{spr} T \leqslant r^{-1}$, чем и доказано наше утверждение, так как противоположное неравенство было доказано выше. В качестве следствия получаем, что $\operatorname{spr} T$ не зависит от выбора нормы, фигурирующей в определении.

---

[1] Имеем $T^n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|t|=r'} t^{-n-1}S(t)\,dt$, так что

$$\|T^n\| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|t|=r'} r'^{-n-1}\|S(t)\|\,|dt| \leqslant r'^{-n}M_{r'},$$

где $M_{r'} = \max\limits_{|t|<r'}\|S(t)\| < \infty$.

## 6. Пары проекторов

В дальнейшем нам понадобятся некоторые результаты о парах проекторов (идемпотентов) в конечномерных нормированных пространствах[1]. Мы получим их здесь в качестве примера применения операторного исчисления.

Напомним (см. п. 3.4), что проектор $P$ — это оператор в $\mathscr{B}(\mathbf{X})$, такой, что $P^2 = P$. Оператор $1 - P$ является проектором одновременно с $P$.

Пусть $P$, $Q \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ — пара проекторов. Оператор

$$R = (P - Q)^2 = P + Q - PQ - QP \tag{4.33}$$

*коммутирует с* $P$ *и* $Q$; для $P$ это следует из равенств $PR = P - PQP = RP$, и аналогично для $Q$. Так как $1 - P$ — проектор, то и оператор $(1 - P - Q)^2$ коммутирует с $P$ и $Q$. Имеет место тождество

$$(P - Q)^2 + (1 - P - Q)^2 = 1, \tag{4.34}$$

которое проверяется непосредственным вычислением. Вот другое полезное тождество:

$$(PQ - QP)^2 = (P - Q)^4 - (P - Q)^2 = R^2 - R; \tag{4.35}$$

его доказательство несложно, и провести его предоставляется читателю.

Положим

$$U' = QP + (1 - Q)(1 - P), \quad V' = PQ + (1 - P)(1 - Q). \tag{4.36}$$

Оператор $U'$ отображает $\mathbf{R}(P) = P\mathbf{X}$ в $Q\mathbf{X}$ и $(1 - P)\mathbf{X}$ в $(1 - Q)\mathbf{X}$, а оператор $V'$ переводит $Q\mathbf{X}$ в $P\mathbf{X}$ и $(1 - Q)\mathbf{X}$ в $(1 - P)\mathbf{X}$. Но эти отображения не являются взаимно обратными; как нетрудно видеть, справедливы лишь равенства

$$V'U' = U'V' = 1 - R. \tag{4.37}$$

Но так как $R$ коммутирует с $P$ и $Q$, а следовательно, с $U'$ и $V'$, то операторы $U'$ и $V'$ можно подправить так, что они станут взаимно обратными. А именно, введем операторы

$$\begin{aligned} U &= U'(1 - R)^{-1/2} = (1 - R)^{-1/2}U', \\ V &= V'(1 - R)^{-1/2} = (1 - R)^{-1/2}V'. \end{aligned} \tag{4.38}$$

---

[1] Результаты этого пункта взяты из статьи Т. Като [9]. Они верны и для бесконечномерных банаховых пространств. По поводу частного случая проекторов в гильбертовом пространстве см. п. 6.8. Близкие результаты имеются в книге Ахиезера и Глазмана [[1]] и статьях Секефальви-Надя [1], [2] и Вольфа [1].

Эти операторы определены в том случае, когда существует обратный оператор к квадратному корню из $1 - R$. Оператор $(1-R)^{-1/2}$ естественно определить как сумму биномиального ряда

$$(1-R)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-R)^n. \tag{4.39}$$

Этот ряд абсолютно сходится при $\| R \| < 1$ или, более точно, при

$$\operatorname{spr} R < 1, \tag{4.40}$$

и его сумма $T$ удовлетворяет соотношению $T^2 = (1-R)^{-1}$ точно так же, как и для числового биномиального ряда. Итак[1])

$$VU = UV = 1, \quad V = U^{-1}, \quad U = V^{-1}. \tag{4.41}$$

Из (4.36) следует, что $U'P = QP = QU'$ и $PV' = PQ = V'Q$; поэтому $UP = QU$ и $PV = VQ$ ввиду перестановочности $R$ с $P$ и $Q$. Отсюда получаем

$$Q = UPU^{-1}, \quad P = U^{-1}QU. \tag{4.42}$$

Итак, проекторы $P$ и $Q$ *подобны* (см. п. 5.7). Они изоморфны друг другу в том смысле, что каждое линейное соотношение вида $v = Pu$ переходит в соотношение $v' = Qu'$ при взаимно однозначном линейном отображении $U$ ($u' = Uu$, $v' = Uv$). В частности, образы $P\mathrm{X}$ и $Q\mathrm{X}$ *изоморфны* и переводятся друг в друга операторами $U$ и $U^{-1}$. Таким образом,

$$\dim P = \dim Q, \quad \dim (1-P) = \dim (1-Q). \tag{4.43}$$

Непосредственным следствием этого результата является

**Лемма 4.10.** *Пусть $P(t)$ — проектор, непрерывно зависящий от параметра $t$, пробегающего (связную) область вещественной оси или комплексной плоскости. Тогда образы $P(t)\,\mathrm{X}$ изоморфны при всех $t$. В частности, функция $\dim P(t)\,\mathrm{X}$ постоянна.*

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\| P(t') - P(t'') \| < 1$$

для достаточно близких $t'$ и $t''$, и потому полученные выше результаты применимы к паре проекторов $P(t')$ и $P(t'')$.

Задача 4.11. При условии (4.40) имеем $PQ\mathrm{X} = P\mathrm{X}$ и $QP\mathrm{X} = Q\mathrm{X}$. [*Указание*: $PQ = PV' = PU^{-1}(1-R)^{1/2}$.]

---

[1]) Как будет показано ниже в п. 6.7, операторы $U$ и $V$ оказываются унитарными, если $\mathrm{X}$ — гильбертово пространство, а $P$ и $Q$ — ортогональные проекторы. Операторы $U$ и $V$ с такими же свойствами, как в п. 4.6, построены иным методом в статьях Секефальви-Надя [1] и Вольфа [1]; их совпадение с построенными выше операторами доказано в статье Т. Като [9].

**Задача 4.12.** Для любых двух проекторов $P$ и $Q$ имеем

$$(1 - P + QP)(1 - Q + PQ) = 1 - R, \tag{4.44}$$

$$(1 - P + QP)^{-1} = (1 - R)^{-1}(1 - Q + PQ), \text{ если } \operatorname{spr} R < 1. \tag{4.45}$$

Здесь $R$ задается формулой (4.33). Если $\operatorname{spr} R < 1$, то оператор $W = 1 - P + QP$ отображает $P\mathsf{X}$ на $Q\mathsf{X}$, причем $Wu = u$ для $u \in (1 - P)\,\mathsf{X}$, а $W^{-1}$ отображает $Q\mathsf{X}$ на $P\mathsf{X}$ и $W^{-1}u = u$ при $u \in (1 - P)\,\mathsf{X}$. Кроме того, $\mathsf{X} = Q\mathsf{X} \oplus (1 - P)\,\mathsf{X}$.

**Задача 4.13.** Для любых двух проекторов $P$ и $Q$, удовлетворяющих условию $\operatorname{spr}(P - Q)^2 < 1$, существует функция $P(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, голоморфно зависящая от $t$ и такая, что $P(0) = P$, $P(1) = Q$. [*Указание*: $2P(t) = 1 + (2P - 1 + 2t(Q - P))(1 - 4t(1 - t)R)^{-1/2}$.]

# § 5. Задача на собственные значения

## 1. Определения

В этом параграфе $\mathsf{X}$ обозначает векторное пространство конечной (ненулевой) размерности $N$, причем всякий раз, когда в этом появляется необходимость, $\mathsf{X}$ будет рассматриваться как нормированное пространство относительно подходящей нормы.

Пусть $T \in \mathscr{B}(\mathsf{X})$. Комплексное число $\lambda$ называется *собственным* (*характеристическим*) *значением* оператора $T$, если существует ненулевой вектор $u \in \mathsf{X}$, такой, что

$$Tu = \lambda u. \tag{5.1}$$

Вектор $u$ называется в этом случае *собственным* (*характеристическим*) *вектором* оператора $T$, принадлежащим (соответствующим) собственному значению $\lambda$. Множество $\mathsf{N}_\lambda$ векторов $u \in \mathsf{X}$, таких, что $Tu = \lambda u$, есть линейное подпространство в $\mathsf{X}$; оно называется (*геометрическим*) *собственным подпространством* оператора $T$, соответствующим собственному значению $\lambda$, а $\dim \mathsf{N}_\lambda$ называется (*геометрической*) *кратностью* собственного значения $\lambda$. Подпространство $\mathsf{N}_\lambda$ имеет смысл определить и для тех случаев, когда $\lambda$ не является собственным значением; тогда полагаем $\mathsf{N}_\lambda = 0$. При этом удобно говорить, что $\mathsf{N}_\lambda$ есть собственное подпространство для собственного значения $\lambda$ с нулевой кратностью, хотя это и не находится в строгом соответствии с определением собственного значения [1].

---

[1] Можно поставить обобщенную задачу на собственные значения (так называемую *нелинейную задачу на собственные значения*), в которой разыскиваются решения уравнения $T(\lambda)u = 0$, где $T(\lambda)$ — некоторый линейный оператор, зависящий от параметра $\lambda$; например, $T(\lambda) = T_0 + \lambda T_1 + \ldots + \lambda^n T_n$. Ненулевое решение $u$ такой задачи существует, вообще говоря, только для некоторых особых значений $\lambda$ (обобщенных собственных значений). Один частный случай такой задачи будет рассмотрен ниже в п. VII.1.3.

Задача 5.1. Число $\lambda$ есть собственное значение оператора $T$ тогда и только тогда, когда $\lambda - \zeta$ есть собственное значение для $T - \zeta$. Подпространство $\mathrm{N}_\lambda$ есть ядро оператора $T - \lambda$, и геометрическая кратность собственного значения $\lambda$ равна nul $(T - \lambda)$. Оператор $T - \lambda$ вырожден тогда и только тогда, когда $\lambda$ — собственное значение для $T$.

Нетрудно доказать, что *собственные векторы оператора $T$, принадлежащие различным собственным значениям, линейно независимы*. Отсюда следует, что у оператора в $\mathrm{X}$ *существует самое большее $N = \dim \mathrm{X}$ собственных значений*. Множество всех собственных значений для оператора $T$ называется его *спектром* и обозначается через $\Sigma(T)$. Таким образом, $\Sigma(T)$ — конечное множество, содержащее не более чем $N$ точек.

*Задача на собственные значения* состоит прежде всего в отыскании всех собственных значений и собственных векторов (или собственных подпространств) заданного оператора $T$. Вектор $u \neq 0$ является собственным вектором оператора $T$ тогда и только тогда, когда одномерное линейное подпространство $[u]$, порожденное вектором $u$, инвариантно относительно $T$ (см. п. 3.5). Таким образом, задача на собственные значения есть частный случай задачи отыскания всех инвариантных линейных подпространств оператора $T$ (обобщенная постановка задачи на собственные значения).

Если $\mathrm{M}$ — инвариантное подпространство оператора $T$, то можно рассмотреть часть $T_\mathrm{M}$ оператора $T$ в $\mathrm{M}$. Нетрудно видеть, что каждое собственное значение (собственный вектор) оператора $T_\mathrm{M}$ есть собственное значение (собственный вектор) для $T$. Собственные значения для $T_\mathrm{M}$ удобно называть собственными значениями оператора $T$ в $\mathrm{M}$.

Если существует проектор $P$, коммутирующий с $T$, то оператор $T$ допускает разложение в прямую сумму своих частей в $\mathrm{M} = P\mathrm{X}$ и $\mathrm{N} = (1 - P)\mathrm{X}$ (см. п. 3.5). Задача на собственные значения для $T$ сводится в этом случае к соответствующим задачам для операторов $T_\mathrm{M}$ и $T_\mathrm{N}$ [1].

Часть $T_\mathrm{M}$ оператора $T$ в $\mathrm{M}$ можно отождествить с оператором $PT = TP = PTP$ в смысле замечания 3.15. Следует отметить, однако, что оператор $TP$ имеет помимо собственных значений

---

[1] Если $Tu = \lambda u$, то $TPu = PTu = \lambda Pu$, откуда следует, что вектор $Pu \in \mathrm{M}$, если он не равен нулю, есть собственный вектор оператора $T$ (и оператора $T_\mathrm{M}$), принадлежащий собственному значению $\lambda$; то же самое верно и для вектора $(1 - P)u$. Таким образом, каждое собственное значение оператора $T$ должно быть собственным значением по крайней мере одного из операторов $T_\mathrm{M}$ и $T_\mathrm{N}$, а каждый собственный вектор оператора $T$ есть сумма собственных векторов операторов $T_\mathrm{M}$ и $T_\mathrm{N}$, принадлежащих одному и тому же собственному значению. Собственное подпространство оператора $T$, отвечающее собственному значению $\lambda$, есть прямая сумма собственных подпространств операторов $T_\mathrm{M}$ и $T_\mathrm{N}$, отвечающих $\lambda$.

оператора $T_M$ еще и нулевое собственное значение с собственным пространством $\mathrm{N}$ и, следовательно, с кратностью $N - m$ (где $m = \dim P\mathrm{X}$)[1].

**Задача 5.2.** Никакое собственное значение оператора $T$ по абсолютной величине не превосходит $\| T \|$, где $\| \ \|$ — любая операторная норма в $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ (см. (4.1)).

**Задача 5.3.** Если оператор $T$ представляется в некотором базисе диагональной матрицей, то собственные значения оператора $T$ совпадают с диагональными элементами этой матрицы.

## 2. Резольвента

Пусть $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$. Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$(T - \zeta)\, u = v, \tag{5.2}$$

где $\zeta$ — заданное комплексное число, $v \in \mathrm{X}$ — известный вектор, а $u$ — искомый. Для того чтобы это уравнение имело решение при каждом $v$, необходимо и достаточно, чтобы оператор $T - \zeta$ был невырожден; другими словами, $\zeta$ не должно быть собственным значением оператора $T$. В этом случае существует обратный оператор $(T - \zeta)^{-1}$ и решение уравнения (5.2) дается формулой

$$u = (T - \zeta)^{-1}\, v. \tag{5.3}$$

Операторнозначная функция

$$R(\zeta) = R(\zeta, T) = (T - \zeta)^{-1} \tag{5.4}$$

называется *резольвентой*[2] оператора $T$. Дополнение к спектру $\Sigma(T)$ (т. е. множество всех комплексных чисел, не являющихся собственными значениями оператора $T$) называется *резольвентным множеством* оператора $T$ и обозначается через $\mathrm{P}(T)$. Резольвента $R(\zeta)$ определена, таким образом, для всех $\zeta \in \mathrm{P}(T)$.

**Задача 5.4.** Оператор $R(\zeta)$ коммутирует с $T$. Собственными значениями оператора $R(\zeta)$ служат в точности $(\lambda_h - \zeta)^{-1}$.

Важное свойство резольвенты $R(\zeta)$ заключается в том, что она удовлетворяет *тождеству Гильберта* (*резольвентному тождеству*)

$$R(\zeta_1) - R(\zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2)\, R(\zeta_1)\, R(\zeta_2). \tag{5.5}$$

---

[1] Строго говоря, это верно лишь тогда, когда $T_M$ не имеет нулевого собственного значения. Если же $T_M$ имеет собственное значение 0 с собственным подпространством $\mathrm{L}$, то собственным подпространством оператора $TP$, отвечающим нулевому собственному значению, будет $\mathrm{N} \oplus \mathrm{L}$.

[2] Резольвента — это операторнозначная функция $\zeta \to R(\zeta)$. Однако и значение этой функции при фиксированном $\zeta$ также часто называют резольвентой. Иногда резольвентой называют $(\zeta - T)^{-1}$, а не $(T - \zeta)^{-1}$. В этой книге мы следуем определению Стоуна [[1]].

Это тождество нетрудно вывести, если заметить, что левая часть равна $R(\zeta_1)(T-\zeta_2)R(\zeta_2)-R(\zeta_1)(T-\zeta_1)R(\zeta_2)$. Из тождества (5.5) следует, в частности, что *$R(\zeta_1)$ и $R(\zeta_2)$ коммутируют.* Кроме того, $R(\zeta_1)=[1-(\zeta_2-\zeta_1)R(\zeta_1)]R(\zeta_2)$. Представляя оператор $1-(\zeta_2-\zeta_1)R(\zeta_1)$ в правой части последнего тождества в виде ряда Неймана, мы приходим к разложению

$$R(\zeta)=[1-(\zeta-\zeta_0)R(\zeta_0)]^{-1}R(\zeta_0)=\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^nR(\zeta_0)^{n+1};\qquad(5.6)$$

ряд в правой части абсолютно сходится по крайней мере для тех $\zeta$, которые удовлетворяют условию

$$|\zeta-\zeta_0|<\|R(\zeta_0)\|^{-1}\qquad(5.7)$$

для *некоторой* операторной нормы. Мы будем называть разложение (5.6) *первым рядом Неймана для резольвенты.*

Разложение (5.6) показывает, что $R(\zeta)$ — голоморфная функция от $\zeta$, ряд Тейлора[1] которой имеет вид $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^nR(\zeta_0)^{n+1}$; следовательно,

$$\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^nR(\zeta)=n!\,R(\zeta)^{n+1},\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ .\qquad(5.8)$$

Согласно результату примера 4.9, радиус сходимости ряда (5.6) равен $1/\operatorname{spr}R(\zeta_0)$; следовательно, этот ряд сходится тогда и только тогда, когда

$$|\zeta-\zeta_0|<1/\operatorname{spr}R(\zeta_0)=(\lim\|R(\zeta_0)^n\|^{1/n})^{-1}.\qquad(5.9)$$

Для достаточно больших по абсолютной величине $\zeta$ резольвента $R(\zeta)$ допускает разложение

$$R(\zeta)=-\zeta^{-1}(1-\zeta^{-1}T)^{-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}\zeta^{-n-1}T^n,\qquad(5.10)$$

причем ряд в правой части сходится тогда и только тогда, когда $|\zeta|>\operatorname{spr}T$; таким образом, функция $R(\zeta)$ голоморфна в бесконечности.

**Задача 5.5.** При $|\zeta|>\|T\|$ справедливы неравенства

$$\|R(\zeta)\|\leqslant(|\zeta|-\|T\|)^{-1},$$
$$\|R(\zeta)+\zeta^{-1}\|\leqslant|\zeta|^{-1}(|\zeta|-\|T\|)^{-1}\|T\|.\qquad(5.11)$$

*Спектр $\Sigma(T)$ всегда непуст; оператор $T$ имеет по крайней мере одно собственное значение.* В противном случае резольвента $R(\zeta)$ была бы целой функцией, стремящейся к нулю

---

[1] Это один из примеров применения теории операторнозначных функций комплексного переменного; см. Кнопп [1], стр. 79.

на бесконечности [см. (5.11)]; отсюда следовало бы по теореме Лиувилля [1]), что $R(\zeta) = 0$. Но это противоречит равенству [2]) $1 = (T - \zeta) R(\zeta)$.

Нетрудно видеть, что каждое собственное значение оператора $T$ есть *особая точка* аналитической функции $R(\zeta)$ [3]). Так как на границе области сходимости ряда (5.10) существует [4]) по крайней мере одна особая точка резольвенты $R(\zeta)$, то спектральный радиус $\operatorname{spr} T$ совпадает с наибольшим (по абсолютной величине) собственным значением оператора $T$:

$$\operatorname{spr} T = \max_h |\lambda_h|. \qquad (5.12)$$

Отсюда снова следует, что спектральный радиус оператора не зависит от нормы, используемой в его определении.

**Задача 5.6.** Доказать, что $\operatorname{spr} T = 0$ тогда и только тогда, когда оператор $T$ нильпотентен. [*Указание* (относящееся к «только тогда»): если $\operatorname{spr} T = 0$, то $\operatorname{spr} T_{\mathbf{M}} = 0$ для части $T_{\mathbf{M}}$ оператора $T$ в инвариантном подпространстве $\mathbf{M}$. Таким образом, часть оператора $T$ в каждом из инвариантных подпространств $T^n\mathbf{X}$ (см. задачу 3.12) вырождена. Поэтому все включения в цепочке $\mathbf{X} \supset T\mathbf{X} \supset T^2\mathbf{X} \supset \ldots$ собственные, так что мы обязательно дойдем до 0.]

## 3. Особые точки резольвенты

Особые точки $R(\zeta)$ суть в точности собственные значения $\lambda_h$, $h = 1, \ldots, s$, оператора $T$. Рассмотрим ряд Лорана [5]) резольвенты $R(\zeta)$ в точке $\zeta = \lambda_h$. Мы предположим сначала для простоты, что $\lambda_h = 0$, так что

$$R(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \zeta^n A_n. \qquad (5.13)$$

Коэффициенты $A_n$ определяются по формуле

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \zeta^{-n-1} R(\zeta)\, d\zeta, \qquad (5.14)$$

где $\Gamma$ — положительно ориентированная окружность с центром в точке $\zeta = 0$ и столь малого радиуса, что все ненулевые собственные значения оператора $T$ лежат вне $\Gamma$. Так как окружность

---

[1]) См. Кнопп [[1]], стр. 113. По теорем Лиувилля функция $R(\zeta)$ постоянна, а так как $R(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to 0$, то она всюду равна нулю.

[2]) Напомним, что мы предполагаем, что $\dim \mathbf{X} > 0$.

[3]) Предположим, что $\lambda$ — регулярная точка (устранимая особенность) аналитической функции $R(\zeta)$. Тогда существует предел $\lim\limits_{\zeta \to \lambda} R(\zeta) = R$, и поэтому $(T - \lambda) R = \lim\limits_{\zeta \to \lambda} (T - \zeta) R(\zeta) = 1$. Таким образом, существует $(T - \lambda)^{-1} = R$, и, следовательно, $\lambda$ не является собственным значением.

[4]) См. Кнопп [[1]], стр. 101.

[5]) См. Кнопп [[1]], стр. 117.

$\Gamma$ в формуле (5.14) можно заменить на окружность $\Gamma'$ чуть большего радиуса, то имеем

$$A_n A_m = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma'} \int\limits_{\Gamma} \zeta^{-n-1} \zeta'^{-m-1} R(\zeta) R(\zeta') \, d\zeta \, d\zeta' =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma'} \int\limits_{\Gamma} \zeta^{-n-1} \zeta'^{-m-1} (\zeta' - \zeta)^{-1} [R(\zeta') - R(\zeta)] \, d\zeta \, d\zeta';$$

мы воспользовались здесь тождеством Гильберта. В двойном интеграле справа повторное интегрирование можно производить в любом порядке. Учитывая, что контур $\Gamma'$ лежит вне контура $\Gamma$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \zeta^{-n-1} (\zeta - \zeta)^{-1} \, d\zeta &= \eta_n \zeta'^{-n-1}, \\ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \zeta'^{-m-1} (\zeta' - \zeta)^{-1} \, d\zeta' &= (1 - \eta_m) \zeta^{-m-1}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

где

$$\eta_n = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad n \geqslant 0, \\ 0 & \text{при} \quad n < 0. \end{cases} \tag{5.16}$$

Таким образом,

$$A_n A_m = \frac{\eta_n + \eta_m - 1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \zeta^{-n-m-2} R(\zeta) \, d\zeta = (\eta_n + \eta_m - 1) A_{n+m-1}. \tag{5.17}$$

При $n = m = -1$ отсюда следует, что $A_{-1}^2 = -A_{-1}$. Поэтому оператор $-A_{-1}$ есть проектор; мы обозначим его через $P$. При $n$, $m > 0$ соотношение (5.17) дает $A_{-2}^2 = -A_{-3}$, $A_{-2}A_{-3} = -A_{-4}$, . . . . Полагая $-A_{-2} = D$, получаем $A_{-k} = -D^{k-1}$ при $k \geqslant 2$. Аналогично получаем, что $A_n = S^{n+1}$ при $n \geqslant 0$, где $S = A_0$.

Возвращаясь теперь к общему случаю, рассмотрим особую точку $\zeta = \lambda_h$ резольвенты $R(\zeta)$; мы видим, что ряд Лорана для $R(\zeta)$ в точке $\zeta = \lambda_h$ имеет вид

$$R(\zeta) = -(\zeta - \lambda_h)^{-1} P_h - \sum_{n=1}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^{-n-1} D_h^n + \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^n S_h^{n+1}. \tag{5.18}$$

Полагая в соотношении (5.17) $n = -1$, $m = -2$, а затем $n = -1$, $m = 0$, получаем

$$P_h D_h = D_h P_h = D_h, \quad P_h S_h = S_h P_h = 0. \tag{5.19}$$

**Таким образом**, правая **часть** в (5.18) представляет собой разложение оператора $R(\zeta)$ в прямую сумму, соответствующее разложению $\mathbf{X} = \mathbf{M}_h \oplus \mathbf{M}'_h$, где $\mathbf{M}_h = P_h\mathbf{X}$ и $\mathbf{M}'_h = (1 - P_h)\,\mathbf{X}$. Так как главная часть ряда Лорана (5.18) **сходится** при $\zeta - \lambda_h \neq 0$, то часть оператора $R(\zeta)$ в $\mathbf{M}_h$ имеет единственную особенность $\zeta - \lambda_h$; поэтому спектральный радиус оператора $D_h$ равен нулю. Отсюда **вытекает** (задача 5.6), **что** оператор $D_h$ нильпотентен и, следовательно (задача 3.10),

$$D_h^{m_h} = 0, \quad m_h = \dim \mathbf{M}_h = \dim P_h. \tag{5.20}$$

Итак, главная часть разложения Лорана (5.18) конечна и точка $\zeta = \lambda_h$ есть полюс порядка не выше $m_h$. Поскольку это верно для **каждой особой точки** $\lambda_h$ резольвенты $R(\zeta)$, то $R(\zeta)$ — *мероморфная функция*[1].

Операторы $P_h$, $h = 1, \ldots, s$, удовлетворяют следующим соотношениям:

$$P_hP_k = \delta_{hk}P_h, \qquad \sum_{h=1}^{s} P_h = 1, \qquad P_hT = TP_h. \tag{5.21}$$

Первое соотношение можно доказать точно так же, как мы доказывали выше равенство $P_h^2 = P_h$; достаточно заметить, что

$$P_h = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h} R(\zeta)\, d\zeta \tag{5.22}$$

при условии, что ни одна из окружностей $\Gamma_h$ не лежит в другой. Второе из соотношений (5.21) получается интегрированием $R(\zeta)$ по большой окружности, охватывающей все собственные значения оператора $T$, с учетом разложения (5.10) резольвенты $R(\zeta)$ в бесконечности. Перестановочность $P_h$ и $T$ вытекает непосредственно из (5.22).

Так как **функция** $R(\zeta)$ мероморфна **и** регулярна **в** бесконечности, **то** разложение $R(\zeta)$ на *элементарные дроби*[1]) имеет вид

$$R(\zeta) = -\sum_{h=1}^{s} \Big[(\zeta - \lambda_h)^{-1} P_h + \sum_{n=1}^{m_h - 1} (\zeta - \lambda_h)^{-n-1} D_h^m\Big]. \tag{5.23}$$

**Задача 5.7.** Доказать, что

$$\operatorname{spr} R(\zeta) = [\min_h |\zeta - \lambda_h|^{-1}]^{-1} = [\operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T))]^{-1}.$$

**Задача** 5.8. Доказать, что

$$P_hD_k = D_kP_h = \delta_{hk}D_h; \quad D_hD_k = 0, \quad h \neq k. \tag{5.24}$$

---

[1] См. Кнопп [[2]], стр. 34.

**Задача 5.9.** Для любой простой замкнутой (спрямляемой) кривой $\Gamma$ с положительной ориентацией, не проходящей ни через какое собственное значение $\lambda_h$, справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\zeta)\,d\zeta = -\sum P_h, \tag{5.25}$$

где сумма берется по тем $h$, для которых $\lambda_h$ лежит внутри $\Gamma$.

Умножая обе части равенства (5.14) слева и справа на $T$ и замечая, что $TR(\zeta) = R(\zeta)\,T = 1 + \zeta R(\zeta)$, получаем $TA_n = A_nT = \delta_{n0} + A_{n-1}$. Если рассматривать особую точку $\zeta = \lambda_h$ вместо $\zeta = 0$, то последнее соотношение при $n = 0$ и $n = -1$ приводит к равенствам

$$(T - \lambda_h)\,S_h = S_h\,(T - \lambda_h) = 1 - P_h, \tag{5.26}$$

$$P_h\,(T - \lambda_h) = (T - \lambda_n)\,P_h = D_h.$$

Для каждого $h = 1, \ldots, s$ голоморфную часть ряда Лорана (5.18) назовем *приведенной резольвентой* оператора $T$ относительно собственного значения $\lambda_h$ и обозначим через $S_h(\zeta)$:

$$S_h(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \lambda_h)^n S_h^{n+1}. \tag{5.27}$$

Из (5.19) и (5.26) следует, что

$$S_h = S_h(\lambda_h), \quad S_h(\zeta)\,P_h = P_hS_h(\zeta) = 0, \tag{5.28}$$

$$(T - \zeta)\,S_h(\zeta) = S_h(\zeta)\,(T - \zeta) = 1 - P_h. \tag{5.29}$$

Равенства (5.29) показывают, что части операторов $T - \zeta$ и $S_h(\zeta)$ в инвариантном подпространстве $\mathbf{M}'_h = (1 - P_h)\,\mathbf{X}$ суть взаимно обратные операторы.

**Задача 5.10.** Доказать, что

$$(T - \lambda_h)\,D_h^n = D_h^{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.30}$$

$$(T - \lambda_h)^{m_h} P_h = 0, \tag{5.31}$$

$$S_h(\zeta) = -\sum_{k \neq h}\Big[(\zeta - \lambda_k)^{-1} P_k + \sum_{n=1}^{m_k - 1} (\zeta - \lambda_k)^{-n-1} D_k^n\Big]. \tag{5.32}$$

**Задача 5.11.** Функция $S_h(\zeta)$ при каждом $h$ удовлетворяет тождеству Гильберта [см. (5.5)] и уравнению

$$\left(\frac{d}{d\zeta}\right)^n S_h(\zeta) = n!\,S_h(\zeta)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{5.33}$$

### 4. Каноническая форма оператора

Результаты предыдущего пункта приводят к *канонической форме* линейного оператора $T$. Обозначая через $\mathbf{M}_h$ образ проектора $P_h$, $h = 1, \ldots, s$, имеем

$$\mathbf{X} = \mathbf{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{M}_s. \tag{5.34}$$

Так как проекторы $P_h$ коммутируют с $T$ и между собой, то подпространства $\mathbf{M}_h$ инвариантны относительно $T$ и $T$ допускает разложение в прямую сумму, соответствующее разложению (5.34) (см. п. 3.5). Подпространство $\mathbf{M}_h$ называется *алгебраическим собственным подпространством*, соответствующим собственному значению $\lambda_h$ оператора $T$, а число $m_h = \dim \mathbf{M}_h$ — *алгебраической кратностью* собственного значения $\lambda_h$. В дальнейшем $P_h$ будем называть *собственным проектором*, а $D_h$ — *собственным нильпотентом* (или *нильпотентной частью*) оператора $T$, соответствующими собственному значению $\lambda_h$. Всякий ненулевой вектор $u$ из $\mathbf{M}_h$ называется *обобщенным собственным вектором*, принадлежащим собственному значению $\lambda_h$.

Из (5.26) следует, что

$$TP_h = P_hT = P_hTP_h = \lambda_hP_h + D_h, \quad h = 1, \ldots, s. \tag{5.35}$$

Таким образом, часть $T_{\mathbf{M}_h}$ оператора $T$ в инвариантном подпространстве $\mathbf{M}_h$ есть сумма скалярного оператора $\lambda_h$ и нильпотентного оператора $D_{h,\mathbf{M}_h}$, являющегося частью $D_h$ в $\mathbf{M}_h$. Нетрудно видеть, что оператор $T_{\mathbf{M}_h}$ имеет единственное собственное значение $\lambda_h$.

Суммирование равенств (5.35) по $h$ с учетом (5.21) дает

$$T = S + D, \tag{5.36}$$

где

$$S = \sum_h \lambda_h P_h, \tag{5.37}$$

$$D = \sum_h D_h. \tag{5.38}$$

Оператор $S$ вида (5.37), где $\lambda_h \neq \lambda_k$ при $h \neq k$ и операторы $P_h$ удовлетворяют соотношениям (3.27) — (3.28), называется *диагонализуемым*, *или полупростым*. $S$ есть прямая сумма (п. 3.5) скалярных операторов. Оператор $D$ нильпотентен, ибо он является прямой суммой нильпотентных операторов $D_h$ и потому $D^n = \sum D_h^n = 0$ для $n \geqslant \max m_h$. Из (5.24) вытекает, что $D$ коммутирует с $S$.

Разложение (5.36) показывает, что *каждый оператор* $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ *представим в виде суммы диагонализуемого оператора* $S$ *и нильпотентного оператора* $D$, *коммутирующего с* $S$.

Собственное значение $\lambda_h$ оператора $T$ назовем *полупростым*, если соответствующий нильпотент $D_h$ равен нулю, и *простым*[1], если $m_h = 1$ (заметим, что $m_h = 1$ влечет $D_h = 0$). Оператор $T$ диагонализуем тогда и только тогда, когда все его собственные значения полупросты. Оператор $T$ называется *простым*, если все собственные значения $\lambda_h$ просты; в этом случае $T$ имеет $N$ собственных значений.

Разложение (5.36) называется *спектральным представлением* оператора $T$. Оно единственно в следующем смысле: если $T$ — сумма диагонализуемого оператора $S$ и нильпотентного оператора $D$, коммутирующего с $S$, то $S$ и $D$ имеют вид (5.37) и (5.38) соответственно. Для доказательства заметим сначала, что любой оператор $R$, коммутирующий с диагонализуемым оператором $S$ вида (5.37), коммутирует с каждым $P_h$, так что подпространство $\mathbf{M}_h$ инвариантно относительно $R$. Действительно, умножая обе части равенства $RS = SR$ слева на $P_h$ и справа на $P_k$ и учитывая, что $P_h P_k = \delta_{hk}$, получаем

$$\lambda_k P_h R P_k = \lambda_h P_h R P_k \quad \text{или} \quad P_h R P_k = 0 \quad \text{при} \quad h \neq k.$$

Суммирование равенств $P_h R P_k = 0$ по $k \neq h$ при фиксированном $h$ дает $P_h R (1 - P_h) = 0$ или $P_h R = P_h R P_h$. Аналогично выводим равенство $R P_h = P_h R P_h$; следовательно, $R P_h = P_h R$.

Предположим теперь, что

$$T' = S' + D', \quad \text{где} \quad S' = \sum_{k=1}^{s'} \lambda'_k P'_k, \quad D'S' = S'D',$$

есть другое спектральное разложение оператора $T$. Так как $D'$ коммутирует с каждым $P'_k$, то $D' = \sum D'_h$, где $D'_h = P'_h D' = D' P'_h$. Отсюда $T - \zeta = \sum [(\lambda'_h - \zeta) P'_h + D'_h]$ и, следовательно,

$$(T-\zeta)^{-1} = -\sum_{h=1}^{s'} [(\zeta-\lambda'_h)^{-1} P'_h + (\zeta-\lambda'_h)^{-2} D'_h + \dots$$
$$\dots + (\zeta-\lambda'_h)^{-N} D'^{N-1}_h], \qquad (5.39)$$

что проверяется непосредственно умножением правой части в (5.39) слева и справа на приведенное выше разложение для $T - \zeta$ (заметим, что $D'^{N}_h = D'^{N} = 0$, поскольку оператор $D'$ нильпотентен). Так как разложение операторнозначной мероморфной функции на элементарные дроби единственно (так же как и для числовых функций), то сравнение (5.39) и (5.23) показывает, что $s' = s$, $\lambda'_h = \lambda_h$, $P'_h = P_h$ и $D'_h = D_h$. Этим завершается доказательство единственности спектрального разложения.

---

[1] Собственные значения, не являющиеся простыми, называются *вырожденными*.

Спектральное представление (5.36) приводит к *жордановой канонической форме* оператора $T$. Для этого достаточно применить теорему о структуре нильпотентного оператора к операторам $D_h$ (п. 3.4). Относительно надлежащего базиса в $\mathbf{M}_h$ часть $D_{h, \mathbf{M}_h}$ оператора $D_h$ в $\mathbf{M}_h$ имеет матрицу вида (3.3). В этом же базисе оператор $T_{\mathbf{M}_h}$ представляется треугольной матрицей $(\tau_{jk}^{(h)})$ вида (3.30), в которой диагональные элементы заменены на $\lambda_h$. Объединяя выбранные базисы в $\mathbf{M}_1, \ldots, \mathbf{M}_s$, получаем базис в $\mathbf{X}$, относительно которого матрица оператора $T$ есть прямая сумма матриц $(\tau_{jk}^{(h)})$. Отсюда следует, в частности, что (см. задачу 3.14)

$$\det(T-\zeta)=\prod_{h=1}^{s}(\lambda_h-\zeta)^{m_h}, \quad \operatorname{tr} T=\sum_{h=1}^{s} m_h\lambda_h. \tag{5.40}$$

При подсчете собственных значений оператора $T$ удобно считать каждое собственное значение $\lambda_h$ входящим $m_h$ раз ($m_h$ — *алгебраическая* кратность собственного значения $\lambda_h$) и соответственно обозначать собственные значения так: $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ (скажем $\mu_1 = \ldots = \mu_{m_1} = \lambda_1$, $\mu_{m_1+1} = \ldots = \mu_{m_1+m_2} = \lambda_2, \ldots$). Удобно называть набор $\mu_1, \ldots, \mu_N$ *полным набором собственных значений*. Формулы (5.40) можно теперь переписать в виде

$$\det(T-\zeta)=\prod_{k=1}^{N}(\mu_k-\lambda), \quad \operatorname{tr} T=\sum_{k=1}^{N}\mu_k. \tag{5.41}$$

**Задача 5.12.** Геометрическое собственное подпространство $\mathbf{N}_h$, принадлежащее собственному значению $\lambda_h$, содержится в алгебраическом собственном подпространстве $\mathbf{M}_h$. Равенство $\mathbf{M}_h = \mathbf{N}_h$ имеет место тогда и только тогда, когда $\lambda_h$ — полупростое собственное значение.

**Задача 5.13.** Собственное значение $\lambda_h$ полупросто тогда и только тогда, когда точка $\zeta = \lambda_h$ — простой полюс (полюс порядка 1) резольвенты $R(\zeta)$.

**Задача 5.14.** Если $n$ достаточно велико (скажем $n \geqslant m$), то ранг оператора $T^n$ равен $N - m$, где $m$ — алгебраическая кратность нулевого собственного значения [напомним (п. 1.1), что по определению $m = 0$, если 0 не является собственным значением оператора $T$].

**Задача 5.15.** Доказать неравенства

$$|\operatorname{tr} T| \leqslant (\operatorname{rank} T)\,\|T\| \leqslant N\,\|T\|. \tag{5.42}$$

**Задача 5.16.** Собственные значения оператора $T$ суть корни алгебраического уравнения степени $N$ (*характеристического уравнения*)

$$\det(T-\zeta)=0. \tag{5.43}$$

Кратность корня $\lambda_h$ этого уравнения равна алгебраической кратности собственного значения $\lambda_h$.

Каждую квадратную матрицу $(\tau_{jk})$ порядка $N$ можно рассматривать как представление некоторого линейного оператора $T$ в некотором векторном пространстве $\mathbf{X}$, например в $N$-мерном координатном пространстве $C^N$. Это означает, что матрица оператора $T$ относительно канонического базиса $\{x_j\}$ пространства X совпадает с $(\tau'_{jk})$. Пусть $\{x'_j\}$ — базис в X, относительно которого матрица оператора $T$ имеет канонический вид.

Связь между базисами $\{x_j\}$ и $\{x'_j\}$ дается формулами (1.2) и (1.4). Так как $x'_k$ суть обобщенные собственные векторы оператора $T$, то числовые векторы $(\hat{\gamma}_{1k}, \ldots, \hat{\gamma}_{Nk})$, $k = 1, \ldots, N$, суть обобщенные собственные векторы матрицы $(\tau'_{jk})$. Связь между матрицами $(\tau_{jk})$ и $(\tau'_{jk})$ дается формулой (3.8). Таким образом, приведение матрицы $(\tau_{jk})$ к каноническому виду $(\tau'_{jk})$ осуществляется с помощью матрицы $(\hat{\gamma}_{jk})$, составленной из обобщенных собственных векторов матрицы $(\tau_{jk})$, а именно $(\tau'_{jk}) = (\hat{\gamma}_{jk})^{-1} (\tau_{jk}) (\hat{\gamma}_{jk})$.

Если $\lambda_h$ — полупростое собственное значение, то жорданова клетка с номером $h$ в матрице $(\tau'_{jk})$ есть диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны $\lambda_h$. Если $T$ — диагонализуемый оператор, то $(\tau'_{jk})$ есть диагональная матрица с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, причем $\lambda_h$ повторяется $m_h$ раз (т. е. диагональные элементы суть $\mu_1, \ldots, \mu_N$). В этом случае $(\hat{\gamma}_{1k}, \ldots, \hat{\gamma}_{Nk})$, $k = 1, \ldots, N$,— собственные векторы матрицы $(\tau_{jk})$ в обычном смысле.

**Задача 5.17.** Доказать, что $(\gamma_{j1}, \ldots, \gamma_{jN})$, $j = 1, \ldots, N$, суть обобщенные собственные векторы транспонированной матрицы $(\tau_{jk})$.

### 5. Сопряженная задача

Если $T \in \mathscr{B}(X)$, то $T^* \in \mathscr{B}(X^*)$. Существует простая связь между спектральными представлениями операторов $T$ и $T^*$. Если (5.36) — спектральное представление оператора $T$, то спектральное представление оператора $T^*$ дается формулой

$$T^* = S^* + D^* = \sum_{h=1}^{s} (\bar{\lambda}_h P_h^* + D_h^*), \tag{5.44}$$

ибо $P_h^*$ удовлетворяют соотношениям (3.27) — (3.28), а $D_h^*$ суть нильпотентные операторы, коммутирующие с $P_h^*$ и между собой. Отсюда следует. в частности, что *собственные значения оператора $T^*$ комплексно сопряжены к собственным значениям $T$ и имеют те же алгебраические кратности.* Соответствующие геометрические кратности также совпадают; это следует из (3.40).

**Задача 5.18.** Функция $R^*(\zeta) = R(\zeta, T^*) = (T^* - \zeta)^{-1}$ обладает следующими свойствами:

$$R(\zeta)^* = R^*(\bar{\zeta}), \tag{5.45}$$

$$R^*(\zeta) = -\sum_{h=1}^{s} \Big[ (\zeta - \bar{\lambda}_h)^{-1} P_h^* + \sum_{h=1}^{m_h - 1} (\zeta - \bar{\lambda}_h)^{-n-1} D_h^{*n} \Big]. \tag{5.46}$$

## 6. Функции от оператора

Если $p(\zeta)$ — многочлен, то оператор $p(T)$ определен для любого $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ (п. 3.3). С помощью резольвенты $R(\zeta) = (T - \zeta)^{-1}$ мы сможем определить функции $\phi(T)$ для более широкого класса функций $\phi(\zeta)$. Стоит заметить, что оператор $R(\zeta_0)$ сам есть оператор вида $\phi(T)$, где $\phi(\zeta) = (\zeta - \zeta_0)^{-1}$.

Предположим, что функция $\phi(\zeta)$ голоморфна в области $\Delta$ комплексной плоскости, содержащей все собственные значения $\lambda_h$ оператора $T$, и пусть $\Gamma \subset \Delta$ — простая замкнутая гладкая кривая с положительной ориентацией, охватывающая все собственные значения $\lambda_h$. Тогда $\phi(T)$ определяется с помощью *интеграла Данфорда—Тейлора*:

$$\phi(T) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \phi(\zeta)\, R(\zeta)\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \phi(\zeta)\,(\zeta - T)^{-1}\, d\zeta. \qquad (5.47)$$

Эта формула представляет собой аналог интегральной формулы Коши [1]) в теории функций комплексной переменной. Более общим образом, можно считать, что контур $\Gamma$ состоит из нескольких простых замкнутых кривых $\Gamma_k$, ограничивающих области $\Delta'_k$, причем объединение областей $\Delta'_k$ содержит все собственные значения оператора $T$. Отметим, что интеграл в (5.47) не зависит от выбора $\Gamma$ (в предположении, что $\Gamma$ удовлетворяет указанным условиям).

Нетрудно проверить, что определение (5.47) совпадает с определением (3.18), в случае когда $\varphi(\zeta)$ — многочлен. Проверку достаточно провести для одночленов $\phi(\zeta) = \zeta^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. В случае $n = 0$ доказательство сразу следует из формулы (5.25). При $n \geqslant 1$ заменим $\varphi(\zeta) = \zeta^n$ в (5.47) на $(\zeta - T + T)^n = (\zeta - T)^n + \ldots + T^n$; все члены, кроме последнего, дают нулевой вклад в интеграл (5.47), а последний дает $T^n$.

Задача 5.19. Если $\phi(\zeta) = \sum \alpha_n \zeta^n$ — целая функция, то $\phi(T) = \sum \alpha_n T^n$.

Отображение $\phi(\zeta) \to \phi(T)$ есть гомоморфизм алгебры голоморфных функций на $\Delta$ в алгебру $\mathscr{B}(\mathrm{X})$:

$$\phi(\zeta) = \alpha_1\phi_1(\zeta) + \alpha_2\phi_2(\zeta) \Rightarrow \phi(T) = \alpha_1\phi_1(T) + \alpha_2\phi_2(T), \qquad (5.48)$$

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\zeta)\,\phi_2(\zeta) \Rightarrow \phi(T) = \phi_1(T)\,\phi_2(T). \qquad (5.49)$$

Эти свойства оправдывают обозначение $\phi(T)$ для оператора, определенного интегралом (5.47). Формула (5.48) очевидна. Формула (5.49) доказывается точно так же, как соотношение (5.17) при $n, m < 0$ (при этом $\eta_n + \eta_m - 1 = -1$). На самом деле

---

[1]) См. Кнопп [[1]], стр. 61.

соотношение (5.17) есть частный случай формулы (5.49) при $\phi_1(\zeta) = \zeta^{-n-1}$ и $\phi_2(\zeta) = \zeta^{-m-1}$.

Спектральное представление для $\phi(T)$ получается подстановкой разложения (5.23) в интеграл (5.47). Если $T = \sum (\lambda_h P_h + D_h)$ — спектральное представление оператора $T$, то в результате интегрирования получаем

$$\phi(T) = \sum_{h=1}^{s} [\phi(\lambda_h) P_h + D_h'], \tag{5.50}$$

где[1]

$$D_h' = \phi'(\lambda_h) D_h + \ldots + \frac{\phi^{(m_h-1)}(\lambda_h)}{(m_h-1)!} D_h^{m_h-1}. \tag{5.51}$$

Так как $D_h'$ суть нильпотентные операторы, коммутирующие с $P_k$ и между собой, то из теоремы единственности следует, что разложение (5.50) есть спектральное представление оператора $\phi(T)$.

Таким образом, $\phi(T)$ имеет общие с $T$ собственные проекторы $P_h$, а собственные значения $\varphi(T)$ суть $\phi(\lambda_h)$ с кратностями $m_h$. Строго говоря, эти утверждения верны лишь тогда, когда все числа $\phi(\lambda_h)$ различны. Если, скажем, $\phi(\lambda_1) = \phi(\lambda_2)$, то собственное значение $\phi(\lambda_1)$ обладает собственным проектором $P_1 + P_2$ и кратностью $m_1 + m_2$.

Тот факт, что числами $\phi(\lambda_n)$ исчерпываются все собственные значения оператора $\phi(T)$, есть частный случай так называемой *теоремы об отображении спектра.*

Формулы (5.48) и (5.49) следует дополнить еще одним функциональным соотношением:

$$\phi(\zeta) = \phi_1(\phi_2(\zeta)) \Rightarrow \phi(T) = \phi_1(\phi_2(T)). \tag{5.52}$$

Здесь предполагается, что $\phi_2$ — голоморфная функция в области $\Delta_2$, содержащей все собственные значения $\lambda_h$ оператора $T$, а $\phi_1$ — голоморфная функция в области $\Delta_1$, содержащей все собственные значения $\phi_2(\lambda_h)$ оператора $S = \phi_2(T)$. Из этих предположений вытекает, что

$$\phi_1(S) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \phi_1(z)(z-S)^{-1}\,dz, \tag{5.53}$$

где $\Gamma_1$ — контур (простой или составной), охватывающий все собственные значения $\phi_2(\lambda_h)$ оператора $S$. Но

$$(z-S)^{-1} = (z-\phi_2(T))^{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} (z-\phi_2(\zeta))^{-1}(\zeta-T)^{-1}\,d\zeta \tag{5.54}$$

---

[1] Заметим, что $(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma} (\zeta-\lambda)^{-n-1}\phi(\zeta)\,d\zeta = \phi^{(n)}(\lambda)/n!$, если $\lambda$ лежит внутри Г.

для $z \in \Gamma_1$; это следует из формулы (5.49) и того факта, что функции $z - \phi_2(\zeta)$ и $(z - \phi_2(\zeta))^{-1}$ голоморфны по $\zeta$ в некоторой подобласти в $\Delta_2$, содержащей все числа $\lambda_h$ (при этом контур $\Gamma_2$ в этой подобласти должен быть выбран таким образом, чтобы образ $\Gamma_2$ относительно отображения $\phi_2$ лежал внутри $\Gamma_1$). Подстановка (5.54) в (5.53) дает

$$\phi_1(S) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} \phi_1(z)(z-\phi_2(\zeta))^{-1}(\zeta-T)^{-1}\, d\zeta\, dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \phi_1(\phi_2(\zeta))(\zeta-T)^{-1}\, d\zeta = \phi(T), \tag{5.55}$$

чем и доказано свойство (5.52).

**Пример 5.20.** В качестве примера применения интеграла Данфорда определим логарифм

$$S = \log T \tag{5.56}$$

от оператора $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ в предположении, что этот оператор невырожден. Выберем односвязную область $\Delta$ в комплексной плоскости, содержащую все собственные значения $\lambda_h$ оператора $T$ и не содержащую точки 0. Пусть $\Gamma$ — простая замкнутая кривая в $\Delta$, охватывающая все $\lambda_h$. Так как в области $\Delta$ существует голоморфная ветвь функции $\phi(\zeta) = \log \zeta$, то интеграл (5.47) определяет функцию

$$S = \log T = \phi(T) = -\frac{1}{2\pi i}\int \log \zeta R(\zeta)\, d\zeta. \tag{5.57}$$

Поскольку $\exp(\log \zeta) = \zeta$, то из (5.52) вытекает, что

$$\exp(\log T) = T. \tag{5.58}$$

Следует отметить, что выбор области $\Delta$ и ветви функции $\phi(\zeta) = \log \zeta$ не единствен. Поэтому существуют различные операторы $\log T$, удовлетворяющие соотношению (5.58). Соответствующие друг другу собственные значения таких операторов отличаются на целое кратное числа $2\pi i$. Если $m_h$ — алгебраическая кратность собственного значения $\lambda_h$, то

$$\operatorname{tr}(\log T) = \sum m_h \log \lambda_h + 2\pi n i, \text{ где } n \text{ — целое число,} \tag{5.59}$$

$$\exp(\operatorname{tr}(\log T)) = \prod \lambda_h^{m_h} = \det T. \tag{5.60}$$

## 7. Преобразования подобия

Пусть $U$ — оператор из одного векторного пространства $\mathrm{X}$ в другое пространство $\mathrm{X}'$, такой, что оператор $U^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{X}', \mathrm{X})$ существует (отсюда следует, что $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{X}'$). Отображение, сопоставляющее каждому оператору $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ оператор $T' \in \mathscr{B}(\mathrm{X}')$, определенный формулой

$$T' = UTU^{-1}, \tag{5.61}$$

называется *преобразованием подобия* посредством оператора $U$. Оператор $T'$ называется *подобным*[1] оператору $T$. Он имеет

---

[1] В п. 4.6 мы уже рассмотрели один пример пары подобных проекторов.

по существу ту же структуру, что и $T$, так как взаимно однозначное соответствие $u \to u' = Uu$ инвариантно в том смысле, что $Tu \to T'u' = UTu$. Если $\{x_j\}$ — какой-нибудь базис в $\mathbf{X}$, а $\{x'_j\}$ — базис в $\mathbf{X}'$, причем $x'_j = Ux_j$, то операторы $T$ и $T'$ в базисах $\{x_j\}$ и $\{Ux_j\}$ соответственно представляются одной и той же матрицей.

Если

$$T = \sum_h (\lambda_h P_h + D_h) \tag{5.62}$$

— спектральное представление оператора $T$, то

$$T' = \sum (\lambda_h P'_h + D'_h), \quad P'_h = UP_hU^{-1}, \quad D'_h = UD_hU^{-1}, \tag{5.63}$$

будет спектральным представлением оператора $T'$.

## § 6. Операторы в гильбертовых пространствах

### 1. Гильбертовы пространства

До сих пор мы рассматривали общие линейные операторы, не налагая на них никаких дополнительных ограничений. Однако в приложениях чаще всего встречаются эрмитовы или нормальные операторы. Такие операторы определены в специальных нормированных пространствах $\mathbf{H}$, называемых *гильбертовыми пространствами*, в которых введено *скалярное произведение* $(u, v)$ для любой пары векторов $u$, $v$. В этом параграфе мы увидим, как для таких операторов можно уточнить наши общие результаты, в частности результаты, относящиеся к задаче на собственные значения. Мы по-прежнему предполагаем, что $0 < \dim \mathbf{H} < \infty$.

*Скалярное произведение* — это комплексная функция $(u, v)$ пары векторов $u$, $v \in \mathbf{H}$, эрмитово симметричная:

$$\overline{(u, v)} = (v, u) \tag{6.1}$$

и полуторалинейная, т. е. линейная по $u$ и полулинейная по $v$. Из (6.1) следует, что $(u, u)$ вещественно для всех $u \in \mathbf{H}$; предположим дополнительно, что скалярное произведение положительно определено [1]:

$$(u, u) > 0, \quad \text{если} \quad u \neq 0. \tag{6.2}$$

Мы покажем вскоре, что скалярное произведение $(u, v)$ можно рассматривать как частный случай скалярного произведения

---

[1] В любом конечномерном векторном пространстве $\mathbf{X}$ можно ввести положительно определенную полуторалинейную форму и тем самым превратить $\mathbf{X}$ в гильбертово пространство.

между элементами векторного пространства и элементами его сопряженного. Этим оправдывается использование одного и того же символа для этих двух объектов.

Среди различных возможных норм в векторном пространстве H имеется одна специальная (*гильбертова*) норма, тесно связанная со скалярным произведением в H. Именно эту норму, определяемую равенством

$$\|u\| = (u, u)^{1/2}, \tag{6.3}$$

мы и будем использовать в дальнейшем. [Разумеется, все другие возможные нормы эквивалентны гильбертовой норме; см. (1.20).] Первые два условия (1.18) в определении нормы выполнены очевидным образом. Прежде чем проверять третье условие (неравенство треугольника), заметим, что справедливо следующее *неравенство Шварца*:

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \, \|v\|; \tag{6.4}$$

равенство здесь имеет место тогда и только тогда, когда $u$ и $v$ линейно зависимы. Неравенство (6.4) следует из тождества

$$\| \|v\|^2 u - (u, v) v \|^2 = (\|u\|^2 \|v\|^2 - |(u, v)|^2) \|v\|^2. \tag{6.5}$$

Неравенство треугольника вытекает из (6.4):

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= (u + v, u + v) = \\ &= \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u, v) + \|v\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2. \end{aligned}$$

**Пример 6.1.** Для числовых векторов $u = (\xi_1, \ldots, \xi_N)$ и $v = (\eta_1, \ldots$ $\ldots, \eta_N)$ положим

$$(u, v) = \sum \xi_j \bar{\eta}_j, \quad \|u\|^2 = \sum |\xi_j|^2. \tag{6.6}$$

Наделенное таким скалярным произведением $N$-мерное координатное пространство $C^N$ становится гильбертовым пространством.

**Задача 6.2.** Гильбертова норма характеризуется следующим свойством:

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2. \tag{6.7}$$

**Задача 6.3.** Скалярное произведение $(u, v)$ может быть восстановлено по гильбертовой норме:

$$(u, v) = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 + i\|u+iv\|^2 - i\|u-iv\|^2). \tag{6.8}$$

**Задача 6.4.** Для каждой пары числовых векторов $(\xi_j)$ и $(\eta_j)$ имеют место неравенства

$$\begin{gathered} \left|\sum \xi_j \eta_j\right| \leqslant \left(\sum |\xi_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum |\eta_j|^2\right)^{1/2}, \\ \left(\sum |\xi_j + \eta_j|^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum |\xi_j|^2\right)^{1/2} + \left(\sum |\eta_j|^2\right)^{1/2}. \end{gathered} \tag{6.9}$$

## 2. Сопряженное пространство

Характеристическое свойство евклидова пространства $\mathrm{H}$ состоит в том, что сопряженное к нему пространство $\mathrm{H}^*$ можно отождествить с самим $\mathrm{H}$, т. е. $\mathrm{H}^* = \mathrm{H}$.

Именно, фиксируем $u \in \mathrm{H}$ и положим $f_u\,[v] = (u, v)$. Форма $f_u$ полулинейна на $\mathrm{H}$, и потому $f_u \in \mathrm{H}^*$. Отображение $u \to f_u$ линейно, поскольку из $u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$ следует $f_u\,[v] = (u, v) = \alpha_1 (u_1, v) + \alpha_2 (u_2, v) = \alpha_1 f_{u_1}[v] + \alpha_2 f_{u_2}[v]$, так что $f_u = \alpha_1 f_{u_1} + \alpha_2 f_{u_2}$. Линейный оператор $T\colon u \to f_u$ из $\mathrm{H}$ в $\mathrm{H}^*$ изометричен: $\| Tu \| = \| u \|$. Действительно, согласно (2.22) и неравенству Шварца, имеем $\| Tu \| = \| f_u \| = \sup\limits_{v} |(u, v)| / \| v \| = \| u \|$. В частности, оператор $T$ взаимно однозначен. Так как $\dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{H}^*$, то отсюда следует, что $T$ изометрично отображает $\mathrm{H}$ на все $\mathrm{H}^*$. Это значит, что каждый вектор $f \in \mathrm{H}^*$ имеет вид $f_u$ для некоторого однозначно определенного вектора $u \in \mathrm{H}$, причем $\| f \| = \| u \|$. Естественно отождествить $f$ с $u$; тем самым мы отождествляем $\mathrm{H}^*$ с $\mathrm{H}$.

Так как $(u, v) = f\,[v] = (f, v)$, то скалярное произведение в $\mathrm{H}$ совпадает со скалярным произведением между $\mathrm{H}$ и $\mathrm{H}^*$.

Мы можем перенести теперь на случай гильбертовых пространств различные понятия, определенные в терминах скалярного произведения между векторным пространством и его сопряженным (см. п. 2.2). Если $(u, v) = 0$, то мы пишем $u \perp v$ и говорим, что $u$ и $v$ *взаимно ортогональны* (*перпендикулярны*). Вектор $u$ ортогонален подмножеству $\mathrm{S}$ в $\mathrm{H}$ (обозначение $u \perp \mathrm{S}$), если $u \perp v$ для всех $v \in \mathrm{S}$. Множество всех $u \in \mathrm{H}$, таких, что $u \perp \mathrm{S}$, называется *аннулятором* $\mathrm{S}$ и обозначается через $\mathrm{S}^\perp$. Подмножества $\mathrm{S}$ и $\mathrm{S}'$ в $\mathrm{H}$ называются *ортогональными* (обозначение: $\mathrm{S} \perp \mathrm{S}'$), если каждый вектор $u \in \mathrm{S}$ ортогонален каждому вектору $v \in \mathrm{S}'$.

**Задача 6.5.** Доказать, что $(u, v)$ есть непрерывная функция от $u$ и $v$.

**Задача 6.6.** Доказать теорему Пифагора:

$$\| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2, \quad \text{если} \quad u \perp v. \tag{6.10}$$

**Задача 6.7.** Если $u \perp \mathrm{S}$, то $u \perp \mathrm{M}$, где $\mathrm{M}$ — линейная оболочка множества $\mathrm{S}$. Множество $\mathrm{S}^\perp$ является линейным подпространством и $\mathrm{S}^\perp = \mathrm{M}^\perp$.

Пусть $\mathrm{X}$ и $\mathrm{X}'$ — векторные пространства. Комплексная функция $\mathrm{t}\,[u, u']$, определенная для $u \in \mathrm{X}$, $u' \in \mathrm{X}'$, называется *полуторалинейной формой* на $\mathrm{X} \times \mathrm{X}'$, если она линейна по $u$ и полулинейна по $u'$. В том частном случае, когда $\mathrm{X}' = \mathrm{X}$, мы говорим о полуторалинейной форме на $\mathrm{X}$. Для полуторалинейной формы $\mathrm{t}\,[u, v]$ общего вида значения $\mathrm{t}\,[u, v]$ и $\mathrm{t}\,[v, u]$ никак не связаны между собой, и поэтому *квадратичная форма* $\mathrm{t}\,[u] \equiv \mathrm{t}\,[u, u]$

не обязана принимать вещественные значения. Справедливо, однако, соотношение (*принцип поляризации*)

$$\mathfrak{t}[u, v] = \frac{1}{4}(\mathfrak{t}[u+v] - \mathfrak{t}[u-v] + i\mathfrak{t}[u+iv] - i\mathfrak{t}[u-iv]), \qquad (6.11)$$

аналогичное соотношению (6.8). Таким образом, полуторалинейная форма определяется ассоциированной с ней квадратичной формой $\mathfrak{t}[u]$. В частности, $\mathfrak{t}[u, v] \equiv 0$, если $\mathfrak{t}[u] \equiv 0$. Форма $\mathfrak{t}[u, v]$ называется *полярной формой* для $\mathfrak{t}[u]$.

**Задача 6.8.** Если $|\mathfrak{t}[u]| \leqslant M\|u\|^2$ для всех $u \in \mathrm{H}$, то $|\mathfrak{t}[u, v]| \leqslant 2M\|u\|\|v\|$.

**Задача 6.9.** Если $T$ — линейный оператор из $\mathrm{H}$ в $\mathrm{H}'$, то $\|Tu\|^2$ — квадратичная форма на $\mathrm{H}$ с полярной формой $(Tu, Tv)$.

**Замечание 6.10.** Справедливость формулы (6.11) тесно связана с существованием скаляра $i$. В *вещественном* векторном пространстве квадратичная форма $\mathfrak{t}[u]$ *не* определяет форму $\mathfrak{t}[u, v]$.

## 3. Ортонормированные системы

Набор векторов $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{H}$ называется *ортогональной системой*, если любые два различных элемента этого набора взаимно ортогональны. Ортогональная система называется *ортонормированной*, если каждый ее вектор нормирован:

$$(x_j, x_k) = \delta_{jk}. \qquad (6.12)$$

Как легко видеть, векторы ортонормированной системы линейно независимы. Ортонормированная система $\{x_1, \ldots, x_n\}$ называется *полной*, если $n = N = \dim \mathrm{H}$. Таким образом, такая система есть базис в $\mathrm{H}$, называемый *ортонормированным базисом*.

Пусть $\mathrm{M}$ — линейная оболочка ортонормированной системы $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Для любого $u \in \mathrm{H}$ вектор

$$u' = \sum_{j=1}^{n} (u, x_j)\, x_j \qquad (6.13)$$

принадлежит $\mathrm{M}$, а вектор $u - u'$ принадлежит $\mathrm{M}^{\perp}$. Вектор $u'$ называется *ортогональной проекцией* (или просто проекцией) вектора $u$ на $\mathrm{M}$. Теорема Пифагора (6.10) дает

$$\|u\|^2 = \|u'\|^2 + \|u-u'\|^2 = \sum_{j=1}^{n} |(u, x_j)|^2 + \|u-u'\|^2 \qquad (6.14)$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} |(u, x_j)|^2 \leqslant \|u\|^2 \quad (\textit{неравенство Бесселя}). \tag{6.15}$$

Для любого набора линейно независимых векторов $u_1, \ldots, u_n$ можно построить ортонормированную систему $x_1, \ldots, x_n$, такую, что для каждого $k = 1, \ldots, n$ векторы $x_1, \ldots, x_k$ порождают то же линейное подпространство, что и векторы $u_1, \ldots, u_k$. Докажем это индукцией по $k$. Предположим, что $x_1, \ldots, x_{k-1}$ уже построены. Если $\mathrm{M}_{k-1}$ — их линейная оболочка, то $\mathrm{M}_{k-1}$ совпадает с линейной оболочкой векторов $u_1, \ldots, u_{k-1}$. Положим, $u_k'' = u_k - u_k'$, где $u_k'$ — проекция $u_k$ на $\mathrm{M}_{k-1}$ (если $k = 1$, положим $u_1'' = u_1$). Из линейной независимости векторов $u_j$ следует, что $u_k'' \neq 0$. Положим $x_k = u_k'' \, \|u_k''\|^{-1}$. Векторы $x_1, \ldots, x_k$ удовлетворяют всем поставленным условиям. Описанная конструкция называется *процессом ортогонализации Шмидта*.

Так как каждое линейное подпространство $\mathrm{M}$ в $\mathrm{H}$ имеет какой-нибудь базис $\{u_j\}$, то оно имеет и ортонормированный базис. В частности, в $\mathrm{H}$ существует полная ортонормированная система. Произвольный нормированный вектор $x_1$ можно включить в качестве первого элемента в ортонормированный базис в $\mathrm{H}$.

Из сказанного выше вытекает также, что каждый вектор $u \in \mathrm{H}$ имеет ортогональную проекцию $u'$ на любое заданное линейное подпространство $\mathrm{M}$. Вектор $u'$ однозначно определяется свойствами $u' \in \mathrm{M}$ и $u' = u - u' \in \mathrm{M}^{\perp}$. Таким образом, $\mathrm{H}$ есть прямая сумма $\mathrm{M}$ и $\mathrm{M}^{\perp}$:

$$\mathrm{H} = \mathrm{M} \oplus \mathrm{M}^{\perp}. \tag{6.16}$$

В этом смысле $\mathrm{M}^{\perp}$ называется *ортогональным дополнением* подпространства $\mathrm{M}$. Имеем

$$\mathrm{M}^{\perp\perp} = \mathrm{M}, \quad \dim \mathrm{M}^{\perp} = N - \dim \mathrm{X}. \tag{6.17}$$

В том случае, когда $\mathrm{N} \subset \mathrm{M}$, подпространство $\mathrm{M} \cap \mathrm{N}^{\perp}$ обозначается также через $\mathrm{M} \ominus \mathrm{N}$; оно состоит из всех векторов $u \in \mathrm{M}$, перпендикулярных к $\mathrm{N}$.

В частном случае $\mathrm{M} = \mathrm{H}$ имеем $\mathrm{M}^{\perp} = 0$ и поэтому $u'' = 0$. Разложение (6.13) дает

$$u = \sum_{j=1}^{N} (u, x_j)\, x_j. \tag{6.18}$$

Это — *разложение* вектора $u$ по базису $\{x_j\}$. Умножая разложение (6.18) скалярно на $v$, получаем

$$(u, v) = \sum_j (u, x_j)(x_j, v) = \sum_j (u, x_j)\,\overline{(v, x_j)}. \tag{6.19}$$

В частности,

$$\|u\|^2 = \sum_j |(u, x_j)|^2 \text{ (равенство Парсеваля).} \tag{6.20}$$

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 6.11.** *Для каждой пары линейных подпространств* M *и* M′ *в* H *размерностей* $n$ *и* $n'$ *соответственно справедливо неравенство* $\dim (\mathrm{M}' \cap \mathrm{M}^{\perp}) \geqslant n' - n$.

Это следует из формулы (1.10), так как $\dim \mathrm{M} = N - n$, $\dim (\mathrm{M}' + \mathrm{M}^{\perp}) \leqslant N$.

Пусть $\{x_j\}$ — базис в H (не обязательно ортонормированный). Сопряженный базис $\{e_j\}$ в H* можно считать базисом в H, так что (п. 2.3)

$$(e_j, x_k) = \delta_{jk}. \tag{6.21}$$

Говорят, что $\{x_j\}$ и $\{e_j\}$ образуют *биортогональное семейство* (*биортогональную систему*) векторов в H. Базис $\{x_j\}$ называется *самосопряженным*, если $e_j = x_j$, $j = 1, \ldots, N$. Таким образом, *базис в* H *самосопряжен тогда и только тогда, когда он ортонормирован.*

## 4. Линейные операторы

Рассмотрим линейный оператор $T$ из одного гильбертова пространства H в другое гильбертово пространство H′. Напомним, что норма оператора $T$ определяется равенством $\|T\| = \sup \|Tu\| / \|u\| = \sup |(Tu, u')| / \|u\| \|u'\|$ [см. (4.1)].

Функция

$$\mathfrak{t}[u, u'] = (Tu, u') \tag{6.22}$$

есть полуторалинейная форма на H × H′. Обратно, каждая полуторалинейная форма $\mathfrak{t}[u, u']$ на H × H′ может быть представлена в форме (6.22), где $T$ — некоторый оператор из H в H′. В самом деле, так как $\mathfrak{t}[u, u']$ — полулинейная форма на H′ при фиксированном $u$, то существует единственный вектор $w' \in \mathrm{H}'$, такой, что $\mathfrak{t}[u, u'] = (w', u')$ для всех $u' \in \mathrm{H}'$. Поскольку $w'$ определяется вектором $u$, то можно ввести функцию $T$, положив $w' = Tu$. Нетрудно проверить, что $T$ — линейный оператор из H в H′. В частности, если $\mathfrak{t}$ — полуторалинейная форма на H (т. е. H′ = H), то $T$ — линейный оператор в H.

Аналогичным образом, форму $\mathfrak{t}[u, u']$ можно представить в виде

$$\mathfrak{t}[u, u'] = (u, T^*u'), \tag{6.23}$$

где $T^*$ — линейный оператор из H′ в H, называемый *сопряженным* к оператору $T$. Оператор $T^*$ совпадает с сопряженным оператором, определенным в п.3.6, при отождествлении H*, H′* с H, H′ соответственно.

Оператор $T^*T$ — линейный оператор в H. Равенства

$$(u,\ T^*Tv) = (T^*Tu,\ v) = (Tu,\ Tv) \tag{6.24}$$

показывают, что оператор $T^*T$ соответствует полуторалинейной форме $(Tu,\ Tv)$ на H. Отметим, что первые два члена в (6.24) суть скалярные произведения в H, а последний — в H′. Из (6.24) и (4.2) следует, что $\| T^*T \| = \sup | (Tu,\ Tv) | / \| u \| \| v \| \geqslant \geqslant \sup \| Tu \|^2 / \| u \|^2 = \| T \|^2$. С другой стороны, $\| T^*T \| \leqslant \leqslant \| T^* \| \| T \| = \| T \|^2$, поэтому

$$\| T^*T \| = \| T \|^2. \tag{6.25}$$

В частности, $T^*T = 0$ влечет $T = 0$.

**Задача 6.12.** Доказать, что $\mathrm{N}(T^*T) = \mathrm{N}(T)$.

**Задача 6.13.** Для операторов $T$ в H справедлив принцип поляризации:

$$(Tu,\ v) = \frac{1}{4}[(T(u+v),\ u+v) - (T(u-v),\ u-v) + $$
$$+ i(T(u+iv),\ u+iv) - i(T(u-iv),\ u-iv)]. \tag{6.26}$$

**Задача 6.14.** Пусть $T$ — оператор в H. Если $(Tu,\ u) = 0$ для всех $u \in$ H, то $T = 0$.

Матричное представление линейного оператора связано с парой сопряженных базисов в области определения и в пространстве значений оператора (см. (3.10)). Поэтому естественно ожидать, что выбор самосопряженных (ортонормированных) базисов наиболее удобен для матричного представления операторов в гильбертовых пространствах.

Пусть $T$ — оператор из одного гильбертова пространства H в другое гильбертово пространство H′, а $\{x_k\}$, $\{x'_j\}$ — ортонормированные базисы в H и H′ соответственно. Полагая в (3.10) $f_j = x'_j$, получаем следующие формулы для матричных элементов оператора $T$ относительно базисов $\{x_k\}$ и $\{x'_j\}$:

$$\tau_{jk} = (Tx_k,\ x'_j) = (x_k,\ T^*x'_j). \tag{6.27}$$

Эти формулы следуют, впрочем, непосредственно из разложения

$$Tx_k = \sum_j (Tx_k,\ x'_j)\,x'_j. \tag{6.28}$$

Напомним, что в случае H′ = H мы условились брать $x'_j = x_j$.

**Задача 6.15.** Если $\{x_k\}$ — ортонормированный базис в H и $T$ — оператор в H, то

$$\operatorname{tr} T = \sum_k (Tx_k,\ x_k). \tag{6.29}$$

Матрица сопряженного оператора $T^*$ относительно базисов $\{x'_j\}$ и $\{x_k\}$ такова: $\tau^*_{kj} = (T^*x'_j,\ x_k)$. Сравнение этого выражения с (6.27) дает

$$\tau^*_{kj} = \overline{\tau_{jk}}. \tag{6.30}$$

Таким образом, матрицы операторов $T$ и $T^*$ (относительно одной и той же пары ортонормированных базисов) эрмитово сопряжены друг другу.

## 5. Симметричные формы и симметричные операторы

Полуторалинейная форма $\mathfrak{t}\,[u, v]$ на гильбертовом пространстве $\mathsf{H}$ называется *симметричной*, если

$$\mathfrak{t}\,[v, u] = \overline{\mathfrak{t}\,[u, v]} \quad \text{для всех} \quad u, v \in \mathsf{H}. \tag{6.31}$$

Если форма $\mathfrak{t}\,[u, v]$ симметрична, то ассоциированная с ней квадратичная форма $\mathfrak{t}\,[u]$ принимает только вещественные значения. Как следует из (6.11), верно и обратное.

Симметричная полуторалинейная форма $\mathfrak{t}$ (или ассоциированная с ней квадратичная форма) называется *неотрицательной* (обозначение: $\mathfrak{t} \geqslant 0$), если $\mathfrak{t}\,[u] \geqslant 0$ для всех $u$, и *положительной* (обозначение: $\mathfrak{t} > 0$), если $\mathfrak{t}\,[u] > 0$ для $u \neq 0$. Неравенство Шварца и неравенство треугольника верны не только для скалярного произведения в $\mathsf{H}$ (выделенной положительной формы на $\mathsf{H}$), но и для любой неотрицательной формы:

$$\begin{gathered}
|\mathfrak{t}\,[u, v]| \leqslant \mathfrak{t}\,[u]^{1/2}\,\mathfrak{t}\,[v]^{1/2} \leqslant \frac{1}{2}(\mathfrak{t}\,[u] + \mathfrak{t}\,[v]), \\
\mathfrak{t}\,[u + v]^{1/2} \leqslant \mathfrak{t}\,[u]^{1/2} + \mathfrak{t}\,[v]^{1/2}, \\
\mathfrak{t}\,[u + v] \leqslant 2\mathfrak{t}\,[u] + 2\mathfrak{t}\,[v].
\end{gathered} \tag{6.32}$$

Отметим, что свойство *строгой* положительности не использовалось при выводе этих неравенств для скалярного произведения.

*Нижней границей* (*или нижней гранью*) симметричной формы $\mathfrak{t}$ называется наибольшее вещественное число $\gamma$ такое, что $\mathfrak{t}\,[u] \geqslant \gamma \|u\|^2$. Верхняя граница $\gamma'$ определяется аналогично. Имеем

$$|\mathfrak{t}\,[u, v]| \leqslant M\,\|u\|\,\|v\|, \quad \text{где} \quad M = \max(|\gamma|, |\gamma'|). \tag{6.33}$$

Для доказательства заметим, что, не уменьшая общности, значение $\mathfrak{t}\,[u, v]$ можно считать вещественным, ибо неравенство (6.33) не изменится, если умножить его на скаляр, по абсолютной величине равный единице. Так как форма $\mathfrak{t}\,[u]$ вещественная, то из (6.11) следует, что $\mathfrak{t}\,[u, v] = {}^1/_4(\mathfrak{t}\,[u + v] - \mathfrak{t}\,[u - v])$. Отсюда и из неравенства $|\mathfrak{t}\,[u]| \leqslant M\,\|u\|^2$, справедливого для всех $u$, вытекает оценка $|\mathfrak{t}\,[u, v]| \leqslant {}^1/_4 M\,(\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2) = {}^1/_2 M\,(\|u\|^2 + \|v\|^2)$. Заменяя здесь $u$ и $v$ соответственно на $\alpha u$ и $\alpha^{-1} v$, где $\alpha^2 = \|v\|/\|u\|$, получаем оценку (6.33).

Оператор $T$, связанный с симметричной формой $\mathfrak{t}\,[u, v]$ соотношением (6.22), в силу (6.22), (6.23) и (6.31) совпадает со своим сопряженным:

$$T = T^*. \tag{6.34}$$

Операторы $T$ в $\mathrm{H}$, удовлетворяющие этому условию, называются (*эрмитово*) *симметричными* или *самосопряженными*. Обратно, всякий симметричный оператор $T$ определяет симметричную форму $\mathfrak{t}\,[u, v] = [Tu, v]$ на $\mathrm{H}$. Таким образом, *скалярное произведение* $(Tu, u)$ *вещественно тогда и только тогда, когда оператор* $T$ *симметричен*. Симметричный оператор называется *неотрицательным* (*положительным*), если ассоциированная с ним форма неотрицательна (положительна). Для неотрицательного симметричного оператора $T$ справедливы следующие неравенства, соответствующие неравенствам (6.32):

$$\begin{gathered} |(Tu, v)| \leqslant (Tu, u)^{1/2}\,(Tv, v)^{1/2}, \\ (T(u+v), u+v)^{1/2} \leqslant (Tu, u)^{1/2} + (Tv, v)^{1/2}. \end{gathered} \tag{6.35}$$

Мы будем писать $T \geqslant 0$, если $T$ — неотрицательный симметричный оператор. Вообще мы будем писать

$$T \geqslant S \quad \text{или} \quad S \leqslant T, \tag{6.36}$$

если $S$ и $T$ — симметричные операторы и $T - S \geqslant 0$. Верхняя и нижняя границы квадратичной формы $(Tu, u)$ называются соответственно верхней и нижней границами симметричного оператора $T$.

**Задача 6.16.** Если оператор $T$ симметричен, то и оператор $\alpha T + \beta$ симметричен для любых вещественных $\alpha$ и $\beta$. Вообще для любого многочлена $p$ с вещественными коэффициентами оператор $p\,(T)$ симметричен.

**Задача 6.17.** Для любого линейного оператора $T$ из $\mathrm{H}$ в $\mathrm{H}'$ (где $\mathrm{H}$ и $\mathrm{H}'$ — гильбертовы пространства) операторы $T^*T$ и $TT^*$ суть неотрицательные симметричные операторы в $\mathrm{H}$ и $\mathrm{H}'$ соответственно.

**Задача 6.18.** Если оператор $T$ симметричен, то $T^2 \geqslant 0$; при этом $T^2 = 0$ тогда и только тогда, когда $T = 0$. Если $T$ симметричен и $T^n = 0$ для некоторого натурального $n$, то $T = 0$.

**Задача 6.19.** Из $R \leqslant S$ и $S \leqslant T$ следует $R \leqslant T$. Из $S \leqslant T$ и $T \leqslant S$ следует $S = T$.

## 6. Унитарные, изометричные и нормальные операторы

Пусть $\mathrm{H}$ и $\mathrm{H}'$ — гильбертовы пространства. Оператор $T$ из $\mathrm{H}$ в $\mathrm{H}'$ называется *изометричным* [1], если

$$\|Tu\| = \|u\| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{H}. \tag{6.37}$$

---

[1] Более общим образом, можно определить изометричные операторы, действующие из одного нормированного пространства в другое, однако такое обобщение нам не потребуется.

Это эквивалентно равенству $((T^*T - 1)u, u) = 0$ и, следовательно (см. задачу 6.14),

$$T^*T = 1. \tag{6.38}$$

Отсюда следует, что

$$(Tu, Tv) = (u, v) \quad \text{для всех} \quad u, v \in \mathrm{H}. \tag{6.39}$$

Изометричный оператор называется *унитарным*, если образ оператора $T$ совпадает со всем $\mathrm{H}'$. Так как из условия (6.37) следует взаимная однозначность оператора $T$, то необходимым и достаточным условием существования унитарного оператора из $\mathrm{H}$ в $\mathrm{H}'$ является совпадение размерностей пространств $\mathrm{H}$ и $\mathrm{H}'$. Обратно, если $\dim \mathrm{H} = \dim \mathrm{H}' < \infty$, то любой изометричный оператор из $\mathrm{H}$ в $\mathrm{H}'$ унитарен. Как мы увидим ниже, для бесконечномерных пространств это неверно.

**Задача 6.20.** Оператор $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ унитарен тогда и только тогда, когда $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{H}', \mathrm{H})$ существует и

$$T^{-1} = T^*. \tag{6.40}$$

**Задача 6.21.** Оператор $T$ унитарен тогда и только тогда, когда унитарен оператор $T^*$.

**Задача 6.22.** Если операторы $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H}', \mathrm{H}'')$ и $S \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ изометричны, то и оператор $TS \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}'')$ изометричен. То же верно и для унитарных операторов.

Симметричные и унитарные операторы в гильбертовом пространстве суть частные случаи нормальных операторов. Оператор $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ называется *нормальным*, если $T$ и $T^*$ коммутируют:

$$T^*T = TT^*. \tag{6.41}$$

Это свойство эквивалентно следующему (см. задачу 6.14):

$$\| T^*u \| = \| Tu \| \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{H}. \tag{6.42}$$

Важное свойство нормального оператора состоит в том, что

$$\| T^n \| = \| T \|^n, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6.43}$$

Отсюда следует, в частности, что (spr обозначает спектральный радиус, см. п. 4.2)

$$\operatorname{spr} T = \| T \|. \tag{6.44}$$

Доказательство формулы (6.43) мы начнем с частного случая симметричного оператора $T$. Согласно (6.25), имеем $\| T^2 \| = \| T \|^2$. Так как оператор $T^2$ симметричен, то $\| T^4 \| = \| T^2 \|^2 = \| T \|^4$. Рассуждая аналогично, видим, что равенство (6.43) верно для $n = 2^m$, $m = 1, 2, \ldots$ . Предположим теперь, что оператор $T$ нормален, но не обязательно симметричен. Снова применяя (6.25), получаем $\| T^n \|^2 = \| T^{n*} T^n \|$. Но так как, согласно (6.41), $T^{n*}T^n = (T^*T)^n$ и оператор $T^*T$ симметричен, то $\| T^n \|^2 = \| (T^*T)^n \| = \| T^*T \|^n = \| T \|^{2n}$ для $n = 2^m$. Тем самым (6.43) доказано для $n = 2^m$. В случае произвольного $n$ выберем такое $m$, чтобы $2^m - n = r \geqslant 0$. Так как формула (6.43) верна для $n + r = 2^m$, то $\| T \|^{n+r} = \| T^{n+r} \| \leqslant \| T^n \| \| T^r \| \leqslant \leqslant \| T^n \| \| T \|^r$, откуда $\| T \|^n \leqslant \| T^n \|$. Ввиду того что противоположное неравенство очевидно, равенство (6.43) доказано.

**Задача 6.23.** Если оператор $T$ нормален, то и оператор $p(T)$ нормален для любого полинома $p$.

**Задача 6.24.** Если оператор $T$ нормален и невырожден, то и оператор $T^{-1}$ нормален.

**Задача 6.25.** Если $T$ нормален и $T^n = 0$ для некоторого $n$, то $T = 0$. Другими словами, нормальный оператор нильпотентен тогда и только тогда, когда он равен нулю.

## 7. Проекторы

Важным примером симметричного оператора является *ортогональный проектор*. Рассмотрим подпространство M в H и разложение $\mathrm{H} = \mathrm{M} \oplus \mathrm{M}^{\perp}$ [см. (6.16)]. Оператор $P = P_{\mathrm{M}}$ проектирования на подпространство M параллельно $\mathrm{M}^{\perp}$ называется *ортогональным проектором* на M. Оператор $P$ симметричен и неотрицателен, так как

$$(Pu, u) = (u', u' + u'') = (u', u') \geqslant 0 \tag{6.45}$$

ввиду ортогональности $u'$ и $u''$ (здесь мы использовали обозначения п. 3). Таким образом,

$$P^* = P, \quad P \geqslant 0, \quad P^2 = P. \tag{6.46}$$

Нетрудно видеть, что верно и обратное, т. е. что всякий симметричный идемпотентный оператор $P \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ является ортогональным проектором на $\mathrm{M} = \mathbf{R}(P)$.

**Задача 6.26.** Оператор $1 - P$ есть ортогональный проектор вместе с $P$. Если $P$ — ортогональный проектор, то[1]

$$0 \leqslant P \leqslant 1, \quad \text{причем} \quad \| P \| = 1, \quad \text{если} \quad P \neq 0. \tag{6.47}$$

**Задача 6.27.** Доказать, что $\| (1 - P_{\mathrm{M}})\, u \| = \operatorname{dist}(u, \mathrm{M})$, $u \in \mathrm{M}$.

**Задача 6.28.** Соотношение $\mathrm{M} \perp \mathrm{N}$ эквивалентно равенству $P_{\mathrm{N}} P_{\mathrm{M}} = 0$. Следующие три условия эквивалентны: $\mathrm{M} \supset \mathrm{N}$, $P_{\mathrm{M}} \geqslant P_{\mathrm{N}}$, $P_{\mathrm{M}} P_{\mathrm{N}} = P_{\mathrm{N}}$.

Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — ортогональные проекторы, такие, что

$$P_j P_k = \delta_{jk} P_j. \tag{6.48}$$

---

[1] Обозначение $0 \leqslant P \leqslant 1$ для отношения порядка между симметричными операторами [см. (6.36)] согласуется с обозначением, введенным ранее для проекторов (см. п. 3.4).

Тогда их сумма

$$P = \sum_{j=1}^{n} P_j \tag{6.49}$$

также является ортогональным проектором, образ которого есть прямая сумма образов проекторов $P_j$.

Ортогональные проекторы суть проекторы специального вида. Мы можем, конечно, рассматривать и более общие «косые» проекторы в гильбертовом пространстве H. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{M} \oplus \mathrm{N}$, где M и N не обязательно ортогональны, и пусть $P$ — проектор на M параллельно N. Тогда $P^*$ — проектор на $\mathrm{N}^{\perp}$ параллельно $\mathrm{M}^{\perp}$ [см. (3.43)].

**Задача 6.29.** Доказать, что $\| P \| \geqslant 1$ для всякого проектора $P \neq 0$, причем $\| P \| = 1$ тогда и только тогда, когда $P$ — ортогональный проектор. [*Указание* (относящееся к части «только тогда»). Пусть $u \in \mathrm{N}^{\perp}$. Тогда $u \perp \perp (1 - P)\, u$, и по теореме Пифагора $\| Pu \|^2 = \| u \|^2 + \| (1 - P)\, u \|^2$. Отсюда и из условия $\| P \| = 1$ следует, что $\mathrm{N}^{\perp} \subset \mathrm{M}$. Аналогичные рассуждения, примененные к $P^*$, дают противоположное включение.]

**Задача 6.30.** Всякий нормальный проектор ортогонален.

**Задача 6.31.** Если проектор $P$ в гильбертовом пространстве нетривиален, т. е. $0 \neq P \neq 1$, то[1] $\| P \| = \| 1 - P \|$.

## 8. Пары проекторов

Рассмотрим пару проекторов $P$ и $Q$ в H; напомним (п.4.6), что подпространства $\mathrm{R}(P)$ и $\mathrm{R}(Q)$ изоморфны, если оператор $P - Q$ достаточно мал. Новым здесь будет тот факт, что *оператор $U$, определенный формулой* (4.38), *унитарен, если проекторы $P$ и $Q$ ортогональны*. Действительно, в этом случае $U'^* = V'$ и $R^* = R$ [см. (4.36) и (4.33)], откуда $U^* = V = U^{-1}$. Таким образом, верна следующая

**Теорема 6.32.** *Ортогональные проекторы $P$ и $Q$, удовлетворяющие условию $\| P - Q \| < 1$, унитарно эквивалентны, т. е. существует такой унитарный оператор $U$, что $Q = UPU^{-1}$.*

**Задача 6.33.** Для каждой пары ортогональных проекторов $P$, $Q$ справедливо неравенство $\| P - Q \| \leqslant 1$ [см. (4.34)].

Несколько более глубокий результат в том же направлении содержится в следующей теореме.

**Теорема 6.34**[2]. *Пусть $P$ и $Q$ — ортогональные проекторы, $\mathrm{M} = \mathrm{R}(P), \mathrm{N} = \mathrm{R}(Q)$ и*

$$\| (1 - Q) R \| = \delta < 1. \tag{6.50}$$

---

[1] См. Т. Като [13].

[2] См. Т. Като [12], лемма 221. Этот результат верен в случае $\dim \mathrm{H} = \infty$, чуть более слабый результат был получен ранее Ахиезером и Глазманом [[1]], § 34.

*Тогда имеет место следующая альтернатива: либо*

(i) *$Q$ отображает* $\mathbf{M}$ *на* $\mathbf{N}$ *взаимно однозначно и взаимно непрерывно и*

$$\| P - Q \| = \| (1 - P) Q \| = \| (1 - Q) P \| = \delta; \qquad (6.51)$$

*либо*

(ii) *$Q$ отображает* $\mathbf{M}$ *взаимно однозначно и взаимно непрерывно на некоторое собственное подпространство* $\mathbf{N}_0$ *в* $\mathbf{N}$, *и если $Q_0$ — ортогональный проектор на* $\mathbf{N}_0$, *то*

$$\| P - Q_0 \| = \| (1 - P) Q_0 \| = \| (1 - Q_0) P \| = \| (1 - Q) P \| = \delta,$$
$$\| P - Q \| = \| (1 - P) Q \| = 1. \qquad (6.52)$$

Доказательство. Для любого вектора $u \in \mathbf{M}$ имеем $\| u - Qu \| = \| (1 - Q) Pu \| \leqslant \delta \| u \|$ и потому $\| Qu \| \geqslant \geqslant (1 - \delta) \| u \|$. Таким образом, отображение $u \to Qu$ подпространства $\mathbf{M}$ в подпространство $\mathbf{N}$ взаимно однозначно и непрерывно вместе со своим обратным. Следовательно, образ $Q\mathbf{M} = \mathbf{N}_0$ этого отображения есть замкнутое подпространство в $\mathbf{N}$. Пусть $Q_0$ — ортогональный проектор на $\mathbf{N}_0$.

Для любого $w \in \mathbf{H}$ вектор $Q_0 w$ принадлежит $\mathbf{N}_0$, поэтому $Q_0 w = = Qu$ для некоторого $u \in \mathbf{M}$. Если $Q_0 w \neq 0$, то $u \neq 0$ и

$$\begin{aligned} \| (1 - P) Q_0 w \| &= \| (1 - P) Qu \| = \\ &= \| (1 - P) (Qu - \| Qu \|^2 \| u \|^{-2} u) \| \leqslant \\ &\leqslant \| (Qu - \| Qu \|^2 \| u \|^{-2} u) \|, \end{aligned} \qquad (6.53)$$

так как $(1 - P) u = 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \| (1 - P) Q_0 w \|^2 &\leqslant \| Qu \|^2 - \| Qu \|^4 \| u \|^{-2} = \\ &= \| Qu \|^2 \| u \|^{-2} (\| u \|^2 - \| Qu \|^2) = \\ &= \| u \|^{-2} \| Q_0 w \|^2 \| (1 - Q) u \|^2 \leqslant \\ &\leqslant \| u \|^{-2} \| w \|^2 \| (1 - Q) Pu \|^2 \leqslant \delta^2 \| w \|^2. \end{aligned} \qquad (6.54)$$

Это неравенство верно и для тех векторов $u$, для которых $Q_0 w = = 0$. Поэтому

$$\| (1 - P) Q_0 \| \leqslant \delta = \| (1 - Q) P \|. \qquad (6.55)$$

Далее, для любого $w \in \mathbf{H}$ имеем

$$\begin{aligned} \| (P - Q_0) w \|^2 &= \| (1 - Q_0) Pw - Q_0 (1 - P) w \|^2 = \\ &= \| (1 - Q_0) Pw \|^2 + \| Q_0 (1 - P) w \|^2, \end{aligned} \qquad (6.56)$$

ибо образы проекторов $1 - Q_0$ и $Q_0$ взаимно ортогональны. Ввиду того что $P^2 = P$ и $1 - P = (1 - P)^2$, из (6.56) следует неравенство

$$\| (P - Q_0) w \|^2 \leqslant \| (1 - Q_0) P \|^2 \| Pw \|^2 + \\ + \| Q_0 (1 - P) \|^2 \| (1 - P) w \|^2. \quad (6.57)$$

Так как (согласно определению $Q_0$) $Q_0 P = Q_0 Q P = QP$, то $\| (1 - Q_0) P \| = \| (1 - Q) P \| = \delta$, и в силу неравенства (6.55) $\| Q_0 (1 - P) \| = \| (Q_0 (1 - P))^* \| = \| (1 - P) Q_0 \| \leqslant \delta$. Отсюда вытекает, что

$$\| (P - Q_0) w \|^2 \leqslant \delta^2 (\| Pw \|^2 + \| (1 - P) w \|^2) = \\ = \delta^2 \| w \|^2; \quad (6.58)$$

поэтому $\| P - Q_0 \| \leqslant \delta$. В действительности здесь имеет место равенство, поскольку

$$\delta = \| (1 - Q) P \| = \| (1 - Q_0) P \| = \| (P - Q_0) P \| \leqslant \\ \leqslant \| P - Q_0 \| \leqslant \delta. \quad (6.59)$$

Из неравенства $\| P - Q_0 \| = \delta < 1$ следует, что $P$ отображает $\mathbf{N}_0 = \mathbf{R}(Q_0)$ *на* $\mathbf{M}$ взаимно однозначно (см. задачу 4.11). Применяя неравенство (6.55) к паре $Q_0$, $P$, получаем $\| (1 - Q_0) P \| \leqslant \leqslant \| (1 - P) Q_0 \|$. Сравнение с (6.59) показывает теперь, что в (6.55) имеет место равенство.

В том случае, когда $\mathbf{N}_0 = \mathbf{N}$, предыдущими рассуждениями установлена справедливость пункта (i). Если $\mathbf{N}_0 \neq \mathbf{N}$, то остается лишь доказать последнее из равенств (6.52). Пусть $v$ — элемент из $\mathbf{N}$, не принадлежащий $\mathbf{N}_0$. Как уже отмечалось, $P\mathbf{N}_0 = \mathbf{M}$; поэтому существует вектор $v_0 \in \mathbf{N}_0$, такой, что $Pv_0 = Pv$. Таким образом, $w = v - v_0 \in \mathbf{N}$, $w \neq 0$ и $Pw = 0$; значит, $(P - Q) w = -w$ и $Q (1 - P) w = Qw = w$. Следовательно, $\| P - Q \| \geqslant 1$ и $\| (1 - P) Q \| = \| Q (1 - P) \| \geqslant 1$. Так как противоположные неравенства также верны (см. задачу 6.33), то доказательство теоремы закончено.

В качестве приложения теоремы 6.34 выведем одно неравенство, связывающее пару косых и пару ортогональных проекторов.

**Теорема 6.35.** *Пусть $P'$, $Q'$ — два косых проектора в* $\mathbf{H}$, $\mathbf{M} = \mathbf{R}(P')$, $\mathbf{N} = \mathbf{R}(Q')$, *и пусть $P$ и $Q$ — ортогональные проекторы на* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *соответственно. Тогда*

$$\| P - Q \| \leqslant \| P' - Q' \|. \quad (6.60)$$

Доказательство. Так как $\| P - Q \|$ не превосходит 1 (см. задачу 6.33), то достаточно рассмотреть случай, когда $\| P' - Q' \| = \delta' < 1$. Для любого $u \in \mathbf{H}$ имеем (см. задачу 6.27) $\| (1 - Q) Pu \| = \operatorname{dist}(Pu, \mathbf{N}) \leqslant \| Pu - Q'Pu \| = \| (P' - Q') Pu \| \leqslant \leqslant \delta' \| Pu \| \leqslant \delta' \| u \|$. Следовательно, $\| (1 - Q) P \| \leqslant \delta' < 1$.

Аналогично получаем $\|(1-P)Q\| \leqslant \delta' < 1$. Таким образом, применима теорема 6.34, причем случай (ii) невозможен; поэтому, согласно (6.51), $\|P-Q\| = \|(1-P)Q\| \leqslant \delta' = \|P'-Q'\|$.

**Задача 6.36.** Если $P'$ и $Q'$ — косые проекторы, удовлетворяющие условию $\|P'-Q\| < 1$, то существует унитарный оператор $U$, такой, что $U\mathbf{M} = \mathbf{N}$, $U^{-1}\mathbf{N} = \mathbf{M}$, где $\mathbf{M} = \mathbf{R}(P')$ и $\mathbf{N} = \mathbf{R}(Q')$. [Это предложение допускает непосредственное обобщение на бесконечномерный случай (в каковом оно уже не столь тривиально).]

**Задача 6.37.** Пусть $P'(\varkappa)$ — косой проектор, непрерывно зависящий от $\varkappa$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, и $P(\varkappa)$ — ортогональный проектор на $\mathbf{M}(\varkappa) = \mathbf{R}(P(\varkappa))$. Тогда $P(\varkappa)$ непрерывно зависит от $\varkappa$ и существует такой унитарный оператор $U(\varkappa)$, непрерывно зависящий от $\varkappa$, что $U(\varkappa)\mathbf{M}(0) = \mathbf{M}(\varkappa)$ и $U(\varkappa)^{-1}\mathbf{M}(\varkappa) = \mathbf{M}(0)$.

## 9. Задача на собственные значения

Рассмотрим задачу на собственные значения для оператора в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. Для операторов общего вида ситуация не намного упрощается от того, что оператор действует в гильбертовом пространстве. Это становится ясным, если заметить, что каждое векторное пространство можно превратить в гильбертово пространство, введя в нем скалярное произведение, в то время как задача на собственные значения ставится безотносительно к какому-либо скалярному произведению или даже норме. Однако преимущества гильбертовых пространств обнаруживаются, если рассматриваемый оператор $T$ обладает какими-нибудь специальными свойствами как оператор именно в гильбертовом пространстве, такими, как симметричность, унитарность или нормальность.

**Теорема 6.38.** *Всякий нормальный оператор диагонализуем, и его собственные проекторы суть ортогональные проекторы.*

Доказательство. Пусть $T$ — нормальный оператор. Так как $T$ и $T^*$ коммутируют, имеем

$$(T-\zeta)(T^*-\zeta') = (T^*-\zeta')(T-\zeta). \tag{6.61}$$

Если $\zeta$ и $\zeta'$ не являются собственными значениями операторов $T$ и $T^*$ соответственно, то

$$R^*(\zeta')R(\zeta) = R(\zeta)R^*(\zeta'), \tag{6.62}$$

где $R(\zeta)$ и $R^*(\zeta)$ — резольвенты операторов $T$ и $T^*$. Используя выражение (5.22) для собственного проектора $P_h$, принадлежащего собственному значению $\lambda_h$ оператора $T$, и производя двукратное интегрирование обеих частей равенства (6.62) вдоль подходящих контуров в $\zeta$- и $\zeta'$-плоскостях, получаем

$$P_k^*P_h = P_hP_k^*, \quad h,k = 1, \ldots, s; \tag{6.63}$$

напомним, что оператор $T^*$ имеет собственные значения $\overline{\lambda}_h$ и собственные проекторы $P_h^*$ (см. п. 5.5). Из (6.63) следует, в частности, что $P_h$ и $P_h^*$ коммутируют; следовательно, все операторы $P_h$ нормальны. Этим доказано, что $P_h$ — ортогональные проекторы (см. задачу 6.30):

$$P_h^* = P_h, \quad h = 1, \ldots, s. \tag{6.64}$$

Так как $P_h$ и $T$ коммутируют между собой и $T$ коммутирует с $T^*$, то нильпотентная часть $D_h = (T - \lambda_h) P_h$ оператора $T$ коммутирует с сопряженным к ней оператором $D_h^* = (T^* - \overline{\lambda}_h) P_h^* = (T^* - \overline{\lambda}_h) P_h$; следовательно, $D_h$ — нормальный оператор. Однако всякий нормальный нильпотентный оператор равен нулю (см. задачу 6.25). Таким образом, оператор $T$ диагонализуем.

Итак, спектральное представление нормального оператора имеет вид

$$\begin{gathered} T = \sum_{h=1}^{s} \lambda_h P_h, \quad T^* = \sum_{h=1}^{s} \overline{\lambda}_h P_h, \\ P_h^* = P_h, \quad P_h P_k = \delta_{hk} P_h, \quad \sum_{h=1}^{s} P_h = 1. \end{gathered} \tag{6.65}$$

Операторы $T$ и $T^*$ имеют один и тот же набор ортогональных собственных подпространств, являющихся одновременно алгебраическими и геометрическими собственными подпространствами. Далее, из (6.65) следует, что

$$T^*T = TT^* = \sum_{h=1}^{s} |\lambda_h|^2 P_h. \tag{6.66}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \| Tu \|^2 = (T^*Tu, u) = \sum_h |\lambda_h|^2 (P_h u, u) \leqslant (\max |\lambda_h^2|) \sum (P_h u, u) = \\ = (\max |\lambda_h|^2) \| u \|^2, \end{aligned}$$

откуда видно, что $\| T \| \leqslant \max |\lambda_h|$. С другой стороны, $\| Tu \| = |\lambda_h| \| u \|$ для $u \in \mathbf{M}_h = \mathbf{R}(P_h)$. Таким образом, для нормального оператора

$$\| T \| = \max_h |\lambda_h|. \tag{6.67}$$

Выберем ортонормированный базис в каждом из пространств $\mathbf{M}_h$; объединение этих базисов есть ортонормированный базис в $\mathbf{H}$. Другими словами, существует ортонормированный базис $\{\varphi_n\}$ в $\mathbf{H}$, состоящий из собственных векторов оператора $T$:

$$T\varphi_n = \mu_n \varphi_n, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{6.68}$$

где $\mu_n$ — собственные значения оператора $T$, взятые с соответствующими кратностями. Матрица оператора $T$ в базисе $\{\varphi_n\}$ имеет элементы

$$\tau_{jk} = (T\varphi_k,\ \varphi_j) = \mu_k\delta_{jk};$$

это диагональная матрица с диагональными элементами $\mu_k$.

**Задача 6.39.** Всякий оператор, имеющий спектральное разложение вида (6.65), нормален.

**Задача 6.40.** Собственные значения симметричного оператора вещественны. Нормальный оператор, имеющий вещественные собственные значения, симметричен.

**Задача 6.41.** Каждое собственное значение унитарного оператора по абсолютной величине равно единице. Всякий нормальный оператор с таким свойством унитарен.

**Задача 6.42.** Симметричный оператор неотрицателен (положителен) тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны (положительны). Верхняя (нижняя) граница симметричного оператора совпадает с наибольшим (наименьшим) из его собственных значений.

**Задача 6.43.** Если оператор $T$ нормален, то

$$\begin{aligned} \| R(\zeta) \| &= \frac{1}{\min\limits_{k} |\zeta - \lambda_k|} = \frac{1}{\operatorname{dist}(\zeta,\ \Sigma(T))}, \\ \| S_h \| &= \frac{1}{\min\limits_{k \neq h} |\lambda_h - \lambda_k|}; \end{aligned} \tag{6.70}$$

здесь $R(\zeta)$ — резольвента оператора $T$, а $S_h$ те же, что и в (5.18).

## 10. Принцип минимакса

Пусть $T$ — симметричный оператор в $\mathbf{H}$. Он диагонализуем и имеет вещественные собственные значения (см. задачу 6.40). Пусть

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_N \tag{6.71}$$

— полный набор собственных значений оператора $T$, расположенных в порядке возрастания. Для каждого подпространства $\mathbf{M}$ в $\mathbf{H}$ положим

$$\mu[\mathbf{M}] \equiv \mu[T,\ \mathbf{M}] \equiv \min_{\substack{u \in \mathbf{M}, \\ \|u\| = 1}} (Tu,\ u) = \min_{0 \neq u \in \mathbf{M}} \frac{(Tu,\ u)}{\|u\|^2}. \tag{6.72}$$

*Принцип минимакса* (или скорее *максимина*) гласит:

$$\mu_n = \max_{\operatorname{codim} \mathbf{M} = n-1} \mu[\mathbf{M}] = \max_{\operatorname{codim} \mathbf{M} \leqslant n-1} \mu[\mathbf{M}], \tag{6.73}$$

где максимум берется по всем подпространствам, удовлетворяющим указанным ограничениям на размерность. Равенства (6.73) эквивалентны двум следующим предложениям:

$$\mu_n \geqslant \mu\,[\mathrm{M}] \quad \text{для всех } \mathrm{M} \text{ коразмерности} \leqslant n-1; \tag{6.74}$$

$$\mu_n \leqslant \mu\,[\mathrm{M}_0] \quad \text{для некоторого } \mathrm{M}_0 \text{ коразмерности } n-1. \tag{6.75}$$

Мы докажем эти предложения по отдельности.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис со свойством (6.68). Каждый вектор $u \in \mathrm{H}$ обладает разложением

$$u = \sum \xi_n\varphi_n, \quad \xi_n = (u, \varphi_n), \quad \| u \|^2 = \sum | \xi_n |^2, \tag{6.76}$$

относительно этого базиса. Имеем

$$Tu = \sum \xi_n T\varphi_n = \sum \mu_n\xi_n\varphi_n, \quad (Tu, u) = \sum \mu_n | \xi_n |^2. \tag{6.77}$$

Пусть **M** — произвольное подпространство коразмерности не более $n-1$. Тогда $n$-мерное подпространство $\mathrm{M}'$, порожденное векторами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, содержит по крайней мере один ненулевой вектор $u$, принадлежащий **M** (это следует из леммы 6.11, где **M** надо заменить на $\mathrm{M}^{\perp}$). Координаты $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots, \xi_N$ вектора $u$ равны нулю, и поэтому $(Tu, u) = \sum \mu_k | \xi_k |^2 \leqslant \leqslant \mu_n \sum | \xi_k |^2 = \mu_n \| u \|^2$. Тем самым доказано предложение (6.74).

Подпространство $\mathrm{M}_0$, состоящее из векторов, ортогональных векторам $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, имеет коразмерность $n-1$. У каждого вектора $u \in \mathrm{M}_0$ коэффициенты $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ нулевые. Поэтому $(Tu, u) \geqslant \mu_n \sum | \xi_k |^2 = \mu_n \| u \|^2$. Этим доказано предложение (6.75).

Принцип минимакса представляет собой удобное средство для описания собственных значений без привлечения собственных векторов. В качестве примера применения этого принципа установим следующий *принцип монотонности.*

**Теорема 6.44.** *Если $S$ и $T$ — симметричные операторы и $S \leqslant T$, то собственные значения $S$ не превосходят соответствующих собственных значений оператора $T$, т. е.*

$$\mu_n\,[S] \leqslant \mu_n\,[T], \quad n = 1, \ldots, N. \tag{6.78}$$

*Здесь $\mu_n\,[T]$ обозначает $n$-е собственное значение оператора $T$, причем предполагается, что собственные значения расположены в порядке возрастания, как в* (6.71).

Доказательство следует непосредственно из принципа минимакса, так как $S \leqslant T$ влечет $(Su, u) \leqslant (Tu, u)$, и поэтому $\mu\,[S, \mathrm{M}] \leqslant \mu\,[T, \mathrm{M}]$ для любого подпространства **M**.

**Задача 6.45.** Для каждой пары симметричных операторов $S$ и $T$ справедливы неравенства

$$\mu_1\,[S] + \mu_1\,[T] \leqslant \mu_1\,[S + T] \leqslant \mu_1\,[S] + \mu_N\,[T]. \tag{6.79}$$

Пусть $\mathbf{M}$ — подпространство в $\mathbf{H}$ и $P$ — ортогональный проектор на $\mathbf{M}$. Для всякого оператора $T$ в $\mathbf{H}$ оператор $S = PTP$ называется *ортогональной проекцией оператора $T$ на* $\mathbf{M}$. Подпространство $\mathbf{M}$ инвариантно относительно $S$, и поэтому можно говорить о собственных значениях оператора $S$ в $\mathbf{M}$ (точнее, о собственных значениях части $S_{\mathbf{M}}$ оператора $S$ в $\mathbf{M}$). Отметим, что полный набор оператора $S_{\mathbf{M}}$ состоит из $N - r$ собственных значений, где $r = \operatorname{codim} \mathbf{M}$.

**Теорема 6.46.** *Пусть $T$, $S$ и $S_{\mathbf{M}}$ те же, что и выше. Если оператор $T$ симметричен, то операторы $S$ и $S_{\mathbf{M}}$ также симметричны и, кроме того,*

$$\mu_n [T] \leqslant \mu_n [S_{\mathbf{M}}] \leqslant \mu_{n+r} [T], \quad n = 1, \ldots, N - r. \tag{6.80}$$

Доказательство. Симметричность операторов $S$ и $S_{\mathbf{M}}$ очевидна. Собственное значение $\mu_n [S_{\mathbf{M}}]$ равно $\max \mu [S_{\mathbf{M}}, \mathbf{M}']$, где максимум берется по всем подпространствам $\mathbf{M}' \subset \mathbf{M}$ таким, что коразмерность $\mathbf{M}'$ относительно $\mathbf{M}$ равна $n - 1$ (т. е. $\dim \mathbf{M}/\mathbf{M}' = n - 1$). Так как $(S_{\mathbf{M}}u, u) = (Su, u) = (Tu, u)$ для каждого $u \in \mathbf{M}$, то $\mu [S_{\mathbf{M}}, \mathbf{M}'] = \mu [S, \mathbf{M}'] = \mu [T, \mathbf{M}']$, а из $\dim \mathbf{M}/\mathbf{M}' = n - 1$ следует, что $\operatorname{codim} \mathbf{M}' = \dim \mathbf{H}/\mathbf{M}' = n + r - 1$. Следовательно, $\mu_n [S_{\mathbf{M}}]$ не превосходит $\mu_{n+r} [T] = \max \mu [T, \mathbf{M}']$, где максимум берется по всем подпространствам в $\mathbf{H}$ коразмерности $n + r - 1$. Этим доказано второе неравенство в (6.80).

Далее, $\mu_n [T] = \mu [T, \mathbf{M}_0]$, где $\mathbf{M}_0$ — подпространство, фигурирующее в утверждении (6.75). Отсюда следует, что $\mu_n [T] \leqslant \leqslant \mu [T, \mathbf{M}_0 \cap \mathbf{M}] = \mu [S_{\mathbf{M}}, \mathbf{M}_0 \cap \mathbf{M}]$. Подпространство $\mathbf{M}_0 \cap \mathbf{M}$ имеет коразмерность в $\mathbf{M}$ не более $n - 1$, так как $\operatorname{codim} \mathbf{M} = n - 1$. Поэтому, согласно предложению (6.74),

$$\mu [S_{\mathbf{M}}, \mathbf{M}_0 \cap \mathbf{M}] \leqslant \mu_n [S_{\mathbf{M}}].$$

Этим доказано первое неравенство в (6.80).

# ГЛАВА II

# ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ В КОНЕЧНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В этой главе мы изложим теорию возмущений линейных операторов, действующих в конечномерном пространстве. Основной вопрос здесь — каким образом изменяются собственные значения и собственные векторы (или собственные проекторы) при изменении оператора и, в частности, в том случае, когда оператор аналитически зависит от некоторого параметра. Эта задача является частным случаем более общей и более интересной задачи о возмущении линейного оператора, действующего в бесконечномерном пространстве.

Конечномерному случаю посвящена отдельная глава по трем причинам. Во-первых, он не тривиален. Во-вторых, в этом частном случае довольно хорошо проявляются некоторые черты общей теории, в особенности теории возмущений изолированных собственных значений. Эти разделы теории удобно обсудить в упрощенной ситуации, не обременяя себя трудностями, возникающими из-за бесконечномерности. Видоизменения, требующиеся при переходе к бесконечномерному случаю, а также те разделы общей теории, которые характерны именно для бесконечномерного случая, будут изложены в последующих главах. В-третьих, конечномерный вариант теории представляет и самостоятельный интерес, например в связи с вычислительными методами линейной алгебры. Читатель, которого интересует лишь конечномерный случай, найдет в этой главе все нужное ему, что избавит его от необходимости разбираться в общей теории.

Как уже было сказано, рассматриваемые в этой главе вопросы никоим образом не тривиальны; для их решения было предложено много различных методов. Мы используем здесь метод, основанный на теоретико-функциональном изучении резольвенты, и в частности представление собственного проектора как контурного интеграла от резольвенты. Это скорейший путь для получения общих результатов, а также различных оценок скорости сходимости рядов теории возмущений. В некотором смысле применение теории функций к операторнозначным функциям не является совсем элементарным, однако, как правило, студенты, специализирующиеся по прикладной математике, довольно хорошо знают теорию функций, и автор надеется, что наличие в книге небольшой порции теории операторнозначных функций комплексной переменной не послужит помехой для читателей-прикладников.

## § 1. Аналитическое возмущение собственных значений

### 1. Постановка задачи

Мы приступаем теперь собственно к одной из тем этой книги — теории возмущений для задачи на собственные значения в конечномерном векторном пространстве X[1]. *Типичная задача* этой теории заключается в изучении поведения собственных значений и собственных векторов (или собственных подпространств) линейного оператора $T$, когда $T$ подвергается некоторому малому возмущению[2]. При рассмотрении такой задачи удобно ввести семейство операторов вида

$$T(\varkappa) = T + \varkappa T', \tag{1.1}$$

где $\varkappa$ — скалярный параметр, предполагаемый достаточно малым. Оператор $T(0) = T$ называется *невозмущенным оператором*, а $\varkappa T'$ — *возмущением*. Возникает вопрос, можно ли собственные значения и собственные векторы оператора $T(\varkappa)$ представить степенными рядами по $\varkappa$, т. е., другими словами, будут ли они голоморфными функциями от $\varkappa$ в некоторой окрестности точки $\varkappa = 0$? Если это верно, то изменение собственных значений и собственных векторов при достаточно малых $|\varkappa|$ будет по порядку величины таким же, как и само возмущение $\varkappa T'$. Однако, как мы увидим ниже, это не всегда так.

Вместо семейства (1.1) можно рассматривать более общие семейства

$$T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)} + \varkappa^2 T^{(2)} + \ldots \, . \tag{1.2}$$

Вообще можно считать, что операторнозначная функция $T(\varkappa)$ голоморфна в некоторой области $D_0$ комплексной $\varkappa$-плоскости[3].

---

[1] В этом параграфе мы предполагаем, что $0 < \dim \mathbf{X} = N < \infty$. В ряде случаев X будем считать нормированным пространством с подходящим образом выбранной нормой.

[2] *Статей, в которых теория возмущений излагалась бы именно для конечномерных пространств,* немного; см. Реллих [1] и [8]. Дэвис [1], Б. Л. Лившиц [1], Вишик и Люстерник [1]. Укажем статьи, посвященные аналитической теории возмущений в банаховых пространствах: Реллих [1] — [5], Сёкефальви-Надь [1]. [2], Вольф [1], Т. Като [1], [3], [6], Данфорд и Шварц ⟦1⟧, Рисс и Сёкефальви-Надь ⟦1⟧. См. также Баумгертель [1], Порат [1], [2], Реллих [6], Розенблум [1], Шефке [3] — [5], Шрёдер [1] — [3], Шмульян [1].

[3] Можно ограничиться вещественными значениями параметра $\varkappa$, но так как функцию (1.2) от вещественной переменной $\varkappa$ всегда можно продолжить в комплексную область, то рассмотрение сразу случая комплексного параметра $\varkappa$ не ограничивает общности.

Собственные значения оператора $T(\varkappa)$ удовлетворяют характеристическому уравнению (см. задачу I.5.16)

$$\det(T(\varkappa)-\zeta)=0. \tag{1.3}$$

Это — алгебраическое уравнение относительно $\zeta$ степени $N = \dim \mathrm{X}$, коэффициенты которого суть голоморфные функции от $\varkappa$, что становится видно, если записать уравнение (1.3) с помощью матрицы оператора $T(\varkappa)$ относительно некоторого базиса $\{x_j\}$ в X; действительно, каждый элемент этой матрицы является голоморфной функцией от $\varkappa$ (см. I.3.10). Как следует из одного хорошо известного результата [1]) теории функций, корни уравнения (1.3) суть *ветви аналитических функций от $\varkappa$, имеющих только алгебраические особенности.* Более точно, корни уравнения (1.3) для $\varkappa \in \mathrm{D}_0$ образуют одну или несколько ветвей одной или нескольких аналитических функций, имеющих только алгебраические особенности в $\mathrm{D}_0$.

Отсюда следует, что число собственных значений оператора $T(\varkappa)$ одно и то же, скажем равно $s$, для всех $\varkappa \in \mathrm{D}_0$, за исключением некоторых точек, которые мы будем называть *исключительными.* В каждом компактном подмножестве в $\mathrm{D}_0$ содержится лишь конечное число исключительных точек. Число $s$ равно $N$, если аналитические функции, являющиеся корнями уравнения (1.3), все различны; в этом случае оператор $T(\varkappa)$ прост и, следовательно, диагонализуем для всех неисключительных значений $\varkappa$. Если же среди аналитических решений уравнения (1.3) есть совпадающие, то $s < N$; в этом случае будем говорить, что $T(\varkappa)$ имеет *постоянное вырождение.*

**Пример 1.1.** Здесь собраны простейшие примеры, иллюстрирующие различные возможности, описанные выше. Во всех примерах $T(\varkappa)$ будет семейством операторов (1.1) в двумерном пространстве ($N = 2$). Для простоты отождествим оператор $T(\varkappa)$ с его матрицей относительно некоторого фиксированного базиса.

a) $$T(\varkappa)=\begin{pmatrix}1 & \varkappa\\ \varkappa & -1\end{pmatrix}.$$

Собственные значения

$$\lambda_{\pm}(\varkappa)=\pm(1+\varkappa^2)^{1/2} \tag{1.4}$$

оператора $T(\varkappa)$ суть ветви одной двузначной аналитической функции $(1+\varkappa^2)^{1/2}$. Таким образом, $s=N=2$, а исключительными точками служат $\varkappa=\pm i$. Операторы $T(\pm i)$ имеют единственное собственное значение 0.

b) $$T(\varkappa)=\begin{pmatrix}0 & \varkappa\\ \varkappa & 0\end{pmatrix}, \quad s=N=2.$$

---

[1]) См. Кнопп [2], стр. 119, где рассматриваются алгебраические функции. Фактически уравнение (1.3) определяет $\zeta$ как *алгеброидную* (не обязательно алгебраическую) функцию, которая, однако, локально устроена как алгебраическая. По поводу детального теоретико-функционального рассмотрения уравнения (1.3) см. Баумгертель [1].

Собственные значения суть $\pm\varkappa$; таким образом, две различные целые функции удовлетворяют характеристическому уравнению $\zeta^2 \varkappa^2 = 0$. В этом случае существует одна исключительная точка $\varkappa = 0$, в которой $T(\varkappa)$ имеет единственное собственное значение 0.

c) $$T(\varkappa) = \begin{pmatrix} 0 & \varkappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 1.$$

В этом случае $T(\varkappa)$ имеет постоянное вырождение, так как 0 является единственным собственным значением оператора $T(\varkappa)$ при всех $\varkappa$. Характеристическому уравнению удовлетворяют две совпадающие аналитические функции, тождественно равные нулю. Исключительных точек нет.

d) $$T(\varkappa) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \varkappa & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 2.$$

Собственные значения $\pm\varkappa^{1/2}$ образуют одну двузначную функцию $\varkappa^{1/2}$. Единственная особая точка — это $\varkappa = 0$.

e) $$T(\varkappa) = \begin{pmatrix} 1 & \varkappa \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 2.$$

Собственные значения суть 0 и 1. Исключительных точек нет.

f) $$T(\varkappa) = \begin{pmatrix} \varkappa & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad s = 2.$$

Собственные значения суть 0 и $\varkappa$; это две различные целые функции. Имеется одна исключительная точка $\varkappa = 0$.

## 2. Особые точки собственных значений

Рассмотрим подробнее собственные значения оператора $T(\varkappa)$. Так как они образуют в общем случае многозначную аналитическую функцию от $\varkappa$, то требуется некоторая аккуратность в обозначениях. Если $\varkappa$ пробегает односвязную [1]) подобласть $\mathrm{D}$ основной области $\mathrm{D}_0$, не содержащую исключительных точек (такую область будем называть *простой подобластью*), то собственные значения оператора $T(\varkappa)$ можно представить в виде

$$\lambda_1(\varkappa), \quad \lambda_2(\varkappa), \quad \ldots, \quad \lambda_s(\varkappa), \tag{1.5}$$

где все функции $\lambda_h(\varkappa)$, $h = 1, \ldots, s$, голоморфны в $\mathrm{D}$ и $\lambda_h(\varkappa) \neq \lambda_k(\varkappa)$ при $h \neq k$.

Рассмотрим теперь поведение собственных значений в окрестности какой-нибудь исключительной точки $\varkappa$; без ограничения общности можно считать $\varkappa = 0$. Пусть $\mathrm{D}$ — малый диск, лежащий в рассматриваемой окрестности и не содержащий точки $\varkappa = 0$. Собственные значения оператора $T(\varkappa)$ при $\varkappa \in \mathrm{D}$ можно представить в виде (1.5). При непрерывном перемещении диска $\mathrm{D}$ вокруг точки $\varkappa = 0$ функции $\lambda_h(\varkappa)$ допускают аналитические продолжения. В результате одного оборота диска $\mathrm{D}$ вокруг точки

---

[1]) См. Кнопп [1], стр. 19.

$\varkappa = 0$ функции $\lambda_1(\varkappa), \ldots, \lambda_s(\varkappa)$ подвергнутся некоторой перестановке. Объединим функции (1.5) в группы

$$\{\lambda_1(\varkappa), \ldots, \lambda_p(\varkappa)\}, \ \{\lambda_{p+1}(\varkappa), \ldots, \lambda_{p+q}(\varkappa)\}, \ \ldots \tag{1.6}$$

таким образом, чтобы функции каждой группы циклически переставлялись в результате одного оборота диска D вокруг точки $\varkappa = 0$. Каждую такую группу назовем для краткости *циклом* в исключительной точке $\varkappa = 0$, а число элементов цикла — его *периодом*.

Очевидно, что элементы цикла с периодом $p$ образуют ветвь аналитической функции (определенной в окрестности точки $\varkappa = 0$) с точкой ветвления $\varkappa = 0$ (при $p \geqslant 2$); поэтому справедливо *разложение Пюизо* [1]

$$\lambda_h(\varkappa) = \lambda + \alpha_1\omega^h\varkappa^{1/p} + \alpha_2\omega^{2h}\varkappa^{2/p} + \ldots, \quad h = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{1.7}$$

где $\omega = \exp(2\pi i/p)$. Здесь следует отметить, что в разложении (1.7) нет отрицательных степеней $\varkappa^{1/p}$, так как коэффициент при $\zeta^N$ в (1.3) равен $(-1)^N$, и, значит, функции $\lambda_h(\varkappa)$ непрерывны в точке $\varkappa = 0$ [2]. Число $\lambda = \lambda_h(0)$ назовем *центром* рассматриваемого цикла.

Разложение (1.7) показывает, что величина $|\lambda_h(\varkappa) - \lambda|$, $h = 1, \ldots, p$, имеет порядок $|\varkappa|^{1/p}$ при малых $|\varkappa|$. Поэтому приращение собственных значений, входящих в цикл периода $p$, в окрестности соответствующей исключительной точки представляет собой бесконечно большую величину по сравнению с изменением самого оператора $T(\varkappa)$ [3].

Задача 1.2. Сумма функций $\lambda_h(\varkappa)$, принадлежащих одному циклу, голоморфна в окрестности соответствующей исключительной точки.

В общем случае существует несколько циклов с одним и тем же центром $\lambda$. О собственных значениях (1.7), принадлежащих циклам с центром $\lambda$, говорят, что они возникли при *расщеплении* в точке $\varkappa = 0$ невозмущенного собственного значения $\lambda$. Множество таких собственных значений назовем *$\lambda$-группой*, так как при малых $|\varkappa|$ они располагаются вокруг $\lambda$.

**Замечание 1.3.** Исключительная точка не обязана быть точкой ветвления аналитической функции, представляющей собственные значения. Другими словами, возможен случай, когда все циклы в исключительной точке $\varkappa = \varkappa_0$ имеют период 1. Однако хотя бы два собственных значения, различных при $\varkappa \neq \varkappa$, должны

---

[1] Кнопп [2], стр. 130.

[2] Кнопп [2], стр. 122.

[3] Этот факт важен для вычислительных методов линейной алгебры.

совпадать при $\varkappa = \varkappa_0$ (определение исключительной точки). Таким образом, расщепление имеет место в каждой исключительной точке (и только в таких точках).

**Пример 1.4.** Вернемся к примеру 1.1. В a) и d) циклы имеют порядок 2. В b) и f) в точке $\varkappa = 0$ существуют два цикла периода 1. В c) и e) исключительных точек нет.

### 3. Возмущение резольвенты

Резольвента

$$R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1} \tag{1.8}$$

оператора $T(\varkappa)$ определена для всех $\zeta$, не равных собственным значениям $T(\varkappa)$, и является мероморфной функцией от $\zeta$ при каждом фиксированном $\varkappa \in \mathrm{D}_0$. Более того, верна

**Теорема 1.5.** *$R(\zeta, \varkappa)$ — голоморфная функция переменных $\zeta$ и $\varkappa$ в любой области, в которой $\zeta$ не равно собственным значениям оператора $T(\varkappa)$.*

Доказательство. Пусть точка $\zeta = \zeta_0$, $\varkappa = \varkappa_0$ принадлежит допустимой области; не ограничивая общности, можно считать, что $\varkappa_0 = 0$. Таким образом, $\zeta_0$ не принадлежит спектру оператора $T(0) = T$ и

$$\begin{aligned} T(\varkappa) - \zeta = T - \zeta_0 + (\zeta - \zeta_0) + A(\varkappa) = \\ = [1 - (\zeta - \zeta_0 - A(\varkappa))\, R(\zeta_0)]\, (T - \zeta_0), \end{aligned} \tag{1.9}$$

где $R(\zeta) = R(\zeta, 0) = (T - \zeta)^{-1}$, а возмущение $A(\varkappa)$ имеет вид

$$A(\varkappa) = T(\varkappa) - T = \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n T^{(n)} \tag{1.10}$$

(разложение в точке $\varkappa = 0$ функции $T(\varkappa)$ в ряд типа (1.2)). Поэтому резольвента

$$R(\zeta, \varkappa) = R(\zeta_0)\,[1 - (\zeta - \zeta_0 - A(\varkappa))\, R(\zeta_0)]^{-1} \tag{1.11}$$

существует, если член $[\ ]^{-1}$ может быть определен сходящимся рядом Неймана (см. пример I.4.5), а для этого достаточным условием служит, например, неравенство

$$|\zeta - \zeta_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |\varkappa|^n \, \|T^{(n)}\| < \|R(\zeta_0)\|^{-1} \tag{1.12}$$

(ибо $|\zeta - \zeta_0| + \|A(\varkappa)\|$ не превосходит левой части (1.12)). Это неравенство очевидным образом выполняется для достаточно малых $|\zeta - \zeta_0|$ и $|\varkappa|$, и в этом случае правую часть формулы (1.11) можно представить в виде двойного степенного ряда относительно $\zeta - \zeta_0$ и $\varkappa$. Этим доказана голоморфность $R(\zeta, \varkappa)$ как функции двух переменных $\zeta$ и $\varkappa$ в окрестности точки $\zeta = \zeta_0$, $\varkappa = 0$.

В дальнейшем нам будет более удобно записывать $R(\zeta, \varkappa)$ в виде степенного ряда по $\varkappa$ с коэффициентами, зависящими от $\zeta$. Полагая $\zeta_0 = \zeta$ в (1.11), получаем

$$R(\zeta, \varkappa) = R(\zeta)\,[1 + A(\varkappa)\,R(\zeta)]^{-1} =$$

$$= R(\zeta) \sum_{p=0}^{\infty} [-A(\varkappa)\,R(\zeta)]^p = R(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n R^{(n)}(\zeta), \qquad (1.13)$$

где

$$R^{(n)}(\zeta) = \sum_{\substack{\nu_1 + \ldots + \nu_p = n \\ \nu_j \geqslant 1}} (-1)^p R(\zeta)\, T^{(\nu_i)} R(\zeta)\, T^{(\nu_2)} \ldots T^{(\nu_p)} R(\zeta), \qquad (1.14)$$

причем сумма берется по всем целым положительным $p$ и $\nu_1, \ldots, \nu_p$, таким, что $1 \leqslant p \leqslant n$, $\nu_1 + \ldots + \nu_p = n$.

Разложение (1.13) назовем *вторым рядом Неймана* для резольвенты. Он равномерно сходится для достаточно малых $\varkappa$ и $\zeta \in \Gamma$, если $\Gamma$ — компактное подмножество резольвентного множества $\mathrm{P}(T)$ оператора $T = T(0)$. Это следует из (1.12), ввиду того что $\| R(\zeta) \|^{-1}$ имеет положительный минимум на $\Gamma$.

**Пример 1.6.** Резольвента оператора $T(\varkappa)$ из примера 1.1, a) имеет вид

$$R(\zeta, \varkappa) = (\zeta^2 - 1 - \varkappa^2)^{-1} \begin{pmatrix} 1-\zeta & -\varkappa \\ -\varkappa & 1-\zeta \end{pmatrix}. \qquad (1.15)$$

**Задача 1.7.** Найти резольвенты операторов $T(\varkappa)$ из примера 1.1, b) — f).

## 4. Возмущение собственных проекторов

Пусть $\lambda$ — собственное значение оператора $T = T(0)$ кратности[1] $m$ и $\Gamma$ — замкнутый положительно ориентированный контур (скажем, окружность), содержащийся в резольвентном множестве $\mathrm{P}(T)$ и содержащий внутри себя $\lambda$, а больше никаких других собственных значений оператора $T$. Как отмечалось выше, второй ряд Неймана (1.13) сходится для достаточно малых $|\varkappa|$ равномерно по $\zeta \in \Gamma$. Из существования резольвенты $R(\zeta, \varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ для всех $\zeta \in \Gamma$ вытекает, что на контуре $\Gamma$ собственных значений оператора $T(\varkappa)$ нет.

---

[1] Всюду, где не оговорено противное, «кратность» означает «*алгебраическая* кратность».

Оператор[1])

$$P(\varkappa) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R(\zeta, \varkappa)\, d\zeta \tag{1.16}$$

является проектором и равен сумме собственных проекторов, принадлежащих собственным значениям оператора $T(\varkappa)$, лежащим внутри контура Г (см. задачу I.5.9). В частности, проектор $P(0) = P$ совпадает с собственным проектором для собственного значения $\lambda$ оператора $T$. Интегрируя почленно разложение (1.13), получаем

$$P(\varkappa) = P + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n P^{(n)}, \tag{1.17}$$

где

$$P^{(n)} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^{(n)}(\zeta)\, d\zeta. \tag{1.18}$$

Ряд (1.17) сходится для малых $|\varkappa|$, так что $P(\varkappa)$ — голоморфная функция в окрестности точки $\varkappa = 0$. Из леммы I.4.10 следует, что образ $\mathrm{M}(\varkappa)$ оператора $P(\varkappa)$ изоморфен (алгебраическому) собственному подпространству $\mathrm{M} = \mathrm{M}(0) = P\mathrm{X}$ оператора $T$, принадлежащему собственному значению $\lambda$. Имеем, в частности,

$$\dim P(\varkappa) = \dim P = m. \tag{1.19}$$

Так как неравенство (1.19) верно для всех достаточно малых $|\varkappa|$, то собственные значения оператора $T(\varkappa)$, лежащие внутри Г, образуют $\lambda$-группу. Для краткости назовем $P(\varkappa)$ *тотальным проектором*, а $\mathrm{M}(\varkappa)$ — *тотальным собственным подпространством* рассматриваемой $\lambda$-группы.

Если $\varkappa = 0$ не является исключительной точкой, то при $\varkappa = 0$ рассматриваемое собственное значение $\lambda$ не расщепляется. В этом случае в окрестности точки $\lambda$ находится точно одно собственное значение $\lambda(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ и $P(\varkappa)$ есть собственный проектор, принадлежащий $\lambda(\varkappa)$. Соотношение (1.19) показывает, что кратность $\lambda(\varkappa)$ равна $m$. Аналогичные результаты имеют место и для любой другой неисключительной точки $\varkappa = \varkappa_0$.

Рассмотрим теперь простую подобласть D в $\varkappa$-плоскости и множество (1.5) собственных значений оператора $T(\varkappa)$ для $\varkappa \in \mathrm{D}$ и обозначим через $P_h(\varkappa)$ собственный проектор, принадлежащий собственному значению $\lambda_h(\varkappa)$, $h = 1, \ldots, s$. Полученный выше результат показывает, что каждый проектор $P_h(\varkappa)$ голоморфен

---

[1]) Следующая интегральная формула играет основную роль на протяжении всей книги. В теории возмущений она была впервые применена Секефальви-Надем [1] и Т. Като [1], что позволило значительно упростить первоначальный метод Реллиха [1] — [5].

в D и каждое собственное значение $\lambda_h(\varkappa)$ имеет постоянную кратность $m_h$. Здесь существенно, что подобласть D проста (т. е. не содержит исключительных точек); в самом деле, проектор $P_1(\varkappa_0)$ даже не определен, если, например, $\lambda_1(\varkappa_0)=\lambda_2(\varkappa_0)$, что может иметь место, если точка $\varkappa_0$ — исключительная.

Пусть $\mathrm{M}_h(\varkappa)=P_h(\varkappa)\,\mathrm{X}$ — (алгебраическое) собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda_h(\varkappa)$. Имеем (см. (I.5.34))

$$\begin{gathered}\mathrm{X}=\mathrm{M}_1(\varkappa)\oplus\ldots\oplus\mathrm{M}_s(\varkappa),\\ \dim\mathrm{M}_h(\varkappa)=m_h,\qquad\sum_{h=1}^{s}m_h=N,\qquad\varkappa\in\mathrm{D}.\end{gathered}\tag{1.20}$$

Собственный нильпотент $D_h(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$, соответствующий $\lambda_h(\varkappa)$, голоморфен в D, так как согласно (I.5.26)

$$D_h(\varkappa)=(T(\varkappa)-\lambda_h(\varkappa))\,P_h(\varkappa).\tag{1.21}$$

### 5. Особенности собственных проекторов

Рассмотрим поведение собственных проекторов $P_h(\varkappa)$ возле какой-нибудь исключительной точки; снова можно считать, что это точка $\varkappa=0$. Как было показано выше, каждое собственное значение $\lambda$ оператора $T$ вообще говоря расщепляется на несколько собственных значений оператора $T(\varkappa)$ при $\varkappa\neq0$, однако соответствующий тотальный проектор голоморфен в точке $\varkappa=0$ (см. (1.17)). Выберем снова в окрестности точки $\varkappa=0$ малый диск D, не содержащий самой этой точки; собственные значения $\lambda_h(\varkappa)$, собственные проекторы $P_h(\varkappa)$ и собственные нильпотенты $D_h(\varkappa)$, как показано выше, определены и голоморфны в D. После одного оборота диска D вокруг точки $\varkappa=0$ (см. п.2) каждое семейство $\{\lambda_h(\varkappa)\}$, $\{P_h(\varkappa)\}$ и $\{D_h(\varkappa)\}$ подвергается перестановке, связанной с процессом аналитического продолжения. Докажем, что эти перестановки для всех трех семейств совпадают.

Резольвента $R(\zeta,\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ допускает разложение на простейшие дроби:

$$R(\zeta,\varkappa)=-\sum_{h=1}^{s}\left[\frac{P_h(\varkappa)}{\zeta-\lambda_h(\varkappa)}+\frac{D_h(\varkappa)}{(\zeta-\lambda_h(\varkappa))^2}+\ldots+\frac{D_h(\varkappa)^{m_h-1}}{(\zeta-\lambda_h(\varkappa))^{m_h}}\right]\tag{1.22}$$

(см. (I.5.23)); здесь предполагается, что $\zeta$ находится где-то далеко от спектра оператора $T$, так что $\zeta\in\mathrm{P}(T(\varkappa))$ для всех рассматриваемых $\varkappa$. Если собственные значения $\lambda_1(\varkappa),\ldots,\lambda_p(\varkappa)$ образуют цикл (см. п. 2), то упомянутая перестановка переводит $\lambda_h(\varkappa)$ в $\lambda_{h+1}(\varkappa)$ при $1\leqslant h\leqslant p-1$, а $\lambda_p(\varkappa)$ в $\lambda_1(\varkappa)$. Так как функция $R(\zeta, \varkappa)$ не изменяется в результате рассматриваемого аналитического продолжения, то перестановка, действующая на собственные проекторы, должна переводить $P_h(\varkappa)$ в $P_{h+1}(\varkappa)$ при $1 \leqslant h \leqslant p-1$, а $P_p(\varkappa)$ в $P_1(\varkappa)$[1]; отметим, что совпадение проекторов $P_h(\varkappa)$ и $P_k(\varkappa)$ при различных $h$ и $k$ невозможно ввиду равенства $P_h(\varkappa)\,P_k(\varkappa) = \delta_{hk}P_h(\varkappa)$. Как следует из (1.21), аналогичный результат имеет место и для собственных нильпотентов $D_h(\varkappa)$, за тем исключением, что некоторые из операторов $D_h(\varkappa)$ могут совпадать (фактически все $D_h(\varkappa)$ могут быть равны нулю).

Покажем, что операторы $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$ имеют самое большее алгебраические особенности. Это достаточно доказать для собственных проекторов $P_h(\varkappa)$, так как собственные нильпотенты $D_h(\varkappa)$ выражаются через них по формулам (1.21). Заметим прежде всего, что

$$\| P_h(\varkappa) \| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_h(\varkappa)} R(\zeta, \varkappa)\, d\zeta \right\| \leqslant \rho_h(\varkappa) \max_{\zeta \in \Gamma_h(\varkappa)} \| R(\zeta, \varkappa) \|, \tag{1.23}$$

где $\Gamma_h(\varkappa)$ — круговой контур радиуса $\rho_h(\varkappa)$, охватывающий только $\lambda_h(\varkappa)$. Далее, из (I.4.12) вытекает, что

$$\begin{aligned} \| R(\zeta. \varkappa) \| &\leqslant (T(\varkappa)-\zeta)^{-1} \| \leqslant \gamma \| T(\varkappa)-\zeta \|^{N-1} / |\det(T(\varkappa)-\zeta)| \leqslant \\ &\leqslant \gamma (\| T(\varkappa) \| + |\zeta|)^{N-1} / \prod_{k=1}^{s} |\zeta - \lambda_k(\varkappa)|^{m_k}, \end{aligned} \tag{1.24}$$

причем постоянная $\gamma$ зависит только от выбора нормы. Следовательно,

$$\| P_h(\varkappa) \| \leqslant \gamma \cdot \rho_h(\varkappa) \max_{\zeta \in \Gamma_h(\varkappa)} (\| T(\varkappa) \| + |\zeta|)^{N-1} / \prod_{k=1}^{s} |\zeta - \lambda_k(\varkappa)|^{m_k}. \tag{1.25}$$

Предположим снова, что $\varkappa = 0$ есть исключительная точка, и устремим $\varkappa$ к нулю. Чтобы контур $\Gamma_h(\varkappa)$ охватывал только одно собственное значение $\lambda_h(\varkappa)$, радиус $\rho(\varkappa)$ должен стремиться к нулю при $\varkappa \to 0$, так как расстояния между $\lambda_h(\varkappa)$ и другими собственными значениями $\lambda_k(\varkappa)$ той же $\lambda$-группы стремятся к нулю. Ввиду того что функции $\lambda_k(\varkappa)$ имеют самое большее алгебраические особенности в точке $\varkappa = 0$ (см. (1.7)), расстояния $|\lambda_h(\varkappa) - \lambda_k(\varkappa)|$ имеют дробностепенной порядок относительно $|\varkappa|$ при $\varkappa \to 0$. Полагая $\rho_h(\varkappa) = |\varkappa|^{\alpha}$ и выбирая подходящий показатель $\alpha > 0$, получаем неравенство

$$\prod |\zeta - \lambda_k(\varkappa)|^{m_k} \geqslant \gamma' |\varkappa|^{\alpha N} \quad \text{для } \zeta \in \Gamma_h(\varkappa),$$

---

[1] Это следует из единственности разложения $R(\zeta, \varkappa)$ на простейшие дроби. Аналогичное рассуждение уже проводилось в п. I.5.4.

где $\gamma'$ — некоторая положительная постоянная. Отсюда следует, что

$$\| P_h(\varkappa) \| \leqslant \text{const} \, |\varkappa|^{-(N-1)\alpha}, \tag{1.26}$$

и поэтому главная часть разложения Лорана функции $P_h(\varkappa)$ по степеням $\varkappa^{1/p}$ конечна.

Объединим полученные результаты в виде следующей теоремы.

**Теорема 1.8.** *Собственные значения $\lambda_h(\varkappa)$, собственные проекторы и собственные нильпотенты $D_h(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ суть ветви аналитических функций в* $\mathrm{D}_0$, *имеющие только алгебраические особенности в некоторых (не обязательно всех) исключительных точках. Функции $\lambda_h(\varkappa)$ и $P_h(\varkappa)$ имеют общие точки ветвления (и одинаковые порядки точек ветвления), которые могут и не быть точками ветвления для $D_h(\alpha)$. В частности, если функция $\lambda_h(\varkappa)$ однозначна в некоторой окрестности исключительной точки $\varkappa = \varkappa_0$ (т. е. $\lambda_h(\varkappa)$ образует цикл периода 1), то $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$ также однозначны в этой окрестности.*

## 6. Замечания и примеры

Хотя операторы $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$ имеют алгебраические особенности, так же как и функции $\lambda_h(\varkappa)$, однако имеются существенные различия в их поведении в окрестности особых точек. Грубо говоря, $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$ имеют более сильные особенности, чем $\lambda_h(\varkappa)$.

Напомним, что указанные особые точки суть исключительные точки, хотя обратное, вообще говоря, неверно. Как уже отмечалось, функции $\lambda_h(\varkappa)$ непрерывны даже в исключительных точках и, следовательно, не имеют полюсов. Функции же $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$ в общем случае не определены в исключительных точках. В частности, они могут быть однозначными и все же иметь полюс в исключительной точке (см. ниже пример 1.12).

Тем более замечательна следующая теорема.

**Теорема 1.9** [1]. *Если $\varkappa = \varkappa_0$ — точки ветвления для $\lambda_h(\varkappa)$ (и, следовательно, для $P_h(\varkappa)$) порядка $p - 1 \geqslant 1$, то $P_h(\varkappa)$ имеет полюс в этой точке: другими словами, разложение Лорана для $P_h(\varkappa)$ по степеням $(\varkappa - \varkappa_0)^{1/p}$ обязательно содержит отрицательные степени. В частности, $\| P_h(x) \| \to \infty$ при $\varkappa \to \varkappa_0$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда разложение Лорана для оператора $P_h(\varkappa)$, входящего в цикл $\{P_1(\varkappa), \ldots, P_p(x)\}$, имеет вид

$$P_h(\varkappa) = P_h + \varkappa^{1/p} P'_h + \ldots, \quad h = 1, \ \ldots, \ p;$$

---

[1] Эта теорема принадлежит **Батлеру** [1].

здесь мы снова предполагаем для простоты, что $\varkappa_0 = 0$. Когда точка $\varkappa$ совершает один оборот вокруг нуля, оператор $P_h(\varkappa)$ переходит в $P_{h+1}(\varkappa)$ для $1 \leqslant h \leqslant p - 1$, а $P_p(\varkappa)$ переходит в $P_1(\varkappa)$. Отсюда следует, что $P_{h+1} = P_h$ при $1 \leqslant h \leqslant p - 1$. Далее, соотношение $P_h(\varkappa) P_{h+1}(\varkappa) = 0$ в пределе при $\varkappa \to 0$ дает $P_h P_{h+1} = 0$, а из идемпотентности оператора $P_h(\varkappa)$ следует, что $P_h^2 = P_h$. Поэтому $P_h = P_h^2 = P_h P_{h+1} = 0$. Но это противоречит тому факту, что $\dim P_h(\varkappa) \mathrm{X} = m_h > 0$ и, значит (см. задачу I.4.1) $\| P_h(\varkappa) \| \geqslant 1$.

Что касается порядка $p - 1$ точки ветвления $\varkappa = \varkappa_0$ функции $\lambda_h(\varkappa)$ или, что то же, периода $p$ цикла $\{\lambda_1(\varkappa), \ldots, \lambda_p(\varkappa)\}$, то справедлив следующий результат. *Собственное значение $\lambda$ кратности $m$ не может быть точкой ветвления порядка больше чем $m - 1$.* Это очевидным образом следует из того факта, что собственное значение кратности $m$ не может расщепиться более чем на $m$ собственных значений (см. (1.19)).

**Теорема 1.10.** *Пусть $\mathrm{X}$ — гильбертово пространство. Пусть последовательность $\{\varkappa_n\}$, сходящаяся к точке $\varkappa_0 \in \mathrm{D}_0$ (быть может, исключительной), такова, что оператор $T(\varkappa_n)$ нормален при всех $n = 1, 2, \ldots$. Тогда все $\lambda_h(\varkappa)$ и $P_h(\varkappa)$ голоморфны в точке $\varkappa = \varkappa_0$, а все $D_h(\varkappa)$ тождественно равны нулю.*

Доказательство. Поскольку оператор $T(\varkappa_n)$ нормален, то $\| P_h(\varkappa_n) \| = 1$ (см. (I.6.64)). Таким образом, по теореме 1.9 точка $\varkappa = \varkappa_0$ не является точкой ветвления ни для одной из функций $\lambda_h(\varkappa)$. Следовательно, $\lambda_h(\varkappa)$ голоморфны в точке $\varkappa = \varkappa_0$. Поэтому операторные функции $P_h(\varkappa)$ однозначны в окрестности точки $\varkappa_0$, а так как они не могут иметь полюс по той же самой причине, что и выше, то они голоморфны. Далее, голоморфные операторные функции $D_h(\varkappa) = (T(\varkappa) - \lambda_h(\varkappa)) P_h(\varkappa)$ обращаются в нуль в точках $\varkappa_n$ и по теореме единственности равны нулю тождественно.

**Замечание 1.11.** Вообще говоря, операторы $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$ в исключительной точке $\varkappa_0$ не определены. Однако они могут иметь в $\varkappa_0$ устранимую особенность, как, например, в теореме 1.10. В этом случае операторы $P_h(\varkappa_0)$ и $D_h(\varkappa_0)$ можно определить по непрерывности, но они, вообще говоря, не будут собственным проектором и собственным нильпотентом оператора $T(\varkappa_0)$, соответствующими собственному значению $\lambda_h(\varkappa_0)$. Если, например, $\lambda_1(\varkappa_0) = \lambda_2(\varkappa_0) \neq \lambda_k(\varkappa_0)$, $k \geqslant 3$, то $P_1(\varkappa_0) + P_2(\varkappa_0)$ (а не $P_1(\varkappa_0)$) будет собственным проектором, принадлежащим $\lambda_1(\varkappa_0)$. Кроме того, собственный нильпотент, соответствующий собственному значению $\lambda_h(\varkappa_0)$, не обязан обращаться в нуль, даже если $D_h(\varkappa) \equiv 0$ (см. пример 1.12, a), d), f)).

**Пример 1.12.** Рассмотрим собственные проекторы и собственные нильпотенты операторов $T(\varkappa)$ из примера 1.1.

a) Интегрируя выражение (1.15) для резольвенты $R(\zeta, \varkappa)$ по окружностям, охватывающим собственные значения $\lambda_\pm(\varkappa)$, получаем по формуле (1.16)

$$P_\pm(\varkappa) = \pm\frac{1}{2(1+\varkappa^2)^{1/2}}\begin{pmatrix}1\pm(1+\varkappa^2)^{1/2} & \varkappa\\ \varkappa & -1\pm(1+\varkappa^2)^{1/2}\end{pmatrix}. \tag{1.27}$$

Мы советуем читателю проверить соотношения $P_\pm^2(\varkappa) = P_\pm(\varkappa)$, $P_+(\varkappa)\,P_-(\varkappa) = P_-(\varkappa)\,P_+(\varkappa) = 0$. Собственные проекторы $P_\pm(\varkappa)$ суть ветви двузначной алгебраической функции с точками ветвления $\varkappa = \pm i$. Так как $s = N = 2$, то оператор $T(\varkappa)$ прост и поэтому собственные нильпотенты $D_\pm(\varkappa)$ равны нулю при $\varkappa \neq \pm i$. В исключительных точках $\varkappa = \pm i$ спектральное представление оператора $T(\varkappa)$ совсем иное:

$$T(\pm i) = 0 + D_\pm; \tag{1.28}$$

нуль является двукратным собственным значением, и поэтому оператор $T(\pm i)$ совпадает со своим собственным нильпотентом.

b) Интегрируя резольвенту, как в a), получаем собственные проекторы

$$P_1(\varkappa) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \quad P_2(\varkappa) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}, \tag{1.29}$$

отвечающие собственным значениям $\lambda_1(\varkappa) = \varkappa$ и $\lambda_2(\varkappa) = -\varkappa$. Снова $D_1(\varkappa) = D_2(\varkappa) = 0$ при $\varkappa \neq 0$. Исключительная точка $\varkappa = 0$ не является особой точкой для $\lambda_h(\varkappa)$, $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$.

c) Собственный проектор и собственный нильпотент, соответствующие единственному собственному значению $\lambda(\varkappa) = 0$ оператора $T(\varkappa)$, таковы: $P(\varkappa) = 1$, $D(\varkappa) = T(\varkappa)$.

d) Имеем

$$P_\pm(\varkappa) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \pm\varkappa^{-1/2}\\ \pm\varkappa^{1/2} & 1\end{pmatrix}, \quad D_\pm(\varkappa) = 0, \quad \varkappa \neq 0, \tag{1.30}$$

для $\lambda_\pm(\varkappa) = \pm\varkappa^{1/2}$. Исключительная точка $\varkappa = 0$ служит точкой ветвления для собственных значений и собственных проекторов. При $\varkappa = 0$ нуль является единственным собственным значением, и спектральное разложение имеет вид $T(0) = 0 + D$, где $D = T = T(0)$. Таким образом, этот пример отличается от a) лишь тем, что здесь мы имеем только одну исключительную точку.

e) Имеем

$$P_1(\varkappa) = \begin{pmatrix}1 & \varkappa\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad P_2(\varkappa) = \begin{pmatrix}0 & -\varkappa\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad D_h(\varkappa) = 0 \tag{1.31}$$

для $\lambda_1(\varkappa) = 1$ и $\lambda_2(\varkappa) = 0$. Все функции голоморфны при конечных $\varkappa$, так как исключительных точек нет. Отметим, что $P_h(\varkappa)$ не голоморфны при $\varkappa = \infty$, тогда как собственные значения $\lambda_h(\varkappa)$ (постоянны и, следовательно) голоморфны всюду. В следующем примере мы столкнемся с противоположной ситуацией.

f) Собственные проекторы для $\lambda_1(\varkappa) = \varkappa$ и $\lambda_2(\varkappa) = 0$ суть

$$P_1(\varkappa) = \begin{pmatrix}1 & \varkappa^{-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad P_2(\varkappa) = \begin{pmatrix}0 & -\varkappa^{-1}\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \quad \varkappa \neq 0. \tag{1.32}$$

Заметим, что операторы $P_h(\varkappa)$ имеют полюс в исключительной точке $\varkappa = 0$, несмотря на то что $\lambda_h(\varkappa)$ голоморфны в нуле. В точке $\varkappa = \infty$ ситуация обратная. Спектральное разложение в точке $\varkappa = 0$ такое же, как и в d).

### 7. Случай, когда $T(\varkappa)$ линейно зависит от $\varkappa$

Предыдущие общие результаты несколько упрощаются в том случае, когда $T(\varkappa)$ (см. (1.1)) зависит от $\varkappa$ линейно. В качестве основной области $\mathrm{D}_0$ в этом случае можно взять всю комплексную плоскость. Коэффициенты характеристического уравнения (1.3) являются многочленами от $\varkappa$ степени не выше $N$. Поэтому собственные значения $\lambda_h(\varkappa)$ суть ветви алгебраических функций. Если алгебраическое уравнение (1.3) *неприводимо*, то все корни этого уравнения образуют одну $N$-значную алгебраическую функцию, так что $s = N$. Если же уравнение (1.3) *приводимо*, то собственные значения $\lambda_h(\varkappa)$ распадаются на несколько групп таким образом, что каждая группа соответствует одной алгебраической функции. Если среди этих алгебраических функций есть совпадающие, то $s < N$ (случай постоянного вырождения) [1].

Алгебраические функции $\lambda_h(\varkappa)$ не имеют полюсов при конечных $\varkappa$. В точке $\varkappa = \infty$ они имеют самое большее полюс порядка 1. Это становится ясным, если записать семейство (1.1) в виде

$$T(\varkappa) = \varkappa\,(T' + \varkappa^{-1}T) \tag{1.33}$$

и заметить, что собственные значения оператора $T' + \varkappa^{-1}T$ как функции от $\varkappa^{-1}$ непрерывны при $\varkappa^{-1} = 0$. Более точно, эти собственные значения допускают разложение $\mu_h + \beta_h (\varkappa^{-1})^{1/p} + \ldots$ (ряд Пюизо по $\varkappa^{-1}$), и поэтому собственные значения оператора $T(\varkappa)$ имеют вид

$$\lambda_h(\varkappa) = \mu_h\varkappa + \beta_h\varkappa^{1-1/p} + \ldots, \quad \varkappa \to \infty. \tag{1.34}$$

Отметим, что операторы $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$ могут быть голоморфны в точке $\varkappa = \infty$, даже если $\lambda_h(\varkappa)$ не голоморфна в ней (см. пример 1.12, f)).

### 8. Сводка результатов

Для удобства читателя основные результаты этого параграфа [2] сведены здесь воедино.

Пусть $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ — операторная функция, голоморфная в области $\mathrm{D}_0$ комплексной $\varkappa$-плоскости. Число $s$ собственных значений оператора $T(\varkappa)$ одно и то же для всех точек $\varkappa$, не являющихся исключительными; исключительных точек в каждом компактном подмножестве в $\mathrm{D}_0$ содержится не более чем конечное число. В каждой простой подобласти (односвязной подобласти, не содержащей исключительных точек) $\mathrm{D}$ области $\mathrm{D}_0$ собственные значения оператора $T(\varkappa)$ представляются $s$ голоморфными функ-

---

[1] Сформулированные здесь результаты верны и в том случае, когда $T(\varkappa)$ зависит от $\varkappa$ полиномиально.

[2] Более подробное изложение представленных в этом параграфе результатов см. Баумгертель [1].

циями $\lambda_h(\varkappa)$, $h = 1, \ldots, s$, причем собственные значения $\lambda_h(\varkappa)$ имеют постоянные кратности $m_h$. Функции $\lambda_h(\varkappa)$ суть ветви одной или нескольких аналитических функций в $\mathrm{D}_0$, которые имеют только алгебраические особенности и всюду в $\mathrm{D}_0$ непрерывны. (Эти аналитические функции для простоты также обозначаются через $\lambda_h(\varkappa)$.) Исключительная точка $\varkappa_0$ является либо точкой ветвления для хотя бы одной из функций $\lambda_h(\varkappa)$, либо регулярной точкой для всех них; в последнем случае значения по крайней мере двух различных функций $\lambda_h(\varkappa)$ и $\lambda_k(\varkappa)$ совпадают при $\varkappa = \varkappa_0$.

Собственные проекторы $P_h(\varkappa)$ и собственные нильпотенты $D_h(\varkappa)$, соответствующие собственным значениям $\lambda_h(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$, также голоморфны в каждой простой подобласти $\mathrm{D}$ и являются ветвями одной или нескольких аналитических функций (обозначаемых снова через $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$), имеющих лишь алгебраические особенности. Аналитические функции $P_h(\varkappa)$ и $\lambda_h(\varkappa)$ имеют общие точки ветвления одного и того же порядка, но функции $P_h(\varkappa)$ всегда имеют полюс в точке ветвления, тогда как функция $\lambda_h(\varkappa)$ непрерывна в ней. Функции $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$ могут иметь полюс в исключительной точке, даже если $\lambda_h(\varkappa)$ в ней голоморфна.

Если $\lambda_1(\varkappa), \ldots, \lambda_r(\varkappa)$ образуют $\lambda$-группу (совокупность собственных значений оператора $T(\varkappa)$, возникающих при расщеплении собственного значения $\lambda$ невозмущенного оператора $T = T(0)$) для исключительной точки $\varkappa = 0$ и $P_1(\varkappa), \ldots, P_r(\varkappa)$ — соответствующие им собственные проекторы, то тотальный проектор $P(\varkappa) = P_1(\varkappa) + \ldots + P_r(\varkappa)$ голоморфен в точке $\varkappa = 0$. Тотальная кратность $m_1 + \ldots + m_r$ собственных значений, входящих в $\lambda$-группу, равна кратности $m$ собственного значения $\lambda$ оператора $T$. Далее, $\lambda$-группа состоит из нескольких циклов $\{\lambda_1(\varkappa), \ldots, \lambda_p(\varkappa)\}$ $\{\lambda_{p+1}(\varkappa), \ldots\}$, ..., $\{\ldots\}$, и то же верно для собственных проекторов. Элементы каждого цикла циклически представляются в процессе аналитического продолжения, когда $\varkappa$ совершает один оборот вокруг начала. Сумма входящих в цикл собственных проекторов (скажем, $P_1(\varkappa) + \ldots + P_p(\varkappa)$) однозначна в окрестности точки $\varkappa = 0$, однако не обязана быть голоморфной в этой точке (может иметь в ней полюс).

## § 2. Ряды теории возмущений

### 1. Тотальный проектор $\lambda$-группы

В предыдущем параграфе нас интересовали общие свойства функций $\lambda_h(\varkappa)$, $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$, представляющих соответственно собственные значения, собственные проекторы и собственные нильпотенты оператора $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, голоморфно зависящего от комплексного параметра $\varkappa$. В этом параграфе мы построим явно ряды Тейлора (если они существуют) для этих функций в заданной точке $\varkappa$, причем без ограничения общности можно считать $\varkappa = 0$. Так как рассмотрение общего случая слишком сложно, то мы ограничимся выполнением нашей программы при определенных упрощающих предположениях. Кроме того, мы дадим здесь только формальные разложения; вопросы, касающиеся сходимости полученных разложений и оценки погрешностей, будут рассмотрены в последующих параграфах [1]).

Предположим, что нам задано разложение $T(\varkappa)$ в степенной ряд

$$T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)} + \varkappa^2 T^{(2)} + \ldots . \tag{2.1}$$

Пусть $\lambda$ — собственное значение невозмущенного оператора $T = T(0)$, имеющее (алгебраическую) кратность $m$, а $P$ и $D$ — собственный проектор и собственный нильпотент оператора $T$, соответствующие $\lambda$. Таким образом (см. п. I.5.4),

$$\begin{gathered} TP = PT = PTP = \lambda P + D, \\ \dim P = m, \quad D^m = 0, \quad PD = DP = D. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Собственное значение $\lambda$ при малых $\varkappa \neq 0$ расщепляется в общем случае на несколько собственных значений оператора $T(\varkappa)$, образующих $\lambda$-группу (см. п. 1.8). Тотальный проектор $P(\varkappa)$, соответствующий $\lambda$-группе, голоморфен в точке $\varkappa = 0$ (см. (1.17)):

$$P(\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n P^{(n)}, \quad P^{(0)} = P, \tag{2.3}$$

причем коэффициенты $P^{(n)}$ определяются по формулам (1.18). Подпространство $\mathsf{M}(\varkappa) = P(\varkappa)\,\mathsf{X}$ является $m$-мерным (см. (1.19)) и инвариантным относительно $T(\varkappa)$. Собственные значения оператора $T(\varkappa)$, принадлежащие $\lambda$-группе, суть в точности собственные значения части оператора $T(\varkappa)$ в $\mathsf{M}(\varkappa)$. Итак, для отыскания собственных значений, принадлежащих $\lambda$-группе, достаточно решить задачу на собственные значения в подпространстве $\mathsf{M}(\varkappa)$, вообще говоря меньшего числа измерений, чем само $\mathsf{X}$.

Задача на собственные значения для оператора $T(\varkappa)$ в $\mathsf{M}(\varkappa)$ эквивалентна такой же задаче для оператора

$$T_r(\varkappa) = T(\varkappa)\,P(\varkappa) = P(\varkappa)\,T(\varkappa) = P(\varkappa)\,T(\varkappa)\,P(\varkappa) \tag{2.4}$$

---

[1]) Ряды теории возмущений активно изучали в квантовой механике, начиная с Шрёдингера [1]. В любом учебнике по квантовой механике имеется глава, посвященная таким рядам (см., например, Кембл [[1]], Шифф [[1]] [или Ландау и Лифшиц [[1*]], Соколов, Лоскутов и Тернов [[1*]].— *Ред.*]). Однако эти рассмотрения в большинстве случаев относятся к самосопряженным (симметричным) операторам $T(\varkappa)$, зависящим от вещественного параметра $\varkappa$. В этом параграфе мы рассмотрим общий случай несимметричных операторов, предполагая, как и раньше, что $0 < \dim \mathsf{X} < \infty$.

(см. п. I.5.1). Таким образом, если абсолютная величина $|\lambda|$ невозмущенного собственного значения $\lambda$ настолько велика, что собственные значения, возникающие при расщеплении $\lambda$, не обращаются в нуль при рассматриваемых значениях $\varkappa$, то собственные значения оператора $T(\varkappa)$, образующие $\lambda$-группу, суть в точности ненулевые собственные значения оператора $T_r(\varkappa)$ [1]. Условие на $\lambda$ не ограничивает общности, так как можно, не меняя существа дела, заменить $T$ на $T+\alpha$, где $\alpha$ — скаляр.

Итак, мы получаем следующее выражение для *взвешенного среднего* собственных значений оператора $T(\varkappa)$, входящих в $\lambda$-группу:

$$\hat{\lambda}(\varkappa)=\frac{1}{m}\operatorname{tr}(T(\varkappa)P(\varkappa))=\lambda+\frac{1}{m}\operatorname{tr}((T(\varkappa)-\lambda)P(\varkappa)), \tag{2.5}$$

причем весами служат кратности соответствующих собственных значений (см. (I.5.40) и (I.3.25)). Если собственное значение $\lambda$ не расщепляется, т. е. $\lambda$-группа состоит из одного собственного значения $\lambda(\varkappa)$ кратности $m$, то

$$\hat{\lambda}(\varkappa)=\lambda(\varkappa); \tag{2.6}$$

в частности, это всегда так, если $m=1$. При отсутствии расщепления собственный проектор, соответствующий $\lambda(\varkappa)$, совпадает с тотальным проектором (2.3), а собственный нильпотент определяется по формуле (см. (I.5.26))

$$D(\varkappa)=(T(\varkappa)-\lambda(\varkappa))P(\varkappa). \tag{2.7}$$

Формулы (2.3) и (2.5) — (2.7) дают полное решение задачи на собственные значения для $\lambda$-группы, в случае когда невозмущенное собственное значение не расщепляется, при этом $\lambda(\varkappa)$, $P(\varkappa)$ и $D(\varkappa)$ все голоморфны в точке $\varkappa=0$.

Найдем теперь явное выражение для коэффициентов рядов (2.3) и (2.5) через коэффициенты $T^{(n)}$ ряда (2.1). Здесь следует отметить, что вместо коэффициентов $T^{(n)}$ мы можем также использовать коэффициенты ряда (2.4), так как собственные значения и собственные проекторы у операторов $T(\varkappa)$ и $T_r(\varkappa)$ одни и те же, если мы ограничиваемся рассмотрением $\lambda$-группы [2].

---

[1] Отметим, что оператор $T_r(\varkappa)$ имеет собственное значение 0 кратности $N-m$; соответствующий собственный проектор равен $1-P(\varkappa)$. См. также подстрочное примечание [1] на стр. 52.

[2] Это замечание будет полезно в дальнейшем, когда мы будем рассматривать задачу на собственные значения для неограниченных операторов в бесконечномерном пространстве; при этом может оказаться, что разложение (2.1) не существует, а оператор (2.4) допускает разложение по степеням $\varkappa$ см. п. VII.1.5).

Коэффициенты $P^{(n)}$ разложения (2.3) даются формулами (1.14) и (1.18). Таким образом,

$$P^{(n)} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_p=n\\ \nu_j\geqslant 1}} (-1)^p \int\limits_\Gamma R(\zeta)\,T^{(\nu_1)}R(\zeta)\,T^{(\nu_2)}\ldots T^{(\nu_p)}R(\zeta)\,d\zeta, \tag{2.8}$$

где $\Gamma$ — положительно ориентированная окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $\lambda$. Для того чтобы вычислить интеграл (2.8), заменим в подинтегральном выражении резольвенту $R(\zeta)$ ее разложением Лорана (I.5.18) в точке $\zeta=\lambda$, которое мы запишем в виде

$$R(\zeta)=\sum_{n=-m}^{\infty}(\zeta-\lambda)^n S^{(n+1)}, \tag{2.9}$$

где

$$S^{(0)}=-P,\quad S^{(n)}=S^n,\quad S^{(-n)}=-D^n,\quad n\geqslant 1. \tag{2.10}$$

Здесь $S=S(\lambda)$ есть значение приведенной резольвенты оператора $T$ в точке $\zeta=\lambda$ (см. п. I.5.3); таким образом, в силу (I.5.19) и (I.5.26) имеем

$$SP=PS=0,\quad (T-\lambda)\,S=S\,(T-\lambda)=1-P. \tag{2.11}$$

Подстановка разложения (2.9) в подинтегральное выражение в (2.8) дает ряд Лорана по степеням $\zeta-\lambda$, причем лишь член с $(\zeta-\lambda)^{-1}$ дает вклад в интеграл (2.8). В результате интегрирования получаем при $n\geqslant 1$ *конечную* сумму:

$$P^{(n)}=-\sum_{p=1}^{n}(-1)^p \sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_p=n\\ k_1+\ldots+k_{p+1}=p\\ \nu_1\geqslant 1,\ k_j\geqslant -m+1}} S^{(k_1)}T^{(\nu_1)}S^{(k_2)}\ldots S^{(k_p)}T^{(\nu_p)}S^{(k_{p+1})}. \tag{2.12}$$

Например,

$$\begin{aligned} P^{(1)}&=\sum_{k_1+k_2=1} S^{(k_1)}TS^{(k_2)}=\\ &=-D^{m-1}T^{(1)}S^m-\ldots-DT^{(1)}S^2-PT^{(1)}S-\\ &\quad -ST^{(1)}P-S^2T^{(1)}D-\ldots-S^mT^{(1)}D^{m-1},\\ P^{(2)}&=\sum_{k_1+k_2=1} S^{(k_1)}T^{(2)}S^{(k_2)}-\sum_{k_1+k_2+k_3=2} S^{(k_1)}T^{(1)}S^{(k_2)}T^{(1)}S^{(k_3)}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

В частности, если $\lambda$ — полупростое собственное значение оператора $T$ (см. п. I.5.4), то $D=0$ и поэтому вклад в сумму (2.12) дают только неотрицательные значения $k_j$. Так, например,

$$
\begin{aligned}
P^{(1)} &= -PT^{(1)}S - ST^{(1)}P,\\
P^{(2)} &= -PT^{(2)}S - ST^{(2)}P + PT^{(1)}ST^{(1)}S + ST^{(1)}PT^{(1)}S +\\
&\quad + ST^{(1)}ST^{(1)}P - PT^{(1)}PT^{(1)}S^2 - PT^{(1)}S^2T^{(1)}P -\\
&\quad - S^2T^{(1)}PT^{(1)}P,\\
P^{(3)} &= -PT^{(3)}S - ST^{(3)}P + PT^{(1)}ST^{(2)}S + PT^{(2)}ST^{(1)}S +\\
&\quad + ST^{(1)}PT^{(2)}S + ST^{(2)}PT^{(1)}S + ST^{(1)}ST^{(2)}P +\\
&\quad + ST^{(2)}ST^{(1)}P - PT^{(1)}PT^{(2)}S^2 - PT^{(2)}PT^{(1)}S^2 -\\
&\quad - PT^{(1)}S^2T^{(2)}P - PT^{(2)}S^2T^{(1)}P - S^2T^{(1)}PT^{(2)}P -\\
&\quad - S^2T^{(2)}PT^{(1)}P - PT^{(1)}ST^{(1)}ST^{(1)}S -\\
&\quad - ST^{(1)}PT^{(1)}ST^{(1)}S - ST^{(1)}ST^{(1)}PT^{(1)}S -\\
&\quad - ST^{(1)}ST^{(1)}ST^{(1)}P + PT^{(1)}PT^{(1)}ST^{(1)}S^2 +\\
&\quad + PT^{(1)}PT^{(1)}S^2T^{(1)}S + PT^{(1)}ST^{(1)}PT^{(1)}S^2 +\\
&\quad + PT^{(1)}S^2T^{(1)}PT^{(1)}S + PT^{(1)}ST^{(1)}S^2T^{(1)}P +\\
&\quad + PT^{(1)}S^2T^{(1)}ST^{(1)}P + ST^{(1)}PT^{(1)}S^2T^{(1)}P +\\
&\quad + S^2T^{(1)}PT^{(1)}ST^{(1)}P + ST^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}S^2 +\\
&\quad + S^2T^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}S + ST^{(1)}S^2T^{(1)}PT^{(1)}P +\\
&\quad + S^2T^{(1)}ST^{(1)}PT^{(1)}P - PT^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}S^3 -\\
&\quad - PT^{(1)}PT^{(1)}S^3T^{(1)}P - PT^{(1)}S^3T^{(1)}PT^{(1)}P -\\
&\quad - S^3T^{(1)}PT^{(1)}PT^{(1)}P. \qquad (2.14)
\end{aligned}
$$

## 2. Взвешенное среднее собственных значений

Разложение для функции $\hat{\lambda}(\varkappa)$ можно получить, подставляя в (2.5) разложение для оператора $T_r(\varkappa) = T(\varkappa)P(\varkappa)$ (см. (2.4)). Однако для удобства вычислений мы будем рассматривать вместо $T_r(\varkappa)$ оператор $(T(\varkappa) - \lambda)P(\varkappa)$. Из (1.16) следует, что

$$(T(\varkappa)-\lambda)P(\varkappa) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\zeta-\lambda)R(\zeta,\varkappa)\,d\zeta, \qquad (2.15)$$

ибо $(T(\varkappa)-\lambda)R(\zeta,\varkappa) = 1+(\zeta-\lambda)R(\zeta,\varkappa)$ и $\int\limits_{\Gamma}1d\zeta = 0$. Замечая, что, согласно (2.2), $(T-\lambda)P = D$, получаем

$$(T(\varkappa)-\lambda)P(\varkappa) = D + \sum_{n=1}^{\infty}\varkappa^n\widetilde{T}^{(n)}, \qquad (2.16)$$

где

$$\tilde{T}^{(n)} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_p=n \\ \nu_j \geqslant 1}} (-1)^p \int_\Gamma R(\zeta)\, T^{(\nu_1)} \ldots T^{(\nu_p)} R(\zeta)\, (\zeta-\lambda)\, d\zeta; \tag{2.17}$$

при $n \geqslant 1$ это выражение отличается от (2.8) лишь множителем $\zeta-\lambda$ в подинтегральном выражении. Поэтому (ср. (2.12))

$$\tilde{T}^{(n)} = -\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_p=n \\ k_1+\ldots+k_{p+1}=p-1 \\ \nu_j \geqslant 1,\, k_j \geqslant -m+1}} S^{(k_1)} T^{(\nu_1)} S^{(k_2)} \ldots S^{(k_p)} T^{(\nu_p)} S^{(k_{p+1})}. \tag{2.18}$$

Так,

$$\tilde{T}^{(1)} = -D^{m-1} T^{(1)} S^{m-1} - \ldots - D T^{(1)} S + P T^{(1)} P - S T^{(1)} D - \ldots$$
$$\ldots - S^{m-1} T^{(1)} D^{m-1}. \tag{2.19}$$

Снова формулы упрощаются в том случае, когда $\lambda$ — полупростое собственное значение оператора $T$ (т. е. когда $D = 0$); например,

$$\begin{aligned}
\tilde{T}^{(1)} &= P T^{(1)} P, \\
\tilde{T}^{(2)} &= P T^{(2)} P - P T^{(1)} P T^{(1)} S - P T^{(1)} S T^{(1)} P - S T^{(1)} P T^{(1)} P, \\
\tilde{T}^{(3)} &= P T^{(3)} P - P T^{(1)} P T^{(2)} S - P T^{(2)} P T^{(1)} S - P T^{(1)} S T^{(2)} P - \\
&\quad - P T^{(2)} S T^{(1)} P - S T^{(1)} P T^{(2)} P - S T^{(2)} P T^{(1)} P + \\
&\quad + P T^{(1)} P T^{(1)} S T^{(1)} S + P T^{(1)} S T^{(1)} P T^{(1)} S + \\
&\quad + P T^{(1)} S T^{(1)} S T^{(1)} P + S T^{(1)} P T^{(1)} P T^{(1)} S + \\
&\quad + S T^{(1)} P T^{(1)} S T^{(1)} P + S T^{(1)} S T^{(1)} P T^{(1)} P - \\
&\quad - P T^{(1)} P T^{(1)} P T^{(1)} S^2 - P T^{(1)} P T^{(1)} S^2 T^{(1)} P - \\
&\quad - P T^{(1)} S^2 T^{(1)} P T^{(1)} P - S^2 T^{(1)} P T^{(1)} P T^{(1)} P.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Ряд для взвешенного среднего $\hat{\lambda}(\varkappa)$ собственных значений $\lambda$-группы получается из (2.5) и (2.16):

$$\hat{\lambda}(\varkappa) = \lambda + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n \hat{\lambda}^{(n)}, \tag{2.21}$$

где

$$\hat{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{m} \operatorname{tr} \tilde{T}^{(n)}, \quad n \geqslant 1. \tag{2.22}$$

Подстановка (2.18) в (2.22) дает выражения для коэффициентов $\hat{\lambda}^{(n)}$.

Существует, однако, другое выражение для $\hat{\lambda}(\varkappa)$, которое приводит к более удобным в вычислительном отношении формулам, а именно

$$\hat{\lambda}(\varkappa) - \lambda = -\frac{1}{2\pi i m} \operatorname{tr} \int_{\Gamma} \log \left[ 1 + \left( \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n T^{(n)} \right) R(\zeta) \right] d\zeta. \tag{2.23}$$

Здесь логарифмическая функция $\log(1+A)$ определяется разложением

$$\log(1+A) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} A^p, \tag{2.24}$$

сходящимся при $\| A \| < 1$. Заметим, что определение (2.24) совпадает с (I.5.57) при некотором специальном выборе области $\Delta$ (надо взять в качестве $\Delta$ окрестность точки $\zeta = 1$, содержащую все собственные значения оператора $1 + A$).

При выводе формулы (2.23) будем исходить из формулы

$$\hat{\lambda}(\varkappa) - \lambda = -\frac{1}{2\pi i m} \operatorname{tr} \int_{\Gamma} (\zeta - \lambda) R(\zeta, \varkappa) \, d\zeta, \tag{2.25}$$

которая вытекает из (2.5) и (2.15). Подстановка вместо резольвенты $R(\zeta, \varkappa)$ разложения (1.13) дает

$$\hat{\lambda}(\varkappa) - \lambda = \frac{-1}{2\pi i m} \operatorname{tr} \int_{\Gamma} \sum_{p=1}^{\infty} (\zeta - \lambda) R(\zeta) (-A(\varkappa) R(\zeta))^p \, d\zeta; \tag{2.26}$$

заметим, что слагаемое, отвечающее $p = 0$, не дает вклада в правую часть (2.26), так как $\operatorname{tr} D = 0$ (см. задачу I.3.11).

Учитывая соотношение $dR(\zeta)/d\zeta = R^2(\zeta)$ (см. (I.5.8)), находим

$$\frac{d}{d\zeta} (A(\varkappa) R(\zeta))^p = \frac{d}{d\zeta} [A(\varkappa) R(\zeta) \ldots A(\varkappa) R(\zeta)] =$$
$$= A(\varkappa) R(\zeta) \ldots A(\varkappa) R^2(\zeta) + \ldots + A(\varkappa) R^2(\zeta) \ldots A(\varkappa) R(\zeta). \tag{2.27}$$

Применение равенства $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ дает

$$\operatorname{tr} \frac{d}{d\zeta} (A(\varkappa) R(\zeta))^p = p \operatorname{tr} R(\zeta) (A(\varkappa) R(\zeta))^p, \tag{2.28}$$

и формула (2.26) принимает вид[1]

$$\hat{\lambda}(\varkappa)-\lambda=-\frac{1}{2\pi i m}\operatorname{tr}\int\limits_{\Gamma}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}(\zeta-\lambda)\frac{d}{d\zeta}(-A(\varkappa)R(\zeta))^{p}\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i m}\operatorname{tr}\int\limits_{\Gamma}\sum\frac{1}{p}(-A(\varkappa)R(\zeta))^{p}\,d\zeta \qquad (2.29)$$

(мы воспользовались интегрированием по частям). Полученное выражение совпадает с (2.23) (см. определение (1.10) оператора $A(\varkappa)$).

Если логарифмическую функцию в (2.23) заменить разложением (2.24), то, сравнивая коэффициенты при степенях $\varkappa$, мы получаем следующие формулы для коэффициентов разложения $\hat{\lambda}(\varkappa)$:

$$\hat{\lambda}^{(n)}=\frac{1}{2\pi i m}\operatorname{tr}\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_p=n}\frac{(-1)^p}{p}\int\limits_{\Gamma}T^{(\nu_1)}R(\zeta)\ldots R(\zeta)T^{(\nu_p)}R(\zeta)\,d\zeta,$$

$$n\geqslant 1. \qquad (2.30)$$

Применяя прием, использованный при вычислении интегралов (2.8) и (2.17), получаем

$$\hat{\lambda}^{(n)}=\frac{1}{m}\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{p}\sum_{\substack{\nu_1+\ldots+\nu_p=n\\ k_1+\ldots+k_p=p-1}}\operatorname{tr}T^{(\nu_1)}S^{(k_1)}\ldots T^{(\nu_p)}S^{(k_p)}. \qquad (2.31)$$

Эта формула удобнее формулы (2.22), ибо суммирование здесь проще, чем в (2.18). Так,

$$\hat{\lambda}^{(1)}=\frac{1}{m}\operatorname{tr}T^{(1)}P,$$

$$\hat{\lambda}^{(2)}=\frac{1}{m}\left[\operatorname{tr}T^{(2)}P+\frac{1}{2}\sum_{k_1+k_2=1}\operatorname{tr}T^{(1)}S^{(k_1)}T^{(1)}S^{(k_2)}\right]= \qquad (2.32)$$

$$=\frac{1}{m}[\operatorname{tr}T^{(2)}P-\operatorname{tr}(T^{(1)}S^{m}T^{(1)}D^{m-1}+\ldots+T^{(1)}ST^{(1)}P)];$$

здесь мы использовали равенство $\operatorname{tr}AB=\operatorname{tr}BA$[2]).

---

[1] Операции взятия следа и интегрирования коммутируют. Доказательство этого аналогично доказательству формулы (I.4.30) и использует тот факт, что tr является линейным функционалом на $\mathscr{B}(X)$.

[2] Из этого равенства следует, например, что $\frac{1}{2}(\operatorname{tr}T^{(1)}ST^{(1)}P+\operatorname{tr}T^{(1)}PT^{(1)}S)=\operatorname{tr}T^{(1)}ST^{(1)}P$. Аналогичным образом использовано это равенство в формулах (2.33) ниже.

Формулы (2.32) упрощаются в случае полупростого собственного значения $\lambda$. Используя упомянутое только что равенство, получаем

$$\begin{aligned}
&\hat{\lambda}^{(1)} = \frac{1}{m}\operatorname{tr} T^{(1)}P,\\
&\hat{\lambda}^{(2)} = \frac{1}{m}\operatorname{tr}[T^{(2)}P - T^{(1)}ST^{(1)}P],\\
&\hat{\lambda}^{(3)} = \frac{1}{m}\operatorname{tr}[T^{(3)}P - T^{(1)}ST^{(2)}P - T^{(2)}ST^{(1)}P +\\
&\qquad + T^{(1)}ST^{(1)}ST^{(1)}P - T^{(1)}S^2T^{(1)}PT^{(1)}P],
\end{aligned} \tag{2.33}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda}^{(4)} = \frac{1}{m}\operatorname{tr}[&T^{(4)}P - T^{(1)}ST^{(3)}P - T^{(2)}ST^{(2)}P - T^{(3)}ST^{(1)}P +\\
&+ T^{(1)}ST^{(1)}ST^{(2)}P + T^{(1)}ST^{(2)}ST^{(1)}P + T^{(2)}ST^{(1)}ST^{(1)}P -\\
&- T^{(1)}S^2T^{(1)}PT^{(2)}P - T^{(1)}S^2T^{(2)}PT^{(1)}P - T^{(2)}S^2T^{(1)}PT^{(1)}P -\\
&- T^{(1)}ST^{(1)}ST^{(1)}ST^{(1)}P + T^{(1)}S^2T^{(1)}ST^{(1)}PT^{(1)}P +\\
&+ T^{(1)}ST^{(1)}S^2T^{(1)}PT^{(1)}P +\\
&+ T^{(1)}S^2T^{(1)}PT^{(1)}ST^{(1)}P - T^{(1)}S^3T^{(2)}PT^{(1)}PT^{(1)}P].
\end{aligned}$$

**Задача 2.1.** Если функция $T(\varkappa)$ линейна по $\varkappa$ (т. е. $T^{(n)} = 0$ при $n \geqslant 2$), то

$$\hat{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{mn}\operatorname{tr} T^{(1)}P^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots . \tag{2.34}$$

[*Указание*: сравнить (2.8) и (2.30).]

**Замечание 2.2.** Полученные выражения для $\hat{\lambda}^{(n)}$ принимают хорошо известную (хотя и несколько более сложную) форму, если след выразить через матричные элементы. Предположим для простоты, что невозмущенный оператор $T$ диагонализуем. Пусть $\lambda_h$, $P_h$, $h = 1, 2, \ldots$, — собственные значения и соответствующие им собственные проекторы оператора $T$, отличные от рассматриваемого собственного значения $\lambda$ и соответствующего ему проектора $P$. Пусть $\{x_1, \ldots, x_m\}$—базис в $\mathbf{M} = \mathbf{R}(P)$ и $\{x_{h1}, \ldots, x_{hm_h}\}$ — базис в $\mathbf{M}_h = \mathbf{R}(P_h)$, $h = 1, 2, \ldots$ . Объединение векторов $x_j$ и $x_{h_j}$ образует базис в $\mathbf{X}$, состоящий из собственных векторов оператора $T$ и присоединенный к разложению $\mathbf{X} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{M}_1 \oplus \ldots$ . Сопряженный базис в $X^*$ присоединен к разложению $\mathbf{X}^* = \mathbf{M}^* \oplus \mathbf{M}_1^* \oplus \ldots$, где $\mathbf{M}^* = \mathbf{R}(P^*)$, $\mathbf{M}_1^* = \mathbf{R}(P_1^*)$, $\ldots$, и является объединением базисов $\{e_{h1}, \ldots, e_{hm_h}\}$ в $\mathbf{M}_h^*$ и базиса $\{e_1, \ldots, e_m\}$ в $\mathbf{M}^*$ (см. задачу 1.3.19).

Для каждого $u \in \mathbf{X}$ имеем разложения

$$Pu = \sum_{j=1}^{m}(u, e_j)\,x_j, \quad P_hu = \sum_{j=1}^{m_h}(u, e_{hj})\,x_{hj}, \quad h = 1, 2, \ldots,$$

и для каждого $A \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$

$$\operatorname{tr} AP = \sum_{j=1}^{m}(Ax_j, e_j), \quad \operatorname{tr} AP_h = \sum_{j=1}^{m_h}(Ax_{hj}, e_{hj}), \quad h = 1, 2, \ldots .$$

Оператор $S$ дается формулой (I.5.32), если в ней убрать индекс $h$, поэтому

$$Su = \sum_k (\lambda_k - \lambda)^{-1} P_k u = \sum_{k,\, j} (\lambda_k - \lambda)^{-1} (u,\ e_{kj})\, x_{kj}.$$

Таким образом, из (2.33) получаем следующие выражения для $\hat{\lambda}^{(n)}$:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}^{(1)} &= \frac{1}{m} \sum_j (T^{(1)} x_j,\ e_j), \\ \hat{\lambda}^{(2)} &= \frac{1}{m} \sum_j (T^{(2)} x_j,\ e_j) - \frac{1}{m} \sum_{i,\, j,\, k} (\lambda_k - \lambda)^{-1} (T^{(1)} x_i,\ e_{kj})\, (T^{(1)} x_{kj},\ e_i). \end{aligned} \qquad (2.35)$$

Предположим, что собственное значение $\lambda$ просто, т. е. что $m = 1$. Пусть $\varphi$ — собственный вектор оператора $T$, принадлежащий собственному значению $\lambda$, положим $x_1 = \varphi$. Пусть $e_1 = \psi$ — собственный вектор оператора $T^*$, принадлежащий собственному значению $\bar{\lambda}$. Занумеруем другие собственные векторы оператора $T$ в последовательность $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,$ и пусть $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots$ — соответствующие им собственные значения, которые отличны от $\lambda$, но не обязательно различны между собой. Соответственно векторы $e_{hj}$ мы упорядочим в последовательность $\psi_j$, так что $\{\psi,\ \psi_1,\ \psi_2,\ \ldots\}$ будет базисом в $\mathbf{X}^*$, сопряженным к базису $\{\varphi,\ \varphi_1,\ \ldots\}$ в $\mathbf{X}$. В этих обозначениях приведенные выше формулы для $\hat{\lambda}^{(n)}$ можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \lambda^{(1)} &= (T^{(1)}\varphi,\ \psi), \\ \lambda^{(2)} &= (T^{(2)}\varphi,\ \psi) - \sum_j (\mu_j - \lambda)^{-1} (T^{(1)}\varphi,\ \psi_j)\, (T^{(1)}\varphi_j,\ \psi); \end{aligned} \qquad (2.36)$$

здесь $\hat{\lambda}^{(n)} = \lambda^{(n)}$, так как нет расщепления. Эти формулы известны из учебников квантовой механики[1]), правда там они выводятся в предположении, что $T$ и $T^{(n)}$ — симметричные (эрмитовы) операторы, так что достаточно использовать ортонормированную систему собственных векторов, а не биортогональную систему, как здесь. (В случае симметричных операторов $\psi = \varphi$, $\psi_j = \varphi_j$.)

## 3. Процесс редукции

Если $\lambda$ — полупростое собственное значение оператора $T$, то $D = 0$ и формула (2.16) дает

$$\tilde{T}^{(1)}(\varkappa) \equiv \frac{1}{\varkappa} (T(\varkappa) - \lambda)\, P(\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n \tilde{T}^{(n+1)}. \qquad (2.37)$$

Поскольку подпространство $\mathbf{M}(\varkappa) = \mathbf{R}\,(P(\varkappa))$ инвариантно относительно $T(\varkappa)$, существует очевидная связь между частями опера-

---

[1]) См. Кембл [[1]], Шифф [[1]] [или Ландау и Лифшиц [[1*]], Соколов, Лоскутов и Тернов [[1*]]. — *Ред.*].

торов $T(\varkappa)$ и $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ в подпространстве $\mathbf{M}(\varkappa)$. Таким образом, задача на собственные значения для оператора $T(\varkappa)$ в $\mathbf{M}(\varkappa)$ сводится к такой же задаче для $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$. Формула (2.37) показывает, что функция $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ голоморфна в точке $\varkappa = 0$, поэтому мы можем применить к $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ развитую выше теорию. Этот процесс сведения задачи для $T(\varkappa)$ к соответствующей задаче для $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ мы назовем *процессом редукции*. Роль «невозмущенного оператора» для семейства $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ играет (см. (2.20))

$$\tilde{T}^{(1)}(0) = \tilde{T}^{(1)} = PT^{(1)}P. \tag{2.38}$$

Каждое собственное значение оператора $\tilde{T}^{(1)}$ при малых $|\varkappa|$ вообще говоря расщепляется на несколько собственных значений оператора $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$. Пусть $\lambda_j^{(1)}$, $j = 1, 2, \ldots,$ — собственные значения оператора $\tilde{T}^{(1)}$ в инвариантном подпространстве $\mathbf{M} = \mathbf{M}(0) = \mathbf{R}(P)$ (нулевое собственное значение оператора $\tilde{T}^{(1)}$ в дополнительном подпространстве $\mathbf{R}(1 - P)$ нас не интересует). Спектральное разложение оператора $\tilde{T}^{(1)}$ в $\mathbf{M}$ имеет вид

$$\begin{gathered}\tilde{T}^{(1)} = PT^{(1)}P = \sum_j (\lambda_j^{(1)} P_j^{(1)} + D_j^{(j)}),\\ P = \sum_j P_j^{(1)}, \quad P_j^{(1)} P_k^{(1)} = \delta_{jk} P_j^{(1)}.\end{gathered} \tag{2.39}$$

Предположим сначала, что все $\lambda_j^{(1)}$ отличны от нуля. При возмущении каждое $\lambda_j^{(1)}$ расщепляется на несколько собственных значений (образующих $\lambda_j^{(1)}$-группу) оператора $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$, которые представляются в виде степенных рядов по $\varkappa^{1/p_j}$ при некотором $p_j \geqslant 1$[1]. Соответствующие собственные значения оператора $T(\varkappa)$ имеют вид

$$\lambda + \varkappa\lambda_j^{(1)} + \varkappa^{1+\frac{1}{p_j}} \alpha_{jk} + \ldots, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{2.40}$$

Если среди собственных значений $\lambda_j^{(1)}$ есть нулевое, то соответствующее собственное подпространство содержит $\mathbf{R}(1 - P)$. Эту трудность можно преодолеть, добавляя к $T(\varkappa)$ член вида $\alpha\varkappa$; это приведет к добавке к $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ члена вида $\alpha P(\varkappa)$. В результате все собственные значения оператора $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ в подпространстве $\mathbf{M}(\varkappa)$ получают одно и то же приращение $\alpha$ [чего нельзя уже,

---

[1] Вообще говоря, $\hat{\lambda}_j^{(1)}$-группа разбивается на несколько циклов, однако все собственные значения этой группы можно представить в виде степенных рядов по $\varkappa^{1/pj}$, где $p_j$ — наименьшее общее кратное длин циклов, входящих в $\lambda_j^{(1)}$-группу.

конечно, сказать о собственных значениях этого оператора в дополнительном подпространстве $\mathrm{R}\,(1-P\,(\varkappa))]$, а соответствующие собственные проекторы и собственные нильпотенты не изменяются. Выбирая подходящее $\alpha$, можем считать, что сдвинутые собственные значения $\lambda_j^{(1)}+\alpha$ все отличны от нуля. Таким образом, предположение $\lambda_j^{(1)}\neq 0$ не ограничивает общности и в дальнейшем мы будем принимать его всякий раз, когда это удобно.

Будем говорить, что собственные значения вида (2.40) оператора $T\,(\varkappa)$ при фиксированных $\lambda$ и $\lambda_j^{(1)}$ образуют $\lambda+\varkappa\lambda_j^{(1)}$-группу. Из разложения (2.40) сразу видно, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. *Если $\lambda$ — полупростое собственное значение невозмущенного оператора $T$, то каждое собственное значение оператора $T\,(\varkappa)$, принадлежащее $\lambda$-группе, имеет вид* (2.40) *и потому принадлежит некоторой $\lambda+\varkappa\lambda_j^{(1)}$-группе. Эти собственные значения непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $\varkappa=0$ (даже в том случае, когда $\varkappa=0$ есть точка ветвления). Тотальный проектор $P_j^{(1)}\,(\varkappa)$ для $\lambda+\varkappa\lambda_j^{(1)}$-группы (сумма собственных проекторов, соответствующих собственным значениям из этой группы) и взвешенное среднее собственных значений этой группы голоморфны в точке $\varkappa=0$.*

Последнее утверждение теоремы следует из того факта, что $P_j^{(1)}\,(\varkappa)$ есть тотальный проектор для $\lambda_j^{(1)}$-группы собственных значений оператора $\widetilde{T}^{(1)}\,(\varkappa)$. То же верно и для взвешенного среднего $\hat{\lambda}_j^{(1)}\,(\varkappa)$ собственных значений этой $\lambda_j^{(1)}$-группы.

Описанный выше процесс редукции можно далее применить к собственному значению $\lambda_j^{(1)}$ оператора $\widetilde{T}^{(1)}$, если оно полупросто. При этом получим, что собственные значения $\lambda_j^{(1)}$-группы имеют вид $\lambda_j^{(1)}+\varkappa\lambda_{jk}^{(2)}+o\,(\varkappa)$. Соответствующие собственные значения оператора $T\,(\varkappa)$ имеют вид

$$\lambda+\varkappa\lambda_j^{(1)}+\varkappa^2\lambda_{jk}^{(2)}+o\,(\varkappa^2). \tag{2.41}$$

Эти собственные значения при фиксированных $j$, $k$ образуют $\lambda+\varkappa\lambda_j^{(1)}+\varkappa^2\lambda_{jk}^{(2)}$-группу собственных значений оператора $T\,(\varkappa)$. Мы видим, таким образом, что процесс редукции может быть продолжен, а собственные значения и собственные проекторы оператора $T\,(\varkappa)$ могут быть разложены в формальные степенные ряды по $\varkappa$, если только невозмущенное собственное значение полупросто на каждом шаге процесса редукции.

*Однако нет необходимости продолжать процесс редукции бесконечно даже тогда, когда это возможно.* Так как все возможные расщепления произойдут за конечное число, скажем за $n$ шагов, то тотальный проектор и взвешенное среднее собственных значений уже на $n$-м шаге дадут нам полное разложение собственного проектора и собственного значения.

**Замечание 2.4.** Как же узнать, что после $n$-го шага процесса редукции расщеплений больше не будет? Это очевидным образом будет так, если тотальный проектор на $n$-м шаге одномерен. Однако никакого общего критерия нет. Тем не менее для большинства задач, возникающих в приложениях, эта проблема может быть решена следующим образом.

Предположим, что существует набор $\{A\}$ операторов такой, что $AT(\varkappa) = T(\varkappa)A$ для каждого оператора $A$ из этого набора и каждого $\varkappa$. Тогда $A$ коммутирует с резольвентой $R(\zeta, \varkappa)$ и, следовательно, с каждым собственным проектором оператора $T(\varkappa)$ (см. (I.5.22)). Если полупростое собственное значение $\lambda$ оператора $T$ расщепляется на первом шаге, то каждый оператор $P_j^{(1)}(\varkappa)$ из теоремы 2.3 и, следовательно, каждый оператор $P_j^{(1)} = P_j^{(1)}(0)$ коммутируют с $A$. Так как $P_j^{(1)}$ является собственным подпроектором (см. п. I.3.4) проектора $P$, то мы получаем такой результат: *если $\lambda$ — полупростое собственное значение и соответствующий проектор $P$ неприводим в том смысле, что у него нет ни одного собственного подпроектора, который коммутировал бы со всеми $A$ из набора $\{A\}$, то $\lambda$ не расщепляется на первом шаге.* Если известно, что рассматриваемое невозмущенное собственное значение полупросто на каждом шаге процесса редукции, то неприводимость $P$ означает, что расщепления нет вообще. Аналогично, если невозмущенный собственный проектор становится неприводимым на некотором шаге, то в дальнейшем не будет расщеплений.

## 4. Формулы для приближений высших порядков

Степенной ряд для тотального проектора $P_j^{(1)}(\varkappa)$ рассматриваемой $\lambda + \varkappa\lambda_j^{(1)}$-группы собственных значений оператора $T(\varkappa)$ можно получить из степенного ряда (2.37) для $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ точно так же, как разложение для $P(\varkappa)$ было выведено из разложения для $T(\varkappa)$. Для этого нам потребуется приведенная резольвента оператора $\widetilde{T}^{(1)}$, аналогично тому как раньше мы использовали приведенную резольвенту $S$ оператора $T$. Искомый оператор имеет вид

$$S_j^{(1)} - \frac{1}{\lambda_j^{(1)}}(1-P), \tag{2.42}$$

где член

$$S_j^{(1)} = -\sum_{k \neq j}\left[\frac{P_k^{(1)}}{\lambda_j^{(1)} - \lambda_k^{(1)}} + \frac{D_k^{(1)}}{(\lambda_j^{(1)} - \lambda_k^{(1)})^2} + \dots\right] \tag{2.43}$$

возникает от части оператора $\widetilde{T}^{(1)}$ в $\mathrm{M} = P\mathrm{X}$ (см. (I.5.32)), а второй член в (2.42) возникает от части оператора $\widetilde{T}^{(1)}$ в подпространстве $(1-P)\,X$, в котором $\widetilde{T}^{(1)}$ тождественно равен нулю. Отметим, что

$$S_j^{(1)}P=PS_j^{(1)}=S_j^{(1)},\quad S_j^{(1)}P_j^{(1)}=P_j^{(1)}S_j^{(1)}=0. \tag{2.44}$$

Применяя результаты п. 1.1, получаем

$$P_j^{(1)}(\varkappa)=P_j^{(1)}+\varkappa P_j^{(11)}+\varkappa^2 P_j^{(12)}+\dots\,; \tag{2.45}$$

коэффициенты этого разложения вычисляются по формулам (2.12), в которых операторы $T^{(\nu)}$ следует заменить на операторы $\widetilde{T}^{(\nu+1)}$, определяемые формулой (2.18), а $S^{(k)}$ следует заменить на $\left(S_j^{(1)}-\frac{1}{\lambda_j^{(1)}}(1-P)\right)^k$ при $k\geqslant 1$, на $-P_j^{(1)}$ при $k=0$ и на $-(D_j^{(1)})^{-k}$ при $k\leqslant -1$. Если, например, $\lambda_j^{(1)}$ — полупростое собственное значение (т. е. $D_j^{(1)}=0$), то, согласно формуле (2.14), имеем

$$P_j^{(11)}=-P_j^{(1)}\widetilde{T}^{(2)}\left(S_j^{(1)}-\frac{1}{\lambda_j^{(1)}}(1-P)\right)+(\mathrm{inv}), \tag{2.46}$$

где (inv) обозначает выражение, полученное из предыдущего обращением (inverting) порядка сомножителей в каждом члене. Подстановка сюда выражения (2.20) для $\widetilde{T}^{(2)}$ дает

$$P_j^{(11)}=-P_j^{(1)}T^{(2)}S_j^{(1)}-\frac{1}{\lambda_j^{(1)}}P_j^{(1)}T^{(1)}PT^{(1)}S+P_j^{(1)}T^{(1)}ST^{(1)}S_j^{(1)}+(\mathrm{inv}).$$

Так как $\lambda_j^{(1)}$ — полупростое собственное значение оператора $PT^{(1)}P$, то $P_j^{(1)}T^{(1)}P=P_j^{(1)}T^{(1)}P_j^{(1)}=\lambda_j^{(1)}P_j^{(1)}$. Поэтому

$$P_j^{(11)}=-P_j^{(1)}T^{(2)}S_j^{(1)}-P_j^{(1)}T^{(1)}S+P_j^{(1)}T^{(1)}ST^{(1)}S_j^{(1)}+(\mathrm{inv}). \tag{2.47}$$

Отметим, что окончательное выражение для $P_j^{(1)}$ не зависит явно от $\lambda_j^{(1)}$. Аналогичным образом можно вычислить $P_j^{(12)}$, правда при этом получится довольно громоздкое выражение.

Взвешенное среднее $\lambda_j^{(1)}(\varkappa)$ собственных значений $\lambda_j^{(1)}$-группы допускает разложение

$$\hat{\lambda}_j^{(1)}(\varkappa)=\lambda_j^{(1)}+\varkappa\hat{\lambda}_j^{(12)}+\varkappa^2\hat{\lambda}_j^{(13)}+\dots, \tag{2.48}$$

коэффициенты которого получаются по формулам (2.31) с заменой $m$, $P$, $S$, $T^{(\nu)}$ на $m_j^{(1)}=\dim P_j^{(1)}X$, $P_j^{(1)}$, (2.42) и $\widetilde{T}^{(\nu+1)}$ соответственно. Предполагая, например, что $\lambda_j^{(1)}$ — полупростое собственное значение, имеем

$$\hat{\lambda}_j^{(12)}=\frac{1}{m_j^{(1)}}\operatorname{tr}\widetilde{T}^{(2)}P_j^{(1)}=\frac{1}{m_j^{(1)}}\operatorname{tr}\left[T^{(2)}P_j^{(1)}-T^{(1)}ST^{(1)}P_j^{(1)}\right],$$

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}_j^{(13)} &= \frac{1}{m_j^{(1)}} \operatorname{tr}\left[\widetilde{T}^{(3)} P_j^{(1)} - T^{(2)}\left(S_j^{(1)} - \frac{1}{\lambda_j^{(1)}}(1-P)\right)\widetilde{T}^{(2)} P_j^{(1)}\right] = \\ &= \frac{1}{m_j^{(1)}} \operatorname{tr}[T^{(3)} P_j^{(1)} - T^{(1)} S T^{(2)} P_j^{(1)} - T^{(2)} S T^{(1)} P_j^{(1)} + \\ &\quad + T^{(1)} S T^{(1)} S T^{(1)} P_j^{(1)} - \lambda_j^{(1)} T^{(1)} S^2 T^{(1)} P_j^{(1)} - \\ &\quad - T^{(2)} S_j^{(1)} T^{(2)} P_j^{(1)} + T^{(1)} S T^{(1)} S_j^{(1)} T^{(2)} P_j^{(1)} + \\ &\quad + T^{(2)} S_j^{(1)} T^{(1)} S T^{(1)} P_j^{(1)} - T^{(1)} S T^{(1)} S_j^{(1)} T^{(1)} S T^{(1)} P_j^{(1)}]. \qquad (2.49)\end{aligned}$$

Здесь мы вновь использовали равенство $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ и соотношения (2.44) и (2.11). Взвешенное среднее собственных значений $\lambda + \varkappa\lambda_j^{(1)}$-группы имеет разложение

$$\hat{\lambda}_j(\varkappa) = \lambda + \varkappa\hat{\lambda}_j^{(1)}(\varkappa) = \lambda + \varkappa\hat{\lambda}_j^{(1)} + \varkappa^2\hat{\lambda}_j^{(12)} + \varkappa^3\hat{\lambda}_j^{(13)} + \ldots \qquad (2.50)$$

Если в $\lambda + \varkappa\lambda_j^{(1)}$-группе нет расщепления (другими словами, если эта группа состоит из одного-единственного собственного значения), то (2.50) служит разложением для этого собственного значения. Так будет, например, в том случае, когда $m_j^{(1)} = 1$.

**Замечание 2.5.** На первый взгляд может показаться странным, что *третий* коэффициент $\hat{\lambda}_j^{(13)}$ в разложении (2.49) содержит член $-\frac{1}{m_j^{(1)}} \operatorname{tr} T^{(2)} S_j^{(1)} T^{(2)} P_j^{(1)}$, *квадратичный по* $T^{(2)}$. Однако здесь нет никакого противоречия, в подтверждение чему рассмотрим следующий пример. Пусть $N = 2$, и пусть

$$T = 0,\ T^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\quad T^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},\quad T^{(n)} = 0 \ \text{ при } n \geqslant 3.$$

Собственные значения оператора $T(\varkappa)$ таковы:

$$\pm\varkappa(1 - \alpha^2\varkappa^2)^{1/2} = \pm\left(\varkappa + \frac{1}{2}\alpha^2\varkappa^2 + \ldots\right).$$

Мы видим, что коэффициент при $\varkappa^3$, равный $\alpha^2/2$, действительно квадратичен по $\alpha$ (т. е. по $T^{(2)}$).

## 5. Теорема Моцкина — Тausской

В качестве приложения теоремы 2.3 мы докажем некоторые теоремы, принадлежащие Моцкину и Таусской [1], [2].

**Теорема 2.6.** *Допустим, что оператор* $T(\varkappa) = T + \varkappa T'$ *диагонализуем при всех комплексных* $\varkappa$. *Тогда все собственные значения оператора* $T(\varkappa)$ *линейны по* $\varkappa$ (*т. е. имеют вид* $\lambda_h + \varkappa\alpha_h$), *а соответствующие собственные проекторы суть целые функции от* $\varkappa$.

Доказательство. Собственные значения $\lambda_h(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ суть ветви алгебраической функции (см. п. 1.7). С другой стороны, согласно теореме 2.3, функции $\lambda_h(\varkappa)$ непрерывно дифференцируемы при каждом $\varkappa$. Более того, как видно из (1.34), производные $d\lambda_h(\varkappa)/d\varkappa$ ограничены при $\varkappa \to \infty$. Отсюда следует, что эти производные постоянны (это простое следствие принципа максимума для аналитических функций[1]). Таким образом, функция $\lambda_h(\varkappa)$ линейна по $\varkappa$.

Так как $\lambda_h(\varkappa)$ имеет вид $\lambda_h + \varkappa\alpha_h$, то $\lambda_h + \varkappa\alpha_h$-группа оператора $T(\varkappa)$ состоит из одного собственного значения. Следовательно, собственный проектор $P_h(\varkappa)$, соответствующий $\lambda_h(\varkappa)$, совпадает с тотальным проектором этой группы и поэтому голоморфен в точке $\varkappa = 0$ (см. теорему 2.3). То же самое верно и для любой другой точки $\varkappa$, так как $T(\varkappa)$ и $\lambda_h(\varkappa)$ линейны по $\varkappa$. Таким образом, $P_h(\varkappa)$ — целая функция.

Проектор $P_h(\varkappa)$ может иметь полюс в бесконечности (см. пример 1.12, е). Но если $T'$ также диагонализуем, то функция $P_h(\varkappa)$ голоморфна и в точке $\varkappa = \infty$, так как собственные проекторы оператора $T(\varkappa) = \varkappa(T' + \varkappa^{-1}T)$ совпадают с собственными проекторами оператора $T' + \varkappa^{-1}T$, а последние по предыдущему голоморфны в точке $\varkappa = \infty$. Итак, функция $P_h(\varkappa)$ голоморфна всюду в расширенной плоскости, значит, по теореме Лиувилля[2] постоянна. Отсюда следует, что операторы $T$ и $T'$ имеют общие собственные проекторы (а именно, $P_h(0) = P_h(\infty)$) и поэтому коммутируют. Итак, доказана следующая

**Теорема 2.7.** *Если в условиях теоремы* 2.6 *оператор* $T'$ *диагонализуем, то* $T$ *и* $T'$ *коммутируют.*

Теоремы 2.6 и 2.7 можно сформулировать в следующей симметричной форме.

**Теорема 2.8.** *Пусть операторы* $A, B \in \mathscr{B}(X)$ *таковы, что их линейные комбинации* $\alpha A + \beta B$ *диагонализуемы для всех отношений* $\alpha : \beta$ *(включая* $\infty$*), за исключением, быть может, одной точки. Тогда все собственные значения оператора* $\alpha A + \beta B$ *имеют вид* $\alpha\lambda_h + \beta\mu_h$, *где* $\lambda_h$ *и* $\mu_h$ *не зависят от* $\alpha$ *и* $\beta$. *Если же операторы* $\alpha A + \beta B$ *диагонализуемы для всех без исключения отношений* $\alpha : \beta$, *то* $A$ *и* $B$ *коммутируют.*

---

[1] Поскольку функция $\mu(\varkappa) = d\lambda_h(\varkappa)/d\varkappa$ непрерывна всюду (включая точку $\varkappa = \infty$), то функция $|\mu(\varkappa)|$ принимает максимальное значение в некоторой точке $\varkappa = \varkappa_0$ (возможно, что $\varkappa_0 = \infty$). Следовательно, по принципу максимума функция $\mu(\varkappa)$ должна быть постоянна; см. Кнопп [[1]], стр. 84. [Если $\varkappa_0$ — точка ветвления порядка $p - 1$, то принцип максимума следует применить после подстановки $(\varkappa - \varkappa_0)^{1/p} = \varkappa'$; если $\varkappa_0 = \infty$, то надо сделать подстановку $\varkappa^{-1} = \varkappa'$ и затем применить принцип максимума.]

[2] См. Кнопп [[1]], стр. 112.

**Замечание 2.9.** Сформулированные выше теоремы носят *глобальный* характер в том смысле, что существенна диагонализуемость $T(\varkappa)$ для *всех* конечных $\varkappa$ (или для *всех* отношений $\alpha:\beta$, за исключением, быть может, лишь одной точки). Из диагонализуемости $T(\varkappa)$ во всех точках некоторой области D комплексной $\varkappa$-плоскости не вытекает, как видно из следующего примера, даже голоморфность в D собственных значений оператора $T(\varkappa)$.

**Пример 2.10.** Пусть $N=3$ и

$$T(\varkappa)=\begin{pmatrix}0 & \varkappa & 0\\ 0 & 0 & \varkappa\\ \varkappa & 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

Нетрудно проверить что оператор $T(\varkappa)$ диагонализуем для всех $\varkappa$ за исключением трех значений, удовлетворяющих уравнению[1] $\varkappa^3=-4/27$. Таким образом, $T(\varkappa)$ диагонализуем для всех $\varkappa$ на некоторой окрестности точки $\varkappa=0$. С другой стороны, ряды Пюизо собственных значений оператора $T(\varkappa)$ при малых $\varkappa$ имеют вид

$$\pm\varkappa^{3/2}+\ldots,\quad 1+\varkappa^3+\ldots, \tag{2.52}$$

откуда видно, что два из собственных значений не голоморфны в точке $\varkappa=0$.

**Замечание 2.11.** Теорема 2.6 без дополнительных ограничений неверна для операторов в бесконечномерных пространствах. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$T(\varkappa)=-\frac{d^2}{dx^2}+x^2+2\varkappa x$$

в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}^2(-\infty,+\infty)$ (мы подробно рассмотрим такие операторы в следующих главах). Собственные значения и соответствующие им собственные функции оператора $T(\varkappa)$ таковы:

$$\lambda_n(\varkappa)=2n-\varkappa^2,$$

$$\varphi_n(x,\varkappa)=\exp\left(-\frac{1}{2}x^2-\varkappa x\right)H_n(x+\varkappa);\qquad n=0,\ 2,\ \ldots;$$

здесь $H_n(x)$ — полиномы Эрмита. Собственные функции $\varphi_n$ образуют полную систему в $\mathbf{L}^2$ в том смысле, что каждую функцию из $\mathbf{L}^2$ можно сколь угодно точно аппроксимировать линейной комбинацией функций $\varphi_n$. Это следует, например, из того, что функции вида

$$\exp(-(x+\operatorname{Re}\varkappa)^2/2)\times(\text{многочлен от } x)$$

образуют полную систему в $\mathbf{L}^2$, а оператор умножения на $\exp(-ix\operatorname{Im}\varkappa)$ унитарен. Таким образом, оператор $T(\varkappa)$ можно считать *диагонализуемым* при каждом конечном $\varkappa$. Тем не менее функция $\lambda_n(\varkappa)$ не линейна по $\varkappa$.

---

[1] Характеристическое уравнение для $T(\varkappa)$ таково: $\zeta^3-\zeta^2-\varkappa^3=0$. Это кубическое уравнение имеет три различных корня и, следовательно, оператор $T(\varkappa)$ диагонализуем, если $\varkappa\neq 0$ и $\varkappa^3\neq -4/27$. Диагонализуемость оператора $T(0)$ очевидна (его матрица уже диагональна).

## 6. Ранги коэффициентов рядов теории возмущений

Ранги коэффициентов $P^{(n)}$ и $\widetilde{T}^{(n)}$ рядов (2.3) и (2.16) обладают характерным свойством:

$$\operatorname{rank} P^{(n)} \leqslant (n+1)\,\widetilde{m}, \quad \operatorname{rank} T^{(n)} \leqslant (n+1)\, m, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2.53}$$

Это вытекает из следующей леммы.

**Лемма 2.12.** *Пусть* $P(\varkappa) \in \mathscr{B}(X)$ *и* $A(\varkappa) \in \mathscr{B}(X)$ *голоморфно зависят от* $\varkappa$ *вблизи* $\varkappa = 0$, *и пусть* $P(\varkappa)$ — *проектор для всех* $\varkappa$. *Тогда коэффициенты разложения*

$$A(\varkappa) P(\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n B_n \tag{2.54}$$

*удовлетворяют неравенствам*

$$\operatorname{rank} B_n \leqslant (n+1)\, m, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.55}$$

*где* $m = \dim P(0)$. *Аналогичный результат имеет место и для* $P(\varkappa) A(\varkappa)$.

Доказательство. Пусть

$$P(\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n P_n. \tag{2.56}$$

Коэффициенты $P_n$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям вида

$$P_n = P_0 P_n + Q_{n1} P_0 P_{n-1} + \ldots + Q_{nn} P_0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.57}$$

где $Q_{nk}$ — некоторые многочлены от $P_0, P_1, \ldots, P_n$. Соотношение (2.57) доказывается по индукции. Из равенства $P^2(\varkappa) = P(\varkappa)$ следует, что

$$P_n = P_0 P_n + P_1 P_{n-1} + \ldots + P_n P_0; \tag{2.58}$$

тем самым (2.57) доказано для $n = 1$. Если (2.57) верно для $1, 2, \ldots, n-1$, то из (2.58) следует, что

$$\begin{aligned} P_n &= P_0 P_n + P_1 (P_0 P_{n-1} + Q_{n-1,1} P_0 P_{n-2} + \ldots + Q_{n-1,n-1} P_0) + \\ &\quad + P_2 (P_0 P_{n-2} + Q_{n-2,1} P_0 P_{n-3} + \ldots + Q_{n-2,n-2} P_0) + \ldots \\ &\quad \ldots + P_n P_0 = \\ &= P_0 P_n + P_1 P_0 P_{n-1} + (P_1 Q_{n-1,1} + P_2) P_0 P_{n-2} + \ldots \\ &\quad \ldots + (P_1 Q_{n-1,n-1} + P_2 Q_{n-2,n-2} + \ldots + P_n) P_0. \end{aligned}$$

Мы получили выражение вида (2.57), чем индукция и завершена.

Предположим теперь, что $\sum \varkappa^n A_n$ есть разложение для $A(\varkappa)$. Из (2.54), (2.56) и (2.57) получаем

$$\begin{aligned} B_n &= A_0 P_n + A_1 P_{n-1} + \ldots + A_n P_0 = \\ &= A_0 P_0 P_n + (A_0 Q_{n1} + A_1) P_0 P_{n-1} + \\ &\quad + (A_0 Q_{n2} + A_1 Q_{n-1,1} + A_2) P_0 P_{n-2} + \ldots \\ &\quad \ldots + (A_0 Q_{nn} + A_1 Q_{n-1,n-1} + \ldots + A_n) P_0. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Таким образом, $B_n$ есть сумма $n+1$ слагаемых, каждое из которых содержит множитель $P_0$ и потому имеет ранг не больше чем rank $P_0$ (см. задачу I.3.4), откуда и следует требуемое неравенство (2.55). Нетрудно видеть, каким образом надо изменить приведенное рассуждение для того, чтобы получить аналогичный результат для функции $P(\varkappa) A(\varkappa)$.

## § 3. Радиусы сходимости и оценки погрешностей

### 1. Простые оценки[1]

В предыдущих параграфах мы рассматривали различные степенные ряды по $\varkappa$, не указывая явно условия их сходимости. В этом параграфе мы исследуем такие условия.

Мы начнем с выражения (1.13) для резольвенты $R(\zeta, \varkappa)$. Ряд (1.13) сходится при условии

$$\| A(\varkappa) R(\zeta) \| = \| (\sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n T^{(n)}) R(\zeta) \| < 1, \tag{3.1}$$

которое выполняется, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varkappa|^n \| T^{(n)} R(\zeta) \| < 1. \tag{3.2}$$

Обозначим через $r(\zeta)$ такое значение $|\varkappa|$, при котором левая часть неравенства (3.2) равна 1. Тогда это неравенство выполняется при $|\varkappa| < r(\zeta)$.

Пусть Г — такая же кривая, как и в п. 1.4. Ясно, что ряд (1.13) сходится равномерно по $\zeta \in \Gamma$, если

$$|\varkappa| < r_0 = \min_{\zeta \in \Gamma} r(\zeta), \tag{3.3}$$

поэтому ряды (1.17) и (2.3) для тотального проектора $P(\varkappa)$ сходятся при условии (3.3). Таким образом, $r_0$ дает также оценки

---

[1] Излагаемый здесь метод, основанный на элементарных фактах теории функций, использовался Секефальви-Надем [1], [2], Т. Като [1], Шефке [3] — [5].

снизу для радиуса сходимости ряда для $P(\varkappa)$. Очевидно, что $r_0$ служит также нижней границей радиусов сходимости рядов (2.21) и (2.37) для $\hat{\lambda}(\varkappa)$ и $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ соответственно. До сих пор в качестве контура Г можно было брать любую замкнутую спрямляемую кривую, охватывающую только одно собственное значение $\zeta = \lambda$ оператора $T$. Теперь мы предположим, что Г — *выпуклый* контур. В дальнейшем будет полезно выбирать контур Г так, чтобы значение $r_0$ для него было максимально возможным.

Для оценки коэффициентов $\hat{\lambda}^{(n)}$ разложения (2.21) используем то обстоятельство, что при условии (3.3) собственные значения оператора $T(\varkappa)$, образующие $\lambda$-группу, а значит и их взвешенное среднее $\hat{\lambda}(\varkappa)$, лежат внутри контура Г [1]). Полагая

$$\rho = \max_{\zeta\in\Gamma} |\zeta - \lambda|, \tag{3.4}$$

видим, что функция $\hat{\lambda}(\varkappa) - \lambda$ в круге (3.3) ограничена константой $\rho$ и голоморфна. Из неравенств Коши [2]) для коэффициентов рядов Тейлора следует, что

$$|\hat{\lambda}^{(n)}| \leqslant \rho r_0^{-n}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots\ . \tag{3.5}$$

Эти неравенства полезны при оценке скорости сходимости ряда (2.21). А именно

$$\left|\hat{\lambda}(\varkappa) - \lambda - \sum_{p=1}^{n} \varkappa^p \hat{\lambda}^{(p)}\right| \leqslant \sum_{p=n+1}^{\infty} |\varkappa|^p |\lambda^{(p)}| \leqslant \frac{\rho|\varkappa|^{n+1}}{r_0^n (r_0 - |\varkappa|)}. \tag{3.6}$$

**Пример 3.1.** Предположим, что

$$\| T^{(n)} \| \leqslant ac^{n-1}, \quad n = 1,\ 2,\ \ldots, \tag{3.7}$$

для некоторых положительных постоянных $a$ и $c$. Такие постоянные всегда существуют ввиду сходимости ряда (1.2). Из (3.7) следует, что неравенство (3.2) выполняется при $a|\varkappa|(1 - c|\varkappa|)^{-1}\|R(\zeta)\| < 1$, или, что то же, при $|\varkappa| < (a\|R(\zeta)\| + c)^{-1}$. Мы получаем, таким образом, следующую нижнюю границу для радиуса сходимости:

$$r_0 = \min_{\zeta\in\Gamma} (a\|R(\zeta)\| + c)^{-1}. \tag{3.8}$$

## 2. Метод мажорирующих рядов

Другой метод оценки коэффициентов и радиусов сходимости рядов теории возмущений основан на использовании мажорирующих рядов [3]). Мы будем называть функцию (ряд) $\Phi(\zeta - \lambda, \varkappa)$

---

[1]) Здесь существенна выпуклость контура Г.

[2]) См. Кнопп [1], стр. 77.

[3]) Применять мажорирующие ряды начал Реллих [4], затем его идеи были развиты Шрёдером [1] — [3]. Их подход основан на рекуррентных соотношениях для коэффициентов рядов теории возмущений и отличается от теоретико-функционального подхода, используемого ниже.

*мажорирующей* для $A(\varkappa)\,R(\zeta)$ (см. (1.13) и (2.29)) и писать

$$A(\varkappa)\,R(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa^n T^{(n)}R(\zeta)\ll\Phi(\zeta-\lambda,\,\varkappa)=$$
$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=1}^{\infty}c_{kn}(\zeta-\lambda)^k\varkappa^n, \tag{3.9}$$

если каждый коэффициент $c_{kn}$ не меньше, чем *норма* соответствующего коэффициента в разложении $A(\varkappa)\,R(\zeta)$ по степеням $\zeta-\lambda$ и $\varkappa$. Так как $R(\zeta)$ имеет разложение Лорана (I.5.18), в котором $\lambda_h$, $P_h$, $D_h$ следует заменить на $\lambda$, $P$, $D$ соответственно, то наше условие означает, что

$$\begin{gathered}\|T^{(n)}D^k\|\leqslant c_{-k-1,\,n},\quad \|T^{(n)}P\|\leqslant c_{-1,\,n},\\ \|T^{(n)}S^k\|\leqslant c_{k-1,\,n},\quad k>0.\end{gathered} \tag{3.10}$$

Мы предполагаем, что $c_{kn}=0$ при $k<-m$, так что $\Phi(z,\,\varkappa)$ может иметь лишь полюс в точке $z=0$; это условие не противоречит нашему определению, так как $D^m=0$.

Из (3.9) следует, что

$$\Big\|\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa^n T^{(n)}R(\zeta)\Big\|\leqslant\Phi(|\zeta-\lambda|,\,|\varkappa|). \tag{3.11}$$

Таким образом, ряд (1.13) сходится, если $\Phi(|\zeta-\lambda|,\ |\varkappa|)<1$. Беря в качестве контура $\Gamma$ окружность $|\zeta-\lambda|=\rho$, видим, что нижней границей $r$ радиуса сходимости ряда для $P(\varkappa)$, а также ряда для $\hat{\lambda}(\varkappa)$ будет служить наименьший положительный корень уравнения

$$\Phi(\rho,\ r)=1. \tag{3.12}$$

Для того чтобы получить наилучшую оценку для радиусов сходимости, нужно выбирать $\rho$ так, чтобы наименьший положительный корень уравнения (3.12) был возможно больше.

Функции $\Phi$ можно использовать для построения мажорирующего ряда для $\hat{\lambda}(\varkappa)-\lambda$. А именно, таким рядом будет

$$\Psi(\varkappa)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\zeta-\lambda|=\rho}-\log(1-\Phi(\zeta-\lambda,\ \varkappa))\,d\zeta. \tag{3.13}$$

Для доказательства заметим, что вклад в интеграл (2.29) дают лишь те члены разложения Лорана (по степеням $\varkappa$ и $\zeta-\lambda$) для подинтегрального выражения в (2.29), которые содержат по крайней мере один множитель $P$ или $D$. Ранг каждого такого члена не превосходит $m$ и, следовательно, его след не больше, чем его норма, умноженная на $m$ (см. (I.5.42)). Таким образом, мы получим мажорирующий ряд для $\hat{\lambda}(\varkappa)-\lambda$, если отбросим множитель

$1/m$ и символ tr в правой части формулы (2.29) и заменим коэффициенты разложения подинтегрального выражения в (2.29) их нормами. Но эта мажорирующая функция в свою очередь мажорируется функцией (3.13), чем наше утверждение и доказано.

Как известно из теории функций, интеграл (3.13) равен разности числа нулей и числа полюсов функции $1 - \Phi(z, \varkappa)$, содержащихся в круге $|z| < \rho$[1]. Однако единственный полюс этой функции расположен в точке $z = 0$ и потому не дает вклад в упомянутую сумму. Таким образом, доказана

**Теорема 3.2.** *В качестве мажорирующей функции для $\hat{\lambda}(\varkappa) - \lambda$ можно взять сумму нулей функции $1 - \Phi(z, \varkappa)$ (как функции от $z$) в окрестности точки $z = 0$ при $\varkappa \to 0$, причем кратные нули учитываются с кратностями. Этот мажорирующий ряд, а значит, и мажорирующие ряды для $P(\varkappa)$ и $\hat{\lambda}(\varkappa)$ сходятся при $|\varkappa| < r$, где $r$ — наименьший положительный корень уравнения (3.12); здесь $\rho$ — произвольное число такое, что окружность $|\zeta - \lambda| = \rho$ не охватывает собственных значений оператора $T$, отличных от $\lambda$.*

**Пример 3.3.** Рассмотрим частный случай, когда $T^{(n)} = 0$ при $n \geqslant 2$ и $\lambda$ — полупростое собственное значение оператора $T$ $(D = 0)$. Из неравенств (3.10) видно, что все коэффициенты, кроме $c_{k1}$ и $c_{-1,1}$, можно считать равными нулю. Положим $c_{-1,1} = \| T^{(1)}P \|$. Что же касается выбора коэффициентов $c_{k1}$, которые согласно (3.10) должны удовлетворять неравенствам $c_{k1} \geqslant \| T^{(1)} S^{k+1} \|$, $k \geqslant 0$, то заметим, что $S^{k+1} = S(S - \alpha P)^k$ при любом $\alpha$, так как $SP = PS = 0$. Положим поэтому $c_{k1} = \| T^{(1)}S \| \| S - \alpha P \|^k$. Мы получаем следующее выражение для мажорирующей функции:

$$\Phi(z, \varkappa) = \varkappa\left(\frac{p}{z} + \frac{q}{1 - sz}\right), \tag{3.14}$$

где

$$p = \| T^{(1)}p \|, \quad q = \| T^{(1)}S \|, \quad s = \| S - \alpha P \|. \tag{3.15}$$

При малых $|\varkappa|$ у функции $1 - \Phi(z, \varkappa)$ имеется единственный нуль $z = \Psi(\varkappa)$ в окрестности точки $z = 0$. Функция $\Psi(\varkappa)$ по теореме 3.2 является мажорирующей функцией для $\hat{\lambda}(\varkappa) - \lambda$. Несложные вычисления дают

$$\begin{aligned}\Psi(\varkappa) &= p\varkappa + \frac{1}{2s}[1 - (ps + q)\varkappa - \Omega(\varkappa)] = \\ &= p\varkappa + 2pq\varkappa^2[1 - (ps + z)\varkappa + \Omega(\varkappa)]^{-1} = \\ &= p\varkappa + pq\varkappa^2 + \frac{2pq(ps + q)\varkappa^3 + 2p^3q^2s\varkappa^4}{1 - (ps + q)\varkappa - 2pqs\varkappa^2 + \Omega(\varkappa)},\end{aligned} \tag{3.16}$$

где

$$\Omega(\varkappa) = \{[1 - (ps + q)\varkappa]^2 - 4pqs\varkappa^2\}^{1/2}. \tag{3.17}$$

---

[1] См. Кнопп [[1]], стр. 134. Отметим, что $\int \log f(z)\,dz = -\int f'(z) f(z)^{-1} z\,dz$ (это сразу получается интегрированием по частям).

Каждый коэффициент степенного ряда для $\Psi(\varkappa)$ служит верхней границей соответствующего коэффициента ряда для $\hat{\lambda}(\varkappa)-\lambda$. Поэтому остаток первого ряда дает оценку сверху соответствующего остатка ряда для $\hat{\lambda}(\varkappa)$. Таким образом, используя второе и третье выражения в (3.16), получаем

$$|\hat{\lambda}(\varkappa)-\lambda-\varkappa\hat{\lambda}^{(1)}| \leqslant \frac{2pq|\varkappa|^2}{1-(ps+q)|\varkappa|+\Omega|\varkappa|}, \tag{3.18}$$

$$\hat{\lambda}(\varkappa)-\lambda-\varkappa\hat{\lambda}^{(1)}-\varkappa^2\hat{\lambda}^{(2)}| \leqslant \frac{2pq|\varkappa|^3(ps+q+pqs|\varkappa|)}{1-(ps+q)|\varkappa|-2pqs|\varkappa|^2+\Omega(|\varkappa|)}. \tag{3.19}$$

Подставляя (3.14) в (3.12), получаем нижнюю границу $r$ радиусов сходимости рядов для $P(\varkappa)$ и $\hat{\lambda}(\varkappa)$. При

$$\rho = p^{1/2}s^{-1/2}[(ps)^{1/2}+q^{1/2}]^{-1} \tag{3.20}$$

получаем максимальное значение [1]

$$r=[(ps)^{1/2}+q^{1/2}]^{-2}. \tag{3.21}$$

Отметим, что значение (3.20) возможно, так как $\rho \leqslant s^{-1} = \|S-\alpha P\|^{-1} \leqslant d$, где $d$ — расстояние от $\lambda$ до множества остальных собственных значений оператора $T$. В самом деле, из (I.5.32) следует, что $(S-\alpha P)u = -(\lambda-\lambda_k)^{-1}$, если $u=P_k u$ (напомним, что $P_jP_k=0$ при $j\neq k$ и $PP_k=0$). Поэтому $\|S-\alpha P\| \geqslant |\lambda-\lambda_k|^{-1}$ для всех $k$.

Задача 3.4. В примере 3.3

$$|\hat{\lambda}^{(1)}| \leqslant p, \quad |\hat{\lambda}^{(2)}| \leqslant pq, \quad |\hat{\lambda}^{(3)}| \leqslant pq(ps+q), \ \ldots \, . \tag{3.22}$$

**Замечание 3.5.** С помощью мажорирующей функции $\Phi$ можно оценить и ряд для $P(\varkappa)$. Согласно (1.16), (1.13) и (3.9), имеем

$$P(\varkappa) \ll \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta-\lambda|=\rho} \Phi_1(\zeta-\lambda)(1-\Phi(\zeta-\lambda_1\varkappa))^{-1}\,d\zeta, \tag{3.23}$$

где $\Phi_1(\zeta-\lambda)$ — мажорирующая функция для $R(\zeta)$. Если функции $\Phi$ и $\Phi_1$ явно заданы, то правую часть в (3.23) можно вычислить с помощью теории вычетов.

## 3. Оценки для собственных векторов

Часто требуется вычислить собственные векторы, а не собственные проекторы. Однако вполне определенных формул, выражающих собственные векторы оператора $T(\varkappa)$ как функций от $\varkappa$, нет ввиду неоднозначности выбора собственных векторов. Предположим для простоты, что $m=1$ (так что $D=0$). В этом случае формула

$$\varphi(\varkappa) = (P(\varkappa)\varphi, \psi)^{-1} P(\varkappa)\varphi \tag{3.24}$$

дает удобное выражение для собственного вектора $\varphi(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$, принадлежащего собственному значению $\lambda(\varkappa)$; здесь $\varphi$ —

---

[1] Это видно также из формулы (3.16), правая часть которой имеет разложение, сходящееся при $|\varkappa|<r$, где $r$ дается формулой (3.21).

собственный вектор невозмущенного оператора $T$, принадлежащий собственному значению $\lambda$, а $\psi$ — собственный вектор сопряженного оператора $T^*$, принадлежащий собственному значению $\bar{\lambda}$ и нормированный условием $(\varphi, \psi) = 1$. Таким образом,

$$P\varphi = \varphi, \quad P^*\psi = \psi, \quad (\varphi, \psi) = 1. \tag{3.25}$$

То что вектор в правой части (3.24) является собственным для $T(\varkappa)$, следует из одномерности подпространства $P(\varkappa)\,\mathrm{X}$. Выбор коэффициента в (3.24) эквивалентен любому из следующих нормировочных условий:

$$(\varphi(\varkappa), \psi) = 1, \quad (\varphi(\varkappa) - \varphi, \psi) = 0, \quad P(\varphi(\varkappa) - \varphi) = 0. \tag{3.26}$$

Равенство $(T(\varkappa) - \lambda(\varkappa))\,\varphi(\varkappa) = 0$ можно переписать в виде

$$(T - \lambda)(\varphi(\varkappa) - \varphi) + (A(\varkappa) - \lambda(\varkappa) + \lambda)\,\varphi(\varkappa) = 0, \tag{3.27}$$

где $A(\varkappa) = T(\varkappa) - T$ (отметим, что $(T - \lambda)\,\varphi = 0$). Умножая (3.27) слева на $S$ и учитывая равенства $S(T - \lambda) = 1 - P$ и (3.26), получаем

$$\varphi(\varkappa) - \varphi + S\,[A(\varkappa) - \lambda(\varkappa) + \lambda]\,\varphi(\varkappa) = 0. \tag{3.28}$$

Замечая теперь, что $S\varphi = 0$, и представляя $\varphi(\varkappa)$ в виде $\varphi(\varkappa) - \varphi + \varphi$, получаем для достаточно малых $\varkappa$

$$\begin{aligned}\varphi(\varkappa) - \varphi &= -(1 + S\,[A(\varkappa) - \lambda(\varkappa) + \lambda])^{-1}\,SA(\varkappa)\,\varphi = \\ &= -S\,[1 + A(\varkappa)\,S - (\lambda(\varkappa) - \lambda)\,S_\alpha]^{-1}\,A(\varkappa)\,\varphi,\end{aligned} \tag{3.29}$$

где $S_\alpha = S - \alpha P$ и $\alpha$ — произвольное число. Это — удобная формула для вычисления собственных векторов.

Из нее следует, в частности, что

$$\varphi(\varkappa) - \varphi \ll \|S\|\,(1 - \Phi_2(\varkappa) - \|S_\alpha\|\,\Psi(\varkappa))^{-1}\,\Phi_3(\varkappa), \tag{3.30}$$

где $\Phi_2(\varkappa)$ и $\Phi_3(\varkappa)$ суть мажорирующие функции[1]) для $A(\varkappa)\,S$ и $A(\varkappa)\,\varphi$ соответственно (напомним, что $\Psi(\varkappa)$ — мажорирующая функция для $\lambda(\varkappa) - \lambda$). Поэтому собственный вектор $\varphi(\varkappa)$ можно вычислять по формуле (3.30) для таких $\varkappa$, для которых правая часть в (3.30) меньше, чем $\|\varphi\|$, ибо тогда $\varphi(\varkappa)$ заведомо не нуль.

Умножая (3.29) слева на $T - \lambda$, получаем

$$\begin{aligned}(T - \lambda)\,\varphi(\varkappa) &= \\ &= -(1 - P)\,[1 + A(\varkappa)\,S - (\lambda(\varkappa) - \lambda)\,S_\alpha]^{-1}\,A(\varkappa)\,\varphi,\end{aligned} \tag{3.31}$$

и потому

$$(T - \lambda)\,\varphi(\varkappa) \ll (1 - \Phi_2(\varkappa) - \|S_\alpha\|\,\Psi(\varkappa))^{-1}\,\Phi_3(\varkappa). \tag{3.32}$$

---

[1]) Мажорирующий ряд (функция) для вектор-функций определяется точно так же, как и для операторных функций.

**Пример 3.6.** Если $T^{(n)}=0$ при $n\geqslant 2$, то $A(\varkappa)=\varkappa T^{(1)}$, так что можно положить

$$\Phi_2(\varkappa)=\varkappa\,\|T^{(1)}S\|=\varkappa q,\quad \Phi_3(\varkappa)=\varkappa\,\|T^{(1)}\varphi\|. \tag{3.33}$$

Тогда формулы (3.30) и (3.32) после подстановки в них выражения (3.16) дают ($s_0=\|S\|$)

$$\varphi(\varkappa)-\varphi\ll\frac{2\varkappa s_0\,\|T^{(1)}\varphi\|}{1-(ps+q)\varkappa+\{(1-(ps+q)\varkappa)^2-4pqs\varkappa^2\}^{1/2}}, \tag{3.34}$$

$$(T-\lambda)\varphi(\varkappa)\ll\frac{2\varkappa\,\|T^{(1)}\varphi\|}{1-(ps+q)\varkappa+\{(1-(ps+q)\varkappa)^2-4pqs\varkappa^2\}^{1/2}}. \tag{3.35}$$

**Задача 3.7.** Доказать, что в предположениях примера 3.6 при $|\varkappa|<r$ справедливы следующие соотношения:

$$\varphi(\varkappa)=\varphi-\varkappa ST^{(1)}\varphi+\varkappa^2S(T^{(1)}-\lambda^{(1)})ST^{(1)}\varphi-\ldots, \tag{3.36}$$

$$\varphi(\varkappa)-\varphi\ll S_0\varkappa(1+(ps+q)\varkappa+\ldots)\,\|T^{(1)}\varphi\|, \tag{3.37}$$

$$\|\varphi(\varkappa)-\varphi\|\leqslant|\varkappa|\frac{S_0}{(pqs)^{1/2}}((ps)^{1/2}+q^{1/2})^2\,\|T^{(1)}\varphi\|, \tag{3.38}$$

$$\|\varphi(\varkappa)-\varphi-\varkappa ST^{(1)}\varphi\|\leqslant|\varkappa|^2\frac{s_0}{(pqs)^{1/2}}((ps)^{1/2}+q^{1/2})^2(ps+q+(pqs)^{1/2}), \tag{3.39}$$

$$\|(T-\lambda)(\varphi(\varkappa)-\varphi)\|\leqslant|\varkappa|\frac{1}{(pqs)^{1/2}}((ps)^{1/2}+q^{1/2})\,\|T^{(1)}\varphi\|, \tag{3.40}$$

$$\|(T-\lambda)(\varphi(\varkappa)-\varphi+\varkappa ST^{(1)}\varphi)\|\leqslant|\varkappa|^2\frac{1}{(pqs)^{1/2}}, \tag{3.41}$$

$$((ps)^{1/2}+q^{1/2})^2(ps+q+(pqs)^{1/2}).$$

[*Указание*: при выводе соотношений (3.38) и (3.39) сделать подстановку $\varkappa=r$ после выделения множителей $|\varkappa|$ и $|\varkappa|^2$ в соответствующих рядах.]

## 4. Дальнейшие оценки погрешностей

Ввиду того что оценка скорости сходимости ряда теории возмущений для $\hat{\lambda}(\varkappa)$ имеет большое практическое значение, мы дадим здесь еще один метод оценки коэффициентов $\hat{\lambda}^{(n)}$ этого ряда (ср. (3.5) и (3.13)).

Запишем интегральное представление (2.30) для $\hat{\lambda}^{(n)}$ в следующем виде:

$$\hat{\lambda}^{(n)}=\frac{1}{2\pi im}\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_p=n}\frac{(-1)^p}{p}\int_\Gamma \operatorname{tr}[T^{(\nu_1)}R(\zeta)\ldots T^{(\nu_p)}R(\zeta)-$$
$$-T^{(\nu_1)}S(\zeta)\ldots T^{(\nu_p)}S(\zeta)]\,d\zeta. \tag{3.42}$$

Здесь $S(\zeta)$ — приведенная резольвента оператора $T$ относительно собственного значения $\lambda$ (см. п. I.5.3), т. е.

$$R(\zeta)=R_0(\zeta)+S(\zeta),\quad R_0(\zeta)=PR(\zeta)=R(\zeta)P \tag{3.43}$$

есть разложение $R(\zeta)$ на главную часть с полюсом в точке $\zeta = \lambda$ и голоморфную часть. Отметим, что второй член выражения в квадратных скобках (3.42) голоморфен и поэтому не дает вклада в интеграл. Далее, это выражение в квадратных скобках может быть представлено в виде

$$T^{(\nu_1)}R_0(\zeta)\,T^{(\nu_2)}R(\zeta)\ldots T^{(\nu_p)}R(\zeta)+ \\ +T^{(\nu_1)}S(\zeta)\,T^{(\nu_2)}R_0(\zeta)\ldots T^{(\nu_p)}R(\zeta)+\ldots \\ \ldots+T^{(\nu_1)}S(\zeta)\ldots T^{(\nu_{p-1})}S(\zeta)\,T^{(\nu_p)}R_0(\zeta), \qquad (3.44)$$

где каждое слагаемое содержит множитель $R_0(\zeta) = PR(\zeta)$. Так как ранг этого множителя $\leqslant m$, то и ранг каждого слагаемого в (3.44) не превосходит $m$ и, следовательно, ранг всего выражения (3.44) не превосходит $\min(mp, N)$, где $N = \dim \mathsf{X}$. Таким образом, след в (3.42) оценивается сверху по абсолютной величине нормой выражения, стоящего под знаком следа, умноженной на $\min(pm, N)$ (см. (I.5.42)). Это приводит к следующей оценке:

$$|\hat{\lambda}^{(n)}|\leqslant\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu_1+\ldots+\nu_p=n}\min\left(1,\frac{N}{pm}\right)\int_{\Gamma}\|T^{(\nu_1)}R(\zeta)\ldots T^{(\nu_p)}R(\zeta)- \\ -T^{(\nu_1)}S(\zeta)\ldots T^{(\nu_p)}S(\zeta)\|\,d\zeta. \qquad (3.45)$$

Несколько иную оценку можно получить в том частном случае, когда $T^{(n)} = 0$ при $n \geqslant 2$. В этом случае можно исходить из формулы (2.34). Снова оценивая след $\min(nm, N)$ раз взятой нормой и учитывая, что согласно (2.53) ранг проектора $P^{(n-1)}$ не превосходит $\min(nm, N)$, находим

$$|\hat{\lambda}^{(n)}|\leqslant\min\left(1,\frac{N}{mn}\right)\|T^{(1)}P^{(n-1)}\|,\quad n=1,\,2,\,\ldots\,. \qquad (3.46)$$

Далее, формула (2.8) дает

$$\|T^{(1)}P^{(n-1)}\|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\|(T^{(1)}R(\zeta))^n\|\,|d\zeta|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma}\|T^{(1)}R(\zeta)\|^n\,|d\zeta|\leqslant \\ \leqslant\frac{1}{2\pi}\|T^{(1)}\|^n\int_{\Gamma}\|R(\zeta)\|^n\,|d\zeta|. \qquad (3.47)$$

Подстановка (3.47) в (3.46) приводит к искомой оценке для $\hat{\lambda}^{(n)}$.

**Замечание 3.8.** Оператор $T^{(1)}$ в формулах (3.46) — (3.47) при $n \geqslant 2$ можно заменить на $T^{(1)} - \alpha$ для любого скаляра $\alpha$. Это следует из того, что при этом $T(\varkappa)$ изменится лишь на скалярное слагаемое $-\alpha\varkappa$, а значит, $\lambda^{(n)}$ не изменится при $n \geqslant 2$. В частности, $\|T^{(1)}\|$ в последнем члене неравенства (3.47) можно заменить на

$$a_0 = \min_{\alpha}\|T^{(1)} - \alpha\|. \qquad (3.48)$$

### 5. Частный случай нормального невозмущенного оператора

Предыдущие результаты, касающиеся радиусов сходимости и скорости сходимости рядов теории возмущений, значительно упрощаются в том случае, когда X — гильбертово конечномерное пространство и $T$ — нормальный оператор. Тогда, согласно (I.6.70), имеем

$$\| R(\zeta) \| = 1/\mathrm{dist}(\zeta, \Sigma(T)) \tag{3.49}$$

при каждом $\zeta \in \mathrm{P}(T)$.

Если при этом коэффициенты $T^{(n)}$ удовлетворяют неравенствам (3.7), то, согласно формуле (3.8), число

$$r_0 = \min_{\zeta \in \Gamma} \left( \frac{a}{\mathrm{dist}(\zeta, \Sigma(T))} + c \right)^{-1} \tag{3.50}$$

служит нижней границей радиусов сходимости рядов для $P(\varkappa)$ и $\hat{\lambda}(\varkappa)$. Выбрав в качестве контура $\Gamma$ окружность $|\zeta - \lambda| = d/2$, где $d$ — расстояние от $\lambda$ до множества остальных собственных значений оператора $T$ (см. п. 2), получим

$$r_0 = \left( \frac{2a}{d} + c \right)^{-1}. \tag{3.51}$$

Предположим теперь до конца этого пункта, что $\| T^{(n)} \| = 0$ при $n \geqslant 2$. В этом случае можно положить $c = 0$, а $a = \| T^{(1)} \|$, и формула (3.51) принимает вид

$$r_0 = \frac{d}{2a} = \frac{d}{2\| T^{(1)} \|}. \tag{3.52}$$

Тем самым доказана

**Теорема 3.9**[1]. *Пусть X — гильбертово конечномерное пространство, $T$ — нормальный оператор в X и $T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}$. Тогда степенные ряды для $P(\varkappa)$ и $\hat{\lambda}(\varkappa)$ сходятся, если «величина возмущения» $\| \varkappa T^{(1)} \|$ меньше, чем половина расстояния $d$ от собственного значения $\lambda$ до множества остальных собственных значений оператора $T$.*

Как показывает следующий пример, эта оценка — наилучшая возможная.

**Пример 3.10.** Рассмотрим пример 1.1, а) и введем в X гильбертову норму (I.6.6) относительно базиса, в котором $T(\varkappa)$ задается матрицей а). Нетрудно видеть, что $T$ нормален (даже симметричен), $\| T^{(1)} \| = 1$ и $d = 2$ для каждого из двух собственных значений ±1 оператора $T$. В то же время радиус сходимости ряда (1.4) равен $r_0 = 1$.

**Замечание 3.11.** Число $a = \| T^{(1)} \|$ в формуле (3.52) можно заменить на число $a_0$, определяемое формулой (3.48), по той же

---

[1] См. Т. Като [1], Шефке [4].

причине, что и в замечании 3.8. Что касается коэффициентов $\hat{\lambda}^{(n)}$, то формула (3.5) дает

$$|\hat{\lambda}^{(1)}| \leqslant a, \quad |\hat{\lambda}^{(n)}| \leqslant a_0^n \left(\frac{2}{d}\right)^{n-1}, \quad n \geqslant 2, \tag{3.53}$$

так как $\rho$ для рассматриваемого контура $\Gamma$ равно $d/2$ (см. замечание 3.11). Формулы (3.46), (3.47) приводят к тем же оценкам (3.53), если использовать тот же контур.

Однако в некоторых частных случаях (3.46) может привести к более точной оценке, нежели (3.53). Так будет, например, в том случае, когда $T$ *симметричен* и, следовательно, собственные значения $T$ вещественны. В этом случае в качестве $\Gamma$ мы можем взять контур, образованный парой прямых $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$, перпендикулярных к вещественной оси и проходящих через точки $(\lambda + \lambda_1)/2$ и $(\lambda + \lambda_2)/2$, где $\lambda_1$ и $\lambda_2$ — собственные значения оператора $T$, ближайшие к $\lambda$ соответственно слева и справа. Полагая

$$d_1 = \lambda - \lambda_1, \quad d_2 = \lambda_2 - \lambda, \tag{3.54}$$

видим, что

$$\| R(\zeta) \| = \left(\frac{d_j^2}{4} + \eta^2\right)^{-1/2}, \quad \zeta \in \Gamma_j, \quad j = 1,\ 2, \quad \eta = \operatorname{Im} \zeta. \tag{3.55}$$

Отсюда и из формул (3.46)—(3.47) получаем при $n \geqslant 2$

$$|\hat{\lambda}^{(n)}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \min\left(1, \frac{N}{nm}\right) a_0^n \left[ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{d_1^2}{4} + \eta^2\right)^{-n/2} d\eta + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d_2^2}{4} + \eta^2\right)^{-n/2} d\eta \right] =$$

$$= \min\left(1, \frac{N}{mn}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} a_0^n \cdot \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{2}{d_1}\right)^{n-1} + \left(\frac{2}{d_2}\right)^{n-1} \right], \tag{3.56}$$

где $\Gamma$ обозначает обычную гамма-функцию. Следует отметить, что если $\lambda$ — наибольшее или наименьшее собственное значение оператора $T$, то можно положить $d_1 = \infty$ или $d_2 = \infty$ соответственно, тем самым улучшая результат.

Интересно, что оценка (3.56) является «наилучшей возможной», как видно из следующего примера.

**Пример 3.12.** В примере 3.10 $N = 2$, $\lambda = 1$, $m = 1$, $d_1 = 2$, $d_2 = \infty$, $a_0 = \| T^{(1)} \| = 1$, и потому оценка (3.56) дает

$$|\lambda^{(n)}| = |\hat{\lambda}^{(n)}| \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\, n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}. \tag{3.57}$$

Истинное собственное значение $\lambda(\varkappa)$ равно

$$\lambda(\varkappa)=(1+\varkappa^2)^{1/2}=\sum_{p=0}^{\infty}\binom{1/2}{p}\varkappa^{2p}. \tag{3.58}$$

Коэффициент $\lambda^{(n)}$ при $\varkappa^n$ для четных $n$ равен $\binom{1/2}{n/2}$, что совпадает с правой частью в (3.57).

Множитель $\alpha_n=\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\Big/\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ в (3.56) для начальных $n$ принимает следующие значения:

| $n$ | $\alpha_n$ |
|---|---|
| 2 | $1=1{,}0000$ |
| 3 | $2/\pi=0{,}6366$ |
| 4 | $1/2=0{,}5000$ |
| 5 | $4/(3\pi)=0{,}4244$ |
| 6 | $3/8=0{,}3750$ |

При $n\to\infty$ множитель $\alpha_n$ асимптотически ведет себя как[1] $n^{-1/2}$. Таким образом, оценка (3.56) показывает, что $\hat\lambda^{(n)}$ имеет самое большее порядок

$$\text{const}\left(\frac{2}{d}\right)^{n-1}n^{-3/2},\quad d=\min(d_1,\ d_2). \tag{3.59}$$

В случае $N=\infty$ множитель $n^{-3/2}$ должен быть заменен на $n^{-1/2}$; на практике такую замену делают и для конечных, но достаточно больших $N$.

**Задача 3.13.** Оценка (3.56) точнее, чем (3.53).

**Задача 3.14.** Почему неравенства (3.57) при четных $n$ превращаются в равенства?

Сравним результаты этого параграфа с оценками, полученными методом мажорирующих рядов. Отметим прежде всего, что

$$D=0,\quad \|P\|=1,\quad \|S\|=1/d, \tag{3.60}$$

так как $T$ предполагается нормальным. Совершая в формуле (3.21) подстановку $p=\|T^{(1)}\|=a$, $q=\|T^{(1)}\|\,\|S\|=a/d$ и $s=\|S\|=1/d$, получаем в качестве нижней границы для радиуса сходимости значение $r=d/(4a)$; эта оценка в два раза слабее оценки (3.52). Мажорирующий ряд (3.16) для $\hat\lambda(\varkappa)-\lambda$ после указанной подстановки принимает вид

$$\Psi(\varkappa)=a\varkappa+\frac{1}{d}\cdot\frac{2a^2\varkappa^2}{1-\frac{2a\varkappa}{d}+\left(1-\frac{4a\varkappa}{d}\right)^{1/2}}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\binom{1/2}{n}2^{2n-1}\frac{a^n}{d^{n-1}}\varkappa^n. \tag{3.61}$$

---

[1] Гамма-функция имеет следующее асимптотическое представление:

$$\Gamma(x+1)=(2\pi)^{1/2}x^{x+1/2}e^{-x}\,(1+O(x^{-1})).$$

Этот мажорирующий ряд дает следующие оценки для $\hat{\lambda}^{(n)}$:

$$|\hat{\lambda}^{(1)}| \leqslant a, \quad |\hat{\lambda}^{(2)}| \leqslant a_0^2/d, \quad |\hat{\lambda}^{(3)}| \leqslant 2a_0^3/d^2, \quad |\hat{\lambda}^{(4)}| \leqslant 5a_0^4/d^3, \ \ldots \tag{3.62}$$

(здесь произведена, согласно замечанию (3.8), замена $a$ на $a_0$). Оценки (3.62) точнее, чем (3.53), при $n \leqslant 5$, но при $n \geqslant 6$ это уже не так. Эти оценки также точнее, чем (3.56) (где $d_1$ и $d_2$ заменены на $d$), при $n \leqslant 3$, но не при $n \geqslant 4$. Во всяком случае метод мажорирующих рядов дает довольно точные оценки для нескольких первых коэффициентов рядов теории возмущений (но не для последующих).

Аналогичным образом мажорирующий ряд (3.34) для собственных векторов принимает (в случае $m = 1$) вид

$$\varphi(\varkappa) - \varphi \ll \frac{2\varkappa \, \| T^{(1)}\varphi \| / d}{1 - \frac{2a\varkappa}{d} + \left(1 - \frac{4a\varkappa}{d}\right)^{1/2}} =$$

$$= \frac{\| T^{(1)}\varphi \|}{d} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n+1} 2^{2n+1} \left(\frac{a}{d}\right)^{n-1} \varkappa^n. \tag{3.63}$$

Заменяя $a$ на $a_0$, для начальных коэффициентов разложения $\varphi(\varkappa) - \varphi = \sum \varkappa^n \varphi^{(n)}$ получаем оценки

$$\| \varphi^{(1)} \| \leqslant \| T^{(1)}\varphi \| / d, \quad \| \varphi^{(2)} \| \leqslant 2 \| T^{(1)}\varphi \| \, a_0/d^2,$$

$$\| \varphi^{(3)} \| \leqslant 5 \| T^{(1)}\varphi \| \, a_0^2/d^3, \quad \| \varphi^{(4)} \| \leqslant 14 \| T^{(1)}\varphi \| \, a_0^3/d^4, \ \ldots \ . \tag{3.64}$$

По тем же причинам, что и выше, $\| T^{(1)}\varphi \|$ в формулах (3.64) можно заменить на $\min\limits_{\alpha} \| (T^{(1)} - \alpha)\varphi \|$ [1].

## 6. Метод прямого подсчета числа членов

Оценки для коэффициентов $\lambda^{(n)}$ можно также получить *прямым подсчетом числа членов* в формуле (2.31) [2]. Предположим для простоты, что X — гильбертово конечномерное пространство, $T$ — нормальный оператор в X и $T^{(n)} = 0$ при $n \geqslant 2$. Вспоминая, что $S^{(k)} = S^k$, $S^{(0)} = -P$ и $S^{(-k)} = D^k = 0$, $k > 0$, и учитывая равенства (3.60), получаем

$$|\hat{\lambda}^{(n)}| \leqslant \frac{1}{nm} \sum_{k_1 + \ldots + k_n = n-1} |\operatorname{tr} T^{(1)} S^{(k_1)} \ldots T^{(1)} S^{(k_n)}|. \tag{3.65}$$

Выражение под знаком следа в (3.65) содержит по крайней мере один множитель $S^{(0)} = -P$ и, следовательно, имеет ранг $\leqslant m$. Поэтому след можно оценить нормой оператора, стоящего под знаком следа, умноженной на $m$. В итоге получим

$$|\hat{\lambda}^{(n)}| \leqslant \frac{(2n-2)!}{n!\,(n-1)!} \frac{a_0^n}{d^{n-1}} \equiv \beta_n a_0^n \left(\frac{2}{d}\right)^{n-1}, \quad n \geqslant 2. \tag{3.66}$$

---

[1] По поводу результатов, близких изложенным, см. Реллих [4] и Шрёдер [1] — [3].

[2] См. Блох [1].

Так же как и в предыдущем пункте, мы заменили здесь $\| T^{(1)} \|$ на $a_0$. Множитель $2^{n-1}n\beta_n = (2n-2)!/((n-1)!)^2$ в (3.66) равен числу решений уравнения $k_1 + \ldots + k_n = n-1$. Для начальных значений $n$ имеем

| $n$ | $\beta_n$ |
|---|---|
| 2 | $1 = 1{,}0000$ |
| 3 | $1/2 = 0{,}5000$ |
| 4 | $5/8 = 0{,}6250$ |
| 5 | $7/8 = 0{,}8750$ |
| 6 | $21/16 = 1{,}3125$ |

Мы видим, что оценки (3.66) точнее, чем элементарные оценки (3.53), лишь при $n \leqslant 5$. При $n \to \infty$ множитель $\beta_n$ асимптотически ведет себя как $\pi^{-1/2}n^{-3/2}2^{n-1}$ и потому оценка (3.66) гораздо слабее, чем (3.53).

В действительности оценка (3.66) является частным случаем результата, полученного методом мажорирующих рядов: правая часть в (3.66) при $n = 2$ совпадает (если заменить $a$ на $a_0$) с $n$-м коэффициентом ряда (3.61).

Таким образом, изложенный метод не приводит к новым результатам. Более того, он не столь универсален, как метод мажорирующих рядов, ибо в общем случае оценка коэффициентов $\hat{\lambda}^{(n)}$ посредством прямого подсчета числа слагаемых в (2.31) — далеко не легкое дело.

Суммируя все сказанное, заключаем, что в общем случае метод мажорирующих рядов дает в удобной форме довольно хорошие оценки коэффициентов (и в особенности начальных коэффициентов) рядов теории возмущений. Однако в рамках этого метода трудно учесть упрощающие задачу обстоятельства (такие, например, как нормальность невозмущенного оператора). В некоторых частных случаях более простой метод контурного интегрирования оказывается более эффективным. Оценки (3.50), (3.51) и (3.52) удается пока получить только этим методом.

## § 4. Преобразования подобия собственных подпространств и собственных векторов

### 1. Собственные векторы

В предыдущих параграфах, посвященных теории возмущений для задачи на собственные значения, мы всюду (за исключением п. 3.3) рассматривали собственные проекторы, а не собственные векторы, так как последние не определены однозначно. Однако в ряде случаев требуется знать собственные векторы $\varphi_h(\varkappa)$ возмущенного оператора $T(\varkappa)$. В этом параграфе мы выведем формулы для них, однако для простоты мы будем рассматривать обобщенные собственные векторы; *обобщенным собственным вектором* мы называем любой ненулевой вектор, принадлежащий алгебраическому собственному подпространству $\mathrm{M}_h(\varkappa) = P_h(\varkappa)$ X для собственного значения $\lambda_h(\varkappa)$ (см. п. I.5.4). Разумеется, обобщенный собственный вектор является собственным вектором в обычном смысле, если $\lambda_h(\varkappa)$ полупросто.

Выражения для обобщенных собственных векторов можно получить, применяя операторы $P_h(\varkappa)$ к векторам $\varphi_k$ некоторого линейно независимого набора в X. Возникающие таким образом вектор-функции

$$\varphi_{hk}(\varkappa) = P_h(\varkappa)\,\varphi_k \tag{4.1}$$

аналитичны при любых $h$ и $k$ и представляют собой обобщенные собственные векторы $T(\varkappa)$ *в тех точках, где они не обращаются в нуль*. Однако этот способ построения обобщенных собственных векторов имеет ряд неудобств помимо того, что он выглядит довольно искусственным. Во-первых, $\varphi_{hk}(\varkappa)$ может обращаться в нуль для некоторых $\varkappa$, не являющихся особыми точками $\lambda_h(\varkappa)$ или $P_h(\varkappa)$. Во-вторых, векторы $\varphi_{hk}(\varkappa)$ при фиксированном $h$ не обязаны быть линейно независимыми; в самом деле, существует не более чем $m_h$ линейно независимых собственных векторов, принадлежащих собственному значению $\lambda_h(\varkappa)$ кратности $m_h$.

Эти недостатки метода можно исправить, выбрав $m_h$ линейно независимых векторов $\varphi_k$ из подпространства $\mathrm{M}_h(\varkappa_0)$, где $\varkappa_0$ — фиксированная неисключительная точка. Векторы (4.1) при фиксированном $h$ линейно независимы при малых $|\varkappa - \varkappa_0|$, так как функция $P_h(\varkappa)$ голоморфна в точке $\varkappa = \varkappa_0$. Ввиду того что $\dim \mathrm{M}_h(\varkappa) = m_h$, векторы $\varphi_{hk}(\varkappa)$, $k = 1, \ldots, m_h$, образуют базис в $\mathrm{M}_h(\varkappa)$. Таким образом, мы получили базис в $\mathrm{M}_h(\varkappa)$, голоморфно зависящий от $\varkappa$.

Однако все это еще не совсем удовлетворительно, ибо векторы $\varphi_{hk}(\varkappa)$ могут быть линейно зависимыми (и даже некоторые из них могут обращаться в нуль) в некоторых неисключительных точках. В следующих пунктах мы предложим другой метод построения обобщенных собственных векторов, свободный от указанных недостатков.

## 2. Трансформирующие функции[1]

В общей форме нашу задачу можно сформулировать следующим образом. Предположим, что задан проектор $P(\varkappa)$ в X, голоморфный по $\varkappa$ в области D комплексной $\varkappa$-плоскости. Тогда,

---

[1] Результаты этого и последующих пунктов были получены Т. Като [2] в связи с адиабатической теоремой квантовой механики.

по лемме I.4.10, $\dim P(\varkappa)\,\mathrm{X} = m$. Требуется найти $m$ векторов $\varphi_k(\varkappa)$, $k = 1, \ldots, m$, голоморфных по $\varkappa$ и образующих базис в $\mathrm{M}(\varkappa) = P(\varkappa)\,\mathrm{X}$ для каждого $\varkappa \in \mathrm{D}$.

Можно предположить без ограничения общности, что $\varkappa = 0$ принадлежит D. Наша задача будет решена, если удастся построить операторную функцию $U(\varkappa)$ (назовем ее *трансформирующей функцией* для $P(\varkappa)$), удовлетворяющую следующим условиям:

(1) обратный оператор $U^{-1}(\varkappa)$ существует и голоморфен в D вместе с $U(\varkappa)$;

(2) $U(\varkappa)\,P(0)\,U^{-1}(\varkappa) = P(\varkappa)$.

Из условия (2) следует, что $U(\varkappa)$ отображает $\mathrm{M}(0)$ на $\mathrm{M}(\varkappa)$ взаимно однозначно (см. п. I.5.7). Если $\{\varphi_k,\ k = 1, \ldots, m\}$ — базис в $\mathrm{M}(0)$, то векторы

$$\varphi_k(\varkappa) = U(\varkappa)\,\varphi_k, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{4.2}$$

образуют искомый базис в $\mathrm{M}(\varkappa)$.

Мы построим трансформирующую функцию $U(\varkappa)$ при условии, что область D *односвязна*. Дифференцируя равенство

$$P^2(\varkappa) = P(\varkappa), \tag{4.3}$$

получаем

$$P(\varkappa)\,P'(\varkappa) + P'(\varkappa)\,P(\varkappa) = P'(\varkappa), \tag{4.4}$$

где символ $'$ означает дифференцирование по $\varkappa$. Умножая это соотношение слева и справа на $P(\varkappa)$, находим

$$PP'P = 0 \tag{4.5}$$

(здесь мы пишем для простоты $P$ вместо $P(\varkappa)$).

Введем *коммутатор* $Q$ операторов $P'$ и $P$:

$$Q(\varkappa) = [P'(\varkappa),\ P(\varkappa)] = P'(\varkappa)\,P(\varkappa) - P(\varkappa)\,P'(\varkappa). \tag{4.6}$$

Очевидно, что $P'$ и $Q$ голоморфны в D. Из (4.3), (4.5) и (4.6) следуют формулы

$$PQ = -PP', \quad QP = P'P. \tag{4.7}$$

Поэтому уравнение (4.4) принимает вид

$$P' = [Q,\ P]. \tag{4.8}$$

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$X' = Q(\varkappa)\,X \tag{4.9}$$

относительно неизвестной операторной функции $X(\varkappa)$. Так как это *линейное* дифференциальное уравнение, оно имеет единственное голоморфное в D решение с заданным начальным значением $X(0)$. Это можно доказать, например, методом последовательных приближений точно так же, как и для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений [1]).

Пусть $U(\varkappa)$ — решение уравнения (4.9), удовлетворяющее начальному условию $U(0) = 1$. Общее решение уравнения (4.9) можно записать в виде

$$X(\varkappa) = U(\varkappa)\, X(0). \tag{4.10}$$

В самом деле, функция (4.10) удовлетворяет уравнению (4.9) и начальному условию; по теореме единственности $X(\varkappa)$ — требуемое решение.

Аналогично уравнение

$$Y' = -YQ(\varkappa) \tag{4.11}$$

имеет единственное решение $Y(\varkappa)$ с заданным начальным значением $Y(0)$. Пусть $V(\varkappa)$ — решение уравнения (4.11), удовлетворяющее начальному условию $V(0) = 1$. Покажем, что операторы $U(\varkappa)$ и $V(\varkappa)$ взаимно обратны. Из дифференциальных уравнений (4.9) и (4.11) следует, что $(VU)' = V'U + VU' = -VQU + VQU = 0$. Поэтому $VU$ не зависит от $\varkappa$ и

$$V(\varkappa)\, U(\varkappa) = V(0)\, U(0) = 1. \tag{4.12}$$

Отсюда вытекает, что $V = U^{-1}$ и, следовательно,

$$U(\varkappa)\, V(\varkappa) = 1. \tag{4.13}$$

В приведенном доказательстве используется конечномерность пространства $\mathbf{X}$. Так как в общем случае из (4.12) не следует (4.13), мы дадим другое доказательство равенства (4.13), пригодное и в бесконечномерном случае. Имеем, как выше,

$$(UV)' = QUV - UVQ = [Q,\, UV]. \tag{4.14}$$

На этот раз совсем не очевидно, что правая часть равна нулю. Однако (4.14) можно рассматривать как линейное дифференциаль-

---

[1]) В самом деле, уравнение (4.9) в матричном представлении эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Удобнее, однако, рассматривать (4.9) как операторное дифференциальное уравнение, не обращаясь к матрицам, особенно в том случае, когда $\dim \mathbf{X} = \infty$ (отметим, что все результаты этого пункта без каких бы то ни было модификаций справедливы и в бесконечномерном случае). Обычный метод последовательных приближений $\left(X_0(\varkappa) = X(0),\ X_n(\varkappa) = X(0) + \int\limits_0^{\varkappa} Q(\varkappa)\, X_{n-1}(\varkappa)\, d\varkappa\right)$ дает последовательность $X_n(\varkappa)$ голоморфных операторных функций; здесь существенно, что область $\mathrm{D}$ односвязна. Нетрудно показать, что эта последовательность сходится к некоторой функции $X(\varkappa)$, причем сходимость равномерна на каждом компактном подмножестве в $\mathrm{D}$, и что $X(\varkappa)$ есть единственное голоморфное решение уравнения (4.9) с данным начальным значением $X(0)$. Здесь существенно, что отображение $X \to Q(\varkappa)\, X$ есть *линейный* оператор в $\mathscr{B}(\mathbf{X})$.

ное уравнение относительно $Z = UV$, и поэтому существует единственная функция $Z$ с начальным значением 1, удовлетворяющая уравнению (4.14). Так как функция $Z(\varkappa) \equiv 1$ удовлетворяет уравнению (4.14) и начальному условию $Z(0) = 1 = U(0)\, V(0)$, то $UV = Z$. Этим доказано (4.13) [1].

Покажем теперь, что $U(\varkappa)$ удовлетворяет условиям (1), (2), приведенным на стр. 130. Выполнение условия (1) следует из равенства $U(\varkappa)^{-1} = V(\varkappa)$, вытекающего из (4.12) и (4.13). Для проверки условия (2) рассмотрим функцию $P(\varkappa)\, U(\varkappa)$. Согласно (4.8) и (4.9), имеем

$$(PU)' = P'U + PU' = (P' + PQ)\, U = QPU. \tag{4.15}$$

Таким образом, функция $PU$ является решением уравнения (4.9) с начальным значением $P(0)$ и потому, согласно (4.10), должна совпадать с $U(\varkappa)\, P(0)$. Это эквивалентно свойству (2).

**Замечание 4.1.** В силу (4.7) оператор $Q$ в последнем члене в (4.15) можно заменить на $P'$. Таким образом, функция $W(\varkappa) = U(\varkappa)\, P(0) = P(\varkappa)\, U(\varkappa)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$W' = P'(\varkappa).W, \tag{4.16}$$

которое несколько проще, чем уравнение (4.9). Аналогично $Z(\varkappa) = P(0)\, U(\varkappa)^{-1}$ удовлетворяет уравнению

$$Z' = ZP'(\varkappa). \tag{4.17}$$

**Замечание 4.2.** Функции $U(\varkappa)$ и $U^{-1}(\varkappa)$ можно продолжить аналитически, если такое продолжение возможно для $P(\varkappa)$. Однако в том случае, когда область изменения $\varkappa$ не односвязна, может случиться, что $U(\varkappa)$ и $U^{-1}(\varkappa)$ не однозначны несмотря на то, что $P(\varkappa)$ однозначна.

**Замечание 4.3.** Трансформирующую функцию $U(\varkappa)$ можно построить и в том случае, когда $\varkappa$ — вещественный параметр. В этом случае не требуется, чтобы $P(\varkappa)$ была голоморфна, достаточно непрерывной (или кусочно непрерывной) дифференцируемости. Тогда $U(\varkappa)$ имеет непрерывную (кусочно непрерывную) производную и удовлетворяет условиям (1) и (2), за исключением голоморфности $U(\varkappa)$ и $U(\varkappa)^{-1}$.

**Замечание 4.4.** Трансформирующая функция $U(\varkappa)$ для заданного семейства проекторов $P(\varkappa)$ не единственна. Другую функцию $U(\varkappa)$ можно построить, по крайней мере при малых $|\varkappa|$, с помо-

---

[1] Равенство (4.13) можно также вывести из (4.12), исходя из общих соображений, основанных *на теореме об устойчивости индекса*; см. п. X.5.5.

щью результатов п. I.4.6. Подставляя $P(0)$, $P(\varkappa)$ вместо $P$, $Q$ в (I.4.38), видим, что

$$U(\varkappa) = [1 - (P(\varkappa) - P(0))^2]^{-1/2} \times \\ \times [P(\varkappa)P(0) + (1 - P(\varkappa))(1 - P(0))] \qquad (4.18)$$

есть трансформирующая функция[1] при $\varkappa$ столь малых, что $\| P(\varkappa) - P(0) \| < 1$. Эта функция проще, чем построенная выше, в том смысле, что она алгебраически выражается через $P(0)$ и $P(\varkappa)$, в то время как построенная выше была определена как решение дифференциального уравнения. Однако трансформирующая функция (4.18) имеет тот недостаток, что она определена лишь локально.

### 3. Решение дифференциального уравнения

Так как нас прежде всего интересует отображение подпространства $M(0)$ на $M(\varkappa)$, осуществляемое трансформирующей функцией $U(\varkappa)$, то достаточно рассмотреть функцию $W = U(\varkappa)P(0)$ вместо $U(\varkappa)$. Для отыскания $W$ нужно решить дифференциальное уравнение (4.16) с начальным условием $W(0) = P(0)$.

Решим это уравнение в том случае, когда $P(\varkappa)$ — тотальный проектор $\lambda$-группы собственных значений оператора $T(\varkappa)$. Функция $P(\varkappa)$ имеет разложение (2.3), поэтому

$$P'(\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\varkappa^n P^{(n+1)}. \qquad (4.19)$$

Так как $W(0) = P(0) = P$, то

$$W(\varkappa) = P + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n W^{(n)}. \qquad (4.20)$$

Подстановка (4.19) и (4.20) в уравнение (4.16) приводит к следующим рекуррентным формулам для $W^{(n)}$:

$$nW^{(n)} = nP^{(n)}P + (n-1)P^{(n-1)}W^{(1)} + \ldots \\ \ldots + P^{(1)}W^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \ldots . \qquad (4.21)$$

Из соотношений (4.21), используя выражения (2.12) для $P^{(n)}$, можно последовательно найти коэффициенты $W^{(n)}$. Мы получаем

---

[1] Функция (4.18) была в иной форме введена Секефальви-Надем [1].

таким образом

$$\begin{aligned}
&W^{(1)}=P^{(1)}P,\\
&W^{(2)}=P^{(2)}P+\frac{1}{2}[P^{(1)}]^2P, \qquad (4.22)\\
&W^{(3)}=P^{(3)}P+\frac{2}{3}P^{(2)}P^{(1)}P+\frac{1}{3}P^{(1)}P^{(2)}P+\frac{1}{6}[P^{(1)}]^3P.
\end{aligned}$$

Если собственное значение $\lambda$ полупросто, то согласно (2.14) имеем

$$\begin{aligned}
&W^{(1)}=-ST^{(1)}P, \qquad (4.23)\\
&W^{(2)}=-ST^{(2)}P+ST^{(1)}ST^{(1)}P-S^2T^{(1)}PT^{(1)}P-\frac{1}{2}PT^{(1)}S^2T^{(1)}P.
\end{aligned}$$

Если $\lambda$-группа состоит из одного собственного значения (расщепления нет), то $\mathrm{M}(\varkappa)=P(\varkappa)\mathrm{X}$ есть алгебраическое собственное подпространство оператора $T(\varkappa)$ и мы получаем набор обобщенных собственных векторов

$$\varphi_k(\varkappa)=W(\varkappa)\varphi_k,\quad k=1,\dots,m, \tag{4.24}$$

где $\{\varphi_k,\ k=1,\ \dots,\ m\}$ — базис в $\mathrm{M}(0)$. В силу свойств функции $W(\varkappa)$ векторы (4.24) образуют базис в $\mathrm{M}(\varkappa)$.

Функцию $Z(\varkappa)=P(0)\,U(\varkappa)^{-1}$ можно найти так же, как $W(z)$. Однако нет нужды решать дифференциальное уравнение (4.17). Оно отличается от (4.16) только порядком сомножителей в правой части. Таким образом, ряд $\sum \varkappa\, Z^{(n)}$ для $Z(\varkappa)$ можно получить, обращая порядок множителей в каждом члене ряда для $W(\varkappa)$. Это относится не только к выражениям для коэффициентов $Z^{(n)}$ через $P^{(k)}$, но также и к выражениям через $P$, $S$, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, . . ., как в (4.23) и следует из того факта, что выражения (2.12) для $P^{(n)}$ инвариантны относительно обращения порядка сомножителей. Из этих замечаний следует, что если собственное значение $\lambda$ полупросто, то

$$\begin{aligned}
&Z^{(1)}=-PT^{(1)}S, \qquad (4.25)\\
&Z^{(2)}=-PT^{(2)}S+PT^{(1)}ST^{(1)}S-PT^{(1)}PT^{(1)}S^2-\frac{1}{2}PT^{(1)}S^2T^{(1)}P.
\end{aligned}$$

**Замечание 4.5.** Трансформирующую функцию $U(\varkappa)$, определенную равенством (4.18), также можно разложить в степенной ряд по $\varkappa$, при тех же самых предположениях. Нетрудно проверить, что разложение функции $U(\varkappa)P$ совпадает с полученным выше разложением для функции $W(\varkappa)$ с точностью до второго порядка включительно.

## 4. Трансформирующая функция и процесс редукции

Построенную выше трансформирующую функцию $U(\varkappa)$ для тотального проектора $P(\varkappa)$ данной $\lambda$-группы можно использовать в описанном в п. 2.3 процессе редукции. Так как собственные значения, образующие $\lambda$-группу, суть собственные значения оператора $T(\varkappa)$ в инвариантном подпространстве $\mathbf{M}(\varkappa) = \mathbf{R}(P(\varkappa))$, а $U(\varkappa)$ переводит проектор $P$ в $P(\varkappa)$ (т. е. $P(\varkappa) = U(\varkappa) PU(\varkappa)^{-1}$), то задача на собственные значения для $T(\varkappa)$ в подпространстве $\mathbf{M}(\varkappa)$ эквивалентна соответствующей задаче для оператора

$$U(\varkappa)^{-1} T(\varkappa) U(\varkappa) \tag{4.26}$$

в подпространстве $\mathbf{M} = \mathbf{M}(0) = \mathbf{R}(P)$ (которое инвариантно относительно оператора (4.26)). Действительно, оператор (4.26) имеет тот же самый набор собственных значений, что и $T(\varkappa)$, в то время как его собственные проекторы и собственные нильпотенты связаны с собственными проекторами и собственными нильпотентами оператора $T(\varkappa)$ преобразованием подобия, определяемым оператором $U(\varkappa)^{-1}$. Так как нас интересуют только собственные значения, принадлежащие $\lambda$-группе, то достаточно рассматривать вместо (4.26) оператор

$$PU(\varkappa)^{-1} T(\varkappa) U(\varkappa) P = Z(\varkappa) T(\varkappa) W(\varkappa); \tag{4.27}$$

здесь $Z$ и $W$ — операторы, введенные в предыдущих пунктах.

Таким образом, наша задача в той части, которая касается собственных значений $\lambda$-группы, сведена к соответствующей задаче для голоморфной операторной функции (4.27) в подпространстве $\mathbf{M}$ пространства $\mathbf{X}$. Эта редукция первоначальной задачи имеет то преимущество, что $\mathbf{M}$ не зависит от $\varkappa$, тогда как в процессе редукции, описанном в п. 2.3, подпространство $\mathbf{M}(\varkappa)$ зависело от $\varkappa$. В этом смысле редукция к оператору (4.27) имеет преимущество перед процессом редукции п. 2.3, по крайней мере теоретически; в практическом отношении эта редукция имеет то неудобство, что конструкция оператора $U(\varkappa)$ весьма сложна.

Из сказанного выше следует, в частности, что взвешенное среднее $\hat{\lambda}(\varkappa)$ собственных значений $\lambda$-группы равно поделенному на $m$ следу оператора (4.27):

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}(\varkappa) &= m^{-1} \operatorname{tr} Z(\varkappa) T(\varkappa) W(\varkappa) = \\ &= \lambda + m^{-1} \operatorname{tr} Z(\varkappa) (T(\varkappa) - \lambda) W(\varkappa).\end{aligned} \tag{4.28}$$

Подстановка выражений (4.23) и (4.25) для коэффициентов разложений $W(\varkappa)$ и $Z(\varkappa)$ в степенные ряды приводит к тем же формулам (2.33).

**Задача 4.6.** Проверить последнее утверждение.

### 5. Одновременное преобразование нескольких проекторов

Оператор $U(\varkappa)$, рассмотренный в п. 2, преобразует проектор $P(0)$ в $P(\varkappa)$. Рассмотрим теперь несколько проекторов $P_h(\varkappa)$, $h = 1, \ldots, s$, удовлетворяющих условиям

$$P_h(\varkappa)\, P_k(\varkappa) = \delta_{hk} P_h(\varkappa). \tag{4.29}$$

Мы построим ниже трансформирующую функцию $U(\varkappa)$ такую, что

$$U(\varkappa)\, P_h(0)\, U(\varkappa)^{-1} = P_h(\varkappa), \quad h = 1, \ldots, s. \tag{4.30}$$

Как следствие мы получим базис $\{\varphi_{h_1}(\varkappa), \ldots, \varphi_{hm_h}(\varkappa)\}$ в каждом из подпространств $\mathbf{M}_h(\varkappa) = \mathbf{R}(P_h(\varkappa))$, положив

$$\varphi_{hj}(\varkappa) = U(\varkappa)\, \varphi_{hj}, \tag{4.31}$$

где $\{\varphi_{h1}, \ldots, \varphi_{hm}\}$ — базис в $\mathbf{M}_h = \mathbf{M}_h(0)$.

Как и раньше, мы предположим, что операторы $P_h(\varkappa)$ голоморфны в односвязной области D комплексной плоскости или непрерывно дифференцируемые на интервале вещественной прямой. Предположим, далее, что набор проекторов $P_h(\varkappa)$ *полон* в том смысле, что

$$\sum_{h=1}^{s} P_h(\varkappa) = 1. \tag{4.32}$$

В противном случае мы можем ввести проектор $P_0(\varkappa) = 1 - \sum_{h=1}^{s} P_h(\varkappa)$; новый набор $\{P_h(\varkappa),\ h = 0, \ldots, s\}$ удовлетворяет условиям (1.29) и условию полноты, а оператор $U(\varkappa)$ удовлетворяет условиям (4.30) тогда и только тогда, когда он служит трансформирующей функцией для этого нового набора.

Построение $U(\varkappa)$ аналогично соответствующему построению для одного проектора $P(\varkappa)$. Определим $U(\varkappa)$ как решение дифференциального уравнения (4.9) с начальным значением $U(0) = 1$, где

$$\begin{aligned} Q(\varkappa) &= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^{s} [P_h'(\varkappa),\ P_h(\varkappa)] = \sum_{h=1}^{s} P_h'(\varkappa)\, P_h(\varkappa) = \\ &= -\sum_{h=1}^{s} P_h(\varkappa)\, P_h'(\varkappa). \end{aligned} \tag{4.33}$$

Равенство трех последних выражений следует из (4.32), так как $\Sigma P_h' P_h + \Sigma P_h P_h' = \Sigma\,(P_h^2)' = \Sigma P_h' = 0$. Отметим, что оператор (4.33) совпадает с оператором (4.6) в том случае, когда рассматривается один проектор $P(\varkappa)$; кажущееся различие, связанное с наличием множителя 1/2, объясняется тем, что мы дополнили $P(\varkappa)$ до полного набора $\{P(\varkappa),\ 1-P(\varkappa)\}$.

Из рассуждений п. 2 (и, в частности, из формулы (4.15)) следует, что соотношения (4.30) будут доказаны, как только мы установим равенства

$$P_h'(\varkappa)=[Q(\varkappa),\ P_h(\varkappa)],\quad h=1,\ \ldots,\ s. \tag{4.34}$$

Чтобы установить это, продифференцируем соотношения (4.29):

$$P_h'P_k+P_hP_k'=\delta_{hk}P_h'. \tag{4.35}$$

Умножая обе части этого равенства слева на $P_h$, **получаем**

$$P_hP_h'P_k+P_hP_k'=\delta_{hk}P_hP_h'=P_kP_hP_h',$$

или, что то же,

$$-[P_hP_h',\ P_k]=P_hP_k'. \tag{4.36}$$

Суммирование по $h=1,\ \ldots,\ s$ с учетом (4.32) дает соотношение (4.34).

Очевидно, что указанным здесь способом можно построить трансформирующую функцию для набора всех собственных проекторов $P_h(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ в любой односвязной области D, в которой $P_h(\varkappa)$ голоморфны [1].

### 6. Диагонализация голоморфной матричной функции

Пусть $(\tau_{jk}(\varkappa))$ — квадратная матрица порядка $N$, элементы которой суть голоморфные функции комплексного переменного $\varkappa$. При определенных условиях такую матрицу можно привести к диагональному виду; это значит, что существует матрица $(\gamma_{jk}(\varkappa))$ с голоморфными элементами, такая, что матрица

$$(\tau_{jk}'(\varkappa))=(\gamma_{jk}(\varkappa))^{-1}(\tau_{jk}(\varkappa))(\gamma_{jk}(\varkappa)) \tag{4.37}$$

голоморфна при каждом $\varkappa$.

Задача диагонализации сводится к задаче, рассмотренной в предыдущих параграфах. Для этого достаточно заданную матрицу рассматривать как оператор $T(\varkappa)$ в пространстве $\mathrm{C}^N$ числовых векторов и затем применить полученные выше результаты. Если $\varkappa$ пробегает односвязную область D, не содержащую исключительных точек, то можно построить трансформирующую функцию $U(\varkappa)$ и тем самым базис (4.31), состоящий из вектор-функций, голоморфных в D, и присоединенный к множеству собственных проекторов $P_h(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$. В этом базисе матричное представление оператора $T(\varkappa)$ принимает вид, описанный

---

[1] Трансформирующая функция $U(\varkappa)$ имеет важные применения в связи с адиабатической теоремой в квантовой механике; см. по этому поводу Т. Като [2], Гарридо [1], Гарридо и Санчо [1].

в п. I.5.4. В частности, мы получаем диагональную матрицу с диагональными элементами $\lambda_h(\varkappa)$, если все операторы $D_h(\varkappa)$ тождественно равны нулю (как будет например в тех случаях, когда все кратности $m_h = 1$ или оператор $T(\varkappa)$ нормален при вещественных $\varkappa$). Как следует из сказанного в п. I.5.4, это эквивалентно существованию матричной функции $(\gamma_{jk}(\varkappa))$, удовлетворяющей условию (4.37). Отметим, что векторы $\gamma_{1k}(\varkappa), \ldots, \gamma_{Nk}(\varkappa)$ суть собственные векторы исходной матрицы $(\tau_{jk}(\varkappa))$.

## § 5. Неаналитические возмущения

### 1. Непрерывность собственных значений и тотального проектора

В предыдущих параграфах мы рассмотрели задачу на собственные значения для оператора $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, голоморфно зависящего от $\varkappa$, и показали, что его собственные значения $\lambda(\varkappa)$ и собственные проекторы $P(\varkappa)$ аналитичны по $\varkappa$. В этом параграфе нас будет интересовать поведение функций $\lambda(\varkappa)$ и $P(\varkappa)$ в случае более общей зависимости $T(\varkappa)$ от $\varkappa$[1].

Сначала мы рассмотрим случай *непрерывной* зависимости $T(\varkappa)$ от $\varkappa$. При этом предполагается, что $\varkappa$ пробегает некоторую область $\mathrm{D}_0$ комплексной плоскости или некоторый интервал $\mathrm{I}$ вещественной прямой. Даже при этих весьма общих условиях часть результатов предыдущих параграфов сохраняется по существу без изменений.

Резольвента $R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1}$ теперь лишь непрерывна по совокупности переменных $\zeta$ и $\varkappa$ в каждой области, не пересекающейся по спектрам оператора $T(\varkappa)$. Это следует из слегка модифицированных рассуждений п. 1.3; достаточно заметить, что операторная функция $A(\varkappa) = T(\varkappa) - T(0)$, хотя и не является больше голоморфной, однако по-прежнему стремится к нулю при $\varkappa \to 0$ $(T = T(0))$.

Отсюда следует (см. (1.12)), что $R(\zeta, \varkappa)$ существует, когда $\zeta$ принадлежит резольвентному множеству $P(T)$ оператора $T$, а $|\varkappa|$ настолько мало, что

$$\| T(\varkappa) - T \| < \| R(\zeta) \|^{-1} \quad (R(\zeta) = R(\zeta, 0)). \tag{5.1}$$

Кроме того, $R(\zeta, \varkappa) \to R(\zeta)$ при $\varkappa \to 0$ равномерно по $\zeta$, принадлежащим любому компактному подмножеству в $\mathrm{P}(T)$.

---

[1] Эти вопросы в случае симметрических операторов были рассмотрены в статьях Реллиха [1], [2], [8] (наиболее подробно в [8]).

Пусть $\lambda$ — собственное значение оператора $T$, имеющее (алгебраическую) кратность $m$, и $\Gamma$ — контур вокруг $\lambda$, не охватывающий других собственных значений оператора $T$. Функция $\| R(\zeta) \|^{-1}$ на контуре $\Gamma$ имеет положительный минимум $\delta$; поэтому $R(\zeta, \varkappa)$ существует, если $\zeta \in \Gamma$ и $\| T(\varkappa) - T \| < \delta$. Следовательно, оператор $P(\varkappa)$ можно снова определить по формуле (1.16), и он оказывается непрерывным в окрестности нуля. Так же как и в аналитическом случае, $P(\varkappa)$ является тотальным проектором для собственных значений оператора $P(\varkappa)$, лежащих внутри $\Gamma$. Из непрерывности $P(\varkappa)$ снова следует, что

$$\begin{gathered} \dim \mathrm{M}(\varkappa) = \dim \mathrm{M} = m, \\ \mathrm{M}(\varkappa) = P(\varkappa)\,\mathrm{X}, \quad \mathrm{M} = \mathrm{M}(0) = P\mathrm{X}, \end{gathered} \tag{5.2}$$

где $P = P(0)$ — собственный проектор оператора $T$, принадлежащий собственному значению $\lambda$. Из формулы (5.2) следует, что сумма кратностей собственных значений оператора $T(\varkappa)$, лежащих внутри $\Gamma$, равна $m$. Снова будем говорить, что эти собственные значения образуют $\lambda$-группу.

Все это верно для каждого собственного значения $\lambda_h$ оператора $T$. В любой окрестности собственного значения $\lambda_h$ для достаточно малых $|\varkappa|$ существуют собственные значения оператора $T(\varkappa)$ с тотальной кратностью, равной кратности $m_h$ собственного значения $\lambda_h$. Так как сумма всех $m_h$ равна $N$, то у рассматриваемых $T(\varkappa)$ нет других собственных значений. Тем самым доказана *непрерывная зависимость собственных значений от* $\varkappa$.

Мы предположили выше, что функция $T(\varkappa)$ непрерывна в некоторой области изменения переменной $\varkappa$. Однако те же рассуждения показывают, что из непрерывности $T(\varkappa)$ в нуле следует непрерывность в нуле собственных значений оператора $T(\varkappa)$ и соответствующих тотальных проекторов $P(\varkappa)$. Действительно, достаточно заметить, что $R(\zeta, \varkappa) \to R(\zeta)$ при $\varkappa \to 0$ равномерно по $\zeta \in \Gamma$. Можно даже заменить семейство $T(\varkappa)$ последовательностью $\{T_n\}$, сходящейся к $T$. При этом собственные значения и тотальные проекторы оператора $T_n$ сходятся при $n \to \infty$ к соответствующим собственным значениям и собственным проекторам оператора $T$. Итак доказана

**Теорема 5.1.** *Предположим, что функция $T(\varkappa)$ непрерывна в точке $\varkappa = 0$. Тогда собственные значения оператора $T(\varkappa)$ непрерывны в нуле. Для всякого собственного значения оператора $T = T(0)$ при достаточно малых $|\varkappa|$ имеет смысл понятие $\lambda$-группы; тотальный проектор $P(\varkappa)$ для $\lambda$-группы непрерывен в нуле. Если $T(\varkappa)$ непрерывна в области комплексной плоскости или на интервале вещественной оси, то резольвента $R(\zeta, \varkappa)$ непрерывна по совокупности $\zeta$ и $\varkappa$ в указанном выше смысле.*

## 2. Нумерация собственных значений

Доказанный выше факт, что собственные значения оператора $T(\varkappa)$ непрерывно зависят от $\varkappa$ в случае, когда $T(\varkappa)$ — непрерывная функция, не совсем прост, так как число собственных значений оператора $T(\varkappa)$ непостоянно. В аналитическом случае мы тоже можем встретиться с фактом зависимости общего числа собственных значений от $\varkappa$, однако там это число постоянно для всех неисключительных $\varkappa$. В общем случае полное число собственных значений зависит от $\varkappa$ крайне нерегулярно; расщепление и совпадение собственных значений может происходить весьма сложным образом.

Для того чтобы преодолеть это неудобство, естественно учитывать собственные значения с их кратностями, как описано в п. I.5.4. Полный набор собственных значений оператора образует *неупорядоченную* систему, состоящую из $N$ комплексных чисел. Два набора $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ можно считать близкими, если *при подходящей нумерации* $\mathfrak{S} = (\mu_1, \ldots, \mu_N)$, $\mathfrak{S}' = (\mu_1', \ldots, \mu_N')$ *их элементов* числа $(\mu_n - \mu_n')$ малы для всех $n = 1, \ldots, N$. Можно ввести *расстояние* между $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ по формуле

$$\operatorname{dist}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S}') = \min \max_n |\mu_n - \mu_n'|, \tag{5.3}$$

где минимум берется по всем возможным нумерациям элементов одного из наборов. Например, расстояние между тройками (0, 0, 1) и (0, 1, 1) равно 1, хотя множества их элементов совпадают. Нетрудно проверить, что функция (5.3) обладает всеми свойствами расстояния.

Утверждение теоремы 5.1 о непрерывности собственных функций можно переформулировать следующим образом: *полный набор* $\mathfrak{S}(\varkappa)$ *собственных значений оператора* $T(\varkappa)$ *непрерывно зависит от* $\varkappa$. Последнее означает, что $\operatorname{dist}(\mathfrak{S}(\varkappa), \mathfrak{S}(\varkappa_0)) \to 0$ при $\varkappa \to \varkappa_0$. Указанная непрерывность есть непрерывность полного набора *в целом*. В связи с этим возникает вопрос о существовании $N$ однозначных непрерывных функций $\mu_n(\varkappa)$, $n = 1, \ldots, N$, значения которых при каждом $\varkappa$ образуют полный набор собственных значений оператора $T(\varkappa)$. Такая «униформизация» в общем случае невозможна. Это видно из примера 1.1, d), в котором собственные значения суть $\pm\varkappa^{1/2}$ и поэтому невозможно определить две однозначные непрерывные функции, представляющие собственные значения в области комплексной плоскости, содержащей точку $\varkappa = 0$.

«Униформизация» возможна, если i) параметр $\varkappa$ пробегает интервал вещественной оси или ii) все рассматриваемые собственные значения вещественны. В последнем случае «униформизующие» функции $\mu_n(\varkappa)$ получаются просто при нумерации собственных значений в неубывающем порядке:

$$\mu_1(\varkappa) \leqslant \mu_2(\varkappa) \leqslant \ldots \leqslant \mu_N(\varkappa). \tag{5.4}$$

Следует отметить, однако, что этот способ упорядочения удобен не всегда, так как он может приводить к недифференцируемым функциям, тогда как другое упорядочение даст дифференцируемые.

Возможность «униформизации» в случае i) совсем не очевидна. Она составляет содержание следующей теоремы.

**Теорема 5.2.** *Пусть* $\mathfrak{S}(\varkappa)$ — *неупорядоченный набор из* $N$ *комплексных чисел, непрерывно зависящий от параметра* $\varkappa$ *в (открытом или замкнутом) интервале* I. *Тогда существуют* $N$ *однозначных и непрерывных функций* $\mu_n(\varkappa)$, $n = 1, \ldots, N$, *значения которых в точке* $\varkappa$ *образуют набор* $\mathfrak{S}(\varkappa)$ *для каждого* $\varkappa \in \mathrm{I}$ *(будем говорить, что эти функции представляют набор* $\mathfrak{S}(\varkappa)$).

Доказательство. Скажем, что подинтервал $\mathrm{I}_0$ интервала I имеет свойство (A), если на $\mathrm{I}_0$ существует $N$ функций, обладающих свойствами, сформулированными в теореме. Требуется доказать, что I обладает свойством (A). Покажем сначала, что множество интервалов, имеющих свойство (A), замкнуто относительно объединения пары пересекающихся интервалов. Пусть $(\mu_n^{(1)})$ и $(\mu_n^{(2)})$ суть функции, представляющие набор $\mathfrak{S}(\varkappa)$ на интервалах $\mathrm{I}_1$ и $\mathrm{I}_2$ соответственно. Если $\varkappa_0 \in \mathrm{I}_1 \cap \mathrm{I}_2$, то после подходящей перенумерации набора $(\mu_n^{(2)})$ получим $\mu_n^{(1)}(\varkappa_0) = \mu_n^{(2)}(\varkappa_0)$, $n = 1, \ldots, N$. Тогда функции $(\mu_n^{(0)})$, определяемые на $\mathrm{I}_0 = \mathrm{I}_1 \cup \mathrm{I}_2$ формулой

$$\mu_n^{(0)}(\varkappa) = \begin{cases} \mu_n^{(1)}(\varkappa), & \varkappa \leqslant \varkappa_0, \\ \mu_n^{(2)}(\varkappa), & \varkappa \geqslant \varkappa_0, \end{cases} \tag{5.5}$$

непрерывны и представляют набор $\mathfrak{S}(\varkappa)$ на $\mathrm{I}_0$.

Отсюда следует, что интервал $\mathrm{I}' \subset \mathrm{I}$ имеет свойство (A), если каждая точка из $\mathrm{I}'$ имеет окрестность со свойством (A).

После этих предварительных замечаний мы докажем теорему 5.2 по индукции. Теорема очевидным образом верна при $N = 1$. Предположим, что теорема верна для всех $N < M$ и каждого интервала I. Пусть $\Gamma$ — множество точек $\varkappa \in \mathrm{I}$ таких, что все $M$ элементов набора $\mathfrak{S}(\varkappa)$ совпадают. Множество $\Gamma$ замкнуто, а дополнение $\Delta = \mathrm{I} \setminus \Gamma$ открыто в I. Покажем, что каждая точка из $\Delta$ имеет окрестность со свойством (A). Пусть $\varkappa_0 \in \Delta$. Так как среди $M$ элементов набора $\mathfrak{S}(\varkappa_0)$ есть различные, то этот набор можно разбить на два меньших набора с числом элементов $N_1$ и $N_2$. Другими словами, набор $\mathfrak{S}(\varkappa_0)$ можно представить в виде объединения непересекающихся $N_1$-набора и $N_2$-набора. Из непрерывности $\mathfrak{S}(\varkappa)$ следует, что для значений $\varkappa$, достаточно близких к $\varkappa_0$, набор $\mathfrak{S}(\varkappa)$ также представим в виде объединения $N_1$-набора и $N_2$-набора, непрерывно зависящих от $\varkappa$. Согласно предположению индукции, эти наборы в некоторой окрестности $\Delta'$ точки $\varkappa_0$ можно представить семействами непрерывных функций $(\mu_1(\varkappa), \ldots, \mu_{N_1}(\varkappa))$ и $(\mu_{N_1+1}(\varkappa), \ldots, \mu_M(\varkappa))$ соответственно. Функции $\mu_k$, $k = 1, \ldots, M$, в совокупности представляют набор $\mathfrak{S}(\varkappa)$ в $\Delta'$. Другими словами, $\Delta'$ имеет свойство (A).

Так как множество $\Delta$ открыто в I, то оно является объединением не более чем счетного числа интервалов $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \ldots$. Так как каждая точка в $\Delta$ имеет окрестность со свойством (A), то из сделанного выше замечания следует, что каждый интервал $\mathrm{I}_p$ имеет свойство (A). Обозначим через $\mu_n^{(p)}(\varkappa)$, $n = 1, \ldots, N$, функции, представляющие $\mathfrak{S}(\varkappa)$ в $\mathrm{I}_p$. С другой стороны, при $\varkappa \in \Gamma$ набор $\mathfrak{S}(\varkappa)$ состоит из $N$ тождественных элементов $\mu(\varkappa)$. Определим теперь функции $\mu_n(\varkappa)$, $n = 1, \ldots, N$, по формуле

$$\mu_n(\varkappa) = \begin{cases} \mu_n^{(p)}(\varkappa), & \varkappa \in \mathrm{I}_p, \quad p = 1, 2, \ldots, \\ \mu(\varkappa), & \varkappa \in \Gamma. \end{cases} \tag{5.6}$$

Эти $N$ функций представляют $\mathfrak{S}(\varkappa)$ на всем интервале I. Нетрудно проверить, что функции $\mu_n(\varkappa)$ непрерывны на I. Это завершает индукцию, и тем самым теорема доказана.

## 3. Непрерывность собственных подпространств и собственных векторов

Собственные векторы и собственные подпространства оператора $T(\varkappa)$, непрерывно зависящего от $\varkappa$, не обязательно непрерывны. Выше было доказано, что тотальный проектор $P(\varkappa)$ $\lambda$-группы непрерывен, однако $P(\varkappa)$ определен только для тех (достаточно малых по модулю) $\varkappa$, для которых собственные значения, образующие $\lambda$-группу, близки к $\lambda$.

Если $T(\varkappa)$ имеет $N$ различных собственных значений $\lambda_h(\varkappa)$, $h = 1, \ldots, N$, для всех точек в односвязной области комплексной плоскости или на интервале вещественной оси, то можно определить соответствующие им одномерные собственные проекторы $P_h(\varkappa)$. Каждый проектор $P_h(\varkappa)$ непрерывен по $\varkappa$, так как он совпадает с тотальным проектором, соответствующим собственному значению $\lambda_h(\varkappa)$. В общем случае функцию $P_h(\varkappa)$ нельзя продолжить непрерывно на те значения $\varkappa$, в которых собственные значения расщепляются. В этом смысле собственные значения ведут себя более регулярно, чем собственные проекторы. Напомним, что даже в аналитическом случае $P_h(\varkappa)$ может не существовать в тех исключительных точках, где $\lambda_h(\varkappa)$ аналитична (пример 1.12, f)); однако в таких точках $P_h(\varkappa)$ имеет самое большее полюс (см. п. 1.8). В общем же случае, который мы сейчас рассматриваем, положение гораздо хуже. Тот факт, что собственные проекторы могут иметь очень сильные особенности даже в том случае, когда $T(\varkappa)$ — гладкая функция, вытекает из следующего примера, принадлежащего Реллиху[1]).

**Пример 5.3.** Пусть $N = 2$ и

$$T(\varkappa) = e^{-1/\varkappa^2}\begin{pmatrix} \cos\frac{2}{\varkappa} & \sin\frac{2}{\varkappa} \\ \sin\frac{2}{\varkappa} & -\cos\frac{2}{\varkappa} \end{pmatrix}, \quad T(0)=0. \tag{5.7}$$

Функция $T(\varkappa)$ бесконечно дифференцируема на всей оси; собственные значения $T(\varkappa)$, которые равны $\pm e^{-1/\varkappa^2}$ при $\varkappa \neq 0$ и нулю при $\varkappa = 0$, тоже бесконечно дифференцируемы. Соответствующие собственные проекторы при $\varkappa \neq 0$ имеют вид

$$\begin{pmatrix} \cos^2\frac{1}{\varkappa} & \cos\frac{1}{\varkappa}\sin\frac{1}{\varkappa} \\ \cos\frac{1}{\varkappa}\sin\frac{1}{\varkappa} & \sin^2\frac{1}{\varkappa} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \sin^2\frac{1}{\varkappa} & -\cos\frac{1}{\varkappa}\sin\frac{1}{\varkappa} \\ -\cos\frac{1}{\varkappa}\sin\frac{1}{\varkappa} & \cos^2\frac{1}{\varkappa} \end{pmatrix}. \tag{5.8}$$

Эти матричные функции бесконечно дифференцируемы всюду, кроме точки $\varkappa = 0$, однако их нельзя доопределить в нуле по непрерывности. Более того, нетрудно видеть, что у оператора $T(\varkappa)$ нет собственного вектора, который непрерывен в окрестности точки $\varkappa = 0$ и не обращается в нуль в самой точке $\varkappa = 0$.

Отметим, что оператор (5.7) симметричен при каждом вещественном $\varkappa$. Это показывает, что теорема 1.10 о голоморфности собственных проекторов голоморфного семейства нормальных операторов перестает быть верной, если голоморфность заменить на бесконечную дифференцируемость.

## 4. Дифференцируемость в точке

Предположим теперь, что $T(\varkappa)$ — дифференцируемое семейство операторов. Отсюда не следует, вообще говоря, что собственные значения оператора $T(\varkappa)$ дифференцируемы; это не следует даже из голоморфности $T(\varkappa)$ (пример 1.1, d)). Однако имеет место

**Теорема 5.4.** *Если операторная функция $T(\varkappa)$ дифференцируема в нуле, то тотальный проектор $\lambda$-группы дифференцируем в нуле:*

$$P(\varkappa) = P + \varkappa P^{(1)} + o(\varkappa), \tag{5.9}$$

*где*[2]) $P^{(1)} = -PT'(0)S - ST'(0)P$, *а $S$ — приведенная резольвента оператора $T$ в точке $\lambda$* (см. п. I.5.3). *Если $\lambda$ — полупростое*

---

[1]) См. Реллих [1]; мы приводим этот пример в слегка модифицированном виде.

[2]) Здесь $o(\varkappa)$ обозначает операторнозначную функцию $F(\varkappa)$ такую, что $\| F(\varkappa) \| = o(\varkappa)$.

*собственное значение оператора $T$, то собственные значения оператора $T(\varkappa)$, принадлежащие $\lambda$-группе, дифференцируемы в нуле*:

$$\mu_j(\varkappa) = \lambda + \varkappa\mu_j^{(1)} + o(\varkappa), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5.10}$$

*где $\mu_j(\varkappa)$ — полный набор собственных значений, входящих в $\lambda$-группу, и $\mu_j^{(1)}$ — полный набор собственных значений оператора $PT'(0)P$ в подпространстве $\mathbf{M} = P\mathbf{X}$ ($P$ — собственный проектор оператора $T$, соответствующий $\lambda$). Если $T$ диагонализуем, то все собственные значения оператора $T(\varkappa)$ дифференцируемы в нуле.*

**Замечание 5.5.** Предыдущая теорема требует некоторых пояснений. Дифференцируемость собственных значений означает дифференцируемость полного набора $\mathfrak{S}(\varkappa)$ собственных значений оператора $T(\varkappa)$. Аналогично определяется дифференцируемость собственных значений, входящих в $\lambda$-группу. Дифференцируемость набора $\mathfrak{S}(\varkappa)$ в точке $\varkappa = 0$ по определению означает, что в окрестности нуля $\mathfrak{S}(\varkappa)$ можно представить дифференцируемыми в точке $\varkappa = 0$ функциями $\mu_n(\varkappa)$, $n = 1, \ldots, N$. Набор $\mathfrak{S}'(0)$, образованный числами $\mu_n'(0)$, называется производным для $\mathfrak{S}(\varkappa)$ в точке $\varkappa = 0$. Нетрудно доказать (например, индукцией по $N$), что $\mathfrak{S}'(0)$ не зависит от выбора представляющих функций $\mu_n(\varkappa)$. Если $\mathfrak{S}(\varkappa)$ дифференцируем в каждой точке, а набор $\mathfrak{S}'(\varkappa)$ непрерывен, то набор $\mathfrak{S}(\varkappa)$ называется непрерывно дифференцируемым.

Отметим, что $\mathfrak{S}(0)$ и $\mathfrak{S}'(0)$ не определяют поведение $\mathfrak{S}(\varkappa)$ даже вблизи нуля. Например, наборы $\mathfrak{S}_1(\varkappa) = (\varkappa, 1 - \varkappa)$ и $\mathfrak{S}_0(\varkappa) = (-\varkappa, 1 + \varkappa)$ имеют одинаковые значения $(0, 1)$ и одинаковые производные $(1, -1)$ в точке $\varkappa = 0$.

Доказательство теоремы 5.4. Как следует из (I.4.28), резольвента $R(\zeta, \varkappa)$ дифференцируема в точке $\varkappa = 0$ и

$$\left[\frac{\partial}{\partial\varkappa} R(\zeta, \varkappa)\right]_{\varkappa=0} = -R(\zeta)\,T'(0)\,R(\zeta). \tag{5.11}$$

Здесь стоит отметить, что производная (5.11) существует *равномерно* по переменной $\zeta$, пробегающей любое компактное подмножество в $\mathrm{P}(T)$, так как при этих условиях сходимость $R(\zeta, \varkappa) \to R(\zeta)$, $\varkappa \to 0$, равномерна (см. п. 1). Из выражения (1.16) для $P(\varkappa)$ следует, что функция $P(\varkappa)$ дифференцируема в точке $\varkappa = 0$ и

$$P'(0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{\partial}{\partial\varkappa} R(\zeta, \varkappa)\right]_{\varkappa=0} d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\zeta)\,T'(0)\,R(\zeta)\,d\zeta =$$
$$= -PT'(0)S - ST'(0)P = P^{(1)} \quad (\text{см. } (2.14)). \tag{5.12}$$

Таким образом, формула (5.9) доказана.

Если $\lambda$ — полупростое собственное значение, то, как и в аналитическом случае, собственные значения оператора $T(\varkappa)$, образующие $\lambda$-группу, имеют вид

$$\mu_j(\varkappa) = \lambda + \varkappa\mu_j^{(1)}(\varkappa), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{5.13}$$

где $\mu_j^{(1)}(\varkappa)$ суть собственные значения оператора

$$\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa) = \varkappa^{-1}(T(\varkappa) - \lambda)P(\varkappa) = -\frac{\varkappa^{-1}}{2\pi i}\int_{\Gamma}(\zeta - \lambda)R(\zeta, \varkappa)\,d\zeta \tag{5.14}$$

в подпространстве $\mathsf{M}(\varkappa) = P(\varkappa)\mathsf{X}$ (см. (2.37)). Так как $T(\varkappa)$ и $P(\varkappa)$ дифференцируемы в нуле и $(T - \lambda)P = 0$, если $\lambda$ полупросто, то функция $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ будет непрерывна в точке $\varkappa = 0$, если положить

$$\widetilde{T}^{(1)}(0) = T'(0)P + (T - \lambda)P'(0) = PT'(0)P; \tag{5.15}$$

последнее равенство следует из формулы (5.12) и соотношения $(T - \lambda)S = 1 - P$ (см. (2.11)). Таким образом, собственные значения оператора $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ непрерывны в нуле. В частности, собственные значения $\mu_j^{(1)}(\varkappa)$ оператора $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ в инвариантном подпространстве $\mathsf{M}(\varkappa)$ непрерывны в нуле, хотя они и не обязаны быть непрерывными при $\varkappa \neq 0$. Отсюда и из выражений (5.13) следуют формулы (5.10).

## 5. Дифференцируемость на интервале

До сих пор мы исследовали дифференцируемость собственных значений $\lambda(\varkappa)$ и собственных проекторов $P(\varkappa)$ в точке $\varkappa = 0$. Рассмотрим теперь дифференциальные свойства функций $\lambda(\varkappa)$ и $P(\varkappa)$ в некоторой области изменения переменной $\varkappa$, предполагая дифференцируемость $T(\varkappa)$ в этой области. Если $\varkappa$ пробегает область комплексной плоскости, то дифференцируемость в этом случае означает голоморфность; так как этот случай был подробно рассмотрен выше, мы будем считать, что функция $T(\varkappa)$ определена и дифференцируема на интервале $\mathrm{I}$ *вещественной оси*[1].

Согласно теореме 5.4 полный набор $\mathfrak{S}(\varkappa)$ собственных значений оператора $T(\varkappa)$ дифференцируем на интервале $\mathrm{I}$ *при условии, что* $T(\varkappa)$ *диагонализуем на* $\mathrm{I}$. Отнюдь не очевидно, однако, что существуют однозначные и дифференцируемые на $\mathrm{I}$ функции $\mu_n(\varkappa)$, $n = 1, \ldots, N$, которые представляют полный набор собственных значений оператора $T(\varkappa)$. Тем не менее это верно, как утверждает следующая

---

[1] Дифференцируемость собственных значений была изучена подробно Реллихом [8] в том случае, когда оператор $T(\varkappa)$ симметричен при каждом вещественном $\varkappa$. Следует сказать, что эта задача далеко не тривиальна.

**Теорема 5.6.** *Пусть* $\mathfrak{S}(\varkappa)$ — *неупорядоченный набор* $N$ *комплексных чисел, зависящий от вещественного параметра* $\varkappa$, *пробегающего интервал* I. *Предположим, что набор* $\mathfrak{S}(\varkappa)$ *дифференцируем в каждой точке интервала* I (*в смысле замечания* 5.5). *Тогда существуют комплекснозначные дифференцируемые на* I *функции* $\mu_n(\varkappa)$, $n = 1, \ldots, N$, *представляющие* $\mathfrak{S}(\varkappa)$.

Доказательство. Будем говорить, что подинтервал в I имеет свойство (B), если для него справедливо заключение теоремы 5.6; требуется доказать, что I имеет свойство (B). Так же как в доказательстве теоремы 5.2, можно показать, что объединение $I_1 \cup I_2$ перекрывающихся[1] интервалов $I_1$ и $I_2$, обладающих свойством (B), также обладает свойством (B). Стоит отметить, что перенумерацию чисел $\mu_n^{(2)}(\varkappa)$ нужно производить таким образом, чтобы обеспечить дифференцируемость функций (5.5) в точке $\varkappa = \varkappa_0$; это возможно, так как набор $\mathfrak{S}(\varkappa)$ дифференцируем в точке $\varkappa = \varkappa_0$.

Это замечание позволяет вести доказательство далее так же, как в теореме 5.2. Лишь на заключительном этапе доказательства требуется небольшая модификация, так как функции, определенные формулой (5.6), могут иметь разрывы производных *в изолированных точках* множества Γ. Для того чтобы преодолеть это затруднение, мы поступим следующим образом. Изолированная точка $\varkappa_0$ в Γ является либо граничной точкой интервала I, либо общей граничной точкой интервалов $I_p$ и $I_q$. В первом случае не возникает никаких затруднений. Во втором случае семейства $(\mu_n^{(p)}(\varkappa))$ и $(\mu_n^{(q)}(\varkappa))$ можно «гладко соединить» с помощью перенумерации одного из них, так как эти семейства дифференцируемых функций представляют набор $\mathfrak{S}(\varkappa)$ справа и слева от точки дифференцируемости $\varkappa = \varkappa_0$. Отсюда следует, что интервал, составленный из $I_p$, $I_q$ и $\varkappa_0$, имеет свойство (B).

Пусть Γ′ — множество изолированных точек в Γ. Множество $\Delta \cup \Gamma'$ относительно открыто в I и состоит из (не более чем) счетного числа интервалов $I'_k$. Каждый интервал $I'_k$ составлен в свою очередь из (не более чем) счетного числа интервалов $I_p$, соединенных друг с другом точками из Γ′. Применяя описанный выше процесс «гладкого соединения», можно функции, представляющие $\mathfrak{S}(\varkappa)$ на $I_p$, объединить в семейство дифференцируемых функций, представляющих $\mathfrak{S}(\varkappa)$ на $I'_k$. Таким образом, каждый интервал $I'_k$ имеет свойство (B).

Построение $N$ дифференцируемых функций $\mu_n(\varkappa)$, представляющих $\mathfrak{S}(\varkappa)$ на всем интервале I, можно провести по формуле (5.6), в которой $I_p$ и Γ следует заменить на $I'_k$ и $\Gamma'' = \Gamma \setminus \Gamma'$ соответственно. Дифференцируемость определенных таким образом

---

[1] Это означает здесь, что интервалы имеют общую внутреннюю точку.

функций $\mu_n(\varkappa)$ в точке $\varkappa_0 \in \Gamma''$ следует из того, что производный набор $\mathfrak{S}'(\varkappa_0)$ состоит из $N$ тождественных элементов, так же как и $\mathfrak{S}(\varkappa_0)$. Это завершает доказательство теоремы 5.6.

**Теорема 5.7.** *Если в условиях теоремы* 5.6 *производный набор* $\mathfrak{S}'(\varkappa)$ *непрерывен, то* $N$ *функций* $\mu_n(\varkappa)$ *непрерывно дифференцируемы на* I.

Доказательство. Предположим, что вещественная часть функции $\mu_n'(\varkappa)$ разрывна при $\varkappa = \varkappa_0$. Как известно из дифференциального исчисления, значения, принимаемые функцией $\operatorname{Re} \mu_n'(\varkappa)$ в любой окрестности точки $\varkappa_0$, заполняют интервал длины, большей некоторого положительного числа[1]. Однако это невозможно, если набор $\mathfrak{S}'(\varkappa)$ непрерывен, так как значение $\mu_n'(\varkappa)$ принадлежит этому набору. По той же причине $\operatorname{Im} \mu_n'(\varkappa)$ не может иметь точек разрыва.

**Замечание 5.8.** Мы видели (теорема 5.4), что собственные значения оператора $T(\varkappa)$ дифференцируемы на I, если семейство $T(\varkappa)$ дифференцируемо и диагонализуемо при каждом $\varkappa \in$ I. Естественно поэтому предположить, что собственные значения дифференцируемы, если семейство $T(\varkappa)$ непрерывно дифференцируемо и диагонализуемо. *Это, однако, неверно,* как показывает следующий пример[2].

**Пример 5.9.** Пусть $N = 2$ и

$$T(\varkappa) = \begin{pmatrix} |\varkappa|^{\alpha} & |\varkappa|^{\alpha} - |\varkappa|^{\beta}\left(2 + \sin\frac{1}{|\varkappa|}\right) \\ -|\varkappa|^{\alpha} & -|\varkappa|^{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \varkappa \neq 0, \quad T(0) = 0. \tag{5.16}$$

Если $\alpha > 1$ и $\beta > 2$, то функция $T(\varkappa)$ непрерывно дифференцируема во всех точках вещественной прямой. Собственные значения оператора $T(\varkappa)$ таковы:

$$\mu_{\pm}(\varkappa) = \pm|\varkappa|^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(2 + \sin\frac{1}{|\varkappa|}\right)^{1/2}, \quad \varkappa \neq 0, \quad \mu_{\pm}(0) = 0. \tag{5.17}$$

---

[1] Пусть вещественная функция $f(t)$ вещественной переменной $t$ дифференцируема на интервале $a \leqslant t \leqslant b$; тогда $f'(t)$ принимает на этом интервале любое значение между $\alpha = f'(a)$ и $\beta = f'(b)$. Предположим для определенности, что $\alpha < \beta$. Для любого $\gamma \in (\alpha, \beta)$ положим $g(t) = f(t) - \gamma t$. Тогда $g'(a) = \alpha - \gamma < 0$, $g'(b) = \beta - \gamma > 0$ и поэтому непрерывная функция $g(t)$ принимает минимальное значение в некоторой внутренней точке $t = c$ интервала $(a, b)$. Следовательно, $g'(c) = 0$ и поэтому $f'(c) = \gamma$. Если производная $f'(t)$ разрывна в точке $t = t_0$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что в любой ее окрестности существуют числа $t_1$ и $t_2$, для которых $|f'(t_1) - f'(t_2)| > \varepsilon$. Из предыдущего следует, что $f'(t)$ принимает любые значения между $f'(t_1)$ и $f'(t_2)$. Поэтому значения $f'(t)$ в любой окрестности точки $t_0$ покрывают интервал длины больше $\varepsilon$.

[2] Оператор в этом примере не симметричен. Для симметричных операторов гипотеза верна; см. теорему 6.8.

Так как $\mu_+(\varkappa) \neq \mu_-(\varkappa)$ при $\varkappa \neq 0$, то $T(\varkappa)$ диагонализуем при всех $\varkappa$. Собственные значения $\mu\pm(\varkappa)$ дифференцируемы всюду в соответствии с общей теорией. Однако их производные разрывны в нуле, если $\alpha+\beta \leqslant 4$. Этот простой пример показывает еще раз, что в случае неаналитических возмущений возможны всякие патологии.

**Замечание 5.10.** Если функция $T(\varkappa)$ непрерывно дифференцируема в окрестности нуля и $\lambda$ — полупростое собственное значение оператора $T(0)$, то, как видно из формул (5.12) и (5.14), тотальный проектор $\lambda$-группы непрерывно дифференцируем, а оператор $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ непрерывен в окрестности нуля.

## 6. Асимптотическое разложение собственных значений и собственных векторов

Дифференциальные свойства собственных значений, изученные в предыдущих параграфах, можно рассмотреть с несколько иной точки зрения. Так, например, теорема 5.4 о дифференцируемости собственных значений в точке $\varkappa = 0$ дает в то же время *асимптотическое* разложение собственных значений $\mu_j(\varkappa)$ с точностью до членов первого порядка, если $T(\varkappa)$ асимптотически имеет вид $T + \varkappa T' + o(\varkappa)$, где $T' = T'(0)$. Естественно поставить вопрос об асимптотическом поведении собственных значений с точностью до членов второго порядка, в случае когда $T(\varkappa)$ имеет вид $T + \varkappa T^{(1)} + \varkappa^2 T^{(2)} + o(\varkappa^2)$. Теорема 5.4 допускает непосредственное обобщение в этом направлении.

**Теорема 5.11.** *Пусть $T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)} + \varkappa^2 T^{(2)} + o(\varkappa^2)$ при $\varkappa \to 0$, $\lambda$ — собственное значение оператора $T$ и $P$ — соответствующий собственный проектор. Тогда тотальный проектор $\lambda$-группы собственных значений оператора $T(\varkappa)$ имеет вид*

$$P(\varkappa) = P + \varkappa P^{(1)} + \varkappa^2 P^{(2)} + o(\varkappa^2), \tag{5.18}$$

*где операторы $P^{(1)}$ и $P^{(2)}$ определяются по формулам* (2.13). *Если $\lambda$ — полупростое собственное значение и $P_j^{(1)}$ — собственный проектор оператора $PT^{(1)}P$ в $PX$, соответствующий собственному значению $\lambda_j^{(1)}$, то $T(\varkappa)$ имеет в точности $m_j^{(1)} = \dim P_j^{(1)}$ собственных значений (учитываемых с кратностями) вида $\lambda + \varkappa\lambda_j{}^{(1)} + o(\varkappa)$. Тотальный проектор $P_j^{(1)}(\varkappa)$ этой $\lambda + \varkappa\lambda_j^{(1)}$-группы имеет вид*

$$P_j^{(1)}(\varkappa) = P_j^{(1)} + \varkappa P_j^{(11)} + o(\varkappa). \tag{5.19}$$

*Если, кроме того, $\lambda_j^{(1)}$ — полупростое собственное значение, то $P_j^{(11)}$ определяется по формуле* (2.47) *и собственные значения*

$\lambda + \varkappa\lambda_j^{(1)}$*-группы имеют вид*

$$\mu_{jk}(\varkappa) = \lambda + \varkappa\lambda_j^{(1)} + \varkappa^2\mu_{jk}^{(2)} + o(\varkappa^2), \quad k = 1, \ldots, m_j^{(1)}, \tag{5.20}$$

*где* $\mu_j^{(2)}$, $k = 1, \ldots, m_j^{(1)}$, *— полный набор собственных значений оператора* $P_j^{(1)}\widetilde{T}^{(2)}P_j^{(1)} = P_j^{(1)}T^{(2)}P_j^{(1)} - P_j^{(1)}T^{(1)}ST^{(1)}P_j^{(1)}$ *в подпространстве* $P_j^{(1)}\mathbf{X}$.

Доказательство. Из асимптотического разложения $T(\varkappa)$ с точностью до членов второго порядка следует существование такого же разложения для резольвенты:

$$\begin{aligned} R(\zeta, \varkappa) &= R(\zeta) - R(\zeta)(T(\varkappa) - T)R(\zeta) + \\ &\quad + R(\zeta)(T(\varkappa) - T)R(\zeta)(T(\varkappa) - T)R(\zeta) + \ldots \\ &= R(\zeta) - \varkappa R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta) + \varkappa^2[-R(\zeta)T^{(2)}R(\zeta) + \\ &\quad + R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)] + o(\varkappa^2). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Здесь $o(\varkappa^2)$ мало равномерно по переменной $\zeta$, пробегающей любое компактное подмножество в $\mathrm{P}(T)$. Подстановка (5.21) в (1.16) так же, как и в аналитическом случае, приводит к разложению (5.18).

Если $\lambda$ — полупростое собственное значение, то оператор $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)$, определяемый формулой (5.14), имеет вид

$$\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa) = PT^{(1)}P + \varkappa\widetilde{T}^{(2)} + o(\varkappa), \tag{5.22}$$

где $\widetilde{T}^{(2)}$ выражается по формуле (2.20). Применение теоремы 5.4 к $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ приводит к утверждению теоремы. Вычисления членов асимптотического разложения полностью аналогичны соответствующим вычислениям в аналитическом случае.

## 7. Операторы, зависящие от нескольких параметров

До сих пор мы рассматривали операторы $T(\varkappa)$, зависящие от одного параметра $\varkappa$. Рассмотрим теперь оператор $T(\varkappa_1, \varkappa_2)$, зависящий от двух комплексных или вещественных параметров $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$.

В этом случае не будет ничего нового в том, что касается непрерывности собственных значений. Собственные значения непрерывны по совокупности переменных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ (в том смысле, как это определено в п. 1, 2), если функция $T(\varkappa_1, \varkappa_2)$ непрерывна. То же самое верно и в отношении частных дифференцирований (в случае когда $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ вещественны). Новое появляется в связи с понятием *дифференцируемости по совокупности переменных* $\varkappa_1$ *и* $\varkappa_2$. Из дифференцируемости $T(\varkappa_1, \varkappa_2)$ не следует дифференцируемость собственных значений по совокупности переменных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, даже в том случае, когда оператор $T(\varkappa_1, \varkappa_2)$ диагонализуем при всех $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ (ср. с теоремой 5.4).

**Пример 5.12** [1]. Пусть $N = 2$ и

$$T(\varkappa_1, \varkappa_2) = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & \varkappa_2 \\ \varkappa_2 & -\varkappa_1 \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Оператор $T(\varkappa_1, \varkappa_2)$ диагонализуем при всех вещественных $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ и дифференцируем по совокупности этих переменных. Однако его собственные значения

$$\lambda_{\pm}(\varkappa_1, \varkappa_2) = \pm(\varkappa_1^2 + \varkappa_2^2)^{1/2} \tag{5.24}$$

не дифференцируемы в точке $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$.

Как видно из предыдущего примера, собственные значения голоморфного семейства $T(\varkappa_1, \varkappa_2)$ могут иметь довольно сложные особенности [2].

**Замечание 5.13.** Оператор (5.23) становится симметричен при вещественных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, если в $X = C^2$ введено обычное скалярное произведение. Таким образом, пример 5.12 показывает, что теорема 1.10 не допускает обобщения на случай операторов, зависящих от нескольких параметров [3].

## 8. Собственные значения как функции оператора

Введение параметра $\varkappa$, задающего возмущение, иногда представляется довольно искусственным, хотя в ряде случаев оно соответствует смыслу задачи. Можно изучать изменение собственных значений оператора $T$, когда $T$ получает малое приращение общего вида. С этой точки зрения собственные значения оператора $T$ следует рассматривать как функции самого оператора. Так как число собственных значений зависит от оператора и не постоянно, то при нашем подходе удобно рассматривать полный набор

---

[1] См. Реллих [1].

[2] Однако простые собственные значения и соответствующие им собственные проекторы голоморфны по совокупности переменных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$; это следует из теоремы 5.16.

[3] В связи с рассмотрением двухпараметрического семейства $T(\varkappa_1, \varkappa_2)$ можно поставить вопрос о том, когда $T(\varkappa_1, \varkappa_2)$ имеет ненулевое ядро (нуль-пространство). Эту задачу можно рассматривать как обобщение основной задачи теории возмущений собственных значений, которую мы до сих пор рассматривали. Обычная теория возмущений отвечает на вопрос: при каких $\varkappa$ и $\lambda$ оператор вида $T(\varkappa) - \lambda$ имеет нетривиальное нуль-пространство. Общий случай двухпараметрической зависимости приводит к теории возмущений в нелинейной задаче на собственные значения, упомянутой в подстрочном примечании на стр. 50. Мы не будем рассматривать такую общую теорию возмущений. Отметим, однако, что в некоторых частных случаях нелинейные задачи можно свести к рассмотренным выше линейным задачам. Предположим, что нам задано семейство операторов вида $T(\lambda) - \varkappa$. Обычная теория возмущений дает нам «собственные значения» $\varkappa$ как аналитические функции «параметра» $\lambda$. Обратные функции дадут нам «нелинейные» собственные значения $\lambda$ как аналитические функции параметра $\varkappa$. Существуют и другие приемы рассмотрения нелинейных задач. По этому поводу см., например, Клуазо [1].

$\mathfrak{S}[T]$ собственных значений как функцию оператора $T$. Это эквивалентно зависимости $\mathfrak{S}[T]$ от $N^2$ матричных элементов оператора $T$ относительно фиксированного базиса в $\mathbf{X}$.

**Теорема 5.14.** *$\mathfrak{S}[T]$ непрерывно зависит от $T$. Это означает, что для любого $T$ расстояние между $\mathfrak{S}[T+A]$ и $\mathfrak{S}[T]$ стремится к нулю при $\|A\| \to 0$.*

Доказательство этой теоремы вытекает из результатов п. 1 и 2, где доказана непрерывность полного набора собственных значений как функции от параметра возмущения. Анализ приведенных там рассуждений показывает, что параметризация возмущения несущественна в доказательстве.

Непрерывность $\mathfrak{S}[T]$ *равномерна* в любой ограниченной (т. е. содержащейся в некотором шаре $\|T\| < R$) области изменения переменной $T$, так как переменная $T$ эквивалентна набору из $N^2$ комплексных чисел. Степень непрерывности $\mathfrak{S}[T]$ для некоторых (недиагонализуемых) $T$ может быть очень слабой, как это видно из того факта, что ряд Пюизо для собственных значений оператора $T + \varkappa T^{(1)} + \ldots$ может иметь вид $\lambda + \alpha\varkappa^{1/p} + \ldots$ (см. (1.7) и пример 1.1, d)).

Рассмотрим теперь дифференцируемость функции $\mathfrak{S}[T]$. Как мы видели, собственные значения не всегда дифференцируемы даже в случае аналитической зависимости $T(\varkappa)$ от $\varkappa$. С другой стороны, если $T$ диагонализуем, то собственные значения оператора $T + \varkappa T^{(1)}$ дифференцируемы в нуле для любого $T^{(1)}$ (в смысле п. 4), и диагонализуемость $T$ необходима для того, чтобы это было верно для любого $T^{(1)}$. Таким образом, доказана

Теорема 5.15. *$\mathfrak{S}[T]$ имеет производные в точке $T = T_0$ по всем направлениям тогда и только тогда, когда оператор $T_0$ диагонализуем.*

Дифференцируемость по направлению $T^{(1)}$ означает, что $\mathfrak{S}[T + \varkappa T^{(1)}]$ имеет производную в точке $\varkappa = 0$; из дифференцируемости $\mathfrak{S}[T]$ по всем направлениям следует существование всех частных производных функции $\mathfrak{S}[T]$ по матричным элементам оператора $T$.

Теорема 5.15 становится неверной, если дифференцируемость по направлениям заменить на (полную) дифференцируемость. Действительно, пример 5.12 показывает, что набор $\mathfrak{S}[T]$ не обязан быть дифференцируемым даже на двумерном подпространстве в $\mathscr{B}(\mathbf{X})$. Напомним, что комплексная функция $\mu(T)$, $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$, называется дифференцируемой в точке $T = T_0$, если существует *линейная* функция $\nu_{T_0}[A]$, $A \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$, такая, что

$$\|A\|^{-1} \,|\, \mu(T_0 + A) - \mu(T_0) - \nu_{T_0}(A) \,|\, \to 0 \quad \text{при} \quad \|A\| \to 0. \tag{5.25}$$

Это определение не зависит от выбора нормы, так как в рассматриваемом случае все нормы эквивалентны. Функция $\nu_{T_0}[A]$ называется *полным дифференциалом* функции $\mu[T]$ в точке $T = T_0$. Ясно, что функция $\mu[T]$ дифференцируема тогда и только тогда, когда она дифференцируема как функция $N^2$ матричных элементов оператора $T$.

Вышеприведенное определение дифференцируемости немедленно обобщается на случай *упорядоченного* набора $N$ комплексных чисел. Однако не совсем просто определить дифференцируемость *неупорядоченного* набора $\mathfrak{S}[T]$, и мы не будем здесь это делать. Ограничимся частным случаем диагонализуемого оператора $T_0$ с простыми собственными значениями. Тогда оператор $T = T_0 + A$ в силу непрерывности $\mathfrak{S}[T]$ имеет $N$ различных собственных значений при достаточно малых (по норме) $A$. Таким образом, собственные значения оператора $T$ в некоторой окрестности оператора $T_0$ представляются $N$ однозначными непрерывными функциями $\lambda_h(T)$, $h = 1, \ldots, N$. Докажем, что верна

**Теорема 5.16.** *Функции $\lambda_h[T]$ не только дифференцируемы, но даже голоморфны в окрестности $T_0$.*

**Замечание 5.17.** Комплексная функция $\mu(T)$ называется голоморфной в точке $T = T_0$, если она допускает разложение в абсолютно сходящийся *степенной ряд* относительно $A = T - T_0$:

$$\mu[T_0 + A] = \mu[T_0] + \mu^{(1)}[T_0, A] + \mu^2[T_0, A] + \ldots, \tag{5.26}$$

где $\mu^{(n)}[T_0, A]$ — форма степени $n$ по $A$; последнее означает, что существует симметричная $n$-линейная форма [1] $\mu^{(n)}[T_0, A_1, \ldots, A_n]$ такая, что

$$\mu^{(n)}(T_0, A) = \mu^{(n)}[T_0, A, \ldots, A]. \tag{5.27}$$

Ясно, что функция $\mu(T)$ голоморфна при $T = T_0$ тогда и только тогда, когда $\mu[T_0 + A]$ можно разложить в сходящийся степенной ряд относительно $N^2$ матричных элементов оператора $A$. Таким же образом можно определить голоморфную зависимость от $T$ операторнозначной функции $R[T] \in \mathscr{B}(X)$, $T \in \mathscr{B}(X)$.

Доказательство теоремы 5.16. Покажем сначала, что одномерные собственные проекторы $P_h[T]$, соответствующие собственным значениям $\lambda_h[T]$, голоморфны относительно $T$. Имеем (ср. (1.17))

$$P_h[T_0 + A] = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}\sum_{h=0}^{\infty} R_0(\zeta)(-AR_0(\zeta))^n\,d\zeta, \tag{5.28}$$

---

[1] Функция $f(A_1, \ldots, A_n)$ *симметрична*, если ее значения не изменяются при перестановке аргументов, и ***n*-линейна**, если она линейна по каждому переменному $A_n$.

где $R_0(\zeta) = (T_0 - \zeta)^{-1}$, а $\Gamma_h$ — окружность достаточно малого радиуса с центром в $\lambda_h[T_0]$. Ряд в подинтегральном выражении в (5.28) сходится равномерно по $\zeta \in \Gamma_h$ при $\| A \| < \delta_h$, где $\delta_h$ — минимум на $\Gamma_h$ функции $\| R_0(\zeta) \|^{-1}$. Так как правая часть в (5.28) после интегрирования становится степенным рядом относительно $A$, то голоморфность $P_h[T]$ доказана.

Ввиду того что проектор $P_h[T]$ одномерен, имеем

$$\lambda_h[T_0 + A] = \mathrm{tr}\,\{(T_0 + A)\, P_h[T_0 + A]\}. \tag{5.29}$$

Подстановка сюда степенного ряда (5.28) показывает, что $\lambda_h[T_0 + A]$ — также степенной ряд относительно $A$, что и требовалось доказать.

# § 6. Теория возмущений симметричных операторов

## 1. Аналитические возмущения симметричных операторов

Многие теоремы, доказанные в предыдущих параграфах, можно упростить или усилить в том случае, когда рассматриваемые операторы действуют в гильбертовом пространстве **H**. Ориентируясь на приложения, мы будем рассматривать в основном *симметричные* операторы.

Предположим, что нам задано семейство $T(\varkappa)$ вида (1.2), причем все операторы $T$, $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, ... симметричны. Тогда оператор $T(\varkappa)$ симметричен при *вещественных* $\varkappa$. Ясно, что в общем случае $T(\varkappa)$ не может быть симметричен для всех $\varkappa$ из области комплексной плоскости.

Итак, будем считать, что нам задана операторнозначная функция $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$, которая голоморфна в области $\mathrm{D}_0$, пересекающейся с вещественной осью, и симметрична при вещественных $\varkappa$:

$$T(\varkappa)^* = T(\varkappa) \quad \text{при} \quad \mathrm{Im}\,\varkappa = 0. \tag{6.1}$$

Для краткости такое семейство назовем *симметричным*. Мы будем также говорить о симметричном возмущении, в случае когда $T(\varkappa)$ рассматривается как возмущенный оператор. Семейство $T(\bar{\varkappa})^*$ голоморфно в области $\bar{\mathrm{D}}_0$ (зеркальном образе $\mathrm{D}_0$ относительно вещественной оси) и совпадает с $T(\varkappa)$ при вещественных $\varkappa$. Согласно теореме единственности отсюда следует, что $T(\bar{\varkappa})^* = T(\varkappa)$ для всех $\varkappa \in \mathrm{D}_0 \cap \bar{\mathrm{D}}_0$. Таким образом,

$$T(\varkappa)^* = T(\bar{\varkappa}), \tag{6.2}$$

если $\varkappa$ и $\bar{\varkappa}$ принадлежат области $\mathrm{D}_0$. Это можно использовать для аналитического продолжения $T(\varkappa)$ на область тех значений $\varkappa$, для которых $\varkappa$ или $\bar{\varkappa}$ принадлежит $D_0$. Итак, не ограничивая общности, можно предполагать, что область $D_0$ симметрична относительно вещественной оси.

Так как симметричный оператор нормален, то следующая теорема вытекает непосредственно из теоремы 1.10.

**Теорема 6.1.** *Если голоморфное семейство $T(\varkappa)$ симметрично, то собственные значения $\lambda_h(\varkappa)$ и собственные проекторы $P_h(\varkappa)$ голоморфны в точках вещественной оси, тогда как собственные нильпотенты $D_h(\varkappa)$ тождественно равны нулю*[1].

**Задача 6.2.** Если $T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}$, где $T$ и $T^{(1)}$ симметричны, то наименьшее собственное значение оператора $T(\varkappa)$ есть кусочно голоморфная вогнутая функция от $\varkappa$. [*Указание*: применить (I.6.79).]

**Замечание 6.3.** Теорема 6.1 не обобщается на случай двух и более параметров. Как видно из примера 5.12, собственные значения оператора $T(\varkappa_1, \varkappa_2)$, голоморфно зависящего от $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ и симметричного при вещественных $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$, не обязаны быть голоморфными для вещественных $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

**Замечание 6.4.** Теорема, аналогичная теореме 6.1, верна, если оператор $T(\varkappa)$ нормален для вещественных $\varkappa$ или, более общим образом, для всех точек $\varkappa$ некоторой кривой в $D_0$. Однако такая теорема не имеет большой практической ценности, так как условие нормальности $T(\varkappa)$ в точках заданной кривой не имеет в общем случае удобного выражения в терминах коэффициентов $T^{(n)}$ разложения (1.2).

Вычисление коэффициентов рядов теории возмущений, приведенное в п. 2, также упрощается в случае симметричных возмущений. Так как невозмущенный оператор $T$ симметричен, то все его собственные значения полупросты ($D = 0$) и поэтому применим процесс редукции, описанный в п. 2.3. Оператор $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$, определенный формулой (2.37), симметричен, так как $P(\varkappa)$ симметричен и коммутирует с $T(\varkappa)$. Таким образом, *в процессе редукции сохраняется симметричность* и поэтому процесс можно продолжать бесконечно. Расщепление собственных значений прекратится после конечного числа шагов, и когда это произойдет, мы получим собственные значения и собственные проекторы по формулам (2.5) и (2.3). Таким образом, *процесс редукции дает алгоритм для точного вычисления собственных значений и собственных проекторов в случае симметричного возмущения.*

**Замечание 6.5.** Нет общего критерия, позволяющего выяснить, на каком этапе процесса редукции прекратится расщепление собственных значений. Однако прием, основанный на соображе-

---

[1] См., однако, замечание 1.11.

ниях приводимости (см. замечание 2.4), полезен, особенно в случае симметричных возмущений. Так как невозмущенные собственные значения на каждом этапе процесса редукции автоматически полупросты, то расщепление прекратится на том шаге процесса, на котором невозмущенный собственный проектор окажется неприводимым относительно набора операторов $\{A\}$.

В приложениях набор $\{A\}$ часто оказывается *группой унитарных операторов*, относительно которой инвариантны операторы $T(\varkappa)$. Так как рассматриваемые собственные проекторы ортогональны, то проектор $P$ неприводим относительно $\{A\}$ тогда и только тогда, когда в пространстве $P\mathrm{H}$ нет отличного от него самого подпространства, инвариантного относительно всех унитарных операторов $A$.

**Замечание 6.6.** Общая теория несколько упрощается даже в том случае, когда лишь невозмущенный оператор симметричен или нормален. Например, все собственные значения $\lambda_h(\varkappa)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности нуля ввиду диагонализуемости оператора $T$ (теорема 2.3). Как было показано в п. 3.5, оценки радиусов и скорости сходимости рядов теории возмущений также упрощаются в том случае, когда невозмущенный оператор симметричен или нормален.

**Замечание 6.7.** Оценка (3.52) не улучшаема и в классе симметричных возмущений, так как оператор в примере 3.10 симметричен.

## 2. Ортонормированные семейства собственных векторов

Рассмотрим голоморфное симметричное семейство $T(\varkappa)$. Для каждого вещественного $\varkappa$ в $\mathrm{H}$ существует ортонормированный базис $\{\varphi_n(\varkappa)\}$, составленный из собственных векторов оператора $T(\varkappa)$ (см. (I.6.68)). В связи с этим возникает вопрос, *можно ли эти ортонормированные собственные векторы $\varphi_n(\varkappa)$ выбрать так, чтобы зависимость от $\varkappa$ была голоморфной.* Для вещественных $\varkappa$ ответ утвердительный.

Так как собственные значения $\lambda_h(\varkappa)$ и собственные проекторы $P_h(\varkappa)$ голоморфны в точках вещественной оси (теорема 6.1), то метод п. 4.5 можно применить для построения голоморфной трансформирующей функции $U(\varkappa)$, удовлетворяющей условию (4.30). Оказывается, что оператор $U(\varkappa)$ *унитарен при вещественных $\varkappa$*. Для доказательства этого факта напомним, что семейство $U(\varkappa)$ было построено как решение дифференциального уравнения $U' = Q(\varkappa)U$ с начальным условием $U(0) = 1$, где $Q(\varkappa)$ определяется формулой (4.33). Так как операторы $P_h(\varkappa)$ симметричны, то $P_h(\varkappa)^* = P_h(\bar{\varkappa})$, и то же самое верно для $P'_h(\varkappa)$. Отсюда следует, что семейство $Q(\varkappa)$ кососимметрично: $Q(\bar{\varkappa})^* = -Q(\varkappa)$, и $U(\bar{\varkappa})^*$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{d\varkappa} U(\bar{\varkappa})^* = -U(\bar{\varkappa})^* Q(\varkappa). \tag{6.3}$$

С другой стороны, $V(\varkappa) = U(\varkappa)^{-1}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $V' = -VQ(\varkappa)$ с начальным условием $V(0) = 1$. По теореме единственности имеем

$$U(\bar{\varkappa})^* = U(\varkappa)^{-1}. \tag{6.4}$$

Последнее равенство показывает, что $U(\varkappa)$ унитарен при вещественных $\varkappa$.

Отсюда следует, что базис $\varphi_{hk}(\varkappa) = U(\varkappa)\varphi_{hk}$ (ср. (4.31)) ортонормирован при вещественных $\varkappa$, если векторы $\varphi_{hk}$ образуют ортонормированный базис (существование последнего следует из симметричности оператора $T$). Следует отметить, что векторы $\varphi_{hk}(\varkappa)$ суть (не обобщенные, а настоящие) собственные векторы оператора $T(\varkappa)$, так как $T(\varkappa)$ диагонализуем. Существование такого ортонормированного базиса, гладко зависящего от $\varkappa$,— один из наиболее замечательных результатов аналитической теории возмущений симметричных операторов. Ниже мы увидим, что аналитичность здесь существенна.

## 3. Непрерывность и дифференцируемость

Рассмотрим теперь неаналитические возмущения операторов в гильбертовом пространстве **H**. Пусть оператор $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$ непрерывно зависит от вещественного параметра $\varkappa$. Собственные значения оператора $T(\varkappa)$ зависят от $\varkappa$ непрерывно, причем существуют непрерывные функции $\mu_n(\varkappa)$, $n = 1, \ldots, N$, представляющие полный набор собственных значений $T(\varkappa)$ (см. п. 5.2). В том частном случае, когда операторы $T(\varkappa)$ симметричны, ничего нового по сравнению с общей теорией нет, за исключением того, что функции $\mu_n(\varkappa)$ принимают вещественные значения и поэтому можно использовать упорядочение (5.4).

Новый факт обнаруживается при переходе к дифференцируемым семействам симметричных операторов.

**Теорема 6.8** [1]. *Предположим, что семейство $T(\varkappa)$ симметрично и непрерывно дифференцируемо на интервале I вещественной оси. Тогда существуют непрерывно дифференцируемые на I функции $\mu_n(\varkappa)$, $n = 1, \ldots, N$, которые представляют полный набор собственных значений операторов $T(\varkappa)$.*

---

[1] Эта теорема принадлежит Реллиху [8]. Напомним, что она перестает быть верной для общих (несимметричных) возмущений (см. замечание 5.8).

Доказательство. Предлагаемое доказательство довольно сложно[1]). Фиксируем некоторое значение $\varkappa$; не ограничивая общности, можно считать, что $\varkappa = 0$. Пусть $\lambda$ — одно из собственных значений оператора $T = T(0)$, $m$ — его кратность и $P$ — соответствующий собственный проектор. Так как $\lambda$ — полупростое собственное значение, то производные в точке $\varkappa = 0$ от собственных значений оператора $T(\varkappa)$, принадлежащих $\lambda$-группе и учитываемых с кратностями, образуют полный набор собственных значений оператора $PT'(0)P$ в подпространстве $\mathbf{M} = P\mathbf{X}$ (теорема 5.4). Пусть $\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p$ — *различные* собственные значения оператора $PT'(0)P$ в $\mathbf{M}$, а $P_1, \ldots, P_p$ — соответствующие собственные проекторы. Подпространства $M_j = P_j\mathbf{M}$ суть подпространства в $\mathbf{M}$. Как следует из предыдущего замечания, $\lambda$-группа собственных значений оператора $T(\varkappa)$ при малых $|\varkappa| \neq 0$ делится на $p$ подгрупп, а именно на $\lambda + \varkappa\lambda'_j$-группы, $j = 1, \ldots, p$. Так как каждая из этих подгрупп отделена от других собственных значений, то можно определить для них тотальные проекторы $P(\varkappa)$. Оператор $P_j(\varkappa)$ служит в то же время тотальным проектором $\lambda'_j$-группы собственных значений оператора $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)$, определенного формулой (5.14). Как было показано в п. 5.4, функция $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)$ непрерывна в окрестности нуля (непрерывность при $\varkappa \neq 0$ очевидна). По теореме 5.1 отсюда следует, что функция $P_j(\varkappa)$ непрерывна в окрестности нуля, и то же самое можно сказать относительно функции

$$T_j(\varkappa) = P_j(\varkappa)\, T'(\varkappa)\, P_j(\varkappa), \tag{6.5}$$

так как функция $T'(\varkappa) = dT(\varkappa)/d\varkappa$ непрерывна по предположению.

Вообще говоря, $\lambda + \varkappa\lambda'_j$-группа оператора $T(\varkappa)$ состоит из нескольких различных собственных значений, число которых не обязано непрерывно зависеть от $\varkappa$ ни в какой окрестности нуля.

Пусть $\lambda(\varkappa_0)$ — одно из этих собственных значений, $\varkappa_0 \neq 0$, а $Q(\varkappa_0)$ — соответствующий собственный проектор. Собственное значение $\lambda(\varkappa_0)$ может расщепиться при малых $|\varkappa - \varkappa_0| \neq 0$, однако производная любого из возникающих собственных значений должна совпадать с собственным значением оператора $Q(\varkappa_0)\, T'(\varkappa_0)\, Q(\varkappa_0)$ в подпространстве $Q(\varkappa_0)\,\mathbf{H}$ (по теореме 5.4). Так как $\lambda(\varkappa_0)$ принадлежит $\lambda + \varkappa\lambda'_j$-группе, то $Q(\varkappa_0)\,\mathbf{H} \subset P_j(\varkappa_0)\,\mathbf{H}$ и поэтому $Q(\varkappa_0)\, T'(\varkappa_0)\, Q(\varkappa_0) = Q(\varkappa_0)\, T_j(\varkappa_0)\, Q(\varkappa_0)$. Итак, рассматриваемые производные суть собственные значения ортогональной проекции оператора $T_j(\varkappa_0)$ в смысле п. I.6.10 на подпространство $\mathbf{M}_j(\varkappa_0) = P_j(\varkappa_0)\,\mathbf{H}$. Так как оператор $T_j(\varkappa_0)$ симметричен, то из теоремы I.6.46 следует, что эти собственные

---

[1]) Первоначальное доказательство Реллиха еще сложнее.

значения лежат между наибольшим и наименьшим собственными значениями оператора $T_j(\varkappa_0)$ в подпространстве $\mathrm{M}_j(\varkappa_0)$. Ввиду непрерывности семейства $T_j(\varkappa)$ собственные значения оператора $T_j(\varkappa_0)$ в $\mathrm{M}_j(\varkappa_0)$ стремятся при $\varkappa_0 \to 0$ к собственным значениям оператора $P_jT'(0)P_j$ в $\mathrm{M}_j$, т. е. к числам $\lambda'_j$. Отсюда видно, что производные собственных значений оператора $T(\varkappa)$, принадлежащих $\lambda + \varkappa\lambda'_j$-группе, стремятся к $\lambda'_j$ при $\varkappa \to 0$. Этим доказана непрерывность производных собственных значений $\mu_n(\varkappa)$, построенных в теореме 5.6. (В этом доказательстве симметричность оператора $T(\varkappa)$ существенна для применимости теоремы I.6.46. Это объясняет, почему результат, аналогичный теореме 6.8, неверен в общем случае.)

**Замечание 6.9.** Если отбросить предположение об аналитичности возмущения, то, так же как и в общем случае, собственные проекторы (или собственные векторы) обладают более слабыми свойствами непрерывности даже в случае симметричных возмущений. Пример 5.3 хорошо иллюстрирует это; функция $T(\varkappa)$ там бесконечно дифференцируема по $\varkappa$ и симметрична (относительно обычного скалярного произведения в $C^2$), однако не существует непрерывного в нуле семейства собственных векторов оператора $T(\varkappa)$.

## 4. Собственные значения как функции симметричного оператора

Как и в п. 5.8, собственные значения симметричного оператора $T$ можно рассматривать как функции самого оператора. Эти функции непрерывны в указанном в п. 5.8 смысле. Однако теперь ситуация проще, так как при желании можно считать полный набор собственных значений *упорядоченным* по возрастанию:

$$\mu_1[T] \leqslant \mu_2[T] \leqslant \ldots \leqslant \mu_N[T]. \tag{6.6}$$

Такое упорядочение дает $N$ вещественных функций, определенных на множестве всех симметричных операторов в $\mathrm{H}$. Непрерывность собственных значений означает теперь непрерывность функций $\mu_n[T]$ (из $T' \to T$ следует $\mu_n[T'] \to \mu_n[T]$).

Простое упорядочение (6.6) собственных значений не всегда удобно, так как функции $\mu_n[T]$ могут оказаться недифференцируемыми. В этом проще всего убедиться, рассматривая собственное значение $\mu_n[T + \varkappa T']$ как функцию вещественной переменной $\varkappa$ (при этом операторы $T$ и $T'$ предполагаются симметричными). По теореме 6.1 собственные значения оператора $T + \varkappa T'$ представляются голоморфными функциями от $\varkappa$. Графики этих функций могут пересекаться при некоторых значениях $\varkappa$ (исключительные точки). В таких точках график функции $\mu_n[T + \varkappa T']$ имеет *излом* при переходе с одной гладкой кривой на другую.

Другими словами, функция $\mu_n\,[T + \varkappa T']$ непрерывна, но не обязательно дифференцируема. Однако каждая из этих функций *кусочно голоморфна*, так как на каждом конечном интервале может быть лишь конечное число исключительных точек.

Таким образом, иногда удобно по-прежнему рассматривать полный набор собственных значений $\mathfrak{S}\,[T]$ как неупорядоченный набор. Из результатов предыдущего пункта следует, что набор $\mathfrak{S}\,[T]$ *непрерывно дифференцируем по всем направлениям*. Однако дифференцируем набор $\mathfrak{S}\,[T]$ лишь для тех $T$, которые имеют $N$ различных собственных значений (см. снова пример 5.12). В окрестности таких точек функции (6.6) не только дифференцируемы, но даже голоморфны по $T$.

## 5. Приложения. Теорема Лидского

Теория возмущений интересуется в первую очередь тем, что приходит при малых изменениях рассматриваемых величин. Здесь мы рассмотрим ряд задач, касающихся поведения собственных значений, когда оператор испытывает *конечное* возмущение[1]. Более точно, нас будет интересовать связь между собственными значениями двух симметричных операторов $A$ и $B$ в зависимости от их разности $C = B - A$.

Обозначим через $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$, $n = 1, \ldots, N$, расположенные в неубывающем порядке полные наборы собственных значений операторов $A$, $B$ и $C$ соответственно. Положим

$$T\,(\varkappa) = A + \varkappa C, \quad 0 \leqslant \varkappa \leqslant 1, \tag{6.7}$$

и обозначим через $\mu_n\,(\varkappa)$, $n = 1, \ldots, N$, полный набор собственных значений в неубывающем порядке. Как показано в предыдущем параграфе, функции $\mu_n\,(\varkappa)$ непрерывны и кусочно голоморфны, причем $\mu_n\,(0) = \alpha_n$ и $\mu_n\,(1) = \beta_n$. На интервале $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$ находится лишь конечное число исключительных точек, в которых производные функций $\mu_n\,(\varkappa)$ имеют разрывы.

Согласно сказанному в п. 2, для каждого $\varkappa$ можно выбрать полное ортонормированное семейство $\{\varphi_n\,(\varkappa)\}$, состоящее из собственных векторов оператора $T\,(\varkappa)$:

$$(T\,(\varkappa) - \mu_n\,(\varkappa))\,\varphi_n\,(\varkappa) = 0, \quad n = 1, \ldots, N, \tag{6.8}$$

и притом так, чтобы все другие функции $\varphi_n\,(\varkappa)$ были кусочно голоморфны. Функции $\varphi_n\,(\varkappa)$ могут иметь разрывы в исключительных точках; причиной этого является несколько искусственное упорядочение собственных значений $\mu_n\,(\varkappa)$. Если $\varkappa$ — неисключи-

---

[1] По поводу более общей теории конечных изменений собственных значений и собственных векторов см. Дэвис [1].

тельная точка, то дифференцирование соотношения (6.8) дает

$$(C - \mu_n'(\varkappa))\,\varphi_n(\varkappa) + (T(\varkappa) - \mu_n(\varkappa))\,\varphi_n'(\varkappa) = 0. \qquad (6.9)$$

Умножая обе части этого равенства скалярно на $\varphi_n(\varkappa)$ и используя симметричность $T(\varkappa)$ и условие нормировки $\|\varphi_n(\varkappa)\| = 1$, получаем

$$\mu_n'(\varkappa) = (C\varphi_n(\varkappa),\ \varphi_n(\varkappa)). \qquad (6.10)$$

Так как функции $\mu_n(\varkappa)$ непрерывны, а $\varphi_n(\varkappa)$ кусочно непрерывны, то интегрирование равенства (6.10) дает

$$\beta_n - \alpha_n = \mu_n(1) - \mu_n(0) = \int\limits_0^1 (C\varphi_n(\varkappa),\ \varphi_n(\varkappa))\,d\varkappa. \qquad (6.11)$$

Обозначим через $\{x_j\}$ ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов оператора $C$:

$$Cx_n = \gamma_n x_n, \quad n = 1, \ldots, N. \qquad (6.12)$$

Имеем

$$(C\varphi_n(\varkappa),\ \varphi_n(\varkappa)) = \sum_j (C\varphi_n(\varkappa),\ x_j)(x_j,\ \varphi_n(\varkappa)) = \sum_j \gamma_j |(\varphi_n(\varkappa),\ x_j)|^2,$$

и поэтому соотношение (6.11) принимает вид

$$\beta_n - \alpha_n = \sum_j \sigma_{nj}\gamma_j, \qquad (6.13)$$

где

$$\sigma_{nj} = \int\limits_0^1 |(\varphi_n(\varkappa),\ x_j)|^2\,d\varkappa. \qquad (6.14)$$

Из свойства ортонормированности систем $\{\varphi_n(\varkappa)\}$ и $\{x_j\}$ следует, что

$$\sum_j \sigma_{nj} = 1, \quad \sum_n \sigma_{nj} = 1, \quad \sigma_{nj} \geqslant 0. \qquad (6.15)$$

Как хорошо известно из теории матриц, квадратная матрица $(\sigma_{nj})$, удовлетворяющая условиям (6.15), принадлежит выпуклой оболочке множества всех матриц перестановок [1]. Таким образом, соотношение (6.13) приводит к следующей теореме, принадлежащей Лидскому [1].

**Теорема 6.10.** *Пусть $A$, $B$, $C$, $\alpha_n$, $\beta_n$, $\gamma_n$ те же, что и выше. Вектор $(\beta_1 - \alpha_1, \ldots, \beta_N - \alpha_N)$ принадлежит выпуклой оболочке векторов, получающихся из вектора $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ в результате всевозможных перестановок его координат.*

---

[1] См. Биркгоф [1]. Каждой перестановке $j \to \pi(j)$, $j = 1, \ldots, n$, ставится в соответствие матрица $(\sigma_{jk})$ этой перестановки следующим образом: $\sigma_{jk} = 1$, если $k = \pi(j)$, и $\sigma_{jk} = 0$ в остальных случаях.

Другим следствием соотношения (6.13) является

**Теорема 6.11.** *Для любой выпуклой функции* $\Phi(t)$ *вещественной переменной* $t$ *верно следующее неравенство:*

$$\sum_n \Phi(\beta_n-\alpha_n) \leqslant \sum_n \Phi(\gamma_n). \tag{6.16}$$

Доказательство немедленно следует из (6.13), (6.15) и выпуклости функции $\Phi$, так как

$$\Phi(\beta_n-\alpha_n)=\Phi\left(\sum \sigma_{nj}\gamma_j\right) \leqslant \sum \sigma_{nj}\Phi(\gamma_j).$$

**Пример 6.12.** Если $\Phi(t) = |t|^p$, $p \geqslant 1$, то неравенство (6.16) дает[1])

$$\sum_n |\beta_n-\alpha_n|^p \leqslant \sum |\gamma_n|^p, \quad p \geqslant 1. \tag{6.17}$$

---

[1]) Гофман и Виландт [1] показали, что неравенство (6.17) верно при $p = 2$ и в том случае, когда $A$ и $B$ — нормальные операторы, надо лишь заменить правую часть на $\operatorname{tr} C^*C$ и выбрать подходящую нумерацию собственных чисел $\alpha_n$. Отметим, что оператор $C = A - B$ не обязан быть нормальным, даже если $A$ и $B$ — нормальные операторы.

## ГЛАВА III

# ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ОПЕРАТОРОВ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Эта глава снова вводная; в ней излагаются те разделы теории операторов в банаховых пространствах, которые потребуются для построения теории возмущений в последующих главах книги. Материал этой главы вполне элементарен, изложение довольно полное, в ряде случаев делаются ссылки на первую главу — все это позволяет читать ее без предварительного знания теории банаховых пространств. Эта глава может служить также введением в теорию операторов. Чтобы объем главы не выходил за разумные пределы, мы сформулировали без доказательства некоторые фундаментальные теоремы (как, например, теорему Бэра о категориях и теорему Хана — Банаха о продолжении линейного функционала)[1].

Особое внимание уделяется спектральной теории операторов и, в частности, изучению резольвенты. Результаты теории, являющиеся характерными для операторов в гильбертовом пространстве, в эту главу не включаются и будут детально изложены в гл. V и VI.

## § 1. Банаховы пространства

### 1. Нормированные пространства

С этого момента нас будут в основном интересовать бесконечномерные пространства. Поскольку в таком пространстве не существует конечного базиса, в нем невозможно ввести понятие сходимости векторов столь простым способом, как в конечномерном пространстве. Для наших целей с самого начала удобно ввести понятие *нормированного* (*векторного*) *пространства*.

Нормированное пространство — это векторное пространство $X$, в котором определена функция $\|\cdot\|$, обладающая свойствами нормы (I.1.18). Сходимость последовательности векторов $\{u_n\}$ из $X$ к вектору $u \in X$ можно определить предельным соотношением $\| u_n - u \| \to 0$. Легко видеть, что предел $u$ всякий раз, когда он существует, определен однозначно последовательностью $\{u_n\}$. Как было показано в п. I.1.14, каждое конечномерное век-

---

[1] Перечислим основные учебники по теории операторов в банаховых пространствах: Банах [[1]], Дьёдонне [[1]], Данфорд и Шварц [[1]], Голдберг [[1]], Хилле и Филлипс [[1]], Лорх [[1]], Люстерник и Соболев [[1]], Рисс и Секефальви-Надь [[1]], С. Л. Соболев [[1]], Тейлор [[1]], Иосида [[1]], Заанен [[1]].

торное пространство можно превратить в нормированное пространство.

Всюду в дальнейшем рассматриваются только нормированные пространства. Конечномерные пространства не исключаются из рассмотрения, однако мы всегда будем предполагать, что $\dim X > 0$.

**Пример 1.1.** Пусть $X$ — множество всех последовательностей $u = \{\xi_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, комплексных чисел. Множество $X$ является бесконечномерным векторным пространством относительно обычных линейных операций. Обозначим через $\mathrm{m}$ подмножество в $X$, состоящее из всех ограниченных последовательностей $u = \{\xi_k\}$. Это линейное подпространство в $X$ и, следовательно, $\mathrm{m}$ само является векторным пространством. Определим норму вектора $u \in \mathrm{m}$ равенством

$$\| u \| = \| u \|_{\mathrm{m}} = \| u \|_\infty = \sup_k | \xi_k |. \tag{1.1}$$

Нетрудно проверить, что функция $\| u \|$ удовлетворяет условиям (I.1.18), и потому $\mathrm{m}$ — нормированное пространство. Норму (1.1) можно рассматривать как бесконечномерный аналог нормы (I.1.15). Обозначим через $\mathrm{l}$ множество всех последовательностей $u = (\xi_k) \in X$, таких, что $\sum_k | \xi_k | < \infty$, и положим

$$\| u \| = \| u \|_{\mathrm{l}} = \| u \|_1 = \sum_k | \xi_k |. \tag{1.2}$$

Пространство $\mathrm{l}$ является нормированным пространством с нормой $\| u \|_{\mathrm{l}}$. Более общо, можно определить нормированное пространство $\mathrm{l}^p$, введя норму [1]

$$\| u \| = \| u \|_{\mathrm{l}^p} = \| u \|_p = \Big(\sum_k | \xi_k |^p\Big)^{1/p}. \tag{1.3}$$

Пространство $\mathrm{m}$ можно рассматривать как предельный случай пространств $\mathrm{l}^p$ при $p \to \infty$, и потому его обозначают через $\mathrm{l}^\infty$. Пространство $\mathrm{l}^p$ является собственным подмножеством $\mathrm{l}^q$, если $p < q$.

**Пример 1.2.** Наиболее важными примерами нормированных пространств являются *функциональные пространства.* Простейшим примером такого пространства является пространство $\mathrm{C}\,[a, b]$ всех комплексных непрерывных функций $u = u(x)$ на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$ [2] вещественной оси (см. пример I.1.2), снабженное нормой

$$\| u \| = \| u \|_{\mathrm{C}\,[a,\, b]} = \| u \|_\infty = \max_{a \leq x \leq b} | u(x) |. \tag{1.4}$$

Вообще множество $\mathrm{C}\,(E)$ всех непрерывных функций $u(x) = u(x_1, \ldots, x_m)$ на компактном подмножестве $E$ $m$-мерного пространства $\mathrm{R}^m$ (или, более общо, на компактном топологическом пространстве $E$) является нормирован-

---

[1] Неравенство треугольника для нормы (1.3) называется неравенством Минковского. Доказательство этого неравенства, а также доказательство неравенства Гёльдера можно найти в любом учебнике по вещественному анализу; см., например, Ройден [[1]] или Харди, Литлвуд и Пойа [[1]].

[2] Замкнутый интервал мы обозначаем через $[a, b]$, открытый интервал через $(a, b)$ и полуоткрытый интервал через $[a, b)$ или $(a, b]$.

ным пространством, если норму определить следующим образом:

$$\| u \| = \| u \|_{C(E)} = \| u \|_\infty = \max_{x \in E} | u(x) |. \tag{1.5}$$

**Пример 1.3.** Можно ввести и другие нормы в $C[a, b]$, например

$$\| u \| = \| u \|_{L^p} = \| u \|_p = \left( \int | u(x) |^p \, dx \right)^{1/p}, \quad p \geqslant 1. \tag{1.6}$$

Введение такой нормы превращает $C[a, b]$ в другое нормированное пространство. Норму (1.6) можно распространить на более широкий класс функций. Обозначим через $L^p(a, b)$ пространство всех измеримых по Лебегу комплексных функций $u = u(x)$ на конечном или бесконечном интервале $(a, b)$, для которых интеграл (1.6) конечен. Нетрудно показать, что $L^p(a, b)$ является нормированным пространством относительно обычных линейных операций и нормы (1.6). Отметим, что в $L^p(a, b)$ любые две функции $u$ и $v$ отождествляются всякий раз, когда они *эквивалентны*, т. е. совпадают почти всюду на $(a, b)$; именно в силу этого соглашения выполнено первое условие в (I.1.18)[1].

Вообще для любого измеримого подмножества E в $R^m$ множество $L^p(E)$ всех измеримых на E функций $u(x)$ с конечным интегралом (1.6) является нормированным пространством относительно нормы (1.6). Как и выше, эквивалентные функции должны быть отождествлены. В пределе при $p \to \infty$ пространство $L^p(E)$ становится пространством $L^\infty(E) = M(E)$, состоящим из всех *существенно ограниченных* функций на E с нормой

$$\| u \| = \| u \|_{M(E)} = \| u \|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in E} | u(x) |. \tag{1.7}$$

Другими словами, $\| u \|_\infty$ есть наименьшее число $M$, такое, что $| u(x) | \leqslant M$ почти всюду в E.

Точно так же можно определить пространство $L^p(E, d\mu)$ с нормой $\left( \int\limits_E | u(x) |^p \, d\mu(x) \right)^{1/p}$; здесь $(E, \mu)$ — пространство с мерой[2].

**Пример 1.4.** Пусть $C'[a, b]$ — множество всех непрерывно дифференцируемых функций на конечном интервале $[a, b]$. Это нормированное пространство с нормой

$$\| u \| = \| u \|_\infty + \| u' \|_\infty, \tag{1.8}$$

где норма $\| u \|_\infty$ определена формулой (1.4) и $u' = du/dx$.

**Замечание 1.5.** *Неравенства* Гёльдера[3]. Если числа $p \geqslant 1$ и $q \geqslant 1$ связаны соотношением $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (допускаются бесконечные значения $p$

---

[1] В этом смысле пространство $L^p$ скорее является множеством классов эквивалентных функций, чем множеством самих функций. Однако принято представлять элемент пространства $L^p$ функцией, учитывая сделанные выше отождествления.

[2] Рассматривая функциональные пространства с интегральной нормой, мы предполагаем, что читатель знаком с основными результатами вещественного анализа, включая интеграл Лебега (по этому поводу мы отсылаем читателя к стандартным учебникам; см., например, Ройден [1]). Однако в большинстве случаев эти предварительные сведения используются лишь в примерах; в основном тексте книги они не используются.

[3] Доказательство см. в книге Ройдена [1], стр. 97.

или $q$), то

$$\left|\sum_k \xi_k\eta_k\right| \leqslant \| u \|_p \| v \|_q, \quad u=(\xi_k), \quad v=(\eta_k), \tag{1.9}$$

где нормы $\| u \|_p$ и $\| v \|_q$ определены формулой (1.3), и

$$\left|\int u(x)\, v(x)\, dx\right| \leqslant \| u \|_p \| v \|_q, \tag{1.10}$$

где $\| u_p \|$ и $\| v_q \|$ определены формулой (1.6).

**Задача 1.6.** Для норм $\| \;\|_p$, определенных формулой (1.6), справедливы неравенства

$$\| uv \|_s \leqslant \| u \|_p \| v \|_q, \quad \text{если} \quad s^{-1} = p^{-1} + q^{-1}, \tag{1.11}$$

$$\| uvw \|_s \leqslant \| u \|_p \| v \|_q \| w \|_r, \quad \text{если} \quad s^{-1} = p^{-1} + q^{-1} + v^{-1}, \tag{1.12}$$

и т. д. Аналогичные неравенства верны и для нормы $\| \;\|_p$, определенной в (1.3). [*Указание*: применить неравенство (1.10) к функции $| u \cdot v |^s$ и т. д.]

## 2. Банаховы пространства

Сходимость $u_n \to u$ в нормированном пространстве X была определена предельным соотношением $\| u_n - u \| \to 0$. Так же, как и в случае конечномерного пространства, из сходимости последовательности следует, что она фундаментальна, т. е. $\| u_n - u_m \| \to 0$ при $n, m \to \infty$ (см. (I.1.23)). Однако в бесконечномерном пространстве X *последовательность Коши* (*фундаментальная последовательность*) не обязана иметь предел $u \in$ X. Нормированное пространство, в котором каждая последовательность Коши имеет предел, называется *полным*. Полное нормированное пространство называется *банаховым*. Понятие банахова пространства чрезвычайно полезно, так как, с одной стороны, полнота необходима для дальнейшего развития теории нормированных пространств, а, с другой стороны, нормированные пространства, возникающие в приложениях, как правило, обладают этим свойством [1]. Напомним, что конечномерное нормированное пространство всегда полно (см. п. I.1.4).

**Пример 1.7.** В пространстве C (E) (см. пример 1.2) сходимость $u_n \to u$ означает *равномерную сходимость* $u_n(x)$ к $u(x)$ на E. Условие Коши (I.1.23) означает, что $| u_n(x) - u_m(x) | \to 0$ равномерно на E. Хорошо известно [2], что отсюда следует равномерная сходимость $u_n(x)$ к непрерывной функции $u(x)$. Таким образом, C (E) полно.

---

[1] Кроме того, каждое нормированное пространство X можно *пополнить*. Это означает, что X можно отождествить с линейным подпространством полного нормированного пространства $\widetilde{\mathrm{X}}$. Более того, $\widetilde{\mathrm{X}}$ можно выбрать так, что X будет плотно в $\widetilde{\mathrm{X}}$. Пополнение $\widetilde{\mathrm{X}}$ строится как множество классов эквивалентных фундаментальных последовательностей в X; две последовательности Коши по определению эквивалентны, если $\lim (u_n - v_n) = 0$. Подробности см. в книге Иосиды [[1]].

[2] См., например, Кнопп [[1]], стр. 71.

**Пример 1.8.** Пространства $l^p$ и $L^p(E)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (см. примеры 1.1 1.3), являются полными. Доказательство мы опускаем [1].

Большая часть топологических понятий, введенных в § I.15 для конечномерных пространств, имеет смысл и для банаховых пространств. Здесь мы укажем лишь некоторые модификации и сделаем ряд дополнительных замечаний.

Линейное подпространство M банахова пространства X не обязательно замкнуто. Замкнутое линейное подпространство M в X само является банаховым пространством. Замыкание линейного подпространства есть замкнутое линейное подпространство.

**Лемма 1.9.** *Если* M *— замкнутое линейное подпространство, то линейное подпространство* M′, *порожденное подпространством* M *и конечным набором векторов* $u_1, \ldots, u_m$, *замкнуто.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $m = 1$; утверждение леммы выводится из этого частного утверждения по индукции. Если $u_1 \in$ M, то M′ = M и поэтому M′ замкнуто. Если $u_1 \notin$ M, то $\operatorname{dist}(u_1, \mathrm{M}) = d > 0$, так как M замкнуто. Подпространство M′ состоит из векторов вида $u' = \xi u_1 + v$, $v \in \mathrm{M}$. Имеет место неравенство

$$|\xi| \leqslant \|u'\| / d. \tag{1.13}$$

В самом деле, $\|\xi^{-1}u'\| = \|u_1 + \xi^{-1}v\| \geqslant d$, если $\xi \neq 0$, если же $\xi = 0$, то неравенство (1.13) очевидно.

Предположим, что $u'_n \in \mathrm{M}'$ и $u'_n \to u'$ при $n \to \infty$; требуется доказать, что $u' \in \mathrm{M}'$. Пусть $u'_n = \xi_n u_1 + v_n$, $v_n \in \mathrm{M}$. Применение неравенства (1.13) к вектору $u'_n - u'_m$ дает $|\xi_n - \xi_m| \leqslant \|u'_n - u'_m\| / d \to 0$. Следовательно, $\xi_n$ стремится к некоторому пределу $\xi$ и $v_n = u'_n - \xi_n u_1 \to u' - \xi u_1$. Так как M замкнуто и $v_n \in \mathrm{M}$, то $v = u' - \xi u_1 \in \mathrm{M}$. Итак, $u' = \xi u_1 + v \in \mathrm{M}'$, что и требовалось доказать.

Для любого подмножества S в X существует *наименьшее замкнутое линейное подпространство*, содержащее S (т. е. замкнутое линейное подпространство $\mathrm{M}' \supset \mathrm{S}$). Такое подпространство совпадает с замыканием линейной оболочки множества S и называется *замкнутым линейным подпространством, порожденным множеством* S, или просто *замкнутой линейной оболочкой* множества S.

**Пример 1.10.** В пространстве $l^p$ векторы $(\xi_k)$ с нулевой первой координатой $\xi_1$ образуют замкнутое подпространство. В $l^\infty$ множество c тех векторов $(\xi_k)$, для которых существует предел $\lim \xi_k = \xi$, является замкнутым подпространством. Подмножество $c_0$ в c, состоящее из всех векторов $(\xi_k)$,

---

[1] См. любой учебник по вещественному анализу; например, Ройден [1].

таких, что $\lim \xi_k = 0$, есть замкнутое подпространство в $l^\infty$ и с. Примеры замкнутых линейных подпространств в $C[a, b]$: а) множество функций $u(x)$, таких, что $u(a) = 0$; б) множество функций, обращающихся в нуль в точках $a$ и $b$. Само $C[a, b]$ можно рассматривать как замкнутое линейное подпространство в $L^\infty[a, b]$.

Подмножество $S$ *всюду плотно* в $X$, если замыкание $\bar{S}$ совпадает с $X$. В этом случае каждый вектор $u \in X$ можно *аппроксимировать* элементом из $S$ в том смысле, что для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $v \in S$, такой, что $\| u - v \| < \varepsilon$. Более общо, подмножество $S_1$ *плотно относительно* $S_2$, если $S_2 \subset \bar{S}_1$ ($S_1$ плотно *в* $S_2$, если, кроме того, $S_1 \subset S_2$). Тогда каждый вектор $u \in S_2$ можно аппроксимировать элементами из $S_1$.

Если $S_1$ плотно относительно $S_2$ и $S_2$ плотно относительно $S_3$, то $S_1$ плотно относительно $S_3$.

**Пример 1.11.** В пространстве $C[a, b]$, где интервал $[a, b]$ конечен, множество всех полиномов всюду плотно (теорема Вейерштрасса) [1]. То же самое верно для пространства $L^p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$. В $L^p(a, b)$ (интервал не обязательно конечный) всюду плотным является множество $C_0^\infty(a, b)$ всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем [2]. Если $E$ — открытое множество в $R^m$, то множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в $E$ всюду плотно в $L^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$ [3].

В отличие от конечномерного нормированного пространства бесконечномерное банахово пространство $X$ не является локально компактным (см. п. I.1.5). Таким образом, в $X$ существует ограниченная последовательность $\{u_n\}$, не содержащая сходящихся подпоследовательностей. Последовательность $\{u_n\}$ будет обладать этим свойством, если

$$\| u_n \| = 1, \quad \| u_n - u_m \| = 1 \quad \text{при} \quad n \neq m. \tag{1.14}$$

Такую последовательность можно построить по индукции. Предположим, что элементы $u_1, \ldots, u_n$ уже построены; обозначим через $M_n$ их линейную оболочку. Как вытекает из следующей ниже леммы 1.12, существует вектор $u \in X$ такой, что $\| u \| = 1$ и $\operatorname{dist}(u, M_n) = 1$. Положим $u_{n+1} = u$.

**Лемма 1.12.** *Для любого замкнутого линейного подпространства* $M$ *в* $X$, $M \neq X$, *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует вектор* $u \in X$ *такой, что* $\| u \| = 1$ *и* $\operatorname{dist}(u, M) \geqslant 1 - \varepsilon$. *Это утверждение верно и для* $\varepsilon = 0$, *если* $\dim M < \infty$.

---

[1] См., например, Ройден [[1]], стр. 150.

[2] Функция имеет *компактный носитель*, если она обращается в нуль вне компактного множества. Таким образом, $u \in C_0^\infty(a, b)$, если существуют все производные $d^n u / dx^n$ и $u(x) = 0$ вне замкнутого интервала $[a', b'] \subset (a, b)$, где $a'$ и $b'$ зависят от $u$.

[3] Относительно доказательства см., например, Соболев [[1]], стр. 13.

Доказательство. Существует вектор $u_0 \in X$, не принадлежащий M, и потому dist $(u, M) = d > 0$. Найдется вектор $v_0 \in M$, такой, что $\| u_0 - v_0 \| \leqslant d/(1 - \varepsilon)$. Положим $u_1 = u_0 - v_0$. Тогда $\| u_1 \| \leqslant d/(1 - \varepsilon)$ и

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(u_1, M) &= \inf_{v \in M} \| u_1 - v \| = \inf_{v \in M} \| u_0 - v \| = \\ &= \operatorname{dist}(u_0, M) = d \geqslant (1 - \varepsilon) \| u_1 \|.\end{aligned}$$

Искомый вектор $u$ получится нормировкой вектора $u_1 : u = u_1 / \| u_1 \|$. Если M конечномерно, рассмотрим подпространство $X_0$, порожденное M и вектором $u_0$. Применяя доказанную часть леммы к подпространству M линейного подпространства $X_0$, построим последовательность $u_n \in X_0$, такую, что $\| u_n \| = 1$ и dist $(u_n, M) \geqslant 1 - n^{-1}$. Так как $\dim X_0 < \infty$, то $X_0$ локально компактно, и поэтому $\{u_n\}$ обладает сходящейся подпоследовательностью. Нетрудно видеть, что ее предел $u$ удовлетворяет условиям $\| u \| = 1$ и dist $(u, M) = 1$.

Подмножество S в X называется *фундаментальным*, если замкнутая линейная оболочка S совпадает с X (другими словами, если линейная оболочка S всюду плотна в X). Множество S *сепарабельно*, если оно содержит счетное подмножество, плотное в S. Для *сепарабельности* X достаточно, чтобы X содержало счетное фундаментальное подмножество S′, так как множество всех линейных комбинаций элементов из S′ с *рациональными* коэффициентами счетно и всюду плотно в X. Подмножество сепарабельного множества само сепарабельно [1].

**Пример 1.13.** Пространство C $[a, b]$ сепарабельно, так как из теоремы Вейерштрасса следует, что множество одночленов $u_n(x) = x^n$, $n = 0, 1, \ldots$, фундаментально в C$[a, b]$ (см. пример 1.11). Пространство $l^p$ сепарабельно, если $1 \leqslant p < \infty$. Канонический базис, состоящий из векторов $u_n = (\delta_{nk})$, $n = 1, 2, \ldots$, фундаментален в $l^p$. Пространство $L^p(a, b)$ также сепарабельно при $1 \leqslant p < \infty$. Множество функций $u_{(a', b')}(x)$, которые равны 1 на $(a', b')$ и нулю в остальных точках, фундаментально, когда $a'$ и $b'$ пробегают все рациональные числа в $(a, b)$ [2]. Аналогично, $L^p(R^m)$ сепарабельно при $1 \leqslant p < \infty$. Отсюда следует, что $L^p(E)$ также сепарабельно, если E — измеримое подмножество в $R^m$, так как это пространство можно рассматривать как подпространство в $L^p(R^m)$, состоящее из всех функций, обращающихся в нуль вне E.

Важным следствием полноты банахова пространства является теорема Бэра о категориях [3].

**Теорема 1.14.** *Если X является объединением счетного числа замкнутых подмножеств $S_n$, $n = 1, 2, \ldots$, то по крайней мере одно из этих множеств содержит шар.*

---

[1] См. Данфорд и Шварц ⟦1⟧.

[2] Это следует из свойств интеграла Лебега; см. Ройден ⟦1⟧.

[3] См., например, Ройден ⟦1⟧, стр. 121, или любой другой учебник по функциональному анализу.

Несмотря на существенные различия в топологической структуре банаховых и конечномерных пространств, большая часть сформулированных в п. I.1.6 и п. I.1.7 результатов относительно последовательностей, рядов и вектор-функций верна и для банаховых пространств. Эти результаты мы будем использовать в дальнейшем без каких бы то ни было оговорок. Следует отметить, что полнота пространства X является здесь существенной. Например, она используется при доказательстве существования интеграла $\int u(t)\,dt$ непрерывной вектор-функции $u(t)$ и суммы абсолютно сходящегося ряда $\Sigma u_n$. Отметим также, что результаты теории функций комплексной переменной применимы к аналитическим вектор-функциям со значениями в банаховом пространстве. С другой стороны, результаты из § I.1, опирающиеся на существование конечного базиса, неверны в общем случае.

## 3. Линейные формы

Линейную форму $f[u]$ на банаховом пространстве X можно определить так же, как в п. I.2.1. Мы же рассмотрим здесь линейные формы, определенные только на линейном подпространстве $\mathbf{D}$ в X. Такую форму $f$ мы будем называть линейной формой в X, а подпространство $\mathbf{D} = \mathbf{D}(f)$ — *областью определения* $f$. Форма $f$ называется *продолжением* формы $g$ (а $g$ — *сужением* $f$), если $\mathbf{D}(f) \supset \mathbf{D}(g)$ и $f[u] = g[u]$ для $u \in \mathbf{D}(g)$; в этом случае мы пишем $f \supset g$ или $g \subset f$.

Форма $f[u]$ непрерывна в точке $u = u_0 \in \mathbf{D}$, если $\| u_n - u_0 \| \to 0$, $u_n \in \mathbf{D}$, влечет за собой $f[u_n] \to f[u_0]$. Так как $f[u_n] - f[u_0] = f[u_n - u_0]$, то *из непрерывности формы* $f$ *в точке* $u = 0$ *следует ее непрерывность всюду в* $\mathbf{D}$. Такая форма называется *непрерывной*.

Каждая линейная форма на конечномерном пространстве непрерывна. В общем случае это неверно, хотя и не совсем просто привести пример разрывной линейной формы, определенной всюду на банаховом пространстве[1]).

Если линейная форма $f$ непрерывна, то существует $\delta > 0$ такое, что из $\| u \| < \delta$ следует $| f[u] | \leqslant 1$. В силу свойства однородности отсюда следует, что

$$| f[u] | \leqslant M \cdot \| u \|, \quad u \in \mathbf{D}(f), \tag{1.15}$$

где $M = 1/\delta$. Линейная форма $f$, обладающая свойством (1.15), называется *ограниченной*. Наименьшее число $M$, для которого неравенство (1.15) верно, называется *нормой* $f$ и обозначается через $\| f \|$. Нетрудно видеть, что из неравенства (1.15) следует

---

[1]) См., подстрочное примечание [2]) на стр. 171.

непрерывность формы $f$. Таким образом, *линейная форма непрерывна тогда и только тогда, когда она ограничена.*

Лемма 1.15. *Ограниченная линейная форма $f$ вполне определяется своими значениями на подмножестве $\mathbf{D}'$, всюду плотном в $\mathbf{D}(f)$.*

Доказательство. Для каждого $u \in \mathbf{D}(f)$ существует последовательность $u_n \in \mathbf{D}'$, сходящаяся к $u$. По свойству непрерывности $f[u] = \lim f[u_n]$.

**Теорема 1.16** (принцип продолжения по непрерывности). *Ограниченная линейная форма с областью определения $\mathbf{D}$ может быть продолжена до ограниченной линейной формы с областью определения $\overline{\mathbf{D}}$ (замыканием $\mathbf{D}$). Это продолжение единственно и сохраняет норму.*

Доказательство. Единственность продолжения следует из леммы 1.15. Для того чтобы построить такое продолжение, выберем произвольный вектор и $u \in \overline{\mathbf{D}}$ и последовательность $u_n \in \mathbf{D}$, сходящуюся к $u$. Так как $|f[u_n] - f[u_m]| = |f[u_n - u_m]| \leqslant \|f\| \, \|u_n - u_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, то $f[u_n]$ — последовательность Коши. Предел $f'[u]$ этой последовательности не зависит от выбора последовательности $\{u_n\}$, сходящейся к $u$, так как из соотношений $u_n \to u$, $v_n \to u$ следует, что $u_n - v_n \to 0$ и поэтому $f[u_n] - f[v_n] = f[u_n - v_n] \to 0$. Нетрудно показать, что $f'[u]$ — линейная форма с областью определения $\overline{\mathbf{D}}$. Совпадение норм $f$ и $f'$ следует из неравенства $|f'[u]| \leqslant \|f\| \, \|u\|$, являющегося результатом перехода к пределу в неравенстве $|f[u_n]| \leqslant \|f\| \cdot \|u_n\|$.

**Пример 1.17.** В $\mathbf{l}^p$, $1 \leqslant p < \infty$, рассмотрим линейную форму, определенную формулой

$$f[u] = \sum_k \alpha_k \xi_k, \quad u = (\xi_k). \tag{1.16}$$

Если в качестве $\mathbf{D}(f)$ взять множество всех векторов $u \in \mathbf{l}^p$, имеющих лишь конечное число ненулевых координат, то коэффициенты $\alpha_k$ в (1.16) могут быть произвольными. Однако такие $f$, вообще говоря, не ограничены. Форма $f$ ограничена, если

$$M = \left(\sum |\alpha_k|^q\right)^{1/q} < \infty, \quad \text{где} \quad q^{-1} + p^{-1} = 1. \tag{1.17}$$

Тогда, согласно неравенству Гёльдера (1.9), $|f[u]| \leqslant M \|u\|$. В этом случае в качестве области определения $\mathbf{D}(f)$ можно взять все пространство $\mathbf{l}^p$; нетрудно показать, что $\|f\| = M$. Далее, известно, что при $p < \infty$ любая ограниченная линейная форма на $\mathbf{l}^p$ может быть представлена в виде (1.16) с коэффициентами $\alpha_k$, удовлетворяющими условию (1.17)[1].

---

[1] См., например, Ройден [[1]], стр. 103; Тейлор [[1]], стр. 193; Иосида [[1]], стр. 168.

**Пример 1.18.** Для каждого $u \in \mathrm{C}[a, b]$ положим $f[u] = u(x_0)$, где $x_0$ — фиксированная точка интервала $[a, b]$ (см. I.2.3). Форма $f$ является ограниченной линейной формой с областью определения X. Вообще если $f(x)$ — комплексная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то интеграл Стильтьеса

$$f[u] = \int_a^b u(x)\, df(x) \tag{1.18}$$

определяет линейную форму на $\mathrm{C}[a, b]$. Эта форма ограничена, так как $|f[u]| \leqslant M \|u\|$, где $M$ — *полная вариация* функции $f$. Отсюда следует, что $\|f\| \leqslant M$. На самом деле $\|f\| = M$ и любую ограниченную линейную форму на $\mathrm{C}[a, b]$ можно представить в виде (1.18) [1].

**Пример 1.19.** Для каждой функции $u \in \mathrm{C}'[a, b]$ (см. пример 1.4) положим $f[u] = u'(x_0)$. Форма $f$ есть ограниченная линейная форма на $\mathrm{C}'[a, b]$, ее можно рассматривать также и как форму в $\mathrm{C}[a, b]$ с областью определения $\mathrm{D}(f) = \mathrm{C}'[a, b]$. В такой интерпретации $f$ не является ограниченной, так как число $|u'(x_0)|$ может быть сколь угодно большим для функций из единичного шара в $\mathrm{C}[a, b]$ [2].

**Пример 1.20.** Для $u \in \mathrm{L}^p(\mathrm{E})$ и $f \in \mathrm{L}^q(\mathrm{E})$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, положим

$$f(u) = \int_{\mathrm{E}} f(x)\, u(x)\, dx. \tag{1.19}$$

При фиксированном $f$ получаем ограниченную линейную форму $f[u]$ на $\mathrm{L}^p(\mathrm{E})$, причем, согласно неравенству (1.10), $\|f\| \leqslant \|f\|_q$. Известно, что $\|f\| = \|f\|_q$ и любая ограниченная линейная форма на $\mathrm{L}^p(\mathrm{E})$, $p < \infty$, имеет вид (1.19), где $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{E})$ [3].

## 4. Сопряженное пространство

*Полулинейные формы* и ограниченные полулинейные формы в банаховом пространстве X определяются точно так же, как и для конечномерного пространства (см. п. I.2.2). Определим пространство X*, *сопряженное* к X, как пространство всех *ограниченных* полулинейных форм на X. Пространство X* — нормированное векторное пространство относительно нормы

$$\|f\| = \sup_{u \neq 0} \frac{|f[u]|}{\|u\|}.$$

Как и прежде, определим скалярное произведение для элементов X* и $u \in \mathrm{X}$: $(f, u) = f[u]$; обобщенное неравенство Шварца (I.2.25) оказывается тогда следствием определения нормы $\|f\|$.

---

[1] См., например, Тейлор [[1]], стр. 382.

[2] Форма $f$ — это пример неограниченной линейной формы, однако $\mathrm{D}(f)$ не совпадает со всем пространством $\mathrm{C}[a, b]$. Продолжая $f$, можно построить неограниченную линейную форму с областью определения $\mathrm{C}[a, b]$, однако для этого придется применять аксиому выбора.

[3] См., например, Ройден [[1]], стр. 103, Тейлор [[1]], стр. 382, Иосида [[1]], стр. 166.

В дальнейшем мы будем без специальных оговорок использовать те понятия и результаты из гл. I, которые автоматически переносятся на случай банаховых пространств.

*Пространство* $\mathbf{X}^*$ *банахово.* Для доказательства полноты $\mathbf{X}^*$ рассмотрим последовательность Коши $\{f_n\}$ в $\mathbf{X}^*$. Для каждого $u \in \mathbf{X}$

$$|(f_n - f_m, u)| \leqslant \|f_n - f_m\| \, \|u\| \to 0 \text{ при } n, m \to \infty, \quad (1.20)$$

и поэтому существует предел $\lim (f_n, u) = f[u]$. Ясно, что $f[u]$ — полулинейная форма. Устремляя $n$ к бесконечность в неравенстве $|(f_n, u)| \leqslant \|f_n\| \, \|u\|$, получаем $|f[u]| \leqslant M \|u\|$, где $M =$ $= \lim \|f_n\|$; последний предел существует и конечен в силу того, что числа $\|f_n\|$ образуют последовательность Коши. Таким образом, форма $f$ ограничена и $\|f\| \leqslant M$. Переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (1.20), получаем $|(f_n - f, u)| \leqslant$ $\leqslant \lim\limits_{m\to\infty} \|f_n - f_m\| \, \|u\|$, или, что то же самое, $\|f_n - f\| \leqslant$ $\leqslant \lim\limits_{m\to\infty} \|f_n - f_m\|$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| \leqslant$ $\leqslant \lim\limits_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\| = 0$. Таким образом, $f_n \to f$ и, следовательно, $\mathbf{X}^*$ полно.

Все эти рассуждения были бы бесполезными, если бы не существовало ограниченных полулинейных форм на $\mathbf{X}$, за исключением нулевой. По этой причине *теорема Хана — Банаха*, которая утверждает, что существует «достаточно много» ограниченных линейных (или полулинейных) форм на $\mathbf{X}$, является основной в теории банаховых пространств. Мы сформулируем эту теорему в удобной для нас форме, хотя и не в максимальной общности.

Теорема 1.21. *Каждая ограниченная линейная форма в банаховом пространстве* $\mathbf{X}$ (*с областью определения* $\mathbf{D} \subset \mathbf{X}$) *может быть без увеличения нормы продолжена до ограниченной линейной формы на* $\mathbf{X}$.

Мы не приводим здесь доказательство этой теоремы [1]) и ограничимся лишь некоторыми замечаниями. Как только эта теорема доказана для вещественных банаховых пространств, можно рассмотреть комплексный случай, используя метод, описанный в п. I.2.5. В случае вещественного пространства теорема допускает следующую геометрическую интерпретацию. Пусть $\mathbf{S}$ — открытый единичный шар в $\mathbf{X}$. Пересечение $\mathbf{S}_0$ шара $\mathbf{S}$ с $\mathbf{D}$ есть единичный шар в $\mathbf{D}$. Если в $\mathbf{D}$ существует гиперплоскость $\mathbf{M}_0$,

---

[1]) См., например, Ройден [1], стр. 162, или любой учебник по функциональному анализу.

опорная для $S_0$ (см. п. I.2.5), то в X существует опорная для S гиперплоскость M, содержащая $M_0$ [1]).

Следствием предыдущей теоремы является

**Теорема 1.22.** *Пусть* M *— замкнутое линейное подпространство в* X *и вектор* $u_0 \in X$ *не принадлежит* M. *Тогда существует форма* $f \in X^*$ *такая, что* $(f, u_0) = 1$, $(f, u) = 0$ *для* $u \in M$ *и* $\| f \| = 1/\text{dist}\,(u_0, M)$.

Доказательство. Обозначим через M′ линейную оболочку M и $u_0$. Так же как в доказательстве леммы 1.9, каждый вектор $u \in M'$ имеет вид $u = \xi u_0 + v$, $v \in M$. Число $\xi$ однозначно определяется вектором $u$, и потому можно определить функцию $f[u] = \overline{\xi}$ на M′. Ясно, что $f$ полулинейна и, согласно неравенству (1.13), ограничена, причем $\| f \| \leqslant 1/d$, где $d = \text{dist}\,(u_0, M)$. На самом деле $\| f \| = 1/d$, так как существует вектор $u \in M'$ такой, что $\| u \| = 1$ и $\text{dist}\,(u, M) > 1 - \varepsilon$ (см. лемму 1.12), и поэтому $1 - \varepsilon < \text{dist}\,(u, M) = \text{dist}\,(\xi u_0 + v, M) = | \xi | \, \text{dist}\,(u_0, M) = | \xi | \, d$, или, что то же самое, $| f [u] | > (1 - \varepsilon) \| u \| / d$. Продолжая $f$ на все пространство с сохранением нормы, получаем требуемую форму.

**Следствие 1.23.** *Для любых двух векторов* $u$, $v$, $u \neq v$, *в* X *существует элемент* $f \in X^*$, *различающий их, т. е. такой, что* $(f, u) \neq (f, v)$. *В этом смысле* $X^*$ *содержит достаточно много элементов.*

**Следствие 1.24.** *Для каждого* $u_0 \in X$ *существует форма* $f \in X^*$ *такая, что* $(f, u_0) = \| u_0 \|$, $\| f \| = 1$ (см. (I.2.27)).

Из этого следствия вытекает, что формула (I.2.26) верна для любого банахова пространства:

$$\| u \| = \sup_{0 \neq f \in X^*} \frac{| (f, u) |}{\| f \|} = \sup_{\| f \| \leqslant 1} | (f, u) | = \sup_{\| f \| = 1} | (f, u) |. \qquad (1.21)$$

**Пример 1.25.** Пусть $u = (\xi_k) \in l^p$ и $f = (\alpha_k) \in l^q$, причем $p^{-1} + q^{-1} = 1$ и $1 \leqslant p < \infty$. При фиксированном $f$ форма $f[u] = \sum_k \alpha_k \overline{\xi}_k$ является ограниченной полулинейной формой на X, и, обратно, любая ограниченная полулинейная форма на X представима в таком виде (пример 1.17). По этой причине пространство, сопряженное к $l^p$, *отождествляется* с $l^q$, и мы пишем $(f, u) = \sum \alpha_k \overline{\xi}_k$. Аналогично, пространство, сопряженное к $L^p(E)$, $1 \leqslant p < \infty$, отождествляется с $L^q(E)$, где $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Скалярное произведение для элементов $f \in L^q(E)$ и $u \in L^p(E)$ имеет вид

$$(f, u) = \int_E f(x) \overline{u(x)}\, dx. \qquad (1.22)$$

---

[1] То же самое верно, если открытый единичный шар заменить произвольным открытым выпуклым подмножеством в X.

Пространством, сопряженным к $\mathbf{C}[a, b]$, является пространство $\mathbf{BV}[a, b]$ всех непрерывных слева функций $f(x)$ ограниченной вариации с нормой $\|f\|$, равной полной вариации функции $f$. Скалярное произведение в этом случае имеет такой вид:

$$(f, u) = \int_a^b \overline{u(x)}\, df(x), \quad u \in \mathbf{C}[a, b], \quad f \in \mathbf{BV}[a, b]. \tag{1.23}$$

**Задача 1.26.** Каждое конечномерное линейное подпространство $\mathbf{M}$ в $\mathbf{X}$ имеет дополнительное подпространство $\mathbf{N}$: $\mathbf{M} \oplus \mathbf{N} = \mathbf{X}$. [*Указание*: достаточно рассмотреть случай, когда $\dim \mathbf{M} = 1$. Пусть $u \in \mathbf{M}$, $u \neq 0$; выберем элемент $f \in \mathbf{X}^*$ такой, что $(f, u) = 1$. Положим $\mathbf{N} = \{v \in \mathbf{X}, (f, v) = 0\}$.]

Второе сопряженное пространство $\mathbf{X}^{**}$ также является банаховым пространством. Как и в конечномерном случае, каждый вектор $u \in \mathbf{X}$ можно рассматривать как элемент из $\mathbf{X}^{**}$ (см. п. I.2.6). В этом смысле можно писать $(u, f) = \overline{(f, u)}$, $u \in \mathbf{X}$, $f \in \mathbf{X}^*$. Отсюда не следует, однако, что $\mathbf{X}^{**}$ можно отождествить с $\mathbf{X}$, как это было в конечномерном случае, так как могут существовать формы на $\mathbf{X}^*$, которые не представимы в виде $\overline{(f, u)}$, $u \in \mathbf{X}$. Если таких форм нет, то $\mathbf{X}$ называется *рефлексивным*; в этом случае его можно отождествить с $\mathbf{X}^{**}$. В общем случае $\mathbf{X}$ отождествляется с некоторым подпространством пространства $\mathbf{X}^{**}$.

Следует также видоизменить результаты п. I.2.6, касающиеся аннуляторов. Для любого подмножества $\mathbf{S}$ в $\mathbf{X}$ аннулятор $\mathbf{S}^\perp$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathbf{X}^*$ (так как скалярное произведение — непрерывная функция своих аргументов). Аннулятор $\mathbf{S}^{\perp\perp}$ аннулятора $\mathbf{S}^\perp$ является замкнутым линейным подпространством в $\mathbf{X}^{**}$, однако не обязан быть подмножеством в $\mathbf{X}$ (относительно упомянутого выше отождествления). Независимо от этого верна формула

$$\mathbf{S}^{\perp\perp} \cap \mathbf{X} = [\mathbf{S}], \tag{1.24}$$

где $[\mathbf{S}]$ — замкнутая линейная оболочка $\mathbf{S}$. Так как $\mathbf{S} \subset \mathbf{S}^{\perp\perp}$, ясно, что $[\mathbf{S}] \subset \mathbf{S}^{\perp\perp}$. Для доказательства равенства (1.24) достаточно показать, что каждый вектор $u \in \mathbf{X}$, не принадлежащий $[\mathbf{S}]$, не удовлетворяет условию $(f, u) = 0$ ни для какого $f \in \mathbf{S}^\perp = [\mathbf{S}]^\perp$. Но это следует из теоремы 1.21.

## 5. Принцип равномерной ограниченности

Следующие результаты являются одними из основных теорем теории банаховых пространств. Всюду в этом параграфе $\mathbf{X}$ обозначает банахово пространство.

**Теорема 1.27.** *Пусть $\{u_n\}$ — последовательность векторов в $\mathbf{X}$, такая, что числовая последовательность $\{(f, u_n)\}$ ограничена для каждого $f \in \mathbf{X}^*$. Тогда $\{u_n\}$ ограничена: $\| u_n \| \leqslant M$.*

Теорема 1.28. *Пусть* $\{f_n\}$ — *последовательность векторов в* $X^*$, *такая, что числовая последовательность* $\{(f_n, u)\}$ *ограничена для каждого фиксированного* $u \in X$. *Тогда* $\{f_n\}$ *ограничена*: $\| f_n \| \leqslant M$.

Эти теоремы являются частными случаями следующей теоремы:

Теорема 1.29. *Пусть* $\{p_\lambda [u]\}$ — *семейство неотрицательных непрерывных функционалов, определенных на* $X$ *и таких, что*

$$p_\lambda [u' + u''] \leqslant p_\lambda [u'] + p_\lambda [u''], \quad p_\lambda [-u] = p_\lambda [u]. \quad (1.25)$$

*Если множество* $\{p_\lambda [u]\}$ *ограничено для каждого фиксированного* $u$, *то семейство* $\{p_\lambda\}$ *равномерно ограничено в единичном шаре* $\| u \| \leqslant 1$.

Доказательство. Обозначим через $S_n$ множество всех $u \in X$ таких, что $p_\lambda [u] \leqslant n$ для всех $\lambda$. Множества $S_n$ замкнуты, поскольку функции $p_\lambda [u]$ непрерывны. Из предположения теоремы следует, что для каждого $u \in X$ существует $n$ такое, что $p_\lambda [u] \leqslant n$ для всех $\lambda$. Следовательно, $X$ является объединением множеств $S_n$, $n = 1, 2, \ldots$ . Из теоремы о категориях (теорема 1.14) следует, что по крайней мере одно из множеств $S_n$ содержит некоторый шар $K$. Пусть $u_0$ и $r$ — центр и радиус этого шара.

Каждый вектор $u \in X$, длина которого не превосходит $2r$, можно записать в виде $u = u' - u''$, где $u', u'' \in K$; для этого достаточно положить $u' = u_0 + u/2$, $u'' = u_0 - u/2$. Согласно (1.25), отсюда следует, что $p_\lambda [u] \leqslant p_\lambda [u'] + p_\lambda [u''] \leqslant 2n$. Таким образом, семейство $\{p_\lambda\}$ равномерно ограничено в шаре $\| u \| \leqslant \leqslant 2r$. Если $2r \geqslant 1$, то утверждение теоремы доказано. Если $2r < 1$, то выберем целое число $m$, большее чем $1/2r$. Тогда из неравенства $\| u \| \leqslant 1$ следует, что $\| u/m \| \leqslant 2r$ и потому $p_\lambda [u/m] \leqslant 2n$. Снова используя (1.25), получим $p_\lambda [u] \leqslant 2mn$ при $\| u \| \leqslant 1$.

Для того чтобы вывести теорему 1.28 из теоремы 1.29, достаточно положить $p_n [u] = | (f_n, u) |$. Для доказательства теоремы 1.27 заменим пространство $X$ в теореме 1.29 на $X^*$ и положим $p_n [f] = | (f, u_n) |$.

Задача 1.30. Пусть последовательность $f_n \in X^*$ такова, что предел $\lim_n (f_n, u) = f [u]$ существует для всех $u \in X$. Тогда $f \in X^*$ и $\| f \| \leqslant \leqslant \liminf \| f_n \| < \infty$.

### 6. Слабая сходимость

Последовательность $u_n \in X$ называется *слабо сходящейся*, если для каждого $f \in X^*$ последовательность $(u_n, f)$ сходится. Если существует вектор $u \in X$ такой, что для каждого $f$ выполняется равенство $\lim_n (u_n, f) = (u, f)$, то мы будем говорить, что $\{u_n\}$ *слабо сходится к* $u$, а вектор $u$ назовем *слабым пределом*. Слабую сходимость будем обозначать так: $u_n \underset{w}{\rightarrow} u$ или $u = \text{w-lim}\, u_n$. Ясно, что слабый предел единствен, если он существует[1]. Для того чтобы отличить от слабой сходимости введенную ранее сходимость по норме, назовем последнюю *сильной* сходимостью. В тех случаях, когда требуется подчеркнуть, что сходимость $u_n \rightarrow u$ сильная, мы пишем $u_n \underset{s}{\rightarrow} u$, или $u = \text{s-lim}\, u_n$. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, сходимость означает сильную сходимость.

Очевидно, что из сильной сходимости следует слабая. Обратное, вообще говоря, неверно, если только пространство $X$ не является конечномерным. Более того, слабо сходящаяся последовательность не обязана иметь слабый предел. Если каждая слабо сходящаяся последовательность имеет слабый предел, то пространство $X$ называется *слабо полным*.

*Слабо сходящаяся последовательность ограничена*. Это сразу же следует из теоремы 1.27. Отметим также, что

$$\| u \| \leqslant \liminf \| u_n \|, \tag{1.26}$$

если $u = \text{w-lim}\, u_n$.

Это следует из равенства $(u, f) = \lim (u_n, f)$, если в качестве $f$ взять такой элемент из $X^*$, что $\| f \| = 1$ и $(u, f) = \| u \|$ (см. следствие 1.24).

Лемма 1.31. *Предположим, что последовательность $u_n \in X$ ограничена. Для слабой сходимости последовательности $u_n \in X$ (к $u$) достаточно, чтобы для каждого элемента $f$ из некоторого фундаментального подмножества $S^*$ в $X^*$ последовательность $(u_n, f)$ сходилась (к $(u, f)$).*

Доказательство. Линейная оболочка $D^*$ множества $S^*$ плотна в $X^*$. Очевидно, что последовательность $(u_n, f)$ сходится к $(u, f)$ для всех $f \in D^*$. Пусть $g \in X^*$ и $\varepsilon > 0$. Так как $D^*$ плотно в $X^*$, то существует элемент $f \in D^*$ такой, что $\| g - f \| < \varepsilon$. Далее, последовательность $(u_n, f)$ фундаментальна, и, следовательно, существует такое натуральное число $N$, что $| (u_n - u_m, f) | < \varepsilon$ при $n, m > N$. Таким образом, $| (u_n, g) - (u_m, g) | \leqslant | (u_n, g - f) | + | (u_n - u_m, f) | + | (u_m, f - g) | \leqslant (2M + 1) \varepsilon$ при $n, m > N$, где $M = \sup \| u_n \|$. Это показывает, что последовательность $(u_n, g)$ сходится для всех $g \in X^*$. Если $(u_n, f) \rightarrow (u, f)$ для всех $f \in D^*$, то, применяя предыдущие рассуждения к вектору $u_n - u$ вместо $u_n - u_m$, мы покажем, что $(u_n, g) \rightarrow (u, g)$ для всех $g \in X^*$.

---

[1] Слабая сходимость связана со *слабой топологией* в $X$, так же как сильная сходимость связана с топологией, порожденной нормой. В этой книге мы не используем факты, связанные с понятием слабой топологии; для наших целей будет достаточно понятие слабой сходимости.

Связь между сильной и слабой сходимостью устанавливает

**Теорема 1.32.** *Последовательность* $u_n \in \mathbf{X}$ *сильно сходится тогда и только тогда, когда* $\{(u_n, f)\}$ *сходится равномерно в единичном шаре* $\| f \| \leqslant 1$, $f \in \mathbf{X}^*$.

Доказательство. Необходимость следует из оценки $|(u_n, f) - (u_m, f)| \leqslant \| u_n - u_m \| \| f \| \leqslant \| u_n - u_m \|$. Для доказательства достаточности предположим, что $(u_n, f)$ сходится равномерно в шаре $\| f \| \leqslant 1$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное $N$ такое, что $|(u_n - u_m, f)| < \varepsilon$, если $n, m > N$ и $\| f \| \leqslant 1$. Поэтому, согласно формуле (1.21), $\| u_n - u_m \| = \sup\limits_{\| f \| \leqslant 1} |(u_n - u_m, f)| \leqslant \varepsilon$ при $n, m > N$.

**Замечание 1.33.** В теореме 1.32 достаточно предположить равномерную сходимость последовательности $(u_n, f)$ на подмножестве, плотном в единичном шаре пространства $\mathbf{X}^*$. В самом деле, если неравенство $|(u_n - u_m, f)| \leqslant \varepsilon$ верно для всех $f$ из множества, плотного в единичном шаре, то оно верно всюду в единичном шаре $\| f \| \leqslant 1$.

Задача 1.34. Пусть $\mathbf{M}$ — замкнутое линейное подпространство в $\mathbf{X}$. Тогда из $u_n \in \mathbf{M}$ и $u_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} u$ следует, что $u \in \mathbf{M}$. [*Указание*: применить теорему 1.22.]

Рассмотрим теперь вектор-функцию $u(t)$ вещественной или комплексной переменной $t$. Мы уже отмечали, что понятия сильной непрерывности, сильной дифференцируемости и сильной аналитичности таких функций, а также интеграл $\int u(t)\,dt$ непрерывной функции можно определить точно так же, как в конечномерном случае (см. п. 2).

Функция $u(t)$ называется *слабо непрерывной*, если $(u(t), f)$ непрерывна для каждого $f \in \mathbf{X}^*$. Ясно, что из сильной непрерывности следует слабая непрерывность. Далее, функция $u(t)$ называется *слабо дифференцируемой*, если для каждого $f \in \mathbf{X}^*$ функция $(u(t), f)$ дифференцируема. Если производная функции $(u(t), f)$ имеет вид $(v(t), f)$ для каждого $f$, то $v(t)$ называется *слабой производной* функции $u(t)$.

Если $u(t)$ слабо непрерывна в точке $t = t_0$, то $\| u(t) \|$ ограничена в окрестности $t_0$; это следует из теоремы 1.27. Если $u(t)$ слабо непрерывна на компактном множестве значений $t$, то $\| u(t) \|$ ограничена на этом множестве.

**Лемма 1.35.** *Если* $u(t)$ *слабо дифференцируема на интервале* $(a, b)$ *и слабая производная тождественно равна нулю, то* $u(t)$ *постоянна.*

Доказательство. Согласно предположению, функция $(u(t), f)$ имеет нулевую производную и поэтому $(u(t'), f) = (u(t''), f)$ для всех $f \in \mathbf{X}^*$. В силу следствия (1.23), отсюда вытекает, что $u(t') = u(t'')$.

Из леммы 1.35 следует, что $u(t)$ постоянна, если $u(t)$ сильно дифференцируема и $du(t)/dt = 0$. Желательно, однако, иметь прямое доказательство этого факта, ввиду того что лемма 1.35 не совсем элементарна, поскольку она опирается на теорему Хана — Банаха. Мы дадим здесь прямое доказательство несколько более общего результата.

**Лемма 1.36.** *Если $u(t)$ сильно непрерывна на интервале $(a, b)$ и правая сильная производная $D^+u(t)$ равна нулю, то $u(t)$ постоянна.*

Доказательство. Производная $D^+u(t)$ определяется как $\lim h^{-1}[u(t+h) - u(t)]$ при $h \searrow 0$[1]. Не теряя общности, можно считать, что $a = 0$ и $u(0) = 0$. Докажем, что $\| u(t) \| \leqslant \varepsilon t$ для любого $\varepsilon > 0$; устремляя $\varepsilon$ к нулю, получаем, что $u(t) \equiv 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Так как $D^+u(0) = 0$, то $\| u(t) \| \leqslant \varepsilon t$ для достаточно малых $t$. Пусть $[0, c)$ — максимальный подинтервал в $[0, b)$, на котором верна оценка $\| u(t) \| \leqslant \varepsilon t$; покажем, что $c = b$. Если $c < b$, то по непрерывности $\| u(c) \| \leqslant \varepsilon c$. Из равенства $D^+u(c) = 0$ следует, что $\| u(c+h) \| \leqslant \| u(c) \| + o(h) \leqslant \varepsilon c + o(h) \leqslant \varepsilon(c+h)$ для достаточно малых $h > 0$. Однако это противоречит определению $c$.

По аналогии с предыдущим можно определить слабо голоморфную функцию $u(t)$ комплексной переменной $t$. Оказывается, однако, что понятия слабой и сильной голоморфности совпадают. Точнее, имеет место

**Теорема 1.37.** *Пусть функция $u(\zeta) \in \mathbf{X}$, определенная в области $\Delta$ комплексной плоскости, такова, что для каждого $f \in \mathbf{X}^*$ числовая функция $(u(\zeta), f)$ голоморфна в $\Delta$. Тогда $u(\zeta)$ голоморфна в сильном смысле (сильно дифференцируема по $\zeta$).*

Доказательство. Пусть $\Gamma$ — положительно ориентированная окружность в $\Delta$. Запишем интегральную формулу Коши для голоморфной функции $(u(\zeta), f)$:

$$(u(\zeta), f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{(u(\zeta'), f)}{\zeta' - \zeta}\, d\zeta';$$

здесь предполагается, что точка $\zeta$ лежит внутри $\Gamma$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\eta}(u(\zeta+\eta) - u(\zeta), f) - \frac{d}{d\zeta}(u(\zeta), f) = \frac{\eta}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{(u(\zeta'), f)}{(\zeta' - \zeta - \eta)(\zeta' - \zeta)^2}\, d\zeta'. \tag{1.27}$$

---

[1] Запись $h \searrow 0$ означает, что $h > 0$ и $h \to 0$.

Так как $u(\zeta)$ слабо непрерывна, то она ограничена на Γ, и поэтому $|(u(\zeta'), f)| \leqslant M \|f\|$ для $\zeta' \in \Gamma$. Следовательно, разность (1.27) можно оценить при малых $|\eta|$ числом вида $|\eta| M' \|f\|$. Эта оценка показывает, что $\eta^{-1}(u(\zeta+\eta) - u(\zeta), f)$ сходится равномерно в единичном шаре $\|f\| \leqslant 1$ к $d(u(\zeta), f)/d\zeta$ при $\eta \to 0$. Из теоремы 1.32 следует, что $\eta^{-1}(u(\zeta+h) - u(\zeta))$ сильно сходится. Это доказывает сильную дифференцируемость $u(\zeta)$ и, следовательно, ее голоморфность.

**Замечание 1.38.** Если $\|u(\zeta)\|$ предполагается локально ограниченной, то в теореме 1.37 достаточно предполагать, что $(u(\zeta), f)$ голоморфна для всех $f$ из фундаментального подмножества в $\mathbf{X}^*$ (ср. с замечанием 1.33).

## 7. w*-сходимость

В сопряженном пространстве $\mathbf{X}^*$ существует еще одно понятие сходимости, так называемая w*-сходимость[1]. Последовательность $f_n \in \mathbf{X}^*$ w*-сходится к $f$, если $(u, f_n) \to (u, f)$ для каждого $u \in \mathbf{X}$. Так определенная w*-сходимость слабее, чем слабая сходимость в банаховом пространстве $\mathbf{X}^*$, так как последняя требует сходимости $(F, f_n)$ для всех $F \in \mathbf{X}^{**}$. Для w*-сходимости мы используем такие обозначения:

$$f_n \underset{w^*}{\to} f \quad \text{или} \quad f = \text{w*-}\lim f_n;$$

*ограниченность* w*-*сходящейся последовательности* следует непосредственно из теоремы 1.28.

Отметим, что из сходимости последовательности $(u, f_n)$ для каждого $u \in \mathbf{X}$ следует, что существует $\text{w*-}\lim f_n = f \in \mathbf{X}^*$ (см. задачу 1.30). В этом смысле пространство $\mathbf{X}^*$ является w*-полным.

Следующие предложения можно доказать точно так же, как это было сделано для слабой сходимости.

Последовательность $\{f_n\}$ сильно сходится тогда и только тогда, когда $\{(u, f_n)\}$ сходится равномерно в единичном шаре $\|u\| \leqslant 1$, $u \in \mathbf{X}$.

Если $\{f_n\}$ ограничена, то для w*-сходимости последовательности $\{f_n\}$ достаточно, чтобы сходилась $\{(u, f_n)\}$ для всех элементов $u$ и фундаментального подмножества в $\mathbf{X}$.

Если $f(\zeta) \in \mathbf{X}^*$ является w*-голоморфной в области Δ комплексной плоскости (т. е. для каждого $u \in \mathbf{X}$ функция $(f(\zeta), u)$ голоморфна в Δ), то $f(\zeta)$ голоморфна в сильном смысле.

Задача 1.39. Пусть $u_n, u \in \mathbf{X}$, $f_n, f \in \mathbf{X}^*$. Тогда $(u_n, f_n) \to (u, f)$, если (i) $u_n \underset{s}{\to} u$ и $f_n \underset{w^*}{\to} f$ или (ii) $u_n \underset{w}{\to} u$ и $f_n \underset{s}{\to} f$.

---

[1] Нам не потребуется понятие w*-топологии.

## 8. Факторпространство

Если $\mathbf{M}$ — линейное подпространство в векторном пространстве $\mathbf{X}$, то факторпространство $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}/\mathbf{M}$ определяется как множество всех смежных классов $\widetilde{u} = u + \mathbf{M}$ по модулю $\mathbf{M}$ (или всех линейных многообразий, параллельных $\mathbf{M}$) с линейными операциями, определенными по формуле (I.1.8). Если $\mathbf{X}$ — нормированное пространство, то $\widetilde{\mathbf{X}}$ становится нормированным пространством относительно нормы

$$\|\widetilde{u}\| = \inf_{v \in \widetilde{u}} \|v\| = \inf_{z \in \mathbf{M}} \|u - z\| = \operatorname{dist}(u, \mathbf{M}). \qquad (1.28)$$

Нетрудно проверить, что функция (1.28) удовлетворяет условиям (I·1.18). Напомним, что $\widetilde{u} = \widetilde{u}'$ тогда и только тогда, когда $u - u' \in \mathbf{M}$.

*Факторпространство* $\widetilde{\mathbf{X}}$ *является банаховым пространством, если* $\mathbf{X}$ — *банахово пространство и* $\mathbf{M}$ — *замкнутое линейное подпространство.* Докажем это. Пусть $\{\widetilde{u}_n\}$ — последовательность Коши в $\widetilde{\mathbf{X}}$. Обозначим через $n(k)$ такое натуральное число, что $\|\widetilde{u}_n - \widetilde{u}_m\| \leqslant 2^{-k}$ для $n, m \geqslant n(k)$. Можно считать, что $n(1) \leqslant n(2) \leqslant \ldots$. Положим $\widetilde{v}_k = \widetilde{u}_{n(k+1)} - \widetilde{u}_{n(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$. Ясно, что $\|\widetilde{v}_k\| \leqslant 2^{-k}$, и поэтому для каждого $k$ можно выбрать вектор $v_k \in \widetilde{v}_k$ такой, что $\|v_k\| \leqslant \|\widetilde{v}_k\| + 2^{-k} \leqslant 2^{1-k}$. Обозначим через $u$ сумму абсолютно сходящегося ряда $u_{n(1)} + \sum\limits_{k+1}^{\infty} v_k$ (ряд сходится, так как пространство $\mathbf{X}$ полно). Обозначим через $w_k$ частные суммы этого ряда; ясно, что $\widetilde{w}_k = \widetilde{u}_{n(k+1)}$. Так как $\|\widetilde{w}_k - \widetilde{u}\| \leqslant \|w_k - u\| \to 0$ при $k \to \infty$, то $\|\widetilde{u}_{n(k)} - \widetilde{u}\| \to 0$. Выберем столь большое $k$, что $\|\widetilde{u}_{n(k)} - \widetilde{u}\| < \varepsilon$ и $2^{-k} < \varepsilon$; тогда $\|\widetilde{u}_n - \widetilde{u}\| \leqslant \|\widetilde{u}_n - \widetilde{u}_{n(k)}\| + \|\widetilde{u}_{n(k)} - \widetilde{u}\| < 2\varepsilon$ при $n \geqslant n(k)$. Таким образом, последовательность $\{\widetilde{u}_n\}$ имеет предел $\widetilde{u} \in \widetilde{X}$.

*Коразмерность* (или *дефект*) линейного подпространства $\mathbf{M}$ определяется равенством $\operatorname{codim} \mathbf{M} = \dim \mathbf{X}/\mathbf{M}$, как и ранее в п. I.1.3.

Лемма 1.40. *Если* $\mathbf{M}$ *замкнуто, то* $\operatorname{codim} \mathbf{M} = \dim \mathbf{M}^{\perp}$ *и* $\operatorname{codim} \mathbf{M}^{\perp} = \dim \mathbf{M}$.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{codim} \mathbf{M} = m < \infty$. Тогда существует конечный базис $\{\widetilde{x}_j\}$, $j = 1, \ldots, m$, в $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}/\mathbf{M}$. Пусть $x_j \in \widetilde{x}_j$. Для любого $u \in \mathbf{X}$ вектор $\widetilde{u}$ можно однозначно представить в виде $\widetilde{u} = \xi_1 \widetilde{x}_1 + \ldots + \xi_m \widetilde{x}_m$. Следовательно, вектор $u$ представим в виде

$$u = \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_m x_m + v, \quad v \in \mathbf{M}. \qquad (1.29)$$

Обозначим через $\mathbf{M}_j$ линейную оболочку $\mathbf{M}$ и векторов $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_m$. Согласно лемме 1.9, подпространство $\mathbf{M}_j$ замкнуто, и поэтому существует форма $f_j \in \mathbf{X}^*$ такая, что $f_j \in \mathbf{M}_j^{\perp}$ и $(f_j, x_j) = 1$ (теорема 1.22). Другими словами, $f_j \in \mathbf{M}^{\perp}$ и $(f_j, x_k) = \delta_{jk}$. Ясно, что $f_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ линейно независимы.

Пусть $f \in \mathbf{M}^{\perp}$ и $\alpha_j = (f, x_j)$. Тогда вектор $f - \alpha_1 f_1 - \ldots - \alpha_m f_m$ имеет нулевые скалярные произведения со всеми векторами $x_k$, всеми $v \in \mathbf{M}$ и, как следует из (1.29), со всеми векторами $u \in \mathbf{X}$. Это означает, что $f = \alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_m f_m$. Таким образом, подпространство $\mathbf{M}^{\perp}$ порождено векторами $f_1, \ldots, f_m$, и поэтому $\dim \mathbf{M}^{\perp} = m$.

Если $\operatorname{codim} \mathbf{M} = \infty$, то существует бесконечная последовательность замкнутых линейных многообразий $\mathbf{M}_n$, такая, что $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}_2 \subset \ldots$, причем все включения собственные. Таким образом, $\mathbf{M}^{\perp} \supset \mathbf{M}_1^{\perp} \supset \mathbf{M}_2^{\perp} \supset \ldots$, где все включения собственные (см. (1.24)). Итак, $\mathbf{M}^{\perp} = \infty$.

Предположим теперь, что $\dim \mathbf{M} = m < \infty$, и обозначим через $\{x_1, \ldots, x_m\}$ базис в $\mathbf{M}$. Как и выше, построим формы $f_j \in \mathbf{X}^*$, $j = 1, \ldots, m$, такие, что $(f_j, x_k) = \delta_{jk}$. Каждый вектор $f \in \mathbf{X}^*$ можно представить в виде $f = \sum\limits_{k=1}^{m} (f, x_k) f_k + f'$, где $f' \in \mathbf{M}^{\perp}$. Обозначим через $f$ и $f_k$ элементы пространства $\mathbf{X}^*/\mathbf{M}^{\perp}$, соответствующие элементам $f$ и $f_k$ из $\mathbf{X}^*$. Мы видим, что $\tilde{f}$ есть линейная комбинация векторов $\tilde{f}_k$. Так как $f_k$, $k = 1, \ldots, m$, линейно независимы, то $\operatorname{codim} \mathbf{M}^{\perp} = m$.

Если $\dim \mathbf{M} = \infty$, то существует бесконечная последовательность конечномерных линейных подпространств $\mathbf{M}_n$, такая, что $\mathbf{M}_1 \subset \mathbf{M}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{M}$, причем все включения собственные. Переходя к аннуляторам, получаем цепочку собственных включений: $\mathbf{M}_1^{\perp} \supset \mathbf{M}_2^{\perp} \supset \ldots \supset \mathbf{M}^{\perp}$. Это показывает, что $\operatorname{codim} \mathbf{M}^{\perp} = \infty$.

**Следствие 1.41.** *Если* $\mathbf{M}$ — *конечномерное линейное подпространство, то* $\mathbf{M}^{\perp\perp} = \mathbf{M}$.

Задача 1.42. Если $\operatorname{codim} \mathbf{M} < \dim \mathbf{N}$ (откуда следует, что $\operatorname{codim} \mathbf{M} = m < \infty$), то $\dim (\mathbf{M} \cap \mathbf{N}) > 0$. [*Указание*: $u \in \mathbf{M}$ тогда и только тогда, когда $(u, f_j) = 0$, где $f_j$, $j = 1, \ldots, m$, суть векторы, построенные в первой части доказательства леммы 1.40.]

## § 2. Линейные операторы в банаховых пространствах

### 1. Линейные операторы. Область определения и область значений

В дальнейшем через $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, если не оговорено противное, обозначаются банаховы пространства. Определение *линейного оператора* (или просто *оператора*) аналогично определению, которое было дано в конечномерном случае (см. п. I.3.1). Однако в целях дальнейших приложений нам потребуется несколько более общее определение.

Часто оказывается необходимым рассматривать операторы, которые определены не для всех векторов пространства определения. Поэтому мы понимаем под *оператором* $T$ *из* $\mathrm{X}$ *в* $\mathrm{Y}$ линейное отображение (см. (I.3.1)), которое сопоставляет каждому вектору $u$ некоторого линейного подпространства $\mathrm{D} \subset \mathrm{X}$ некоторый вектор $v$ пространства $\mathrm{Y}$ и удовлетворяет условию (I.3.1) для $u_1$, $u_2 \in \mathrm{D}$. Подпространство $\mathrm{D}$ называется *областью определения* оператора $T$ и обозначается через $\mathrm{D}(T)$. *Область значений* (или *образ*) $\mathrm{R}(T)$ оператора $T$ определяется как множество всех векторов из $\mathrm{Y}$ вида $Tu$, $u \in \mathrm{D}(T)$. Пространство $\mathrm{X}$ называется *пространством определения*, а $\mathrm{Y}$ — *пространством значений* оператора $T$[1]. Если $\mathrm{D}(T)$ плотно в $\mathrm{X}$, то оператор $T$ называется *плотно определенным*. Если $\mathrm{D}(T) = \mathrm{X}$, то говорят, что $T$ определен *на* $\mathrm{X}$. Если $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, то $T$ называется оператором в $\mathrm{X}$. Ядро (нуль-пространство) $\mathrm{N}(T)$ оператора $T$ — это множество всех векторов $u \in \mathrm{D}(T)$ таких, что $Tu = 0$.

Понятие оператора, определенного на подпространстве пространства определения, приводит к понятиям *продолжения* и *сужения* операторов точно так же, как и в случае линейных форм (см. п. I.3). Если $S$ и $T$ — два оператора из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$ такие, что $\mathrm{D}(S) \subset \mathrm{D}(T)$ и $Su = Tu$ для всех $u \in \mathrm{D}(S)$, то $T$ называется *продолжением*, или *расширением* $S$, а $S$ — *сужением* $T$; мы примем такие обозначения:

$$T \supset S \quad \text{и} \quad S \subset T \tag{2.1}$$

соответственно. Оператор $T$ называется *конечным продолжением* оператора $S$, а $S$ — *конечным сужением* оператора $T$, если $T \supset S$ и $[T/S] = \dim \mathrm{D}(T)/\mathrm{D}(S) = m < \infty$. Число $m$ называется *порядком* продолжения или сужения. Если $m = 1$, то мы называем $T$ *простым продолжением* оператора $S$, а $S$ — *простым сужением* оператора $T$.

Для любого подмножества $\mathrm{S}$ в пространстве определения $\mathrm{X}$ оператора $T$ мы обозначаем через $T\mathrm{S}$ *образ* множества $\mathrm{S} \cap \mathrm{D}(T)$, т. е. множество всех векторов вида $Tu$, где $u \in \mathrm{S} \cap \mathrm{D}(T)$; $T\mathrm{S}$ — подмножество в пространстве значений $\mathrm{Y}$. *Прообраз* $T^{-1}\mathrm{S}$ под-

---

[1] Может показаться излишним рассматривать операторы, которые не определены всюду в пространстве определения $\mathrm{X}$, поскольку такой оператор $T$ можно рассматривать как оператор из $\mathrm{D}(T)$ в $\mathrm{Y}$ или $\mathrm{R}(T)$. Мы не разделяем такой точки зрения, так как подпространство $\mathrm{D}(T)$, вообще говоря, не замкнуто в $\mathrm{X}$, и, следовательно, не является банаховым пространством (относительно нормы в $\mathrm{X}$). Далее, в том случае, когда $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$, часто бывает удобно и даже необходимо рассматривать $T$ как оператор в $\mathrm{X}$, а не как оператор между различными пространствами $\mathrm{D}(T)$ и $\mathrm{X}$.

множества $\mathbf{S}'$ в $\mathbf{Y}$ определяется как множество всех $u \in \mathbf{D}(T)$ таких, что $Tu \in \mathbf{S}'$ [1]).

*Обратный оператор* $T^{-1}$ для оператора $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ определяется только в том случае, когда отображение $T$ взаимно однозначно или, другими словами, когда из равенства $Tu = 0$ следует, что $u = 0$. По определению, $T^{-1}$ есть оператор из $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{X}$, переводящий $Tu$ в $u$. Таким образом,

$$\mathbf{D}(T^{-1}) = \mathbf{R}(T), \quad \mathbf{R}(T^{-1}) = \mathbf{D}(T), \tag{2.2}$$

$$T^{-1}(Tu) = u, \quad u \in \mathbf{D}(T); \quad T(T^{-1}v) = v, \quad v \in \mathbf{R}(T). \tag{2.3}$$

Оператор $T$ называется *обратимым*, если существует $T^{-1}$. Любое сужение обратимого оператора обратимо.

**Пример 2.1.** Линейная форма в $\mathbf{X}$ есть оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{C}$ (одномерное пространство комплексных чисел).

**Пример 2.2.** В том случае, когда пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ суть функциональные пространства (такие, как $\mathbf{C}(E)$, $\mathbf{L}^p(E)$), можно определить *оператор умножения* $T$; каждую функцию из области определения он умножает на некоторую фиксированную функцию. Пусть, например, $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(E)$, $\mathbf{Y} = \mathbf{L}^q(E)$ и оператор $T$ определен по формуле $Tu(x) = f(x)u(x)$, где $f(x)$ — фиксированная комплексная измеримая функция на $E$. Подпространство $\mathbf{D}(T)$ должно быть таким, что из $u \in \mathbf{D}(T)$ следует $fu \in \mathbf{L}^q$. Если $\mathbf{D}(T)$ — максимальное подпространство, обладающее этим свойством (т. е. $\mathbf{D}(T)$ состоит из всех функций $u \in \mathbf{L}^p(E)$, удовлетворяющих условию $fu \in \mathbf{L}^q(E)$), то $T$ называется *максимальным* оператором умножения на $f(x)$. Оператор $T$ обратим тогда и только тогда, когда $f(x) \neq 0$ почти всюду в $E$. В частности, если $p = q$, максимальный оператор умножения определен на всем пространстве $\mathbf{L}^p(E)$ в том и только в том случае, когда $f(x)$ существенно ограничена на $E$.

**Пример 2.3.** Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — пространства последовательностей (например, $\mathbf{c}$ или $\mathbf{l}_p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$), то оператор $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ можно определить с помощью бесконечной матрицы $(\tau_{jk})$, $j, k = 1, 2, \ldots$. Формально $T$ определяется равенством $Tu = v$, где $u = (\xi_j)$, $v = (\eta_j)$ и

$$\eta_j = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_{jk}\xi_k, \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{2.4}$$

Подпространство $\mathbf{D}(T) \subset \mathbf{X}$ должно обладать таким свойством, что для любого $u \in \mathbf{D}(T)$ ряд (2.4) сходится при каждом $j$ и результирующий вектор $v = (\eta_j)$ принадлежит $\mathbf{Y}$. Если $\mathbf{D}(T)$ состоит из всех таких векторов $u$, то $T$ называется *максимальным* оператором из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, определенным матрицей $(\tau_{jk})$. То, насколько велика область определения $\mathbf{D}(T)$ при фиксированных $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, зависит от свойств матрицы $(\tau_{jk})$.

Предположим, например, что существуют постоянные $M'$ и $M''$ такие, что

$$\tau'_j = \sum_{k=1}^{\infty} |\tau_{jk}| \leqslant M', \quad j = 1, 2, \ldots; \quad \tau''_k = \sum_{j=1}^{\infty} |\tau_{jk}| \leqslant M'', \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{2.5}$$

---

[1]) Прообраз $T^{-1}\mathbf{S}'$ определен и тогда, когда обратный оператор $T^{-1}$ (см. ниже) не существует. Когда же $T^{-1}$ существует, прообраз $T^{-1}\mathbf{S}'$ совпадает с образом множества $\mathbf{S}'$ относительно $T^{-1}$.

Если $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{l}^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то вычисления, аналогичные тем, которые были проделаны в п. I.4.15, показывают, что $Tu$ существует для любого $u \in \mathrm{X}$ и

$$\| Tu \| = \| v \| \leqslant M'^{1-1/p} M''^{1/p} \| u \| \leqslant \max (M', M'') \| u \|. \tag{2.6}$$

Таким образом, максимальный оператор $T$ определен на всем пространстве $\mathrm{l}^p$. В частности, это так, если $(\tau_{jk})$ — диагональная матрица с ограниченными диагональными элементами.

**Пример 2.4.** Оператор вида [1]

$$Tu(y) = v(y) = \int_{\mathrm{E}} t(y, x)\, u(x)\, dx, \qquad y \in \mathrm{F}, \tag{2.7}$$

называется *интегральным оператором с ядром* $t(y, x)$. Ядром $t(y, x)$ служит комплексная измеримая функция переменных $x \in \mathrm{E}$ и $y \in \mathrm{F}$ (E и F могут быть подмножествами конечномерных гильбертовых пространств не обязательно одинаковой размерности). Если X и Y суть пространства функций на E и F соответственно, например $\mathrm{X} = \mathrm{L}^p(\mathrm{E})$ и $\mathrm{Y} = \mathrm{L}^q(\mathrm{F})$, то формула (2.7) определяет оператор $T$ из X в Y при некотором выборе $\mathrm{D}(T)$. Подпространство $\mathrm{D}(T)$ должно быть таким, что для $u \in \mathrm{D}(T)$ интеграл в правой части (2.7) существует (в некотором смысле) для почти всех $y$ и результирующий вектор $v(y) \in \mathrm{Y}$. Если $\mathrm{D}(T)$ состоит из всех таких векторов, то $T$ называется *максимальным* интегральным оператором из X в Y, определенным ядром $t$.

Предположим, например, что существуют постоянные $M'$ и $M''$ такие, что

$$\int_{\mathrm{E}} | t(y, x) |\, dx \leqslant M', \quad y \in \mathrm{F}; \qquad \int_{\mathrm{F}} | t(y, x) |\, dy \leqslant M'', \quad x \in \mathrm{E}. \tag{2.8}$$

Если $\mathrm{X} = \mathrm{L}^p(\mathrm{E})$ и $\mathrm{Y} = \mathrm{L}^q(\mathrm{F})$, то максимальный оператор $T$ определен на всем X и, кроме того,

$$\| Tu \| = \| v \| \leqslant M'^{1-1/p} M''^{1/p} \| u \| \leqslant \max (M', M'') \| u \|. \tag{2.9}$$

Это неравенство доказывается так же, как неравенство (I.4.15), причем неравенства для сумм заменяются интегральными неравенствами. Для доказательства существования интеграла (2.7) для почти всех $y$ потребуется применение теоремы Фубини [2].

Если, в частности, E и F компактны и ядро $t(y, x)$ непрерывно по совокупности переменных $x$ и $y$, то условия (2.8) очевидным образом выполнены. В этом случае $T$ можно рассматривать как оператор из $\mathrm{C}(\mathrm{E})$ или $\mathrm{L}^p(\mathrm{E})$ в $\mathrm{C}(\mathrm{F})$, определенный на всем X, так как функция $Tu(y)$ непрерывна для каждой интегрируемой функции $u(x)$.

**Задача 2.5.** Допустим, что $\int_{\mathrm{F}} \int_{\mathrm{E}} | t(y, x) |^2 dx\, dy = M^2 < \infty$; **тогда формула**

$$Tu(y) = v(y) = \int_{\mathrm{E}} t(y, x)\, u(x)\, dx$$

---

[1] Для простоты мы пишем $Tu(y)$ вместо $(Tu)(y)$. Никакого другого толкования символа $Tu(y)$ быть не может, так как выражение $T[u(y)]$ не имеет смысла ($u(y)$ — комплексное число, $T$ — оператор).

[2] См., например, Ройден [1], стр. 233.

определяет оператор $T$ из $\mathbf{X} = \mathbf{L}^2(\mathrm{E})$ в $\mathbf{Y} = \mathbf{L}^2(\mathrm{F})$, причем $\mathbf{D}(T) = \mathbf{X}$ и $\| Tu \| \leqslant M \| u \|$. [*Указание*: согласно неравенству Шварца, $| v(y) |^2 \leqslant \| u \|^2 \int\limits_{\mathrm{E}} | t(y, x) |^2 \, dx$.]

**Пример 2.6.** К понятиям продолжения и сужения операторов мы приходим естественным образом, рассматривая *дифференциальные операторы*. Простейшим примером дифференциального оператора является оператор

$$Tu(x) = u'(x) = \frac{du(x)}{dx}. \tag{2.10}$$

Точнее, пусть $\mathbf{X} = \mathbf{C}[a, b]$, где $[a, b]$ — конечный интервал; будем рассматривать $T$ как оператор в $\mathbf{X}$. Подпространство $\mathbf{D}(T)$ состоит из непрерывно дифференцируемых функций. Если $\mathbf{D}(T)$ содержит все такие функции, то $T$ называется *максимальным* оператором в $\mathbf{X}$, определенным формулой (2.10). Такое $\mathbf{D}(T)$ является собственным подмножеством в $\mathbf{X} = \mathbf{C}[a, b]$. Пусть $\mathbf{D}_1$ — подмножество в $\mathbf{D}(T)$, состоящее из всех $u \in \mathbf{D}(T)$, удовлетворяющих *граничному условию* $u(a) = 0$. Оператор $T_1$ в $\mathbf{X}$, определенный равенствами $\mathbf{D}(T_1) = \mathbf{D}_1$ и $T_1 u = u'$, является простым сужением оператора $T$. Аналогично определяется прямое сужение $T_2$ оператора $T$, соответствующее граничному условию $u(b) = 0$. Еще одно граничное условие таково: $u(b) = ku(a)$, $k$ — постоянная; возникающее прямое сужение оператора $T$ обозначим через $T_3$, а соответствующую область определения через $\mathbf{D}_3$. Далее, граничное условие $u(a) = u(b) = 0$ приводит к еще одному сужению $T_0$ (с областью определения $\mathbf{D}_0$) оператора $T$. Оно имеет порядок 2 и является простым сужением каждого из операторов $T_1$, $T_2$ и $T_3$. Все эти операторы представляют собой простейшие примеры дифференциальных операторов. Максимальный дифференциальный оператор необратим, так как $Tu = 0$ всякий раз, когда $u(x)$ постоянна. Операторы $T_1$, $T_2$ и $T_3$ обратимы. Подпространство $\mathbf{D}(T_1^{-1}) = \mathbf{R}(T_1)$ совпадает со всем пространством $\mathbf{X} = \mathbf{C}[a, b]$ и $T_1^{-1} v(x) = \int\limits_a^x u(t)\, dt$ для каждого $v \in \mathbf{X}$. Таким образом, $T_1^{-1}$ — интегральный оператор с областью определения $\mathbf{X}$. Оператор $T_0$ обратим как сужение обратимого оператора $T_1$ (или $T_2$), однако область определения оператора $T_0^{-1}$ не совпадает с $\mathbf{X}$; $\mathbf{D}(T_0^{-1})$ состоит из всех $v \in \mathbf{X}$ таких, что $\int\limits_a^b v(x)\, dx = 0$.

Оператор $T_3$ обратим тогда и только тогда, когда $k \neq 1$; в этом случае $T_3^{-1}$ определен на всем $\mathbf{X}$ и

$$T_3^{-1} v(x) = \frac{1}{k-1} \left( k \int\limits_a^x v(t)\, dt + \int\limits_x^b v(t)\, dt \right). \tag{2.11}$$

Следует отметить, что $T$ плотно определен, но это уже не так в отношении операторов $T_n$, $n = 0, 1, 2, 3$.

**Пример 2.7.** Дифференциальный оператор (2.10) можно рассматривать и в других функциональных пространствах, например в $\mathbf{L}^p(a, b)$. В этом случае функция $Tu(x) = u'(x)$ не обязана быть непрерывной; далее, здесь удобно понимать дифференцирование в обобщенном смысле: $u'(x)$ существует, если $u(x)$ *абсолютно непрерывна* [т. е. $u(x)$ является неопределенным интегралом локально интегрируемой по Лебегу функции $v(x)$; в этом случае по определению $u' = v$]. Таким образом, максимальный дифференциальный оператор $T$, определенный формулой (2.10) в $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(a, b)$, имеет область определения $D(T)$, состоящую из всех абсолютно непрерывных функций $u(x) \in L^p(a,b)$ таких, что $u'(x) \in L^p(a, b)$. Так же, как и в предыдущем примере, можно, рассматривая различные граничные условия, определить сужения $T_0, \ldots, T_3$ максимального оператора $T$. Все операторы $T, T_0, \ldots, T_3$ *плотно определены*, если $1 \leqslant p < \infty$. Как и в примере 2.6, обратные операторы $T_1^{-1}$, $T_2^{-1}$ и $T_3^{-1}$ существуют и являются интегральными операторами.

До сих пор мы предполагали, что интервал $(a, b)$ конечен. Однако оператор (2.10) можно рассмотреть на всей вещественной оси $(-\infty, +\infty)$ или на полуоси $(0, \infty)$. Максимальный оператор $T$ определяется точно так же, как и выше. Полезно рассмотреть также *минимальный оператор* $T$, который является сужением оператора $T$ на подпространстве $D(T) = C_0^\infty(a, b) \subset X$ (см. пример 1.11). [Оператор $T$ можно определить и в том случае, когда интервал $(a, b)$ конечен.] Далее, на полуоси можно определить сужение $T_1 \subset T$, соответствующее граничному условию $u(0) = 0$.

Когда мы рассматриваем граничное условие типа $u(a) = 0$ для дифференциального оператора в $L^q(a, b)$, важно понимать, что означает $u(a)$. Вообще говоря, $u(a)$ не имеет смысла для $u \in L^p(a, b)$, так как в $L^p(a, b)$ эквивалентные функции отождествляются (см. пример 1.3). Однако если функция $u$ эквивалентна непрерывной функции $v$, то выражение $u(a)$ можно понимать как значение $v$ в точке $x = a$. Каждая функция $u \in D(T)$ эквивалентна функции, непрерывной на $[a, b)$, если $a > -\infty$, как это следует из условия $u' \in L^p(a, b)$.

## 2. Непрерывность и ограниченность

Оператор $T$ из $X$ в $Y$ *непрерывен* в точке $u = u_0 \in D(T)$, если из $\| u_n - u_0 \| \to 0$, $u_n \in D(T)$, следует, что $\| Tu_n - Tu_0 \| \to 0$. Так же, как и в случае линейных форм (п. 1.3), оператор $T$ непрерывен всюду в области определения, если он непрерывен в нуле. Оператор $T$ непрерывен тогда и только тогда, когда он *ограничен*: $\| Tu \| \leqslant M \| u \|$, $u \in D(T)$. Наименьшее число $M$, для которого имеет место предыдущее неравенство, называется *нормой* оператора $T$ и обозначается через $\| T \|$. Иногда говорят, что неограниченный оператор имеет бесконечную норму.

*Принцип продолжения по непрерывности*, доказанный ранее для линейных форм (теорема 1.16), можно обобщить на случай ограниченных операторов из $X$ в $Y$. Следует только отметить, что при доказательстве существования предела $v \in Y$ последовательности $\{Tu_n\}$, где $\{u_n\}$ — сходящаяся последовательность в $X$, должна быть использована полнота пространства $Y$.

Задача 2.8. Оператор с конечномерной областью определения ограничен.

Задача 2.9. Предположим, что $T$ ограничен и $R(T)$ плотно в $Y$. Если множество $D' \subset D(T)$ плотно в $D(T)$, то $TD'$ плотно в $Y$.

**Задача 2.10.** Оператор $T^{-1}$ существует и ограничен тогда и только тогда, когда существует $m > 0$ такое, что

$$\| Tu \| \geqslant m \| u \|, \quad u \in D(T). \tag{2.12}$$

**Пример 2.11.** Максимальный оператор умножения $T$, определенный в примере 2.2, ограничен при $q = p$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ существенно ограничена на $E$; в этом случае $\| T \| = \| f \|_\infty$. Оператор $T$, определенный в примере 2.3 с помощью матрицы $(\tau_{jk})$, ограничен, если выполнены условия (2.5), при этом, согласно (2.6), $\| T \| \leqslant M'^{1-1/p}M''^{1/p}$. Интегральный оператор $T$, введенный в примере 2.4, ограничен, если выполнены условия (2.8), причем $\| T \| \leqslant M'^{1-1/p}M''^{1/p}$ согласно неравенству (2.9). Интегральный оператор $T$ из задачи 2.5 также ограничен и $\| T \| \leqslant M$.

**Пример 2.12.** Все дифференциальные операторы, рассмотренные в примерах 2.6 и 2.7, неограничены, так как норма $\| u' \|$ может быть сколь угодно большой для функций из единичного шара; это верно для каждого из пространств $\mathbf{C}[a, b]$ или $\mathbf{L}^p(a, b)$ независимо от налагаемых граничных условий [1]. Однако обратные операторы $T_k^{-1}$ ограничены; это следует из предыдущего примера, так как операторы $T_k^{-1}$ суть простейшие интегральные операторы.

## 3. Обыкновенные дифференциальные операторы второго порядка

В примерах 2.6 и 2.7 мы рассмотрели простейшие примеры дифференциальных операторов. Рассмотрим теперь более или менее подробно обыкновенные дифференциальные операторы второго порядка и их обратные [2]. Выражение

$$Lu = p_0(x)\, u'' + p_1(x)\, u' + p_2(x)\, u \tag{2.13}$$

мы будем называть *формальным дифференциальным оператором*, определенным на конечном интервале $a \leqslant x \leqslant b$, если $p_0$, $p_1$ и $p_2$ — вещественные функции на $[a, b]$, такие, что $p_0''$, $p_1'$ и $p_2$ непрерывны на $[a, b]$ и $p_0(x) < 0$. С помощью формального оператора $L$ можно построить разнообразные дифференциальные операторы в различных функциональных пространствах.

Положим сначала $\mathbf{X} = \mathbf{C}[a, b]$. Пусть $\mathbf{D}$ — множество функций $u \in \mathbf{C}[a, b]$, имеющих непрерывную вторую производную $u''$. Введем оператор $T$ в $\mathbf{X}$ с областью определения $\mathbf{D}(T) = \mathbf{D}$, полагая

$$Tu = Lu, \quad u \in \mathbf{D}. \tag{2.14}$$

Налагая граничные условия, мы сужаем подпространство $\mathbf{D}$ и приходим к различным дифференциальным операторам $T$. Мы не будем рассматривать все возможные граничные условия и ограничимся лишь некоторыми типичными примерами, а именно:

$$T_1, \quad \mathbf{D}(T_1) = \mathbf{D}_1: \quad u(a) = 0, \quad u(b) = 0 \tag{2.15}$$

(нулевые граничные условия),

$$T_2, \quad \mathbf{D}(T_2) = \mathbf{D}_2: \quad u'(a) - h_a u(a) = 0, \quad u'(b) + h_b u(b) = 0 \tag{2.16}$$

(условия упругой границы),

$$T_3, \quad \mathbf{D}(T_3) = \mathbf{D}_3: \quad u(a) = 0, \quad u'(a) = 0 \tag{2.17}$$

(нулевые начальные условия),

$$T_0, \quad \mathbf{D}(T_0) = \mathbf{D}_0: \quad u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0. \tag{2.18}$$

Оператор $T$ — *максимальный оператор* в $\mathbf{X}$, построенный по формальному оператору $L$. Операторы $T_1$, $T_2$, $T_3$ суть сужения порядка 2 оператора $T$ и в то же время продолжения порядка 2 оператора $T_0$.

Оператор $T$ необратим, так как уравнение $Tu = 0$ имеет два линейно независимых решения $u_1, u_2 \in \mathbf{X}$. Операторы $T_k$, $k = 0, 1, 2, 3$, обратимы, возможно, при некоторых дополнительных условиях. Оператор $T_3^{-1}$ существует и определен на всем $\mathbf{X}$, так как задача Коши всегда имеет решение

---

[1] Однако оператор дифференцирования $d/dx$ ограничен, если его рассматривать как оператор из $\mathbf{C}'[a, b]$ в $\mathbf{C}[a, b]$.

[2] Более подробное изложение теории обыкновенных дифференциальных операторов см. в книгах Коддингтон и Левинсон [1], Голдберг [1], Наймарк [1], Стоун [1].

и притом единственное. Он является интегральным оператором Вольтерра[1], определенным формулой

$$T_3^{-1}v(y)=\int_a^y [u_1(y)\,u_2(x)-u_2(y)\,u_1(x)]\,\frac{v(x)\,dx}{-W(x)\,p_0(x)}, \tag{2.19}$$

где $u_1$, $u_2$ — любые два линейно независимых решения уравнения $Tu=0$, а $W(x)$ — их *вронскиан*:

$$W(x)=u_1(x)\,u_2'(x)-u_2(x)\,u_1'(x)=\text{const}\exp\left(-\int^x \frac{p_1}{p_0}\,dx\right). \tag{2.20}$$

Оператор $T_0$ также обратим, так как он является сужением оператора $T_3$.

Оператор $T_1^{-1}$ является интегральным оператором

$$T_1^{-1}v(y)=\int_a^b g(y,\,x)\,v(x)\,dx, \tag{2.21}$$

где $g(y,\,x)$ — *функция Грина*[2] для нулевых граничных условий;

$$g(y,\,x)=\begin{cases}\dfrac{u_1(y)\,u_2(x)}{-p_0(x)\,W(x)}, & y\leqslant x,\\[2ex] \dfrac{u_2(y)\,u_1(x)}{-p_0(x)\,W(x)}, & y\geqslant x.\end{cases} \tag{2.22}$$

Здесь $u_1$, $u_2$ — нетривиальные решения уравнения $Lu=0$, такие, что $u_1(a)=0$, $u_2(b)=0$ и $W$ — их вронскиан, определенный формулой (20). Ядро $g$ корректно определено, если $u_1(b)\neq 0$, так как тогда $W(b)\neq 0$ и, следовательно, $W(x)$ всюду отличен от нуля. Это условие выполняется, если, например, $p_2>0$ на $[a,\,b]$. В самом деле, если $u_1(b)=u_1(a)=0$, то $u_1(x)$ имеет положительный максимум или отрицательный минимум[3]. Если $u_1(x_0)$ — положительный максимум, $x_0\in(a,\,b)$, то $u_1'(x_0)=0$, $u_1''(x_0)\leqslant 0$, и мы приходим к противоречию, поскольку $Lu_1(x_0)=0$, $p_0(x_0)<0$, $p_2(x_0)>0$. Аналогичным образом исключается возможность отрицательного минимума. Итак, $T_1$ обратим, если $p_2>0$ на $[a,\,b]$, и $T_1^{-1}$ — интегральный оператор (2.21), определенный на всем $\mathbf{X}$ [заметим, что ядро $g(y,\,x)$ непрерывно по совокупности переменных $x$ и $y$].

Аналогично можно показать, что оператор $T_2^{-1}$ существует, определен на всем $\mathbf{X}$ и является интегральным оператором вида (2.21), если, например, $p_2>0$ на $[a,\,b]$ и $h_a$, $h_b\geqslant 0$.

**Задача 2.13.** Область определения оператора $T_0^{-1}$ не совпадает со всем пространством $\mathbf{X}$; она состоит из функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_a^b r(x)\,u_k(x)\,v(x)\,dx=0,\quad k=1,\,2, \tag{2.23}$$

где

$$r(x)=\frac{1}{-p_0(x)}\exp\left(\int^x \frac{p_1}{p_0}\,dx\right).$$

---

[1] Ядро $t(y,\,x)$ (и соответствующий интегральный оператор) называется вольтерровым, если $t(y,\,x)=0$ при $y<x$ (или при $y>x$).

[2] Относительно функции Грина и других элементарных результатов, используемых ниже, см., например, Коддингтон и Левинсон [[1]].

[3] Так как $L$ имеет вещественные коэффициенты, то функцию $u_1(x)$ без ограничения общности можно считать вещественной.

Предполагая, что $p_2 > 0$, оценим норму оператора $T_1^{-1}$. Для этого покажем, что $g(y, x) \geqslant 0$ и

$$\int_a^b g(y, x)\,dx \leqslant c^{-1}, \quad c = \min_x p_2(x) > 0. \tag{2.24}$$

То, что $g(y, x) \geqslant 0$, следует из формулы (2.22), так как функции $u_1$, $u_2$ можно выбрать положительными по причинам, указанным выше. [Это следует также и из того факта, что $g(y, x)$ не может иметь отрицательный минимум по $y$ при фиксированном $x$, так как $g$ удовлетворяет уравнению $L_y g = 0$ при $y \neq x$ и имеет характеристическую особенность[1] в точке $y = x$.] Для доказательства неравенства (2.24) обозначим через $u_0(y)$ его левую часть. Функция $u_0(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $Lu_0 = 1$, причем $u_0(a) = u_0(b) = 0$. Пусть $u_0(x_0)$ — максимум функции $u_0(x)$. Имеем $u_0'(x_0) = 0$, $u''(x_0) \leqslant 0$, и поэтому из $Lu_0(x_0) = 1$ следует, что $p_2(x_0)\,u_0(x_0) \leqslant 1$, откуда вытекает (2.24).

Теперь из формулы (2.21) следует, что для $u = T_1^{-1}v$

$$\| u \| = \max_y | u(y) | \leqslant \max_x | v(x) | \max_y \int_a^b g(y, x)\,dx \leqslant \| v \| \cdot c^{-1}.$$

Поэтому

$$\| T_1^{-1} \| \leqslant c^{-1}. \tag{2.25}$$

**Задача 2.14.** Оценка (2.25) верна и для $T_2^{-1}$, если $h_a$, $h_b \geqslant 0$. Рассмотрим теперь дифференциальный оператор $L$ в другом банаховом пространстве. На этот раз положим $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Так как $\mathbf{C}[a, b]$ является подмножеством в $\mathbf{L}^p(a, b)$, то введенные выше операторы $T$ и $T_n$ можно рассматривать как операторы в $\mathbf{L}^p(a, b)$. Однако данное выше определение подпространства $\mathbf{D}(T)$ не является теперь столь уже естественным, так как $u''$ не обязана быть непрерывной для того, чтобы функция $Lu$ принадлежала $\mathbf{X}$. Естественно считать, что $u'$ абсолютно непрерывна на $(a, b)$ и $u'' \in \mathbf{X} = \mathbf{L}^p$[2]. Пусть $\mathbf{D}$ — множество всех таких функций; определим оператор $T$ формулой $Tu = Lu$, $u \in \mathbf{D}(T) = \mathbf{D}$. Сужения $T_k$, $k = 0, 1, 2, 3$, оператора $T$ можно определить так же, как и выше, «уменьшая» подпространство $\mathbf{D}$ с помощью граничных условий (2.15) — (2.18). [Отметим, что функция $u'$ непрерывна на $[a, b]$, так как $u'' \in \mathbf{L}^p$, и поэтому выражения $u(a)$, $u'(a)$ и т. д. имеют смысл; ср. пример 2.7.]

Все результаты, касающиеся существования операторов $T^{-1}$ и $T_n^{-1}$, полученные выше в случае $\mathbf{X} = \mathbf{C}[a, b]$, справедливы для пространства $\mathbf{L}^p(a, b)$. Достаточно сделать лишь следующее замечание. Функции Грина строятся по формальному оператору $L$ независимо от выбора банахова пространства $\mathbf{X}$. Тот факт, что операторы $T_n^{-1}$ ограничены и определены на всем $\mathbf{X}$, вытекает из формулы (2.21) и свойств функций Грина.

Оценка (2.25) неверна для $T_1^{-1}$ в $\mathbf{L}^p(a, b)$. Для того чтобы в рассматриваемом случае получить аналогичную оценку, воспользуемся неравенством

$$\int_a^b g(y, x)\,dy \leqslant c'^{-1}, \quad c' = \min_x (p_2 - p_1' + p_0''). \tag{2.26}$$

---

[1] Функция $\partial g(y, x)/\partial y$ разрывна по $y$ в точке $y = x$, причем ее скачок равен $1/p_0(x)$.

[2] Не обязательно предполагать, что $u'' \in \mathbf{X}$ для того, чтобы равенство $Tu = Lu$ определяло оператор в $\mathbf{X}$; достаточно предположить только, что $u \in \mathbf{X}$ и $Lu \in \mathbf{X}$. Однако это на первый взгляд более широкое определение приводит к тому же оператору $T$; см. замечание 2.16.

Здесь предполагается, что $c' > 0$. Замечая, что $g(x, y)$ является функцией Грина *сопряженного формального оператора*

$$Mv = (p_0 v)'' - (p_1 v)' + p_2 v, \tag{2.27}$$

и применяя неравенство (2.24) к оператору $M$, получаем (2.26). Неравенства (2.24), (2.26) и результат примера 2.11 приводят к оценке

$$\| T_1^{-1} \| \leqslant 1/c^{1-1/p} c'^{1/p} \leqslant 1/\min(c, c'). \tag{2.28}$$

**Задача 2.15.** Функции $ru_k$, $k = 1, 2$, в (2.23) суть решения сопряженного уравнения $Mv = 0$.

**Замечание 2.16.** Мы предположили в начале этого пункта, что интервал $(a, b)$ конечен, функции $p_0''$, $p_1'$, $p_2$ непрерывны на замкнутом интервале $[a, b]$ и $p_0 < 0$. В этом случае оператор $L$ называется *регулярным*. Рассмотрим теперь *сингулярные* случаи, в которых по крайней мере одно из упомянутых условий не выполняется. Предположим, что функции $p_0''$, $p_1'$, $p_2$ непрерывны на открытом интервале $(a, b)$ и $p_0 \neq 0$; функции $p_k$ могут быть комплексными, а интервал $(a, b)$ бесконечным.

Не все операторы $T_k$ можно определить в сингулярном случае. Однако всегда можно определить максимальный оператор $T$ и минимальный оператор $\dot{T}$ в $\mathrm{L}^p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$. Оператор $T$ задается формулой $Tu = Lu$, где $\mathrm{D}(T)$ — множество всех непрерывно дифференцируемых на $(a, b)$ функций $u(x) \in \mathbf{X}$ и таких, что $u'(x)$ абсолютно непрерывна на $(a, b)$ [так что $u''(x)$ определена почти всюду] и $Lu \in \mathbf{X}$. Оператор $\dot{T}$ есть сужение $T$ на подпространство $\mathrm{D}(\dot{T}) = \mathrm{C}_0^\infty(a, b)$ (см. пример 1.11). Операторы $T$ и $\dot{T}$ плотно определены.

В сингулярном случае совсем не просто определить сужения оператора $T$, аналогичные операторам $T_k$ и соответствующие «хорошим» граничным условиям. Сам оператор $T$ часто оказывается довольно «хорошим» оператором — в каком именно смысле, мы уточним позднее.

В регулярном случае введенный ранее оператор $T$ на первый взгляд отличается от только что определенного максимального оператора, так как первоначальное определение требует, чтобы $u'' \in \mathbf{X}$, в то время как согласно новому определению должно выполняться включение $Lu \in \mathbf{X}$. Однако в действительности эти два определения эквивалентны, так как из $Lu \in \mathbf{X}$ в регулярном случае следует, что $u'' \in \mathbf{X}$. Это вытекает из свойства непрерывной дифференцируемости на $[a, b]$ решения $u$ дифференциального уравнения $Lu = f \in \mathbf{X}$.

## § 3. Ограниченные операторы

### 1. Пространство ограниченных операторов

Обозначим через $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ множество всех ограниченных операторов, отображающих пространство $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$. Оно соответствует множеству *всех* операторов, отображающих $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ в конечномерном случае (см. п. I.3.2). Вместо $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ мы пишем $\mathscr{B}(\mathbf{X})$.

Так как каждый оператор, принадлежащий $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, определен на всем $\mathbf{X}$, а его образ содержится в $\mathbf{Y}$, то линейная комбинация $\alpha S + \beta T$ операторов $S$ и $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ имеет смысл (см. п. I.3.2). Результирующий оператор линеен и ограничен. Таким образом, $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ — нормированное пространство с нормой

$\| T \|$ (см. п. I.4.1). Произведение $TS$ операторов $T \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ и $S \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, определенное формулой (I.3.15), принадлежит $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$.

**Пример 3.1.** Рассмотрим оператор $T$, построенный по матрице в примере 2.3. Если условие (2.5) (см. пример 2.11) выполнено, то максимальный оператор $T$ в $\mathrm{X} = \mathrm{l}^p$ определен всюду в $\mathrm{X}$ и ограничен. Таким образом, $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$. Множество всех операторов такого типа является линейным подпространством в $\mathscr{B}(\mathrm{X})$. Если $T$ и $S$ — операторы такого типа, определенные матрицами $(\tau_{jk})$ и $(\sigma_{jk})$ соответственно, то оператор $TS \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ построен по матрице $(\tau_{jk}) \cdot (\sigma_{jk})$.

**Пример 3.2.** Рассмотрим интегральный оператор вида (2.7). Рассматриваемый как максимальный интегральный оператор из $\mathrm{X} = \mathrm{L}^p(\mathrm{E})$ в $\mathrm{Y} = \mathrm{L}^p(\mathrm{F})$, оператор $T$ определен на всем $\mathrm{X}$ и ограничен; его норма $\| T \| \leqslant M'^{1-1/p} M''^{1/p}$, если выполнено условие (2.8). Итак, $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Интегральные операторы такого типа образуют линейное подпространство в $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

Рассмотрим интегральный оператор $S \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ того же типа с ядром $s(z, y)$, где $y \in \mathrm{F}$, $z \in \mathrm{G}$ и $\mathrm{Z} = \mathrm{L}^p(\mathrm{G})$. Произведение $ST$ определено и принадлежит $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$. Оператор $ST$ оказывается интегральным оператором с ядром

$$r(z, x) = \int_{\mathrm{F}} s(z, y)\, t(y, x)\, dy. \tag{3.1}$$

Это следует из равенства $(ST)u = S(Tu)$, если поменять в нем порядок интегрирования; здесь применима теорема Фубини, так как все возникающие при этом интегралы абсолютно сходятся. Нетрудно видеть, что ядро $r$, определенное формулой (3.1), удовлетворяет условию (2.8), если ядра $s$ и $t$ удовлетворяют условию (2.8).

**Задача 3.3.** Ядро $\mathrm{N}(T)$ оператора $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ есть замкнутое линейное подпространство в $\mathrm{X}$.

*Пространство* $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *банахово*. Для доказательства его полноты обозначим через $\{T_n\}$ последовательность Коши в $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Так как $\| T_n u - T_m u \| \leqslant \| T_n - T_m \| \| u \| \to 0$, то $\{T_n u\}$ — последовательность Коши в $\mathrm{Y}$ для каждого фиксированного $u \in \mathrm{X}$. Поскольку $\mathrm{Y}$ полно, существует вектор $v \in \mathrm{Y}$ такой, что $T_n u \to v$. Определим оператор $T$, полагая $Tu = v$. Рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены при доказательстве полноты пространства $\mathrm{X}^*$ в § I.4, показывают, что $T$ линеен и ограничен, так что $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ и $\| T_n - T \| \to 0$.

Бóльшую часть результатов относительно пространства $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, полученных в конечномерном случае, можно перенести на рассматриваемый общий случай (за возможным исключением тех результатов, которые используют существование базиса); отметим, в частности, выражение (I.4.2) для нормы $\| T \|$, неравенство (I.4.6) для $\| TS \|$ и различные результаты о бесконечных рядах и операторнозначных функциях, приведенные в § I.4.

В отличие от конечномерного случая в пространстве $\mathscr{B}$ (X, Y) можно ввести различные виды сходимости. Пусть $T$, $T_n \in \mathscr{B}$ (X, Y), $n = 1, 2, \ldots$ . Сходимость по норме в $\mathscr{B}$ (X, Y) называется *равномерной сходимостью*. Говорят, что последовательность $\{T_n\}$ в $\mathscr{B}$ (X, Y) *сильно* сходится к оператору $T \in \mathscr{B}$ (X, Y), если $T_n u \to Tu$ для каждого $u \in$ X. Отметим, что сходимость последовательности $\{T_n\}$ по норме эквивалентна равномерной сходимости последовательности $\{T_n u\}$ в шаре $\| u \| \leqslant 1$. Далее, последовательность $\{T_n\}$ сходится *слабо*, если $\{T_n u\}$ сходится слабо для каждого $u \in$ X, другими словами, если последовательность $(T_n u, g)$ сходится для каждого $u \in$ X и $g \in$ Y*. Если для каждого $u \in$ X вектор $Tu$ является слабым пределом последовательности $\{T_n u\}$, то $T$ называется *слабым пределом* последовательности $\{T_n\}$. (Слабый предел единствен.) Последовательность $\{T_n\}$ сходится по норме тогда и только тогда, когда $(T_n u, g)$ равномерно сходится при $\| u \| \leqslant 1$ и $\| g \| \leqslant 1$ (см. теорему 1.32). Если пространство Y слабо полно (см. п. 1.6), то слабо сходящаяся последовательность в $\mathscr{B}$ (X, Y) имеет слабый предел. Из сходимости по норме вытекает сильная сходимость, которая влечет за собой слабую сходимость. Мы используем следующие обозначения: $T = \text{u-lim}\, T_n$, $T_n \underset{\text{u}}{\to} T$ для сходимости по норме, $T = \text{s-lim}\, T_n$, $T_n \underset{\text{s}}{\to} T$ для сильной сходимости и $T = \text{w-lim}\, T_n$, $T_n \underset{\text{w}}{\to} T$ для слабой сходимости.

Задача 3.4. Если $\{T_n u\}$ сильно сходится для каждого $u \in$ X, то $\{T_n\}$ сильно сходится к некоторому $T \in \mathscr{B}$ (X, Y).

Слабо сходящаяся последовательность $\{T_n\}$ равномерно ограничена; это значит, что ограничена последовательность $\{\| T_n \|\}$. Чтобы убедиться в этом, напомним, что слабо сходящаяся последовательность $\{T_n u\}$ ограничена при каждом $u \in$ X (см. п. 1.6). Наше утверждение следует теперь из принципа равномерной ограниченности (нужно применить теорему 1.29 к семейству $p_\lambda(u) = \| T_n u \|$). Из неравенства (1.26) следует, что

$$\|\text{w-lim}\, T_n \| \leqslant \lim\inf \| T_n \|. \tag{3.2}$$

Следующие леммы будут часто использоваться в дальнейшем. Все операторы в этих леммах, если не оговорено противное, принадлежат пространству $\mathscr{B}$ (X, Y).

**Лемма 3.5.** *Равномерно ограниченная последовательность $\{T_n\}$ сильно сходится (к $T$), если $\{T_n u\}$ сильно сходится (к $Tu$) для всех векторов $u$ из фундаментального подмножества в* X.

**Лемма 3.6.** *Равномерно ограниченная последовательность $\{T_n\}$ слабо сходится (к $T$), если $\{(T_n u, g)\}$ сходится (к $(Tu, g)$) для всех $u$ из фундаментального подмножества в* X *и всех $g$ из фундаментального подмножества в* Y*.

Доказательства этих двух лемм аналогичны доказательству леммы 1.31, и мы не приводим их.

**Лемма 3.7.** *Если* $T_n \xrightarrow[s]{} T$, *то* $T_n u$ *равномерно сходится к* $Tu$ *для всех* $u$ *из некоторого компактного подмножества* $\mathrm{S}$ *в* $\mathrm{X}$.

Доказательство. Заменяя в случае необходимости $T_n$ на $T_n - T$, можно считать, что $T = 0$. Компактное подмножество $\mathrm{S}$ вполне ограничено, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует конечное число $u_k \in \mathrm{S}$, таких, что каждый элемент $u \in \mathrm{S}$ лежит на расстоянии не более чем $\varepsilon$ от некоторого $u_k$[1]. Так как $T_n u_k \to 0$ при $n \to \infty$, то существуют положительные числа $n_k$ такие, что $\| T_n u_k \| < \varepsilon$ при $n > n_k$. Если $u \in \mathrm{S}$, то $\| T_n u \| \leqslant \leqslant \| T_n (u - u_k) \| + \| T_n u_k \| \leqslant (M + 1)\, \varepsilon$, когда $n > \max n_k$, где вектор $u_k$ таков, что $\| u - u_k \| < \varepsilon$, а $M = \sup\limits_n \| T_n \|$ (согласно предыдущему замечанию, $M$ конечно).

**Лемма 3.8.** *Если* $T_n \xrightarrow[s]{} T$ *в* $\mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *и* $S_n \xrightarrow[s]{} S$ *в* $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, *то* $T_n S_n \to TS$ *в* $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$.

Доказательство. $T_n S_n u - TSu = T_n (S_n - S)\, u + + (T_n - T)\, Su \to 0$ для каждого $u \in \mathrm{X}$. Отметим, что семейство $\{T_n\}$ равномерно ограничено и потому $\| T_n (S_n - S)\, u \| \leqslant \leqslant M \| (S_n - S)\, u \| \to 0$.

**Лемма 3.9.** *Если* $T_n \xrightarrow[w]{} T$ *в* $\mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *и* $S_n \xrightarrow[s]{} S$ *в* $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, *то* $T_n S_n \xrightarrow[w]{} TS$ *в* $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.8; отметим только, что $| (T_n (S_n - S)\, u, g) | \leqslant \leqslant M \| g \| \| (S_n - S)\, u \| \to 0$ для каждого $u \in \mathrm{X}$ и $g \in \mathrm{Z}^*$.

**Задача 3.10.** Если $u_n \xrightarrow[s]{} u$ и $T_n \xrightarrow[s]{} T$, то $T_n u_n \xrightarrow[s]{} Tu$. Если $u_n \xrightarrow[s]{} u$ и $T_n \xrightarrow[w]{} T$, то $T_n u_n \xrightarrow[w]{} Tu$.

Используя рассмотренные выше виды сходимости в $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, можно ввести различные понятия непрерывности операторнозначных функций $t \to T(t) \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ вещественной или комплексной переменной $t$. Так, функция $T(t)$ непрерывна *по норме*, если $\| T(t + h) - T(t) \| \to 0$ при $h \to 0$. Функция $T(t)$ *сильно непрерывна*, если вектор-функция $T(t)\, u$ сильно непрерывна для каждого $u \in \mathrm{X}$; $T(t)$ *слабо непрерывна*, если $T(t)\, u$ слабо непре-

---

[1] Если бы это было не так для некоторого $\varepsilon > 0$, то нашлась бы бесконечная последовательность $u_n \in \mathrm{S}$ такая, что $\| u_n - u_m \| \geqslant \varepsilon$, $n \neq m$; такая последовательность не содержит сходящейся подпоследовательности.

рывна для каждого $u \in \mathbf{X}$, т. е. функция $(T(t)\,u,\ g)$ непрерывна для всех $u \in \mathbf{X}$ и $g \in \mathbf{Y}^*$.

Функция $\| T(t) \|$ непрерывна, если $T(t)$ непрерывна по норме. Это неверно, вообще говоря, для сильно непрерывных функций $T(t)$. *Если же $T(t)$ слабо непрерывна, то $\| T(t) \|$ локально ограничена и полунепрерывна снизу.* Локальная ограниченность следует из того факта, что последовательность $\{\| T(t_n) \|\}$ ограничена, если $t_n \to t$; полунепрерывность снизу следует из (3.2).

Аналогично можно ввести различные понятия дифференцируемости. Функция $T(t)$ *дифференцируема по норме*, если отношение $h^{-1}[T(t+h) - T(t)]$ имеет предел по норме, который называется производной по норме функции $T(t)$. Сильная производная $T'(t) = dT(t)/dt$ определяется равенством $T'(t)\,u = \lim h^{-1}[T(t+h)\,u - T(t)\,u]$; аналогично можно определить слабую производную.

Задача 3.11. Если $u(t) \in \mathbf{X}$ и $T(t) \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ — сильно дифференцируемые функции, то $T(t)\,u(t) \in \mathbf{Y}$ сильно дифференцируема и $\frac{d}{dt}(T(t)\,u(t)) = T'(t)\,u(t) + T(t)\,u'(t)$.

Можно также определить различные понятия интеграла операторнозначной функции $T(t)$ вещественной переменной $t$. Если $T(t)$ непрерывна по норме, то интеграл $\int T(t)\,dt$ можно определить так же, как в конечномерном случае. Если $T(t)$ лишь сильно непрерывна, то для каждого $u \in X$ можно определить интеграл $v = \int T(t)\,u\,dt$. Ясно, что $\| v \| \leqslant \int \| T(t)\,u \|\,dt \leqslant \| u \| \int \| T(t) \|\,dt$; отметим, что функция $\| T(t) \|$ не обязана быть непрерывной, однако она ограничена и полунепрерывна снизу и потому интегрируема [1]. Таким образом, отображение $u \to v = Su$ определяет оператор $S \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, норма которого не превосходит $\int \| T(t) \|\,dt$. Полагая $\int T(t)\,dt = S$, мы определим интеграл в сильном смысле $\int T(t)\,dt$ сильно непрерывной функции $T(t)$, обладающий следующими свойствами:

$$\left(\int T(t)\,dt\right) u = \int T(t)\,u\,dt, \qquad \left\| \int T(t)\,dt \right\| \leqslant \int \| T(t) \|\,dt, \tag{3.3}$$

$$\frac{d}{dt} \int^{t} T(s)\,ds = T(t), \tag{3.4}$$

---

[1] Если вещественная функция $f(t)$ полунепрерывна снизу, то множество $\{t\colon f(t) > \alpha\}$ открыто для каждого $\alpha$. Следовательно, $f$ измерима по Лебегу.

слева в последнем равенстве фигурирует сильная производная. Аналогично можно определить интеграл функции $T(\zeta)$ комплексной переменной $\zeta$ вдоль кривой на комплексной плоскости.

Так же, как и для вектор-функций, понятия равномерной, сильной и слабой голоморфности для операторнозначных функций совпадают. Точнее, имеет место

**Теорема 3.12.** *Пусть функция $T(\zeta)$ со значениями в $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ определена в области $\Delta$ комплексной плоскости и для каждого $u \in \mathrm{X}$ и $g \in \mathrm{Y}^*$ функция $(T(\zeta)u, g)$ голоморфна в $\Delta$. Тогда $T(\zeta)$ голоморфна по норме в $\Delta$ (дифференцируема по норме в $\Delta$).*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.37, и мы опускаем его. Следует отметить, что в случае локально ограниченной функции $\| T(\zeta) \|$ для голоморфности $T(\zeta)$ достаточно предположить, что $(T(\zeta)u, g)$ голоморфна для всех $u$ из фундаментального подмножества в $\mathrm{X}$ и для всех $g$ из фундаментального подмножества в $\mathrm{Y}^*$.

**Задача 3.13.** Пусть $T_n \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ таковы, что функции $(T_n u, g)$ ограничены при каждом $u \in \mathrm{X}$ и каждом $g \in \mathrm{Y}^*$. Тогда последовательность $\{\| T_n \|\}$ ограничена.

## 2. Операторная алгебра $\mathscr{B}(\mathrm{X})$

Пространство $\mathscr{B}(\mathrm{X}) = \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ — это пространство всех ограниченных операторов в $\mathrm{X}$. В $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ определены не только линейные комбинации двух операторов $S$ и $T$, но также и их произведение $ST$, которое также принадлежит $\mathscr{B}(\mathrm{X})$. Таким образом, $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ — *полная нормированная алгебра* (банахова алгебра) (см. п. I.4.1). И снова, бо́льшая часть результатов относительно алгебры $\mathscr{B}(\mathrm{X})$, полученных в конечномерном случае, можно перенести на общий случай, за возможным исключением тех фактов, доказательство которых использует существование базиса. Следует отметить, что здесь существенна полнота пространства $\mathscr{B}(\mathrm{X})$; так, доказательство существования суммы абсолютно сходящегося ряда операторов зависит от полноты $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ [ср. с рядом Неймана (I.4.22) и показательной функцией (I.4.20)].

Оператор $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ называется *невырожденным*, если $T^{-1}$ существует и принадлежит $\mathscr{B}(\mathrm{X})$. В действительности достаточно знать лишь, что $T^{-1}$ определен на всем $\mathrm{X}$; ограниченность $T^{-1}$ в этом случае следует из теоремы о замкнутом графике (см. ниже задачу 5.21).

Если $\| T \| < 1$, то оператор $1 - T$ невырожден; это можно доказать, используя ряд Неймана так же, как в п. I.4.4. Далее, $T^{-1}$ непрерывно зависит от $T$ [на открытом множестве всех невырожденных операторов в $\mathscr{B}(\mathrm{X})$]. Если $T(\zeta) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ зависит от $\zeta$

голоморфно и невырожден, то $T^{-1}(\zeta)$ также голоморфен (см. п. I.4.5)[1]).

Для каждого $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ можно определить *спектральный радиус* $\operatorname{spr} T = \lim \| T^n \|^{1/n}$ так же, как в конечномерном случае (см. п. I.4.2). Оператор $T$ называется *квазинильпотентным*, если $\operatorname{spr} T = 0$.

След и детерминант, вообще говоря, не определены для операторов из $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ (здесь мы имеем примеры понятий, введенных в конечномерном случае с помощью явного использования базиса). Однако позднее мы это сделаем для некоторых специальных классов операторов в $\mathscr{B}(\mathbf{X})$.

**Пример 3.14.** Максимальный интегральный оператор $T$ из примера 2.4 принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{X})$, если $\mathbf{F} = \mathbf{E}$, $\mathbf{Y} = \mathbf{X} = \mathbf{L}^p(E)$ и выполнены условия (2.8). То же самое верно для максимального матричного оператора из примера 2.3. Операторы, обратные к дифференциальным операторам $T_1$, $T_2$, $T_3$ из примеров 2.6 и 2.7, принадлежат $\mathscr{B}(\mathbf{X})$, но $T_0^{-1} \notin \mathscr{B}(\mathbf{X})$ ($T_0^{-1}$ ограничен, но не определен всюду на $\mathbf{X}$). Аналогично, операторы, обратные к дифференциальным операторам $T_1$, $T_2$, $T_3$ из п. 2.3, принадлежат $\mathscr{B}(\mathbf{X})$ (при определенных условиях, сформулированных в § 2.3), но $T_0^{-1} \notin \mathscr{B}(\mathbf{X})$.

**Пример 3.15.** Интегральный оператор Вольтерра обычно (но не всегда) квазинильпотентен. Рассмотрим, например, ядро $t(y, x)$, которое непрерывно в треугольнике $a \leqslant x \leqslant y \leqslant b$ и обращается в нуль при $a \leqslant y < x \leqslant b$. Соответствующий интегральный оператор $T$ в $\mathbf{C}[a, b]$ или $\mathbf{L}^p(a, b)$ квазинильпотентен. Для доказательства заметим, что ядро $t_n(y, x)$ оператора $T^n$, $n = 1, 2, \ldots$, является ядром Вольтерра (т. е. $t_n(y, x) = 0$ при $y < x$). При $y > x$ имеем

$$| t_n(y, x) | \leqslant \frac{M^n (y-x)^{n-1}}{(n-1)!} \leqslant \frac{M^n (b-a)^{n-1}}{(n-1)!}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{3.5}$$

где $M = \max | t(y, x) |$; эта оценка выводится по индукции из формулы композиции ядер (3.1). Из (3.5) следует, что $\| T^n \| \leqslant M^n (b-a)^n/(n-1)!$ (см. пример 2.11) и поэтому $\operatorname{spr} T = 0$.

**Пример 3.16.** Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{l}^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и $T$ — максимальный оператор в $\mathbf{X}$, определенный матрицей $(\tau_{jk})$, у которой все элементы, за исключением элементов $\tau_{j,j+1} = \tau_j$, $j = 1, 2, \ldots$, равны нулю. Такой оператор называется *оператором левого сдвига*, а последовательность $\{\tau_j\}$ — *определяющей* для $T$. Если эта последовательность ограничена, то $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ и

$$T x_1 = 0, \quad T x_2 = \tau_1 x_1, \quad T x_3 = \tau_2 x_2, \ \ldots, \tag{3.6}$$

где $\{x_j\}$ — канонический базис в $\mathbf{X}$. Кроме того,

$$\| T \| = \sup_j | \tau_j |. \tag{3.7}$$

Степень $T^m$ оператора $T$ представляется матрицей $(\tau_{jk}^{(m)})$, у которой все элементы, за исключением элементов вида $\tau_{j,\,j+m}^{(m)} = \tau_j \tau_{j+1} \ldots \tau_{j+m-1}$, равны нулю. Таким образом,

$$\| T^m \| = \sup_j | \tau_j \tau_{j+1} \ldots \tau_{j+m-1} |. \tag{3.8}$$

---

[1] То же самое верно, когда $T(\zeta) \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ голоморфно зависит от $\zeta$ и $T^{-1}(\zeta) \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.

Отсюда следует, в частности, что

$$\mathrm{spr}\, T = \tau, \quad \text{если } |\tau_j| \to \tau \text{ при } j \to \infty. \tag{3.9}$$

Аналогично, *оператор правого сдвига* $T'$ определяется матрицей $(\tau'_{jk})$, у которой все элементы, за исключением $\tau'_{j+1,\,j} = \tau'_j$, равны нулю. Если последовательность $\{\tau'_j\}$ ограничена, то $T' \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ и

$$T' x_1 = \tau'_1 x_2, \quad T'_1 x_2 = \tau'_2 x_3, \; \ldots \; . \tag{3.10}$$

Верны также формулы, аналогичные формулам (3.7) и (3.9).

### 3. Сопряженный оператор

Так же, как и в конечномерном случае (см. п. I.3.6 и п. I.4.1), для каждого $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ можно определить сопряженный оператор $T^* \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}^*, \mathrm{X}^*)$. Для каждого $g \in \mathrm{Y}^*$ отображение $u \to (g, Tu)$ является *ограниченной* полулинейной формой на X в силу неравенств $|(g, Tu)| \leqslant \|g\|\,\|Tu\| \leqslant \|T\|\,\|g\|\,\|u\|$; поэтому $(g, Tu)$ можно записать в виде $(f, u)$, где $f \in \mathrm{X}^*$. Определим оператор $T^*$, полагая $T^*g = f$. Как и прежде, $\|T^*g\| = \|f\| = \sup\limits_{\|u\| \leqslant 1} |(f, u)| \leqslant \|T\|\,\|g\|$; поэтому $\|T^*\| \leqslant \|T\|$. Для того чтобы получить более точный результат $\|T^*\| = \|T\|$, мы несколько видоизменим рассуждения из п. I.4.1, в которых используется равенство $\mathrm{X}^{**} = \mathrm{X}$, не выполняющееся в общем случае. Применяя предыдущий результат к $T^*$, получаем $\|T^{**}\| \leqslant \|T^*\| \leqslant \|T\|$. Если X канонически отождествить с подпространством в $\mathrm{X}^{**}$, то окажется, что $T^{**} \supset T$, так как $(T^{**}u, g) = (u, T^*g) = \overline{(T^*g, u)} = \overline{(g, Tu)} = (Tu, g)$. Это показывает, что полулинейная форма $T^{**}u$ на Y представима с помощью $Tu \in \mathrm{Y}$, и потому $T^{**}u = Tu$ при отождествлении. Из $T^{**} \supset T$ следует, что $\|T^{**}\| \geqslant \|T\|$ и, значит, $\|T\| = \|T^*\|$.

И снова остается в силе бо́льшая часть результатов, полученных ранее в конечномерном случае. Среди исключений следует упомянуть то обстоятельство, что второе соотношение в (I.3.37) должно быть заменено равенством

$$\mathrm{N}(T) = \mathrm{R}(T^*)^{\perp} \cap \mathrm{X}. \tag{3.11}$$

Соответствующим образом можно обобщить и соотношения (I.3.38) между размерностями нуль-пространств, дефектами и рангами операторов $T$ и $T^*$. Эти вопросы будут рассмотрены более подробно в гл. IV.

Соотношения между операторами $T^{-1}$ и $T^{*-1}$, установленные в гл. I, нужно изменить следующим образом. Если оператор $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ имеет обратный $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, то $T^*$ имеет обратный $T^{*-1} = T^{-1*} \in \mathscr{B}(\mathrm{X}^*, \mathrm{Y}^*)$. Этот результат получается переходом к сопряженным операторам в равенствах $T^{-1}T = 1_{\mathrm{X}}$, $TT^{-1} = 1_{\mathrm{Y}}$ ($1_{\mathrm{X}}$ — тождественный оператор в X). Обратно, из существования $T^{*-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{X}^*, \mathrm{Y}^*)$ следует существование $T^{-1} \in$

$\in \mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$; доказательство этого факта нетривиально и будет дано позднее в более общем случае неограниченных операторов (см. теорему 5.30).

**Пример 3.17.** Рассмотрим максимальный интегральный оператор $T$ из примера 2.4: $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, где $\mathbf{X} \in \mathbf{L}^p(\mathbf{E})$, $\mathbf{Y} = \mathbf{L}^p(\mathbf{F})$ (см. пример 3.2). Таким образом, $T^* \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}^*, \mathbf{X}^*)$, где $\mathbf{X}^* = \mathbf{L}^q(\mathbf{E})$, $\mathbf{Y}^* = \mathbf{L}^q(\mathbf{F})$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ (см. пример 1.25; здесь мы предполагаем, что $p < \infty$). Оператор $T^*$ оказывается интегральным оператором, ядро которого является эрмитово сопряженным к ядру оператора $T$:

$$t^*(x, y) = \overline{t(y, x)}. \tag{3.12}$$

Это следует из равенств

$$(T^*g, u) = (g, Tu) = \int\limits_{\mathbf{F}} g(y)\,dy \int\limits_{\mathbf{E}} \overline{t(y, x)\,u(x)\,dx} = \int\limits_{\mathbf{E}} \overline{u(x)}\,dx \int\limits_{\mathbf{F}} \overline{t(y, x)}\,g(y)\,dy,$$

где $u \in \mathbf{X}$, $g \in \mathbf{Y}^*$; изменение порядка интегрирования возможно (по теореме Фубини), так как условие (2.8) обеспечивает абсолютную сходимость соответствующего двойного интеграла.

**Пример 3.18.** Пусть $T$ — максимальный оператор в $\mathbf{X} = \mathbf{l}^q$, $1 \leqslant p < \infty$, определенный матрицей $(\tau_{jk})$ (см. пример 2.3). Если выполнено условие (2.5), то $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ (пример 3.1). Тогда $T^* \in \mathscr{B}(\mathbf{X}^*)$, где $\mathbf{X}^* = \mathbf{l}^q$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$ (пример 1.25). Оператор $T^*$ определен матрицей

$$\overset{*}{\tau}_{jk} = \bar{\tau}_{kj}. \tag{3.13}$$

Доказательство аналогично тому, которое было проведено в предыдущем примере.

**Пример 3.19.** Операторы $T$ и $T'$ из примера 3.16 сопряжены друг к другу, если $T$ и $T'$ определены в пространстве $\mathbf{l}^p$ и $\mathbf{l}^q$ соответственно, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 < p < \infty$ и $\tau'_j = \bar{\tau}_j$.

## 4. Проекторы

Идемпотентный оператор $P \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ (это значит, что $P^2 = P$) называется *проектором*. Проектору $P$ соответствует разложение

$$\mathbf{X} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{N}, \tag{3.14}$$

где $\mathbf{M} = P\mathbf{X}$ и $\mathbf{N} = (1 - P)\,\mathbf{X}$, см. п. I.3.4. Следует добавить, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — *замкнутые* линейные подпространства в $\mathbf{X}$. Это следует из того, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ суть нуль-пространства операторов $1 - P$ и $P$ соответственно (см. задачу 3.3).

Обратно, разложение (3.14) банахова пространства в прямую сумму двух замкнутых линейных подпространств определяет проектор $P$ (на $\mathbf{M}$ параллельно $\mathbf{N}$). Ясно, что $P$ — линейный оператор в $\mathbf{X}$, однако доказательство ограниченности $P$ не просто. Оно будет приведено в следующем параграфе в качестве приложения теоремы о замкнутом графике (теорема 5.20).

Для заданного замкнутого линейного подпространства $\mathbf{M}$ в $\mathbf{X}$ не всегда существует подпространство $\mathbf{N}$, дополнительное к $\mathbf{M}$

в том смысле, что имеет место разложение (3.14)[1]. Другими словами, не для каждого подпространства существует проектор. С другой стороны, $\mathrm{M}$ может иметь несколько проекторов.

**Задача 3.20.** Пусть даны $v \in \mathrm{X}$ и $f \in \mathrm{X}^*$. Оператор $P$, определенный равенствами $Pu = (u, f)\, v$, $\mathrm{D}(P) = \mathrm{X}$, является проектором тогда и только тогда, когда $(v, f) = 1$. В этом случае $P\mathrm{X}$ есть одномерное подпространство $[v]$, порожденное вектором $v$, а $\mathrm{N}(P)$ — замкнутое линейное подпространство в $\mathrm{X}$, состоящее из всех таких $u$, что $(u, f) = 0$ ($\mathrm{N}(P) = [f]^{\perp} \cap \mathrm{X}$). Имеем $\| P \| \leqslant \| f \| \, \| v \|$.

**Задача 3.21.** Результаты п. I.4.6 о парах проекторов сохраняют силу для проекторов $P$ и $Q$ в банаховом пространстве $\mathrm{X}$. В частности, $P\mathrm{X}$ и $Q\mathrm{X}$ изоморфны[2], если $\| P - Q \| < 1$.

Результаты п. I.3.4 о семействе проекторов $P_1, \ldots, P_s$ в $\mathrm{X}$, удовлетворяющих условиям $P_jP_k = \delta_{jk}P_j$, также можно без изменений перенести на случай банахова пространства.

Если $P$ — проектор в $\mathrm{X}$, то $P^*$ — проектор в $\mathrm{X}^*$. Тогда $\mathrm{M}^* = P^*\mathrm{X} = \mathrm{N}(1 - P^*) = \mathrm{R}(1 - P)^{\perp} = \mathrm{N}^{\perp}$ и, аналогично, $\mathrm{N}^* = (1 - P^*)\,\mathrm{X}^* = \mathrm{M}^{\perp}$.

**Пример 3.22.** Пусть $\mathrm{X} = C[-a, a]$, $a > 0$, $\mathrm{M}$ и $\mathrm{N}$ — подмножества в $\mathrm{X}$, состоящие из всех четных и нечетных функций соответственно. Подмножества $\mathrm{M}$ и $\mathrm{N}$ суть дополнительные замкнутые линейные подпространства в $\mathrm{X}$. Проектор $P$ на $\mathrm{M}$ параллельно $\mathrm{N}$ задается формулой

$$Pu(x) = \frac{1}{2}\,(u(x) + u(-x)). \tag{3.15}$$

Нетрудно видеть, что $\| P \| = \| 1 - P \| = 1$. Пространство $\mathrm{M}$ можно далее разложить в прямую сумму замкнутых линейных подпространств $\mathrm{M}_0$ и $\mathrm{M}_1$ таким образом, чтобы рассматриваемые на интервале $[0, a]$ функции $u \in \mathrm{M}_0$ и $u \in \mathrm{M}_1$ были соответственно четны и нечетны относительно центра $x = a/2$ этого интервала. Аналогично, $\mathrm{N}$ представляется в виде $\mathrm{N}_0 + \mathrm{N}_1$, так что $\mathrm{X} = \mathrm{M}_0 \oplus \mathrm{M}_1 \oplus \mathrm{N}_0 \oplus \mathrm{N}_1$. Каждый из четырех проекторов, ассоциированных с этим разложением пространства $\mathrm{X}$, снова имеет норму единица. Легко видеть, что те же результаты верны и для $\mathrm{L}^p(-a, a)$.

**Пример 3.23.** Пусть $\mathrm{X} = C[-\pi, \pi]$ и

$$P_n u(x) = \left( \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, u(x)\, dx \right) \cos nx, \qquad n = 1, 2, \ldots . \tag{3.16}$$

Операторы $P_n$ суть проекторы (см. задачу 3.20), удовлетворяющие соотношениям $P_mP_n = \delta_{mn}P_n$, причем

$$\| P_n \| \leqslant \frac{1}{\pi} \| \cos nx \|_1 \, \| \cos nx \|_\infty = \frac{4}{\pi}. \tag{3.17}$$

То же самое верно и для пространства $\mathrm{L}^p(-\pi, \pi)$, если нормы $\| \;\|_1$ и $\| \;\|_\infty$ заменить на $\| \;\|_q$ и $\| \;\|_p$, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$. В частности $\| P_n \| = 1$, если $p = 2$.

---

[1] См. Данфорд и Шварц [[1]], стр. 587.

[2] Банаховы пространства $\mathrm{X}$ и $\mathrm{Y}$ изоморфны, если существует оператор $U \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ такой, что $U^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$.

# § 4. Компактные операторы

## 1. Определение

Существует класс ограниченных операторов, называемых компактными (или вполне непрерывными) операторами, которые во многих отношениях аналогичны операторам в конечномерных пространствах. Оператор $T \in \mathscr{B}$ (X, Y) является *компактным*, если образ $\{Tu_n\}$ любой ограниченной последовательности $\{u_n\}$ в X содержит подпоследовательность Коши.

**Пример 4.1.** Интегральный оператор $T$ (см. пример 2.4) из $\mathrm{L}^1$ (E) в C (F) компактен, если E и F суть компактные множества, а ядро $t(y, x)$ *непрерывно* по совокупности переменных $x$ и $y$. Чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$| Tu(y')-Tu(y'') | \leqslant \int\limits_{\mathrm{E}} | t(y', x)-t(y'', x) || u(x) | dx \leqslant$$
$$\leqslant \| u \| \max_x | (t(y', x)-t(y'', x) |. \tag{4.1}$$

Так как функция $t(y, x)$ равномерно непрерывна, то величину $| Tu(y') - Tu(y'') |$ можно сделать сколь угодно малой за счет $| y' - y'' |$. При этом степень малости $| y' - y'' |$ зависит только от $\| u \|$. Другими словами, функции $Tu$ *равностепенно непрерывны*, если $u$ пробегает ограниченное множество. Так как семейство $\{Tu\}$ *равномерно ограничено*, когда ограничено множество $\{u\}$, то по теореме Асколи [1]) последовательность $\{Tu_n\}$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность, если последовательность $\{u_n\}$ ограничена. Это означает, что $\{Tu_n\}$ содержит подпоследовательность Коши в C (F) и потому оператор $T$ компактен.

То же самое верно, если интегральный оператор $T$ рассматривать как оператор из X в Y, где X = C (E) или $\mathrm{L}^p$ (E), а Y = C (F) или $\mathrm{L}^q$ (F), $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Это следует из того факта, что ограниченная последовательность в X заведомо ограничена по норме $\| u \|_1$, а последовательность Коши в C (F) является последовательностью Коши в Y [2]).

**Пример 4.2.** Пусть X = C′ $[a, b]$ и Y = C $[a, b]$ (норма в пространстве C′ определена формулой (1.8)). Так как X — подмножество в Y, то оператор $T$, переводящий функцию $u \in$ X в ту же самую функцию $u \in$ Y, есть оператор из X в Y, определенный на всем X. Оператор $T$ компактен. Это снова следует из теоремы Асколи, так как семейство $\{Tu\}$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено, если ограничено семейство $\{u\}$ [3]).

**Задача 4.3.** Каждый оператор $T \in \mathscr{B}$ (X, Y) компактен, если по крайней мере одно из пространств X, Y конечномерно.

---

[1]) См., например, Ройден [1], стр. 155.

[2]) Ряд других элементарных примеров компактных операторов приведен в книге Люстерника и Соболева [1].

[3]) Заметим, что $| u(t)-u(s) | = \left| \int\limits_s^t u'(x)\, dx \right| \leqslant | t-s | \| u \|_{\mathrm{X}}$.

Задача 4.4. Тождественный оператор $1_X$ в банаховом пространстве $X$ компактен тогда и только тогда, когда $X$ конечномерно. Это другая форма предложения, утверждающего, что $X$ локально компактно тогда и только тогда, когда $X$ конечномерно (см. п. 1.2).

Задача 4.5. Проектор $P \in \mathscr{B}(X)$ компактен тогда и только тогда, когда его образ конечномерен.

Задача 4.6. Операторы, обратные к дифференциальным операторам $T_k$, $k = 1, 2, 3$, из примеров 2.6 и 2.7, компактны. То же самое верно для дифференциальных операторов второго порядка, рассмотренных в п. 2.3.

## 2. Пространство компактных операторов

Обозначим через $\mathscr{B}_0(X, Y)$ множество всех компактных операторов в $\mathscr{B}(X, Y)$.

**Теорема 4.7.** *Множество* $\mathscr{B}_0(X, Y)$ *есть замкнутое линейное подпространство в банаховом пространстве* $\mathscr{B}(X, Y)$. *Таким образом,* $\mathscr{B}_0(X, Y)$ *само является банаховым пространством относительно нормы из* $\mathscr{B}(X, Y)$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\mathscr{B}_0(X, Y)$ — линейное подпространство. Так как оператор $\alpha T$ компактен одновременно с $T$, то остается показать, что сумма $T' + T''$ двух компактных операторов $T'$ и $T''$ есть компактный оператор. Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная последовательность в $X$. Выберем в ней подпоследовательность $\{u'_n\}$ такую, что $\{T'u'_n\}$ — последовательность Коши в $Y$; затем выберем в $\{u'_n\}$ подпоследовательность $\{u''_n\}$ такую, что $\{T''u''_n\}$ — последовательность Коши в $Y$. Ясно, что $\{(T' + T'')\, u''_n\}$ — последовательность Коши. Это значит, что $T' + T''$ компактен.

Докажем замкнутость подпространства $\mathscr{B}_0(X, Y)$. Пусть $\{T_k\}$ — последовательность компактных операторов, такая, что $\| T_k - T \| \to 0$ при $k \to \infty$ для некоторого $T \in \mathscr{B}(X, Y)$; требуется доказать, что $T$ компактен. Фиксируя ограниченную последовательность $\{u_n\}$ в $X$, выберем в $\{u_n\}$ подпоследовательность $\{u_n^{(1)}\}$ так, чтобы $\{T_1 u_n^{(1)}\}$ была последовательностью Коши, а затем в $\{u_n^{(1)}\}$ выберем подпоследовательность $\{u_n^{(2)}\}$ так, чтобы $\{T_2 u_n^{(2)}\}$ была последовательностью Коши и т. д. Диагональная последовательность $\{v_n = u_n^{(n)}\}$ обладает тем свойством, что $\{Tv_n\}$ есть последовательность Коши. В самом деле, так как $\{v_n\}$ является подпоследовательностью каждой последовательности $\{u_n^{(k)}\}$, то $\{T_k v_n\}$ — последовательность Коши при фиксированном $k$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем столь большое $k$, чтобы выполнялось неравенство $\| T_k - T \| < \varepsilon$, и затем столь большое $N$. чтобы выполнялось неравенство $\| T_k v_n - T_k v_{n+p} \| < \varepsilon$ при $n > N$, $p > 0$. Тогда

$$\| Tv_n - Tv_{n+p} \| \leqslant \| (T - T_k)(v_n - v_{n+p}) \| + \\ + \| T_k (v_n - v_{n+p}) \| \leqslant (2M + 1)\, \varepsilon, \qquad (4.2)$$

где $M = \sup \| u_n \| < \infty$. Так как неравенство (4.2) верно для любого $n > N$, то $\{Tv_n\}$ — последовательность Коши. Это доказывает компактность $T$.

**Теорема 4.8.** *Произведение компактного оператора на ограниченный оператор есть компактный оператор. Точнее, пусть* $T \in \mathscr{B}_0(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, $A \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ *и* $B \in \mathscr{B}(\mathrm{W}, \mathrm{X})$, *где* $\mathrm{W}, \mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z}$ — *банаховы пространства. Тогда* $AT \in \mathscr{B}_0(\mathrm{X}, \mathrm{Z})$ *и* $TB \in \mathscr{B}_0(\mathrm{W}, \mathrm{Y})$.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная последовательность в $\mathrm{X}$. Выберем в $\{u_n\}$ подпоследовательность $\{u'_n\}$ такую, что $\{Tu'_n\}$ — последовательность Коши в $\mathrm{Y}$. Тогда $\{ATu'_n\}$ — последовательность Коши в $\mathrm{Z}$; отсюда следует, что оператор $AT$ компактен. Пусть $v_n$ — ограниченная последовательность в $\mathrm{W}$. Тогда $\{Bv_n\}$ ограничена в $\mathrm{X}$ и поэтому содержит подпоследовательность $\{Bv'_n\}$ такую, что $\{TBv'_n\}$ — последовательность Коши. Это значит, что $TB$ — компактный оператор.

В частном случае, когда $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, из теоремы 4.8 следует, что произведение (в любом порядке) оператора из $\mathscr{B}_0(\mathrm{X}) = \mathscr{B}_0(\mathrm{X}, \mathrm{X})$ на оператор из $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ принадлежит $\mathscr{B}_0(\mathrm{X})$. Это означает, что $\mathscr{B}_0(\mathrm{X})$ — *замкнутый двусторонний идеал в банаховой алгебре* $\mathscr{B}(\mathrm{X})$.

**Задача 4.9.** Если $\dim \mathrm{X} = \infty$, то каждый оператор $T \in \mathscr{B}_0(\mathrm{X})$ вырожден (т. е. $T^{-1} \notin \mathscr{B}(\mathrm{X})$).

**Теорема 4.10.** *Оператор, сопряженный к компактному оператору, компактен, т. е. если* $T \in \mathscr{B}_0(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, *то* $T^* \in \mathscr{B}_0(\mathrm{Y}^*, \mathrm{X}^*)$.

Доказательство. Докажем сначала, что *образ компактного оператора является сепарабельным.* Для этого достаточно показать, что образ $T\mathrm{S}$ единичного шара $\mathrm{S}$ в $\mathrm{X}$ сепарабелен, так как $\mathrm{R}(T)$ есть объединение множеств $T\mathrm{S}$, $2T\mathrm{S}$, $3T\mathrm{S}$, . . ., каждое из которых подобно $T\mathrm{S}$. Для каждого натурального $n$ существует конечный набор из элементов $p_n$, принадлежащих $T\mathrm{S}$, такой, что расстояние от каждой точки $T\mathrm{S}$ до некоторых $p_n$ не превосходит $1/n$. В противном случае существовала бы бесконечная последовательность точек $Tu_n$ $(u_n \in \mathrm{S})$, все попарные расстояния между которыми больше чем $1/n$; из такой последовательности нельзя извлечь последовательность Коши, что противоречит предположению о компактности оператора $T$. Объединение (по всем $n$) упомянутых наборов из $p_n$ точек счетно и плотно в $T\mathrm{S}$. Сепарабельность $T\mathrm{S}$ доказана.

Возвращаясь к доказательству теоремы, зафиксируем $T \in \mathscr{B}_0(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Ясно, что $T^* \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}^*, \mathrm{X}^*)$. Мы должны показать, что из любой ограниченной последовательности $\{g_n\}$ в $\mathrm{Y}^*$ можно выделить подпоследовательность $\{g'_n\}$ такую, что $\{T^*g'_n\}$—

последовательность Коши в $\mathbf{X}^*$. Пусть $v_k$ — последовательность, плотная в $\mathbf{R}(T) \subset \mathbf{Y}$; существование такой последовательности было только что доказано. Так как числовая последовательность $\{(g_n\ v_k)\}$ ограничена при фиксированном $k$, то с помощью диагонального метода можно выделить из $\{g_n\}$ подпоследовательность $\{f_n\}$, такую, что $\{(f_n,\ v_k)\}$ — последовательность Коши при каждом фиксированном $k$. Так как $\{v_k\}$ плотна в $\mathbf{R}(T)$, то $\{(f_n,\ v)\}$ — последовательность Коши для каждого $v \in \mathbf{R}(T)$. (Рассуждения при этом аналогичны рассуждениям, использованным при доказательстве теоремы 4.7.)

Положим $f[v] = \lim (f_n,\ v)$. Форма $f$ — полулинейная форма на $\mathbf{R}(T)$, ограниченная ввиду ограниченности последовательности $\{f_n\}$. Форму $f$ можно продолжить до ограниченной полулинейной формы на $\mathbf{Y}$ (по теореме Хана — Банаха), которую мы обозначим также $f$. Таким образом, для каждого $v \in \mathbf{R}(T)$ имеем

$(f_n,\ v) \to (f,\ v),\quad f \in \mathbf{Y}^*,$ т. е. для всех $u \in \mathbf{X}$ при $n \to \infty$

$$(f_n,\ Tu) \to (f,\ Tu). \tag{4.3}$$

Покажем теперь, что $T^*f_n \xrightarrow[\mathrm{s}]{} T^*f$. Это завершит доказательство, так как $\{f_n\}$ — подпоследовательность, выделенная из $\{g_n\}$. Положим $f_n - f = h_n$; требуется доказать, что $T^*h_n \xrightarrow[\mathrm{s}]{} 0$. Предположим противное; тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $\| T^*h_n \| \geqslant \delta$ для бесконечного числа индексов $n$. Заменяя последовательность $\{h_n\}$ на подходящую подпоследовательность, мы можем считать, что $\| T^*h_n \| \geqslant \delta$ для всех $n$. Так как $\| T^*h_n \| = \sup\limits_{\| u \|=1} | (T^*h_n,\ u) |$, то для каждого $n$ существует вектор $u_n \in \mathbf{X}$ такой, что

$$| (h_n,\ Tu_n) | = | (T^*h_n,\ u_n) | \geqslant \delta/2, \quad \| u_n \| = 1. \tag{4.4}$$

Из компактности $T$ следует, что $\{Tu_n\}$ содержит последовательность Коши. Заменяя $\{Tu_n\}$, если это необходимо, подходящей подпоследовательностью, можно считать, что $\{Tu_n\}$ есть последовательность Коши. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N$, что $\| Tu_n - Tu_m \| < \varepsilon$ при $n,\ m > N$. Далее, из (4.4) следует, что

$$\frac{\delta}{2} \leqslant | (h_n,\ Tu_n) | \leqslant | (h_n,\ Tu_n - Tu_m) | + | (h_n,\ Tu_m) | \leqslant$$
$$\leqslant M\varepsilon + | (h_n,\ Tu_m) |, \quad M = \sup \| h_n \|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и фиксированном $m$, получаем $\delta/2 \leqslant M\varepsilon$, так как из (4.3) следует, что $(h_n,\ Tu) \to 0$. Число $\varepsilon$ произвольно, и поэтому $\delta = 0$.

### 3. Вырожденные операторы. След и детерминант

Оператор $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ называется *вырожденным*, если он имеет конечный ранг или, другими словами, если $\mathrm{R}(T)$ конечномерно. В этом случае образ оператора обязательно замкнут. Так как конечномерное пространство локально компактно (п. I.1.5), то *вырожденный оператор компактен*. Легко видеть, что множество всех вырожденных операторов является линейным подпространством в $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, вообще говоря, незамкнутым.

Легко проверяется также, что произведение вырожденного оператора $T$ и ограниченного оператора есть вырожденный оператор, причем его ранг не превосходит ранга оператора $T$ (можно дать несколько более точную формулировку этого предложения, как это было сделано в теореме 4.8). В частности, множество всех вырожденных операторов в $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ есть (не обязательно замкнутый) двусторонний идеал в алгебре $\mathscr{B}(\mathrm{X})$.

**Задача 4.11.** Оператор $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ вырожден тогда и только тогда, когда коразмерность нуль-пространства $\mathrm{N}(T)$ конечна ($\dim \mathrm{X}/\mathrm{N}(T) < \infty$).

**Задача 4.12.** Пусть $T_n$ — вырожденные операторы и $\| T_n - T \| \to 0$. Тогда оператор $T$ компактный, хотя и не обязательно вырожденный.

Вырожденный оператор $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ допускает удобное описание с помощью базиса $y_1, \ldots, y_m$ в $\mathrm{R}(T)$, где $m = \operatorname{rank} T$. Так как $Tu \in \mathrm{R}(T)$ для каждого $u \in \mathrm{X}$, то можно записать

$$Tu = \sum_{j=1}^{m} \eta_j y_j. \tag{4.5}$$

Коэффициенты $\eta_j$ однозначно определяются вектором $u$ и зависят от $u$ линейно. Более того, эти линейные формы ограничены, так как, согласно (I.1.21), $|\eta_j| \leqslant \gamma \| Tu \| \leqslant \gamma \| T \| \| u \|$. Следовательно, мы можем написать $\eta_j = \overline{(e_j, u)} = (u, e_j)$ для некоторых $e_j \in \mathrm{X}^*$, и тогда формула (4.5) принимает следующий вид:

$$Tu = \sum_{j=1}^{m} (u, e_j)\, y_j. \tag{4.6}$$

Вместо формулы (4.6) удобно писать так:

$$T = \sum (\ \ , e_j)\, y_j. \tag{4.7}$$

Для любого $g \in \mathrm{Y}^*$ имеем

$$(T^* g, u) = (g, Tu) = \sum_j (e_j, u)(g, y_j) = \Big(\sum_j (g, y_j)\, e_j, u\Big). \tag{4.8}$$

Так как это верно для всех $u \in \mathrm{X}$, то

$$T^* g = \sum_{j=1}^{m} (g, y_j)\, e_j, \quad \text{или} \quad T^* = \sum (\ \ , y_j)\, e_j. \tag{4.9}$$

Отсюда следует, что подпространство $\mathbf{R}(T^*)$ порождено векторами $e_1, \ldots, e_m$. Таким образом, $T^*$ также вырожден и $\operatorname{rank} T^* \leqslant \operatorname{rank} T$. Применение этого результата к $T^*$ показывает, что $T^{**}$ также вырожден и $\operatorname{rank} T^{**} \leqslant \operatorname{rank} T$. Так как, однако, $T$ можно рассматривать как ограничение оператора $T^{**}$, то $\operatorname{rank} T \leqslant \operatorname{rank} T^{**}$. Таким образом, доказана

**Теорема 4.13.** *Оператор $T$ вырожден тогда и только тогда, когда $T^*$ вырожден. Если $T$ вырожден, то*

$$\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} T^*. \tag{4.10}$$

*Равенство (4.10) сохраняет силу для всех $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, если допускается бесконечное значение ранга оператора $T$.*

**Задача 4.14.** Интегральный оператор с ядром вида $\sum\limits_{j=1}^{m} \overline{f_j(x)}\, g_j(y)$ вырожден (здесь $f_j \in \mathbf{X}^*$, $g_j \in \mathbf{Y}$).

**Задача 4.15.** Векторы $e_j$ в формуле (4.9) образуют базис в $\mathbf{R}(T^*)$, ассоциированный с базисом $\{y_j\}$ в $\mathbf{R}(T)$. Для другого базиса $\{f_j\}$ в $\mathbf{R}(T^*)$ формулы (4.7) и (4.9) примут вид

$$T = \sum \alpha_{jk}(\,\cdot\,, f_j)\, y_k, \quad T^* = \sum \overline{\alpha_{jk}}(\,\cdot\,, y_k)\, f_j.$$

Важное свойство вырожденных операторов $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ заключается в том, что для них можно определить след, а для операторов вида $1 + T$ можно определить детерминант[1]. Образ $\mathbf{R}(T)$ конечномерен и инвариантен относительно $T$. Обозначим через $T_{\mathbf{R}}$ часть оператора $T$ в $\mathbf{R} = \mathbf{R}(T)$. Определим *детерминант* оператора $1 + T$ формулой

$$\det(1 + T) = \det(1_{\mathbf{R}} + T_{\mathbf{R}}), \tag{4.11}$$

где $1_{\mathbf{R}}$ — тождественный оператор в $\mathbf{R}$. (Определение детерминанта оператора в конечномерном пространстве см. в п. I.3.1.)

Любое подпространство $\mathbf{M}$ в $\mathbf{X}$, содержащее $\mathbf{R}$, также инвариантно относительно $T$. Если $\mathbf{M}$ конечномерно, то определен детерминант $\det(1_{\mathbf{M}} + T_{\mathbf{M}})$. Оказывается, что

$$\det(1_{\mathbf{M}} + T_{\mathbf{M}}) = \det(1 + T). \tag{4.12}$$

Для доказательства выберем в $\mathbf{R}$ какой-либо базис и расширим его до базиса в $\mathbf{M}$; матрица оператора $T_{\mathbf{M}}$ в этом базисе обладает тем свойством, что все строки, соответствующие элементам базиса, не содержащимся в $\mathbf{R}$, состоят из нулевых элементов. Поэтому детерминант суммы этой матрицы и единичной матрицы равен $\det(1_{\mathbf{R}} + T_{\mathbf{R}})$, что по определению есть $\det(1 + T)$.

---

[1] Существует более широкий класс операторов, для которых можно определить след или детерминант; см. Растон [1], Гротендик [1] (случай гильбертова пространства рассмотрен в п. X.1.4).

Если оператор $T$ имеет вид (4.7), где $y_j = x_j$ образуют базис в $\mathbf{R}$, то матричные элементы оператора $T_{\mathbf{R}}$ в этом базисе суть $(x_k, e_j)$. Поэтому

$$\det(1 + T) = \det(\delta_{jk} + (x_j, e_k)). \tag{4.13}$$

Отметим, что эта формула верна и в том случае, когда оператор $T$ определен формулой (4.7), причем векторы $y_j = x_j \in \mathbf{X}$ необязательно линейно независимы. Это можно доказать с помощью предельного перехода в формуле (4.13).

Определенный выше детерминант обладает следующим свойством:

$$\det((1 + S)(1 + T)) = \det(1 + S)\det(1 + T). \tag{4.14}$$

Заметим, что $(1 + S)(1 + T) = 1 + R$, где $R = S + T + ST$ есть вырожденный оператор, если таковы $S$ и $T$. Для доказательства формулы (4.14) обозначим через $\mathbf{M}$ конечномерное подпространство, содержащее $\mathbf{R}(S)$ и $\mathbf{R}(T)$. Тогда $\mathbf{R}(R) \subset \mathbf{M}$ и, согласно (4.12), $\det((1 + S)(1 + T)) = \det(1 + R) = \det(1_{\mathbf{M}} + R_{\mathbf{M}}) = \det(1_{\mathbf{M}} + S_{\mathbf{M}} + T_{\mathbf{M}} + S_{\mathbf{M}}T_{\mathbf{M}}) = \det((1_{\mathbf{M}} + S_{\mathbf{M}})(1_{\mathbf{M}} + T_{\mathbf{M}})) = \det(1_{\mathbf{M}} + S_{\mathbf{M}})\det(1_{\mathbf{M}} + T_{\mathbf{M}}) = \det(1 + S)\det(1 + T)$.

Из (4.13) следует, что $\det(1 + \varkappa T)$ есть полином по $\varkappa$ степени не выше $\operatorname{rank} T = \dim \mathbf{R}$. Коэффициент при $\varkappa$ в этом полиноме называется *следом* оператора $T$. Таким образом, используя предыдущие обозначения, имеем

$$\operatorname{tr} T = \operatorname{tr} T_{\mathbf{R}} = \operatorname{tr} T_{\mathbf{M}}. \tag{4.15}$$

Если $T$ задан формулой (4.7), то, согласно (4.13), имеем

$$\operatorname{tr} T = \sum_{j=1}^{m} (x_j, e_j). \tag{4.16}$$

След вырожденного оператора обладает следующим свойством:

$$\operatorname{tr} TA = \operatorname{tr} AT, \tag{4.17}$$

где $T$ — вырожденный оператор из $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $A$ — любой оператор из $\mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. Отметим, что $TA$ — вырожденный оператор в $\mathbf{Y}$, а $AT$ — вырожденный оператор в $\mathbf{X}$. Для доказательства формулы (4.17) введем следующие обозначения: $\mathbf{R} = \mathbf{R}(T) \subset \mathbf{Y}$ и $\mathbf{S} = A\mathbf{R} \subset \mathbf{X}$. Пространства $\mathbf{R}$ и $\mathbf{S}$ конечномерны и $\mathbf{R}(AT) = A\mathbf{R}(T) = \mathbf{S}$, в то время как $\mathbf{R}(TA) \subset \mathbf{R}(T) = \mathbf{R}$. Поэтому, согласно (4.15), достаточно доказать равенство $\operatorname{tr}(TA)_{\mathbf{R}} = \operatorname{tr}(AT)_{\mathbf{S}}$. Очевидно, что $(AT)_{\mathbf{S}} = A'T'$, где $T'$ — оператор из $\mathbf{S}$ в $\mathbf{R}$, индуцированный оператором $T$ (т. е. $T'u = Tu$ для $u \in \mathbf{S}$), и $A'$ — оператор из $\mathbf{R}$ в $\mathbf{S}$, индуцированный оператором $A$; аналогично, $(TA)_{\mathbf{R}} = T'A'$. Таким образом, (4.17) сводится к известному равенству $\operatorname{tr} T'A' = \operatorname{tr} A'T'$ для операторов в конечномерных пространствах (см. задачу I.3.8).

**Задача 4.16.** $\det(1 + T^*) = \overline{\det(1 + T)}$, $\operatorname{tr} T^* = \overline{\operatorname{tr} T}$.

**Задача 4.17.** $\det(1 + TS) = \det(1 + ST)$ [здесь предполагается, что по крайней мере один из операторов $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $S \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ вырожден].

**Задача 4.18.** Обобщить соотношения (I.3.25) и (I.5.42) на случай вырожденных операторов.

**Задача 4.19.** Если $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ вырожден и нильпотентен, то $\operatorname{tr} T = 0$ и $\det(1 + T) = 1$.

# § 5. Замкнутые операторы

## 1. Замечания о неограниченных операторах

В предыдущих параграфах мы видели, что многие важные результаты теории операторов в конечномерных пространствах переносятся без существенных изменений на операторы из $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ [или $\mathscr{B}(\mathbf{X})$]. Для неограниченных операторов, область определения которых не совпадает со всем пространством, положение совершенно иное, и мы встречаемся с рядом трудностей.

Приведенное в п. 3.1 построение линейных комбинаций и произведений ограниченных операторов требует некоторых модификаций в случае неограниченных операторов. Линейная комбинация $\alpha S + \beta T$ двух операторов $S$ и $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ снова определяется по формуле (I.3.12), но область определения этого оператора есть по определению пересечение областей определения $S$ и $T$:

$$\mathbf{D}(\alpha S + \beta T) = \mathbf{D}(S) \cap \mathbf{D}(T). \tag{5.1}$$

Действительно, $\alpha Su + \beta Tu$ не имеет смысла, если вектор $u$ не принадлежит пересечению $\mathbf{D}(S) \cap \mathbf{D}(T)$. Может случиться, что пересечение (5.1) состоит только из нулевого вектора; тогда $\alpha S + \beta T$ — тривиальный оператор, область определения которого состоит лишь из нуля пространства $\mathbf{X}$ (его образ также состоит из нулевого вектора пространства $\mathbf{Y}$).

**Задача 5.1.** $0T \subset 0$, $0 + T = T + 0 = T$ для любого оператора $T$.

**Задача 5.2.** Для любых трех операторов $R, S, T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ имеем $(R + S) + T = R + (S + T)$; этот оператор мы будем обозначать через $R + S + T$. Далее, $S + T = T + S$; однако $(S + T) - T \subset S$ (включение в общем случае нельзя заменить равенством).

Произведение $TS$ оператора $T$ из $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{Z}$ и оператора $S$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ определяется по формуле (I.3.15); его область определения состоит по определению из всех векторов $u \in \mathbf{D}(S)$ таких, что $Su \in \mathbf{D}(T)$ — в противном случае правая часть (I.3.15) не имеет смысла. Таким образом,

$$\mathbf{D}(TS) = S^{-1}\mathbf{D}(T). \tag{5.2}$$

И снова может оказаться, что $\mathbf{D}(TS)$ состоит из одного вектора 0.

**Задача 5.3.** Пусть $S$ — оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, $T$ — оператор из $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{Z}$ и $R$ — оператор, имеющий $\mathbf{X}$ в качестве пространства значений. Оказывается, что $(TS)\,R = T\,(SR)$; этот оператор мы будем обозначать через $TSR$. Кроме того, $(\alpha T)\,S = T\,(\alpha S) = \alpha\,(TS)$ для $\alpha \neq 0$; при $\alpha = 0$ эти равенства следует заменить включением $(0T)\,S = 0\,(TS) \subset T\,(0S)$, так как области определения операторов $(0T)\,S$ и $0\,(TS)$ совпадают согласно (5.2), в то время как область определения оператора $T\,(0S)$ равна $\mathbf{D}\,(S)$. Далее, $(T_1 + T_2)\,S = T_1S + T_2S$, но $T\,(S_1 + S_2) \supset TS_1 + TS_2$, где знак $\supset$, вообще говоря, нельзя заменить знаком $=$. Далее, $1_{\mathbf{Y}}\,T = T1_{\mathbf{X}} = T$, где $1_{\mathbf{X}}$ — тождественный оператор в $\mathbf{X}$.

**Задача 5.4.** Если $T$ — обратимый оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, то $T^{-1}T = 1_{\mathbf{X}}$ и $TT^{-1} \subset 1_{\mathbf{Y}}$.

**Замечание 5.5.** Из сказанного следует, что надо соблюдать осторожность, когда мы имеем дело с операторами, определенными не на всем пространстве. В таких случаях удобнее работать с векторами, чем с самими операторами. Мы пишем, например, $T^{-1}\,(Tu) = u$, $u \in \mathbf{D}\,(T)$, вместо включения $T^{-1}T \subset 1_{\mathbf{X}}$. Как правило, мы будем свободно производить различные операции над операторами лишь только в том случае, когда они принадлежат классу $\mathscr{B}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$.

## 2. Замкнутые операторы

Среди неограниченных операторов выделяются операторы, которые называются замкнутыми; они допускают довольно подробное изучение и к тому же важны в приложениях.

Пусть $T$ — оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$. Последовательность $u_n \in \mathbf{D}\,(T)$ называется *$T$-сходящейся* (к $u \in \mathbf{X}$), если $\{u_n\}$ и $\{Tu_n\}$ — последовательности Коши (и $u_n \to u$). Для обозначения $T$-сходимости последовательности $\{u_n\}$ к $u$ мы будем писать $u_n \underset{T}{\to} u$. Оператор $T$ называется *замкнутым*, если из $u_n \underset{T}{\to} u$ следует, что $u \in \mathbf{D}\,(T)$ и $Tu = \lim Tu_n$; другими словами, для любой последовательности $u_n \in \mathbf{D}\,(T)$ такой, что $u_n \to u$ и $Tu_n \to v$, вектор $u$ принадлежит $\mathbf{D}\,(T)$ и $Tu = v$. Понятие замкнутости на первый взгляд несколько напоминает понятие непрерывности, однако в действительности эти понятия весьма различны.

Множество всех замкнутых операторов из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ мы будем обозначать $\mathscr{C}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$[1]. Мы пишем также $\mathscr{C}\,(\mathbf{X})$ вместо $\mathscr{C}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{X})$.

*Ограниченный оператор $T$ замкнут тогда и только тогда, когда подпространство $\mathbf{D}\,(T)$ замкнуто.* В самом деле, из $u_n \to u$, $u_n \in \mathbf{D}\,(T)$, следует сходимость последовательности $\{Tu_n\}$. Итак, замкнутость $T$ эквивалентна тому, что из сходимости $u_n \to u$, $u_n \in \mathbf{D}\,(T)$, следует $u \in \mathbf{D}\,(T)$. В частности, каждый оператор из $\mathscr{B}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ замкнут: $\mathscr{B}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y}) \subset \mathscr{C}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$.

---

[1] В § IV.2 мы введем в $\mathscr{C}\,(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ метрику и превратим это множество в метрическое пространство.

**Задача 5.6.** $T + A$ замкнут, если $T$ замкнут и $A$ ограничен, причем $\mathbf{D}(A) \supset \mathbf{D}(T)$.

**Задача 5.7.** Если $T \in \mathscr{C}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})$, $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$, то $TS \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$.

Имея дело с замкнутыми операторами, удобно оперировать с *графиком* оператора. Рассмотрим *произведение* $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, состоящее из всех (упорядоченных) пар $\{u, v\}$ элементов $u \in \mathbf{X}$, $v \in \mathbf{Y}$. Множество $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ становится векторным пространством, если в нем определить линейные операции по формуле

$$\alpha_1 \{u_1, v_1\} + \alpha_2 \{u_2, v_2\} = \{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2\}. \tag{5.3}$$

Далее, $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ становится нормированным пространством, если норму определить равенством [1]

$$\| \{u, v\} \| = (\| u \|^2 + \| v \|^2)^{1/2}. \tag{5.4}$$

Очевидно, что пространство $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ полно и, значит, банахово.

График $\mathbf{G}(T)$ оператора $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ — это по определению подмножество в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, состоящее из всех элементов вида $\{u, Tu\}$, где $u \in \mathbf{D}(T)$. Подмножество $\mathbf{G}(T)$ является линейным подпространством в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Ясно, что последовательность $\{u_n\}$ в $\mathbf{X}$ является $T$-сходящейся тогда и только тогда, когда $\{u_n, Tu_n\}$ — последовательность Коши в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Таким образом, *замкнутость оператора $T$ эквивалентна замкнутости линейного подпространства $\mathbf{G}(T)$ в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.*

**Задача 5.8.** $S \subset T$ эквивалентно $\mathbf{G}(S) \subset \mathbf{G}(T)$.

**Задача 5.9.** Если $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, то нуль-пространство $\mathbf{N}(T)$ оператора $T$ — замкнутое линейное подпространство в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

**Задача 5.10.** Для того чтобы линейное подпространство $\mathbf{M}$ в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ было графиком оператора из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathbf{M}$ не было элементов вида $\{0, v\}$, где $v \neq 0$. Отсюда следует, что линейное подпространство графика есть график.

---

[1] Возможны и другие выборы нормы, например $\| \{u, v\} \| = \| u \| + \| v \|$ или $\max(\| u \|, \| v \|)$. Мы используем норму (5.4) в основном потому, что такой выбор обеспечивает выполнение равенства $(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})^* = \mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^*$. Для других норм это уже неверно, если только в пространствах $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ и $\mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^*$ выбор нормы не осуществляется различными способами. Равенство $(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})^* = \mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^*$ означает следующее: (i) каждый элемент $\{f, g\} \in \mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^*$ определяет элемент $F \in (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})^*$ по формуле $(\{u, v\}, F) = (u, f) + (v, g)$, и, обратно, каждый элемент $F \in (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})^*$ единственным образом представляется в таком виде; (ii) норма элемента $F = \{f, g\}$ равна $\| \{f, g\} \| = (\| f \|^2 + \| g \|^2)^{1/2}$. Утверждение (i) почти очевидно. Для доказательства утверждения (ii) достаточно заметить, что $| (\{u, v\}, \{f, g\}) | \leqslant | (u, f) | + | (v, g) | \leqslant \| u \| \| f \| + \| v \| \| g \| \leqslant (\| u \|^2 + \| v \|^2)^{1/2} (\| f \|^2 + \| g \|^2)^{1/2} \leqslant \| \{u, v\} \| \| \{f, g\} \|$ и что, кроме того, для фиксированной пары $\{f, g\}$ и $\varepsilon > 0$ существует пара $\{u, v\}$, удовлетворяющая условиям $\| u \| = \| f \|$, $\| v \| = \| g \|$, $(u, f) \geqslant (1 - \varepsilon) \| f \|^2$, $(v, g) \geqslant (1 - \varepsilon) \| g \|^2$, и поэтому $| (\{u, v\}, \{f, g\}) | \geqslant (1 - \varepsilon)(\| f \|^2 + \| g \|^2)$.

**Задача 5.11.** Конечное продолжение (см. п. 2.1) замкнутого оператора замкнуто. [*Указание*: применить лемму 1.9.]

**Задача 5.12.** Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Если $u_n \in \mathbf{D}(T)$, $u_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} u \in \mathbf{X}$ и $Tu_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} v \in \mathbf{Y}$, то $u \in \mathbf{D}(T)$ и $Tu = v$. [*Указание*: применить утверждение задачи 1.34 к $\mathrm{G}(T)$.]

Если оператор $S$ действует из $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{X}$, то график $\mathrm{G}(S)$ есть подмножество в $\mathbf{Y} \times \mathbf{X}$. Иногда же удобно рассматривать $\mathrm{G}(S)$ как подмножество в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Точнее, пусть $\mathrm{G}'(S)$ — линейное подпространство в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$, состоящее из пар вида $\{Sv, v\}$, $v \in \mathbf{D}(S)$. Назовем $\mathrm{G}'(S)$ *обратным графиком* оператора $S$. Так же как и график, $\mathrm{G}'(S)$ является замкнутым линейным подпространством тогда и только тогда, когда оператор $S$ замкнут.

Если оператор $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ обратим, то

$$\mathrm{G}(T) = \mathrm{G}'(T^{-1}). \tag{5.5}$$

Таким образом, *замкнутость $T^{-1}$ эквивалентна замкнутости $T$.*

**Задача 5.13.** Линейное подпространство $\mathbf{M}$ в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ является обратным графиком тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}$ не содержит элементов вида $\{u, 0\}$, $u \neq 0$.

**Пример 5.14.** Все дифференциальные операторы, рассмотренные в примерах 2.6 и 2.7, замкнуты. В самом деле, $T_1$ замкнут, так как замкнут $T_1^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$. То же самое верно для операторов $T_2$ и $T_3$. Оператор $T_0$ замкнут ввиду того, что он является наибольшим общим сужением операторов $T_1$ и $T_2$ [другими словами, $\mathrm{G}(T_0) = \mathrm{G}(T_1) \cap \mathrm{G}(T_2)$]. Точно так же можно установить, что все дифференциальные операторы, введенные в п. 2.3, замкнуты.

**Задача 5.15.** Оператор $T$ замкнут, если пространство $\mathbf{R}(T)$ замкнуто и существует число $m > 0$ такое, что $\|Tu\| \geqslant m \|u\|$ для всех $u \in \mathbf{D}(T)$.

## 3. Операторы, допускающие замыкание

Оператор $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ *допускает замыкание* (*замыкаем*), если $T$ имеет замкнутое продолжение. Это условие эквивалентно тому, что график $\mathrm{G}(T)$ есть подпространство замкнутого линейного подпространства, являющегося графиком. Отсюда следует, что *$T$ допускает замыкание тогда и только тогда*, когда замыкание $\overline{\mathrm{G}(T)}$ графика $\mathrm{G}(T)$ есть график (см. задачу 5.10). Таким образом, мы получаем следующий критерий: $T$ замыкаем тогда и только тогда, когда ни один элемент вида $\{0, v\}$, $v \neq 0$, не является пределом элементов вида $\{u, Tu\}$. Другими словами, *$T$ допускает замыкание тогда и только тогда, когда*

$$u_n \in \mathbf{D}(T), \ u_n \to 0 \quad \text{и} \quad Tu_n \to v \Rightarrow v = 0. \tag{5.6}$$

Если $T$ замыкаем, то существует замкнутый оператор $\widetilde{T}$ такой, что $\mathrm{G}(\widetilde{T}) = \overline{\mathrm{G}(T)}$. Оператор $\widetilde{T}$ называется *замыканием* оператора $T$. Из определения немедленно следует, что $\widetilde{T}$ является *наименьшим замкнутым продолжением* оператора $T$ в том смысле, что любое замкнутое продолжение оператора $T$ оказывается продолжением оператора $\widetilde{T}$. Так как включение $u \in \mathrm{D}(\widetilde{T})$ эквивалентно условию $\{u, \widetilde{T}u\} \in \overline{\mathrm{G}(T)}$, то $u \in \mathrm{X}$ *принадлежит* $\mathrm{D}(\widetilde{T})$ *тогда и только тогда, когда существует последовательность* $\{u_n\}$, *$T$-сходящаяся к $u$*. В этом случае $\widetilde{T}u = \lim Tu_n$.

Пусть $T$ — замкнутый оператор и $S$ — замыкаемый оператор, причем $\widetilde{S} = T$. В таком случае подпространство $\mathrm{D}(S)$ называется *ядром* оператора $T$. Другими словами, линейное подпространство $\mathrm{D}$ в $\mathrm{D}(T)$ является ядром оператора $T$, если множество элементов $\{u, Tu\}$, $u \in \mathrm{D}$, плотно в $\mathrm{G}(T)$. Для этого необходимо (но, вообще говоря, недостаточно), чтобы $\mathrm{D}$ было плотно в $\mathrm{D}(T)$.

Задача 5.16. Если $T$ ограничен и замкнут, то любое линейное подпространство $\mathrm{D}$ в $\mathrm{D}(T)$, плотное в $\mathrm{D}(T)$, является его ядром.

Задача 5.17. Каждый ограниченный оператор замыкаем (принцип продолжения по непрерывности; см. п. 2.2).

Задача 5.18. Каждый замыкаемый оператор с конечным рангом ограничен. (Таким образом, неограниченная линейная форма не допускает замыкания.)

Задача 5.19. Пусть $T$ — оператор из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$, причем $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$. Тогда $\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}(T)$ есть ядро оператора $T$ тогда и только тогда, когда $T\mathrm{D}'$ плотно в $\mathrm{Y}$.

### 4. Теорема о замкнутом графике

Мы уже видели выше, что ограниченный оператор с областью определения $\mathrm{X}$ замкнут. Докажем обратное предложение.

Теорема 5.20. *Замкнутый оператор $T$ из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$ с областью определения $\mathrm{X}$ ограничен. Другими словами, из того, что $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ и $D(T) = \mathrm{X}$, следует $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{S}$ — прообраз относительно $T$ открытого единичного шара в $\mathrm{Y}$ (мы еще не знаем, открыто множество $\mathrm{S}$ или нет). Так как $\mathrm{D}(T) = \mathrm{X}$, то $\mathrm{X}$ есть объединение множеств $\mathrm{S}$, $2\mathrm{S}$, $3\mathrm{S}$, . . . . Рассуждения, использованные в доказательстве теоремы 1.29, показывают, что замыкание $\overline{\mathrm{S}}$ множества $\mathrm{S}$ содержит некоторый шар $\mathrm{K}$. Обозначим через $u_0$ и $r$ центр и радиус этого шара.

Каждый вектор $u \in \mathrm{X}$, норма которого меньше $2r$, можно представить в виде $u = u' - u''$, где $u'$, $u'' \in \mathrm{K}$ (см. там же). Так как $\mathrm{K} \subset \overline{\mathrm{S}}$, то существуют последовательности $u'_n$, $u''_n \in \mathrm{S}$, сходящиеся к $u'$, $u''$ соответственно. Неравенство $\| T(u'_n - u''_n) \| \leqslant \| Tu'_n \| + \| Tu''_n \| < 2$ показывает, что $u'_n - u''_n \in 2\mathrm{S}$. Таким образом, $u = \lim (u'_n - u''_n) \in \overline{2\mathrm{S}}$. Из однородности нормы следует, что для любого $\lambda > 0$ шар $\| u \| < \lambda r$ содержится в множестве $\overline{\lambda \mathrm{S}}$.

Выберем в $\mathbf{X}$ произвольный вектор $u$, норма которого меньше $r$, и зафиксируем $\varepsilon$ из интервала $(0, 1)$. Так как $u \in \overline{\mathbf{S}}$ (это отмечалось выше), то существует вектор $u_1 \in \mathbf{S}$ такой, что $\| u - u_1 \| < \varepsilon r$ и $\| Tu_1 \| < 1$. Поэтому, согласно изложенному выше, $u - u_1 \in \varepsilon\overline{\mathbf{S}}$, и, следовательно, существует вектор $u_2 \in \varepsilon\mathbf{S}$ такой, что $\| u - u_1 - u_2 \| < \varepsilon^2 r$ и $\| Tu_2 \| < \varepsilon$. Продолжая этот процесс по индукции, мы строим последовательность $\{u_n\}$, обладающую следующими свойствами:

$$\| u - u_1 - \ldots - u_n \| < \varepsilon^n r, \quad \| Tu_n \| < \varepsilon^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Полагая $w_n = u_1 + \ldots + u_n$, мы получаем, что $\| u - w_n \| < \varepsilon^n r \to 0$ при $n \to \infty$ и $\| Tw_n - Tw_{n+p} \| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+p} \| Tu_k \| < \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} + \ldots$ $\ldots \leqslant (1-\varepsilon)^{-1} \varepsilon^n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $w_n \xrightarrow[T]{} u$. Так как $T$ замкнут, то $Tu = \lim Tw_n$. Из неравенства $\| Tw_n \| < 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots = (1-\varepsilon)^{-1}$ мы заключаем, что $\| Tu \| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1}$. Так как это верно для всех $u \in \mathbf{X}$ из шара $\| u \| < r$, то $T$ ограничен и $\| T \| \leqslant (1-\varepsilon)^{-1} r^{-1}$. Поскольку $\varepsilon$ произвольно, $\| T \| < 1/r$.

В качестве приложения теоремы 5.20 мы докажем ограниченность проектора $P$ на $\mathbf{M}$ параллельно $\mathbf{N}$, определенного формулой (3.14). Достаточно показать, что $P$ замкнут, так как $P$ определен всюду на $\mathbf{X}$ и линеен. Пусть $\{u_n\}$ — произвольная $P$-сходящаяся последовательность: $u_n \to u$, $Pu_n \to v$. Так как $Pu_n \in \mathbf{M}$ и $\mathbf{M}$ замкнуто, то $v \in \mathbf{M}$. Аналогично, из условия $(1 - P)\, u_n \in \mathbf{N}$ и замкнутости $\mathbf{N}$ следует, что $u - v = \lim (u_n - Pu_n) \in \mathbf{N}$. Таким образом, $Pu = v$ по определению, и замкнутость $P$ доказана.

**Задача 5.21.** Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $\mathbf{R}(T) = \mathbf{Y}$. Если $T$ обратим, то $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.

**Задача 5.22.** Пусть $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $S$ — замыкаемый оператор из $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{Z}$, такой, что $\mathbf{D}(S) \supset \mathbf{R}(T)$. Тогда $ST \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$. [*Указание*: $ST$ замыкаем, имеет область определения $\mathbf{X}$ и поэтому замкнут.]

## 5. Сопряженный оператор

Оператор $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ и оператор $S$ из $\mathbf{Y}^*$ в $\mathbf{X}^*$ называются *сопряженными* друг к другу, если

$$(g, Tu) = (Sg, u), \quad u \in \mathbf{D}(T), \quad g \in \mathbf{D}(S). \tag{5.7}$$

Для оператора $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ существует, вообще говоря, много операторов из $\mathbf{Y}^*$ в $\mathbf{X}^*$, сопряженных к $T$. Однако если $T$ *определен на всюду плотном подмножестве в* $\mathbf{X}$ (*плотно определен*), то существует единственный максимальный оператор $T^*$, сопряженный к $T$. Это означает, что $T^*$ сопряжен к $T$, а любой другой оператор $S$, сопряженный к $T$, является сужением оператора $T^*$. Оператор $T^*$ называется *сопряженным* к $T$.

Оператор $T^*$ можно построить следующим образом. Подпространство $\mathbf{D}(T^*)$ состоит из всех $g \in \mathbf{Y}^*$ таких, что для некоторого $f \in \mathbf{X}^*$

$$(g,\ Tu) = (f,\ u) \tag{5.8}$$

для всех $u \in \mathbf{D}(T)$. Элемент $f \in \mathbf{X}^*$ определяется однозначно по $g$, так как из равенства $(f,\ u) = (f',\ u)$, справедливого для всех векторов $u$ из $\mathbf{D}(T)$, следует равенство $f = f'$, так как $\mathbf{D}(T)$ плотно в $\mathbf{X}$ по предположению. Оператор $T^*$ из $\mathbf{Y}^*$ в $\mathbf{X}^*$ определяется равенством $T^*g = f$. Очевидно, что $T^*$ линеен и сопряжен к $T$; далее, сравнение равенств (5.7) и (5.8) показывает, что $S \subset T^*$ для любого оператора $S$, сопряженного к $T$.

Условие сопряженности (5.7) допускает простую интерпретацию в терминах графиков. Рассмотрим произведение банаховых пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$, введенное в § 2. Равенство (5.7) можно переписать в виде $(-Sg,\ u) + (g,\ Tu) = 0$; отсюда следует, что вектор $\{u,\ Tu\} \in \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ аннулируется функционалом $\{-Sg,\ g\} \in \mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^* = (\mathbf{X} \times \mathbf{Y})^*$ [1]. Другими словами, *$T$ и $S$ сопряжены тогда и только тогда, когда график оператора $T$ и обратный график оператора $(-S)$ аннулируют друг друга*: $\mathbf{G}(T) \perp \mathbf{G}'(-S)$.

Аналогично, равенство (5.8) показывает, что *обратный график оператора $-T^*$ есть аннулятор графика оператора $T$*:

$$\mathbf{G}'(-T^*) = \mathbf{G}(T)^{\perp}. \tag{5.9}$$

Предположение о плотной определенности оператора $T$ гарантирует, что $\mathbf{G}(T)^{\perp}$ является обратным графиком. Так как аннулятор замкнут (см. п. 1.4), то $T^*$ — *замкнутый оператор*. Отметим, что это верно даже в том случае, когда $T$ не является замкнутым или не допускает замыкания; однако может случиться, что оператор $T^*$ тривиален (его область определения состоит из нулевого вектора).

**Задача 5.23.** Если $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$, то приведенное выше определение сопряженного оператора совпадает с определением из § 3.3.

**Задача 5.24.** Если $T$ и $S$ сопряжены и $T$ допускает замыкание, то $\widetilde{T}$ и $S$ также сопряжены. В частности, $T^* = (\widetilde{T})^*$.

**Задача 5.25.** Из $T \subset T'$ следует $T^* \supset T'^*$ (если $T$ плотно определен).

**Задача 5.26.** Пусть $T$ действует из $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{Z}$, а $S$ действует из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, причем оператор $TS$ плотно определен в $\mathbf{X}$. Тогда $(TS)^* \supset S^*T^*$. Здесь включение можно заменить равенством, если $T \in \mathscr{B}(\mathbf{Y},\ \mathbf{Z})$.

**Задача 5.27.** Для любого плотно определенного оператора $T$

$$\mathbf{N}(T^*) = \mathbf{R}(T)^{\perp}. \tag{5.10}$$

---

[1] См. примечание на стр. 209.

Понятие сопряженности приводит к очень удобному критерию замкнутости, а именно, верна

**Теорема 5.28.** *Пусть оператор $T$, действующий из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, и оператор $S$, действующий из $\mathbf{Y}^*$ в $\mathbf{X}^*$, сопряжены друг к другу. Если один из них плотно определен, то другой замыкаем.*

Доказательство. Если $T$ плотно определен, то $T^*$ существует, замкнут и $T^* \supset S$. Итак, $S$ замыкаем. Если $S$ плотно определен, то $\mathrm{G}'(-S)^{\perp}$ есть график в $\mathbf{X}^{**} \times \mathbf{Y}^{**}$ [так же как $\mathrm{G}(T)^{\perp}$ является обратным графиком в $\mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^*$, если $T$ плотно определен]. Так как $\mathrm{G}(T)$ аннулирует $\mathrm{G}'(-S)$, то $\mathrm{G}(T)$ есть подмножество в $\mathrm{G}'(-S)^{\perp}$, и то же самое верно относительно замыкания $\overline{\mathrm{G}(T)}$ (рассматриваемого как подмножество в $\mathbf{X}^{**} \times \times \mathbf{Y}^{**}$). Отсюда следует, что $\overline{\mathrm{G}(T)}$ — график, т. е. $T$ допускает замыкание.

**Теорема 5.29.** *Пусть пространства $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ рефлексивны. Если оператор $T$ из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ плотно определен и допускает замыкание, то $T^*$ замкнут, плотно определен и $T^{**} = \widetilde{T}$.*

Доказательство. Так как $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ рефлексивны, то, согласно (1.24), $\mathrm{G}(T)^{\perp\perp} = \overline{\mathrm{G}(T)} = \mathrm{G}(\widetilde{T})$ (мы отождествляем $\mathbf{X}^{**}$ с $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}^{**}$ с $\mathbf{Y}$). Поэтому $\mathrm{G}(\widetilde{T}) = \mathrm{G}'(-T^*)^{\perp}$, откуда следует, что $T^*$ плотно определен; в противном случае существует вектор $v \in \mathbf{Y}$ такой, что $0 \neq v \perp \mathrm{D}(T^*)$; следовательно, $\{0, v\} \in \in \mathrm{G}'(-T^*)^{\perp} = \mathrm{G}(\widetilde{T})$. Последнее включение противоречит тому, что $\mathrm{G}(\widetilde{T})$ — график. Таким образом, определен оператор $T^{**}$ из $\mathbf{X}^{**} = \mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}^{**} = \mathbf{Y}$ и $\mathrm{G}(T^{**}) = \mathrm{G}'(-T^*)^{\perp} = \mathrm{G}(\widetilde{T})$, откуда следует, что $T^{**} = \widetilde{T}$.

**Теорема 5.30.** *Пусть оператор $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ плотно определен. Если $T^{-1}$ существует и принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, то $T^{*-1}$ существует и принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$, причем*

$$T^{*-1} = (T^{-1})^*. \tag{5.11}$$

*Обратно, если $T^{*-1}$ существует и принадлежит $\mathscr{B}(X^*, Y^*)$, то $T^{-1}$ существует и принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ и, кроме того, выполняется равенство* (5.11).

Доказательство. Предположим, что $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. Тогда $(T^{-1})^* \in \mathscr{B}(\mathbf{X}^*, \mathbf{Y}^*)$. Для каждого $g \in \mathrm{D}(T^*) \subset \mathbf{Y}^*$ и каждого $v \in \mathbf{Y}$ имеем $((T^{-1})^* T^* g, v) = (T^* g, T^{-1} v) = (g, TT^{-1} v) = = (g, v)$; поэтому $(T^{-1})^* T^* g = g$. С другой стороны, $((T^{-1})^* f, Tu) = (f, T^{-1} Tu) = (f, u)$ для каждого $f \in \mathbf{X}^*$ и каждого $u \in \mathrm{D}(T) \subset \mathbf{X}$; значит, $(T^{-1})^* f \in \mathrm{D}(T^*)$ и, согласно определению сопряженного оператора, $T^* (T^{-1})^* f = f$. Это показывает, что оператор $T^{*-1}$ существует и равен $(T^{-1})^*$.

Обратно, предположим, что $T^{*-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{X}^*, \mathrm{Y}^*)$. Для каждого $f \in \mathrm{X}^*$ и каждого $u \in \mathrm{D}(T)$ имеем $(T^{*-1}f, Tu) = (T^* T^{*-1}f, u) = (f, u)$. Далее, для каждого $u \in \mathrm{X}$ существует форма $f$ такая, что $\|f\| = 1$ и $(f, u) = \|u\|$ (см. следствие 1.24). При таком выборе $f$ имеем $\|u\| = (T^{*-1}f, Tu) \leqslant \|T^{*-1}\|\,\|Tu\|$. Отсюда следует, что $T$ обратим и $\|T^{-1}\| \leqslant \|T^{*-1}\|$. Так как $T^{-1}$ ограничен и замкнут, то подпространство $\mathrm{R}(T)$ замкнуто. Остается доказать, что $\mathrm{R}(T) = \mathrm{Y}$. Для этого достаточно показать, что ни один ненулевой вектор $g$ из $\mathrm{Y}^*$ не аннулирует $\mathrm{R}(T)$. Однако это очевидным образом следует из (5.10), так как равенство $T^*g = 0$ означает, в силу обратимости $T^*$, что $g = 0$.

**Пример 5.31.** Найдем сопряженные операторы к операторам $T$, $T_n$, $n = 0, 1, 2, 3$, определенным с помощью формального дифференциального оператора $L = d/dx$ в $\mathrm{X} = \mathrm{L}^p(a, b)$ (см. пример 2.7). Обозначим через $S$, $S_n$ те же операторы, действующие в пространстве $\mathrm{X}^* = \mathrm{L}^q(a, b)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 \leqslant p < \infty$. Нетрудно видеть, что операторы $T$ и $-S_0$ сопряжены друг к другу. Покажем, что $T^* = -S_0$. Пусть $g \in \mathrm{D}(T^*)$ и $f = T^*g$; тогда

$$\int_a^b f\bar{u}\,dx = (f, u) = (T^*g, u) = (g, Tu) = \int_a^b g\overline{u'}\,dx \tag{5.12}$$

для каждого $u \in \mathrm{D}(T)$. Положим $h(x) = \int_a^x f\,dx$. Так как $f = h'$ и $h(a) = 0$, то (5.12) после интегрирования по частям приводит к равенству

$$\int_a^b (g + h)\,\overline{u'}\,dx - h(b)\,\overline{u(b)} = 0. \tag{5.13}$$

Для любой функции $v \in \mathrm{X}$ существует функция $u \in \mathrm{X}$ такая, что $u' = v$ и $u(b) = 0$. Поэтому $g + h \in \mathrm{X}^*$ аннулирует все векторы $v \in \mathrm{X}$ и, следовательно, $g + h = 0$. Тогда из (5.13) вытекает, что $h(b)\,\overline{u(b)} = 0$. Но так как существует функция $u \in \mathrm{D}(T)$, не обращающаяся в нуль в точке $b$, то $h(b) = 0$. Итак, функция $g = -h$ абсолютно непрерывна, причем $g' = -h' = f \in \mathrm{X}^*$ и $g(a) = g(b) = 0$; поэтому $g \in \mathrm{D}(S_0)$ и $T^*g = f = -S_0 g$. Это доказывает требуемое равенство $T^* = -S_0$, так как ранее мы отметили, что $T^* \supset -S_0$.

Точно так же можно доказать, что $T_0^* = -S$, $T_1^* = -S_2$, $T_2^* = -S_1$, $T_3^*(k) = -S_3(1/\bar{k})$. Аналогично можно получить равенство $\dot{T}^* = -S$ и в общем случае, когда интервал $(a, b)$ не предполагается конечным ($\dot{T}$ — минимальный оператор; см. пример 2.7).

**Пример 5.32.** Рассмотрим операторы из п. 2.3, построенные по формальному дифференциальнму оператору $L$ второго порядка [см. (2.13)]. Сначала рассмотрим общий (сингулярный) случай (см. замечание 2.16) и введем максимальный и минимальный операторы $T$ и $\dot{T}$ в $\mathrm{X} = \mathrm{L}^p(a, b)$, $1 \leqslant p < \infty$.

Аналогично определим максимальный и минимальный операторы $S$ и $\dot{S}$, построенные по оператору $M$, формально сопряженному к $L$ [см. (2.27)]. Наш основной результат здесь состоит в том, что

$$\dot{T}^* = S. \tag{5.14}$$

В самом деле, тот факт, что $\dot{T}$ и $S$ сопряжены друг к другу, легко следует из тождества Лагранжа

$$\int_{\alpha}^{\beta} (\overline{v}Lu - u\overline{Mv})\, dx = [p_0 u'\overline{v} - u(p_0\overline{v})' + p_1 u\overline{v}]_{\alpha}^{\beta}, \tag{5.15}$$

где $u \in \mathbf{D}(\dot{T}) = \mathbf{C}_0^{\infty}(a, b)$, $v \in \mathbf{D}(S)$, причем функция $u(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала $(\alpha, \beta)$.

Для доказательства более сильного результата (5.14) введем для $\varepsilon > 0$ интегральный оператор $K = K_{\varepsilon}$ с ядром

$$k(y, x) = |y - x|\, \eta(y - x), \tag{5.16}$$

где $\eta(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция вещественной переменной $t$, такая, что $\eta(t) = 1$ в точках интервала $|t| \leqslant \varepsilon/2$ и $\eta(t) \equiv 0$ при $|t| \geqslant \varepsilon$. Ядро $k(y, x)$ бесконечно дифференцируемо, за исключением точек вида $y = x$ и $k(y, x) = 0$ при $|y - x| \geqslant \varepsilon$.

Пусть $w(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, тождественно обращающаяся в нуль вне интервала $(a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon)$; положим $u = Kw$. Так как ядро $k(y, x)$ обращается в нуль при $|y - x| \geqslant \varepsilon$, то функция $u(x)$ равна нулю вне интервала $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$. Из непрерывности ядра $k(y, x)$ в точках вида $y = x$ следует, что $u' = K'w$, где $K'$ — интегральный оператор с ядром $k'(y, x) = \partial k(y, x)/\partial y$. Так как $k'(y, x)$ имеет скачок, равный двум в точке $y = x$, то вторая производная $u''$ не может быть получена простым дифференцированием под знаком интеграла; правильное выражение для $u''$ таково:

$$u'' = 2w + K''w, \tag{5.17}$$

где $K''$ — интегральный оператор с ядром $k''(y, x) = \partial^2 k(y, x)/\partial y^2$. Отметим, что функция $k''$ *всюду* бесконечно дифференцируема. Таким образом, $u$ бесконечно дифференцируема и тождественно равна нулю вне интервала $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$; поэтому $u \in \mathbf{D}(\dot{T})$ и

$$\dot{T}u = Lu = 2p_0 w + p_0 K''w + p_1 K'w + p_2 Kw. \tag{5.18}$$

Пусть $g \in \mathbf{D}(\dot{T}^*)$ и $f = \dot{T}^* g$. Для всех бесконечно дифференцируемых функций $u$, равных нулю вне интервала $(a + \varepsilon, b - \varepsilon)$, имеем $(g, \dot{T}u) = (f, u)$, и поэтому

$$(2p_0 g + K''^* p_0 g + K'^* p_1 g + K^* p_2 g, w) = (K^* f, w). \tag{5.19}$$

Отметим, что $K$, $K'$ и $K''$ — ограниченные операторы в $\mathbf{X}$ (так как ядра $k$, $k'$ и $k''$ суть ограниченные функции; см. примеры 2.4 и 2.11), а их сопряженные являются интегральными операторами с эрмитово сопряженными ядрами (пример 3.17). Так как бесконечно дифференцируемые функции $w$, обращающиеся в нуль вне интервала $(a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon)$, образуют плотное множество в $\mathbf{L}^p(a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon)$, то из (5.19) следует, что

$$g(x) = \frac{1}{2p_0(x)} [K^* f(x) - K^* p_2 g(x) - K'^* p_1 g(x) - K''^* p_0 g(x)] \tag{5.20}$$

для почти всех точек $x \in (a + 2\varepsilon, b - 2\varepsilon)$.

Ввиду того что $f$, $g \in \mathbf{X}^* = \mathbf{L}^q$, правая часть в (5.20) непрерывно зависит от $x$ (отметим, что ядра $k$, $k'$ и $k''$ суть гладкие или кусочно гладкие функции). Отсюда следует, что $g$ непрерывна на интервале $(a + 2\varepsilon,\ b - 2\varepsilon)$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $g$ непрерывна на $(a, b)$. Возвращаясь к формуле (5.20), видим, что $g\,(x)$ непрерывно дифференцируема на $(a + 2b - 2\varepsilon)$ и, следовательно, на $(a, b)$. С помощью таких же рассуждений можно показать, что $g'$ абсолютно непрерывна, а $g''$ локально принадлежит $\mathbf{L}^q$ [любому собственному подинтервалу из $(a, b)$], так как из (5.20) следует, что функция $g'' - f/p_0$ непрерывна.

Используя это локальное свойство функции $g$, с помощью интегрирования по частям получаем: $(f, u) = (g, \dot{T}u) = (Mg, u)$ для каждой функции $u \in \mathbf{D}\,(\dot{T})$, так что $Mg = f \in \mathbf{X}^* = \mathbf{L}^q\,(a, b)$. Таким образом, $g \in \mathbf{D}\,(S)$ и $Sg = Mg = f = \dot{T}^*g$. Это завершает доказательство равенства (5.14), так как $S \subset \dot{T}^*$.

Предположим теперь, что оператор $L$ регулярен (см. замечание 2.16), и найдем операторы $T^*$ и $T_n^*$. Так как $T_1 \supset \dot{T}$, то $T_1^* \subset \dot{T}^* = S$. Поэтому тождество Лагранжа дает

$$[p_0\bar{u}'g - \bar{u}\,(p_0g)' + p_1\bar{u}g]_a^b = (g, Tu) - (Sg, u) = (g, T_1u) - (T_1^*g, u) = 0 \qquad (5.21)$$

для каждого $u \in \mathbf{D}\,(T_1)$ и каждого $g \in \mathbf{D}\,(T_1^*) \subset \mathbf{D}\,(S)$. Так как $u'\,(a)$ и $u'\,(b)$ могут принимать произвольные значения, в то время как $u\,(a) = u\,(b) = 0$, из (5.21) следует, что $g\,(a) = g\,(b) = 0$. Таким образом, $g$ удовлетворяет граничным условиям для $S_1$, и поэтому $T_1^* = S_1$. (Операторы $S_n$ определяются в $\mathbf{X}^*$ с помощью $M$ точно так же, как операторы $T_n$ строятся в $\mathbf{X}$ по $L$.)

Аналогично можно показать, что $T^* = S_0$, $T_2^* = S_2$ (при этом константы $h_a$, $h_b$ в граничных условиях для $T_2$ и $S_2$ должны быть надлежащим образом связаны), $T_3^* = S_4$, $T_4^* = S_3$ (индекс 4 указывает на то, что в граничных условиях типа 3 точка $a$ заменена на $b$) и $T_0^* = S$.

Эти результаты показывают, что оператор $S$ (в общем случае) и операторы $S_n$ (в регулярном случае) замкнуты, согласно теореме 5.29. Так как соотношение между $L$ и $M$ симметрично, операторы $T$ и $T_n$ также замкнуты (по крайней мере при $1 < p < \infty$).

**Задача 5.33.** Если функция $u''$ непрерывна и $u\,(x) = 0$ вне замкнутого подинтервала $[a', b']$ в $(a, b)$, то $u \in \mathbf{D}\,(\tilde{\dot{T}})$.

## 6. Коммутативность и разложение

Так же как в конечномерном случае, два оператора $S$ и $T \in \mathscr{B}\,(\mathbf{X})$ по определению коммутируют, если $ST = TS$. Не совсем просто распространить это определение на неограниченные операторы в $\mathbf{X}$: это объясняется трудностями, связанными с областями их определения. Обычно ограничиваются промежуточным случаем, когда один из операторов принадлежит $\mathscr{B}\,(\mathbf{X})$. Оператор $T$ в $\mathbf{X}$ коммутирует с оператором $A \in \mathscr{B}\,(\mathbf{X})$, если

$$AT \subset TA. \qquad (5.22)$$

Это означает, что всякий раз, когда $u \in \mathbf{D}\,(T)$, вектор $Au$ также принадлежит $\mathbf{D}\,(T)$ и $TAu = ATu$.

**Задача 5.34.** Определение (5.22) эквивалентно старому определению $AT = TA$, если $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$.

**Задача 5.35.** Любой оператор $T$ в $\mathrm{X}$ коммутирует с каждым скалярным оператором $\alpha 1$ ($1$ — тождественный оператор в $\mathrm{X}$).

**Задача 5.36.** Если $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ коммутирует с $A_n \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ и если $A_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} A \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, то $T$ коммутирует с $A$. [*Указание*: см. задачу 5.12.]

**Задача 5.37.** Если обратимый оператор $T$ в $\mathrm{X}$ коммутирует с $A \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, то $T^{-1}$ также коммутирует с $A$.

Понятие подпространства $\mathrm{M}$ в $\mathrm{X}$, *инвариантного* относительно оператора $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, можно определить так же, как в конечномерном случае, посредством включения $T\mathrm{M} \subset \mathrm{M}$. Довольно трудно перенести это понятие на неограниченные операторы в $\mathrm{X}$, так как включение $T\mathrm{M} \subset \mathrm{M}$ будет иметь место всякий раз, когда $\mathrm{M}$ содержит лишь нулевой вектор из $\mathrm{D}(T)$ (по поводу обозначения $T\mathrm{M}$ см. п. 2.1).

Однако понятие *разложения* оператора $T$, определенного парой $\mathrm{M}$, $\mathrm{N}$ взаимно дополнительных подпространств [см. (3.14)], можно перенести на общий случай. Оператор $T$ допускает разложение относительно прямой суммы $\mathrm{X} = \mathrm{M} \oplus \mathrm{N}$, если

$$P\mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(T), \quad T\mathrm{M} \subset \mathrm{M}, \quad T\mathrm{N} \subset \mathrm{N}, \tag{5.23}$$

где $P$ — проектор на $\mathrm{M}$ параллельно $\mathrm{N}$ (см. п. 3.4). Отметим, что первое из условий (5.23) исключает отмеченный выше сингулярный случай.

Условия (5.23) эквивалентны условию коммутирования $T$ и $P$:

$$TP \supset PT. \tag{5.24}$$

В самом деле, из условий (5.23) следует, что для любого вектора $u \in \mathrm{D}(T)$ $Pu \in \mathrm{D}(T)$ и $TPu \in \mathrm{M}$, $T(1-P)u \in \mathrm{N}$. Следовательно, $(1-P)TPu = 0$ и $PT(1-P)u = 0$, и поэтому $TPu = PTPu = PTu$, откуда вытекает (5.24). Аналогично проверяется, что из (5.24) следует (5.23).

В том случае, когда $T$ допускает разложение относительно прямой суммы $\mathrm{M} \oplus \mathrm{N}$, можно определить *части* $T_\mathrm{M}$ и $T_\mathrm{N}$ оператора $T$ в подпространствах $\mathrm{M}$ и $\mathrm{N}$ соответственно: $T_\mathrm{M}$ есть оператор в банаховом пространстве $\mathrm{M}$ с областью определения $\mathrm{D}(T) \cap \mathrm{M}$, действующий по формуле $T_\mathrm{M}u = Tu \in \mathrm{M}$; оператор $T_\mathrm{N}$ определяется аналогично. Если $T$ замкнут, то же самое верно относительно $T_\mathrm{M}$ и $T_\mathrm{N}$, так как $\mathrm{G}(T_\mathrm{M})$ есть пересечение $\mathrm{G}(T)$ с замкнутым множеством $\mathrm{M} \times \mathrm{M}$ (рассматриваемым как подмножество в $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$).

Понятие разложения можно обобщить на случай нескольких проекторов $P_1, \ldots, P_s$, удовлетворяющих условиям $P_hP_k = \delta_{hk}P_h$. Оператор $T$ допускает разложение относительно прямой суммы $\mathrm{X} = \mathrm{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{M}_s$, где $\mathrm{M}_h = P_h \mathrm{X}$, если $T$ коммутирует со всеми $P_h$. Так же как и выше, можно определить части $T_{\mathrm{M}_h}$ оператора $T$ в подпространствах $\mathrm{M}_h$.

Задача 5.38. Предположим, что $T$ плотно определен в $\mathrm{X}$. Если $T$ допускает разложение относительно прямой суммы $\mathrm{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathrm{M}_s$, то часть $T_{\mathrm{M}_h}$ плотно определена в $\mathrm{M}_h$.

## § 6. Резольвенты и спектры

### 1. Определения

Задача на собственные значения, рассмотренная в § I.5 для конечномерного случая, требует существенных изменений, когда мы переходим к рассмотрению операторов в банаховом пространстве $\mathrm{X}$ [1]. Как и раньше, собственное значение оператора $T$ определяется как комплексное число $\lambda$, для которого существует ненулевой вектор $u \in \mathrm{D}(T) \subset \mathrm{X}$, называемый собственным вектором, такой, что $Tu = \lambda u$. Другими словами, $\lambda$ есть собственное значение, если нуль-пространство $\mathrm{N}(T - \lambda)$ не тривиально; это нуль-пространство называется геометрическим собственным подпространством для $\lambda$, а его размерность — геометрической кратностью собственного значения $\lambda$.

Может случиться, что оператор вовсе не имеет собственных значений, а если и имеет, то недостаточно много собственных векторов.

Для того чтобы обобщить, по крайней мере частично, результаты, полученные в конечномерном случае, удобно ввести сначала понятие резольвенты. *В дальнейшем предполагается, что $T$ является замкнутым оператором в* $\mathrm{X}$. Тогда и оператор $T - \zeta$ замкнут для любого комплексного числа $\zeta$. Если $T - \zeta$ обратим и

$$R(\zeta) = R(\zeta, T) = (T - \zeta)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{X}), \qquad (6.1)$$

то число $\zeta$ по определению принадлежит *резольвентному множеству* оператора $T$. Определенная таким образом на резольвентном множестве $\mathrm{P}(T)$ операторнозначная функция $R(\zeta)$ называется *резольвентой* оператора $T$. Для любого $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ оператор $R(\zeta)$ имеет область определения $\mathrm{X}$ и область значений $\mathrm{D}(T)$. Это определение резольвенты согласуется с определением, данным в конечномерном случае (см. п. I.5.2) [2].

---

[1] Мы предполагаем, что $\dim \mathrm{X} > 0$.

[2] Мы определили $\mathrm{P}(T)$ и $\Sigma(T)$ только для замкнутых операторов в $\mathrm{X}$. Эти понятия можно определить для более широкого класса операторов в $\mathrm{X}$. Если $T$ замыкаем, то положим $\mathrm{P}(T) = \mathrm{P}(\widetilde{T})$, $\Sigma(T) = \Sigma(\widetilde{T})$. Если $T$ не допускает замыкания, то $\mathrm{P}(T)$ пусто и $\Sigma(T)$ совпадает со всей плоскостью

**Задача 6.1.** Число $\zeta$ принадлежит $\mathrm{P}(T)$ тогда и только тогда, когда оператор $T - \zeta$ имеет обратный с областью определения $\mathrm{X}$ (см. теорему 5.20).

**Задача 6.2.** Если $\zeta \in \mathrm{P}(T)$, то

$$R(\zeta)\, T \subset TR(\zeta) = 1 + \zeta R(\zeta) \in \mathscr{B}(\mathrm{X}). \tag{6.2}$$

Таким образом, $T$ коммутирует с $R(\zeta)$ (см. п 5.6).

**Задача 6.3.** Если $\mathrm{P}(T)$ не пусто, то подпространство $\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}(T)$ является ядром оператора $T$ тогда и только тогда, когда $(T - \zeta)\,\mathrm{D}'$ плотно в $\mathrm{X}$ для некоторого (или всех) $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ (см. задачу 5.19).

**Задача 6.4.** Если оператор $A$ из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$ допускает замыкание, причем $\mathrm{D}(A) \supset \mathrm{D}(T)$, то $AR(\zeta, T) \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ для каждого $\zeta \in \mathrm{P}(T)$. [*Указание*: задача 5.22.]

**Теорема 6.5.** *Предположим, что* $\mathrm{P}(T)$ *не пусто. Для того чтобы* $T$ *коммутировал с* $A \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, *необходимо, чтобы для каждого* $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ *выполнялось равенство*

$$R(\zeta)\, A = AR(\zeta), \tag{6.3}$$

*и достаточно, чтобы это равенство выполнялось для некоторого* $\zeta \in \mathrm{P}(T)$.

Доказательство немедленно следует из утверждения задачи 5.37.

**Задача 6.6.** Операторы $R(\zeta)$ коммутируют друг с другом при различных $\zeta$.

Резольвента $R(\zeta)$ удовлетворяет *резольвентному уравнению* (I.5.5) для каждой пары $\zeta_1$, $\zeta_2 \in \mathrm{P}(T)$. Доказательство такое же, как и в конечномерном случае; следует заметить только, что $TR(\zeta)$ определен всюду на $\mathrm{X}$ [см. (6.2)]. Отсюда следует, что для резольвенты сохраняется разложение Неймана (I.5.6), однако доказательство этого факта не тривиально. Обозначим временно правую часть (I.5.6) через $R'(\zeta)$; $R'(\zeta)$ существует для чисел $\zeta$, достаточно близких к $\zeta_0$. Для каждого $u \in \mathrm{D}(T)$ имеем $R'(\zeta) \times \times (T - \zeta)\, u = u$, так как $R(\zeta_0)(T - \zeta)\, u = u - (\zeta - \zeta_0) \times \times R(\zeta_0)\, u$. Аналогично приходим к *формальному* равенству $(T - \zeta)\, R'(\zeta)\, v = v$ для каждого $v \in \mathrm{X}$. Для обоснования этого равенства заметим, что из замкнутости оператора $T$ следует включение $R'(\zeta)\, v \in \mathrm{D}(T)$. Это показывает, что $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ и $R'(\zeta) = R(\zeta)$ для всех точек $\zeta$, в которых ряд (I.5.6) сходится. Таким образом, доказана

**Теорема 6.7.** *Множество* $\mathrm{P}(T)$ *является открытым подмножеством комплексной плоскости и* $R(\zeta)$ *(кусочно) голоморфна на* $\mathrm{P}(T)$. *(Мы говорим о «кусочной» голоморфности, когда* $\mathrm{P}(T)$ *не связно.) Каждая компонента множества* $\mathrm{P}(T)$ *является естественной областью определения для* $R(\zeta)$ *(это означает, что* $R(\zeta)$ *нельзя продолжить аналитически за пределы* $\mathrm{P}(T)$*).*

Множество $\Sigma(T)$, дополнительное (в комплексной плоскости) к $\mathrm{P}(T)$, называется *спектром* оператора $T$. Таким образом, $\zeta \in \Sigma(T)$, если оператор $T - \zeta$ необратим или его образ не совпадает со всем $\mathbf{X}$. В конечномерном случае $\Sigma(T)$ состоит из конечного числа точек (собственных значений оператора $T$); в общем случае структура спектра гораздо сложнее. Спектр может быть пустым, а может совпадать со всей комплексной плоскостью. Естественно, что нас будут интересовать, если можно так сказать, промежуточные случаи, которые в некотором смысле близки к конечномерному случаю; однако и в этой ситуации спектр часто оказывается несчетным множеством.

**Пример 6.8.** Рассмотрим дифференциальные операторы $T$ и $T_n$ из примера 2.6. Множество $\Sigma(T)$ совпадает со всей плоскостью. В самом деле, уравнение $(T - \zeta)\,u = u' - \zeta u = 0$ всегда имеет нетривиальное решение $u(x) = e^{\zeta x}$, принадлежащее $\mathbf{X}$. С другой стороны, сужение $T_1$ оператора $T$, соответствующее граничному условию $u(a) = 0$, имеет пустой спектр. Действительно, резольвента $R_1(\zeta) = R(\zeta, T_1)$ существует для каждого $\zeta$ и задается формулой

$$R_1(\zeta)\,v(y) = e^{\zeta y}\int_a^y e^{-\zeta x} v(x)\,dx. \tag{6.4}$$

Аналогично можно доказать, что множество $\Sigma(T_2)$ пусто. Спектр оператора $T_3$ состоит из счетного множества изолированных точек (являющихся собственными значениями оператора $T_3$) вида

$$\lambda_n = \frac{1}{b-a}(\log k + 2n\pi i), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{6.5}$$

Если $\zeta$ не совпадает ни с одной из точек $\lambda_n$, то резольвента $R_3(\zeta) = R(\zeta, T_3)$ существует и является интегральным оператором [ср. (2.11)]:

$$R_3(\zeta)\,v(y) = \frac{e^{\zeta y}}{k - e^{(b-a)\zeta}}\left[k\int_a^y e^{-\zeta x} v(x)\,dx + e^{(b-a)\zeta}\int_y^b e^{-\zeta x} v(x)\,dx\right]. \tag{6.6}$$

И, наконец, $\Sigma(T_0)$ совпадает со всей комплексной плоскостью. Дело в том, что оператор $(T_0 - \zeta)^{-1}$ существует и ограничен для каждого $\zeta$, однако его область определения не совпадает со всем пространством. Действительно, каждый вектор $v \in \mathrm{D}((T_0 - \zeta)^{-1}) = \mathrm{R}(T_0 - \zeta)$ имеет вид $u' - \zeta u$, причем $u(a) = u(b) = 0$, поэтому $v$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b e^{-\zeta x} v(x)\,dx = 0. \tag{6.7}$$

Полученные выше результаты сохраняют силу и в том случае, когда дифференциальный оператор $d/dx$ рассматривается в пространстве $\mathbf{L}^p$ на конечном интервале $(a, b)$ (пример 2.7).

В рассмотренных примерах $R(\zeta, T)$ не существует, так как область определения $T$ слишком велика, в то время как $R(\zeta, T_0)$ не существует, так как $\mathrm{D}(T_0)$ слишком мало. Операторы $T_1$, $T_2$ и $T_3$ лишены этих недостатков.

**Задача 6.9.** Рассмотрим оператор $d/dx$ в $\mathrm{X} = \mathrm{L}^p\,(0, \infty)$ и определим $T$ и $T_1$ так же, как в примере 2.7. Оказывается, что $\mathrm{P}\,(T)$ совпадает с правой полуплоскостью $\operatorname{Re} \zeta > 0$, а $\mathrm{P}\,(T_1)$ — с левой полуплоскостью, причем

$$\begin{aligned} R\,(\zeta, T)\,v\,(y) &= -\int\limits_y^\infty e^{-\zeta(x-y)}v\,(x)\,dx, & \operatorname{Re}\zeta > 0,\\ R\,(\zeta, T_1)\,v\,(y) &= \int\limits_0^y e^{\zeta(y-x)}v\,(x)\,dx, & \operatorname{Re}\zeta < 0. \end{aligned} \tag{6.8}$$

**Задача 6.10.** Рассмотрим оператор $d/dx$ на всей вещественной оси и построим максимальный оператор $T$ в $\mathrm{X} = \mathrm{L}^p\,(-\infty, +\infty)$. Оказывается, что обе полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta \gtrless 0$ принадлежат $\mathrm{P}\,(T)$ и

$$R\,(\zeta)\,v\,(y) = \begin{cases} -\int\limits_y^\infty e^{-\zeta(x-y)}v\,(x)\,dx, & \operatorname{Re}\zeta > 0,\\ \int\limits_{-\infty}^y e^{\zeta(y-x)}v\,(x)\,dx, & \operatorname{Re}\zeta < 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

**Пример 6.11.** Рассмотрим дифференциальные операторы $T_n$ и $T$ из п. 2.3 в пространстве $\mathrm{X} = C\,[a, b]$. Резольвентное множество $\mathrm{P}\,(T)$ пусто, так как уравнение $(T - \zeta)\,u = 0$ имеет два линейно независимых решения в X. С другой стороны, $\Sigma\,(T_3)$ пусто, так как резольвента $R_3\,(\zeta) = R\,(\zeta, T_3)$ существует для каждого $\zeta$ и является интегральным оператором типа (2.19).

Множество $\Sigma\,(T_1)$ не пусто и не совпадает со всей плоскостью. Решение уравнения $(T_1 - \zeta)\,u = v$ определяется интегральным оператором вида (2.21), где ядро $g\,(y, x)$ заменено на $g\,(y, x; \zeta)$:

$$g\,(y, x; \zeta) = \begin{cases} \dfrac{u_1\,(y; \zeta)\,u_2\,(x; \zeta)}{-p_0\,(x)\,W\,(x; \zeta)}, & y \leqslant x;\\ \dfrac{u_2\,(y; \zeta)\,u_1\,(x; \zeta)}{-p_0\,(x)\,W\,(x; \zeta)}, & y \geqslant x. \end{cases} \tag{6.10}$$

Здесь $u_1$, $u_2$ — решения уравнения $(L - \zeta)\,u = 0$, удовлетворяющие начальным условиям $u_1\,(a; \zeta) = 0$, $u_1'\,(a; \zeta) = 1$ и $u_2\,(b; \zeta) = 0$, $u_2'\,(b; \zeta) = 1$; $W\,(x, \zeta)$ — вронскиан этих решений, причем

$$W\,(x; \zeta) = W_0\,(\zeta) \exp\left(-\int\limits_a^x \frac{p_1}{p_0}\,dx\right), \quad W_0\,(\zeta) = -u_2\,(a; \varepsilon). \tag{6.11}$$

Резольвента $R_1\,(\zeta) = R\,(\zeta, T_1)$ существует тогда и только тогда, когда $W_0\,(\zeta) \neq 0$. Так как $W_0\,(\zeta)$ — целая функция, ее нули образуют счетное множество $\{\lambda_n\}$ ($\lambda_n$ суть собственные значения оператора $T_1$). Таким образом, $\Sigma\,(T_1)$ есть счетное множество, образованное собственными значениями. Тот факт, что $\Sigma\,(T_1)$ непусто, можно доказать, например, сводя задачу на собственные значения для оператора $T_1$ к самосопряженной задаче с помощью простого преобразования[1]). Из этого замечания следует также, что все $\lambda_n$ вещественны.

Далее, напомним, что функция Грина (2.22) существует, если $\min p_2(x) = c > 0$, и что справедлива оценка (2.25). Применяя этот результат к оператору $L - \zeta$, видим, что резольвента $R_1(\zeta)$ существует и

$$\| R_1(\zeta) \| \leqslant \frac{1}{c - \operatorname{Re}\zeta}, \quad \text{если} \quad \operatorname{Re}\zeta < c = \min_x p_2(x), \tag{6.12}$$

по крайней мере для вещественных $\zeta$. Покажем, что оценка (6.12) сохраняется и для комплексных $\zeta$. Если $\operatorname{Re}\zeta < c$, то $|\mu + \zeta| < \mu + c$ для достаточно больших вещественных $\mu$. Так как из предыдущего неравенства следует, что $-\mu < c$, то, по доказанному выше, резольвента $R_1(-\mu)$ существует и $\| R_1(-\mu) \| \leqslant 1/(\mu + c)$. Тогда из (I.5.7) следует, что $R_1(\zeta)$ существует, и оценка (6.12) следует из (I.5.6) (нужно положить $\zeta_0 = -\mu$), когда $\mu \to \infty$.

Аналогично, $\Sigma(T_2)$ состоит из счетного множества собственных значений. Полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta < c$ принадлежит резольвентному множеству, и при условии, что $h_a, h_b \geqslant 0$, верна оценка (6.12).

Эти результаты сохранятся и в том случае, если мы рассмотрим операторы, действующие в $\mathbf{L}^p(a, b)$; единственное отличие от рассмотренного нами случая состоит в том, что константу $c$ следует заменить на $\min(c, c')$, где $c' = \min(p_2 - p_1' + p_0'')$ [см. (2.26)].

## 2. Спектры ограниченных операторов

Рассмотрим теперь оператор $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$. В этом случае *множества* $\mathrm{P}(T)$ *и* $\Sigma(T)$ *непусты*. Точнее, $\mathrm{P}(T)$ содержит внешность окружности

$$|\zeta| = \operatorname{spr} T = \lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{1/n} = \inf_{n\geqslant 1} \| T^n \|^{1/n} \tag{6.13}$$

(эта окружность вырождается в точку $\zeta = 0$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{spr} T = 0$, т. е. $T$ — квазинильпотентен), в то время как на самой окружности существует по крайней мере одна точка из $\Sigma(T)$[2]). В частности, $\Sigma(T)$ содержится в замкнутом круге $\zeta | \leqslant \| T \|$. Отметим также, что

$$\| \zeta R(\zeta) + 1 \| \to 0 \quad \text{при} \quad \zeta \to \infty. \tag{6.14}$$

Эти результаты были получены в конечномерном случае (см. п. I.5.2); доказательства без существенных изменений переносятся на общий случай. Мы видим, что ряд Неймана в правой части формулы (I.5.10) сходится в точках, лежащих вне окруж-

---

[1]) Дифференциальное уравнение $Lu = \lambda u$ можно привести к виду $(p_0 v')' + qv = \lambda v$, где $v = (-p_0)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2}\int^x \left(\frac{p_1}{p_0}\right) dx\right] u$ и $q = p_2 - (p_0' - p_1)^2/4p_0 + (p_0'' - p_1')/2$. Это *самосопряженная* задача на собственные значения, и поэтому существует счетное множество $\{\lambda_n\}$ вещественных собственных значений (см. п. V. 3.6).

[2]) Поэтому $\operatorname{spr} T = \sup_{\lambda \in \Sigma(T)} |\lambda|$.

ности (6.13). Тот факт, что сумма этого ряда совпадает с резольвентой $R(\zeta)$, можно установить так же, как в доказательстве теоремы 6.7. Так как область сходимости ряда (I.5.10) есть множество $|\zeta| > \operatorname{spr} T$, то на окружности $|\zeta| = \operatorname{spr} T$ существует по крайней мере одна точка из $\Sigma(T)$, если только $\operatorname{spr} T > 0$. Если же $\operatorname{spr} T = 0$, то $0 \in \Sigma(T)$, так как в противном случае $R(\zeta)$ будет целой функцией, что противоречит свойству (6.14) и теореме Лиувилля.

Задача 6.12. Рассмотрим оператор сдвига $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, $\mathrm{X} = \mathrm{l}^p$, такой, что $Tx_1 = 0$, $Tx_n = x_{n-1}$ $(n \geqslant 2)$. Доказать, что $\Sigma(T) = \{\zeta\colon |\zeta| \leqslant 1\}$.

### 3. Бесконечно удаленная точка

При разбиении комплексной плоскости на резольвентное множество $\mathrm{P}(T)$ и спектр $\Sigma(T)$ оператора $T$ из рассмотрения исключалась бесконечно удаленная точка. По ряду причин полезно продолжить это разбиение до разбиения расширенной плоскости. Для этого мы докажем сначала такой результат:

**Теорема 6.13.** *Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ и $\mathrm{P}(T)$ содержит внешность некоторого круга. Тогда имеет место такая альтернатива:*

i) *$T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$; $R(\zeta)$ голоморфна в точке $\zeta = \infty$ и $R(\infty) = 0$.*

ii) *$R(\zeta)$ имеет существенную особенность в точке $\zeta = \infty$.*

Доказательство. Предположим, что точка $\zeta = \infty$ не является существенной особенностью резольвенты. Так как $R(\zeta) \not\equiv 0$, то для больших $|\zeta|$ имеет место разложение

$$R\,|\,\zeta\,| = \zeta^k A + \zeta^{k-1} B + \ldots, \tag{6.15}$$

где $A, B, \ldots \in \mathscr{B}(\mathrm{X}), A \neq 0$, $k$ — целое число. Тогда

$$TR(\zeta) = 1 + \zeta R(\zeta) = 1 + \zeta^{k+1} A + \zeta^k B + \ldots. \tag{6.16}$$

Покажем сначала, что $k \leqslant -1$. Если $k \geqslant 0$, то $\zeta^{-k-1} R(\zeta) \to 0$ и $T\zeta^{-k-1} R(\zeta) \to A$ при $\zeta \to \infty$, и поэтому $A = 0$ в силу замкнутости оператора $T$, что противоречит предположению $A \neq 0$. Итак, $k \leqslant -1$ и потому $R(\zeta) \to 0$ и $TR(\zeta) \to 1 + (\lim \zeta^{k+1}) A$ при $\zeta \to \infty$. И снова из замкнутости оператора $T$ следует, что $1 + (\lim \zeta^{k+1}) A = 0$; последнее равенство возможно, лишь если $k = -1$ и $A = -1$. Таким образом, для каждого $u \in \mathrm{X}$ имеем $\zeta R(\zeta) u \to -u$ и $T\zeta R(\zeta) u \to Bu$ при $\zeta \to \infty$. В силу замкнутости $T$ имеем $u \in \mathrm{D}(T)$ и $Tu = -Bu$. Другими словами, $T = -B \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$.

В соответствии с теоремой 6.13 естественно включить бесконечно удаленную точку в резольвентное множество оператора $T$, если $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, и в спектр $\Sigma(T)$ в противном случае. В тех случаях, когда нужно подчеркнуть отличие обобщенных понятий резольвентного множества и спектра (как подмножеств расширенной комплексной плоскости) от ранее введенных понятий резольвентного множества и спектра, мы говорим о *расширенном резольвентном множестве и расширенном спектре* и используем обозначения $\widetilde{\mathrm{P}}(T)$, $\widetilde{\Sigma}(T)$. Таким образом, $\zeta = \infty \in \widetilde{\mathrm{P}}(T)$ тогда и только тогда, когда $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$. Расширенный спектр неограниченного оператора $\widetilde{\Sigma}(T)$ всегда содержит бесконечно удаленную точку; если точка $\zeta = \infty$ является изолированной в $\widetilde{\Sigma}(T)$, то она является существенной особенностью резольвенты $R(\zeta)$.

Задача 6.14. Множество $\widetilde{\Sigma}(T)$ не пусто.

**Теорема 6.15.** *Пусть $T$ — замкнутый обратимый оператор в $\mathrm{X}$. Множества $\widetilde{\Sigma}(T)$ и $\widetilde{\Sigma}(T^{-1})$ переходят друг в друга при отображении $\zeta \to \zeta^{-1}$ расширенной комплексной плоскости на себя*[1].

Доказательство. Пусть $0 \neq \zeta \in \mathrm{P}(T)$; поэтому $R(\zeta)$ существует. Положим $S(\zeta) = TR(\zeta) = 1 + \zeta R(\zeta) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$. Для каждого вектора $u \in \mathrm{X}$ имеем $S(\zeta)u = TR(\zeta)u$ и $T^{-1}S(\zeta)u = R(\zeta)u = \zeta^{-1}(S(\zeta) - 1)u$. Поэтому

$$-\zeta(T^{-1} - \zeta^{-1})S(\zeta)u = u. \tag{6.17}$$

Отсюда следует, что $\mathrm{X}$ есть область значений оператора $T^{-1} - \zeta^{-1}$. Более того, этот оператор обратим, так как из $(T^{-1} - \zeta^{-1})v = 0$ следует, что $v = \zeta T^{-1}v$, $Tv = \zeta v$, $v = 0$. Итак, из (6.17) вытекает, что $(T^{-1} - \zeta^{-1})^{-1} = -\zeta S(\zeta) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ и $\zeta^{-1} \in \mathrm{P}(T^{-1})$.

Если $0 \in \mathrm{P}(T)$, то $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ и, стало быть, $0^{-1} = \infty \in \widetilde{\mathrm{P}}(T^{-1})$ по определению. Если $\infty \in \widetilde{\mathrm{P}}(T)$, то $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ и, следовательно, $0 = \infty^{-1} \in \mathrm{P}(T^{-1})$. Итак, $\widetilde{\mathrm{P}}(T)$ отображается на $\widetilde{\mathrm{P}}(T^{-1})$ при отображении $\zeta \to \zeta^{-1}$. То же самое верно и для дополнительных множеств $\widetilde{\Sigma}(T)$ и $\widetilde{\Sigma}(T^{-1})$.

Задача 6.16. Спектр оператора $R(\zeta_0)$ есть ограниченное множество, в которое переходит $\widetilde{\Sigma}(T)$ при преобразовании $\zeta \to \zeta' = (\zeta - \zeta_0)^{-1}$. Далее,

$$R((\zeta - \zeta_0)^{-1}, R(\zeta_0)) = -(\zeta - \zeta_0) - (\zeta - \zeta_0)^2 R(\zeta). \tag{6.18}$$

Более того, $\operatorname{spr} R(\zeta_0) = 1/\operatorname{dist}(\zeta_0, \Sigma(T))$.

---

[1] Теорема 6.15 является частным случаем *теоремы об отображении спектра*, которая утверждает, что спектр «функции» $\phi(T)$ оператора $T$ есть образ множества $\Sigma(T)$ при отображении $\phi$. Оператор $\phi(T)$ определяется интегралом Данфорда — Тейлора так же, как в (I.5.47). Мы не приводим здесь доказательство этой общей теоремы (см. Данфорд и Шварц [[1]]).

## 4. Разбиение спектра

Может случиться, что спектр $\Sigma(T)$ замкнутого оператора $T$ содержит ограниченную часть $\Sigma'$, отделенную от оставшейся части $\Sigma''$ в том смысле, что существует спрямляемая простая замкнутая кривая $\Gamma \subset \mathrm{P}(T)$ (или, более общо, конечный набор таких кривых), во внутренней части которой содержится $\Sigma'$, а во внешней $\Sigma''$. (В большинстве последующих приложений часть $\Sigma'$ состоит из конечного числа точек.) В такой ситуации справедлива следующая *теорема о разложении*:

**Теорема 6.17.** *Пусть $\Sigma(T)$ допускает описанное выше разбиение на части $\Sigma'$ и $\Sigma''$. Тогда существует разложение оператора $T$ относительно некоторой прямой суммы $\mathrm{X} = \mathrm{M}' \oplus \mathrm{M}''$ (в смысле п. 5.6), такое, что спектры частей $T_{\mathrm{M}'}$, $T_{\mathrm{M}''}$ совпадают с $\Sigma'$, $\Sigma''$ соответственно и $T_{\mathrm{M}'} \in \mathscr{B}(\mathrm{M}')$. Таким образом, $\tilde{\Sigma}(T_{\mathrm{M}'}) = \Sigma'$, в то время как $\tilde{\Sigma}(T_{\mathrm{M}''})$ может содержать бесконечно удаленную точку.*

Доказательство. Положим

$$P = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\zeta)\,d\zeta \in \mathscr{B}(\mathrm{X}). \tag{6.19}$$

Вычисления, аналогичные тем, которые были проделаны при выводе формулы (I.5.17), показывают, что $P^2 = P$. Таким образом, $P$ — проектор на $\mathrm{M}' = P\mathrm{X}$ параллельно $\mathrm{M}'' = (1 - P)\,\mathrm{X}$. Более того,

$$PR(\zeta) = R(\zeta)\,P, \quad \zeta \in \mathrm{P}(T), \tag{6.20}$$

и поэтому $P$ коммутирует с $T$ (теорема 6.5); это означает, что $T$ разложи́м относительно прямой суммы $\mathrm{M}' \oplus \mathrm{M}''$ на части $T_{\mathrm{M}'}$ и $T_{\mathrm{M}''}$.

Нетрудно видеть, что части $R_{\mathrm{M}'}(\zeta)$ и $R_{\mathrm{M}''}(\zeta)$ резольвенты $R(\zeta)$ в подпространствах $\mathrm{M}'$ и $\mathrm{M}''$ суть операторы, обратные к $T_{\mathrm{M}'} - \zeta$ и $T_{\mathrm{M}''} - \zeta$ соответственно. Отсюда следует, что $\mathrm{P}(T_{\mathrm{M}'})$ и $\mathrm{P}(T_{\mathrm{M}''})$ содержат $\mathrm{P}(T)$. Кроме того, $\mathrm{P}(T_{\mathrm{M}'})$ содержит $\Sigma''$. Чтобы убедиться в этом, отметим прежде всего, что $R_{\mathrm{M}'}(\zeta)\,u = R(\zeta)\,u = R(\zeta)\,Pu$ для $u \in \mathrm{M}'$, $\zeta \in \mathrm{P}(T)$. Для любой точки $\zeta \in \mathrm{P}(T)$, не лежащей на $\Gamma$, согласно (6.19) и резольвентному уравнению (I.5.5), имеем

$$R(\zeta)\,P = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\zeta)\,R(\zeta')\,d\zeta' = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (R(\zeta) - R(\zeta'))\frac{d\xi'}{\zeta - \zeta'}. \tag{6.21}$$

Если $\zeta$ лежит вне контура $\Gamma$, то

$$R(\zeta)\,P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta - \zeta'}. \tag{6.22}$$

Так как правая часть в (6.22) голоморфна вне Г, то $R(\zeta)P$ и, следовательно, $R_{M'}(\zeta)$ имеют аналитические продолжения, голоморфные вне Г. Тот факт, что такое продолжение $R_{M'}(\zeta)$ является резольвентой оператора $T_{M'}$, следует из теоремы 6.7. Таким образом, Р $(T_{M'})$ содержит внешнюю часть, ограниченную замкнутой кривой Г, и, следовательно, $\Sigma(T_{M'}) \subset \Sigma'$.

Аналогичным образом из (6.21) следует, что

$$R(\zeta)P = R(\zeta) + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\zeta')\frac{d\zeta'}{\zeta-\zeta'}, \tag{6.23}$$

если $\zeta$ лежит во внутренней части кривой Г. Это показывает, что $R(\zeta)(1-P)$ имеет аналитическое продолжение, голоморфное во внутренней части замкнутой кривой Г. Как и выше, это приводит к заключению, что $\Sigma(T_{M''}) \subset \Sigma''$.

С другой стороны, точка $\zeta \in \Sigma$ не может принадлежать одновременно Р $(T_{M'})$ и Р $(T_{M''})$; в противном случае она принадлежала бы Р $(T)$, так как оператор $R_{M'}(\zeta)P + R_{M''}(\zeta)(1-P)$ является обратным к $T-\zeta$. Отсюда следует, что $\Sigma(T_{M'}) = \Sigma'$ и $\Sigma(T_{M''}) = \Sigma''$.

Покажем, наконец, что

$$PT \subset TP = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma TR(\zeta)\,d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \zeta R(\zeta)\,d\zeta \in \mathscr{B}(\mathrm{X}). \tag{6.24}$$

Включение $PT \subset TP$ означает, что $T$ коммутирует с $P$. Второе равенство в (6.24) очевидно, так как $TR(\zeta) = 1 + \zeta R(\zeta)$. Первое равенство получается формальным умножением обеих частей (6.19) слева на $T$. Эта операция законна ввиду замкнутости оператора $T$ [нужно аппроксимировать интеграл (6.19) конечной суммой и использовать ограниченность оператора $TR(\zeta) = 1 + \zeta R(\zeta)$].

Из (6.24) следует, что $T_{M'} \in \mathscr{B}(\mathrm{M}')$. Доказательство закончено.

Отметим ряд фактов, полученных попутно при доказательстве теоремы. Резольвенту $R(\zeta)$ можно записать в виде

$$R(\zeta) = R'(\zeta) + R''(\zeta), \tag{6.25}$$

где

$$R'(\zeta) = PR(\zeta) = R(\zeta)P, \qquad R''(\zeta) = (1-P)R(\zeta) = R(\zeta)(1-P).$$

Функция $R'(\zeta)$ голоморфна вне $\Sigma'$, ее сужение на $\mathrm{M}'$ совпадает с $R_{M'}(\zeta)$, а сужение на $\mathrm{M}''$ равно нулю. Аналогично, $R''(\zeta)$ голоморфна вне $\Sigma''$ и совпадает с $R_{M''}(\zeta)$ на $\mathrm{M}''$, обращаясь в нуль на $\mathrm{M}'$.

Теорему 6.17 нетрудно обобщить на тот случай, когда $\Sigma(T)$ допускает разбиение на несколько частей $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_s$ и $\Sigma_0$, где каждое множество $\Sigma_h$, $1 \leqslant h \leqslant s$, ограничено и охватывается кривой (или некоторым набором таких кривых) так, что ни одна из кривых $\Gamma_h$ не лежит внутри другой; часть $\Sigma_0$ не охватывается кривыми $\Gamma_h$, $1 \leqslant h \leqslant s$, и может быть неограниченной. Тогда операторы $P_h$, определенные формулой (6.19) с $\Gamma_h$ вместо $\Gamma$, удовлетворяют соотношениям $P_h P_k = \delta_{hk} P_h$, $h, k = 1, \ldots, s$. Оператор $T$ коммутирует с каждым $P_h$ и поэтому допускает разложение относительно прямой суммы $\mathbf{X} = \mathbf{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{M}_s \oplus \oplus \mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_h = P_h \mathbf{X}$, где $P_0 = 1 - P_1 - \ldots - P_s$. Часть $T_{\mathbf{M}_h}$ оператора $T$ в $\mathbf{M}_h$ имеет спектр $\Sigma_h$ и $T_{\mathbf{M}_h} \in \mathscr{B}(\mathbf{M}_h)$ при $h \geqslant 1$.

## 5. Изолированные собственные значения [1]

Предположим, что спектр $\Sigma(T)$ оператора $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ имеет *изолированную точку* $\lambda$. Очевидно, что $\Sigma(T)$ допускает разбиение на части $\Sigma' = \{\lambda\}$ и $\Sigma'' = \Sigma(T) - \Sigma'$ в смысле, указанном в предыдущем пункте; любую замкнутую кривую, охватывающую $\lambda$, но не охватывающую другие точки спектра $\Sigma(T)$, можно выбрать в качестве $\Gamma$. Спектр оператора $T_{\mathbf{M}'}$, построенного в теореме 6.17, состоит из одной точки $\lambda$. Следовательно, оператор $T_{\mathbf{M}''} - \lambda$ квазинильпотентен (см. § 2). Ряд Неймана (см. (I.5.10)) для $T_{\mathbf{M}'} - \lambda$

$$R_{\mathbf{M}'}(\zeta) = -\sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \lambda)^{-n-1} (T_{\mathbf{M}'} - \lambda)^n \tag{6.26}$$

сходится всюду, кроме точки $\zeta = \lambda$. Формула (6.26) эквивалентна равенству

$$R'(\zeta) = R(\zeta) P = -\frac{P}{\zeta - \lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{(\zeta - \lambda)^{n+1}}, \tag{6.27}$$

где оператор

$$D = (T - \lambda) P = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} (\zeta - \lambda) R(\zeta)\, d\zeta \in \mathscr{B}(\mathbf{X}) \tag{6.28}$$

квазинильпотентен и

$$D = DP = PD. \tag{6.29}$$

С другой стороны, оператор $R_{\mathbf{M}''}(\zeta)$ голоморфен в окрестности точки $\zeta = \lambda$ и поэтому допускает разложение Тейлора в этой точке (см. (I.5.6)). Оно эквивалентно разложению

$$R''(\zeta) = R(\zeta)(1 - P) = \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta - \lambda)^n S^{n+1}, \tag{6.30}$$

---

[1] Термин «изолированное собственное значение» несколько двусмыслен. Мы имеем в виду собственное значение, которое является изолированной точкой спектра (а не изолированной точкой в множестве собственных значений).

где

$$S = R_{\mathrm{M''}}(\lambda)(1-P) = \lim_{\zeta\to\lambda} R(\zeta)(1-P). \tag{6.31}$$

(Отметим попутно, что оператор $R(\lambda)$ не существует.) Оператор $R''(\zeta)$ назовем *приведенной резольвентой* оператора $T$, соответствующей собственному значению $\lambda$.

Из (6.27) и (6.30) следует, что

$$R(\zeta) = -\frac{P}{\zeta-\lambda} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{(\zeta-\lambda)^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} (\zeta-\lambda)^n S^{n+1}. \tag{6.32}$$

Это — разложение Лорана для $R(\zeta)$ в окрестности изолированной особой точки $\zeta = \lambda$.

Оператор $S$ обладает свойствами, аналогичными свойствам оператора $S_h$, введенного в конечномерном случае (см. п. I.5.3), а именно

$$S = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} R(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-\lambda} \in \mathscr{B}(\mathrm{X}), \tag{6.33}$$

$$ST \subset TS \in \mathscr{B}(\mathrm{X}), \quad (T-\lambda)S = 1-P, \quad SP = PS = 0. \tag{6.34}$$

Разложение Лорана (6.32) аналогично разложению (I.5.18) в конечномерном случае с тем единственным отличием, что главная часть теперь может оказаться бесконечным рядом. Однако главная часть в (6.32) конечна, если пространство $\mathrm{M}'$ конечномерно, так как в этом случае оператор $D_{\mathrm{M}'} = T_{\mathrm{M}'} - \lambda$ нильпотентен (см. задачу (I.5.6)), и то же самое верно для $D$. В рассматриваемом случае число $\lambda$ оказывается *собственным значением* оператора $T$. В самом деле, так как $\lambda$ принадлежит спектру конечномерного оператора $T_{\mathrm{M}'}$, оно является собственным значением для $T_{\mathrm{M}'}$ и, следовательно, для $T$. В этом случае $\dim \mathrm{M}'$ называется (*алгебраической*) *кратностью* собственного значения $\lambda$, а операторы $P$ и $D$ называются *собственным проектором и собственным нильпотентом* оператора $T$, соответствующими числу $\lambda$. Если $\dim \mathrm{M}' = \infty$, то $\lambda$ может и не быть собственным значением оператора $T$.

Эти результаты можно распространить на случай конечного набора $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$ изолированных точек из $\Sigma(T)$. Замечание, сделанное в конце § 4, немедленно приводит к разложению

$$R(\zeta) = -\sum_{h=1}^{s}\left[\frac{P_h}{\zeta-\lambda_h} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{D_h^n}{(\zeta-\lambda_h)^{n+1}}\right] + R_0(\zeta). \tag{6.35}$$

Здесь $P_h$ — проекторы, а $D_h$ — квазинильпотентные операторы, удовлетворяющие соотношениям

$$P_h P_k = \delta_{hk} P_h, \quad P_h D_h = D_h P_h = D_h, \quad (T-\lambda_h) P_h = D_h. \tag{6.36}$$

Оператор $R_0(\zeta)$ голоморфно зависит от $\zeta$ в точках $\lambda_h$, $h = 1, \ldots, s$, и

$$R_0(\zeta) = P_0R(\zeta) = R(\zeta)P_0, \quad P_0 = 1 - (P_1 + \ldots + P_s), \tag{6.37}$$

и снова $\lambda_h$ оказывается собственным значением оператора $T$, если $\mathbf{M}_h = P_h\mathbf{X}$ конечномерно, а $P_h$ и $D_h$ суть собственный проектор и собственный нильпотент, соответствующие этому $\lambda_h$. Далее имеем

$$TP = \sum_{h=1}^{s} (\lambda_h P_h + D_h), \quad P = P_1 + \ldots + P_s. \tag{6.38}$$

Это разложение можно рассматривать как *спектральное представление* оператора $T$ в некотором *ограниченном смысле*. Оно не так полно, как спектральное представление в конечномерном случае (п. I.5.4), поскольку изолированные точки, вообще говоря, не исчерпывают спектр $\Sigma(T)$, а если и исчерпывают, то таких точек, вообще говоря, бесконечно много. Тем не менее представление (6.38) дает довольно полное описание оператора $T$, если ограничиться рассмотрением части комплексной плоскости, в которой лежит лишь конечное число точек спектра $\Sigma(T)$, являющихся собственными значениями конечной кратности. Такой набор собственных значений мы будем для краткости называть *конечной системой собственных значений*. Для конечной системы собственных значений ситуация в значительной мере аналогична конечномерному случаю, подробно рассмотренному в § I.5. Большинство результатов, полученных в § I.5, можно перенести на рассматриваемый случай, и если это не вызывает особых трудностей, мы будем в дальнейшем использовать соответствующие факты без специальных пояснений.

**Задача 6.18.** Предположим, что в теореме 6.17 $\dim \mathbf{M}' = m < \infty$. Тогда $\Sigma'$ является конечной системой собственных значений с суммарной кратностью $m$.

**Пример 6.19.** Рассмотрим дифференциальный оператор $T_3$ из примера 2.6 (или 2.7). Спектр этого оператора состоит из изолированных точек $\lambda_n$ вида (6.5). Найдем соответствующие собственные проекторы $P_n$. Интегрируя резольвенту $R_3(\zeta)$ (см. формулу (6.6)) по окружности малого радиуса с центром в точке $\zeta = \lambda_n$ (число $\lambda_n$ является нулем функции $k - e^{(b-a)\zeta}$), имеем, согласно (6.19),

$$P_n v(y) = -\frac{1}{2\pi i}\int R_3(\zeta)\, v(y)\, d\zeta = \frac{e^{\lambda_n y}}{b-a}\int_a^b e^{\lambda_n x} v(x)\, dx \tag{6.39}$$

(промежуточный интеграл был вычислен методом вычетов) [1]. Оператор $P_n$

---

[1] Строго говоря, такие формулы, как (6.39) или (6.41), требуют обоснования, так как интеграл в (6.19) является интегралом операторнозначной функции $R(\zeta)$, в то время как в (6.39) и (6.41) входят значения функций. Для пространства $\mathbf{X} = \mathbf{C}[a, b]$ доказательство тривиально, так как $u(y)$, $u \in \mathbf{C}[a, b]$, при фиксированном $y$ является ограниченной линейной формой

является вырожденным интегральным оператором ранга 1 с ядром

$$p_n(y, x) = \frac{1}{b-a} e^{\lambda_n(y-x)}. \qquad (6.40)$$

Каждое $\lambda_n$ есть изолированное собственное значение оператора $T_3$ кратности 1 (простое собственное значение), и, следовательно, собственные нильпотенты обращаются в нуль.

**Пример 6.20.** Рассмотрим дифференциальный оператор $T_1$ из п. 2.3. Спектр $\Sigma(T_1)$ состоит из изолированных точек $\lambda_n$, являющихся нулями целой функции $W_0(\zeta)$; см. пример 6.11. Собственные проекторы $P_n$ можно найти так же, как в предыдущем примере: резольвента $R_1(\zeta)$ является интегральным оператором с ядром $g(y, x; \zeta)$ вида (6.10), а $P_n$ вычисляются с помощью формулы (6.19) так же, как в (6.39). Так как существует константа $k$ такая, что $u_2(x, \lambda_n) = ku_1(x, \lambda_n)$ ввиду обращения в нуль вронскиана в точке $\lambda_n$, то простое применение метода вычетов дает

$$P_n v(y) = \frac{k\varphi_n(y)}{W_0'(\lambda_n)} \int_a^b \frac{\varphi_n(x)\, v(x)}{p_0(x)} e^{\int_a^x \frac{p_1}{p_0} dx} dx, \qquad \varphi_n(x) = u_1(x, \lambda_n). \quad (6.41)$$

Функция $\varphi_n(x)$ является собственной функцией оператора $T_1$, соответствующей собственному значению $\lambda_n$. Оператор $P_n$ — вырожденный интегральный оператор ранга 1. Попутно заметим, что свойство $P_n^2 = P_n$ эквивалентно равенству

$$\frac{1}{k} W_0'(\lambda_n) = \int_a^b \frac{\varphi_n(x)^2}{p_0(x)} e^{\int_a^x \frac{p_1}{p_0} dx} dx, \qquad (6.42)$$

которое можно проверить, непосредственно используя дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $\varphi_n(x)$. Из (6.42) следует, что $W_0'(\lambda_n) \neq 0$, так как $\lambda_n$, а следовательно, и $\varphi_n$ вещественны[1] (см. пример 6.11).

**Пример 6.21.** В качестве более специального примера рассмотрим оператор

$$Tu = -u'', \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \qquad (6.43)$$

с граничными условиями

$$u(0) = u(\pi) = 0.$$

Будем рассматривать $T$ как оператор в $C[0, \pi]$; этот оператор является частным случаем оператора $T_1$ из предыдущего примера, если положить $a = 0$, $b = \pi$, $p_0 = -1$, $p_1 = 0$, $p_2 = 0$. Собственные значения и нормированные собственные функции таковы:

$$\lambda_n = n^2, \quad \varphi_n(x) = \sin nx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \qquad (6.44)$$

---

в $C[a, b]$. Доказательство не так просто для пространства $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(a, b)$. В этом случае заметим сначала, что из (6.19) следует равенство $(Pv, f) = -(2\pi i)^{-1} \int (R(\zeta)v, f)\, d\zeta$ для $v \in \mathbf{X}$ и $f \in \mathbf{X}^* = \mathbf{L}^q(a, b)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Вычисляя интеграл в правой части и замечая, что $f \in \mathbf{X}^*$ произволен, видим, что равенства (6.39) и (6.41) справедливы для почти всех $y$.

[1] $W_0'(\lambda_n)$ может быть нулем, если одна из функций $p_0$, $p_1$, $p_2$ не является вещественной или если мы рассматриваем невещественные граничные условия. Если $W_0'(\lambda_n) = 0$, то $P_n$ уже не является, вообще говоря, оператором ранга 1 и $R(\zeta)$ может иметь полюс порядка выше 1.

Резольвента $R(\zeta)=R(\zeta;\,T)$ является интегральным оператором, ядро которого совпадает с функцией Грина уравнения $u''+\lambda u=0$, а именно

$$g(y,\,x;\,\zeta)=\frac{\sin\sqrt{\zeta}\,y\sin\sqrt{\zeta}\,(\pi-x)}{\sqrt{\zeta}\sin\pi/\sqrt{\zeta}},\quad y\leqslant x; \tag{6.45}$$

при $x\leqslant y$ в правой части (6.45) нужно поменять местами $x$ и $y$. Полюсы $g(y,\,x,\,\zeta)$ как функции от $\zeta$ суть собственные значения $\lambda_n=n^2$.

Разложение Лорана функции $g(y,\,x;\,\zeta)$ по степеням $\zeta-n^2$ соответствует разложению (6.35). Это замечание приводит к выражениям для $P$ и $S$, соответствующим числу $\lambda_n=n^2$. Эти операторы являются интегральными операторами с ядрами $p$ и $s$ соответственно, где

$$\begin{aligned} p(y,\,x)&=\frac{2}{\pi}\sin ny\sin nx,\\ s(y,\,x)&=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{y}{2n}\cos ny\sin nx+\frac{\pi-x}{2n}\sin ny\cos nx+\right.\\ &\qquad\left.+\frac{1}{4n^2}\sin ny\sin nx\right],\quad y\leqslant x; \end{aligned} \tag{6.46}$$

при $x\leqslant y$ в правых частях этих формул нужно поменять местами $x$ и $y$.

Для дальнейшего изложения мы выведем здесь некоторые оценки для резольвенты $R(\zeta)$. Согласно заключительному замечанию в примере 2.4, $\|R(\zeta)\|$ не превосходит $\max\limits_{y}\int|g(y,\,x;\,\zeta)|\,dx$. Так как $|\sin z|\leqslant\operatorname{ch}(\operatorname{Im}z)$ для любого комплексного числа $z$, то простые вычисления дают

$$\|R(\zeta)\|\leqslant\frac{\sin\pi\beta}{\beta|\zeta|^{1/2}(\sin^2\pi\alpha+\operatorname{sh}^2\pi\beta)^{1/2}},\quad \alpha=\operatorname{Re}\sqrt{\zeta},\quad \beta=\operatorname{Im}\sqrt{\zeta}. \tag{6.47}$$

Отсюда получаем оценки

$$\begin{aligned} \|R(\zeta)\|&\leqslant\frac{1}{|\beta||\zeta|^{1/2}}\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{|\alpha\beta|}=\dfrac{2}{|\operatorname{Im}\zeta|},\\[2mm] \dfrac{1}{|\beta|^2},\end{cases}\\ \|R(\zeta)\|&\leqslant\frac{\pi}{|\zeta|^{1/2}|\sin\pi\alpha|}\leqslant\frac{\pi}{|\alpha\sin\pi\alpha|}. \end{aligned} \tag{6.48}$$

Уравнение $\operatorname{Re}\sqrt{\zeta}=\alpha$ задает в комплексной $\zeta$-плоскости параболу

$$\zeta=\alpha^2-\frac{\eta^2}{4\alpha^2},\quad \text{где}\quad \xi=\operatorname{Re}\zeta,\quad \eta=\operatorname{Im}\zeta. \tag{6.49}$$

Из (6.48) следует, что в точках этой параболы $\|R(\zeta)\|\leqslant\pi/|\alpha\sin\pi\alpha|$.

## 6. Резольвента сопряженного оператора

Существует простая связь между резольвентой замкнутого оператора $T$ в $\mathsf{X}$ и резольвентой сопряженного оператора $T^*$ (предполагается, что $T$ плотно определен и, следовательно, $T^*$ существует). Следующая теорема является прямым следствием теоремы 5.30.

**Теорема 6.22.** Р $(T^*)$ *и* $\Sigma$ $(T^*)$ *суть зеркальные отражения* Р $(T)$ *и* $\Sigma$ $(T)$ *относительно вещественной оси; при этом*

$$R(\zeta, T^*) = R(\bar{\zeta}, T)^*, \quad \bar{\zeta} \in \mathrm{P}(T). \tag{6.50}$$

Согласно этой теореме, любой результат о спектре $\Sigma$ $(T)$ можно превратить в двойственный результат о спектре оператора $T^*$. Например, если $\Sigma$ $(T)$ можно разбить кривой $\Gamma$ на части $\Sigma'$ и $\Sigma''$ в смысле, указанном в п. 4, то $\Sigma$ $(T^*)$ допускает разбиение кривой $\bar{\Gamma}$ на части $\bar{\Sigma}'$ и $\bar{\Sigma}''$ (черта над $\Gamma$ означает зеркальное отражение). Разложения пространств $\mathbf{X} = \mathbf{M}' \oplus \mathbf{M}''$ и $\mathbf{X}^* = \mathbf{M}'^* \oplus \mathbf{M}''^*$, описанные в теореме 6.17, соответствуют проекторам $P$ и его сопряженному $P^*$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}' &= P\mathbf{X}, & \mathbf{M}'' &= (1 - P)\,\mathbf{X}, \\ \mathbf{M}'^* &= P^*\mathbf{X}^*, & \mathbf{M}''^* &= (1 - P^*)\,\mathbf{X}^*. \end{aligned} \tag{6.51}$$

Это следует из выражений

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R(\zeta, T)\, d\zeta, \qquad P^* = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\bar{\Gamma}} R(\zeta, T^*)\, d\zeta \tag{6.52}$$

с учетом равенства (6.50) и того обстоятельства, что интегралы в (6.52) взяты по контурам $\Gamma$ и $\bar{\Gamma}$ в *положительном* направлении. Из (6.51) следует, что

$$\dim \mathbf{M}' = \dim \mathbf{M}'^*, \quad \dim \mathbf{M}'' = \dim \mathbf{M}''^*; \tag{6.53}$$

в связи с этим см. теорему 4.13.

Предположим, в частности, что $\Sigma$ $(T)$ содержит изолированные точки $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$; при этом $R(\zeta) = R(\zeta, T)$ имеет вид (6.35). Соответствующее выражение для $R^*(\zeta) = R(\zeta, T^*)$ таково:

$$R^*(\zeta) = -\sum_{h=1}^{s} \left[ \frac{P_h^*}{\zeta - \bar{\lambda}_h} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D_h^{*n}}{(\zeta - \bar{\lambda}_h)^{n+1}} \right] + R_0^*(\zeta), \tag{6.54}$$

где проекторы $P_h^*$ удовлетворяют соотношениям $P_h^* P_k^* = \delta_{hk} P^*{}_h$ и $R_0^*(\zeta) = R_0(\bar{\zeta})^*$ голоморфна в точках $\zeta = \bar{\lambda}_h$, $h = 1, \ldots, s$. Если пространство $\mathbf{M}_h = P_h\mathbf{X}$ конечномерно, то таково же $\mathbf{M}_h^* = P_h^*\mathbf{X}^*$, $\dim \mathbf{M}_h^* = \dim \mathbf{M}_h$ и $\bar{\lambda}_h$ является собственным значением оператора $T^*$, (алгебраическая) кратность которого равна кратности собственного значения $\lambda_h$ оператора $T$.

**Замечание 6.23.** Изолированное собственное значение $\lambda$ оператора $T$ конечной кратности $m$ (такое, как, например, $\lambda_n$) близко по своим свойствам собственному значению конечномерного оператора. Так, например, не только (алгебраическая) кратность собственного значения $\bar{\lambda}$ оператора $T^*$ равна $m$, но и *геометриче-*

*ская* кратность $\bar{\lambda}$ равна геометрической кратности собственного значения $\lambda$ оператора $T$. Далее, линейное уравнение $(T-\lambda)\,u = v$ разрешимо тогда и только тогда, когда $v \perp \mathrm{N}\,(T^* - \bar{\lambda})$, а уравнение $(T^* - \bar{\lambda})\,g = f$ разрешимо тогда и только тогда, когда $f \perp \mathrm{N}\,(T-\lambda)$. Эти результаты получаются немедленно, если заметить, что задача сводится к конечномерной задаче для частей $T_{\mathrm{M}'}$ и $T^*_{\mathrm{M}'^*}$, которые можно рассматривать как операторы, сопряженные друг к другу.

**Замечание 6.24.** Если $\dim \mathrm{M}_h = \infty$, то может случиться, что $\lambda_h$ является собственным значением для $T$, а $\bar{\lambda}_h$ не является собственным значением для $T^*$, и наоборот.

**Пример 6.25.** Мы продолжим рассмотрение примера 6.20. Оператор $P_n$, определенный формулой (6.41), есть интегральный оператор с ядром $p_n\,(y,\,x) = \varphi_n\,(y)\,\psi_n\,(x)$, где

$$\psi_n\,(x) = k\varphi_n\,(x) \exp\left(\int\limits_a^x \frac{p_1}{p_0}\,dx\right) \Big/ W_0'\,(\lambda_n)\,p_0\,(x).$$

Число $\bar{\lambda}_n$ должно быть простым собственным значением оператора $T_1^*$, причем соответствующий собственный проектор $P_n^*$ является интегральным оператором с ядром $p_n^*\,(y,\,x) = \psi_n\,(y)\,\varphi_n\,(x)$. Итак, $\psi_n\,(x)$ — собственная функция оператора $T_1^*$, отвечающая собственному значению $\lambda_n$ (отметим, что $\lambda_n$, $\psi_n$, $\varphi_n$ вещественны). Здесь мы рассматриваем $T_1$ в $\mathrm{L}^p\,(a,\,b)$, а не в $\mathrm{C}\,[a,\,b]$, так как в последнем случае $T_1$ не является плотно определенным.

## 7. Спектры компактных операторов

Спектр компактного оператора по своей структуре аналогичен спектру оператора в конечномерном пространстве.

**Теорема 6.26.** *Предположим, что оператор $T \in \mathscr{B}\,(\mathrm{X})$ компактен. Тогда $\Sigma\,(T)$ — счетное множество, не имеющее предельных точек, отличных от нуля. Каждое число $\lambda \in \Sigma\,(T)$, $\lambda \neq 0$, является собственным значением конечной кратности для $T$, а $\bar{\lambda}$ — собственным значением той же кратности для $T^*$.*

Доказательство мы проведем в несколько этапов.

I. Сначала докажем, что $\lambda \neq 0$ *не может быть предельной точкой для собственных значений оператора $T$*. Предположим противное, и пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность различных собственных значений оператора, такая, что $0 \neq \lambda_n \to \lambda \neq 0$. Обозначим через $u_n$ собственный вектор оператора $T$, соответствующий $\lambda_n$, и через $\mathrm{M}_n$ — подпространство, порожденное векторами $u_1, \ldots, u_n$. Подпространство $\mathrm{M}_n$ инвариантно относительно $T$. Так как векторы $u_1, u_2, \ldots$ линейно независимы, то $\mathrm{M}_{n-1}$ — собственное подпространство в $\mathrm{M}_n$, и потому существует вектор

$v_n \in \mathrm{M}_n$ такой, что $\| v_n \| = 1$ и $\operatorname{dist}(v_n, \mathrm{M}_{n-1}) = 1$ (см. лемму 1.12). Определив таким образом последовательность $\{v_n\}$, покажем, что $\{\lambda_n^{-1} T v_n\}$ не содержит подпоследовательности Коши, а это противоречит предположению о компактности оператора $T$ (заметим, что последовательность $\{\lambda_n^{-1} v_n\}$ ограничена). При $m < n$ имеем

$$\lambda_n^{-1} T v_n - \lambda_m^{-1} T v_m = v_n - (\lambda_m^{-1} T v_m - \lambda_n^{-1} (T - \lambda_n) v_n).$$

Второй член в правой части этого равенства принадлежит $\mathrm{M}_{n-1}$ ввиду того, что $v_m \in \mathrm{M}_{n-1}$, $\mathrm{M}_{n-1}$ инвариантно относительно $T$ и $(T - \lambda_n) v_n \in \mathrm{M}_{n-1}$. Так как $\operatorname{dist}(v_n, \mathrm{M}_{n-1}) = 1$, то расстояния между элементами последовательности $\{\lambda_n^{-1} T v_n\}$ не меньше единицы, т. е. никакая подпоследовательность этой последовательности не может быть сходящейся.

II. Докажем теперь, что *подпространство* $\mathbf{R}(T - \zeta)$ *замкнуто, если* $\zeta \neq 0$ *и* $\zeta$ *не является собственным значением для* $T$. Предположим, что $(T - \zeta) u_n \to v$, и докажем включение $v \in \mathbf{R}(T - \zeta)$. Если последовательность $\{u_n\}$ ограничена, то $\{T u_n\}$ содержит последовательность Коши; заменяя $\{u_n\}$ подпоследовательностью, можем считать, что $\{T u_n\}$ — последовательность Коши. Пусть $T u_n \to w$. Тогда $\zeta u_n = T u_n - (T - \zeta) u_n \to w - v$. Применяя оператор $T$ к этому предельному соотношению, получаем $\zeta T u_n \to T(w - v)$. Таким образом, $\zeta w = Tw - Tv$ и, следовательно, $v = \zeta^{-1}(T - \zeta)(w - v) \in \mathbf{R}(T - \zeta)$. Остается показать, что последовательность $\{u_n\}$ ограничена. В противном случае, заменяя $\{u_n\}$ на подпоследовательность, можем считать, что $\| u_n \| \to \infty$. Положим $u_n' = u_n / \| u_n \|$. Тогда $\{u_n'\}$ — ограниченная последовательность и $(T - \zeta) u_n' \to 0$. Повторяя предыдущие рассуждения, получаем, что $T u_n' \to w$, $(T - \zeta) w = 0$ и $\zeta u_n' \to w$. Таким образом, $\| w \| = \lim \| \zeta u_n' \| = | \zeta | > 0$ и вектор $w$ оказывается собственным вектором оператора $T$, отвечающим собственному значению $\zeta$,— противоречие.

III. Назовем временно комплексное число $\zeta$ *исключительным*, если либо $\zeta$ — собственное значение для $T$, либо $\bar{\zeta}$ — собственное значение для $T^*$. Так как оператор $T^*$ компактен одновременно с $T$ (теорема 4.10), то из доказанного выше следует, что множество исключительных точек счетно и не имеет предельных точек, отличных от нуля. Каждая неисключительная точка $\zeta \neq 0$ принадлежит $\mathrm{P}(T)$. Действительно, так как $\mathbf{R}(T - \zeta)$ замкнуто, то достаточно заметить, что $\mathbf{R}(T - \zeta)^{\perp} = \mathbf{N}(T^* - \bar{\zeta}) = 0$. С другой стороны, исключительные точки, очевидно, принадлежат $\Sigma(T)$ (см. теорему 6.22). Таким образом, $\Sigma(T)$ совпадает с множеством исключительных точек. Согласно результатам предыдущего параграфа, теорема будет доказана, если мы покажем, что собственный проектор $P$, соответствующий числу $\lambda \in \Sigma(T)$, $\lambda \neq 0$, конечномерен.

Оператор $P$ имеет представление (6.19), где $\Gamma$ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $\lambda$. Резольвента $R(\zeta) = R(\zeta, \pi)$, вообще говоря, не является компактным оператором, но оператор $R(\zeta) + \zeta^{-1} = \zeta^{-1}TR(\zeta)$ компактен одновременно с $T$ (теорема 4.8). Так как $\int\limits_{\Gamma} \zeta^{-1}\, d\zeta = 0$, то $P$ равен интегралу по $\Gamma$ от компактного оператора $R(\zeta) + \zeta^{-1}$ и поэтому сам компактен (ввиду того что этот интеграл есть предел *по норме* конечных сумм компактных операторов). Согласно утверждению задачи 4.5, оператор $P$ конечномерен.

**Замечание 6.27.** Так как комплексное число $\lambda \neq 0$ либо принадлежит $\mathrm{P}(T)$, либо является изолированным собственным значением конечной кратности, то к $\lambda$ применимо замечание 6.23. Получающийся при этом результат известен как *теорема Рисса — Шаудера*; эта теорема обобщает классическую теорему Фредгольма для интегральных уравнений.

**Замечание 6.28.** Пусть $\lambda_n$, $n = 1, 2, \ldots$,— собственные значения компактного оператора, а $P_n$ и $D_n$ — соответствующие собственные проекторы и нильпотентные части. Положим $Q_n = P_1 + \ldots + P_n$ и $Q_n\mathrm{X} = \mathrm{M}_n$; $\{\mathrm{M}_n\}$ — возрастающая последовательность конечномерных подпространств в $\mathrm{X}$: $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{M}_2 \subset \mathrm{M}_3 \ldots$. Каждое $\mathrm{M}_n$, инвариантное относительно $T$, имеет спектральное представление вида

$$TQ_n = \sum_{h=1}^{m} (\lambda_h P_h + D_h) \tag{6.55}$$

[ср. (6.38)]. Это приводит к предположению, что $T = \sum\limits_{h=1}^{\infty} (\lambda_h P_h + D_h)$, однако без дополнительных ограничений на оператор $T$ такое представление неверно [1]. В самом деле, оператор $T$ может вовсе не иметь собственных значений (например, квазинильпотентный оператор не имеет ненулевых собственных значений; примером квазинильпотентного оператора может служить интегральный оператор Вольтерры; см. пример 3.15). Однако, как мы увидим в дальнейшем, сформулированная выше гипотеза верна для нормальных компактных операторов в гильбертовом пространстве (теорема V.2.10).

---

[1] Это интересная, но трудная задача. Она состоит в том, чтобы описать класс операторов, для которых такое спектральное разложение возможно. По этому поводу см. гл. II книги Данфорда и Шварца [[1]]. Поставленная задача также связана с теорией спектральных операторов, развитой Данфордом (см. Данфорд [[1]]).

## 8. Операторы с компактной резольвентой

Другим классом операторов, спектры которых аналогичны спектрам операторов в конечномерном пространстве, является класс операторов с компактной резольвентой. Пусть $T$ — замкнутый оператор в $\mathrm{X}$, такой, что $R(\zeta) = R(\zeta, T)$ существует и компактна по крайней мере для некоторого $\zeta_0$. Согласно результатам предыдущего пункта, $\Sigma(R(\zeta_0))$ — счетное множество, не имеющее ненулевых предельных точек. Так как $\Sigma(R(\zeta_0))$ — это образ множества $\widetilde{\Sigma}(T)$ при отображении $\zeta \to (\zeta - \zeta_0)^{-1}$ (см. задачу 6.16), то спектр $\Sigma(T)$ состоит только из изолированных точек (не имеющих предельной точки, кроме $\infty$). Собственный проектор, соответствующий $\lambda \in \Sigma(T)$, совпадает с собственным проектором оператора $R(\zeta_0)$, соответствующим собственному значению $\mu = (\lambda - \zeta_0)^{-1}$; это следует из (6.18) и (6.19) с помощью замены переменной интегрирования. Отсюда следует, в частности, что $\dim P < \infty$, т. е. каждое собственное значение $\lambda$ оператора $T'$ имеет конечную кратность. Далее, соотношение $R(\zeta) = R(\zeta_0)(1 + (\zeta - \zeta_0) R(\zeta))$ для любого $\zeta \in \mathrm{P}(T)$, вытекающее из резольвентного уравнения, показывает, что оператор $R(\zeta)$ компактен для каждого $\zeta \in \mathrm{P}(T)$. Таким образом, доказана

**Теорема 6.29.** *Пусть $T$ — замкнутый оператор в $\mathrm{X}$, такой, что для некоторого $\zeta$ резольвента $R(\zeta)$ существует и компактна. Тогда спектр оператора $T$ состоит из изолированных собственных значений*[1]*, имеющих конечные кратности, и $R(\zeta)$ компактен для каждого $\zeta \in \mathrm{P}(T)$.*

Такой оператор называется *оператором с компактной резольвентой*, а спектр описанного типа — *дискретным*. Таким образом, оператор с компактной резольвентой имеет дискретный спектр. Операторы с компактной резольвентой часто встречаются в математической физике. Можно сказать, что большинство дифференциальных операторов, возникающих в связи с *классической* граничной задачей, принадлежит этому типу.

**Задача 6.30.** Если оператор в $\mathrm{X}$ с компактной резольвентой ограничен, то $\mathrm{X}$ конечномерно.

**Пример 6.31.** Дифференциальные операторы из примеров 2.6 и 2.7 и п. 2.3, для которых резольвентное множество не пусто, суть операторы с компактной резольвентой, так как их резольвенты — это интегральные операторы с непрерывными ядрами (см. пример 4.1). Отсюда немедленно следует, что спектры этих операторов состоят из изолированных собственных значений конечной кратности (ср. примеры 6.19 и 6.20).

В связи с понятием оператора с компактной резольвентой оказываются полезными следующие леммы и их следствия.

---

[1] См. примечание на стр. 228.

**Лемма 6.32.** *Пусть операторы* $T_1, T_2 \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *обладают следующими свойствами:* i) $T_1$ *и* $T_2$ *суть продолжения одного и того же оператора* $T_0$, *причем порядок продолжения* $T_1$ *конечен;* ii) *операторы* $T_1^{-1}$ *и* $T_2^{-1}$ *существуют и принадлежат* $\mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. *Тогда оператор* $A = T_1^{-1} - T_2^{-1}$ *вырожден и* $\mathbf{N}(A) \supset \mathbf{R}(T_0)$, *где* $\operatorname{codim} \mathbf{R}(T_0) < \infty$. *Порядки продолжений* $T_1$ *и* $T_2$ *оператора* $T_0$ *равны (и поэтому* $T_2$ *также является конечным продолжением оператора* $T_0$*).*

Доказательство. Положим $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}(T_1)$, $\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}(T_2)$, $\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}(T_0)$, $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}(T_0)$. Каждый вектор $v \in \mathbf{R}_0$ имеет вид $v = T_0 u = T_1 u$ и, следовательно, $T_1^{-1} v = T_2^{-1} v = u$. Поэтому $Av = 0$ и $\mathbf{R}_0 \subset \mathbf{N}(A)$. Так как операторы $T_1$ и $T_2$ суть взаимно однозначные отображения, то $\dim(\mathbf{Y}/\mathbf{R}_0) = \dim(T_1\mathbf{D}_1/T_1\mathbf{D}_0) = \dim(\mathbf{D}_1/\mathbf{D}_0)$ и, аналогично, $\dim(\mathbf{Y}/\mathbf{R}_0) = \dim(\mathbf{D}_2/\mathbf{D}_0)$. Отсюда следует, что $\dim(\mathbf{Y}/\mathbf{N}(A)) \leqslant \dim(\mathbf{Y}/\mathbf{R}_0) = \dim(\mathbf{D}_2/\mathbf{D}_0) = \dim(\mathbf{D}_1/\mathbf{D}_0) < \infty$ и, следовательно, $A$ вырожден, согласно утверждению задачи 4.11.

**Лемма 6.33.** *Пусть* $T_1, T_2 \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *обладают следующими свойствами:* i) $T_1$ *и* $T_2$ *суть сужения одного и того же оператора* $T$, *причем порядок сужения* $T_1$ *конечен;* ii) $T_1^{-1}$ *и* $T_2^{-1}$ *существуют и принадлежат* $\mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. *Тогда* $A = T_1^{-1} - T_2^{-1}$ *вырожден и* $\mathbf{R}(A) \subset \mathbf{N}(T)$, *где* $\dim \mathbf{N}(T) < \infty$. *Порядки сужений* $T_1$ *и* $T_2$ *оператора* $T$ *равны.*

Доказательство. Для любого $v \in \mathbf{Y}$ имеем $TT_1^{-1}v = T_1 T_1^{-1} v = v$ и, аналогично, $TT_2^{-1}v = v$. Поэтому $TAv = 0$ и $\mathbf{R}(A) \subset \mathbf{N}(T)$. Но так как $T$ является конечным продолжением оператора $T_1$ и $T_1$ отображает $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}(T_1)$ на $\mathbf{Y}$, то $\dim \mathbf{N}(T) = \dim(\mathbf{D}/\mathbf{D}_1)$, где $\mathbf{D} = \mathbf{D}(T)$. Аналогично, $\dim \mathbf{N}(T) = \dim(\mathbf{D}/\mathbf{D}_2)$. Отсюда следует, что $\dim \mathbf{R}(A) < \dim \mathbf{N}(T) = \dim(\mathbf{D}/\mathbf{D}_2) = \dim(\mathbf{D}/\mathbf{D}_1) < \infty$.

**Следствие 6.34.** *Пусть операторы* $T_1, T_2 \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ *имеют непустые резольвентные множества. Предположим, кроме того, что* $T_1$ *и* $T_2$ *суть продолжения (сужения) одного и того же оператора* $T_0$, *причем порядок продолжения (сужения)* $T_1$ *конечен. В этих условиях* $T_1$ *имеет компактную резольвенту тогда и только тогда, когда* $T_2$ *обладает этим свойством.*

**Пример 6.35.** Результат примера 6.31 о том, что операторы из примеров 2.6 и 2.7 и п. 2.3 имеют компактные резольвенты, не случаен. Эти операторы суть конечные продолжения одного и того же оператора $T_0$ и в то же время конечные сужения оператора $T$.

Мы докажем здесь еще одну лемму, связанную с предыдущими леммами.

**Лемма 6.36.** *Предположим, что выполнены предположения лемм* 6.32 *и* 6.33. *Тогда оператор* $A = T_1^{-1} - T_2^{-1}$ *имеет вид*

$$A = \sum_{j=1}^{m} (\ , g_j)\, u_j, \quad u_j \in \mathbf{N}(T), \quad g_j \in \mathbf{R}(T_0)^{\perp}. \tag{6.56}$$

Доказательство. Так как $\mathbf{R}(A) \subset \mathbf{N}(T)$, согласно лемме 6.38, то $Av = \sum_{j=1}^{m} g_j[v]\, u_j$, где $u_j$, $j = 1, \ldots, m$,— линейно независимые векторы из $\mathbf{N}(T)$. Очевидно, что $g_j[v]$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, m$,— ограниченные линейные формы на $\mathbf{Y}$, обращающиеся в нуль на $\mathbf{R}(T_0)$, согласно лемме 6.32. Поэтому можно считать, что $g_j[v] = (v, g_j)$, где $g_j \in \mathbf{R}(T_0)^{\perp}$.

# ГЛАВА IV

# ТЕОРЕМЫ УСТОЙЧИВОСТИ

В этой главе мы исследуем устойчивость при малых возмущениях различных спектральных свойств линейных операторов в банаховых пространствах. Основными предметами изучения являются вопросы устойчивости (или неустойчивости) спектра и возмущение резольвенты. Результаты этой главы будут существенны для дальнейшего развития теории возмущений в последующих главах. Рассматривается устойчивость фредгольмовского и полуфредгольмовского свойств операторов, а также устойчивость дефекта, индекса и т. д. Сделана попытка рассматривать эти проблемы для неограниченных операторов и наиболее общих типов возмущений.

Одной из основных проблем при этом является определение «малого» возмущения для неограниченных операторов. Существует довольно общее определение «малости», полезное также и в приложениях, основанное на понятии относительно ограниченного возмущения. Однако в общей теории это определение слишком стеснительно. Наиболее естественное и общее определение малости возмущения можно дать в терминах метрики в пространстве $\mathscr{C}(X, Y)$ всех замкнутых линейных операторов, действующих из одного банахова пространства X в другое Y. Такая метрика давно известна, но в теории возмущений до сих пор не использовалась. Значительная часть результатов этой главы получена на основе систематического использования этой метрики.

Так как метрика в $\mathscr{C}(X, Y)$ определяется в терминах графиков операторов, являющихся замкнутыми подпространствами в $X \times Y$, то такая метрика оказывается частным случаем метрики на множестве всех замкнутых подпространств банахова пространства. По этой причине значительная часть главы посвящена построению метрики на множестве подпространств и родственным задачам. Строя теорию таким образом, мы приходим к таким понятиям, как фредгольмовское (или полуфредгольмовское) свойство пары подпространств, их дефект, индекс и т. д. Результаты о подпространствах естественным образом приводят к соответствующим результатам для операторов.

## § 1. Устойчивость замкнутости и ограниченной обратимости

### 1. Устойчивость замкнутости при относительно ограниченных возмущениях

Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, где $\mathrm{X}$ и $\mathrm{Y}$ — банаховы пространства (напомним, что $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ — множество всех замкнутых операторов из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$). Мы уже отмечали ранее (задача III.5.6), что оператор $T + A$ также замкнут, если $A \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Другими словами, замкнутость *устойчива* при ограниченном возмущении $A$. Мы обобщим здесь эту *теорему устойчивости* на случай неограниченных возмущений.

Обобщение такого рода можно получить в случае относительно ограниченных возмущений. Пусть операторы $T$ и $A$ имеют одно и то же пространство определения $\mathrm{X}$ (но не обязательно одно и то же пространство значений) и $\mathbf{D}(T) \subset \mathbf{D}(A)$. Если для некоторых положительных констант $a$ и $b$

$$\| Au \| \leqslant a \| u \| + b \| Tu \|, \quad u \in \mathbf{D}(T), \tag{1.1}$$

то оператор $A$ назовем *ограниченным относительно* $T$ или просто $T$-*ограниченным*. Нижняя грань $b_0$ всевозможных констант $b$ в (1.1) называется *относительной границей* (*относительной гранью*) оператора $A$ по отношению к $T$ или просто $T$-*границей* ($T$-*гранью*) оператора $A$. Если число $b$ близко к $b_0$, то требуемая константа $a$ может оказаться очень большой; таким образом, в (1.1) нельзя, вообще говоря, положить $b = b_0$.

Очевидно, что ограниченный оператор $A$ $T$-ограничен для любого такого $T$, что $\mathbf{D}(T) \subset \mathbf{D}(A)$, причем его $T$-граница равна нулю.

Сформулируем теперь упомянутую выше теорему об устойчивости замкнутости.

Теорема 1.1. *Пусть $T$ и $A$ — операторы из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$, причем $A$ $T$-ограничен и его $T$-граница меньше единицы. В этих условиях оператор $S = T + A$ замыкаем тогда и только тогда, когда $T$ замыкаем; в этом случае замыкания операторов $T$ и $S$ имеют одну и ту же область определения. В частности, $S$ замкнут тогда и только тогда, когда $T$ замкнут.*

Доказательство. Можем считать, что константа $b$ в (1.1) меньше единицы. Поэтому

$$-a \| u \| + (1 - b) \| Tu \| \leqslant \| Su \| \leqslant$$
$$\leqslant a \| u \| + (1 + b) \| Tu \|, \quad u \in \mathbf{D}(T). \tag{1.2}$$

Фиксируя $T$-сходящуюся последовательность $\{u_n\}$ (т. е. сходящуюся последовательность $\{u_n\}$, для которой $Tu_n$ также сходится; см. п. III.5.2) и применяя второе из неравенств (1.2) к вектору $u_n - u_m$, мы видим, что $\{u_n\}$ является $S$-сходящейся последовательностью. Аналогично из первого неравенства в (1.2) следует, что $S$-сходящаяся последовательность является также $T$-сходящейся. Из $S$-сходимости к нулю последовательности $\{u_n\}$ следует ее $T$-сходимость к нулю, и поэтому $Tu_n \to 0$, если $T$ допускает замыкание (см. (III.5.6)); далее, из второго неравенства в (1.2) следует, что $Su_n \to 0$, т. е. оператор $S$ замыкаем. Аналогично, $T$ допускает замыкание, если $S$ замыкаем.

Пусть $\tilde{T}$ и $\tilde{S}$ — замыкания $T$ и $S$ соответственно. Для каждого $u \in \mathbf{D}(\tilde{S})$ существует последовательность $\{u_n\}$, $S$-сходящаяся к $u$ (см. п. III.5.3). Так как, согласно предыдущему, $\{u_n\}$ $T$-сходится к $u$, то $u \in \mathbf{D}(\tilde{T})$ и поэтому $\mathbf{D}(\tilde{S}) \subset \mathbf{D}(\tilde{T})$. Обратное включение доказывается аналогично.

**Задача 1.2.** Если константа $b$ в (1.1) меньше единицы, то

$$\|Au\| \leqslant a\|u\| + b\|Tu\| \leqslant \leqslant (1-b)^{-1}(a\|u\| + b\|Su\|). \tag{1.3}$$

В частности, оператор $A$ $S$-ограничен и его $S$-граница не превосходит $b(1-b)^{-1}$. Вообще, любой $T$-ограниченный оператор с $T$-границей $\beta$ оказывается также $S$-ограниченным, причем его $S$-граница не превосходит $\beta(1-b)^{-1}$.

Предположения теоремы 1.1 несимметричны по отношению к $T$ и $S$, в то время как утверждения симметричны. В связи с этим представляет интерес следующее «симметризованное» обобщение теоремы 1.1.

**Теорема 1.3.** *Пусть $T$ и $S$ — операторы из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ такие, что для*

$$\|Su - Tu\| \leqslant a\|u\| + b'\|Tu\| + b''\|Su\|, \quad u \in \mathbf{D}(T) = \mathbf{D}(S), \tag{1.4}$$

*где $a$, $b'$ и $b''$ — неотрицательные константы, причем $b' < 1$ и $b'' < 1$. Тогда справедливы заключения теоремы* 1.1.

Доказательство. Пусть $A = S - T$, $T(\varkappa) = T + \varkappa A$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$. Операторы $T(\varkappa)$ имеют одну и ту же область определения $\mathbf{D}(T)$ и $T(0) = T$, $T(1) = S$. Так как $Tu = T(\varkappa)u - \varkappa Au$ и $Su = T(\varkappa)u + (1-\varkappa)Au$, то из (1.4) следует, что $\|Au\| \leqslant a\|u\| + (b' + b'')\|T(\varkappa)u\| + b\|Au\|$, где $b = \max(b', b'')$. Поэтому

$$\|Au\| \leqslant \frac{1}{1-b}(a\|u\| + (b' + b'')\|T(\varkappa)u\|). \tag{1.5}$$

Отсюда вытекает, что оператор $A$ $T(\varkappa)$-ограничен и его $T(\varkappa)$-граница не превосходит $\beta = (1 - b)^{-1} (b' + b'')$. Следовательно, оператор $(\varkappa' - \varkappa) A$ $T(\varkappa)$-ограничен и его $T(\varkappa)$-граница меньше единицы, если $|\varkappa' - \varkappa| < 1/\beta$, и поэтому по теореме 1.1 оператор $T(\varkappa')$ допускает замыкание тогда и только тогда, когда $T(\varkappa)$ замыкаем. Это замечание немедленно приводит к утверждению теоремы; так, например, свойство оператора $T(\varkappa)$ допускать замыкание «распространяется» от точки $\varkappa = 0$ до точки $\varkappa = 1$ за конечное число шагов величины не больше $1/\beta$.

**Замечание 1.4.** Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Положим

$$|||u||| = \|u\| + \|Tu\|, \quad u \in \mathrm{D}(T). \tag{1.6}$$

Нетрудно видеть, что $\mathrm{D}(T)$ становится банаховым пространством $\hat{\mathrm{X}}$ относительно нормы $|||\cdot|||$; полнота $\hat{\mathrm{X}}$ является прямым следствием замкнутости $T$. Если $A$ — оператор из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}'$, причем $\mathrm{D}(A) \supset \mathrm{D}(T)$, то сужение оператора $A$ на $\mathrm{D}(T)$ можно рассматривать как оператор $\hat{A}$ из $\hat{\mathrm{X}}$ в $\mathrm{Y}'$. Ясно, что $A$ $T$-ограничен тогда и только тогда, когда $\hat{A}$ замкнут.

**Замечание 1.5.** Если $T$ замкнут и $A$ замыкаем, то из включения $\mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(A)$ следует, что оператор $A$ $T$-ограничен. Для доказательства рассмотрим пространство $\hat{\mathrm{X}}$ и оператор $\hat{A}$, введенные в предыдущем замечании. Оператор $\hat{A}$ замыкаем, так как $\hat{A}$-сходящаяся последовательность в $\hat{\mathrm{X}}$ является $A$-сходящейся последовательностью в $\mathrm{X}$. Ввиду того что $\hat{A}$ определен на всем пространстве $\hat{\mathrm{X}}$, оператор $\hat{A}$ замкнут и, следовательно, ограничен по теореме III.5.20. Таким образом, $A$ $T$-ограничен согласно замечанию 1.4.

## 2. Примеры относительно ограниченных операторов

Так как понятие относительной ограниченности весьма важно в теории возмущений, мы рассмотрим здесь несколько примеров, иллюстрирующих это понятие[1]).

**Пример 1.6.** Пусть $(a, b)$ — конечный интервал, $\mathrm{X} = \mathrm{C}[a, b]$ или $\mathrm{L}^p(a, b)$, $T$ и $A$ — максимальные операторы, определенные равенствами $Tu = -u''$ и $Au = u'$ (см. примеры 2.6—2.7 и п. III.2.3). Мы покажем, что $A$ $T$-ограничен и его $T$-граница равна нулю. Для этого воспользуемся тождеством

$$u' = Gu'' + Hu, \tag{1.7}$$

---

[1]) Неравенства, приводимые ниже, являются частными случаями неравенств Соболева; см. С. Л. Соболев [[1]], Голдберг [[1]].

где $G$ и $H$ — интегральные операторы с ядрами $g(y, x)$ и $h(y, x)$ соответственно и

$$\begin{aligned} g(y, x) &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(b-a)(y-a)^n}, \quad h(y, x) = -\frac{n(n+1)(x-a)^{n-1}}{(b-a)(y-a)^n}, \quad a \leqslant x < y \leqslant b, \\ g(y, x) &= \frac{-(b-x)^{n+1}}{(b-a)(b-y)^n}, \quad h(y, x) = \frac{n(n+1)(b-x)^{n-1}}{(b-a)(b-y)^n}, \quad a \leqslant y < x \leqslant b; \end{aligned} \tag{1.8}$$

здесь $n$ — любое положительное число. Тождество (1.7) проверяется непосредственно с помощью интегрирования по частям. Операторы $G$ и $H$ ограничены, так как

$$\int_a^b |g(y, x)|\, dx \leqslant \frac{b-a}{n+2}, \qquad \int_a^b |g(y, x)|\, dy \leqslant \frac{b-a}{n-1}, \tag{1.9}$$

$$\int_a^b |h(y, x)|\, dx \leqslant \frac{2(n+1)}{b-a}, \qquad \int_a^b |h(y, x)|\, dy \leqslant \frac{2n(n+1)}{(n-1)(b-a)}, \tag{1.10}$$

где для простоты предполагается, что $n > 1$. Из (III.2.9) следует, что

$$\|G\| \leqslant \frac{b-a}{n-1}, \qquad \|H\| \leqslant \frac{2n(n+1)}{(n-1)(b-a)}. \tag{1.11}$$

Поэтому (1.7) приводит к оценке

$$\|u'\|_p \leqslant \frac{b-a}{n-1} \|u''\|_p + \frac{2n(n+1)}{(n-1)(b-a)} \|u\|_p, \quad n > 1. \tag{1.12}$$

Так как коэффициент при $\|u''\|_p$ можно сделать сколь угодно малым за счет выбора $n$, мы доказали наше утверждение.

Заметим, что для оценки нормы функции $u'$ в том случае, когда $X = L^\infty$ или $C$, достаточно использовать *лишь* первые из неравенств (1.9) и (1.10). В этом случае (1.12) заменяется оценкой

$$\|u'\|_\infty \leqslant \frac{b-a}{n+2} \|u''\|_\infty + \frac{2(n+1)}{b-a} \|u\|_\infty, \quad n > 0. \tag{1.13}$$

Отметим, что в оценках (1.12) и (1.13) на $u(x)$ не налагаются никакие граничные условия.

Предположим теперь, что $u$ и $u''$ принадлежат $L^p(0, \infty)$. Оценка (1.12) верна для $a = 0$ и любого $b > 0$. Фиксируя $k > 0$ и полагая $n = b/k$, устремляем $b$ к бесконечности. Мы видим, что норма $\|u'\|_p$, рассматриваемая на интервале $(0, b)$, ограничена при $b \to \infty$ и поэтому $u' \in L^p(0, \infty)$; кроме того

$$\|u'\|_p \leqslant k \|u''\|_p + \frac{2}{k} \|u\|_p. \tag{1.14}$$

Такое же неравенство справедливо и в случае всей числовой оси $(-\infty, +\infty)$. Так как $k > 0$ произвольно, то оператор $A = d/dx$ $T$-ограничен и его $T$-граница равна нулю в случае бесконечного интервала.

**Задача 1.7.** Из (1.14) вывести неравенство

$$\|u'\|_p \leqslant 2\sqrt{2}\,(\|u\|_p \|u''\|_p)^{1/2} \tag{1.15}$$

(в случае бесконечного интервала).

**Пример 1.8.** Пусть $(a, b)$ — конечный интервал, $\mathsf{X} = \mathsf{L}^p(a, b)$, $Tu = u'$ и $Au = u(c)$, где $c \in [a, b]$. $A$ — линейная *форма*, причем неограниченная, если $p < \infty$. Мы покажем, что форма $A$ $T$-ограничена и ее $T$-граница равна нулю при $p > 1$ и положительна при $p = 1$. Для этого мы воспользуемся тождеством

$$u(c) = (u', g) + (u, h), \tag{1.16}$$

где

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(b-a)(c-a)^n}, \quad h(x) = \frac{(n+1)(x-a)^n}{(b-a)(c-a)^n}, \quad a \leqslant x \leqslant c, \\ g(x) &= \frac{-(b-x)^{n+1}}{(b-a)(b-c)^n}, \quad h(x) = \frac{(n+1)(b-x)^n}{(b-a)(b-c)^n}, \quad c < x \leqslant b; \end{aligned} \tag{1.17}$$

здесь $n$ — любое положительное число. Это тождество можно проверить с помощью интегрирования по частям. Непосредственные вычисления приводят к неравенствам

$$\| g \|_q \leqslant \left( \frac{b-a}{nq+q+1} \right)^{1/q}, \quad \| h \|_q \leqslant \frac{n+1}{(b-a)^{1-1/q}(nq+1)^{1/q}} \tag{1.18}$$

для любого $q \geqslant 1$. Отсюда, из тождества (1.16) и из неравенств Гёльдера следует оценка:

$$\begin{gathered} | u(c) | \leqslant \| g \|_q \| u' \|_p + \| h \|_q \| u \|_p \leqslant \\ \leqslant \left( \frac{b-a}{nq+q+1} \right)^{1/q} \| u' \|_p + \frac{n+1}{(b-a)^{1/p}(nq+1)^{1/q}} \| u \|_p, \ p^{-1} + q^{-1} = 1. \end{gathered} \tag{1.19}$$

Если $p > 1$, то $q < \infty$ и коэффициент при $\| u' \|_p$ в правой части (1.19) можно сделать сколь угодно малым за счет выбора $n$; таким образом, форма $A$ $T$-ограничена и ее $T$-граница равна нулю. Если $p = 1$, то $q = \infty$, и переходя к пределу в (1.19) при $n \to 0$, получаем оценку

$$| u(c) | \leqslant \| u' \|_1 + \| u \|_1/(b-a). \tag{1.20}$$

Итак, при $p = 1$ форма $A$ $T$-ограничена и ее $T$-граница не превосходит 1. Если $c = a$ или $c = b$, то $T$-граница в точности равна 1; это вытекает из существования последовательности $\{u_k\}$ такой, что $u_k(b) = 1$, $\| u_k' \|_1 = 1$ и $\| u_k \|_1 \to 0$ при $k \to \infty$. Примером такой последовательности может служить $u_k(x) = (x-a)^k/(b-a)^k$. Если $a < c < b$, то $T$-граница формы $A$ равна $1/2$. В самом деле, имеем

$$| u(c) | \leqslant \frac{1}{2} \| u' \|_1 + \frac{1}{2} \max \left( \frac{1}{c-a}, \frac{1}{b-c} \right) \| u \|_1; \tag{1.21}$$

для доказательства этой оценки заметим, что тождество (1.16) справедливо для функций $g$ и $h$ вида

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{x-a}{2(c-a)}, \quad h(x) = \frac{1}{2(c-a)} \quad \text{при} \quad a \leqslant x < c, \\ g(x) &= \frac{x-b}{2(b-c)}, \quad h(x) = \frac{1}{2(b-c)} \quad \text{при} \quad c \leqslant x \leqslant b. \end{aligned} \tag{1.22}$$

Ясно, что $\| g \|_\infty = 1/2$ и $\| h \|_\infty = \max((c-a)^{-1}, (b-c)^{-1})/2$. $T$-граница формы $A$ в рассматриваемом случае не меньше $1/2$, так как существует последовательность $\{u_k\}$ такая, что $u_k(c) = 1$, $\| u_k' \|_1 = 2$ и $\| u_k \|_1 \to 0$ при $k \to \infty$. Примером такой последовательности может служить

$$u_k(x) = \begin{cases} (x-a)^k/(c-a)^k & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant c, \\ (b-x)^k/(b-c)^k & \text{при} \quad c \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

**Пример 1.9.** Пусть $(a, b)$ — конечный интервал, $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(a, b)$, $T\colon u \to u'$ — оператор в $\mathbf{X}$, как и в предыдущем примере, и $A\colon u \to u$ — оператор из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y} = \mathbf{C}[a, b]$. Так как каждая функция $u \in \mathbf{D}(T)$ непрерывна, то $\mathbf{D}(T) \subset \mathbf{D}(A)$. Далее, ввиду того, что (1.19) справедливо для любого числа $c \in [a, b]$, а правая часть этого неравенства не зависит от $c$, $\| Au \| = \| u \|_\infty$ не превосходит правой части в (1.19). Отсюда следует, что $A$ $T$-ограничен и его $T$-граница равна нулю при $p > 1$ и единице при $p = 1$. Отметим, что оценка (1.21) бесполезна в рассматриваемом случае, так как правая часть в (1.21) не ограничена по $c$. Однако если $A$ рассматривать как оператор из $\mathbf{L}^1(a, b)$ в $\mathbf{Y}' = \mathbf{C}[a', b']$, $a < a' < b' < b$, то из (1.21) следует, что $T$-граница оператора $A$ равна $1/2$.

**Пример 1.10.** Рассмотрим максимальный дифференциальный оператор $T$ из п. III.2.3, построенный по формальному оператору (2.13). Рассмотрим также другой формальный дифференциальный оператор, получающийся из (2.13) заменой функций $p_0$, $p_1$, $p_2$ на $q_0$, $q_1$, $q_2$, и построим соответствующий максимальный оператор $S$. Операторы $T$ и $S$ имеют одну и ту же область определения, состоящую из всех функций $u \in \mathbf{X}$ таких, что $u'$, $u'' \in \mathbf{X}$. Мы покажем, что оператор $S$ $T$-ограничен, и оценим его $T$-границу. Для любой функции $u \in \mathbf{D}(T)$ имеем

$$\begin{gathered} \| Su\| \leqslant N_0 \| u'' \| + N_1 \| u' \| + N_2 \| u \|, \\ N_j = \max_{x \in [a,b]} | q_j(x) |, \quad j = 0, 1, 2. \end{gathered} \tag{1.23}$$

Неравенство (1.12) можно переписать в виде

$$\| u' \| \leqslant \varepsilon \| u'' \| + C_\varepsilon \| u \|, \tag{1.24}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно, а $C_\varepsilon$ — подходящая константа. Из (1.23) и (1.24) следует, что

$$\| Su \| \leqslant (N_0 + \varepsilon N_1) \| u'' \| + (C_\varepsilon N_1 + N_2) \| u \|. \tag{1.25}$$

С другой стороны, полагая $m_0 = \min | p_0(x) |$ и $M_j = \max | p_j(x) |$, $j = 1, 2$, имеем

$$\begin{aligned} \| Tu \| &\geqslant m_0 \| u'' \| - M_1 \| u' \| - M_2 \| u \| \geqslant \\ &\geqslant (m_0 - \varepsilon M_1) \| u'' \| - (C_\varepsilon M_1 + M_2) \| u \|. \end{aligned} \tag{1.26}$$

Если число $\varepsilon$ выбрать столь малым, что $m_0 > \varepsilon M_1$, то

$$\| Su \| \leqslant \frac{N_0 + \varepsilon N_1}{m_0 - \varepsilon M_1} \| Tu \| + \left[ \frac{(C_\varepsilon M_1 + M_2)(N_0 + \varepsilon N_1)}{m_0 - \varepsilon M_1} + C_\varepsilon N_1 + N_2 \right] \| u \|. \tag{1.27}$$

Устремляя $\varepsilon$ к нулю, видим, что $T$-граница оператора $S$ не превосходит $N_0/m_0$. Следует отметить, что коэффициенты при $\| Tu \|$ и $\| u \|$ в (1.27) становятся сколь угодно малыми, если число $N = \max(N_0, N_1, N_2)$ достаточно мало. Отметим также, что в рассуждениях этого примера функция $q_0(x)$ не обязана быть положительной.

Рассмотрим теперь сужения $T_1$, $T_2$ и т. д. оператора $T$ и введем сужения $S_1$, $S_2$ и т. д. оператора $S$, порожденные теми же граничными условиями. Из предыдущих рассуждений следует, что оператор $S_n$ $T_n$-ограничен, $n = 1, 2$ и т. д.

## 3. Относительная компактность и теорема устойчивости

По аналогии с понятием относительной ограниченности введем понятие относительной компактности. Пусть $T$ и $A$ — операторы, имеющие одно и то же пространство определения $\mathbf{X}$ (но, возможно, различные пространства значений). Предположим, что $\mathbf{D}(T) \subset \mathbf{D}(A)$ и для любой последовательности, составленной из $u_n \in \mathbf{D}(T)$, ограниченной вместе с $\{Tu_n\}$, последовательность $\{Au_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. В такой ситуации будем говорить, что оператор $A$ *компактен относительно* $T$ или просто $T$-*компактен*[1]).

Из $T$-компактности следует $T$-ограниченность. В самом деле, если $A$ не является $T$-ограниченным, то существует такая последовательность $u_n \in \mathbf{D}(T)$, что $\| u_n \| + \| Tu_n \| = 1$, но $\| Au_n \| \geqslant n$, $n = 1, 2, \ldots$ . Очевидно, что $\{Au_n\}$ не содержит сходящейся подпоследовательности.

**Теорема 1.11.** *Пусть $T$ и $A$ — операторы из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$, причем оператор $A$ $T$-компактен*[2]). *Если $T$ допускает замыкание, то и $S = T + A$ замыкаем, замыкания операторов $T$ и $S$ имеют общую область определения и $A$ $S$-компактен. В частности, если $T$ замкнут, то и $S$ замкнут*[3]).

Доказательство. Докажем сначала, что $A$ $S$-компактен, если $T$ замыкаем. Предположим, что последовательности $\{u_n\}$ и $\{Su_n\}$ ограничены; требуется доказать, что $\{Au_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Так как $A$ $T$-компактен, то достаточно показать, что $\{Tu_n\}$ содержит ограниченную подпоследовательность. Предположим противное, т. е. что $\| Tu_n \| \to \infty$. Положим $u'_n = u_n / \| Tu_n \|$; тогда $u'_n \to 0$, $Su'_n \to 0$, а последовательность $\{Tu'_n\}$ ограничена. Поэтому $\{Au'_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Заменяя $\{u_n\}$ на подходящую подпоследовательность, можем считать, что $Au'_n \to w$; тогда $Tu'_n = Su'_n - Au'_n \to -w$. Так как $u'_n \to 0$ и $T$ замкнут, то $w = 0$. Но это противоречит тому, что вектор $-w$ служит пределом последовательности $Tu'_n$, где $\| Tu'_n \| = 1$.

Докажем теперь, что $S$ замыкаем. Пусть $u_n \to 0$ и $Su_n \to v$, покажем, что $v = 0$. Так как $A$ $S$-компактен, то $\{Au_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. И снова можно считать, что $Au_n \to w$; тогда $Tu_n = Su_n - Au_n \to v - w$. Так как $u_n \to 0$ и $T$ замыкаем, то $Tu_n \to v - w = 0$. Ввиду того что $A$ $T$-ограничен, $Au_n \to 0$; поэтому $w = v = 0$.

---

[1]) По поводу примеров относительно компактных дифференциальных операторов см. Бальслев [1].

[2]) Здесь в противоположность предположениям теоремы 1.1 мы не налагаем ограничение на «относительную норму» оператора $A$.

[3]) Утверждения этой теоремы несимметричны относительно $T$ и $S$ (в противоположность теореме 1.1). Возможно даже, что $T$ не допускает замыкание, в то время как $S$ замкнут. Простой пример такого рода мы получим, полагая $T = -A = f$, где $f$ — неограниченная линейная форма на $\mathbf{X}$; здесь $\mathbf{Y}$ — одномерное пространство $C$ (см. примечание 2 на стр. 171). $T$ не допускает замыкания, согласно утверждению задачи III.5.18, форма $A$ $T$-компактна, однако форма $S = 0$ и, следовательно, замкнута.

Пусть $\tilde{T}$ и $\tilde{S}$ — замыкания $T$ и $S$ соответственно. Если $u \in \mathbf{D}(\tilde{T})$, то существует последовательность $\{u_n\}$, $T$-сходящаяся к $u$. Ввиду того что оператор $S$, так же как и $A$, $T$-ограничен, последовательность $\{u_n\}$ $S$-сходится к $u$ и поэтому $u \in \mathbf{D}(\tilde{S})$. Обратно, предположим, что $u \in \mathbf{D}(\tilde{S})$. Тогда существует $S$-сходящаяся к $u$ последовательность $\{u_n\}$. Так же как в первой части доказательства, можно показать, что $\{Tu_n\}$ ограничена. Поэтому, как и раньше, можно считать, что $Au_n \to w$ и $Tu_n = Su_n - Au_n \to v - w$. Таким образом, $\{u_n\}$ $T$-сходится к $u$, т. е. $u \in \mathbf{D}(\tilde{T})$. Итак, доказано, что $\mathbf{D}(\tilde{T}) = \mathbf{D}(\tilde{S})$.

**Замечание 1.12.** Предположим, что $T$ замкнут и $\mathbf{D}(A) \supset \mathbf{D}(T)$. Рассмотрим пространство $\hat{\mathbf{X}}$ и оператор $\hat{A}$, введенные в замечании 1.4. Оператор $A$ $T$-компактен тогда и только тогда, когда $\hat{A}$ компактен.

**Замечание 1.13.** Можно определить *относительно вырожденные операторы* как частный случай относительно компактных операторов. Оператор $A$ *$T$-вырожден*, если $A$ $T$-ограничен и пространство $\mathbf{R}(A)$ конечномерно. Нетрудно видеть, что $T$-вырожденный оператор $T$-компактен.

Мы дадим явное описание $T$-вырожденных операторов. Пусть $T$ действует из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$; рассмотрим пространство $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ (см. п. III.5.2). Так как из $T$-ограниченности оператора $A$ следует, что $\| Au \| \leqslant \text{const} \, \| \{u, Tu\} \|$, то $A$ можно рассматривать как ограниченный оператор из $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ в $\mathbf{Y}'$ (пространство значений оператора $A$) с областью определения $\mathbf{G}(T)$ (график оператора $T$). Ввиду того что пространство $\mathbf{R}(A)$ конечномерно, $Au$ можно записать в виде

$$Au = \sum_{j=1}^{m} g'_j [u] \, y'_j, \quad y'_j \in \mathbf{Y}', \tag{1.28}$$

где $g'_j$ суть линейные формы на $\mathbf{G}(T)$. Так как $| g'_j [u] | \leqslant \text{const} \, \| Au \|$ согласно (I.1.21), то $g'_j$ — ограниченные формы на $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ с областью определения $\mathbf{G}(T)$. По теореме Хана — Банаха формы $g'_j$ можно продолжить до ограниченных форм на $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Так как $(\mathbf{X} \times \mathbf{Y})^* = \mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^*$, то эти продолжения можно записать в виде $\{u, v\} \to (u, f_j) + (v, g_j)$, где $f_j \in \mathbf{X}^*$ и $g_j \in \mathbf{Y}^*$. Если $\{u, v\} \in \mathbf{G}(T)$, то $g'_j [u] = (u, f_j) + (Tu, g_j)$. Таким образом, мы приходим к следующему общему виду для $T$-вырожденного оператора из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}'$:

$$Au = \sum_{j=1}^{m} [(u, f_j) + (Tu, g_j)] \, y'_j, \quad f_j \in \mathbf{X}^*, \; g_j \in \mathbf{Y}^*, \; y'_j \in \mathbf{Y}'. \tag{1.29}$$

Задача 1.14. Предположим, что существует плотно определенный оператор $S$ из $\mathbf{Y}^*$ в $\mathbf{X}^*$, сопряженный к $T$ (см. (III.5.7)). Тогда $T$-граница $T$-вырожденного оператора $A$ равна нулю. [*Указание*: приблизить $g_j$ из (1.29) элементами из $\mathbf{D}(S)$.]

**Пример 1.15.** В примере 1.6 оператор $A$ $T$-компактен, если $(a, b)$ — конечный интервал. В самом деле, если последовательность $\{u_n\}$ такова, что последовательность $Tu_n = -u_n''$ ограничена, то семейство $Au_n = u_n'$ равностепенно непрерывно. Если, кроме того, $\{u_n\}$ ограничена, то $\{u_n'(x)\}$ равномерно ограничена по $x$ и $n$. Таким образом, по теореме Асколи $\{u_n'\}$ содержит равномерно сходящуюся подпоследовательность, являющуюся последовательностью Коши в $\mathbf{X}$. Оператор $A$ не будет $T$-компактным на интервале $(0, \infty)$ или $(-\infty, +\infty)$, хотя он $T$-ограничен, причем его $T$-граница равна нулю (см. (1.14)). Оператор $A$ из примера 1.8 не только $T$-компактен, но даже $T$-вырожден. Это очевидно, так как оператор $A$ $T$-ограничен и его пространство значений одномерно.

## 4. Устойчивость ограниченной обратимости

Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Мы покажем, что свойство обратного оператора быть ограниченным устойчиво при малых возмущениях.

**Теорема 1.16**[1]. *Пусть $T$ и $A$ — операторы из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$. Предположим, что $T^{-1}$ существует и принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ (отсюда следует, в частности, что $T$ замкнут). Предположим, кроме того, что $A$ $T$-ограничен, причем константы $a$, $b$ в (1.1) удовлетворяют неравенству*

$$a \, \| T^{-1} \| + b < 1. \tag{1.30}$$

*Тогда оператор $S = T + A$ замкнут и обратим, причем $S^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ и*

$$\| S^{-1} \| \leqslant \frac{\| T^{-1} \|}{1 - a \| T^{-1} \| - b}, \quad \| S^{-1} - T^{-1} \| \leqslant \frac{\| T^{-1} \| (a \| T^{-1} \| + b)}{1 - a \| T^{-1} \| - b}. \tag{1.31}$$

*Если, кроме того, $T^{-1}$ компактен, то $S^{-1}$ компактен.*

Доказательство. Так как, согласно условию (1.30), $b < 1$, то $S$ замкнут по теореме 1.1. Доказательство других утверждений теоремы почти не отличается от соответствующих рассуждений в конечномерном случае (см. конец п. I.4.4); заметим сначала, что

$$S = T + A = (1 + AT^{-1}) \, T, \quad AT^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}), \tag{1.32}$$

так как $AT^{-1}$ — оператор из $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{Y}$ и $\| AT^{-1}v \| \leqslant a \, \| T^{-1}v \| + b \, \| v \| \leqslant (a \, \| T^{-1} \| + b) \, \| v \|$. Таким образом,

$$\| AT^{-1} \| \leqslant a \, \| T^{-1} \| + b < 1; \tag{1.33}$$

поэтому $1 + AT^{-1}$ отображает $\mathbf{Y}$ на $\mathbf{Y}$ взаимно однозначно и применимы рассуждения п. I.4.4. Единственное отличие состоит

---

[1] Эта теорема будет обобщена в следующем параграфе (см. теорему 2.21).

в том, что здесь мы используем оценку (1.33) вместо простой оценки $\| AT^{-1} \| \leqslant \| A \| \cdot \| T^{-1} \|$, использованной в п. I.4.4.

Если $T^{-1}$ компактен, то $S^{-1} = T^{-1}(1 + AT^{-1})^{-1}$ компактен по теореме III.4.8.

**Замечание 1.17.** Если оператор $A$ в теореме 1.16 ограничен, то можно положить $a = \| A \|$, $b = 0$ и неравенства (1.31) сведутся к (I.4.24). Если, кроме того, $A$ коммутирует с $T$ (предполагается, что $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$), то можно доказать существование $S^{-1}$ при более слабых предположениях, а именно:

**Теорема 1.18.** *Пусть* $T$ *— оператор в* $\mathbf{X}$ *и* $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$. *Если* $A \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ *коммутирует с* $T$ *и* $\operatorname{Spr} A < 1/\operatorname{Spr} T^{-1}$, *то оператор* $(T + A)^{-1}$ *существует и принадлежит* $\mathscr{B}(\mathbf{X})$.

Доказательство. Коммутирование $A$ с $T$ эквивалентно равенству $AT^{-1} = T^{-1}A$ (см. задачу III.5.37). Таким образом, доказательство теоремы совпадает с доказательством соответствующего результата в конечномерном случае (замечание I.4.7).

## § 2. Обобщенная сходимость замкнутых операторов

### 1. Раствор между подпространствами

Когда мы рассматриваем задачи теории возмущений для замкнутых операторов, необходимо уточнить, что значит «малое» возмущение. В предыдущем параграфе мы рассматривали возмущения специального вида, а именно относительно ограниченные возмущения. Однако это понятие довольно ограничительно, и в связи с этим мы дадим здесь более общее определение малости возмущения для замкнутых операторов.

Это можно сделать наиболее естественным образом, вводя метрику в множество $\mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ всех замкнутых операторов из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$. Если $T$, $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, то их графики $\mathrm{G}(T)$ и $\mathrm{G}(S)$ суть замкнутые линейные многообразия в пространстве $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Таким образом, расстояние между $T$ и $S$ можно измерять величиной «раствора» между $\mathrm{G}(T)$ и $\mathrm{G}(S)$. Мы приходим, таким образом, к задаче измерения раствора между двумя замкнутыми подпространствами банахова пространства.

В этом пункте через $\mathbf{L}$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, ... мы обозначаем замкнутые подпространства банахова пространства $\mathbf{Z}$.

Обозначим через $\mathbf{S}_{\mathbf{M}}$ единичную сферу в $\mathbf{M}$ (множество всех векторов из $\mathbf{M}$, имеющих норму 1). Для любых двух замкнутых подпространств в $\mathbf{Z}$ положим [1])

$$\delta(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \sup_{u \in S_{\mathbf{M}}} \operatorname{dist}(u, \mathbf{N}), \tag{2.1}$$

$$\hat{\delta}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \max[\delta(\mathbf{M}, \mathbf{N}), \delta(\mathbf{N}, \mathbf{M})]. \tag{2.2}$$

Определение (2.1) теряет смысл, если $\mathbf{M} = 0$; в этом случае мы полагаем $\delta(0, \mathbf{N}) = 0$ для любого $\mathbf{N}$. С другой стороны, как видно из определения, $\delta(\mathbf{M}, 0) = 1$, если $\mathbf{M} \neq 0$; величину $\delta(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ можно также определить как наименьшее число $\delta$ такое, что

$$\operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) \leqslant \delta \, \| u \| \tag{2.3}$$

для всех $u \in \mathbf{M}$. Число $\hat{\delta}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ назовем *раствором* между $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$.

Следующие соотношения вытекают непосредственно из определений:

$$\delta(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{M} \subset \mathbf{N}, \tag{2.4}$$

$$\hat{\delta}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{M} = \mathbf{N}, \tag{2.5}$$

$$\hat{\delta}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \hat{\delta}(\mathbf{N}, \mathbf{M}), \tag{2.6}$$

$$0 \leqslant \delta(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \hat{\delta}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \leqslant 1. \tag{2.7}$$

Несмотря на то что (2.5) и (2.6) являются свойствами метрики, функция $\hat{\delta}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ не есть метрика на множестве подпространств, так как она, вообще говоря, не удовлетворяет неравенству треугольника [2]).

Это затруднение можно преодолеть, несколько изменяя определения (2.1), (2.2). Положим

$$d(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \sup_{u \in S_{\mathbf{M}}} \operatorname{dist}(u, S_{\mathbf{N}}), \tag{2.8}$$

$$\hat{d}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \max[d(\mathbf{M}, \mathbf{N}), d(\mathbf{N}, \mathbf{M})]\ ^{3)}. \tag{2.9}$$

Определение (2.8) теряет смысл, если $\mathbf{M} = 0$ или $\mathbf{N} = 0$. В этих случаях положим

$$d(\mathbf{M}, 0) = 2, \quad \mathbf{M} \neq 0; \quad d(0, \mathbf{N}) = 0 \quad \text{для любого } \mathbf{N}. \tag{2.10}$$

---

[1]) См. Гохберг и Крейн [1], Т. Като [12], Кордес и Лабрус [1].

[2]) $\delta$ удовлетворяет неравенству треугольника, если $\mathbf{Z}$ — гильбертово пространство. Это следует из равенства $\delta(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \| P - Q \|$, где $P$ и $Q$ — ортогональные проекторы на $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ соответственно (см. теорему I.6.34). В этом случае $\delta$ оказывается более удобной метрикой, чем вводимая ниже метрика $\hat{d}$.

[3]) См. Гохберг и Маркус [1]. Иная по форме, но эквивалентная метрика была введена Ньюбаром [2]; $\hat{d}$ является *хаусдорфовой метрикой* на множестве единичных сфер $S_{\mathbf{M}}$ (при этом исключается из рассмотрения случай $\mathbf{M} = 0$); см. Хаусдорф [[1]], стр. 145. Функция $d(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ в точности совпадает с $\rho(S_{\mathbf{M}}, S_{\mathbf{N}})$ в обозначениях Хаусдорфа. По поводу сравнения различных метрик см. Берксон [1].

Соотношения (2.4)—(2.7) сохраняют силу, если $\delta$ и $\hat\delta$ заменить на $d$ и $\hat d$. Более того, функции $d$ и $\hat d$ удовлетворяют неравенству треугольника:

$$\begin{aligned} &d(\mathrm{L},\ \mathrm{N}) \leqslant d(\mathrm{L},\ \mathrm{M}) + d(\mathrm{M},\ \mathrm{N}),\\ &\hat d(\mathrm{L},\ \mathrm{M}) \leqslant \hat d(\mathrm{L},\ \mathrm{M}) + \hat d(\mathrm{M},\ \mathrm{N}). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Второе из этих неравенств следует из первого, которое в свою очередь без труда выводится из определения. Доказательство предоставляется читателю. (Случай, когда по крайней мере одно из подпространств L, M, N обращается в нуль, следует рассмотреть отдельно.)

Множество всех замкнутых подпространств становится *метрическим пространством*, если за расстояние между M и N принять $\hat d(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$. Последовательность $\{\mathrm{M}_n\}$ замкнутых подпространств *сходится* к M, если $\hat d(\mathrm{M}_n,\ \mathrm{M}) \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае мы пишем $\mathrm{M}_n \to \mathrm{M}$ или $\lim \mathrm{M}_n = \mathrm{M}$.

Хотя раствор $\hat\delta$ и не является метрикой, однако в приложениях функция $\hat\delta$ более удобна, чем метрика $\hat d$, так как ее определение несколько проще. Более того, обе функции $\hat\delta$ и $\hat d$ приводят к одной и той же *топологии* в множестве всех замкнутых подпространств. Это вытекает из следующих неравенств [1]:

$$\begin{aligned} &\delta(\mathrm{M},\ \mathrm{N}) \leqslant d(\mathrm{M},\ \mathrm{N}) \leqslant 2\delta(\mathrm{M},\ \mathrm{N}),\\ &\hat\delta(\mathrm{M},\ \mathrm{N}) \leqslant \hat d(\mathrm{M},\ \mathrm{N}) \leqslant 2\hat\delta(\mathrm{M},\ \mathrm{N}). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Вторая строчка в (2.12) следует непосредственно из первой; неравенство $\delta(\mathrm{M},\ \mathrm{N}) \leqslant d(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$ тривиально. Для доказательства неравенства $d(\mathrm{M},\ \mathrm{N}) \leqslant 2\delta(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$ достаточно, предположив $\mathrm{N} \neq 0$, показать, что

$$\operatorname{dist}(u,\ S_{\mathrm{N}}) \leqslant 2\operatorname{dist}(u,\ \mathrm{N}) \tag{2.13}$$

для каждого $u \in \mathrm{Z}$, $\|u\| = 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $v \in \mathrm{N}$ такой, что $\|u - v\| < \operatorname{dist}(u,\ \mathrm{N}) + \varepsilon$. Можно считать, что $v \neq 0$, так как в противном случае можно немного изменить $v$, не нарушая неравенство. Тогда $v_0 = v/\|v\| \in S_{\mathrm{N}}$ и $\operatorname{dist}(u,\ S_{\mathrm{N}}) \leqslant \|u - v_0\| \leqslant \|u - v\| + \|v - v_0\|$. Но $\|v - v_0\| = |\,\|v\| - 1\,| = |\,\|v\| - \|u\|\,| \leqslant \|v - u\|$, и поэтому $\operatorname{dist}(u,\ S_{\mathrm{N}}) \leqslant 2\|u - v\| < 2\operatorname{dist}(u,\ \mathrm{N}) + 2\varepsilon$. Это доказывает (2.13) ввиду произвольности $\varepsilon > 0$.

Из (2.12) следует, что предельные соотношения $\hat d(\mathrm{M}_n,\ \mathrm{M}) \to 0$ и $\hat\delta(\mathrm{M}_n,\ \mathrm{M}) \to 0$ эквивалентны. Таким образом, сходимость $\mathrm{M}_n \to \mathrm{M}$ можно определить с помощью соотношения $\hat\delta(\mathrm{M}_n,\ \mathrm{M}) \to 0$, не обращаясь к метрике $\hat d$. В дальнейшем мы почти всегда будем использовать раствор $\hat\delta$, а не метрику $\hat d$.

---

[1] См. Гохберг и Маркус [1].

**Замечание 2.1.** Введенное выше метрическое пространство всех замкнутых подпространств в $\mathbf{Z}$ *полно*; если $\{\mathbf{M}_n\}$ — последовательность Коши (т. е. $\hat{d}(\mathbf{M}_n, \mathbf{M}_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$), то существует замкнутое подпространство $\mathbf{M}$ такое, что $\hat{d}(\mathbf{M}_n, \mathbf{M}) \to 0$. Так как это утверждение нам не пригодится, мы не доказываем его здесь.

Следующая лемма потребуется в дальнейшем.

Лемма 2.2. *Для любых замкнутых подпространств* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *в* $\mathbf{Z}$ *и любого* $u \in \mathbf{Z}$ *справедливо неравенство*

$$(1 + \delta(\mathbf{M}, \mathbf{N})) \operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) \geqslant \operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) - \|u\| \delta(\mathbf{M}, \mathbf{N}). \tag{2.14}$$

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $v \in \mathbf{M}$ такой, что $\|u - v\| < \operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) + \varepsilon$, и по $v$ можно выбрать такой вектор $w \in \mathbf{N}$, что $\|v - w\| < \operatorname{dist}(v, \mathbf{N}) + \varepsilon$. Поэтому $\operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) \leqslant \|u - w\| < \operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) + \operatorname{dist}(v, \mathbf{N}) + 2\varepsilon \leqslant \operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) + \|v\| \delta(\mathbf{M}, \mathbf{N}) + 2\varepsilon$. Но $\|v\| \leqslant \|u - v\| + \|u\| \leqslant \|u\| + \operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) + \varepsilon$. Отсюда следует, что $\operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) \leqslant (1 + \delta(\mathbf{M}, \mathbf{N})) \operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) + \|u\| \delta(\mathbf{M}, \mathbf{N}) + 2\varepsilon + \varepsilon\delta(\mathbf{M}, \mathbf{N})$. Устремляя $\varepsilon$ к нулю, получаем неравенство (2.14).

## 2. Раствор и размерность

Следующая лемма является основной при изучении раствора между замкнутыми подпространствами.

Лемма 2.3 [1]. *Пусть* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ — *подпространства в банаховом пространстве* $\mathbf{Z}$. *Если* $\dim \mathbf{M} > \dim \mathbf{N}$, *то существует вектор* $u \in \mathbf{M}$ *такой, что*

$$\operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) = \|u\| > 0. \tag{2.15}$$

**Замечание 2.4.** Если ввести факторпространство $\tilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}/\mathbf{N}$ (см. п. III.1.8), то (2.15) можно записать в виде

$$\|\tilde{u}\| = \|u\| > 0. \tag{2.16}$$

Отметим, что $\mathbf{N}$ замкнуто, так как, согласно предположению леммы 2.3, $\dim \mathbf{N} < \infty$.

Доказательство леммы 2.3. Можно считать, что $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ конечномерны, так как $\dim \mathbf{N} < \infty$, а подпространство $\mathbf{M}$ можно заменить его конечномерным подпространством размерности $\dim \mathbf{N} + 1$. Следовательно, само $\mathbf{Z}$ можно считать конечномерным, так как достаточно рассматривать лишь подпространство $\mathbf{M} + \mathbf{N}$.

---

[1] См. Крейн, Красносельский и Мильман [1], Гохберг и Крейн [1] и Т. Като [12].

Предположим сначала, что $\mathbf{Z}$ *строго выпукло*; под этим мы подразумеваем, что $\| u + v \| < \| u \| + \| v \|$ всякий раз, когда $u$, $v$ линейно независимы. Нетрудно видеть, что в этом случае для каждого вектора $u \in \mathbf{Z}$ в $\mathbf{N}$ существует *ближайший* к $u$ вектор $v = Au$, причем отображение $u \rightarrow Au$ непрерывно [1]. Оператор $A$, вообще говоря, нелинеен, но он обладает тем свойством, что $A(-u) = -Au$. Согласно теореме Борсука [2], существует такой вектор $u \in \mathbf{M}$, что $\| u \| = 1$ и $Au = 0$. Это доказывает лемму в рассматриваемом частном случае.

В общем случае будем рассматривать $\mathbf{Z}$ как вещественное банахово пространство; выберем базис $f_1, \ldots, f_m$ в пространстве, вещественно сопряженном к $\mathbf{Z}$. Тогда

$$\| u \|_n = \left\{ \| u \|^2 + \frac{1}{n} [(u, f_1)^2 + \ldots + (u, f_m)^2] \right\}^{1/2}$$

определяет новую норму в $\mathbf{Z}$ и превращает $\mathbf{Z}$ в строго выпуклое пространство. Для каждого $n = 1, 2, \ldots$ существует вектор $u_n \in \mathbf{M}$ такой, что $\operatorname{dist}_n (u_n, \mathbf{N}) = \| u_n \|_n = 1$, где $\operatorname{dist}_n$ обозначает расстояние, порожденное нормой $\| \cdot \|_n$. Так как $\| u_n \| \leqslant \leqslant \| u_n \|_n = 1$, то последовательность $\{u_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Предел $u$ этой подпоследовательности, как нетрудно видеть, и есть искомый вектор.

**Замечание 2.5.** Нелинейность оператора $A$, построенного в доказательстве леммы 2.3, придает этой лемме неэлементарный характер. Если $\mathbf{Z}$ — гильбертово пространство, то $A$ оказывается оператором ортогонального проектирования на $\mathbf{N}$ и доказательство леммы становится вполне элементарным.

**Следствие 2.6.** *Пусть* $\mathbf{M}$ *и* $\mathbf{N}$ *— замкнутые подпространства. Если* $\delta(\mathbf{M}, \mathbf{N}) < 1$, *то* $\dim \mathbf{M} \leqslant \dim \mathbf{N}$; *если же* $\hat{\delta}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) < 1$, *то* $\dim \mathbf{M} = \dim \mathbf{N}$.

**Замечание 2.7.** Следствие 2.6 показывает, что пространство замкнутых подпространств пространства $\mathbf{Z}$ представляется в виде объединения непересекающихся открытых множеств, каждое из которых состоит из замкнутых подпространств фиксированной размерности.

## 3. Двойственность

Существует простая связь между раствором подпространств в банаховом пространстве $\mathbf{Z}$ и раствором подпространств в сопряженном банаховом пространстве $\mathbf{Z}^*$. Напомним, что аннулятор замкнутого подпространства $\mathbf{M} \subset \mathbf{Z}$ обозначается через $\mathbf{M}^{\perp}$; $\mathbf{M}^{\perp}$

---

[1] Существование ближайшего к $u$ вектора $v$ в $\mathbf{N}$ следует из локальной компактности $\mathbf{N}$. Единственность $v$ и его непрерывная зависимость от $u$ следуют из строгой выпуклости пространства $\mathbf{Z}$.

[2] См. Александров и Хопф [[1]], стр. 483.

есть замкнутое подпространство в $\mathbf{Z}^*$, состоящее из векторов $f \in \mathbf{Z}^*$ таких, что $f \perp \mathrm{M}$ (см. п. III.1.4).

Лемма 2.8. *Пусть* M — *замкнутое подпространство в* **Z**, $0 \neq \mathrm{M} \neq \mathbf{Z}$. *Справедливы равенства*

$$\operatorname{dist}(f, \mathrm{M}^{\perp}) = \sup_{u \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}}} |(u, f)| = \| f_{\mathrm{M}} \|, \quad f \in \mathbf{Z}^*, \tag{2.17}$$

$$\operatorname{dist}(u, \mathrm{M}) = \sup_{f \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}^{\perp}}} |(u, f)|, \quad u \in \mathbf{Z}, \tag{2.18}$$

*где* $f_{\mathrm{M}}$ — *сужение* $f$ *на* M.

Доказательство. Пусть $f \in \mathbf{Z}^*$. По теореме Хана — Банаха существует функционал $g \in \mathbf{Z}^*$, являющийся продолжением $f_{\mathrm{M}}$, причем $\| g \| = \| f_{\mathrm{M}} \|$. Так как $(u, f) = (u, g)$ для $u \in \mathrm{M}$, то $h = f - g \in \mathrm{M}^{\perp}$. Таким образом, $\operatorname{dist}(f, \mathrm{M}^{\perp}) \leqslant \| f - h \| = \| g \| = \| f_{\mathrm{M}} \| = \sup\limits_{u \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}}} | (u, f) |$.

С другой стороны, для любого $h \in \mathrm{M}^{\perp}$ имеем $| (u, f) | = | (u, f - h) | \leqslant \| f - h \|$, если $u \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}}$. Поэтому $| (u, f) | \leqslant \operatorname{dist}(u, \mathrm{M}^{\perp})$, откуда следует противоположное неравенство $\operatorname{dist}(f, \mathrm{M}^{\perp}) \geqslant \sup\limits_{u \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}}} | (u, f) |$ и тем самым (2.17).

Пусть $u \in \mathbf{Z}$. Для каждого $f \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}^{\perp}}$ имеем $| (u, f) | = | (u - v, f) | \leqslant \| u - v \|$, где $v \in \mathrm{M}$. Отсюда следует, что $| (u, f) | \leqslant \operatorname{dist}(u, \mathrm{M})$, и поэтому $\sup\limits_{f \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}^{\perp}}} | (u, f) | \leqslant \operatorname{dist}(u, \mathrm{M})$. Противоположное неравенство следует из существования вектора $f \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}^{\perp}}$ такого, что $| (u, f) | = \operatorname{dist}(u, \mathrm{M})$ (это прямое следствие теоремы III.1.22).

**Теорема 2.9.** *Для замкнутых линейных подпространств* M *и* N *в* **Z** *справедливы равенства*

$$\delta(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \delta(\mathrm{N}^{\perp}, \mathrm{M}^{\perp}), \quad \hat{\delta}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \hat{\delta}(\mathrm{M}^{\perp}, \mathrm{N}^{\perp}). \tag{2.19}$$

Доказательство. Второе равенство следует из первого, которое в свою очередь вытекает из леммы 2.8, так как

$$\delta(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \sup_{u \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}}} \operatorname{dist}(u, \mathrm{N}) = \sup_{u \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}}} \sup_{g \in \mathrm{S}_{\mathrm{N}^{\perp}}} |(u, g)| =$$
$$= \sup_{g \in \mathrm{S}_{\mathrm{N}^{\perp}}} \sup_{u \in \mathrm{S}_{\mathrm{M}}} |(u, g)| = \sup_{g \in \mathrm{S}_{\mathrm{N}^{\perp}}} \operatorname{dist}(g, \mathrm{M}^{\perp}) = \delta(\mathrm{N}^{\perp}, \mathrm{M}^{\perp}).$$

(Вышеприведенное доказательство применимо в том случае, когда $\mathrm{M} \neq 0$ и $\mathrm{N} \neq \mathbf{Z}$. Если $\mathrm{M} = 0$, то $\mathrm{M}^{\perp} = \;^*$ и поэтому $\delta(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = 0 = \delta(\mathrm{N}^{\perp}, \mathrm{M}^{\perp})$. Если $\mathrm{N} = \mathbf{Z}$, то $\mathrm{N}^{\perp} = 0$ и, следовательно, $\delta(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = 0 = \delta(\mathrm{N}^{\perp}, \mathrm{M}^{\perp})$.)

### 4. Раствор между замкнутыми операторами

Рассмотрим множество $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ всех замкнутых операторов из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$. Если операторы $T, S \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, то их графики $\mathrm{G}(T)$ и $\mathrm{G}(S)$ суть замкнутые линейные многообразия в пространстве $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. Положим

$$\begin{aligned} &\delta(T, S) = \delta(\mathrm{G}(T), \mathrm{G}(S)), \\ &\hat{\delta}(T, S) = \hat{\delta}(\mathrm{G}(T), \mathrm{G}(S)) = \max[\delta(T, S), \delta(S, T)]. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Число $\hat{\delta}(T, S)$ называется *раствором* между $T$ и $S$ [1]).

Аналогично можно ввести *расстояние* $\hat{d}(T, S)$ между операторами $T$ и $S$ как расстояние $\hat{d}(\mathrm{G}(T), \mathrm{G}(S))$ между их графиками; при этом $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ становится метрическим пространством. В этом пространстве сходимость последовательности $T_n \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ к $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ определяется предельным соотношением $\hat{d}(T_n, T) \to 0$. Ввиду неравенств (2.12) это соотношение эквивалентно соотношению $\hat{\delta}(T_n, T) \to 0$. В этом случае мы будем говорить, что $\{T_n\}$ сходится к $T$ (или $T_n \to T$) *в обобщенном смысле*.

Отметим, что ранее мы определяли сходимость только для операторов класса $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Было введено несколько понятий сходимости: сходимость по норме, сильная и слабая сходимости. Мы покажем вскоре, что введенное здесь понятие обобщенной сходимости замкнутых операторов является обобщением сходимости *по норме* для операторов из $\mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$.

**Замечание 2.10.** Когда $T$ пробегает $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, график $\mathrm{G}(T)$ пробегает собственное подмножество в множестве всех замкнутых подпространств в $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$. Это подмножество незамкнуто и, следовательно, $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ не является полным метрическим пространством (предполагается, конечно, что $\dim \mathrm{X} \geqslant 1$ и $\dim \mathrm{Y} \geqslant 1$). Доказать это в общем случае не совсем просто, однако в частном случае, когда $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$, доказательство несложно. Рассмотрим последовательность $\{nI\}$, где $I$ — тождественный оператор в $\mathrm{X}$. $\mathrm{G}(nI)$ есть подмножество в $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$, состоящее из элементов вида $\{n^{-1}u, u\}$, $u \in \mathrm{X}$; нетрудно видеть, что $\lim \mathrm{G}(nI)$ существует и совпадает с множеством всех элементов вида $\{0, u\}$, $u \in \mathrm{X}$. Однако это множество не является графиком. Таким образом, $\{nI\}$ — последовательность Коши в $\mathscr{C}(\mathrm{X}) = \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{X})$, не имеющая предела.

---

[1]) Аналогичное понятие введено Ньюбаром [2], там же доказаны некоторые из теорем, приводимых ниже. В частном случае, когда $\mathrm{X}$ и $\mathrm{Y}$ — гильбертовы пространства, большинство излагаемых здесь результатов упрощается и допускает усиление; см. Кордес и Лабрус [1].

**Лемма 2.11.** *Пусть* $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. *Если* $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *и* $\delta(S, T) < (1 + \| T \|^2)^{-1/2}$, *то* $S$ *ограничен* (*и, следовательно, подпространство* $\mathbf{D}(S)$ *замкнуто*).

Доказательство. Пусть $\varphi$ — элемент единичной сферы в $\mathbf{G}(S)$: $\varphi = \{u, Su\} \in \mathbf{G}(S)$, $u \in \mathbf{D}(S)$ и

$$\| u \|^2 + \| Su \|^2 = \| \varphi \|^2 = 1\,^{1)}. \tag{2.21}$$

Пусть $\delta'$ — такое положительное число, что $\delta(S, T) < \delta' < (1 + \| T \|^2)^{-1/2}$. Вектор $\varphi$ отстоит от $\mathbf{G}(T)$ менее чем на $\delta'$, и поэтому существует вектор $\psi = \{v, Tv\} \in \mathbf{G}(T)$ такой, что $\| \varphi - \psi \| < \delta'$:

$$\| u - v \|^2 + \| Su - Tv \|^2 = \| \varphi - \psi \|^2 < \delta'^2. \tag{2.22}$$

Положим $A = S - T$; согласно неравенству Шварца и (2.22), имеем $\| Au \|^2 = \| Su - Tv - T(u - v) \|^2 \leqslant (\| Su - Tv \| + \| \| T \| u - v \|)^2 \leqslant \delta'^2 (1 + \| T \|^2)$. Так как, ввиду (2.21),

$$1 = \| u \|^2 + \| Tu + Au \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \| T \|^2) \| u \|^2 + 2 \| T \| \| u \| \| Au \| + \| Au \|^2,$$

то

$$\| Au \|^2 \leqslant \delta'^2 (1 + \| T \|^2) [(1 + \| T \|^2) \| u \|^2 +$$
$$+ 2 \| T \| \| u \| \| Au \| + \| Au \|^2].$$

Решая это неравенство относительно $\| Au \|$, получаем

$$\| Au \| \leqslant \frac{\delta' (1 + \| T \|^2) [(1 - \delta'^2)^{1/2} + \delta' \| T \|]}{1 - \delta'^2 (1 + \| T \|^2)} \| u \| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\delta' (1 + \| T \|^2)}{1 - \delta' (1 + \| T \|^2)^{1/2}} \| u \|; \tag{2.23}$$

отметим, что знаменатели в этих дробях положительны.

Так как (2.23) однородно по $u$, то это неравенство верно для всех векторов $u \in \mathbf{D}(S)$, а не только для нормированных. Отсюда следует, что оператор $A$ ограничен и поэтому $S = T + A \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

**Лемма 2.12.** *Пусть* $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. *Если* $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *и* $\delta(T, S) < (1 + \| T \|^2)^{-1/2}$, *то* $S$ *плотно определен* [2]).

---

[1]) Здесь следует напомнить, что норма в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ определяется равенством $\| \{u, v\} \| = (\| u \|^2 + \| v \|^2)^{1/2}$.

[2]) Даже более того, $S \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$; см. задачу 5.21.

Доказательство. Пусть $v$ — вектор из $\mathbf{X}$, нормированный так, что $\psi = \{v,\ Tv\}$ имеет норму 1:

$$\| v \|^2 + \| Tv \|^2 = \| \psi \|^2 = 1. \tag{2.24}$$

Пусть $\delta'$ таково, что $\delta(T,\ S) < \delta' < (1 + \| T \|^2)^{-1/2}$. Тогда существует вектор $\varphi = \{u,\ Su\}$, удовлетворяющий неравенству (2.22) (при этом (2.21) может не выполняться). Отсюда следует, что $\| v - u \| < \delta'$ и поэтому $\operatorname{dist}(v,\ \mathbf{M}) < \delta'$, где $\mathbf{M}$ — замыкание подпространства $\mathbf{D}(S)$. Но так как, согласно (2.24), $1 \leqslant (1 + \| T \|^2) \| v \|^2$, то $\operatorname{dist}(v,\ \mathbf{M}) < \delta' (1 + \| T \|^2)^{1/2} \| v \|$. Последнее неравенство однородно по $v$ и, следовательно, верно для всех $v \in \mathbf{X}$. Так как $\delta' (1 + \| T \|^2)^{1/2} < 1$, то $\mathbf{M} = \mathbf{X}$; в противном случае, согласно лемме III.1.12, существует вектор $v \neq 0$ такой, что $\operatorname{dist}(v,\ \mathbf{M}) > \delta' (1 + \| T \|^2)^{1/2} \| v \|$. Итак, $\mathbf{D}(S)$ плотно в $\mathbf{X}$.

**Теорема 2.13.** *Пусть $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$. Если $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ столь близок к $T$, что $\hat{\delta}(S,\ T) < (1 + \| T \|^2)^{-1/2}$, то $S \in \mathscr{B}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ и* [1]

$$\| S - T \| \leqslant \frac{(1 + \| T \|^2)\, \delta(S,\ T)}{1 - (1 + \| T \|^2)^{1/2}\, \delta(S,\ T)}. \tag{2.25}$$

Доказательство. Как следует из лемм 2.11 и 2.12, оператор $S$ ограничен, $\mathbf{D}(S)$ замкнуто и плотно в $\mathbf{X}$. Следовательно, $\mathbf{D}(S) = \mathbf{X}$ и $S \in \mathscr{B}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$. Оценка (2.25) следует из (2.23) ввиду того, что $\delta'$ можно выбрать сколь угодно близко к $\delta(S,\ T)$.

**Теорема 2.14.** *Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ и $A$ есть $T$-ограниченный оператор, относительная граница которого меньше 1 (это значит, что в неравенстве (1.1) константа $b$ может быть меньше 1). Тогда $S = T + A \in \mathscr{C}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$ и*

$$\hat{\delta}(S,\ T) \leqslant (1 - b)^{-1} (a^2 + b^2)^{1/2}. \tag{2.26}$$

*В частности, если $A \in \mathscr{B}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$, то*

$$\hat{\delta}(T + A,\ T) \leqslant \| A \|. \tag{2.27}$$

Доказательство. Тот факт, что $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y})$, был доказан в теореме 1.1. Докажем неравенство (2.26). Пусть $\varphi = \{u,\ Su\}$ — произвольный вектор из $\mathbf{G}(S)$ такой, что $\| \varphi \|^2 = \| u \|^2 + \| Su \|^2 = 1$. Полагая $\psi = \{u,\ Tu\} \in \mathbf{G}(T)$, имеем, согласно (1.3), $\| \varphi - \psi \| = \| (S - T) u \| \leqslant \| Au \| \leqslant (1 - b)^{-1} \times (a \| u \| + b \| Su \|)$. Из неравенства Шварца и (2.21) следует, что $\| \varphi - \psi \| \leqslant (1 - b)^{-1} (a^2 + b^2)^{1/2}$ откуда $\operatorname{dist}(\varphi,\ \mathbf{G}(T)) \leqslant (1 - b)^{-1} (a^2 + b^2)^{1/2}$, и так как $\varphi$ — произвольный элемент единичной сферы в $\mathbf{G}(S)$, то $\delta(S,\ T) = \delta(\mathbf{G}(S),\ \mathbf{G}(T)) \leqslant (1 - b)^{-1} (a^2 + b^2)^{1/2}$.

---

[1] В (2.25) $\delta(S,\ T)$ можно заменить на $\delta(T,\ S)$, см. задачу 5.21.

$\delta(T, S)$ можно оценить аналогично, используя (1.1) вместо (1.3): $\delta(T, S) \leqslant (a^2 + b^2)^{1/2}$. Таким образом, мы приходим к оценке (2.26) для $\hat{\delta}(S, T) = \max[\delta(S, T), \delta(T, S)]$.

**Задача 2.15.** Если выполняется неравенство (1.4), причем $b = \max(b', b'') < 1$, то

$$\hat{\delta}(S, T) \leqslant (1 - b)^{-1} [a^2 + (b' + b'')^2]^{1/2}. \tag{2.28}$$

**Замечание 2.16.** Теорема 2.13 показывает, что $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ — открытое подмножество в $\mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Из (2.25) и (2.27) следует, что топология в $\mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, определенная метрикой $\hat{d}$ (или, что то же, функцией раствора $\hat{\delta}$), совпадает с топологией, порожденной нормой.

**Теорема 2.17.** *Пусть* $T$, $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *и* $A \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. *Тогда*

$$\hat{\delta}(S + A, T + A) \leqslant 2(1 + \|A\|^2)\,\hat{\delta}(S, T). \tag{2.29}$$

Доказательство. Из включения $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ следует, что $T + A \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, причем $\mathbf{D}(T + A) = \mathbf{D}(T)$. Аналогично $S + A \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

Пусть $\varphi \in \mathbf{G}(S + A)$, $\|\varphi\| = 1$. Существует вектор $u \in \mathbf{D}(S)$ такой, что $\varphi = \{u, (S + A)u\}$ и

$$\|u\|^2 + \|(S + A)u\|^2 = \|\varphi\|^2 = 1. \tag{2.30}$$

Пусть $\|u\|^2 + \|Su\|^2 = r^2$, $r > 0$. Вектор $r^{-1}\{u, Su\}$ принадлежит единичной сфере в $\mathbf{G}(S)$. Следовательно, для любого $\delta' > \hat{\delta}(S, T) = \hat{\delta}(\mathbf{G}(S), \mathbf{G}(T))$ расстояние от $r^{-1}\{u, Su\}$ до $\mathbf{G}(T)$ меньше $\delta'$. Поэтому существует вектор $v \in \mathbf{D}(T)$ такой, что $\|u - v\|^2 + \|Su - Tv\|^2 < r^2\delta'^2$. Полагая $\psi = \{v, (T + A)v\}$, имеем

$$\begin{aligned}\|\varphi - \psi\|^2 &= \|u - v\|^2 + \|(S + A)u - (T + A)v\|^2 \leqslant \\ &\leqslant \|u - v\|^2 + 2\|Su - Tv\|^2 + 2\|A\|^2\|u - v\|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2(1 + \|A\|^2)\, r^2\delta'^2.\end{aligned} \tag{2.31}$$

С другой стороны, согласно (2.30), $r^2 = \|u\|^2 + \|Su\|^2 = \|u\|^2 + \|(S + A)u - Au\|^2 \leqslant \|u\|^2 + 2\|(S + A)u\|^2 + 2\|A\|^2\|u\|^2 \leqslant 2 + 2\|A\|^2\|u\|^2 \leqslant 2 + 2\|A\|^2$. Поэтому $\|\varphi - \psi\|^2 \leqslant 4(1 + \|A\|^2)\delta'^2$. Так как $\varphi \in \mathbf{G}(T + A)$, то $\operatorname{dist}(\varphi, \mathbf{G}(T + A)) \leqslant 2(1 + \|A\|^2)\delta'$, а так как $\varphi$ —произвольный элемент единичной сферы в $\mathbf{G}(S + A)$, то $\delta(S + A, T + A) = \delta(\mathbf{G}(S + A), \mathbf{G}(T + A)) \leqslant 2(1 + \|A\|^2)\delta'$. Отсюда следует оценка (2.29), так как в предыдущих рассуждениях можно поменять местами $S$ и $T$, а число $\delta'$ можно выбрать сколь угодно близко к $\hat{\delta}(S, T)$.

**Теорема 2.18.** *Предположим, что* $T, S \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *плотно определены. Тогда* $\delta(T, S) = \delta(S^*, T^*)$ *и* $\hat{\delta}(T, S) = \hat{\delta}(T^*, S^*)$.

Доказательство. Имеем $\delta(S^*, T^*) = \delta(\mathrm{G}(S^*), \mathrm{G}(T^*)) = \delta(\mathrm{G}'(S^*), \mathrm{G}'(T^*)) = \delta(\mathrm{G}(-S)^{\perp}, \mathrm{G}(-T)^{\perp}) = \delta(\mathrm{G}(-T), \mathrm{G}(-S)) = \delta(\mathrm{G}(T), \mathrm{G}(S)) = \delta(T, S)$, где $\mathrm{G}(T) \subset \mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ — график $T$ и $\mathrm{G}'(T^*) \subset \mathrm{X}^* \times \mathrm{Y}^*$ — обратный график оператора $T^* \in \mathscr{C} \times (\mathrm{Y}^*, \mathrm{X}^*)$; отметим, что $\mathrm{G}'(T^*) = \mathrm{G}(-T)^{\perp}$, согласно (III.5.9), и $\delta(\mathrm{N}^{\perp}, \mathrm{M}^{\perp}) = \delta(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, согласно (2.19). Равенство $\delta(\mathrm{G}(S^*), \mathrm{G}(T^*)) = \delta(\mathrm{G}'(S^*), \mathrm{G}'(T^*))$ выполняется ввиду специального выбора нормы в $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$ (см. ниже п. 5).

**Задача 2.19.** Оператор $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ ограничен тогда и только тогда, когда $\delta(T, 0) < 1$. Включение $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ эквивалентно неравенству $\hat{\delta}(T, 0) < 1$.

## 5. Дальнейшие результаты об устойчивости ограниченной обратимости

График $\mathrm{G}(R)$ оператора $R \in \mathscr{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ есть замкнутое подпространство в $\mathrm{Y} \times \mathrm{X}$, а обратный график $\mathrm{G}'(R)$ — замкнутое подпространство в $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, являющееся образом $\mathrm{G}(R)$ при отображении $\{y, x\} \to \{x, y\}$ (см. п. III.5.2). Так как это отображение сохраняет норму и, следовательно, раствор между замкнутыми подпространствами, то $\hat{\delta}(R_1, R_2) = \hat{\delta}(\mathrm{G}(R_1), \mathrm{G}(R_2)) = \hat{\delta}(\mathrm{G}'(R_1), \mathrm{G}'(R_2))$, и то же самое справедливо для функций $\delta$, $d$ и $\hat{d}$. Таким образом, рассматривая раствор или расстояние между операторами в $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, мы можем заменять графики этих операторов их обратными графиками.

Если $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ обратим, то $T^{-1} \in \mathscr{C}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ и $\mathrm{G}'(T^{-1}) = \mathrm{G}(T)$ [см. (III.5.5)]. Следующая теорема немедленно вытекает из сделанных замечаний.

**Теорема 2.20.** *Если операторы* $T, S \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *обратимы, то*

$$\delta(S^{-1}, T^{-1}) = \delta(S, T), \quad \hat{\delta}(S^{-1}, T^{-1}) = \hat{\delta}(S, T). \tag{2.32}$$

Обозначим через $\mathscr{C}_i(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ подмножество в $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, состоящее из всех обратимых операторов; теорема 2.20 означает, что отображение $T \to T^{-1}$ является *изометрическим* отображением $\mathscr{C}_i(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ на $\mathscr{C}_i(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$. Вообще говоря, структура множества $\mathscr{C}_i(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ в $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ довольно сложна. Мы покажем, однако, что множество операторов $T \in \mathscr{C}_l(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ таких, что $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, открыто в $\mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Это наиболее общая форма *теоремы об устойчивости ограниченной обратимости.*

**Теорема 2.21.** *Предположим, что* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *обратим и* $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$. *Если* $S \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *и* $\hat{\delta}(S, T) < (1 + \| T^{-1}\|^2)^{-1/2}$, *то* $S$ *обратим:* $S^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$.

Доказательство. Если оператор $S$ обратим, то $\hat{\delta}(S^{-1}, T^{-1}) = \hat{\delta}(S, T) < (1 + \| T^{-1} \|^2)^{-1/2}$ и поэтому $S^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ по теореме 2.13 (примененной к паре $S^{-1}$, $T^{-1}$). Таким образом, достаточно показать, что $S$ обратим.

Предположим, что $Su = 0$, $\| u \| = 1$. Тогда вектор $\{u, 0\}$ принадлежит единичной сфере в $\mathrm{G}(S)$ и поэтому существует вектор $\{v, Tv\} \in \mathrm{G}(T)$ такой, что $\| u - v \|^2 + \| Tv \|^2 < \delta'^2$, где $\delta'$ — любое число, удовлетворяющее неравенствам $\hat{\delta}(S, T) < \delta' < (1 + \| T^{-1} \|^2)^{-1/2}$. Отсюда получаем противоречие:

$$1 = \| u \|^2 \leqslant (\| u - v \| + \| v \|)^2 \leqslant$$

$$\leqslant (\| u - v \| + \| T^{-1} \| \, \| Tv \|)^2 \leqslant (1 + \| T^{-1} \|^2) \, \delta'^2 < 1.$$

**Замечание 2.22.** Теоремы, доказанные в этом и предыдущем пунктах, не являются наилучшими с точки зрения количественной теории, так как в доказательствах использовались довольно грубые оценки. Так, например, из теорем 2.14 и 2.21 следует, что $(T + A)^{-1}$ существует и принадлежит $\mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, если $\| A \| < (1 + \| T^{-1} \|^2)^{-1/2}$. Это условие слишком сильное, достаточно предположить, что $\| A \| < \| T^{-1} \|^{-1}$ (это частный случай теоремы 1.16).

Результаты, полученные в п. 4, 5, можно усилить с помощью следующего приема. Применяя, например, теоремы 2.14 и 2.21 к операторам $\alpha T$, $\alpha A$, $\alpha > 0$, мы видим, что оператор $\alpha(T + A)$ имеет ограниченный обратный, если $\alpha \| A \| < (1 + \alpha^{-2} \| T^{-1} \|^2)^{-1/2}$ или, что то же, $\| A \| < (\alpha^2 + \| T^{-1} \|^2)^{-1/2}$. Так как $\alpha$ можно выбрать сколь угодно малым, то $(T + A)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, если $\| A \| < \| T^{-1} \|^{-1}$. Таким образом, мы получили из общих теорем новое доказательство одного частного результата. Описанный здесь вспомогательный прием часто позволяет улучшить (с количественной точки зрения) получаемые результаты.

## 6. Обобщенная сходимость

Напомним, что $T_n$ сходится к $T$ ($T_n \to T$) в обобщенном смысле, если $\hat{\delta}(T_n, T) \to 0$. Следующая теорема является непосредственным следствием замечания 2.16, теорем 2.17, 2.18 и 2.20

**Теорема 2.23.** *Пусть* $T$, $T_n \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, $n = 1, 2, \ldots$ .

a) *Если* $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, *то* $T_n \to T$ *в обобщенном смысле тогда и только тогда, когда* $T_n \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *для достаточно больших* $n$ *и* $\| T_n - T \| \to 0$.

b) *Если оператор* $T^{-1}$ *существует и принадлежит* $\mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$, *то* $T_n \to T$ *в обобщенном смысле тогда и только тогда, когда* $T_n^{-1}$ *существует и принадлежит* $\mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ *для достаточно больших* $n$ *и, кроме того,* $\| T_n^{-1} - T^{-1} \| \to 0$.

c) *Если* $T_n \to T$ *в обобщенном смысле и* $A \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, *то* $T_n + A \to T + A$ *в обобщенном смысле.*

d) *Если операторы* $T_n$ *и* $T$ *плотно определены, то обобщенная сходимость* $T_n \to T$ *эквивалентна обобщенной сходимости* $T_n^* \to T^*$.

Другое достаточное условие для обобщенной сходимости можно получить из теоремы 2.14.

**Теорема 2.24.** *Пусть* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. *Предположим, что операторы* $A_n$, $n = 1, 2, \ldots$, $T$*-ограничены, т. е.* $\| A_n u \| \leqslant a_n \| u \| + b_n \| Tu \|$ *для* $u \in \mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(A_n)$. *Если* $a_n \to 0$ *и* $b_n \to 0$, *то* $T_n = T + A_n \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *для достаточно больших* $n$ *и* $T_n \to T$ *в обобщенном смысле.*

Утверждения b) и c) теоремы 2.23 приводят к очень удобному критерию обобщенной сходимости в случае $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$.

**Теорема 2.25.** *Предположим, что оператор* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ *имеет непустое резольвентное множество* $\mathrm{P}(T)$. *Для того чтобы последовательность* $T_n \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ *сходилась к* $T$ *в обобщенном смысле, необходимо, чтобы каждое число* $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ *принадлежало* $\mathrm{P}(T_n)$ *для достаточно больших* $n$ *и*

$$\| R(\zeta, T_n) - R(\zeta, T) \| \to 0; \tag{2.33}$$

*достаточно, чтобы последнее соотношение выполнялось для некоторого* $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T)$.

Эта теорема полезна по той причине, что замкнутые операторы, возникающие в приложениях, как правило, имеют непустые резольвентные множества. Из теоремы 2.25 следует, что предельное соотношение (2.33) справедливо для всех $\zeta \in \mathrm{P}(T)$, если оно выполняется для некоторого $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T)$. Мы вернемся к этому вопросу в следующих параграфах.

**Теорема 2.26.** *Пусть* $T_n$, $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ *и* $T_n \to T$ *в обобщенном смысле. Если все операторы* $T_n$ *имеют компактную резольвенту и* $\mathrm{P}(T)$ *непусто, то* $T$ *имеет компактную резольвенту.*

Доказательство. Если $\zeta \in \mathrm{P}(T)$, то, согласно (2.33), $R(\zeta, T)$ является равномерным пределом компактных операторов $R(\zeta, T_n)$ (см. теорему III.4.7).

**Замечание 2.27.** Теорема 2.26 не допускает обращения: операторы $T_n$ не обязаны иметь компактную резольвенту, если резольвента оператора $T$ компактна. Простой контрпример: пусть $\mathbf{X} = \mathrm{l}^p$ и оператор $S \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ в каноническом базисе имеет диагональную матрицу с диагональными элементами $1/k$, $k = 1, 2, \ldots$; пусть, далее, $S_n$ — диагональный оператор с диагональными элементами $\frac{n+k}{nk}$, $k = 1, 2, \ldots$. Операторы $T = S^{-1}$ и $T_n = S_n^{-1}$ существуют и принадлежат $\mathscr{C}(\mathbf{X})$. Нетрудно проверить, что $0 \in \mathrm{P}(T_n)$ для всех $n$, $0 \in \mathrm{P}(T)$, $R(0, T_n) = S_n \underset{\mathrm{u}}{\rightarrow} R(0, T) = S$ и $T$ имеет компактную резольвенту (так как $S$ компактен). Но резольвента оператора $T_n$ некомпактна при любом $n$ (так как $S_n$ некомпактен). Следует отметить, однако, что утверждение, обратное теореме 2.26, справедливо, если операторы $T_n - T$ являются $T$-ограниченными. Более точную формулировку см. в теореме 3.17. См. также теорему VI.3.6.

**Задача 2.28.** Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. При каких условиях на $T$ последовательность $n^{-1}T$ (соответственно $(1 + n^{-1})\, T$) сходится к 0 (соответственно к $T$) в обобщенном смысле?

В заключение мы приведем еще одно достаточное условие обобщенной сходимости [1].

**Теорема 2.29.** *Пусть* $T_n$, $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. *Предположим, что существуют банахово пространство* $\mathbf{Z}$ *и операторы* $U_n$, $U \in \mathscr{B}(\mathbf{Z}, \mathbf{X})$ *и* $V_n$, $V \in \mathscr{B}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$ *такие, что* $U_n$, $U$ *отображают* $\mathbf{Z}$ *взаимно однозначно на* $\mathbf{D}(T_n)$, $\mathbf{D}(T)$ *соответственно и* $T_nU_n = V_n$, $TU = V$. *Если* $\| U_n - U \| \to 0$ *и* $\| V_n - V \| \to 0$, $n \to \infty$, *то* $T_n \to T$ *в обобщенном смысле.*

Доказательство. Отображение $z \to \varphi = \{Uz, Vz\} = \{Uz, TUz\}$ есть взаимно однозначный ограниченный линейный оператор из $\mathbf{Z}$ на $\mathrm{G}(T)$. Так как $\mathrm{G}(T)$ замкнуто, то этот оператор имеет ограниченный обратный:

$$\| z \|^2 \leqslant c^2 \| \varphi \|^2 = c^2 (\| Uz \|^2 + \| Vz \|^2). \tag{2.34}$$

Пусть $\varphi = \{Uz, Vz\}$ — произвольный элемент в $\mathrm{G}(T)$. Тогда $\varphi_n = \{U_n z, V_n z\} \in \mathrm{G}(T_n)$ и

$$\| \varphi - \varphi_n \|^2 = (\| U - U_n \|^2 + \| V - V_n \|^2) \| z \|^2 \leqslant \\ \leqslant c^2 \delta_n^2 \| \varphi \|^2, \tag{2.35}$$

где $\delta_n^2 = \| U - U_n \|^2 + \| V - V_n \|^2$. Отсюда следует, что $\mathrm{dist}\,(\varphi, \mathrm{G}(T_n)) \leqslant c\delta_n \| \varphi \|$, и поэтому $\delta(T, T_n) = \delta(\mathrm{G}(T), \mathrm{G}(T_n)) \leqslant c\delta_n \to 0$, $n \to \infty$.

Аналогично имеем $\delta(T_n, T) \leqslant c_n\delta_n$, где константа $c_n$ играет роль константы $c$ в (2.34), если операторы $U$, $V$ заменить на $U_n$, $V_n$. Можно считать, что последовательность $\{c_n\}$ ограничена; в самом деле, из (2.35) следует, что $\| \varphi \| \leqslant \| \varphi_n \| + \| \varphi - \varphi_n \| \leqslant$

---

[1] Это дискретный аналог определения (см. Реллих [3]) аналитической зависимости семейства операторов $T(\varkappa)$ от параметра $\varkappa$.

$\leqslant \| \varphi_n \| + c\delta_n \| \varphi \|$, поэтому $\| \varphi \| \leqslant (1 - c\delta_n)^{-1} \| \varphi_n \|$ и согласно (2.34) $\| z \| \leqslant \| \varphi \| c \leqslant c (1 - c\delta_n)^{-1} \| \varphi_n \|$. Итак, можно положить $c_n = c (1 - c\delta_n)^{-1}$. Отсюда получаем, что $\delta (T_n, T) \to 0$ и поэтому $\hat{\delta} (T_n, T) \to 0$.

## § 3. Возмущение спектра

### 1. Верхняя полунепрерывность спектра

В этом параграфе мы изучим поведение спектра $\Sigma (T)$ и резольвенты $R (\zeta) = R (\zeta, T)$ при «малых» возмущениях оператора $T$[1]).

**Теорема 3.1.** *Пусть $T \in \mathscr{C} (X)$ и $\Gamma$ — компактное подмножество резольвентного множества $\mathrm{P} (T)$. Существует $\delta > 0$ такое, что $\Gamma \subset \mathrm{P} (S)$, если $S \in \mathscr{C} (X)$ и $\hat{\delta} (S, T) < \delta$.*

Доказательство. Пусть $\zeta \in \Gamma \subset \mathrm{P} (T)$. Так как $(T - \zeta)^{-1} = R (\zeta) \in \mathscr{B} (X)$, то из обобщенной теоремы об устойчивости ограниченной обратимости (теорема 2.21) следует, что $(S - \zeta)^{-1} \in \mathscr{B} (X)$ или, что то же, $\zeta \in \mathrm{P} (S)$, если $\hat{\delta} (S - \zeta, T - \zeta) < (1 + \| R (\zeta) \|^2)^{-1/2}$. Согласно теореме 2.17, последнее условие выполняется, если

$$2 (1 + | \zeta |^2) \hat{\delta} (S, T) < (1 + \| R (\zeta) \|^2)^{-1/2}. \qquad (3.1)$$

Так как $\| R (\zeta) \|$ непрерывно зависит от $\zeta$, то

$$\min_{\zeta \in \Gamma} \frac{1}{2} (1 + | \zeta |^2)^{-1} (1 + \| R (\zeta) \|^2)^{-1/2} = \delta > 0; \qquad (3.2)$$

отсюда следует, что $\Gamma \subset \mathrm{P} (S)$, если $\hat{\delta} (S, T) < \delta$.

**Замечание 3.2.** Если $S = T + A$, где $A \in \mathscr{B} (X)$, то теорему 3.1 можно уточнить, а именно: в силу теоремы 1.16

$$\Gamma \subset \mathrm{P} (S), \quad \text{если} \quad \| A \| < \min_{\zeta \in \Gamma} \| R (\zeta) \|^{-1}. \qquad (3.3)$$

Если, кроме того, $T \in \mathscr{B} (X)$, то $\Gamma$ может быть любым замкнутым (не обязательно ограниченным) подмножеством в $\mathrm{P} (T)$; в этом случае $\| R (\zeta) \|^{-1}$ имеет положительный минимум на $\Gamma$, так как $\| R (\zeta) \| \to 0$ при $\zeta \to \infty$.

**Замечание 3.3.** Теорема 3.1 и замечание 3.2 показывают, что $\Sigma (T)$ является *полунепрерывной сверху* функцией от $T \in \mathscr{B} (X)$. Другими словами, для любого $T \in \mathscr{B} (X)$ и $\varepsilon > 0$ существует

---

[1]) Возмущения спектров операторов (и элементов банаховых алгебр) подробно рассмотрены Ньюбаром [1].

$\delta > 0$ такое, что[1] $\rho(\Sigma(S), \Sigma(T)) = \sup\limits_{\lambda \in \Sigma(S)} \operatorname{dist}(\lambda, \Sigma(T)) < \varepsilon$, если $\| S - T \| < \delta$. Это следует из теоремы 3.1, если в качестве $\Gamma$ взять множество точек, отстоящих от $\Sigma(T)$ на расстояние, не меньшее $\varepsilon$. И для замкнутых операторов теорему 3.1 можно интерпретировать как утверждение о верхней полунепрерывности спектра в несколько ослабленном смысле.

**Задача 3.4.** Существуют такие замкнутые операторы $T$ и $T_n \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$, что $\hat{\delta}(T_n, T) \to 0$, однако расстояние между $\Sigma(T)$ и $\Sigma(T)$ бесконечно для каждого $n$. Проверить это на следующем примере: $\mathrm{X} = \mathrm{l}^p$, $T$ — диагональный оператор с диагональными элементами $k$, $k = 1, 2, \ldots$, и $T_n = (1 + in^{-1})\,T$. [*Указание*: оператор $T_n - T$ $T$-ограничен.]

**Замечание 3.5.** Трудно дать простое выражение для числа $\delta$, фигурирующего в теореме 3.1, но естественно ожидать, что $\delta$ можно выбрать большим, если расстояние от $\Gamma$ до $\Sigma(T)$ достаточно велико. При некоторых дополнительных ограничениях на характер возмущения это расстояние полностью определяет величину возможных возмущений.

**Теорема 3.6.** *Предположим, что операторы $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ и $A \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ коммутируют. Тогда расстояние между $\Sigma(T)$ и $\Sigma(T + A)$ не превосходит* $\operatorname{spr} A$ *и, следовательно,* $\| A \|$.

Доказательство. Резольвента $R(\zeta)$ коммутирует с $A$ (см. теорему III.6.5). Поэтому, согласно теореме 1.18, $(T + A - \zeta)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, если $\operatorname{spr} A < 1/\operatorname{spr} R(\zeta)$. Так как по теореме III.6.16 $\operatorname{spr} R(\zeta) = 1/\operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T))$, то $\zeta \in \mathrm{P}(T + A)$, если $\operatorname{spr} A < \operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T))$. Другими словами,

$$\operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T)) \leqslant \operatorname{spr} A, \quad \text{если} \quad \zeta \in \Sigma(T + A). \tag{3.4}$$

Ввиду того, что $A$ коммутирует также с $T + A$, результат (3.4) можно применить к паре $T + A$, $-A$. Получаем, что $\operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T + A)) < \operatorname{spr} A$, если $\zeta \in \Sigma(T)$. Это доказывает теорему.

**Замечание 3.7.** Из теоремы 3.6 следует, что спектр $\Sigma(T + A)$ непрерывно зависит от $A$, если возмущение коммутирует с $T$.

## 2. Нижняя полунепрерывность спектра

В конечномерном случае собственные значения оператора $T$ зависят от $T$ непрерывно (см. п. II.5.8). Даже для операторов в банаховом пространстве спектр $\Sigma(T)$ зависит непрерывно

---

[1] По поводу $\rho$ см. примечание 3 на стр. 251. Метрика Хаусдорфа получается симметризацией функции $\rho$. Эта метрика измеряет расстояния между *точечными множествами*. Расстояние в смысле Хаусдорфа отличается от расстояния между *полными наборами собственных значений*, введенного в п. II.5.2; при вычислении хаусдорфова расстояния кратности собственных значений не принимаются во внимание.

от $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$, если возмущение коммутирует с $T$ (см. замечание 3.7) [1]. Однако это неверно для возмущений общего вида; в общем случае спектр обладает лишь свойством полунепрерывности сверху.

Грубо говоря, полунепрерывность сверху, доказанная в предыдущем пункте, означает, что $\Sigma(T)$ не может *скачком увеличиться* при непрерывном изменении $T$. Однако *уменьшиться скачком* спектр может, как это видно из следующего примера.

**Пример 3.8.** Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{l}^p(-\infty, +\infty)$; вектор $u \in \mathbf{X}$ — это двусторонняя последовательность $(\xi_j)$, $j = \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$, и $\| u \| = (\Sigma \mid \xi_j \mid^p)^{1/p}$. Пусть $\{x_n\}$ — канонический базис в $\mathbf{X}$, т. е. $x_n = (\delta_{nj})$. Рассмотрим оператор левого сдвига $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$; это значит, что $Tx_0 = 0$, $Tx_n = x_{n-1}$, $n \neq 0$ (см. пример III.3.16). Так как соотношение (III.3.9) выполняется в нашем случае, то $\operatorname{spr} T = 1$ и поэтому $\Sigma(T)$ есть подмножество замкнутого единичного круга. Более того, $\Sigma(T)$ совпадает с единичным кругом; в самом деле, для любого $\zeta$, $\mid \zeta \mid < 1$, вектор $u = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n x_n$ является собственным вектором для $T - \zeta$, принадлежащим собственному значению $\zeta$, и поэтому $\zeta \in \Sigma(T)$.

Пусть $A \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ таков, что $Ax_0 = x_{-1}$, $Ax_n = 0$, $n \neq 0$. Положим $T(\varkappa) = T + \varkappa A$. $T(\varkappa)$ — оператор левого сдвига, причем $T(\varkappa)\, x_0 = \varkappa x_{-1}$, $T(\varkappa)\, x_n = x_{n-1}$, $n \neq 0$; поэтому $\operatorname{spr} T = 1$ и $\Sigma(T(\varkappa))$ — подмножество единичного круга. Однако если $\varkappa \neq 0$, то внутренность единичного круга содержится в $\mathrm{P}(T(\varkappa))$. Это следует из того, что $T^{-1}(\varkappa)$ существует и является оператором правого сдвига: $T^{-1}(\varkappa) x_{-1} = x_0/\varkappa$, $T^{-1}(\varkappa) x_{n-1} = x_n$, $n \neq 0$; поэтому $\operatorname{spr} T^{-1}(\varkappa) = 1$ и, следовательно, внешность единичного круга принадлежит $\mathrm{P}(T^{-1}(\varkappa))$. Отсюда вытекает наше утверждение (см. теорему III.6.15).

В этом примере возмущение $\varkappa A$ мало не только по норме ($\| \varkappa A \| = \mid \varkappa \mid \to 0$ при $\varkappa \to 0$), но также и в том смысле, что $A$ — вырожденный оператор ранга 1. Возмущение $\varkappa A$ «мало» в любой более сильной разумной топологии в $\mathscr{B}(\mathbf{X})$. Таким образом, спектр $\Sigma(T)$ не обладает свойством полунепрерывности снизу даже относительно более сильной операторной топологии.

**Пример 3.9.** В предыдущем примере $\Sigma(T)$ изменяется скачком при малом возмущении: из полного круга превращается в окружность. Существует пример, в котором это изменение более резко выражено, а именно круг превращается в свой центр [2]. Конечно, такое изменение не может произойти при вырожденном возмущении, как в предыдущем примере [3].

---

[1] Известны и другие случаи непрерывной зависимости спектра от оператора. Например, $\Sigma(T)$ непрерывно зависит от $T$, если $T$ пробегает множество самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Более точную формулировку см. в п. VIII.1.2.

[2] См. Риккарт [[1]], стр. 282. В примере построена последовательность $T_n$ нильпотентных операторов такая, что $\| T - T \| \to 0$, где $T$ не является квазинильпотентным и $\Sigma(T)$ есть круг положительного радиуса с центром в нуле.

[3] Компактное возмущение сохраняет существенный спектр, который совпадает с единичным кругом в рассматриваемом случае; см. теорему 5.35 и пример 5.36.

**Задача 3.10.** В условиях примера 3.8 рассмотрим оператор $R(\zeta, \varkappa) = R(\zeta, T + \varkappa A)$. Доказать, что

$$\| R(\zeta, \varkappa) \| \leqslant (|\zeta| - 1)^{-1} \quad \text{при} \quad |\zeta| > 1, \ |\varkappa| \leqslant 1,$$

$$\| R(\zeta, \varkappa) \| \leqslant |\varkappa|^{-1} (1 - |\zeta|)^{-1} \quad \text{при} \quad |\zeta| < 1, \ 0 < |\varkappa| \leqslant 1.$$

### 3. Непрерывность и аналитичность резольвенты

Покажем, что резольвента $R(\zeta, T)$ не только непрерывна по $T$, но и в определенном смысле аналитична.

**Теорема 3.11.** *Фиксируем* $T_0 \in \mathscr{C}(X)$. *Оператор* $R(\zeta, T)$ *кусочно голоморфен по совокупности переменных* $T \in T_0 + \mathscr{B}(X)$ *и* $\zeta \in \mathrm{P}(T)$.

Здесь $T_0 + \mathscr{B}(X)$ — множество всех операторов вида $T_0 + B$, $B \in \mathscr{B}(X)$, снабженное метрикой, порожденной нормой в $\mathscr{B}(X)$. Теорема 3.11 означает следующее. Во-первых, множество пар $(\zeta, T)$ таких, что $\zeta \in \mathrm{P}(T)$, открыто в пространстве $C \times [T_0 + \mathscr{B}(X)]$ (здесь $C$ — комплексная плоскость); другими словами, для любого $T \in T_0 + \mathscr{B}(X)$ и любого $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T)$ число $\zeta$ принадлежит $\mathrm{P}(S)$, если величины $|\zeta - \zeta_0|$ и $\| S - T \|$ достаточно малы. Во-вторых, $R(\zeta, S)$ можно представить в виде сходящегося двойного степенного ряда по степеням $\zeta - \zeta_0$ и $A$, где $A \in \mathscr{B}(X)$, $S = T + A$. В частности, при $T_0 = 0$ резольвента $R(\zeta, T)$ кусочно голоморфна по $T \in \mathscr{B}(X)$ и $\zeta \in \mathrm{P}(T)$.

Доказательство теоремы 3.11 в основном совпадает с доказательством теоремы II.1.5; достаточно лишь заменить $T(\varkappa)$ на $S$ и $A(\varkappa)$ на $A$.

Обобщение теоремы 3.11 на тот случай, когда $T \in \mathscr{C}(X)$, вызывает затруднения, так как $\mathscr{C}(X)$ не является алгеброй (и даже линейным пространством). Тем не менее мы дадим следующее обобщение теоремы 3.11.

**Теорема 3.12.** *Резольвента* $R(\zeta, T)$, $T \in \mathscr{C}(X)$, $\zeta \in \mathrm{P}(T)$, *кусочно голоморфна по* $\zeta$ *и* $R(\zeta_0, T)$, *где* $\zeta_0$ — *фиксированное комплексное число, в следующем смысле. Существует функция* $\Phi(\eta, B)$, *определенная на открытом подмножестве в* $C \times \mathscr{B}(X)$ *и принимающая значения в* $\mathscr{B}(X)$, *с такими свойствами:*

i) $\Phi(\eta, B)$ *кусочно голоморфна по совокупности* $\eta$ *и* $B$ (*в смысле теоремы* 3.11).

ii) *Пусть* $T \in \mathscr{C}(X)$ *и* $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T)$. *Число* $\zeta$ *принадлежит* $\mathrm{P}(T)$ *тогда и только тогда, когда определен оператор* $\Phi(\zeta - \zeta_0, R(\zeta_0, T))$, *при этом*

$$R(\zeta, T) = \Phi(\zeta - \zeta_0, R(\zeta_0, T)). \tag{3.5}$$

Доказательство. Имеет место тождество

$$R(\zeta, T) = -(\zeta - \zeta_0)^{-1} - \\ - (\zeta - \zeta_0)^{-2} R((\zeta - \zeta_0)^{-1}, R(\zeta_0, T)); \tag{3.6}$$

оно следует из (III.6.18) и справедливо, если $\zeta$, $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T)$ и $\zeta \neq \zeta_0$. Определим $\Phi(\eta, B)$ равенством

$$\Phi(0, B) = B, \quad \Phi(\eta, B) = -\eta^{-1} - \eta^{-2} R(\eta^{-1}, B), \tag{3.7}$$

если $\eta \neq 0$ и $\eta^{-1} \in \mathrm{P}(B)$. Тогда равенство (3.5) выполняется всякий раз, как только $\zeta$, $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T)$.

Областью определения $\Phi(\eta, B)$ служит множество всех пар $(\eta, B) \in \mathrm{C} \times \mathscr{B}(\mathrm{X})$ таких, что либо $\eta = 0$, либо $\eta^{-1} \in \mathrm{P}(B)$. Согласно теореме 3.1 и замечанию 3.2, это множество открыто в $\mathrm{C} \times \mathscr{B}(\mathrm{X})$. Из теоремы 3.11 очевидным образом следует, что функция $\Phi(\eta, B)$ голоморфна по $\eta$ и $B$, если $\eta \neq 0$. С другой стороны, тождество

$$\begin{aligned}\Phi(\eta, B) &= -\eta^{-1} - \eta^{-2}(B - \eta^{-1})^{-1} = \\ &= -\eta^{-1} + \eta^{-1}(1 - \eta B)^{-1} = B(1 - \eta B)^{-1}\end{aligned} \tag{3.8}$$

и равенство $\Phi(0, B) = B$ показывают, что $\Phi(\eta, B)$ голоморфна при $\eta = 0$.

Остается доказать, что если $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T)$, то $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ тогда и только тогда, когда определен оператор $\Phi(\zeta - \zeta_0, R(\zeta_0, T))$. Это очевидно, если $\zeta = \zeta_0$. Если же $\zeta \neq \zeta_0$, это следует из того факта, что равенство (3.6) справедливо всякий раз, как только существует оператор справа или слева в (3.6).

**Замечание 3.13.** Теорема 3.12 показывает, что величина $\| R(\zeta, S) - R(\zeta, T) \|$ мала для всех $\zeta$, если она мала для некоторого $\zeta_0$. Точнее, для любого $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ и любых $\zeta$, $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T)$ существует такая константа $M$, что

$$\| R(\zeta, S) - R(\zeta, T) \| \leqslant M \| R(\zeta_0, S) - R(\zeta_0, T) \| \tag{3.9}$$

для любого оператора $S \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$, для которого $\zeta_0 \in \mathrm{P}(S)$ и число $\| R(\zeta_0, S) - R(\zeta_0, T) \|$ достаточно мало (тогда, в частности, $\zeta \in \mathrm{P}(S)$). Таким образом, мы получаем другое доказательство утверждения, сделанного в замечании к теореме 2.25.

**Задача 3.14.** Доказать следующее уточнение неравенства (3.9):

$$\| R(\zeta, S) - R(\zeta, T) \| \leqslant \frac{\left\| \dfrac{T - \zeta_0}{T - \zeta} \right\|^2 \| R(\zeta_0, S) - R(\zeta_0, T) \|}{1 - |\zeta - \zeta_0| \left\| \dfrac{T - \zeta_0}{T - \zeta} \right\| \| R(\zeta_0, S) - R(\zeta_0, T) \|}, \tag{3.10}$$

если $\| R(\zeta_0, S) - R(\zeta_0, T) \|$ столь мало, что знаменатель в правой части (3.10) положителен. Здесь $\dfrac{T - \zeta_0}{T - \zeta}$ обозначает оператор $(T - \zeta_0)(T - \zeta)^{-1} = (T - \zeta_0) R(\zeta, T) = 1 + (\zeta - \zeta_0) R(\zeta, T)$.

**Теорема 3.15.** *Резольвента $R(\zeta, T)$ непрерывна по совокупности $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ и $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T)$ в следующем смысле. Для любых*

$T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$, $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T)$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует число* $\delta > 0$ *такое, что* $\zeta \in \mathrm{P}(S)$ *и* $\| R(\zeta, S) - R(\zeta_0, T) \| < \varepsilon$, *если* $|\zeta - \zeta_0| < \delta$ *и* $\delta(S, T) < \delta$.

Доказательство. По теореме 2.25 $R(\zeta_0, S)$ существует и величина $\| R(\zeta_0, S) - R(\zeta_0, T) \|$ сколь угодно мала, если выражение $\hat{\delta}(S, T)$ достаточно мало. Наше утверждение следует теперь из теоремы 3.12, так как резольвента $R(\zeta, S)$ представима в виде двойного степенного ряда по $\zeta - \zeta_0$ и $R(\zeta_0, S) - R(\zeta_0, T)$.

## 4. Полунепрерывность изолированных частей спектра

Выше мы доказали верхнюю полунепрерывность спектра $\Sigma(T)$, $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$. Докажем теперь несколько более сильный результат: *каждая изолированная часть спектра полунепрерывна сверху.* Разбиение спектра на изолированные части и связанное с ним разложение пространства X и оператора $T$ были рассмотрены в п. III.6.4. Для простоты изложения мы сформулируем здесь результат для случая, когда спектр допускает разбиение на две изолированные части; обобщение на случай нескольких частей очевидно.

**Теорема 3.16.** *Предположим, что спектр* $\Sigma(T)$ *оператора* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ *можно разбить кривой* $\Gamma$ *на части* $\Sigma'(T)$ *и* $\Sigma''(T)$ *так же, как в п.* III.6.4. *Пусть* $\mathrm{X} = \mathrm{M}'(T) \oplus \mathrm{M}''(T)$ — *соответствующее разложение пространства* X. *Существует число* $\delta > 0$, *зависящее от* $T$ *и* $\Gamma$, *со следующими свойствами. Если* $S \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ *и* $\hat{\delta}(S, T) < \delta$, *то спектр* $\Sigma(S)$ *разбивается контуром* $\Gamma$ *на части* $\Sigma'(S)$ *и* $\Sigma''(S)$ ($\Gamma$ *содержится в* $\mathrm{P}(S)$). *В соответствующем разложении* $\mathrm{X} = \mathrm{M}'(S) \oplus \mathrm{M}''(S)$ *слагаемые изоморфны пространствам* $\mathrm{M}'(T)$ *и* $\mathrm{M}''(T)$. *В частности,* $\dim \mathrm{M}'(S) = \dim \mathrm{M}'(T)$, $\dim \mathrm{M}''(S) = \dim \mathrm{M}''(T)$ *и, следовательно,* $\Sigma'(S)$ *и* $\Sigma''(S)$ *непусты, если это верно для* $T$. *Разложение* $\mathrm{X} = \mathrm{M}'(S) \oplus \mathrm{M}''(S)$ *непрерывно зависит от* $S$ *в том смысле, что проектор* $P[S]$ *пространства* X *на* $\mathrm{M}'(S)$ *параллельно* $\mathrm{M}''(S)$ *стремится по норме к* $P[T]$, *если* $\hat{\delta}(S, T) \to 0$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 3.1 следует, что $\Gamma \subset \mathrm{P}(S)$, если

$$\hat{\delta}(S, T) < \delta = \min_{\zeta \in \Gamma} 2^{-1} (1 + |\zeta|^2)^{-1} (1 + \| R(\zeta) \|^2)^{-1/2}.$$

Поэтому $\Sigma(S)$ разбивается контуром $\Gamma$ на две части $\Sigma'(S)$ и $\Sigma''(S)$. Проектор $P[S]$ на $\mathrm{M}'(S)$ параллельно $\mathrm{M}''(S)$, согласно (III.6.19), допускает представление

$$P[S] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R(\zeta, S)\, d\zeta. \tag{3.11}$$

Так как контур Г компактен и резольвента $R(\zeta, T)$ непрерывна по совокупности $\zeta$ и $T$, согласно теореме 3.15, то величина $\| R(\zeta, S) - R(\zeta, T) \|$ равномерно мала по $\zeta$, если $\hat{\delta}(S, T)$ достаточно мало. Отсюда и из (3.11) следует, что $P[S]$ и $P[T]$ близки по норме, если раствор $\hat{\delta}(S, T)$ достаточно мал. Изоморфизм $\mathrm{M}'(S)$ и $\mathrm{M}'(T)$ следует из одного результата п. I.4.6 (этот результат верен также и для банаховых пространств).

## 5. Непрерывность конечной системы собственных значений

Мы видели выше, что спектр $\Sigma(T)$, $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$, не является непрерывной функцией от $T$ даже в том случае, когда $T$ пробегает $\mathscr{B}(\mathrm{X})$. Это резко контрастирует с ситуацией в конечномерном случае. Мы покажем, однако, что, так же как в конечномерном случае, часть спектра $\Sigma(T)$, образованная *конечной системой собственных значений* (см. п. III.6.5), непрерывно зависит от $T$.

Пусть $\Sigma'(T)$ — конечная система собственных значений. $\Sigma'(T)$ отделяется от остальной части спектра $\Sigma''(T)$ замкнутой кривой Г (см. п. III.6.4). Соответствующее разложение $\mathrm{X} = \mathrm{M}'(T) \oplus \mathrm{M}''(T)$ обладает тем свойством, что $\dim \mathrm{M}'(T) = m < \infty$, где $m$ — тотальная кратность собственных значений рассматриваемой системы.

Предположим теперь, что $\{T_n\}$ сходится к $T$ в обобщенном смысле. Тогда $\Sigma(T_n)$ при достаточно больших $n$ разбивается на части $\Sigma'(T_n)$ и $\Sigma''(T_n)$, причем пространства $\mathrm{M}'(T_n)$, $\mathrm{M}''(T_n)$ изоморфны $\mathrm{M}'(T)$ и $\mathrm{M}''(T)$ соответственно (теорема 3.16). В частности $\dim \mathrm{M}'(T_n) = m$ и поэтому часть $\Sigma'(T_n)$, лежащая внутри Г, является конечной системой собственных значений с суммарной кратностью $m$.

Тот же результат верен, если $\Sigma'(T)$ заменить любым из собственных значений, входящих в $\Sigma'(T)$. Мы видим, таким образом, что изменение конечной системы $\Sigma'(T)$ собственных значений замкнутого оператора $T$ мало (в смысле п. II.5.1), если $T$ испытывает достаточно малое возмущение в смысле обобщенной сходимости.

Согласно теореме 3.16, тотальный проектор пространства $\mathrm{X}$ на $\mathrm{M}'(T)$ параллельно $\mathrm{M}''(T)$ зависит от $T$ непрерывно.

Суммируя предыдущее, можем сказать, что поведение конечной системы собственных значений замкнутого оператора при малых возмущениях аналогично поведению спектра в конечномерном случае. Мы можем продолжить эту аналогию, вводя неупорядоченный набор $\mathfrak{S}'(T)$ собственных значений (учитываемых вместе с кратностями), представляющий конечную систему $\Sigma'(T)$, как описано в п. II.5.2. Оказывается, что расстояние между $\mathfrak{S}'(T_n)$ и $\mathfrak{S}'(T)$ стремится к нулю, если $T_n$ сходится к $T$ в обобщенном смысле.

## 6. Изменение спектра при относительно ограниченном возмущении

Результаты, касающиеся верхней полунепрерывности спектра $\Sigma(T)$ и аналитичности резольвенты $R(\zeta, T)$ как функции от $\zeta$ и $R(\zeta_0, T)$, имеют весьма общий характер, но не совсем удобны для приложений. Здесь мы приведем теорему не столь общую, как упомянутые результаты, однако более полезную в приложениях.

**Теорема 3.17.** *Пусть $T$ — замкнутый оператор в $\mathbf{X}$ и $A$ — $T$-ограниченный оператор в $\mathbf{X}$ (т. е. $\mathbf{D}(A) \supset \mathbf{D}(T)$ и справедливо неравенство* (1.1)). *Если существует число $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ такое, что*

$$a \| R(\zeta, T) \| + b \| TR(\zeta, T) \| < 1, \tag{3.12}$$

*то оператор $S = T + A$ замкнут* и *$\zeta \in \mathrm{P}(S)$, причем*

$$\| R(\zeta, S) \| \leqslant \| R(\zeta, T) \| (1 - a \| R(\zeta, T) \| - \\ - b \| TR(\zeta, T) \|)^{-1}. \tag{3.13}$$

*Если, в частности, $T$ имеет компактную резольвенту, то и $S$ имеет компактную резольвенту.*

Эта теорема легко следует из теоремы 1.16. Она удобна, так как неравенство (3.12) дает явное условие принадлежности числа $\zeta$ резольвентному множеству $\mathrm{P}(S)$. С помощью этого замечания доказывается

**Теорема 3.18.** *В обозначениях предыдущей теоремы предположим, что $\Sigma(T)$ допускает разбиение на две части замкнутой кривой $\Gamma$ так же, как в теореме* 3.16. *Если*

$$\sup_{\zeta \in \Gamma} (a \| R(\zeta, T) \| + b \| TR(\zeta, T) \|) < 1, \tag{3.14}$$

*то $\Sigma(S)$ также разбивается кривой $\Gamma$ и справедливы утверждения теоремы* 3.16.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.16; сделаем лишь несколько замечаний. Из (3.11) и (II.1.11) следует, что величина $\| P[S] - P[T] \|$ мала, если норма оператора $AR(\zeta, T)$ достаточно мала для всех $\zeta \in \Gamma$, в частности если $a$ и $b$ достаточно малы. В этом случае утверждение теоремы выводится так же, как в доказательстве теоремы 3.16. В действительности малость констант $a$ и $b$ не обязательна, достаточно лишь условие (3.14). Для доказательства введем семейство $T(\varkappa) = T + \varkappa A, 0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$. Из (II.1.11) следует, что $R(\zeta, T + \varkappa A)$ —

непрерывная (даже голоморфная) функция от $\zeta$ и $\varkappa$, $\zeta \in \Gamma$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, и поэтому $P(\varkappa) = -(2\pi i)^{-1} \int\limits_{\Gamma} R(\zeta, T + \varkappa A)\, d\zeta$ непрерывно зависит от $\varkappa$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$.

**Пример 3.19.** Пусть $T$ и $S$ — операторы $T_1$ и $S_1$ из примера 1.10. Оператор $A = S - T$ удовлетворяет условию (3.14), если разности $q_i(x) - p_i(x)$, $i = 0, 1, 2$, достаточно малы.

## 7. Одновременное рассмотрение бесконечного числа собственных значений

Изменение собственных значений при малом изменении оператора $T$ не обязано быть равномерно малым. Так, например, пусть $T$ имеет дискретный спектр, состоящий из неограниченного множества $\lambda_n$ собственных значений. Положим $T(\varkappa) = T + \varkappa T$; возмущение $\varkappa T$ $T$-ограничено. Собственные значения оператора $T(\varkappa)$ суть $(1 + \varkappa)\lambda_n$ и приращение $\varkappa\lambda_n$ может быть сколь угодно велико для любых значений параметра $\varkappa$.

Однако существует ряд случаев, когда изменение спектра равномерно. Мы не будем изучать это явление сколько-нибудь подробно, а ограничимся рассмотрением одного примера.

**Пример 3.20.** Рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор $T$ из примера III.6.21 ($Tu = -u''$, причем $u(0) = u(\pi) = 0$). Собственные значения оператора $T$ суть $\lambda_n = n^2$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; далее, справедливы оценки (III.6.47) — (III.6.48) для резольвенты $R(\zeta)$. Для любого $\delta > 0$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\pi}{|\alpha \sin \pi\alpha|} = \delta. \tag{3.15}$$

Если целое число $N$ больше $\pi/\delta$, то существуют последовательности $\{\alpha_n'\}$ и $\{\alpha_n''\}$корней уравнения (3.15) такие, что

$$N < \alpha_N'' < N + \frac{1}{2}, \quad n - \frac{1}{2} < \alpha_n' < n < \alpha_n'' < n + \frac{1}{2}, \quad n > N, \tag{3.16}$$

$$\alpha_n' = n - \frac{1}{n\delta} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \alpha_n'' = n + \frac{1}{n\delta} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to \infty. \tag{3.17}$$

Согласно замечанию, сделанному в конце примера III.6.21, неравенство

$$\| R(\zeta) \| \leqslant \delta \tag{3.18}$$

выполняется на каждой параболе $\xi = \alpha^2 - \eta^2/4\alpha^2$, где $\alpha = \alpha_n'$ или $\alpha_n''$. Из (III.6.48) следует также, что неравенство (3.18) выполняется в точках горизонтальных прямых $\eta = \pm 2/\delta$. Обозначим через $\Gamma_n$, $n > N$, криволинейный прямоугольник, образованный параболами $\xi = \alpha^2 - \eta^2/4\alpha^2$, $\alpha = \alpha_n'$, $\alpha_n''$, и прямыми линиями $\eta = \pm 2/\delta$. Каждый контур $\Gamma_n$ охватывает в точности одно собственное значение $\lambda_n = n^2$ и в точках контура $\Gamma_n$ выполняется неравенство (3.18). Остающиеся собственные значения $n^2$, $n \leqslant N$, можно окружить контуром $\Gamma_0$, состоящим из параболы $\xi=\alpha^2-\eta^2/4\alpha^2, \alpha=\alpha''_N$, горизонтальных прямых $\eta=\pm 2/\delta$ и вертикальной прямой, расположенной достаточно далеко от мнимой оси; и снова (3.18) выполняется для $\zeta \in \Gamma_0$. Обозначим через $\Gamma$ контур, составленный из $\Gamma_n$, $n>N$, и $\Gamma_0$. Отметим, что для больших $n$ контур $\Gamma_n$ близок к квадрату с центром $n^2$ и стороной $4/\delta$.

Рассмотрим теперь возмущенный оператор $S=T+A$, $A \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$. Выберем $\delta$ так, что $\|A\|=a<1/\delta$. Условие (3.14) выполнено ввиду того, что $\|R(\zeta)\|<\delta$ в точках контура $\Gamma$ (в рассматриваемом случае $b=0$). Из теоремы 3.18 следует, что каждый контур $\Gamma_n$, $n>N$, охватывает в точности одно собственное значение оператора $S$, а $\Gamma_0$ охватывает $N$ собственных значений. Эти собственные значения исчерпывают $\Sigma(S)$, так как любое $\zeta$, лежащее вне контура $\Gamma$, удовлетворяет (3.18) и поэтому принадлежит $\mathrm{P}(S)$. Ввиду того что размеры контура $\Gamma_n$ ограничены при $n\to\infty$, приращения собственных значений оператора $T$ *равномерно* ограничены для ограниченных возмущений $A$: каждое собственное значение $\lambda_n$ при достаточно больших $n$ лежит внутри фигуры, близкой к квадрату со стороной $4\|A\|$, центром которого служит невозмущенное собственное значение.

Обозначим через $P_n[T]$ и $P_n[S]$, $n>N$, собственные проекторы, соответствующие собственным значениям операторов $T$ и $S$, лежащим внутри $\Gamma_n$. Оказывается, что операторы $P_n[S]-P_n[T]$ равномерно ограничены. В самом деле,

$$P_n[S]-P_n[T]=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}[R(\zeta, S)-R(\zeta, T)]\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_n}R(\zeta, S)AR(\zeta, T)\,d\zeta$$

и

$$\|P_n[S]-P_n[T]\|\leqslant\frac{|\Gamma_n|}{2\pi}\cdot\frac{\|A\|}{\delta(\delta-\|A\|)}\leqslant C,$$

где $|\Gamma_n|$ — длина контура $\Gamma_n$ и поэтому ограничена по $n$.

**Замечание 3.21.** Как мы увидим ниже, оценку (III.6.47) можно улучшить, если рассматривать оператор $T$ в пространстве $\mathbf{X}=\mathbf{L}^2(0. \pi)$, и как следствие можно получить более точный результат о возмущении собственных значений оператора $T$. Следует, однако, отметить, что существуют операторы, которые ограничены в $\mathbf{C}[0, \pi]$, но не ограничены в $\mathbf{L}^2$. Таким образом, результаты, полученные в предыдущем примере, имеют самостоятельный интерес.

## 8. Применение к банаховым алгебрам. Теорема Винера

Понятия спектра и резольвенты можно определить не только для линейных операторов, но и в более общей ситуации, а именно для элементов *банаховой алгебры*. Мы уже отмечали ранее, что $\mathscr{B}(\mathbf{X})$ является банаховой алгеброй (см. п. I.4.1 и п. III.3.2). Здесь мы введем ряд понятий из теории банаховых алгебр и покажем, что многие полученные выше результаты верны в этой более общей ситуации[1]).

---

[1]) Более или менее подробное изложение теории банаховых алгебр см. в книгах Хилле и Филлипс [[1]] и Риккарт [[1]].

*Банахова алгебра* $\mathscr{B}$ — это по определению банахово пространство, в котором определено произведение $TS \in \mathscr{B}$ любых двух элементов $T, S \in \mathscr{B}$, причем $\| TS \| \leqslant \| T \| \cdot \| S \|$. *Единица* 1 алгебры $\mathscr{B}$ — это такой элемент, что $1T = T1 = T$ для всех $T \in \mathscr{B}$. Банахова алгебра не обязательно содержит единицу, однако если единица существует, то она единственна. Мы будем рассматривать банаховы алгебры с единицей. Элемент $\alpha 1$, где $\alpha$ — произвольный скаляр, будем обозначать $\alpha$.

Элемент $T \in \mathscr{B}$ *обратим*, если существует $S \in \mathscr{B}$ такой, что $TS = ST = 1$; $S$ однозначно определен элементом $T$ и обозначается $T^{-1}$ (*обратный элемент* для $T$).

*Резольвентное множество* $\mathrm{P}(T)$ элемента $T \in \mathscr{B}$ — это множество всех скаляров $\zeta$ таких, что $T - \zeta$ обратим. Функция $R(\zeta) = (T - \zeta)^{-1}$, определенная для $\zeta \in \mathrm{P}(T)$, называется *резольвентой* элемента $T$. Множество $\Sigma(T)$, дополнительное в комплексной плоскости к $\mathrm{P}(T)$, называется спектром элемента $T$.

Многие другие понятия (теоремы), введенные (доказанные) для $\mathscr{B}(\mathrm{X})$, можно обобщить на случай банаховых алгебр. Как правило, это такие понятия (теоремы), которые можно ввести (доказать), не обращаясь к основному пространству $\mathrm{X}$. Так, например, спектральный радиус $\operatorname{spr} T$ элемента $T \in \mathscr{B}$ можно определить так же, как в п. I.4.2. Разложение Неймана (I.4.22) верно для $T \in \mathscr{B}$ и поэтому $1 - T$ обратим, если $\operatorname{spr} T < 1$. В частности, имеет место первое разложение Неймана (I.4.22) для резольвенты, откуда следует, что $\mathrm{P}(T)$ открыто, $\Sigma(T)$ замкнуто и т. д.

Большинство результатов о возмущении спектров переносится на случай банаховых алгебр, однако при этом мы должны ограничиться результатами об операторах из $\mathscr{B}(\mathrm{X})$, так как неограниченные операторы не имеют аналога в теории банаховых алгебр. Например, $\Sigma(T)$, полунепрерывная сверху функция от $T \in \mathscr{B}$, не является, вообще говоря, полунепрерывной снизу. Однако спектр $\Sigma(T)$ зависит от $T$ непрерывно при возмущениях специального вида (см. замечание 3.7).

Отметим одно новое и интересное обстоятельство, отсутствующее в $\mathscr{B}(\mathrm{X})$. Банахова алгебра $\mathscr{B}$ может оказаться *коммутативной* (это означает, что все элементы в $\mathscr{B}$ коммутируют между собой); отметим, что алгебра $\mathscr{B}(\mathrm{X})$ не коммутативна, если $\dim \mathrm{X} \geqslant 2$. Если $\mathscr{B}$ коммутативна, то справедливы теорема 3.6 и замечание 3.7. Таким образом, $\Sigma(T)$ *непрерывно зависит от* $T$ *в этом случае*.

**Пример 3.22.** Важным примером банаховой алгебры служит банахово пространство $l$ (множество всех последовательностей $T = (\tau_k)$ таких, что $\| T \| = \sum_k | \tau_k | < \infty$; см. пример III.1.1), в котором произведение $TS$ двух элементов $T = (\tau_k)$ и $S = (\sigma_k)$ определяется как свертка:

$$TS = (\rho_k), \quad \rho_k = \sum_j \tau_j \sigma_{k-j}. \tag{3.19}$$

Нетрудно проверить, что $\| TS \| \leqslant \| T \| \| S \|$ и что алгебра $\mathbf{l}$ коммутативна. В определении пространства $\mathbf{l}$, приведенном в примере III.1.1, индекс $k$ принимает значения $1, 2, \ldots$, в этом случае алгебра $\mathbf{l}$ не имеет единицы. Если же $k$ пробегает целые значения от 0 до $\infty$ или от $-\infty$ до $\infty$, то элемент $1 = (\delta_{k0})$ служит единицей в $\mathbf{l}$. В дальнейшем мы считаем, что $k$ принимает все целые значения и полагаем $\mathscr{B} = \mathbf{l}$.

Каждому элементу $T \in \mathscr{B}$ поставим в соответствие комплексную функцию

$$T(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \tau_k e^{ik\theta}, \tag{3.20}$$

определенную на единичной окружности (для вещественных $\theta$); отметим, что ряд Фурье в правой части (3.20) абсолютно сходится. Из определения (3.19) следует, что

$$TS(e^{i\theta}) = T(e^{i\theta}) S(e^{i\theta}). \tag{3.21}$$

Покажем, что

$$(T) = \{\zeta : T(e^{i\theta}) = \zeta\}. \tag{3.22}$$

Отсюда следует, в частности, что $T$ обратим, если $T(e^{i\theta}) \neq 0$. Если положить $S = T^{-1}$, то $S(e^{i\theta}) = 1/T(e^{i\theta})$. По определению функция $S(e^{i\theta})$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. Таким образом, из (3.22) вытекает следующая теорема, принадлежащая Винеру: *если комплексная функция $T(e^{i\theta})$ с абсолютно сходящимся рядом Фурье не обращается в нуль (для вещественных значений $\theta$), то функция $1/T(e^{i\theta})$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье* [1]).

Сначала докажем (3.22) в предположении, что $T(e^{i\theta})$ имеет аналитическое продолжение $T(z)$ на окрестность единичной окружности K. Если $\zeta$ не принадлежит множеству значений функции $T(e^{i\theta})$, то [2]) $(T - \zeta)(z) = T(z) - \zeta$ не обращается в нуль в некоторой окрестности окружности K. Поэтому функция $R(z) = (T(z) - \zeta)^{-1}$ аналитична в окрестности окружности K. Из неравенств Коши для коэффициентов разложения Лорана следует, что функция $R(e^{i\theta})$ имеет абсолютно сходящийся ряд Фурье. Последовательность $R$ коэффициентов Фурье этой функции принадлежит $\mathscr{B}$ и $R(T - \zeta) = (T - \zeta) R = 1$; таким образом, элемент $T - \zeta$ обратим. С другой стороны, как следует из (3.21), $T - \zeta$ не обратим, если $\zeta$ принадлежит множеству значений функции $T(e^{i\theta})$.

Предложение (3.22) следует теперь из непрерывной зависимости спектра $\Sigma(T)$ от $T$ (напомним, что алгебра $\mathscr{B}$ коммутативна). В самом деле, для любого $T \in \mathscr{B}$ существует последовательность $\{T_n\}$ такая, что $\| T_n - T \| \to 0$ и каждая функция $T_n(e^{i\theta})$ имеет аналитическое продолжение в окрестность окружности K. В качестве такой последовательности можно взять, например, $T_n(e^{i\theta}) = \sum_{k=-n}^{n} \tau_k e^{ik\theta}$. Так как $\Sigma(T_n)$ совпадает с множеством значений функции $T_n(e^{i\theta})$, то $\Sigma(T) = \lim \Sigma(T_n)$ совпадает с множеством значений функции $T(e^{i\theta}) = \lim T_n(e^{i\theta})$.

---

[1]) См. Рисс и Секефальви-Надь [1].

[2]) Отметим, что $1(e^{i\theta}) = 1$.

## § 4. Пары замкнутых подпространств

### 1. Определения

Этот параграф следует рассматривать как вспомогательный по отношению к следующему параграфу, где построена теория возмущений для таких целочисленных характеристик операторов, как дефект и индекс. Возможно, что предмет этого параграфа имеет самостоятельный интерес.

Приведенные здесь задачи связаны с рассмотрением пар $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ замкнутых подпространств в банаховом пространстве $\mathbf{Z}$. Полученные результаты будут применены в следующем параграфе к операторам из класса $\mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, причем в качестве $\mathbf{Z}$ рассматривается произведение пространств $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$. Некоторые основные результаты в этом направлении получены в § 2, в дальнейшем нам потребуются и другие результаты этого параграфа.

Пусть $\mathbf{Z}$ — банахово пространство и $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — замкнутые подпространства в $\mathbf{Z}$. Тогда $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ — также замкнутое подпространство. Мы определим *степень вырождения* пары $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ равенством

$$\operatorname{nul}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \dim(\mathbf{M} \cap \mathbf{N}). \tag{4.1}$$

Далее, $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ — подпространство (не обязательно замкнутое); определим *дефект* пары $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ следующим образом[1]:

$$\operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \operatorname{codim}(\mathbf{M} + \mathbf{N}) = \dim \mathbf{Z}/(\mathbf{M} + \mathbf{N}.\ ^{1}) \tag{4.2}$$

*Индекс* пары $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ определяется равенством

$$\operatorname{ind}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \operatorname{nul}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) - \operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N}), \tag{4.3}$$

при этом предполагается, что одна из величин в правой части конечна.

Пара $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ называется *фредгольмовой* (*полуфредгольмовой*), если подпространство $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ замкнуто и величины $\operatorname{nul}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и $\operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ конечны (по крайней мере одна из этих величин конечна).

Введем, кроме того, величину

$$\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \inf_{u \in \mathbf{M},\ u \notin \mathbf{N}} \frac{\operatorname{dist}(u, \mathbf{N})}{\operatorname{dist}(u, \mathbf{M} \cap \mathbf{N})} \ (\leqslant 1). \tag{4.4}$$

Этой формулой величина $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ определена, когда $\mathbf{M} \not\subset \mathbf{N}$.

---

[1] Возможно другое определение $\operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$, в котором используется замыкание подпространств $\mathbf{M} + \mathbf{N}$. Оба определения совпадают для полуфредгольмовых операторов.

Если $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$, положим $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 1$. Очевидно, что $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 1$, если $\mathbf{M} \supset \mathbf{N}$. Функция $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ не симметрична относительно $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$. Положим

$$\hat{\gamma}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \min [\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}), \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M})] \tag{4.5}$$

и назовем $\hat{\gamma}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ *минимальным раствором* между $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$.

**Задача 4.1.** $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \leqslant \delta(\mathbf{M}, \mathbf{N})$, за исключением случая, когда $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$. [*Указание*: $\operatorname{dist}(u - z, \mathbf{N}) = \operatorname{dist}(u, \mathbf{N})$ для $u \in \mathbf{M}$, $z \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$.]

Хотя величины $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и $\gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M})$ не равны, они не независимы, а именно

$$\gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \geqslant \frac{\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})}{1 + \gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})}. \tag{4.6}$$

Докажем это.

**Теорема 4.2.** *Для замкнутости подпространства* $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) > 0$.

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = 0$. Если подпространство $\mathbf{M} + \mathbf{N} = \mathbf{Z}_0$ замкнуто, то $\mathbf{Z}_0$ — банахово пространство и каждый вектор $u \in \mathbf{Z}_0$ единственным образом представим в виде $v + w$, $v \in \mathbf{M}$, $w \in \mathbf{N}$. Таким образом, равенство $Pu = v$ определяет проектор $P$ пространства $\mathbf{Z}_0$ на $\mathbf{M}$ параллельно $\mathbf{N}$. Согласно замечанию к теореме III.5.20, оператор $P$ ограничен. Так как $\operatorname{dist}(v, \mathbf{M} \cap \mathbf{N}) = \|v\|$ (напомним, что $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = 0$), то $\|P\| = \sup\limits_{u \in \mathbf{Z}_0} \|Pu\| / \|u\| = \sup\limits_{v \in \mathbf{M}, w \in \mathbf{N}} \|v\| / \|v + w\| = \sup\limits_{v \in \mathbf{M}} \|v\| / \operatorname{dist}(v, \mathbf{N}) = 1/\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$. Поэтому

$$\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 1/\|P\| > 0. \tag{4.7}$$

Равенство (4.7) не имеет смысла, если $\mathbf{M} = 0$. В этом случае по определению $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 1 > 0$.

Обратно, пусть $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) > 0$; можем считать, что $\mathbf{M} \neq 0$. Пусть $v_n + w_n \to u$, $v_n \in \mathbf{M}$, $w_n \in \mathbf{N}$. Тогда $\|v_n - v_m\| \leqslant \operatorname{dist}(v_n - v_m, \mathbf{N})/\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \leqslant \|v_n - v_m + w_n - w_m\|/\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \to 0$. Поэтому существует $\lim v_n = v$ и $w_n = (v_n + w_n) - v_n \to u - v$. Так как $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ замкнуты, то $v \in \mathbf{M}$, $u - v \in \mathbf{N}$ и поэтому $u \in \mathbf{M} + \mathbf{N}$.

В рассматриваемом частном случае неравенство (4.6) следует из (4.7) и формулы $\gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}) = 1/\|1 - P\|$ ввиду того, что $\|1 - P\| \leqslant 1 + \|P\|$. Это доказательство теряет силу, если $\mathbf{M} = 0$ или $\mathbf{N} = 0$, однако в этих случаях неравенство (4.6) очевидно.

В общем случае, когда $\mathbf{L} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N} \neq 0$, рассмотрим фактор-пространство $\widetilde{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}/\mathbf{L}$. Так как $\mathbf{L}$ замкнуто, то $\widetilde{\mathbf{Z}}$ — банахово пространство (см. п. III.1.8). Пусть $\widetilde{\mathbf{M}}$ — множество всех $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathbf{Z}}$

таких, что $u \in \mathbf{M}$; отметим, что смежный класс $\tilde{u}$ целиком содержится в $\mathbf{M}$, если существует вектор $u$ из $\tilde{u}$, содержащийся в $\mathbf{M}$. Аналогично определим $\tilde{\mathbf{N}}$. Ясно, что $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{N}}$ суть замкнутые подпространства в $\tilde{\mathbf{Z}}$, причем $\tilde{\mathbf{M}} \cap \tilde{\mathbf{N}} = 0$. Далее, $\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{N}}$ замкнуто в $\tilde{\mathbf{Z}}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ замкнуто в $\mathbf{Z}$.

Таким образом, доказательство теоремы в общем случае сведется к рассмотренному частному случаю, если установить равенство

$$\gamma(\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{N}}) = \gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}). \tag{4.8}$$

Оно в свою очередь следует из тождества

$$\operatorname{dist}(\tilde{u}, \tilde{\mathbf{M}}) = \operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) \tag{4·9}$$

и аналогичных тождеств, в которых $\mathbf{M}$ заменяется на $\mathbf{N}$ и $\mathbf{L}$. Для доказательства (4.9) достаточно заметить, что $\operatorname{dist}(\tilde{u}, \tilde{\mathbf{M}}) = \inf_{\tilde{v} \in \tilde{\mathbf{M}}} \| \tilde{u} - \tilde{v} \| = \inf_{v \in \mathbf{M}} \inf_{z \in \mathbf{L}} \| u - v - z \| = \inf_{v \in \mathbf{M}} \| u - v \| = \operatorname{dist}(u, \mathbf{M})$. И снова отдельно следует рассмотреть особый случай $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$, однако равенство (4.8) в этом случае очевидно.

**Замечание 4.3.** Ввиду (4.8) равенство (4.7) сохраняется и в общем случае, если $\tilde{\mathbf{M}} \neq 0$, при этом в качестве $P$ нужно взять проектор в пространстве $\tilde{\mathbf{M}} + \tilde{\mathbf{N}}$ на $\tilde{\mathbf{M}}$ параллельно $\tilde{\mathbf{N}}$. Отметим, что неравенство (4.6) справедливо всегда, если $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ замкнуто. Оно справедливо и в том случае, когда $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ не замкнуто, так как тогда $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}) = 0$ по теореме 4.2.

**Лемма 4.4.** *Предположим, что подпространство* $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ *замкнуто. Тогда для любого вектора* $u \in \mathbf{Z}$

$$\operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) + \operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) \geqslant \frac{1}{2} \gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \operatorname{dist}(u, \mathbf{M} \cap \mathbf{N}). \tag{4.10}$$

Доказательство. Ввиду равенств (4.8) и (4.9) достаточно доказать неравенство (4.10), в котором $u$, $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ заменены на $\tilde{u}$, $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{N}}$ соответственно. Возвращаясь к прежним обозначениям, можем считать, что $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = 0$ (и поэтому $\operatorname{dist}(u, \mathbf{M} \cap \mathbf{N}) = \| u \|$).

Для любого $\varepsilon > 0$ существуют векторы $v \in \mathbf{M}$ и $w \in \mathbf{N}$ такие, что $\operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) > \| u - v \| - \varepsilon$, $\operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) > \| u - w \| - \varepsilon$. Если $\| v \| \leqslant \| u \|/2$, то $\operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) > \| u \| - \| v \| - \varepsilon \geqslant \| u \|/2 - \varepsilon$; если же $\| v \| \geqslant \| u \|/2$, то $\operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) + \operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) \geqslant \| u - v \| + \| u - w \| - 2\varepsilon \geqslant \| v - w \| - 2\varepsilon \geqslant \operatorname{dist}(v, \mathbf{N}) - 2\varepsilon \geqslant \| v \| \gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) - 2\varepsilon \geqslant \frac{1}{2} \| u \| \gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) - 2\varepsilon$.

В любом случае левая часть в (4.10) не меньше чем $\frac{1}{2}\|u\|\gamma(\mathrm{M}, \mathrm{N}) - 2\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ отсюда следует утверждение леммы.

**Задача 4.5.** $\mathrm{ind}(\mathrm{M}, 0) = -\mathrm{codim}\, \mathrm{M}$, $\mathrm{ind}(\mathrm{M}, \mathrm{Z}) = \dim \mathrm{M}$.

Задача 4.6. Пусть $\mathrm{M}' \supset \mathrm{M}$, причем $\dim \mathrm{M}'/\mathrm{M} = m < \infty$. Тогда $\mathrm{ind}(\mathrm{M}', \mathrm{N}) = \mathrm{ind}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) + m$.

**Задача 4.7.** Если $\mathrm{def}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) < \infty$, то подпространство $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ замкнуто. [*Указание*: существует $\mathrm{M}'$ такое, что $\mathrm{M}' \supset \mathrm{M}$, $\mathrm{M}' \cap \mathrm{N} = \mathrm{M} \cap \mathrm{N}$, $\mathrm{M}' + \mathrm{N} = \mathrm{Z}$, $\dim \mathrm{M}'/\mathrm{M} < \infty$. Тогда $0 < \gamma(\mathrm{M}', \mathrm{N}) \leqslant \gamma(\mathrm{M}, \mathrm{N})$.]

## 2. Двойственность

Для любого подмножества S в Z аннулятор $\mathrm{S}^{\perp}$ есть замкнутое подпространство в $\mathrm{Z}^*$, состоящее из векторов $f \in \mathrm{Z}^*$ таких, что $f \perp \mathrm{S}$. Для любой пары M, N замкнутых подпространств в Z верна формула

$$(\mathrm{M} + \mathrm{N})^{\perp} = \mathrm{M}^{\perp} \cap \mathrm{N}^{\perp}. \tag{4.11}$$

Двойственная формула $\mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp} = (\mathrm{M} \cap \mathrm{N})^{\perp}$ не всегда верна по той причине, что $(\mathrm{M} \cap \mathrm{N})^{\perp}$ всегда замкнуто, а подпространство $\mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp}$ не обязано быть замкнутым. Мы покажем, что $\mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp}$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ замкнуто.

**Теорема 4.8.** *Пусть* M *и* N — *замкнутые подпространства в* Z. *Замкнутость подпространства* M + N *в* Z *эквивалентна замкнутости подпространства* $\mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp}$ *в* $\mathrm{Z}^*$. *Если* M + N *замкнуто, то*

$$\mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp} = (\mathrm{M} \cap \mathrm{N})^{\perp}, \tag{4.12}$$

$$\mathrm{nul}(\mathrm{M}^{\perp}, \mathrm{N}^{\perp}) = \mathrm{def}(\mathrm{M}, \mathrm{N}), \ \mathrm{def}(\mathrm{M}^{\perp}, \mathrm{N}^{\perp}) = \mathrm{nul}(\mathrm{M}, \mathrm{N}), \tag{4.13}$$

$$\gamma(\mathrm{M}^{\perp}, \mathrm{N}^{\perp}) = \gamma(\mathrm{N}, \mathrm{M}), \quad \hat{\gamma}(\mathrm{M}^{\perp}, \mathrm{N}^{\perp}) = \hat{\gamma}(\mathrm{M}, \mathrm{N}). \tag{4.14}$$

[Формулы (4.14) верны и без предположения о замкнутости M + N.]

Доказательство этой теоремы будет проведено в несколько шагов.

Лемма 4.9. *Если подпространство* M + N *замкнуто, то верна формула* (4.12). *В частности, подпространство* $\mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp}$ *замкнуто.*

Доказательство. Ясно, что $\mathrm{M}^{\perp} + \mathrm{N}^{\perp} \subset (\mathrm{M} \cap \mathrm{N})^{\perp}$. Докажем противоположное включение.

Пусть $f \in (\mathbf{M} \cap \mathbf{N})^{\perp}$. Рассмотрим скалярное произведение $(f, u)$ для $u \in \mathbf{M} + \mathbf{N}$. Вектор $u$ имеет вид $v + w$, $v \in \mathbf{M}$, $w \in \mathbf{N}$; однако такое представление может быть не единственно. Если $u = v' + w'$ — другое такое разложение, то $v - v' = w' - w \in \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$ и поэтому $(f, v - v') = (f, w - w') = 0$. Таким образом, $(f, v) = (f, v')$ или, другими словами, скалярное произведение $(f, v)$ однозначно определяется вектором $u$. Функционал $g[u] = (f, v)$, определенный для $u \in \mathbf{M} + \mathbf{N}$, очевидно, полулинеен. Аналогично вводим функционал $h(u) = (f, w)$. Отметим, что

$$g[u] = 0 \quad \text{для} \quad u \in \mathbf{N} \quad \text{и} \quad h[u] = 0 \quad \text{для} \quad u \in \mathbf{M}. \tag{4.15}$$

Функционалы $g$ и $h$ ограничены. В самом деле, $|g[u]| = |(f, v)| \leqslant \|f\|\,\|v\|$, где $v$ можно заменить вектором $v - z$ для любого $z \in \mathbf{L} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N}$. Поэтому $|g[u]| \leqslant \|f\| \operatorname{dist}(v, \mathbf{L})$. Так как $\|u\| = \|v + w\| \geqslant \operatorname{dist}(v, \mathbf{N}) \geqslant \gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \operatorname{dist}(v, \mathbf{L})$, то $|g[u]| \leqslant \|f\|\,\|u\|/\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$. Другими словами, $g$ ограничен и

$$\|g\| \leqslant \|f\|/\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}). \tag{4.16}$$

По теореме Хана — Банаха $g$ можно продолжить с сохранением нормы до ограниченной полулинейной формы на $\mathbf{Z}$; это продолжение обозначим тем же символом $g$. Аналогично $h$ можно продолжить до элемента из $\mathbf{Z}^*$, обозначим его $h$. Из (4.15) следует, что

$$g \in \mathbf{N}^{\perp}, \quad h \in \mathbf{M}^{\perp}. \tag{4.17}$$

Так как $(f, u) = (f, v) + (f, w) = g[u] + h[u] = (g, u) + (h, u)$ для $u \in \mathbf{M} + \mathbf{N}$, то формы $f$ и $g + h$ совпадают на $\mathbf{M} + \mathbf{N}$. Таким образом, $f - g - h = k \in (\mathbf{M} + \mathbf{N})^{\perp} \subset \mathbf{M}^{\perp}$. Поэтому $h + k \in \mathbf{M}^{\perp}$ и $f = g + (h + k) \in \mathbf{M}^{\perp} + \mathbf{N}^{\perp}$.

**Лемма 4.10.** *Если* $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ *замкнуто, то* $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \leqslant \gamma(\mathbf{N}^{\perp}, \mathbf{M}^{\perp})$.

Доказательство. Для любого $g_0 \in \mathbf{N}^{\perp}$ и любого $h_0 \in \mathbf{M}^{\perp}$ положим $f = g_0 + h_0$. Тогда $f \in \mathbf{M}^{\perp} + \mathbf{N}^{\perp} = (\mathbf{M} \cap \mathbf{N})^{\perp}$ по лемме 4.9. Согласно доказательству леммы 4.9, вектор $f$ можно представить в виде $g + h$, $g \in \mathbf{N}^{\perp}$, $h \in \mathbf{M}^{\perp}$, так, что будет верна оценка (4.16). Но так как $g - g_0 = h_0 - h \in \mathbf{M}^{\perp} \cap \mathbf{N}^{\perp}$, то $\|g\| = \|g_0 + g - g_0\| \geqslant \operatorname{dist}(g_0, \mathbf{M}^{\perp} \cap \mathbf{N}^{\perp})$. Таким образом, из (4.16) следует, что $\operatorname{dist}(g_0, \mathbf{M}^{\perp} \cap \mathbf{N}^{\perp}) \leqslant \|g_0 + h_0\|/\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$. Так как последнее неравенство верно для любого $h_0 \in \mathbf{M}^{\perp}$, то $\operatorname{dist}(g_0, \mathbf{M}^{\perp} \cap \mathbf{N}^{\perp}) \leqslant \operatorname{dist}(g_0, \mathbf{M}^{\perp})/\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ для любого $g_0 \in \mathbf{N}^{\perp}$. Отсюда следует требуемое неравенство. (Особый случай, когда $\mathbf{M} \subset \mathbf{N}$, тривиален.)

Лемма 4.11. *Если* $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ *замкнуто, то* $\gamma(\mathbf{N}^{\perp}, \mathbf{M}^{\perp}) \leqslant \gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$.

Доказательство. Особый случай здесь также тривиален, и поэтому мы предположим, что $\mathbf{M} \not\subset \mathbf{N}$. Мы пишем для простоты $\gamma$ вместо $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и $\mathbf{L}$ вместо $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$.

Для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $v \in \mathbf{M}$ такой, что

$$0 < \operatorname{dist}(v, \mathbf{N}) < (\gamma+\varepsilon) \operatorname{dist}(v, \mathbf{L}). \qquad (4.18)$$

Далее, существует форма $f \in \mathbf{Z}^*$, для которой $f \in \mathbf{L}^{\perp}$ и $0 < (f, v) = \|f\| \operatorname{dist}(v, \mathbf{L})$ (см. теорему III.1.22). Так как по лемме 4.9 $\mathbf{L}^{\perp} = \mathbf{M}^{\perp} + \mathbf{N}^{\perp}$, то $f$ можно представить в виде $g+h$, $g \in \mathbf{M}^{\perp}$, $h \in \mathbf{N}^{\perp}$. Таким образом, $\|f\| \operatorname{dist}(v, \mathbf{L}) = (f, v) = (g+h, v) = (g, v) = (g, v-w) = (g-k, v-w) \leqslant \|g-k\| \, \|v-w\|$, где векторы $w \in \mathbf{N}$ и $k \in \mathbf{M}^{\perp} \cap \mathbf{N}^{\perp}$ произвольны. Отсюда следует, что $0 < \|f\| \operatorname{dist}(v, \mathbf{L}) \leqslant \operatorname{dist}(g, \mathbf{M}^{\perp} \cap \mathbf{N}^{\perp}) \cdot \operatorname{dist}(v, \mathbf{N})$. Учитывая неравенство $\operatorname{dist}(g, \mathbf{M}^{\perp}) \leqslant \|g+h\| = \|f\|$, получаем

$$\operatorname{dist}(g, \mathbf{M}^{\perp}) \operatorname{dist}(v, \mathbf{L}) \leqslant \operatorname{dist}(v, \mathbf{N}) \operatorname{dist}(g, \mathbf{M}^{\perp} \cap \mathbf{N}^{\perp}). \qquad (4.19)$$

Из (4.18) и (4.19) следует неравенство $\operatorname{dist}(g, \mathbf{M}^{\perp}) \leqslant (\gamma+\varepsilon) \operatorname{dist}(g, \mathbf{M}^{\perp} \cap \mathbf{N}^{\perp})$. Так как $g \in \mathbf{N}^{\perp}$, то $\gamma(\mathbf{N}^{\perp}, \mathbf{M}^{\perp}) \leqslant \gamma+\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon$ лемма доказана.

Лемма 4.12. *Если* $\mathbf{M}^{\perp}+\mathbf{N}^{\perp}$ *замкнуто, то* $\mathbf{M}+\mathbf{N}$ *замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{Z}_0$ — замыкание подпространства $\mathbf{M}+\mathbf{N}$. Обозначим через $\mathbf{B}_{\mathbf{M}}$ и $\mathbf{B}_{\mathbf{N}}$ единичные шары в $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ соответственно. Покажем сначала, что замыкание $\overline{\mathbf{S}}$ множества $\mathbf{S} = \mathbf{B}_{\mathbf{M}} + \mathbf{B}_{\mathbf{N}}$ содержит шар пространства $\mathbf{Z}_0$.

Предположим, что $u_0 \in \mathbf{Z}_0$ не принадлежит $\overline{\mathbf{S}}$. Так как $\overline{\mathbf{S}}$ — замкнутое выпуклое множество, то в $\mathbf{Z}_0$ существует гиперплоскость, отделяющая $u_0$ от $\overline{\mathbf{S}}$. Другими словами, существует форма $f_0 \in \mathbf{Z}_0^*$ такая, что [1]

$$\operatorname{Re}(f_0, v+w) < \operatorname{Re}(f_0, u_0) \qquad (4.20)$$

для всех $v \in \mathbf{B}_{\mathbf{M}}$, $w \in \mathbf{B}_{\mathbf{N}}$. Форму $f_0$ можно продолжить с сохранением нормы на все пространство $\mathbf{Z}$; такое продолжение обозначим также через $f_0$.

---

[1] Пусть $d = \operatorname{dist}(u_0, \mathbf{S}) > 0$ и $\mathbf{S}'$ — множество всех $u \in \mathbf{Z}_0$, таких, что $\operatorname{dist}(u, \mathbf{S}) < d/2$. $\mathbf{S}'$ — открытое выпуклое множество, не содержащее $u_0$. Таким образом, существование $f_0$ следует из теоремы Хана — Банаха (см. примечание на стр. 173).

Так как в (4.20) векторы $v$ и $w$ можно умножать на произвольные фазовые множители (комплексные числа абсолютной величины 1), то левую часть в (4.20) можно заменить на $|(f_0, v)| + |(f_0, w)|$. Согласно (2.17), $\sup\limits_{v \in B_M} |(f_0, v)| = \operatorname{dist}(f_0, M^{\perp})$. Поэтому

$$\operatorname{dist}(f_0, M^{\perp}) + \operatorname{dist}(f_0, N^{\perp}) \leqslant \operatorname{Re}(f_0, u_0) \leqslant \| u_0 \| \, \| f_0 \|. \tag{4.21}$$

По лемме 4.4 левая часть в (4.21) не меньше $\gamma' \operatorname{dist}(f_0, M^{\perp} \cap N^{\perp})$, где $\gamma' = \gamma(M^{\perp}, N^{\perp})/2 > 0$. Далее, $\operatorname{dist}(f_0, M^{\perp} \cap N^{\perp}) = \operatorname{dist}(f_0, (M + N)^{\perp}) = \operatorname{dist}(f_0, Z_0^{\perp}) = \| f_0 | Z_0 \| = \| f_0 \|$. Отсюда получаем, что $\| u_0 \| \geqslant \gamma'$.

Это означает, что любой вектор $u \in Z$ с нормой, меньшей $\gamma'$, принадлежит $\overline{S}$. Другими словами, $\overline{S}$ содержит шар в $Z_0$ радиуса $\gamma'$ с центром в нуле. С помощью рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы в доказательстве теоремы о замкнутом графике, можно показать, что само множество $S$ содержит шар пространства $Z_0$. Так как $M + N$ — подпространство, содержащее $S$, то $M + N$ совпадает с $Z_0$ и, следовательно, замкнуто.

Леммы 4.9—4.12 в совокупности доказывают теорему 4.8. Отметим, что соотношения (4.13) *немедленно вытекают из* (4.11) *и* (4.12) (см. лемму III.1.40).

**Следствие 4.13.** *Фредгольмовость* (*полуфредгольмовость*) *пары* $M$, $N$ *замкнутых подпространств эквивалентна фредгольмовости* (*полуфредгольмовости*) *пары* $M^{\perp}$, $N^{\perp}$. *Если пара* $M$, $N$ *полуфредгольмова, то*

$$\operatorname{ind}(M, N) = -\operatorname{ind}(M^{\perp}, N^{\perp}). \tag{4.22}$$

### 3. Регулярные пары замкнутых подпространств

Мы отмечали выше, что, вообще говоря, $\gamma(M, N) \neq \gamma(N, M)$. Назовем пару $M$, $N$ *регулярной*, если $\gamma(M, N) = \gamma(N, M)$.

Известно, что любая пара $M$, $N$ регулярна, если $Z$ — гильбертово пространство[1]. Другим примером регулярной пары является пара $X$, $Y$ в произведении $Z = X \times Y$. Здесь $X$ отождествляется с замкнутым подпространством в $Z$, состоящим из элементов вида $\{u, 0\}$, $u \in X$; аналогичное отождествление сделано для $Y$. Нетрудно видеть, что $\gamma(X, Y) = \gamma(Y, X) = 1$.

Отметим, что существуют и другие нетривиальные регулярные пары в пространстве $Z = X \times Y$. Существуют даже такие зам-

---

[1] Этот факт имеет место благодаря тождеству $\| 1 - P \| = \| P \|$, которое справедливо для любого косого проектора $P$, $0 \neq P \neq 1$, в гильбертовом пространстве; см. задачу I.6.31.

кнутые подпространства $\mathbf{N}$ в $\mathbf{Z}$, что пара $\{\mathbf{M}, \mathbf{N}\}$ регулярна для любого $\mathbf{M}$ в $\mathbf{Z}$. Такие замкнутые подпространства будем называть *отмеченными*.

**Теорема 4.14.** $\mathbf{X}$ *является отмеченным подпространством в* $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$.

Доказательство. Напомним, что норма в $\mathbf{Z}$ определяется равенством

$$\| \{x, y\} \|^2 = \| x \|^2 + \| y \|^2, \quad x \in \mathbf{X}, \quad y \in \mathbf{Y}. \tag{4.23}$$

Пусть $\mathbf{M}$ — замкнутое подпространство в $\mathbf{Z}$. Положим $\mathbf{L} = \mathbf{M} \cap \mathbf{X}$.

Сначала вычислим $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{X})$. Пусть $u = \{x, y\} \in \mathbf{M}$; тогда $\operatorname{dist}(u, \mathbf{X})^2 = \inf\limits_{x' \in \mathbf{X}} (\| x - x' \|^2 + \| y \|^2) = \| y \|^2$ и $\operatorname{dist}(u, \mathbf{L})^2 = \inf\limits_{x' \in \mathbf{L}} (\| x - x' \|^2 + \| y \|^2) = \| \tilde{x} \|^2 + \| y \|^2$, где $\tilde{x} \in \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}/\mathbf{L}$. Отсюда следует, что

$$\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{X}) = \inf_{\{x, y\} \in \mathbf{M}} \frac{\| y \|}{(\| \tilde{x} \|^2 + \| y \|^2)^{1/2}} = \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2)^{1/2}}, \tag{4.24}$$

где

$$\gamma = \inf_{\{x, y\} \in \mathbf{M}} \| y \| / \| \tilde{x} \|. \tag{4.25}$$

С другой стороны,

$$\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{M}) = \inf_{x \in \mathbf{X}} \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbf{M})}{\operatorname{dist}(x, \mathbf{L})} = \inf_{x \in \mathbf{X}} \frac{\inf\limits_{\{x', y'\} \in \mathbf{M}} (\| x - x' \|^2 + \| y' \|^2)^{1/2}}{\| \tilde{x} \|} =$$

$$= \inf_{\substack{\{x', y'\} \in \mathbf{M} \\ x'' \in \mathbf{X}}} \frac{(\| x'' \|^2 + \| y' \|^2)^{1/2}}{\| \tilde{x}' + \tilde{x}'' \|} = \inf_{\substack{\{x', y'\} \in \mathbf{M} \\ \tilde{x}'' \in \tilde{\mathbf{X}}}} \frac{(\| \tilde{x}'' \|^2 + \| y' \|^2)^{1/2}}{\| \tilde{x}' + \tilde{x}'' \|}.$$

Для заданного вектора $\{x', y'\} \in \mathbf{M}$ существует вектор $\tilde{x}'' \in \tilde{\mathbf{X}}$ произвольной нормы, для которого $\| \tilde{x}' + \tilde{x}'' \| = \| \tilde{x}' \| + \| \tilde{x}'' \|$. Отсюда, используя неравенство Шварца, получаем, что

$$\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{M}) = \inf_{\substack{\{x', y'\} \in \mathbf{M} \\ \tilde{x}'' \in \tilde{\mathbf{X}}}} \frac{(\| \tilde{x}'' \|^2 + \| y' \|^2)^{1/2}}{\| \tilde{x}' \| + \| \tilde{x}'' \|} =$$

$$= \inf_{\{x', y'\} \in \mathbf{M}} \left(1 + \frac{\| \tilde{x}' \|^2}{\| y' \|^2}\right)^{-1/2} = \gamma/(1 + \gamma^2)^{1/2}. \tag{4.26}$$

Из (4.24) и (4.26) заключаем, что $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{X}) = \gamma(\mathbf{X}, \mathbf{M})$. (Приведенные выше рассуждения теряют силу, если $\mathbf{M} \subset \mathbf{X}$ или $\mathbf{X} \subset \mathbf{M}$. Однако в этих случаях $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{X}) = \gamma(\mathbf{X}, \mathbf{M}) = 1$.)

## 4. Аппроксимативная степень вырождения и аппроксимативный дефект

Пусть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{N}$ — замкнутые подпространства в банаховом пространстве $\mathbf{Z}$. Определим *аппроксимативную степень вырождения* $\operatorname{nul}'(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ как верхнюю грань (фактически максимальный элемент, как будет показано ниже) множества $\mathrm{D}$ натуральных чисел $m$ (допускается бесконечное значение $m$) таких, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $m$-мерное замкнутое подпространство $\mathbf{M}_\varepsilon \subset \mathbf{M}$, удовлетворяющее условию $\delta(\mathbf{M}_\varepsilon, \mathbf{N}) < \varepsilon$.

**Задача 4.15.** $\operatorname{nul}'(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \geqslant \operatorname{nul}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$.

Определим *аппроксимативный дефект* пары $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ равенством

$$\operatorname{def}'(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \operatorname{nul}'(\mathbf{M}^\perp, \mathbf{N}^\perp). \tag{4.27}$$

Отметим, что величины $\operatorname{nul}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и $\operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ были определены в чисто алгебраических терминах. С другой стороны, определение $\operatorname{nul}'(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и $\operatorname{def}'(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ существенно зависит от топологии основного пространства $\mathbf{Z}$.

Как отмечалось выше, $\operatorname{nul}'(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ является максимальным элементом множества $\mathrm{D}$. Это очевидно, если число $\operatorname{nul}'(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ конечно. В том случае, когда $\operatorname{nul}'(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \infty$, это замечание вытекает из следующей леммы.

**Лемма 4.16.** *Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого конечного $m$ существует $m$-мерное подпространство $\mathbf{M}_\varepsilon \subset \mathbf{M}$, для которого $\delta(\mathbf{M}_\varepsilon, \mathbf{N}) < \varepsilon$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечномерное подпространство $\mathbf{M}_\varepsilon \subset \mathbf{M}$, для которого $\delta(\mathbf{M}_\varepsilon, \mathbf{N}) < \varepsilon$.*

Доказательство. Для любого замкнутого подпространства $\mathbf{M}' \subset \mathbf{M}$ конечной коразмерности в $\mathbf{M}$ существует подпространство $\mathbf{M}_\varepsilon \subset \mathbf{M}$ такое, что $\dim \mathbf{M}_\varepsilon > \dim \mathbf{M}/\mathbf{M}'$ и $\delta(\mathbf{M}_\varepsilon, \mathbf{N}) < \varepsilon$. Тогда $\dim(\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}_\varepsilon) > 0$ (см. задачу III.1.42), и поэтому существует вектор $u' \neq 0$ в $\mathbf{M}'$ такой, что $\operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) < \varepsilon \| u \|$. Таким образом, лемма 4.16 вытекает из следующей леммы.

**Лемма 4.17.** *Предположим, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого замкнутого подпространства $\mathbf{M}' \subset \mathbf{M}$ конечной коразмерности в $\mathbf{M}$ существует ненулевой вектор $u \in \mathbf{M}'$ такой, что $\operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) < \varepsilon \| u \|$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечномерное подпространство $\mathbf{M}_\varepsilon \subset \mathbf{M}$ такое, что $\delta(\mathbf{M}_\varepsilon, \mathbf{N}) < \varepsilon$. В частности, $\operatorname{nul}'(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \infty$.*

Доказательство. Мы построим две последовательности $u_n$ и $f_n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{gathered} u_n \in \mathbf{M}, \quad f_n \in \mathbf{Z}^*, \quad \| u_n \| = 1, \quad \| f_n \| = 1, \\ (u_n, f_n) = 1, \quad (u_n, f_k) = 0 \quad \text{для} \quad k < n, \\ \operatorname{dist}(u_n, \mathbf{N}) \leqslant 3^{-n}\varepsilon. \end{gathered} \tag{4.28}$$

Предполагая, что элементы $u_k$, $f_k$, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, уже построены, укажем способ построения $u_n$ и $f_n$. Пусть $\mathbf{M}'$ — множество всех $u \in \mathbf{M}$ таких, что $(u, f_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n - 1$. Так как $\mathbf{M}'$ — замкнутое подпространство, причем $\dim \mathbf{M}/\mathbf{M}' \leqslant n - 1$, то существует нормированный вектор $u_n \in \mathbf{M}'$, для которого $\operatorname{dist}(u_n, \mathbf{N}) < 3^{-n}\varepsilon$. Далее, существует форма $f_n \in \mathbf{Z}^*$ такая, что $\| f_n \| = 1$ и $(u_n, f_n) = 1$ (см. следствие III.1.24).

Из (4.28) следует, что векторы $u_n$ линейно независимы и поэтому их линейная оболочка $\mathbf{M}'_\varepsilon$ бесконечномерна. Каждый вектор $u \in \mathbf{M}'_\varepsilon$ имеет вид

$$u = \xi_1 u_1 + \ldots + \xi_n u_n. \tag{4.29}$$

Покажем, что коэффициенты $\xi_k$ удовлетворяют неравенствам

$$| \xi_k | \leqslant 2^{k-1} \| u \|, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{4.30}$$

Согласно (4.29) и (4.28), имеем

$$(u, f_j) = \xi_1 (u_1, f_j) + \ldots + \xi_{j-1} (u_{j-1}, f_j) + \xi_j. \tag{4.31}$$

Предполагая, что неравенства (4.30) доказаны для $k < j$, из (4.31) получаем

$$\begin{gathered} | \xi_j | \leqslant | (u, f_j) | + | \xi_1 | \, | (u_1, f_j) | + \ldots + | \xi_{j-1} | \, | (u_{j-1}, f_j) | \leqslant \\ \leqslant \| u \| + \| u \| + \ldots + 2^{j-2} \| u \| = 2^{j-1} \| u \|; \end{gathered}$$

так как $| \xi_1 | = | (u, f_1) | \leqslant \| u \|$, то неравенства (4.30) доказаны.

Из (4.28) — (4.30) получаем

$$\begin{gathered} \operatorname{dist}(u, \mathbf{N}) \leqslant | \xi_1 | \operatorname{dist}(u_1, \mathbf{N}) + \ldots + | \xi_n | \operatorname{dist}(u_n, \mathbf{N}) \leqslant \\ \leqslant (3^{-1} + 2 \cdot 3^{-2} + \ldots + 2^{n-1} \cdot 3^{-n}) \, \varepsilon \, \| u \| \leqslant \varepsilon \, \| u \|. \end{gathered}$$

То же самое неравенство верно для всех векторов $u$ из замыкания $\mathbf{M}_\varepsilon \subset \mathbf{M}$ подпространства $\mathbf{M}'_\varepsilon$. Поэтому $\delta(\mathbf{M}_\varepsilon, \mathbf{N}) < \varepsilon$.

**Теорема 4.18.** *Если подпространство* $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ *замкнуто, то*

$$\operatorname{nul}'(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \operatorname{nul}(\mathbf{M}, \mathbf{N}), \quad \operatorname{def}'(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N}). \tag{4.32}$$

Доказательство. По теореме 4.8 замкнутость подпространства $\mathbf{M}^\perp + \mathbf{N}^\perp$ эквивалентна замкнутости $\mathbf{M} + \mathbf{N}$. Ввиду равенств (4.13) и (4.27) достаточно доказать первую из формул (4.32).

Предположим, что существует $M_\varepsilon \subset M$ такое, что $\dim M_\varepsilon > \operatorname{nul}(M, N) = \dim(M \cap N)$ и $\delta(M_\varepsilon, N) < \varepsilon$. Тогда существует нормированный вектор $u \in M_\varepsilon$, для которого $\operatorname{dist}(u, M \cap N) = 1$ (см. лемму 2.3). Далее, $\operatorname{dist}(u, N) \geqslant \gamma \operatorname{dist}(u, M \cap N) = \gamma$, где $\gamma = \gamma(M, N) > 0$ по теореме 4.2. С другой стороны, $\operatorname{dist}(u, N) \leqslant \|u\| \delta(M_\varepsilon, N) < \varepsilon$. Поэтому $\varepsilon$ не может быть меньше $\gamma$. Отсюда следует, что $\operatorname{nul}'(M, N) \leqslant \operatorname{nul}(M, N)$. Так как справедливо и обратное неравенство (см. задачу 4.15), то теорема доказана.

**Теорема 4.19.** *Если подпространство* $M + N$ *не замкнуто, то*

$$\operatorname{nul}'(M, N) = \operatorname{def}'(M, N) = \infty. \qquad (4.33)$$

Доказательство. Достаточно доказать равенство $\operatorname{nul}'(M, N) = \infty$. Для любого $M' \subset M$ конечной коразмерности в $M$ многообразие $M' + N$ не замкнуто (в противном случае $M + N$ было бы замкнуто по лемме III.1.9). Таким образом, $\gamma(M', N) = 0$ по теореме 4.2. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $u \in M'$ такой, что $\operatorname{dist}(u, N) \leqslant \varepsilon \operatorname{dist}(u, M' \cap N) \leqslant \varepsilon \|u\|$. Применение леммы 4.17 завершает доказательство.

**Задача 4.20.** $\operatorname{nul}'(M, N)$ и $\operatorname{def}'(M, N)$ симметричны по $M, N$.

**Задача 4.21.** $\operatorname{def}'(M, N) \geqslant \operatorname{def}(M, N)$.

**Задача 4.22.** $\operatorname{nul}'(M, N) = \operatorname{def}'(M^\perp, N^\perp)$.

В заключение этого пункта приведем простой критерий того, что $\operatorname{nul}'(M, N) = \infty$.

**Теорема 4.23.** *Равенство* $\operatorname{nul}'(M, N) = \infty$ *имеет место тогда и только тогда, когда существует последовательность нормированных векторов* $u_n \in M$, *не содержащая сходящейся подпоследовательности и такая, что* $\operatorname{dist}(u_n, N) \to 0$.

Доказательство. Предположим, что $\operatorname{nul}'(M, N) = \infty$. Построим последовательность $u_n \in M$ такую, что $\|u_n\| = 1$, $\operatorname{dist}(u_n, N) \leqslant 1/n$ и $\|u_n - u_m\| \geqslant 1$ при $n \neq m$. Допустим, что векторы $u_1, \ldots, u_n$ уже построены; обозначим через $M_n$ их линейную оболочку. Так как $\operatorname{nul}'(M, N) = \infty$, то существует $(n+1)$-мерное подпространство $M' \subset M$ такое, что $\delta(M', N) \leqslant \frac{1}{n+1}$. Согласно неравенству $\dim M' > \dim M_n$, существует вектор $u \in M'$, для которого $\operatorname{dist}(u, M_n) = \|u\| = 1$ (см. лемму 2.3). Этот вектор можно взять в качестве $u_{n+1}$.

Обратно, предположим, что $\operatorname{nul}'(M, N) < \infty$. Покажем, что любая последовательность нормированных векторов $u_n \in M$, для которой $\operatorname{dist}(u_n, N) \to 0$, содержит сходящуюся подпоследовательность. Так как подпространство $M + N$ замкнуто (согласно теореме 4.19), то $\gamma(M, N) = \gamma > 0$ по теореме 4.2 и поэтому

$\mathrm{nul}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N}) < \infty$ (см. теорему 4.18). Таким образом, $\mathrm{dist}\,(u_n,\ \mathrm{M} \cap \mathrm{N}) \leqslant \gamma^{-1}\,\mathrm{dist}\,(u_n,\ \mathrm{N}) \to 0$. Это означает, что существует последовательность $z_n \in \mathrm{M} \cap \mathrm{N}$ такая, что $u_n - z_n \to 0$. Так как последовательность $\{z_n\}$ ограничена и $\dim\,(\mathrm{M} \cap \mathrm{N}) = \mathrm{nul}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N}) < \infty$, то $\{z_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. То же самое верно и для $\{u_n\}$, так как $u_n - z_n \to 0$.

## 5. Теоремы устойчивости

Покажем теперь, что величины $\mathrm{nul}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$, $\mathrm{def}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$, $\mathrm{ind}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$ и свойство подпространства $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ быть замкнутым устойчивы при малых возмущениях подпространства $\mathrm{M}$.

**Теорема 4.24.** *Пусть* $\mathrm{M},\ \mathrm{N},\ \mathrm{M}'$ *— замкнутые подпространства в* $\mathrm{Z}$, *и пусть* $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ *замкнуто. Тогда из* $\delta\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{M}) < \gamma\,(\mathrm{N},\ \mathrm{M})$ *следует, что* $\mathrm{nul}'\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N}) \leqslant \mathrm{nul}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$, *а из* $\delta\,(\mathrm{M},\ \mathrm{M}') < \gamma\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$ *следует неравенство* $\mathrm{def}'\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N}) \leqslant \mathrm{def}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$. (*Напомним, что* $\delta\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$ *и* $\gamma\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$, *вообще говоря, не симметричны по* $\mathrm{M}$ *и* $\mathrm{N}$.)

*Доказательство.* Допустим, что $\delta\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{M}) < \gamma\,(\mathrm{N},\ \mathrm{M})$. Докажем, что величина $\delta\,(\mathrm{N}_\varepsilon,\ \mathrm{M}')$ не может быть сколь угодно малой на множестве замкнутых подпространств $\mathrm{N}_\varepsilon \subset \mathrm{N}$, размерность которых больше чем $\mathrm{nul}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$. Отсюда следует неравенство $\mathrm{nul}'\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N}) = \mathrm{nul}'\,(\mathrm{N},\ \mathrm{M}') \leqslant \mathrm{nul}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$ (см. задачу 4.20).

Из неравенства $\dim \mathrm{N}_\varepsilon > \dim\,(\mathrm{M} \cap \mathrm{N})$ следует, что существует вектор $u \in \mathrm{N}_\varepsilon \subset \mathrm{N}$, для которого $\mathrm{dist}\,(u,\ \mathrm{M} \cap \mathrm{N}) = \|u\| = 1$ (лемма 2.3). Поэтому $\mathrm{dist}\,(u,\ \mathrm{M}) \geqslant \gamma\,(\mathrm{N},\ \mathrm{M})$, согласно формуле (4.4). Заменяя $\mathrm{N}$ на $\mathrm{M}$ и $\mathrm{M}$ на $\mathrm{M}'$ в неравенстве (2.14), получаем $\mathrm{dist}\,(u,\ \mathrm{M}') \geqslant [1 + \delta\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{M})]^{-1}\,[\gamma\,(\mathrm{N},\ \mathrm{M}) - \delta\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{M})]$. Отсюда следует, что $\mathrm{dist}\,(u,\ \mathrm{M}')$ и, следовательно, $\delta\,(\mathrm{N}_\varepsilon,\ \mathrm{M}')$ не могут быть сколь угодно малыми.

Второе утверждение теоремы вытекает из первого, если вместо $\mathrm{M},\ \mathrm{N},\ \mathrm{M}'$ рассматривать подпространства $\mathrm{M}^\perp,\ \mathrm{N}^\perp,\ \mathrm{M}'^\perp$; при этом следует воспользоваться формулами (2.19), (4.13), (4.14) и (4.27).

**Следствие 4.25.** *Пусть* $\mathrm{M},\ \mathrm{N}$ *— фредгольмова* (*полуфредгольмова*) *пара. То же самое можно сказать о паре* $\mathrm{M}',\ \mathrm{N}$, *если* $\hat{\delta}\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{M}) < \hat{\gamma}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$. *Кроме того,* $\mathrm{nul}\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N}) \leqslant \mathrm{nul}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$, $\mathrm{def}\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N}) \leqslant \mathrm{def}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$.

*Доказательство.* Что касается последнего утверждения, то оно следует из теоремы 4.24, так как выполнены оба условия этой теоремы.

Если $\mathrm{M},\ \mathrm{N}$ — полуфредгольмова пара, то по крайней мере одна из величин $\mathrm{nul}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$ и $\mathrm{def}\,(\mathrm{M},\ \mathrm{N})$ конечна. Поэтому либо $\mathrm{nul}'\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N}) < \infty$, либо $\mathrm{def}'\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N}) < \infty$. Тогда $\mathrm{M}' + \mathrm{N}$ замкнуто по теореме 4.19 и по крайней мере одно из чисел $\mathrm{nul}\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N}) = \mathrm{nul}'\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N})$ и $\mathrm{def}\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N}) = \mathrm{def}'\,(\mathrm{M}',\ \mathrm{N})$ конечно (см. теорему 4.18). Таким образом, $\mathbf{M}'$, $\mathbf{N}$ — полуфредгольмова пара. Если $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$ — фредгольмова пара, то $\operatorname{nul}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и $\operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ конечны и поэтому $\operatorname{nul}(\mathbf{M}', \mathbf{N})$ и $\operatorname{def}(\mathbf{M}', \mathbf{N})$ конечны.

**Замечание 4.26.** В теореме 4.24 подпространство $\mathbf{M}' + \mathbf{N}$ не обязано быть замкнутым, если $\operatorname{nul}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = \infty$. Можно привести пример пары $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, для которой существует подпространство $\mathbf{M}'$, сколь угодно близкое к $\mathbf{M}$ и такое, что $\mathbf{M}' + \mathbf{N}$ не замкнуто.

**Замечание 4.27.** Вследствие 4.25 $\hat{\gamma}(\mathbf{M}', \mathbf{N}) > 0$, так как $\mathbf{M}'$, $\mathbf{N}$ — полуфредгольмова пара. В общем случае трудно дать оценку $\hat{\gamma}(\mathbf{M}', \mathbf{N})$ снизу через $\hat{\gamma}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ и $\hat{\delta}(\mathbf{M}', \mathbf{M})$. Другими словами, величина $\hat{\gamma}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ может быть разрывной при малых изменениях $\mathbf{M}$. Причиной этого служит разрывное поведение подпространства $\mathbf{M} \cap \mathbf{N}$, фигурирующего в определении $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ (см. (4.4)). Однако величина $\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})$ полунепрерывна снизу, если $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = 0$ или $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = \mathbf{Z}$. В этих случаях предыдущие результаты можно уточнить.

**Лемма 4.28.** *Предположим, что* $\mathbf{M} + \mathbf{N}$ *замкнуто и* $\operatorname{nul}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 0$. *Если* $\hat{\delta}(\mathbf{M}', \mathbf{M}) < \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M})/[2 + \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M})]$, *то* $\mathbf{M}' + \mathbf{N}$ *замкнуто*, $\operatorname{nul}(\mathbf{M}', \mathbf{N}) = 0$ *и* $\operatorname{def}(\mathbf{M}', \mathbf{N}) = \operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$.

Доказательство. В силу неравенства (4.6) $\hat{\delta}(\mathbf{M}', \mathbf{M}) \leqslant \leqslant \min[\gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N}), \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M})] = \hat{\gamma}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$. Поэтому $\mathbf{M}' + \mathbf{N}$ замкнуто, $\operatorname{nul}(\mathbf{M}', \mathbf{N}) = 0$ и $\operatorname{def}(\mathbf{M}', \mathbf{N}) \leqslant \operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$, согласно следствию 4.25. Остается показать, что $\operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) \leqslant \operatorname{def}(\mathbf{M}', \mathbf{N})$.

Для этого достаточно доказать неравенство $\delta(\mathbf{M}', \mathbf{M}) < < \gamma(\mathbf{M}', \mathbf{N})$, так как тогда мы можем применить вторую часть теоремы 4.24, поменяв местами $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}'$.

Пусть $u \in \mathbf{N}$. Так как $\mathbf{M} \cap \mathbf{N} = 0$, то $\operatorname{dist}(u, \mathbf{M}) \geqslant \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \times \times \operatorname{dist}(u, \mathbf{M} \cap \mathbf{N}) = \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}) \| u \|$. Из (2.14) следует (при замене $\mathbf{N}$ на $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}$ на $\mathbf{M}'$), что $\operatorname{dist}(u, \mathbf{M}') \geqslant [1 + \delta(\mathbf{M}', \mathbf{M})]^{-1} \times \times [\gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}) - \delta(\mathbf{M}', \mathbf{M})] \| u \|$. Так как последнее неравенство выполняется для любого $u \in \mathbf{N}$, то

$$\gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}') \geqslant \frac{\gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}) - \delta(\mathbf{M}', \mathbf{M})}{1 + \delta(\mathbf{M}', \mathbf{M})}. \tag{4.34}$$

Применение неравенства (4.6) приводит к требуемому результату:

$$\gamma(\mathbf{M}', \mathbf{N}) \geqslant \frac{\gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}')}{1 + \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}')} = \frac{\gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M}) - \delta(\mathbf{M}', \mathbf{M})}{1 + \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M})} > \delta(\mathbf{M}', \mathbf{M}), \tag{4.35}$$

так как $\delta(\mathbf{M}', \mathbf{M}) < \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M})/[2 + \gamma(\mathbf{N}, \mathbf{M})]$ по предположению.

**Лемма 4.29.** *Пусть* $\mathbf{M} + \mathbf{N} = \mathbf{Z}$ (*т. е.* $\operatorname{def}(\mathbf{M}, \mathbf{N}) = 0$). *Если* $\delta(\mathbf{M}', \mathbf{M}) < \gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})/[2 + \gamma(\mathbf{M}, \mathbf{N})]$, *то* $\mathbf{M}' + \mathbf{N} = \mathbf{Z}$ (*т. е.* $\operatorname{def}(\mathbf{M}', \mathbf{N}) = 0$) *и* $\operatorname{nul}(\mathbf{M}', \mathbf{N}) = \operatorname{nul}(\mathbf{M}, \mathbf{N})$.

Доказательство. Достаточно применить лемму 4.28 к $\mathrm{M}^{\perp}$, $\mathrm{N}^{\perp}$, $\mathrm{M}'^{\perp}$ вместо $\mathrm{M}$, $\mathrm{N}$, $\mathrm{M}'$ и при этом воспользоваться теоремами 4.8 и 2.9.

**Теорема 4.30.** *Пусть* $\mathrm{M}$, $\mathrm{N}$ — *фредгольмова* (*полуфредгольмова*) *пара. Тогда существует* $\delta > 0$ *такое, что* $\mathrm{M}'$, $\mathrm{N}$ — *фредгольмова* (*полуфредгольмова*) *пара и* $\operatorname{ind}(\mathrm{M}', \mathrm{N}) = \operatorname{ind}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, *если* $\hat{\delta}(\mathrm{M}', \mathrm{M}) < \delta$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай полуфредгольмовой пары, так как из равенства $\operatorname{ind}(\mathrm{M}', \mathrm{N}) = \operatorname{ind}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ следует, что пара $\mathrm{M}'$, $\mathrm{N}$ фредгольмова тогда и только тогда, когда $\mathrm{M}$, $\mathrm{N}$ фредгольмова. Более того, можно считать, что $\operatorname{def}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) < \infty$; случай $\operatorname{nul}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) < \infty$ можно свести к предыдущему, переходя к аннуляторам.

Если $\operatorname{def}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = m < \infty$, то можно найти подпространство $\mathrm{N}_0 \supset \mathrm{N}$ такое, что $\dim \mathrm{N}_0/\mathrm{N} = m$, $\mathrm{N}_0 \cap \mathrm{M} = \mathrm{N} \cap \mathrm{M}$ и $\mathrm{M} + \mathrm{N}_0 = \mathrm{Z}$. Согласно лемме 4.29, существует $\delta > 0$ такое, что $\operatorname{def}(\mathrm{M}', \mathrm{N}_0) = 0$ и $\operatorname{nul}(\mathrm{M}', \mathrm{N}_0) = \operatorname{nul}(\mathrm{M}, \mathrm{N}_0) = \operatorname{nul}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$, если $\hat{\delta}(\mathrm{M}', \mathrm{M}) < \delta$. Поэтому $\operatorname{ind}(\mathrm{M}', \mathrm{N}_0) = \operatorname{nul}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$ и из утверждения задачи 4.6 следует, что $\operatorname{ind}(\mathrm{M}', \mathrm{N}) = \operatorname{ind}(\mathrm{M}', \mathrm{N}_0) - m = \operatorname{nul}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) - \operatorname{def}(\mathrm{M}, \mathrm{N}) = \operatorname{ind}(\mathrm{M}, \mathrm{N})$.

**Замечание 4.31.** Теорема 4.30 показывает, что индекс полуфредгольмовой пары $\{\mathrm{M}, \mathrm{N}\}$ устойчив при малых возмущениях $\mathrm{M}$. Это свойство устойчивости имеет место и при одновременном возмущении $\mathrm{M}$ и $\mathrm{N}$, однако доказательство становится более сложным.

Нелегко дать простую оценку константы $\delta$, фигурирующей в теореме 4.30. Неизвестно [1], в частности, постоянен ли индекс $\operatorname{ind}(\mathrm{M}', \mathrm{N})$ для всех $\mathrm{M}'$, рассматриваемых в следствии 4.25, за исключением того случая, когда $\mathrm{Z}$ — гильбертово пространство [2].

## § 5. Теоремы устойчивости для полуфредгольмовых операторов

### 1. Степень вырождения, дефект и индекс оператора

В этом параграфе мы определим степень вырождения, дефект, индекс и т. д. для линейного оператора $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ и докажем ряд теорем устойчивости для этих характеристик [3]. Результаты

---

[1] Ср. Нойбауэр [1].

[2] Ср. Т. Като [9].

[3] По тематике этого параграфа см. Аткинсон [1], Браудер [1], [2], [3], Кордес и Лабрус [1], Дьёдонне [1], Гохберг и Крейн [1], Каашук [1], Кэньел и Шехтер [1], Т. Като [12], Крейн и Красносельский [1], Секефальви-Надь [3], Нойбауэр [1], [2], Юд [1].

этого параграфа в основном следуют из соответствующих результатов о парах замкнутых подпространств, полученных в предыдущем параграфе [1]). Эти результаты будут дополнены некоторыми специальными теоремами, относящимися только к операторам.

Так же как и в конечномерном случае (п. I.3.1), *степень вырождения* nul $T$ оператора $T$ из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$ определяется как размерность подпространства $\mathrm{N}(T)$. Так как $\mathrm{N}(T)$ — это *геометрическое* собственное подпространство оператора $T$, соответствующее нулевому собственному значению, то nul $T$ — геометрическая кратность нуля.

*Дефект* def $T$ оператора $T$ — это коразмерность $\mathrm{R}(T)$ в $\mathrm{Y}$: $\operatorname{def}(T) = \dim \mathrm{Y}/(\mathrm{R}(T)$ [2]). Величины nul $T$ и def $T$ принимают целые неотрицательные значения. В том случае, если nul $T < \infty$ или def $T < \infty$, *индекс* ind $T$ оператора $T$ определяется равенством [3])

$$\operatorname{ind} T = \operatorname{nul} T - \operatorname{def} T. \tag{5.1}$$

Понятия степени вырождения и дефекта зависят от пространств $\mathrm{X}$ и $\mathrm{Y}$. В самом деле, оператор $T$ из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$ можно рассматривать как оператор из $\mathrm{X}$ в пространство $\mathrm{Y}'$, содержащее $\mathrm{Y}$ как подпространство; при этом def $T$ увеличивается на $\dim \mathrm{Y}'/\mathrm{Y}$. С другой стороны, $T$ можно рассматривать как оператор из $\mathrm{X}'$ в $\mathrm{Y}$, где $\mathrm{X}' = \mathrm{X} \oplus \mathrm{X}_0$, причем $Tu = 0$ для $u \in \mathrm{X}_0$; при этом nul $T$ увеличивается на $\dim \mathrm{X}_0$. Если пространство определения и пространство значений фиксированы, то nul $T$ и def $T$ корректно определены.

Итак, фиксируем банаховы пространства $\mathrm{X}$ и $\mathrm{Y}$. Теорема (2.21) об устойчивости ограниченной обратимости утверждает, что свойство nul $T$ = def $T = 0$ оператора $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ устойчиво при малых возмущениях. При некоторых дополнительных предположениях мы докажем здесь аналогичную теорему устойчивости для других значений def $T$ и nul $T$.

Одним из дополнительных предположений будет замкнутость подпространства $\mathrm{R}(T)$. Это условие автоматически выполнено, если def $T = 0$. Оператор $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ называется *фредгольмовым* [4]), если подпространство $\mathrm{R}(T)$ замкнуто и nul $T$ и def $T$

---

[1]) Метод доказательства теорем об операторах с помощью соответствующих результатов о парах подпространств является, по-видимому, новым. Он обладает тем преимуществом, что позволяет в полной мере использовать теоремы двойственности для подпространств. Применение этого метода требует ограничиться плотно определенными операторами, для которых существуют сопряженные.

[2]) Иногда def $T$ определяют как $\dim \mathrm{Y}/\overline{\mathrm{R}(T)}$, где $\overline{\mathrm{R}(T)}$ — замыкание подпространства $\mathrm{R}(T)$. Оба определения совпадают для полуфредгольмовых операторов.

[3]) Некоторые авторы индексом называют выражение def $T$ — nul $T$.

[4]) Отметим, что термин «фредгольмовый» иногда употребляется в совершенно другом смысле; см., например, Гротендик [[1]].

конечны. Оператор $T$ называется *полуфредгольмовым*, если $\mathbf{R}(T)$ замкнуто и $\operatorname{nul} T < \infty$ (или $\operatorname{def} T < \infty$). Индекс (5.1) корректно определен для полуфредгольмовых операторов. Основной результат этого параграфа состоит в том, что свойство оператора быть фредгольмовым [полуфредгольмовым] устойчиво при малых возмущениях.

Для доказательства нам потребуются некоторые сведения о замкнутых операторах с замкнутой областью значений.

Нуль-пространство $\mathbf{N} = \mathbf{N}(T)$ замкнутого линейного оператора $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ является замкнутым подпространством в $\mathbf{X}$. Поэтому факторпространство $\mathbf{X} = \mathbf{X}/\mathbf{N}$ — это банахово пространство относительно нормы (см. п. III.1.8)

$$\|\tilde{u}\| = \inf_{u\in\tilde{u}} \|u\| = \inf_{z\in\mathbf{N}} \|u-z\| = \operatorname{dist}(u, \mathbf{N}), \quad u\in\tilde{u}. \tag{5.2}$$

Если $u \in \mathbf{D}(T)$, то любой вектор $u' \in \tilde{u}$ принадлежит $\mathbf{D}(T)$, так как $u' - u \in \mathbf{N} \subset \mathbf{D}(T)$. Более того, $Tu = Tu'$, так как $\mathbf{N}$ — нуль-пространство оператора $T$. Таким образом, можно определить оператор $T$ из $\tilde{\mathbf{X}}$ в $\mathbf{Y}$ по формуле

$$\tilde{T}\tilde{u} = Tu. \tag{5.3}$$

Область определения $\mathbf{D}(\tilde{T})$ состоит из векторов $\tilde{u}\in\tilde{\mathbf{X}}$ таких, что каждый вектор $u\in\tilde{u}$ принадлежит $\mathbf{D}(T)$.

Очевидно, что $\tilde{T}$ линеен. Кроме того, он замкнут. В самом деле, пусть $\tilde{u}_n$ есть $\tilde{T}$-сходящаяся последовательность в $\tilde{\mathbf{X}}$: $\tilde{u}_n \in \mathbf{D}(\tilde{T})$, $\tilde{u}_n \to \tilde{u} \in \mathbf{X}$, $\tilde{T}\tilde{u}_n \to v \in \mathbf{Y}$. Пусть $u_n \in \tilde{u}_n$, $u \in \tilde{u}$; из сходимости $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ следует, что $\operatorname{dist}(u_n - u, \mathbf{N}) \to 0$. Поэтому существуют векторы $z_n \in \mathbf{N}$, для которых $u_n - u - z_n \to 0$. Так как $T(u_n - z_n) = Tu_n = \tilde{T}\tilde{u}_n \to v$, то последовательность $u_n - z_n$ $T$-сходится к $u$. Из замкнутости $T$ следует, что $u \in \mathbf{D}(T)$ и $Tu = v$, поэтому $\tilde{u} \in \mathbf{D}(\tilde{T})$ и $\tilde{T}\tilde{u} = Tu = v$. Замкнутость $\tilde{T}$ доказана.

Оператор $\tilde{T}$ обратим. В самом деле, из $\tilde{T}\tilde{u} = 0$ следует, что $Tu = 0$ и поэтому $u \in \mathbf{N}$ и $\tilde{u} = \mathbf{N}$; но подпространство $\mathbf{N}$ служит нулевым элементом пространства $\tilde{\mathbf{X}}$.

Определим число $\gamma(T)$ равенством $\gamma(T) = 1/\|\tilde{T}^{-1}\|$; при этом подразумевается, что $\gamma(T) = 0$, если $\tilde{T}^{-1}$ неограничен, и $\gamma(T) = \infty$, если $\tilde{T}^{-1} = 0$. Из определения (5.3) следует, что $\gamma(T)$ — это наибольшее число $\gamma$ такое, что

$$\|Tu\| \geqslant \gamma \|\tilde{u}\| = \gamma \operatorname{dist}(u, \mathbf{N}), \quad u \in \mathbf{D}(T). \tag{5.4}$$

Отметим, что $\gamma(T) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{D}(\tilde{T})$ и $\mathbf{R}(\tilde{T})$ нульмерны; последнее эквивалентно включению $T \subset 0$

(т. е. $Tu=0$ для всех $u \in \mathbf{D}(T)$). Для того чтобы (5.4) имело смысл и в этом случае, следует считать, что $\infty \times 0 = 0$.

Назовем $\gamma(T)$ *приведенным минимальным модулем* оператора $T$. Если $\mathbf{N}(T) = 0$, то $\gamma(T)$ совпадает с *минимальным модулем*[1] оператора $T$, который определяется как $\inf \| Tu \| / \| u \|$, $0 \neq u \in \mathbf{D}(T)$.

**Задача 5.1.** $\gamma(\widetilde{T}) = \gamma(T)$.

**Теорема 5.2.** *Область значений оператора* $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *замкнута тогда и только тогда, когда* $\gamma(T) > 0$.

Доказательство. По определению неравенство $\gamma(T) > 0$ эквивалентно ограниченности оператора $\widetilde{T}^{-1}$, а это в свою очередь эквивалентно тому, что подпространство $\mathbf{D}(\widetilde{T}^{-1}) = \mathbf{R}(\widetilde{T}) = \mathbf{R}(T)$ замкнуто (см. п. III.5.4).

**Пример 5.3**[2]. Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{l}^p$ и $\{x_j\}$ — канонический базис в $\mathbf{X}$. Рассмотрим оператор сдвига $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ такой, что $Tx_1 = 0$, $Tx_2 = x_1$, $Tx_3 = x_2, \ldots$ (см. пример III.3.16). Нетрудно проверить, что $\mathbf{N}(T)$ — одномерное подпространство, порожденное вектором $x_1$, и что $\mathbf{R}(T) = \mathbf{X}$. Таким образом, $T$ — фредгольмов оператор, причем $\operatorname{nul} T = 1$, $\operatorname{def} T = 0$ и $\operatorname{ind} T = 1$. Далее, для любого $u = (\xi_j)$ имеем $\|\widetilde{u}\| = \operatorname{dist}(u, \mathbf{N}(T)) = \left(\sum_{j=2}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{1/p} = \| Tu \|$. Поэтому $\| Tu \| / \| \widetilde{u} \| = 1$ для каждого ненулевого вектора $u \in \mathbf{X}$ и, следовательно, $\gamma(T) = 1$.

**Пример 5.4.** Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{l}^p$, $\{x_j\}$ — канонический базис в $\mathbf{X}$ и $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ таков, что $Tx_1 = x_2$, $Tx_2 = x_3, \ldots$. Этот оператор сопряжен к оператору $T$ из примера 5.3, действующему в пространстве $\mathbf{l}^q$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{N}(T) = 0$ и $\mathbf{R}(T)$ — подпространство, порожденное векторами $x_2, x_3, \ldots$. Поэтому $T$ — фредгольмов оператор, при этом $\operatorname{nul} T = 0$, $\operatorname{def} T = 1$, $\operatorname{ind} T = -1$. В рассматриваемом случае $\widetilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}$, $\widetilde{T} = T$, $\| Tu \| = \| u \|$ и, следовательно, $\gamma(T) = 1$.

**Пример 5.5.** Возьмем в качестве $\mathbf{X}$ пространство $\mathbf{l}^p$, состоящее из двусторонних последовательностей. Пусть $\{x_j\}$ — канонический базис в $\mathbf{X}$ и $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ таков, что $Tx_0 = 0$, $Tx_j = x_{j-1}$, $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$; $\mathbf{N}(T)$ — одномерное подпространство, порожденное вектором $x_0$, а $\mathbf{R}(T)$ подпространство, порожденное векторами $x_j$, $j \neq 1$. Оператор $T$ — фредгольмов, причем $\operatorname{nul} T = 1$, $\operatorname{def} T = 1$, $\operatorname{ind} T = 0$. Рассуждения из примера 5.3 показывают, что $\gamma(T) = 1$.

**Задача 5.6.** Если $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, то $\zeta \in \mathbf{P}(T)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{nul}(T - \zeta) = \operatorname{def}(T - \zeta) = 0$.

## 2. Общая теорема устойчивости

Степень вырождения, дефект и замкнутость области значений можно удобно охарактеризовать как свойства графика оператора. Такая переформулировка важна для теории возмущений, так

---

[1] См. Гиндлер и Тейлор [1].

[2] $\gamma(T)$ для дифференциальных операторов $T$ подробно изучается в книге Голдберга [1].

как «малое» изменение замкнутого оператора означает малое изменение его графика.

Рассмотрим пространство $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$. Удобно отождествить вектор $u \in \mathbf{X}$ с $\{u, 0\} \in \mathbf{Z}$ и $v \in \mathbf{Y}$ с $\{0, v\} \in \mathbf{Z}$. При этом $\mathbf{X}$ отождествляется с подпространством $\mathbf{X} \times 0$ в $\mathbf{Z}$, а $\mathbf{Y}$ — с $0 \times \mathbf{Y}$. Таким образом, $\mathbf{Z}$ приобретает структуру прямой суммы $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$. Ясно, что каждое подмножество в $\mathbf{X}$ или $\mathbf{Y}$ отождествляется при этом с некоторым подмножеством в $\mathbf{Z}$.

Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. График $\mathbf{G}(T)$ оператора $T$ — это замкнутое линейное многообразие в $\mathbf{Z}$, состоящее из всех элементов вида $\{u, Tu\}$, где $u \in \mathbf{D}(T)$. Вектор $u \in \mathbf{X}$ принадлежит $\mathbf{N}(T)$ тогда и только тогда, когда $\{u, 0\} \in \mathbf{G}(T)$. Согласно введенному выше отождествлению, это означает, что

$$\mathbf{N}(T) = \mathbf{G}(T) \cap \mathbf{X}. \tag{5.5}$$

Далее, имеем

$$\mathbf{R}(T) + \mathbf{X} = \mathbf{G}(T) + \mathbf{X}. \tag{5.6}$$

В самом деле, $\mathbf{R}(T) + \mathbf{X}$ — это множество всех пар $\{v, Tu\}$, где $u \in \mathbf{D}(T)$ и $v \in \mathbf{X}$, в то время как $\mathbf{G}(T) + \mathbf{X}$ есть множество пар вида $\{u + v, Tu\}$, где $u \in \mathbf{D}(T)$, $v \in \mathbf{X}$. Совпадение очевидно.

Из (5.5) и (5.6) следует, что (см. (4.1) и (4.2))

$$\begin{aligned} \operatorname{nul} T &= \dim (\mathbf{G}(T) \cap \mathbf{X}) = \operatorname{nul} (\mathbf{G}(T), \mathbf{X}), \\ \operatorname{def} T &= \operatorname{codim} (\mathbf{G}(T) + \mathbf{X}) = \operatorname{def} (\mathbf{G}(T), \mathbf{X}). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Итак, степень вырождения и дефект оператора $T$ совпадают с соответствующими характеристиками пары $\mathbf{G}(T)$, $\mathbf{X}$ замкнутых подпространств в $\mathbf{Z}$.

Далее, нетрудно видеть, что подпространство $\mathbf{R}(T)$ замкнуто в $\mathbf{Y}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{X} + \mathbf{R}(T)$ замкнуто в $\mathbf{Z}$. Согласно (5.6), *замкнутость* $\mathbf{R}(T)$ *эквивалентна замкнутости подпространства* $\mathbf{G}(T) + \mathbf{X}$.

Приведенный минимальный модуль $\gamma(T)$ оператора $T$ довольно просто связан с минимальным раствором $\gamma(\mathbf{G}(T), \mathbf{X})$ между графиком $\mathbf{G}(T)$ и подпространством $\mathbf{X}$. Согласно (5.4), $\gamma(T)$ равен $\inf\limits_{u \in \mathbf{D}(T)} \|Tu\| / \|\tilde{u}\| = \inf\limits_{\{u, v\} \in \mathbf{G}(T)} \|v\| / \|\tilde{u}\|$, где $\tilde{u} \in \tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{X}/\mathbf{N}(T)$. Ввиду формулы (5.5) эта величина равна $\gamma(\mathbf{X}, \mathbf{G}(T))$ (см. (4.25)). Поэтому, учитывая формулы (4.24) и (4.26), имеем

$$\gamma(\mathbf{G}(T), \mathbf{X}) = \gamma(\mathbf{X}, \mathbf{G}(T)) = \frac{\gamma(T)}{[1 + \gamma(T)^2]^{1/2}}. \tag{5.8}$$

Мы видим, таким образом, что все характеристики замкнутого оператора $T$ можно выразить в терминах пары $\mathbf{G}(T)$, $\mathbf{X}$ замкнутых подпространств в $\mathbf{Z}$.

Для того чтобы сделать это соответствие полным, мы определим *аппроксимативную степень вырождения* и *аппроксимативный дефект* оператора $T$ равенствами

$$\operatorname{nul}' T = \operatorname{nul}' (\mathrm{G}(T), \mathrm{X}), \quad \operatorname{def}' T = \operatorname{def}' (\mathrm{G}(T), \mathrm{X}). \tag{5.9}$$

Следующие результаты являются прямыми следствиями соответствующих результатов о парах замкнутых подпространств, полученных в предыдущем пункте.

**Задача 5.7.** Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$. Из $\operatorname{def} T < \infty$ следует, что $\gamma(T) > 0$ (см. задачу 4.7).

**Задача 5.8.** Если $T_1$ — продолжение порядка $m$ оператора $T$, то $\operatorname{ind} T_1 = \operatorname{ind} T + m$ (см. задачу 4.6).

**Теорема 5.9.** *Число* $\operatorname{nul}' T$ *является наибольшим числом* $m \leqslant \infty$, *обладающим следующим свойством: для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $m$*-мерное замкнутое подпространство* $N_\varepsilon \subset \mathrm{D}(T)$ *такое, что* $\| Tu \| \leqslant \varepsilon \| u \|$ *для каждого* $u \in \mathrm{N}_\varepsilon$ *(см. определение в п.* 4.4).

**Теорема 5.10.** *Для любого* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *справедливы неравенства* $\operatorname{nul}' T \geqslant \operatorname{nul} T$, $\operatorname{def}' T \geqslant \operatorname{def} T$. *Равенства здесь имеют место, если* $\mathrm{R}(T)$ *замкнуто. Если же* $\mathrm{R}(T)$ *не замкнуто, то* $\operatorname{nul}' T = \operatorname{def}' T = \infty$ *(см. задачу* 4.15, *теоремы* 4.18 *и* 4.19).

**Теорема 5.11** [1]. *Равенство* $\operatorname{nul}' T = \infty$ *выполняется тогда и только тогда, когда существует последовательность нормированных векторов* $u_n \in \mathrm{D}(T)$, *не содержащая сходящуюся подпоследовательность и такая, что* $Tu_n \to 0$ *(см. теорему* 4.23).

**Задача 5.12.** $\operatorname{nul}' (\alpha T) = \operatorname{nul}' T$, $\operatorname{def}' (\alpha T) = \operatorname{def}' T$, если $\alpha \neq 0$. [*Указание*: применить теорему 5.10.]

Предположим теперь, что $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ плотно определен и, следовательно, сопряженный оператор $T^*$ существует и принадлежит $\mathscr{C}(\mathrm{Y}^*, \mathrm{X}^*)$. Нам будет удобнее рассматривать обратный график $\mathrm{G}'(T^*)$ оператора $T^*$ вместо $\mathrm{G}(T^*)$; $\mathrm{G}'(T^*)$ — это замкнутое подпространство в $\mathrm{X}^* \times \mathrm{Y}^* = \mathrm{Z}^*$, состоящее из элементов вида $\{T^*g, g\}$, где $g$ пробегает $\mathrm{D}(T^*) \subset \mathrm{Y}^*$. Как было показано в п. III.5.5, справедливо соотношение

$$\mathrm{G}'(-T^*) = \mathrm{G}(T)^{\perp}. \tag{5.10}$$

Так как $\mathrm{G}'(T^*)$ — это образ графика $\mathrm{G}(T^*)$ при отображении $\{g, f\} \to \{f, g\}$ пространства $\mathrm{Y}^* \times \mathrm{X}^*$ на $\mathrm{X}^* \times \mathrm{Y}^*$, то существует очевидное соответствие между свойствами $\mathrm{G}(T^*)$ и $\mathrm{G}'(T^*)$.

---

[1] Эта теорема принадлежит Вольфу [4].

Таким образом, в соответствии с (5.7) — (5.9) имеем

$$\mathbf{N}(T^*) = \mathbf{N}(-T^*) = \mathbf{G}'(-T^*) \cap \mathbf{Y}^* = \mathbf{G}(T)^{\perp} \cap \mathbf{X}^{\perp}, \tag{5.11}$$

$$\mathbf{R}(T^*) + \mathbf{Y}^* = \mathbf{R}(-T^*) + \mathbf{Y}^* = \mathbf{G}'(-T^*) + \mathbf{Y}^* = \mathbf{G}(T)^{\perp} + \mathbf{X}^{\perp}, \tag{5.12}$$

$$\begin{aligned} &\operatorname{nul} T^* = \dim(\mathbf{G}(T)^{\perp} \cap \mathbf{X}^{\perp}) = \operatorname{nul}(\mathbf{G}(T)^{\perp}, \mathbf{X}^{\perp}), \\ &\operatorname{def} T^* = \operatorname{codim}(\mathbf{G}(T)^{\perp} + \mathbf{X}^{\perp}) = \operatorname{def}(\mathbf{G}(T)^{\perp}, \mathbf{X}^{\perp}), \end{aligned} \tag{5.13}$$

$$\eta(\mathbf{G}(T)^{\perp}, \mathbf{X}^{\perp}) = \gamma(\mathbf{X}^{\perp}, \mathbf{G}(T)^{\perp}) = \frac{\gamma(T^*)}{[1+\gamma(T^*)^2]^{1/2}}, \tag{5.14}$$

$$\operatorname{nul}' T^* = \operatorname{nul}'(\mathbf{G}(T)^{\perp}, \mathbf{X}^{\perp}), \quad \operatorname{def}' T^* = \operatorname{def}'(\mathbf{G}(T)^{\perp}, \mathbf{X}^{\perp}). \tag{5.15}$$

Здесь $\mathbf{G}(T)^{\perp}$ и $\mathbf{X}^{\perp} = \mathbf{Y}^*$ рассматриваются как подпространства в $\mathbf{Z}^* = \mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^*$ (в связи с (5.15) отметим задачу 5.12).

Из теоремы 4.8 вытекает

**Теорема 5.13** [1]. *Предположим, что $T^*$ существует. Подпространство $\mathbf{R}(T)$ замкнуто тогда и только тогда, когда $\mathbf{R}(T^*)$ замкнуто. В этом случае имеем* [2]

$$\mathbf{R}(T)^{\perp} = \mathbf{N}(T^*), \quad \mathbf{N}(T)^{\perp} = \mathbf{R}(T^*), \tag{5.16}$$

$$\operatorname{nul} T^* = \operatorname{def} T, \quad \operatorname{def} T^* = \operatorname{nul} T, \tag{5.17}$$

$$\gamma(T^*) = \gamma(T). \tag{5.18}$$

*Последнее равенство выполняется и без предположения о замкнутости* $\mathbf{R}(T)$.

**Следствие 5.14.** *Предположим, что оператор $T^*$ существует. Оператор $T$ фредгольмов (полуфредгольмов) тогда и только тогда, когда $T^*$ фредгольмов (полуфредгольмов). В этом случае*

$$\operatorname{ind} T^* = -\operatorname{ind} T. \tag{5.19}$$

**Задача 5.15.** $\operatorname{nul}' T^* = \operatorname{def}' T$, $\operatorname{def}' T^* = \operatorname{nul}' T$.

---

[1] Эта теорема доказана в книге Банаха ⟦1⟧ для ограниченных $T$. Для неограниченных операторов она доказана различными авторами; см. Браудер [1], [3], Джойчи [1], Т. Като [12], Рота [1]. В связи с формулами (5.16) плотно определенный оператор $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ с замкнутой областью значений называется также *нормально разрешимым*.

[2] Здесь $\mathbf{N}(T)$, $\mathbf{R}(T)$, $\mathbf{N}(T^*)$, $\mathbf{R}(T^*)$ рассматриваются как подмножества в $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Y}^*$, $\mathbf{X}^*$ соответственно. Для доказательства (5.16), например, заметим, что, согласно (4.11), $(\mathbf{R}(T) + \mathbf{X})^{\perp} = (\mathbf{G}(T) + \mathbf{X})^{\perp} = \mathbf{G}(T)^{\perp} \cap \mathbf{X}^{\perp} = \mathbf{G}(-T^*) \cap \mathbf{Y}^* = \mathbf{N}(T^*)$; все подпространства в этой цепочке равенств рассматриваются как подпространства в $\mathbf{Z}^* = \mathbf{X}^* \times \mathbf{Y}^*$. Отсюда следует, что $\mathbf{R}(T)^{\perp} = \mathbf{N}(T^*)$, причем обе части этого равенства рассматриваются как подпространства в $\mathbf{Y}^*$. Аналогично второе из соотношений (5.16) следует из формулы (4.12), примененной к паре $\mathbf{G}(T)$, $\mathbf{X}$.

Теоремы устойчивости для замкнутых подпространств, доказанные в п. 4, немедленно приводят к соответствующим теоремам устойчивости для операторов (см. теоремы 4.24, 4.30 и следствие 4.25).

**Теорема 5.16.** *Предположим, что* $T$, $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *и* $\mathbf{R}(T)$ *замкнуто* (*т. е.* $\gamma(T) = \gamma > 0$). *Тогда из неравенства* $\delta(S, T) < \gamma(1+\gamma^2)^{-1/2}$ *следует, что* $\operatorname{nul}' S \leqslant \operatorname{nul} T$, *а из неравенства* $\delta(T, S) < \gamma(1+\gamma^2)^{-1/2}$ *следует, что* $\operatorname{def}' S \leqslant \operatorname{def} T$.

**Теорема 5.17** [1]. *Предположим, что* $T$, $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *и* $T$ — *фредгольмов* (*полуфредгольмов*) *оператор. Если* $\delta(S, T) < \gamma(1+\gamma^2)^{-1/2}$, *где* $\gamma = \gamma(T)$, *то* $S$ — *фредгольмов* (*полуфредгольмов*) *и* $\operatorname{nul} S \leqslant \operatorname{nul} T$, $\operatorname{def} S \leqslant \operatorname{def} T$. *Кроме того, существует* $\delta > 0$ [2] *такое, что* $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$ [3], *если* $\hat{\delta}(S, T) < \delta$.

Предыдущие результаты получены при рассмотрении пары подпространств $\mathbf{G}(T)$ и $\mathbf{X}$ в $\mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ и пары соответствующих аннуляторов. Интересно выяснить, какие результаты получаются при аналогичном рассмотрении пары $\mathbf{G}(T)$, $\mathbf{Y}$. Оказывается, что получающиеся при этом результаты относятся к ограниченным операторам, а не к фредгольмовым. Мы сформулируем некоторые из этих результатов в виде задач с указаниями для решения.

**Задача 5.18.** Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$; $T$ ограничен тогда и только тогда, когда $\gamma(\mathbf{G}(T), \mathbf{Y}) > 0$ $(\gamma(\mathbf{Y}, \mathbf{G}(T)) > 0)$. Если $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, то $\gamma(\mathbf{G}(T), \mathbf{Y}) = \gamma(\mathbf{Y}, \mathbf{G}(T)) = (1 + \|T\|^2)^{-1/2}$ (ср. с теоремой 4.14).

**Задача 5.19.** Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Тогда $\operatorname{nul}(\mathbf{G}(T), \mathbf{Y}) = 0$. $T$ ограничен тогда и только тогда, когда подпространство $\mathbf{G}(T) + \mathbf{Y}$ замкнуто. $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{def}(\mathbf{G}(T), \mathbf{Y}) = 0$. [*Указание*: $\mathbf{G}(T) + \mathbf{Y} = \mathbf{D}(T) + \mathbf{Y}$.]

---

[1] Эта теорема устойчивости для $\operatorname{nul} T$, $\operatorname{def} T$ и $\operatorname{ind} T$ в приведенной здесь форме, по-видимому, является новой. Для $T$, $S \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и малом значении $\| S - T \|$ теорема такого типа известна давно (Аткинсон [1], Дьёдонне [1], Крейн и Красносельский [1]). Секефальви-Надь [3] обобщил этот результат на неограниченные операторы и относительно ограниченные возмущения. Гохберг и Крейн [1] и Т. Като [12] получили аналогичные результаты с некоторыми качественными уточнениями. Кордес и Лабрус [1] рассматривали общие возмущения, как в теореме 5.17, однако предполагали, что $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ — гильбертово пространство. Недавно Нойбауэр [1] доказал теорему, аналогичную теореме 5.17.

[2] Если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ — гильбертовы пространства, то можно положить $\delta = \gamma(1+\gamma^2)^{-1/2}$. В общем случае трудно дать простую оценку для $\delta$ (см. по этому поводу Нойбауэр [1]).

[3] Эта теорема устойчивости для индекса важна во многих отношениях. В частности, это один из наиболее мощных методов для доказательства существования решений функциональных уравнений. В качестве примера такого применения теоремы 5.17 рассмотрим лемму X.5.14. В этой лемме построены семейства операторов $W(\varkappa)$ и $Z(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$, голоморфно зависящие от $\varkappa$ и такие, что $Z(\varkappa) W(\varkappa) = 1$, $W(0) = Z(0) = 1$. Применение теоремы устойчивости показывает, что $W(\varkappa)$ отображает $\mathbf{X}$ на $\mathbf{X}$ [т. е. уравнение $W(\varkappa) u = v$ имеет решение для любого $v \in \mathbf{X}$].

**Задача 5.20.** Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ плотно определен. Ограниченность $T$ эквивалентна ограниченности $T^*$ [1]. [*Указание*: применить утверждение предыдущей задачи к оператору $T^*$.]

**Задача 5.21.** Пусть $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Если $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $\delta(T, S) < (1+\| T \|^2)^{-1/2}$, то $S \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и справедливо неравенство (2.25), в котором $\delta(S, T)$ нужно заменить на $\delta(T, S)$ [2]. [*Указание*: см. теорему 4.24 и задачу 5.19.]

## 3. Другие теоремы устойчивости

Теорему 5.17 можно назвать *общей теоремой устойчивости*, так как единственное предположение состоит в том, что величина $\hat{\delta}(S, T)$ мала; при этом не налагаются никакие ограничения на взаимное расположение областей определения операторов $S$ и $T$. Если же такие предположения сделать, то можно получить несколько более сильный результат.

**Теорема 5.22.** *Предположим, что оператор* $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ *полуфредгольмов (т. е.* $\gamma = \gamma(T) > 0$*). Пусть* $A$ *есть* $T$*-ограниченный оператор из* $\mathbf{X}$ *в* $\mathbf{Y}$*, причем константы* $a$, $b$ *в* (1.1) *удовлетворяют неравенству*

$$a < (1 - b)\gamma. \tag{5.20}$$

*Тогда оператор* $S = T + A$ *принадлежит* $\mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, $S$ *полуфредгольмов и*

$$\operatorname{nul} S \leqslant \operatorname{nul} T, \quad \operatorname{def} S \leqslant \operatorname{def} T, \quad \operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T. \tag{5.21}$$

Доказательство. Из условия (5.20) следует, что $b < 1$ и поэтому $S \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, согласно теореме 1.1. Покажем сначала, что операторы $T$ и $A$ можно считать ограниченными.

Зафиксировав $\varepsilon > 0$, введем в $\mathbf{D}(T)$ новую норму

$$||| u ||| = (a + \varepsilon) \| u \| + (b + \varepsilon) \| Tu \| \geqslant \varepsilon \| u \|. \tag{5.22}$$

---

[1] Это нетривиальный результат. Близкие к нему вопросы привлекли внимание ряда математиков; см. Браун [1], Нойбауэр [1], Голдберг [1]. Существует тесная связь между этим предложением, теоремой о замкнутой области значений (теорема 5.13) и теоремой 4.8. Мы здесь вывели первые два предложения из последнего. Браун [1] вывел второе из первого. Браудер вывел теорему 4.8 из теоремы 5.13 (устное сообщение).

[2] Это дает частичное усиление теоремы 2.13. Для доказательства неравенства (2.25), в котором $\delta(S, T)$ заменено на $\delta(T, S)$, заметим, что для каждого вектора $v \in \mathbf{X}$ существует вектор $u \in \mathbf{X}$, удовлетворяющий неравенству (2.22), где $\delta'$ — любое число, для которого $\delta(T, S) < \delta' < (1 + \| T \|^2)^{-1/2}$ (см. доказательство леммы 2.12). Так же, как в доказательстве леммы 2.11, $\| Au \| \leqslant \delta' (1 + \| T \|^2)^{1/2}$. Поэтому $\| Av \| \leqslant \| Au \| + \| A \| \| u - v \| < \delta' (1 + \| T \|^2)^{1/2} + \| A \| \delta'$, так как $\| u - v \| < \delta'$ в силу (2.22). Так как $\| v \|^2 (1 + \| T \|^2) \geqslant 1$, согласно (2.24), то $\| A \| \leqslant \delta' (1 + \| T \|^2) + \|A \| \delta' (1 + \| T \|^2)^{1/2}$, или $\| A \| \leqslant \delta' (1 + \| T \|^2) [1 - \delta' (1 + \| T \|^2)]^{1/2}$. Устремляя $\delta'$ к $\delta(T, S)$, получаем требуемый результат.

Относительно этой нормы $\mathbf{D}(T)$ становится банаховым пространством, которое мы обозначим $\hat{\mathbf{X}}$ (см. замечание 1.4). Можно рассматривать операторы $T$ и $A$ (точнее, сужение $A$ на $\mathbf{D}(T)$) как операторы из $\hat{\mathbf{X}}$ в $\mathbf{Y}$; эти операторы обозначим через $\hat{T}$ и $\hat{A}$ соответственно (см. замечание 1.5). В силу (1.1) и (5.22) операторы $\hat{T}$, $\hat{A} \in \mathscr{B}(\hat{\mathbf{X}}, \mathbf{Y})$ и

$$\|\hat{T}\| \leqslant (b+\varepsilon)^{-1}, \quad \|\hat{A}\| \leqslant 1. \tag{5.23}$$

Так как $\mathbf{R}(\hat{T}) = \mathbf{R}(T)$, то $\hat{T}$ имеет замкнутую область значений. Очевидно, что

$$\begin{gathered}\operatorname{nul} \hat{T} = \operatorname{nul} T, \quad \operatorname{def} \hat{T} = \operatorname{def} T, \quad \operatorname{nul} \hat{S} = \operatorname{nul} S, \\ \operatorname{def} \hat{S} = \operatorname{def} S, \quad \mathbf{R}(\hat{S}) = \mathbf{R}(S), \quad \text{где} \quad \hat{S} = \hat{T} + \hat{A}.\end{gathered} \tag{5.24}$$

Поэтому оператор $\hat{T}$ полуфредгольмов и достаточно показать, что $\hat{S}$ полуфредгольмов и что соотношения (5.21) справедливы для $\hat{S}$ и $\hat{T}$.

Выразим $\gamma(\hat{T})$ через $\gamma = \gamma(T)$. По определению $\gamma(\hat{T}) = \inf \|\hat{T}u\| / |||\widetilde{u}||| = \inf \|Tu\| / |||\widetilde{u}|||$, где $\widetilde{u} \in \widetilde{\mathbf{X}}/\mathbf{N} = \mathbf{N}(\hat{T}) = \mathbf{N}(T)$ (подпространство $\mathbf{N}$ замкнуто в $\mathbf{X}$ и $\hat{\mathbf{X}}$). Так как $Tz = 0$, то

$$|||\widetilde{u}||| = \inf_{z \in \mathbf{N}} |||u - z||| = \inf_{z \in \mathbf{N}} [(a+\varepsilon)\|u - z\| + (b+\varepsilon)\|T(u-z)\|] = $$
$$= (a+\varepsilon)\|\widetilde{u}\| + (b+\varepsilon)\|Tu\|. \tag{5.25}$$

Поэтому

$$\gamma(\hat{T}) = \inf_{u \in \mathbf{D}(T)} \frac{\|Tu\|}{(a+\varepsilon)\|\widetilde{u}\| + (b+\varepsilon)\|Tu\|} = \frac{\gamma}{(a+\varepsilon)+(b+\varepsilon)\gamma}. \tag{5.26}$$

Из (5.20) и (5.26) вытекает, что $\gamma(\hat{T}) > 1$ при достаточно малом $\varepsilon$. Так как $\|\hat{A}\| \leqslant 1$ в силу (5.23), то $\|\hat{A}\| < \gamma(\hat{T})$. Заменяя операторы $T$, $A$, $S$ на $\hat{T}$, $\hat{A}$, $\hat{S}$ соответственно, мы видим, что достаточно доказать теорему в том частном случае, когда $T, A, S \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ и $\|A\| < \gamma(T) = \gamma$.

Однако в этом случае теорема вытекает немедленно из общей теоремы устойчивости. В самом деле, пусть $\alpha > 0$ таково, что $\|A\| < \gamma/(1 + \alpha^2\gamma^2)^{1/2}$. Тогда $\|\alpha A\| = \alpha \|A\| < \gamma(\alpha T)/(1 + \gamma(\alpha T)^2)^{1/2}$, так как $\alpha\gamma(T) = \gamma(\alpha T)$. С другой стороны, $\hat{\delta}(\alpha S, \alpha T) < \|\alpha A\|$, согласно (2.27), и мы видим, что предположения теоремы 5.17 выполнены для пары $\alpha S$, $\alpha T$. Поэтому $\alpha S$ и, следовательно, $S$ — полуфредгольмовы операторы и $\operatorname{nul} S = \operatorname{nul} \alpha S \leqslant \operatorname{nul} \alpha T = \operatorname{nul} T$; аналогичное неравенство справедливо для $\operatorname{def} S$.

Остается показать, что $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$. Из теоремы 5.17 следует, что это так, если оператор $A$ достаточно мал по норме. В противном случае рассмотрим непрерывное семейство $T(\varkappa) = T + \varkappa A$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$. Так как $\|\varkappa A\| \leqslant \|A\| < \gamma$, то $T(\varkappa)$ полуфредгольмов для каждого $\varkappa$. Из теоремы 5.17 следует, что $\operatorname{ind} T(\varkappa)$ непрерывно зависит от $\varkappa$ и поэтому постоянен на отрезке $[0, 1]$, т. е. $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$.

**Замечание 5.23.** Пусть $T$ и $A$ — операторы в конечномерном пространстве $X$. В этом случае $\operatorname{ind}(T + A) = 0$ и поэтому третье равенство в (5.21) выполняется всегда (см. (I.3.2), (I.3.3)). Предположим, что $\operatorname{nul} T = \operatorname{def} T > 0$ и $A = -\zeta$. Тогда $\operatorname{nul}(T - \zeta) = \operatorname{def}(T - \zeta) = 0$ для достаточно малых $|\zeta| \neq 0$, так как собственные значения оператора $T$ изолированы. Итак, первые два неравенства в (5.21), вообще говоря, не сводятся к равенствам.

**Пример 5.24.** Рассмотрим оператор $T$ из примера 5.3 и положим $A = -\zeta$. Вычислим $\operatorname{nul}(T + A) = \operatorname{nul}(T - \zeta)$. Пусть $u = (\xi_k) \in \mathbf{N}(T - \zeta)$. Тогда $\xi_{k+1} = \zeta\xi_k$, и поэтому $\xi_k = \zeta^{k-1}\xi_1$. Если $|\zeta| < 1$, то $(\zeta^{k-1}\xi_1) \in \mathbf{X}$; если же $|\zeta| \geqslant 1$, то $(\zeta^{k-1}\xi_1)\, \mathbf{X} \notin$ при $\xi_1 \neq 0$ (предположим для простоты, что $1 < p < \infty$). Таким образом, $\operatorname{nul}(T - \zeta) = 1$ для $|\zeta| < 1$ и $\operatorname{nul}(T - \zeta) = 0$ для $|\zeta| \geqslant 1$.

Аналогичные рассуждения, примененные к оператору $T^*$ (который совпадает с оператором $T$ из примера 5.4), показывают, что $\operatorname{nul}(T^* - \zeta) = 0$ для любого $\zeta$. Далее, оператор $T - \zeta$ имеет замкнутую область значений для $|\zeta| \neq 1$; это следует из теоремы 5.22, так как $\gamma(T) = \gamma(1) = 1$. Итак, $T - \zeta$ является фредгольмовым оператором для $|\zeta| \neq 1$ и $\operatorname{nul}(T - \zeta) = 1$, $\operatorname{def}(T - \zeta) = 0$, $\operatorname{ind}(T - \zeta) = 1$ для $|\zeta| < 1$, в то время как $\operatorname{nul}(T - \zeta) = \operatorname{def}(T - \zeta) = \operatorname{ind}(T - \zeta) = 0$ для $|\zeta| > 1$.

Следует отметить, что оператор $T - \zeta$ не является фредгольмовым ни для какого $\zeta$ из единичной окружности. В самом деле, если бы $T - \zeta_0$ был полуфредгольмовым для некоторого $\zeta_0$, $|\zeta_0| = 1$, то $\operatorname{ind}(T - \zeta)$ был бы постоянен в некоторой окрестности точки $\zeta_0$. Это противоречит предыдущему результату. Таким образом, предположение (5.20) в теореме 5.22, вообще говоря, нельзя ослабить.

**Задача 5.25.** Пусть $T$ — оператор из примера 5.5. Если $|\zeta| < 1$, то оператор $T - \zeta$ фредгольмов, причем $\operatorname{nul}(T - \zeta) = \operatorname{def}(T - \zeta) = 1$, $\operatorname{ind}(T - \zeta) = 0$. Если $|\zeta| > 1$, то оператор $T - \zeta$ также фредгольмов и $\operatorname{nul}(T - \zeta) = \operatorname{def}(T - \zeta) = \operatorname{ind}(T - \zeta) = 0$. (Проверьте эти результаты непосредственно, где это возможно.) Оператор $T - \zeta$ не является полуфредгольмовым, если $|\zeta| = 1$.

Теорему 5.22 (или более общую теорему 5.17) иногда называют *первой теоремой устойчивости*. Во *второй теореме устойчивости* вместо малых возмущений рассматриваются относительно компактные возмущения[1]).

---

[1]) В связи со второй теоремой устойчивости см. Аткинсон [1], Фридман [1], Гохберг и Крейн [1], Секефальви-Надь [3], Юд [1]. Эта теорема была обобщена на строго сингулярные возмущения (не обязательно относительно компактные); см. Т. Като [12], Гохберг, Маркус и Фельдман [1], Голдберг [1] и другие работы, цитированные в книге Голдберга.

**Теорема 5.26.** *Предположим, что оператор* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *полуфредгольмов. Если* $A$ *есть* $T$*-компактный оператор из* X *в* Y, *то* $S = T + A \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *также полуфредгольмов, причем* $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$.

Доказательство. Эту теорему также можно свести к частному случаю, когда $T$, $A \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ и $A$ компактен. Для этого достаточно, так же как в доказательстве теоремы 5.22, рассмотреть пространство $\hat{\mathrm{X}}$ и операторы $\hat{T}$, $\hat{A}$, $\hat{S}$ (здесь константы $a$ и $b$ несущественны и поэтому в (5.22) мы положим $a = b = 1$ и $\varepsilon = 0$). Из $T$-компактности оператора $A$ следует компактность $\hat{A}$ (см. замечание 1.12).

Итак, предположим, что $T$, $A \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ и $A$ компактен. Сначала рассмотрим случай $\operatorname{nul} T < \infty$ и докажем, что $\operatorname{nul}' S < \infty$; тогда из теоремы 5.10 следует, что $S$ полуфредгольмов оператор. Для доказательства воспользуемся теоремой 5.11. Покажем, что последовательность $u_n \in \mathrm{X}$ такая, что $\| u_n \| = 1$ и $Su_n \to 0$, содержит сходящуюся подпоследовательность. Так как $A$ компактен, то существует подпоследовательность $\{v_n\}$ в $\{u_n\}$, для которой $Av_n \to w \in \mathrm{Y}$. Тогда $\tilde{T}\tilde{v}_n = Tv_n = (S - A)v_n \to -w$, где $\tilde{v}_n \in \tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X}/\mathrm{N}(T)$, а $\tilde{T}$ — оператор из $\tilde{\mathrm{X}}$ в Y, определенный равенством (5.3). Так как оператор $\tilde{T}$ имеет ограниченный обратный, то последовательность $\tilde{v}_n$ сходится. Это означает, что существует последовательность $z_n \in \mathrm{N}(T)$ такая, что $v_n - z_n$ сходится. С помощью рассуждений, использованных в доказательстве теоремы 4.23, приходим к заключению, что последовательность $\{v_n\}$ и, следовательно, последовательность $\{u_n\}$ содержат сходящиеся подпоследовательности.

Допустим теперь, что $\operatorname{def} T < \infty$. Тогда $\operatorname{nul} T^* < \infty$. Так как $T^*$ полуфредгольмов и $A^*$ — компактный оператор, то из доказанного выше следует, что оператор $S^* = T^* + A^*$ и, следовательно, оператор $S$ полуфредгольмовы.

Поскольку известно, что $S$ полуфредгольмов, то нетрудно доказать равенство $\operatorname{ind} S = \operatorname{ind} T$. Рассмотрим семейство $T(\varkappa) = T + \varkappa A$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$. Так как $\varkappa A$ компактен, то $T(\varkappa)$ полуфредгольмов для каждого $\varkappa$. Поэтому функция $\operatorname{ind} T(\varkappa)$, непрерывная по первой теореме устойчивости, постоянна.

**Пример 5.27.** Пусть $T$ — оператор из примера 5.5. Напомним, что $Tx_0 = 0$, $Tx_j = x_{j-1}$, $j = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Мы видели (задача 5.25), что оператор $T - \zeta$ фредгольмов, если $|\zeta| \neq 1$, и

$$\begin{aligned} \operatorname{nul}(T - \zeta) &= \operatorname{def}(T - \zeta) = 1, \quad |\zeta| < 1, \\ \operatorname{nul}(T - \zeta) &= \operatorname{def}(T - \zeta) = 0, \quad |\zeta| > 1. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Пусть оператор $A \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ таков, что $Ax_0 = x_1$, $Ax_j = 0$, $j \neq 0$. Оператор $A$ компактный и, более того, вырожденный оператор ранга 1. Из теоремы 5.26 следует, что оператор $T(\varkappa) - \zeta$ фредгольмов для $|\zeta| \neq 1$ и любого $\varkappa$; здесь $T(\varkappa) = T + \varkappa A$. Известно, что $\Sigma(T(\varkappa))$ — это единичный круг $|\zeta| = 1$ для $\varkappa \neq 0$ (см. пример 3.8). Поэтому

$$\operatorname{nul}(T(\varkappa) - \zeta) = \operatorname{def}(T(\varkappa) - \zeta) = 0, \quad |\zeta| \neq 1, \quad \varkappa \neq 0. \tag{5.28}$$

## 4. Изолированные собственные значения

**Теорема 5.28.** *Пусть* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$, $\lambda$ — *изолированная точка спектра* $\Sigma(T)$ *и* $P$ — *проектор, соответствующий числу* $\lambda$ (см. п. III.6.5). *Если* $\dim P < \infty$, *то оператор* $T - \lambda$ *фредгольмов, причем* $\operatorname{nul}'(T - \lambda) = \operatorname{nul}(T - \lambda) \leqslant \dim P$, $\operatorname{def}'(T - \lambda) = \operatorname{def}(T - \lambda) \leqslant \dim P$. *Если* $\dim P = \infty$, *то* $\operatorname{nul}'(T - \lambda) = \operatorname{def}'(T - \lambda) = \infty$.

Доказательство. Оператор $T$ допускает разложение, соответствующее прямой сумме $\mathrm{X} = \mathrm{M}' \oplus \mathrm{M}''$, $\mathrm{M}' = P\mathrm{X}$, $\mathrm{M}'' = (1 - P)\mathrm{X}$ (см. п. III.6.4—III.6.5), и $\lambda \in \mathrm{P}(T_{\mathrm{M}''})$, т. е. $\operatorname{nul}'(T_{\mathrm{M}''} - \lambda) = \operatorname{def}'(T_{\mathrm{M}''} - \lambda) = 0$. С другой стороны, оператор $T_{\mathrm{M}'} - \lambda$ ограничен и квазинильпотентен. Если $\dim P < \infty$, то $\mathrm{M}'$ конечномерно и, следовательно, аппроксимативная степень вырождения и аппроксимативный дефект оператора $T_{\mathrm{M}'} - \lambda$ не превосходят $\dim P$. Если же $\dim P = \infty$, то $\operatorname{nul}'(T_{\mathrm{M}'} - \lambda) = \operatorname{def}'(T_{\mathrm{M}'} - \lambda) = \infty$ по теореме 5.30, которая будет доказана ниже. Утверждение теоремы 5.28 легко следует из указанных свойств частей $T_{\mathrm{M}'}$ и $T_{\mathrm{M}''}$.

Лемма 5.29. *Предположим, что оператор* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *имеет замкнутую область значений, причем* $\operatorname{nul} T < \infty$. *Тогда для любого замкнутого подпространства* $\mathrm{M}$ *в* $\mathrm{X}$ *подпространство* $T\mathrm{M}$ *замкнуто.*

Доказательство. Рассмотрим пространство $\widetilde{\mathrm{X}} = \mathrm{X}/\mathrm{N}$, $\mathrm{N} = \mathrm{N}(T)$, и оператор $\widetilde{T}$, введенные в п. 1. Ясно, что $T\mathrm{M} = \widetilde{T}\widetilde{\mathrm{M}}$, где $\widetilde{\mathrm{M}}$ — множество таких элементов $\tilde{u} \in \widetilde{\mathrm{X}}$, которые содержат по крайней мере один вектор из $\mathrm{M}$. Так как оператор $\widetilde{T}$ имеет ограниченный обратный (теорема 5.2), то достаточно доказать замкнутость $\widetilde{\mathrm{M}}$ в $\widetilde{\mathrm{X}}$.

Предположим, что $\tilde{u}_n \in \widetilde{\mathrm{M}}$, $\tilde{u}_n \to \tilde{u} \in \widetilde{\mathrm{X}}$. Отсюда следует, что $\operatorname{dist}(u_n - u, \mathrm{N}) \to 0$, т. е. существуют векторы $z_n \in \mathrm{N}$ такие, что $u_n - u - z_n \to 0$. Так как мы можем считать, что $u_n \in \mathrm{M}$ и $\mathrm{M} + \mathrm{N}$ замкнуто согласно неравенству $\dim \mathrm{N} < \infty$ (лемма III.1.9), то $u \in \mathrm{M} + \mathrm{N}$ и, следовательно, $\tilde{u} \in \widetilde{\mathrm{M}}$. Лемма доказана.

**Теорема 5.30.** *Пусть оператор* $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ *квазинильпотентен. Если* $\dim \mathrm{X} = \infty$, *то* $\operatorname{nul}' T = \operatorname{def}' T = \infty$.

Доказательство. Ввиду теоремы 5.10 достаточно показать, что $\dim \mathrm{X} < \infty$, если подпространство $\mathrm{R}(T)$ замкнуто и $\operatorname{nul} T < \infty$ (или $\operatorname{def} T < \infty$). Второй случай можно свести к первому, рассматривая $T^*$ вместо $T$ ($T^*$ квазинильпотентен одновременно с $T$). Итак, докажем, что $\dim \mathbf{X} < \infty$, если $\mathbf{R}(T)$ замкнуто и $\operatorname{nul} T < \infty$. Поскольку $\mathbf{R} = \mathbf{R}(T) = T\mathbf{X}$ замкнуто, то последовательно применяя лемму 5.29, видим, что все подпространства $T^n\mathbf{X}$, $n = 1, 2, \ldots$, замкнуты.

Так как $\mathbf{X} \supset T\mathbf{X} \supset T^2\mathbf{X} \supset \ldots$, то пересечения $T^n\mathbf{X}$ с $\mathbf{N} = \mathbf{N}(T)$ образуют убывающую последовательность. Поскольку эти пересечения суть подпространства конечномерного пространства $\mathbf{N}$, то для достаточно больших $n$, скажем для $n \geqslant m$, подпространство $\mathbf{N} \cap T^n\mathbf{X}$ не зависит от $n$; обозначим его через $\mathbf{N}_0$. Положим $\mathbf{X}_0 = T^m\mathbf{X}$; так как $\mathbf{X}_0$ — замкнутое подпространство в $\mathbf{X}$ и $T\mathbf{X}_0 \subset \mathbf{X}_0$, то можно определить часть $T_0$ оператора $T$ в подпространстве $\mathbf{X}_0$. Имеем $\mathbf{N}(T_0) = \mathbf{N} \cap \mathbf{X}_0 = \mathbf{N}_0$. Далее, $\mathbf{N}_0 \subset T^{m+n}\mathbf{X} = T^n\mathbf{X}_0 = T_0^n\mathbf{X}_0$ для всех $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, $\mathbf{N}(T_0)$ содержится во всех подпространствах $\mathbf{R}(T_0^n)$.

Отсюда в свою очередь следует, что $\mathbf{N}(T_0^n) \subset \mathbf{R}(T_0)$ [1]) для всех $n$. Докажем это по индукции. Для $n = 1$ наше утверждение верно. Предположим, что оно доказано для $n$ и пусть $T_0^{n+1}u = 0$; требуется доказать, что $u \in \mathbf{R}(T_0)$. Из $T_0^n u = 0$ следует включение $T_0^n u \in \mathbf{N}_0 \subset \mathbf{R}(T_0^{m+1})$, или, что то же, $T_0^n u = T_0^{m+1}$ для некоторого $v \in \mathbf{X}_0$. Тогда $u - T_0 v \in \mathbf{N}(T_0^n) \subset \mathbf{R}(T_0)$, откуда следует, что $u \in \mathbf{R}(T_0)$.

Так как $\dim \mathbf{N}_0 < \infty$, то в $\mathbf{X}_0$ существует подпространство $\mathbf{M}_0$, дополнительное для $\mathbf{N}_0$: $\mathbf{X}_0 = \mathbf{N}_0 \oplus \mathbf{M}_0$. Оператор $T_0$ отображает $\mathbf{M}_0$ на $\mathbf{R}(T_0) = \mathbf{R}_0$ взаимно однозначно. Пусть $S_0$ — обратное отображение из $\mathbf{R}_0$ на $\mathbf{M}_0$; $S_0$ ограничено, согласно утверждению задачи III.5.21. (Отметим, что подпространство $\mathbf{R}_0 = T_0\mathbf{X}_0 = T\mathbf{X}_0 = T^{m+1}\mathbf{X}$ замкнуто.)

Пусть $u_0 \in \mathbf{N}_0$. Так как $\mathbf{N}_0 \subset \mathbf{R}_0$, то определен вектор $u_1 = S_0 u_0$. Поскольку $T_0^2 u_1 = T_0 u_0 = 0$, то $u_1 \in \mathbf{N}(T_0^2) \subset \mathbf{R}_0$. Поэтому определен вектор $u_2 = S_0 u_1$. Так как $T_0^3 u_2 = T_0^2 u_1 = 0$, то $u_2 \in \mathbf{N}(T_0^3) \subset \mathbf{R}_0$ и, следовательно, определен вектор $u_3 = S_0 u_2$. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность $u_n \in \mathbf{R}_0$ такую, что $u_n = S_0 u_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, $u_n = S_0^n u_0$ и $\| u_n \| \leqslant \| S_0 \|^n \| u_0 \|$. С другой стороны, имеем $u_0 = T_0^n u_n = T^n u_n$ и поэтому $\| u_0 \| \leqslant \| T^n \| \| S_0 \|^n \| u_0 \|$. Так как $\lim \| T^n \|^{1/n} = 0$ по предположению, то для достаточно больших $n$ будет $\| T^n \| \| S_0 \|^n < 1$. Отсюда следует, что $u_0 = 0$. Так как вектор $u_0 \in \mathbf{N}_0$ произволен, то $\mathbf{N}_0 = 0$, $\mathbf{M}_0 = \mathbf{X}_0$.

Отсюда вытекает, что $T_0^{-1}$ существует и равен $S_0$. Поэтому $\| u \| \leqslant \| S_0 \| \| T_0 u \|$ для любого $u \in \mathbf{X}_0$ и, следовательно, $\| u \| \leqslant \| S_0 \|^n \| T_0^n u \|$. Так как $\| T_0^n u \| \leqslant \| T^n \| \| u \|$, то рас-

---

[1]) Последовательности подпространств $\mathbf{N}(T^n)$ и $\mathbf{R}(T^n)$ рассматривались в связи с различными задачами. См. Данфорд и Шварц [1], Хукухара [1], Кэньел и Шехтер [1].

суждения, приведенные выше, приводят к заключению, что $u = 0$, $\mathrm{X}_0 = 0$, т. е. $T^m\mathrm{X} = 0$.

Тогда $\mathrm{X} \subset \mathrm{N}(T^m)$ и, следовательно, $\mathrm{X}$ конечномерно, так как $\dim \mathrm{N}(T^m) \leqslant m \dim \mathrm{N}$. Теорема доказана.

### 5. Другая форма теоремы устойчивости

Согласно теореме 5.17, степень вырождения и дефект полуфредгольмова оператора не увеличиваются при малых возмущениях. Трудно дать достаточно общие условия, при которых эти характеристики сохраняются при малом возмущении. Можно получить один результат в этом направлении, если ограничиться возмущением вида $\varkappa A$, где $A$ — фиксированный оператор.

**Теорема 5.31.** *Предположим, что оператор* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *полуфредгольмов и* $A$ *есть* $T$*-ограниченный оператор из* $\mathrm{X}$ *в* $\mathrm{Y}$. *Тогда* $T + \varkappa A$ *полуфредгольмов и функции* $\operatorname{nul}(T + \varkappa A)$, $\operatorname{def}(T + \varkappa A)$ *постоянны для достаточно малых* $|\varkappa| > 0$.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $T, A \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$; общий случай сводится к этому частному случаю так же, как в доказательстве теоремы 5.22.

I. Предположим, что $\operatorname{nul} T < \infty$. Определим последовательности $\mathrm{M}_n \subset \mathrm{X}$ и $\mathrm{R}_n \subset \mathrm{Y}$ равенствами [1]

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}_0 = \mathrm{X}, \quad \mathrm{M}_n = A^{-1}\mathrm{R}_n, \\ &\mathrm{R}_0 = \mathrm{Y}, \quad \mathrm{R}_{n+1} = T\mathrm{M}_n, \end{aligned} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots; \tag{5.29}$$

здесь $A^{-1}\mathrm{R}$ обозначает прообраз $\mathrm{R} \subset \mathrm{Y}$ относительно оператора $A$. Нетрудно доказать по индукции следующие включения:

$$\mathrm{M}_0 \supset \mathrm{M}_1 \supset \mathrm{M}_2 \supset \ldots, \quad \mathrm{R}_0 \supset \mathrm{R}_1 \supset \mathrm{R}_2 \supset \ldots. \tag{5.30}$$

Все $\mathrm{M}_n$ и $\mathrm{R}_n$ суть замкнутые подпространства. Это также можно доказать по индукции; если $\mathrm{R}_n$ замкнуто, то $\mathrm{M}_n$ замкнуто как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении, а $\mathrm{R}_{n+1} = T\mathrm{M}_n$ замкнуто по лемме 5.29.

Пусть $\mathrm{X}' = \bigcap\limits_n \mathrm{M}_n$ и $\mathrm{Y}' = \bigcap\limits_n \mathrm{R}_n$; подпространства $\mathrm{X}'$ и $\mathrm{Y}'$ замкнуты. Обозначим через $T'$ сужение $T$ на $\mathrm{X}'$. Если $u' \in \mathrm{X}'$, то $u' \in \mathrm{M}_n$ и $T'u' = Tu' \in T\mathrm{M}_n = \mathrm{R}_{n+1}$ для всех $n$ и поэтому $\mathrm{R}(T') \subset \mathrm{Y}'$. Покажем, что $\mathrm{R}(T') = \mathrm{Y}'$.

Пусть $v' \in \mathrm{Y}'$. Так как $v' \in \mathrm{R}_{n+1} = T\mathrm{M}_n$ для каждого $n$, то прообраз $T^{-1}\{v'\}$ содержит элемент из $\mathrm{M}_n$. Множество $T^{-1}\{v'\}$ является линейным многообразием вида $u + \mathrm{N}(T)$. Так как $\dim \mathrm{N}(T) = \operatorname{nul} T < \infty$, то пересечения $T^{-1}\{v'\} \cap \mathrm{M}_n$ обра-

---

[1] Если $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$ и $A = 1$, то $\mathrm{M}_n = \mathrm{R}_n = \mathrm{R}(T^n)$.

зуют убывающую последовательность (непустых) конечномерных неоднородных подпространств. Поэтому подпространства $T^{-1}\{v'\} \cap \mathrm{M}_n$ не зависят от $n$ для достаточно больших $n$ и, следовательно, совпадают с (непустым) пересечением $T^{-1}\{v'\} \cap \mathrm{X}'$. Пусть $u'$ принадлежит этому пересечению. Тогда $u' \in \mathrm{X}'$ и $T'u' = Tu' = v$. Итак, доказано, что $\mathrm{R}(T') = \mathrm{Y}'$.

Можно рассматривать $T'$ как оператор из $\mathrm{X}'$ в $\mathrm{Y}'$: $T' \in \mathscr{B}(\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$. Обозначим через $A'$ сужение $A$ на $\mathrm{X}'$. Так как $u' \in \mathrm{M}_n = A^{-1}\mathrm{R}_n$ для всех $n$, если $u' \in \mathrm{X}'$, то $Au' \in \mathrm{R}_n$ и поэтому $Au' \in \mathrm{Y}'$. Таким образом, $A'$ также можно рассматривать как оператор из $\mathrm{X}'$ в $\mathrm{Y}'$: $A' \in \mathscr{B}(\mathrm{X}', \mathrm{Y}')$ [1]. Применяя теорему 5.17 к паре $T'$, $\varkappa A'$, получим, что для достаточно малых $|\varkappa|$ $\operatorname{def}(T' + \varkappa A') = \operatorname{def} T' = 0$ и $\operatorname{nul}(T' + \varkappa A') = \operatorname{ind}(T' + \varkappa A') = \operatorname{ind} T' = \operatorname{nul} T'$, так как $\operatorname{def} T' = 0$. Таким образом, функции $\operatorname{nul}(T' + \varkappa A')$ и $\operatorname{def}(T' + \varkappa A')$ постоянны для малых $|\varkappa|$.

С другой стороны, имеем

$$\mathrm{N}(T + \varkappa A) = \mathrm{N}(T' + \varkappa A'), \quad \varkappa \neq 0. \tag{5.31}$$

В самом деле, пусть $u \in \mathrm{N}(T + \varkappa A)$. Тогда $Tu = -\varkappa Au$, и по индукции заключаем, что $u \in \mathrm{M}_n$ для всех $n$, т. е. $u \in \mathrm{X}'$.

Из равенства (5.31) следует, что функция $\operatorname{nul}(T + \varkappa A) = \operatorname{nul}(T' + \varkappa A')$ постоянна для малых $|\varkappa| > 0$. Так как индекс оператора $T + \varkappa A$ постоянен, то функция $\operatorname{def}(T + \varkappa A)$ также постоянна для малых $|\varkappa| > 0$.

II. Случай $\operatorname{def} T < \infty$ можно свести к случаю I, рассматривая операторы $T^*$ и $A^*$; см. теорему 5.13.

**Задача 5.32.** Пусть $\operatorname{nul} T < \infty$. Для того чтобы в теореме 5.31 функции $\operatorname{nul}(T + \varkappa A)$ и $\operatorname{def}(T + \varkappa A)$ были постоянны в окрестности нуля, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{N}(T) \subset \mathrm{M}_n$ для всех $n$ [2].

## 6. Структура спектра замкнутого оператора

Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$. Комплексное число $\zeta$ принадлежит резольвентному множеству $\mathrm{P}(T)$ оператора $T$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{nul}(T - \zeta) = \operatorname{def}(T - \zeta) = 0$. В связи с этим введем функции

$$\begin{aligned} \nu(\zeta) &= \operatorname{nul}(T - \zeta), \quad \mu(\zeta) = \operatorname{def}(T - \zeta), \\ \nu'(\zeta) &= \operatorname{nul}'(T - \zeta), \quad \mu'(\zeta) = \operatorname{def}'(T - \zeta) \end{aligned} \tag{5.32}$$

---

[1] Это означает, что $\mathrm{X}'$ и $\mathrm{Y}'$ образуют инвариантную пару подпространств для $T$ и $A$. Если, в частности, $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$ и $A = 1$, то $\mathrm{Y}' = \mathrm{X}'$ и $\mathrm{X}'$ инвариантно относительно $T$, так как в этом случае $\mathrm{M}_n = \mathrm{R}_n$ для всех $n$. Аналогичное, но несколько более детальное разложение пространств $\mathrm{X}$ и $\mathrm{Y}$ рассмотрено в статьях Т. Като [12] и Гамелина [1].

[2] Если это условие не выполнено, то существует разложение пространств $\mathrm{X}$ и $\mathrm{Y}$ на «инвариантные пары» подпространств; см. предыдущую сноску.

и классифицируем точки комплексной плоскости в соответствии со значениями этих функций [1]).

Пусть $\Delta$ — множество всех комплексных чисел $\zeta$ таких, что оператор $T - \zeta$ полуфредгольмов [2]). Обозначим через $\Gamma$ множество, дополнительное к $\Delta$. Из теоремы 5.17 следует, что $\Delta$ открыто и $\Gamma$ замкнуто. Теорема 5.10 показывает, что

$$\nu'(\zeta) = \mu'(\zeta) = \infty \Leftrightarrow \zeta \in \Gamma. \tag{5.33}$$

В общем случае множество $\Delta$ является объединением счетного числа компонент (связных открытых множеств) $\Delta_n$. По теореме 5.17 функция $\operatorname{ind}(T - \zeta) = \nu(\zeta) - \mu(\zeta)$ постоянна на каждом $\Delta_n$. Согласно теореме 5.31 (примененной к $A = 1$, $\varkappa = \zeta_0 - \zeta$ и к $T - \zeta_0$ вместо $T$), $\nu(\zeta)$ и $\mu(\zeta)$ постоянны на каждом $\Delta_n$, за исключением множества изолированных значений $\zeta$. Обозначая эти постоянные значения через $\nu_n$, $\mu_n$, а исключительные точки в $\Delta_n$ через $\lambda_{nj}$, имеем

$$\begin{gathered}\nu(\zeta) = \nu_n, \quad \mu(\zeta) = \mu_n, \quad \zeta \in \Delta_n, \quad \zeta \neq \lambda_{nj},\\ \nu(\lambda_{nj}) = \nu_n + r_{nj}, \quad \mu(\lambda_{nj}) = \mu_n + r_{nj}, \; 0 < r_{nj} < \infty.\end{gathered} \tag{5.34}$$

Если $\nu_n = \mu_n = 0$, то $\Delta_n$ — подмножество в $\mathrm{P}(T)$, за исключением точек $\lambda_{nj}$, являющихся изолированными точками спектра $\Sigma(T)$; $\lambda_{nj}$ суть изолированные собственные значения оператора $T$ конечной (*алгебраической*) кратности, как это следует из теоремы 5.28, а числа $r_{nj}$ суть их *геометрические* кратности. В общем случае (когда по крайней мере одно из чисел $\nu_n$, $\mu_n$ положительно) числа $\lambda_{nj}$ также являются собственными значениями оператора $T$ и ведут себя подобно изолированным собственным значениям (хотя таковыми и не являются, если $\nu_n > 0$), в том смысле, что их геометрические кратности на $r_{nj}$ больше, чем у других достаточно близких к ним собственных значений.

Назовем множество $\Gamma$ *существенным спектром* оператора $T$ и обозначим его через $\Sigma_e(T)$ [3]). Это подмножество спектра $\Sigma(T)$,

---

[1]) Результаты этого параграфа имеют многочисленные применения в спектральной теории. По поводу применений к теории интегральных уравнений Винера — Хопфа см. Гохберг и Крейн [1].

[2]) Множество $\Delta$ называется полуфредгольмовой областью оператора $T$. Аналогично, можно определить фредгольмову область $\Delta_F$ как подмножество в $\Delta$, состоящее из всех $\zeta$ таких, что $\nu(\zeta) < \infty$ и $\mu(\zeta) < \infty$.

[3]) В литературе существуют значительные расхождения по поводу определения существенного спектра. Вольф [3] определяет существенный спектр как «множество, дополнительное к фредгольмовой области $\Delta_F$» (см. предыдущую сноску); это множество получается из $\Sigma_e(T)$ присоединением тех компонент $\Delta_n$, для которых одно из чисел $\nu_n$, $\mu_n$ бесконечно. К этому множеству можно присоединить все другие компоненты множества $\Delta$, не содержащиеся в резольвентном множестве; при этом получим другое возможное определение существенного спектра (см. Браудер [2]). См. также Шехтер [1].

состоящее из всех $\zeta$ таких, что либо $\mathrm{R}(T-\zeta)$ не замкнуто, либо $\mathrm{R}(T-\zeta)$ замкнуто, но $\nu(\zeta)=\mu(\zeta)=\infty$. Простое описание существенного спектра дано в предложении (5.33).

Граница множества $\Delta$ и границы компонент $\Delta_n$ суть подмножества в $\Sigma_e(T)$. Если $\Delta$ состоит более чем из одной компоненты (т. е. $\Delta$ не связно), то $\Sigma_e(T)$ несчетно. Другими словами, множество $\Delta$ связно и, следовательно, $\nu(\zeta)$ и $\mu(\zeta)$ постоянны в $\Delta$, за исключением множества изолированных точек $\lambda_j$, при условии что $\Sigma_e(T)$ не более чем счетно. Если $T\in\mathscr{B}(\mathrm{X})$, то почти всюду в $\Delta$ имеем $\nu(\zeta)=\mu(\zeta)=0$, так как в этом случае $\mathrm{P}(T)$ непусто и, следовательно, совпадает с $\Delta$. Таким образом, доказана

**Теорема 5.33.** *Если существенный спектр $\Sigma_e(T)$ оператора $T$ не более чем счетен, то его спектр $\Sigma(T)$ не более чем счетен и каждая точка спектра, не принадлежащая $\Sigma_e(T)$, является изолированным собственным значением конечной (алгебраической) кратности* [1].

**Замечание 5.34.** Компактный оператор $T\in\mathscr{B}(\mathrm{X})$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы, причем $\Sigma_e(T)=\{0\}$, если $\dim\mathrm{X}=\infty$.

**Теорема 5.35.** *Существенный спектр сохраняется при относительно компактных возмущениях. Точнее, пусть $T\in\mathscr{C}(\mathrm{X})$ и $A$ $T$-компактен. Тогда операторы $T$ и $T+A$ имеют одинаковый существенный спектр* [2].

Доказательство. Достаточно заметить, что $S=T+A\in\mathscr{C}(\mathrm{X})$ и оператор $A$ $S$-компактен по теореме 1.11. В силу теоремы 5.26 $T-\zeta$ полуфредгольмов тогда и только тогда, когда $S-\zeta$ полуфредгольмов.

**Пример 5.36** [3]. В условиях примера 5.24 имеем $\nu(\zeta)=1$, $\mu(\zeta)=0$ для $|\zeta|<1$ и $\nu(\zeta)=\mu(\zeta)=0$ для $|\zeta|>1$, причем $\mathrm{R}(T)$ замкнуто для $|\zeta|\neq 1$. Поэтому $\Delta$ распадается на две компоненты: внутренность и внешность единичной окружности; сама единичная окружность $|\zeta|=1$ образует существенный спектр. Аналогичные результаты имеют место в условиях примера 5.25.

---

[1] Отсюда следует, что $\Sigma_e(T)$ непуст, если $T\in\mathscr{B}(\mathrm{X})$ и $\dim\mathrm{X}=\infty$.

[2] Теорема 5.35 остается в силе и для второго определения $\Sigma_e(T)$ (как множества, дополнительного к $\Delta_F$), так как $T-\zeta$ фредгольмов тогда и только тогда, когда $T+A-\zeta$ фредгольмов. Эта теорема была доказана Вейлем [1] для самосопряженных операторов; см. также Хартман [1].

[3] По поводу описания существенных спектров дифференциальных операторов см. Бальслев и Гамелин [1], Крейт и Вольф [1], Рота [1], Вольф [3], [4].

**Задача 5.37.** Граничная точка множества $\mathrm{P}(T)$ принадлежит $\Sigma_e(T)$, *если* она не является изолированной точкой спектра.

**Задача 5.38.** Два оператора $T, S \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ имеют одинаковый существенный спектр, если существует число $\zeta \in \mathrm{P}(T) \cap \mathrm{P}(S)$ такое, что оператор $(T-\zeta)^{-1}-(S-\zeta)^{-1}$ компактен [1].

## § 6. Вырожденные возмущения

### 1. Определители Вайнштейна — Аронштайна

В случае вырожденных (или, в общем случае, относительно вырожденных) возмущений существуют явные формулы, выведенные Вайнштейном и Аронштайном [2], посредством которых изменение собственных значений связано с нулями и полюсами некоторой мероморфной функции, имеющей вид детерминанта. Эти формулы представляют собой количественное уточнение некоторых теорем устойчивости. Перейдем к выводу формул Вайнштейна — Аронштайна.

Здесь мы рассматриваем задачи двух типов. В первой мы имеем дело с оператором вида $T+A$, где $T$ — невозмущенный оператор, а $A$ есть *$T$-вырожденное возмущение.* Во второй рассматривается оператор вида $PTP$, где $T$ — невозмущенный оператор и $P$ — проектор с конечным дефектом. Как мы покажем ниже, вторую задачу можно свести к первой.

Пусть $T$ — замкнутый оператор в банаховом пространстве $\mathrm{X}$, а $A$ есть $T$-вырожденный оператор в $\mathrm{X}$ (замечание 1.13). Последнее означает, что $A$ $T$-ограничен и $\mathbf{R}(A)$ конечномерно. Для любого $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ оператор $A(T-\zeta)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ вырожден и определена функция (см. п. III.4.3)

$$\omega(\zeta)=\omega(\zeta;\, T,\, A)=\det\left(1+A(T-\zeta)^{-1}\right)= \\ =\det\left[(T+A-\zeta)(T-\zeta)^{-1}\right]. \qquad (6.1)$$

Функция $\omega(\zeta;\, T,\, A)$ называется W-A-*детерминантом* (первого рода), построенным по $T$ и $A$.

Если $A$ абсолютно вырожден, то $Au$ можно представить в виде (см. (III.4.6))

$$Au=\sum_{j=1}^{m}(u,\, e_j)\, x_j, \quad x_j \in \mathrm{X}, \quad e_j \in \mathrm{X}^*. \qquad (6.2)$$

---

[1] По теореме 5.35 операторы $(T-\zeta)^{-1}$ и $(S-\zeta)^{-1}$ имеют одинаковые существенные спектры. Но $\Sigma_e((T-\zeta)^{-1})$ получается из $\Sigma_e(T)$ в результате преобразования $\lambda \to (\lambda-\zeta)^{-1}$. По поводу применения этого результата к дифференциальным операторам см. Бирман [5].

[2] См. Вайнштейн [1], [2], [3], Аронштайн [1], [2], Аронштайн и Вайнштейн [1], [2]. В связи с вырожденными возмущениями см. также **Фогель** [2], **Клейнеке** [1], [2], **Лифшиц** [1], [2], [3], **Вольф** [2].

Тогда ($R(\zeta) = (T - \zeta)^{-1}$)

$$A(T - \zeta)^{-1}u = \Sigma\, (R(\zeta)\, u,\, e_j)\, x_j = \Sigma\, (u,\, R(\zeta)^*\, e_j)\, x_j \tag{6.3}$$

и (см. (III.4.13))

$$\begin{aligned} \omega(\zeta;\, T,\, A) &= \det\,(\delta_{jk} + (x_j,\, R(\zeta)^*\, e_k)) = \\ &= \det\,(\delta_{jk} + (R(\zeta)\, x_j,\, e_k)). \end{aligned} \tag{6.4}$$

Если $A$ относительно вырожден, то (6.2) нужно заменить выражением вида

$$Au = \sum_{j=1}^{m} ((T - \zeta_0)\, u,\, f_j)\, x_j, \quad u \in \mathbf{D}(T), \quad f_j \in \mathrm{X}^*, \tag{6.5}$$

где $\zeta_0$ — фиксированная точка из $\mathrm{P}(T)$. Это равенство получается, если (6.2) применить к оператору $A(T - \zeta_0)^{-1}$. Из (6.5) следует, что

$$\begin{aligned} \omega(\zeta;\, T,\, A) &= \det\,(\delta_{jk} + ((T - \zeta_0)\,(T - \zeta)^{-1}\, x_j,\, f_k)) = \\ &= \det\,(\delta_{jk} + (x_j,\, f_k) + (\zeta - \zeta_0)\,((T - \zeta)^{-1}\, x_j,\, f_k)). \end{aligned} \tag{6.6}$$

Итак, $\omega(\zeta;\, T,\, A)$ — мероморфная функция в любой области комплексной плоскости, состоящей из регулярных точек и изолированных собственных значений оператора $T$ конечной (алгебраической) кратности.

W-A-*детерминант второго рода* строится по оператору $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ и проектору $P$ в $\mathrm{X}$, для которого $\mathrm{N} = \mathrm{N}(P) = (1 - P)\,\mathrm{X}$ конечномерно и содержится в $\mathbf{D}(T)$. Пусть $\{x_1, \ldots, x_m\}$ — базис в $\mathrm{N}$ и $\{e_1, \ldots, e_m\} \in \mathrm{N}^* = (1 - P^*)\,\mathrm{X}^*$ — биортогональный к $\{x_j\}$ набор

$$(x_j,\, e_k) = \delta_{jk}, \quad j,\, k = 1, \ldots, m. \tag{6.7}$$

W-A-детерминант в этой ситуации определяется формулой

$$\omega(\zeta) = \omega_P(\zeta;\, T) = \det\,((T - \zeta)^{-1}\, x_j,\, e_k). \tag{6.8}$$

Функция $\omega_P(\zeta;\, T)$ определена с помощью базиса в $\mathrm{N}$, однако от выбора базиса не зависит. Мы докажем это, установив, что $\omega_P(\zeta;\, T)$ с точностью до скалярного множителя совпадает с W-A-детерминантом первого рода, построенным по $T$ и $A$, где

$$A = PTP - T = -PT\,(1 - P) - (1 - P)\,T. \tag{6.9}$$

Оператор $A$ $T$-вырожден, так как $(1 - P)\,T$ является $T$-ограниченным оператором, $PT\,(1 - P) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ (см. задачу III.5.22) и эти операторы имеют конечный ранг.

Соотношение, которое нам предстоит доказать, таково:

$$(-\zeta)^m\, \omega_P(\zeta;\, T) = \omega(\zeta;\, T,\, A). \tag{6.10}$$

Доказательство начнем с тождества

$$PTP - \zeta = (1 + \zeta^{-1}PT(1 - P))(PT - \zeta), \quad \zeta \neq 0. \qquad (6.11)$$

Так как $T + A = PTP$, то из (6.1) и (6.11) следует, что

$$\begin{aligned}\omega(\zeta; T, A) &= \det((PTP - \zeta)(T - \zeta)^{-1}) = \\ &= \det((1 + \zeta^{-1}PT(1 - P))(PT - \zeta)(T - \zeta)^{-1}) = \\ &= \det(1 + \zeta^{-1}PT(1 - P)) \det((PT - \zeta)(T - \zeta)^{-1}) \qquad (6.12)\end{aligned}$$

(см. (III.4.14) и формулу (6.13) ниже). Первый детерминант в правой части в (6.12) равен единице, так как оператор $PT(1 - P)$ нильпотентен (его квадрат равен нулю) (см. задачу III.4.19). Для того чтобы вычислить второй детерминант, заметим, что

$$(PT - \zeta)(T - \zeta)^{-1} = 1 - (1 - P)T(T - \zeta)^{-1}, \qquad (6.13)$$

где второй член справа вырожден и $(1 - P)T(T - \zeta)^{-1}u = \Sigma(T(T - \zeta)^{-1}u, e_j)x_j$. Поэтому детерминант оператора (6.13) равен (в силу соотношений биортогональности (6.7) и равенства $1 - P = \Sigma(\,, e_j)x_j$)

$$\begin{aligned}\det(\delta_{jk} - (T(T - \zeta)^{-1}x_j, e_k)) &= \det(-\zeta((T - \zeta)^{-1}x_j, e_k)) = \\ &= (-\zeta)^m \det(((T - \zeta)^{-1}x_j, e_k)) = (-\zeta)^m \omega_P(\xi; T).\end{aligned}$$

Соотношение (6.10) доказано.

Мы предположили выше, что $\zeta \neq 0$. Но так как функции $\omega(\zeta; T, A)$ и $\omega_P(\zeta; T)$ мероморфны, то (6.10) выполняется для $\zeta = 0$, если $\omega$ и $\omega_P$ определены в нуле.

## 2. W-A-формулы

Для того чтобы выписать W-A-формулы, нам понадобятся некоторые вспомогательные функции. Пусть $\phi(\zeta)$ — мероморфная функция в области $\Delta$ комплексной плоскости. Введем *функцию кратности* $\nu(\zeta; \phi)$ для функции $\phi$ следующим образом:

$$\nu(\zeta; \phi) = \begin{cases} k, & \text{если } \zeta \text{ — нуль функции } \phi \text{ порядка } k, \\ -k, & \text{если } \zeta \text{ — полюс функции } \phi \text{ порядка } k, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad (6.14)$$

Таким образом, $\nu(\zeta; \phi)$ принимает значения $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ или $+\infty$; имеет место альтернатива: либо $\nu(\zeta; \phi)$ конечна для всех $\zeta \in \Delta$, либо $\nu(\zeta; \phi) \equiv +\infty$ (последний случай эквивалентен тождеству $\phi \equiv 0$).

Введем также функцию кратности $\tilde{\nu}(\zeta; T)$ для оператора $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$:

$$\tilde{\nu}(\zeta; T) = \begin{cases} 0, \text{ если } \zeta \in \mathrm{P}(T), \\ \dim P, \text{ если } \zeta \text{ — изолированная точка в } \Sigma(T), \\ +\infty \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{6.15}$$

здесь $P$ — проектор, соответствующий точке $\zeta \in \Sigma(T)$ (см. п. III.6.5). Таким образом, функция $\tilde{\nu}(\zeta; T)$ определена для всех комплексных чисел и принимает значения 0, 1, 2, ... или $+\infty$.

**Задача 6.1.** $\tilde{\nu}(\zeta; T) \geqslant \mathrm{nul}\,(T - \zeta)$.

Сформулируем теперь основную теорему этого параграфа, доказательство которой будет приведено в п. 3.

**Теорема 6.2.** *Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$, $A$ есть $T$-вырожденный оператор*[1] *в* X *и* $\omega(\zeta) = \omega(\zeta; T, A)$ — *соответствующий* W-A-*детерминант первого рода. Если область $\Delta$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений оператора $T$ конечной кратности, то $\omega(\zeta)$ мероморфна в $\Delta$ и для $S = T + A$*

$$\tilde{\nu}(\zeta; S) = \tilde{\nu}(\zeta; T) + \nu(\zeta; \omega), \quad \zeta \in \Delta. \tag{6.16}$$

Соотношение (6.16) назовем *первой* W-A-*формулой*[2]. В связи с этой формулой сделаем несколько замечаний. Так как $\tilde{\nu}(\zeta; T)$ конечна для всех $\zeta \in \Delta$ по предположению, а $\nu(\zeta; \omega)$ либо конечна для всех $\zeta \in \Delta$, либо тождественно равна $+\infty$, то имеем альтернативу: либо $\tilde{\nu}(\zeta; S)$ конечна для всех $\zeta \in \Delta$, либо $\tilde{\nu}(\zeta; S) \equiv +\infty$. В первом случае $\Delta$, за исключением не более чем счетного числа собственных значений конечной кратности, содержится в $\mathrm{P}(S)$; во втором случае $\Delta \subset \Sigma(S)$. Ниже на примере мы покажем, что вторая возможность осуществляется. Будет дан критерий того, что $\omega \not\equiv 0$.

Рассмотрим первый случай указанной альтернативы. Из (6.16) следует, что каждый нуль $\lambda$ порядка $k$ функции $\omega$ является собственным значением оператора $S$, причем его кратность на $k$ превосходит кратность $\lambda$ как собственного значения оператора $T$ (если число $\lambda$ не является собственным значением для $T$, то его кратность полагается равной нулю). Аналогично, в каждом полюсе $\lambda$ порядка $k$ функции $\omega$ кратность $\lambda$ уменьшается на $k$. Число $\lambda$ служит полюсом порядка $k$ для $\omega$ лишь в том случае,

---

[1] По поводу обобщения этой теоремы на более общие возмущения (но только в гильбертовом пространстве) см. Курода [5].

[2] Применение W-A-формул к вопросам приближенного вычисления собственных значений см. в статьях Базли [1], Базли и Фокс [1], Гулд [1], Вайнштейн [1], [2], [3].

когда $\lambda$ — собственное значение оператора $T$ кратности $\geqslant k$. Таким образом, изменение собственных значений оператора $T$ при возмущении $A$ полностью определяется W-A-детерминантом $\omega(\zeta)$

**Теорема 6.3.** *Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ и $P$ — проектор в $\mathbf{X}$ с конечным дефектом. Если $\omega(\zeta) = \omega_P(\zeta; T)$ — соответствующий W-A-детерминант второго рода, то соотношение* (6.16) *справедливо для $S = PTP$, за исключением точки $\zeta = 0$.*

В этом случае соотношение (6.16) назовем *второй W-A-формулой.* Так как $\omega_P(\zeta; T)$ отличается лишь множителем $(-\zeta)^m$ от функции $\omega(\zeta; T, A)$, где $A = PTP - T$ (см. (6.10)), то теорема 6.3 является прямым следствием предыдущей теоремы.

### 3. Доказательство W-A-формул

Так как теорема 6.3 следует из теоремы 6.2, то достаточно доказать последнюю [1]. Рассмотрим по отдельности два случая: $\omega \equiv 0$ и $\omega \not\equiv 0$.

Допустим сначала, что $\omega(\zeta) \equiv 0$. Согласно (6.1), отсюда следует, что оператор $(T + A - \zeta)(T - \zeta)^{-1}$ имеет нулевое собственное значение для всех $\zeta \in \Delta$. Поэтому $\zeta$ является собственным значением оператора $S = T + A$ для всех $\zeta \in \Delta \cap \mathrm{P}(T)$. По определению $\tilde{\nu}$ отсюда следует, что $\tilde{\nu}(\zeta, S) \equiv +\infty$. Так как в рассматриваемом случае $\nu(\zeta, \omega) \equiv +\infty$, то (6.16) доказано.

Допустим теперь, что $\omega(\zeta) \not\equiv 0$. Покажем, что множество $\Delta$, за исключением не более чем счетного множества точек, содержится в $\mathrm{P}(S)$ и имеет место следующее тождество [2]:

$$\frac{1}{\omega(\zeta)}\frac{d}{d\zeta}\omega(\zeta) = \operatorname{tr}\left((T-\zeta)^{-1} - (S-\zeta)^{-1}\right). \tag{6.17}$$

Требуемое соотношение (6.16) получается интегрированием тождества (6.17) вдоль окружности $\Gamma$ малого радиуса, охватывающей заданную точку $\lambda \in \Delta$. Напомним, что

$$(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma}\omega'(\zeta)\,\omega(\zeta)^{-1}\,d\zeta = \nu(\lambda;\omega)\,^{3)};$$

далее, собственный проектор $P$ для оператора $T$, соответствующий собственному значению $\lambda$, допускает представление

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}(T-\zeta)^{-1}\,d\zeta = P \tag{6.18}$$

---

[1] Приведенное здесь доказательство принадлежит Куроде [5]. По поводу других доказательств см. Аронштайн [1], Гулд [[1]].

[2] Это тождество доказано Крейном [6] и Куродой [5].

[3] См. Кнопп [[1]], стр. 131.

и $\tilde{\nu}(\zeta;\, T) = \dim P = \operatorname{tr} P$. Отметим также, что оператор $(T-\zeta)^{-1} - (S-\zeta)^{-1} = (S-\zeta)^{-1} A\, (T-\zeta)^{-1}$ вырожден.

Для доказательства тождества (6.17) рассмотрим число $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ такое, что $\omega(\zeta) \neq 0$. Имеем (см. (I.5.60)) [1]

$$\omega(\zeta) = \det(1 + B(\zeta)) = \exp(\operatorname{tr}\log(1 + B(\zeta))), \tag{6.19}$$

где $B(\zeta) = A\,(T-\zeta)^{-1}$. Так как $\omega(\zeta) \neq 0$, то $-1$ не является собственным значением для $B(\zeta)$, и поэтому логарифмическую функцию в (6.19) можно определить равенством

$$\log(1+B(\zeta)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \log(1+z)\,(z-B(\zeta))^{-1}\,dz, \tag{6.20}$$

где C — замкнутый контур, охватывающий все собственные значения вырожденного оператора $B(\zeta)$ и не охватывающий точку $-1$ (см. (I.5.57)).

Из (6.19) и (6.20) следует, что

$$\frac{\omega'(\zeta)}{\omega(\zeta)} = \frac{d}{d\zeta}\operatorname{tr}\log(1+B(\zeta)) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \operatorname{tr}\,[\log(1+z)\,(z-B(\zeta))^{-1} B'(\zeta)\,(z-B(\zeta))^{-1}]\,dz =$$

$$(\text{см. } (\mathrm{I}.4.28)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{C}} \operatorname{tr}\,[\log(1+z)\,(z-B(\zeta))^{-2} B'(\zeta)]\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\operatorname{tr}\int_{\mathrm{C}} (1+z)^{-1}\,(z-B(\zeta))^{-1} B'(\zeta)\,dz =$$

$$(\text{см. } (\mathrm{I}.5.53)) = \operatorname{tr}\,[(1+B(\zeta))^{-1} B'(\zeta)]. \tag{6.21}$$

Здесь мы воспользовались формулой $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, совершили интегрирование по частям и поменяли местами символы интегрирования и следа. После подстановки $B(\zeta) = A\,(T-\zeta)^{-1}$ и $B'(\zeta) = A\,(T-\zeta)^{-2}$ последнее выражение в (6.21) принимает вид

$$\operatorname{tr}\,[(T-\zeta)^{-1}\,(1+B(\zeta))^{-1} A\,(T-\zeta)^{-1}] =$$

$$= \operatorname{tr}\,[(T+A-\zeta)^{-1} A\,(T-\zeta)^{-1}] = \operatorname{tr}\,[(T-\zeta)^{-1} - (S-\zeta)^{-1}].$$

Доказательство тождества (6.17) закончено. Отметим, что $(S-\zeta)^{-1} = (T-\zeta)^{-1}\,(1+B(\zeta))^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ и поэтому $\zeta \in \mathrm{P}(S)$.

---

[1] Результаты гл. I применимы к $\omega(\zeta)$, так как оператор $A\,(T-\zeta)^{-1}$ вырожден; см. п. III.4.3.

## 4. Условия, исключающие сингулярный случай

Как отмечалось выше, вообще говоря, возможно, что в (6.16) $\omega(\zeta) \equiv 0$ и поэтому $\tilde{\nu}(\zeta;\ S) \equiv +\infty$ (это эквивалентно включению $\Delta \subset \Sigma\ (S)$).

**Пример 6.4.** Рассмотрим операторы из примера 3.8. Изменим обозначения следующим образом: $T \to S$, $A \to -A$, $T + A \to S - A = T$. Открытый единичный круг $\Delta$ принадлежит $\mathrm{P}\ (T)$ и поэтому $\tilde{\nu}\ (\zeta;\ T) \equiv 0$ в $\Delta$. Но так как $\Delta \subset \Sigma\ (S)$, то $\tilde{\nu}\ (\zeta;\ S) \equiv \infty$ в $\Delta$. В силу (6.16) $\nu\ (\zeta;\ \omega) \equiv \infty$ и, следовательно, $\omega \equiv 0$. Этот результат можно получить иначе. Ранг оператора $A$ равен 1, поэтому в (6.2) $m = 1$ и в качестве $x_1$, $e_1$ в (6.2) можно взять векторы $-\ x_{-1}$, $e_0$ ($e_0$ — это вектор $x_0$, рассматриваемый как элемент из $X^*$). Поэтому $\omega\ (\zeta) = \omega\ (\zeta;\ T, A) = 1 - ((T - \zeta)^{-1}x_{-1}, e_0)$. Как нетрудно проверить, $(T - \zeta)^{-1}x_{-1} = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \zeta^j x_j$ для $\zeta \in \Delta$ и, следовательно, $\omega\ (\zeta) \equiv 0$ в $\Delta$.

**Теорема 6.5.** *Для того чтобы функция* $\omega\ (\zeta)$ *в теореме* 6.2 *не равнялась тождественно нулю в области* $\Delta$, *необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одна точка* $\zeta$ *из* $\Delta$ *принадлежала* $\mathrm{P}\ (S)$.

Это предложение следует из теоремы 6.2 и последующих замечаний.

Приведем несколько достаточных условий того, что $\omega\ (\zeta) \not\equiv 0$.

а) $\omega\ (\zeta) \not\equiv 0$, если $\|A\ (T - \zeta)^{-1}\| < 1$ для *некоторого* $\zeta \in \Delta$. В этом случае $\zeta \in \mathrm{P}\ (S)$, так как $(S - \zeta)^{-1}$ можно построить с помощью ряда Неймана, как в (II.1.13);

б) $\omega\ (\zeta) \not\equiv 0$, если $T^*$ существует и плотно определен в $X^*$ и существует последовательность $\zeta_n \in \Delta$ такая, что $|\zeta_n| \to \infty$ и $\{|\zeta_n|\ \|(T - \zeta_n)^{-1}\|\}$ ограничена. Для доказательства достаточно показать, согласно предложению а), что $\|A\ (T - \zeta_n)^{-1}\| \to 0$. В соответствии с формулой (6.5) имеем

$$A\ (T - \zeta_n)^{-1}u = \Sigma\ ((T - \zeta_0)\ (T - \zeta_n)^{-1}u,\ f_j)\ x_j =$$
$$= \Sigma\ (u,\ (T^* - \bar{\zeta}_0)\ (T^* - \bar{\zeta}_n)^{-1}f_j)\ x_j,$$

и поэтому

$$\|A\ (T - \zeta_n)^{-1}\| \leqslant \Sigma\ \|(T^* - \bar{\zeta}_0)\ (T^* - \bar{\zeta}_n)^{-1}f_j\|\ \|x_j\|. \tag{6.22}$$

Последовательность операторов $B_n^* = (T^* - \bar{\zeta}_0)\ (T^* - \bar{\zeta}_n)^{-1}$, действующих в $X^*$, равномерно ограничена, так как операторы $B_n = 1 + (\zeta_n - \zeta_0)\ (T - \zeta_n)^{-1}$ равномерно ограничены по предположению. Далее, $B_n^*f = (T^* - \bar{\zeta}_n)^{-1}\ (T^* - \bar{\zeta}_0)\ f \to 0$, если

$f \in \mathrm{D}(T^*)$, так как $\|(T^* - \bar{\zeta}_n)^{-1}\| = \|(T - \zeta_n)^{-1}\| \to 0$. Из леммы III.3.5 следует, что $B_n^*$ сильно сходится к нулю, и поэтому правая часть в (6.22) стремится к нулю при $n \to \infty$.

в) $\omega(\zeta) \not\equiv 0$, если $T \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ и существует $\zeta \in \Delta$ такое, что $|\zeta| \geqslant \|T\|$. В этом случае область $\Delta$ можно расширить таким образом, что она будет содержать внешность окружности $|\zeta| = \|T\|$. Нетрудно видеть, что в расширенной области $\Delta'$ выполняются условия предложения б). Поэтому $\omega(\zeta) \not\equiv 0$ в $\Delta'$ и, следовательно, в $\Delta$.

**Замечание 6.6. Условия предложения** б) выполнены, если X — гильбертово **пространство и** $T$ — самосопряженный оператор (см. гл. V).

# ГЛАВА V

# ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Хотя гильбертово пространство является частным случаем банахова, оно заслуживает отдельного рассмотрения ввиду важности его для приложений. В гильбертовых пространствах остаются в силе основные результаты, полученные в предыдущих главах, и в то же время возникают новые проблемы.

Отличительной чертой гильбертова пространства является существование в нем скалярного произведения и связанного с ним понятия ортогональности. Для линейных операторов это приводит к понятиям симметричного, самосопряженного и нормального операторов. В гильбертовом пространстве имеется также более широкий класс аккретивных (или диссипативных) операторов, важная роль которых в приложении к дифференциальным операторам общепризнана. В теории возмущений в связи с этим возникают такие проблемы, как возмущение ортонормированной системы векторов, возмущение самосопряженных операторов (с приложениями к операторам Шрёдингера и Дирака) и др., которые будут рассмотрены в этой главе.

Эта глава снова является отчасти подготовительной. Она начинается с элементарного изложения тех специфических результатов теории операторов в гильбертовых пространствах, которые не охватываются общей теорией банаховых пространств. Особое внимание уделяется аккретивным и секториальным операторам ввиду дальнейших их приложений к аналитической и асимптотической теориям возмущений.

## § 1. Гильбертово пространство

### 1. Основные понятия

Понятие гильбертова пространства — это обобщение понятия конечномерного гильбертова пространства, рассмотренного в § I.6[1]).

Гильбертово пространство $\mathsf{H}$ есть банахово пространство, норма в котором введена с помощью скалярного произведения $(u, v)$, определенного для всех пар $u$, $v$ векторов и удовлетворяющего условиям, перечисленным в п. I.6.1. Норма $\|u\|$ задается с помощью формулы (I.6.3). Пространство $\mathsf{H}$ предполагается полным относительно этой нормы[2]):

---

[1]) Общая теория гильбертовых пространств изложена в книгах Ахиезера и Глазмана [[1]], Данфорда и Шварца [[1]], [[2]], Халмоша [[1]], Секефальви-Надя [[1]], Рисса и Секефальви-Надя [[1]], Стоуна [[1]], Иосиды [[1]], Заанена [[1]].

[2]) Векторное пространство $\mathsf{H}$ со скалярным произведением, которое не обязательно полно, называется *предгильбертовым пространством*. Такое пространство может быть *пополнено* до гильбертова пространства $\tilde{\mathsf{H}}$. Про-

Большинство результатов § I.6 может быть перенесено на гильбертово пространство $\mathrm{H}$, и мы будем использовать их без особых пояснений в тех случаях, когда они очевидны. Однако имеются и такие результаты, обобщение которых требует некоторых модификаций или по крайней мере пояснений. Это будет сделано в этом и следующем пунктах. Здесь следует отметить, что неравенство Шварца (I.6.4) остается справедливым и что $(u, v)$, как и раньше, непрерывно по совокупности переменных.

**Пример 1.1.** Пространство $\mathrm{l}^2$ является гильбертовым пространством (см. пример III.1.1), если скалярное произведение определено по формуле

$$(u, v) = \sum_k \xi_k \overline{\eta}_k, \quad u = (\xi_k), \quad v = (\eta_k). \tag{1.1}$$

Пространство $\mathrm{L}^2(\mathrm{E})$ также является гильбертовым (см. пример III.1.3), если скалярное произведение определено так:

$$(u, v) = \int_{\mathrm{E}} u(x)\,\overline{v}(x)\,dx. \tag{1.2}$$

Если $\mathrm{H}$ — гильбертово пространство, то сопряженное пространство $\mathrm{H}^*$ может быть отождествлено с $\mathrm{H}$. В частности, $\mathrm{H}^{**} = \mathrm{H}^* = \mathrm{H}$ и $\mathrm{H}$ рефлексивно. Доказательство этого факта, данное в п. I.6.2, существенно опирается на конечномерность и не может быть использовано в общем случае.

Мы начнем доказательство в общем случае с теоремы об ортогональной проекции: *каждое замкнутое линейное подпространство* $\mathrm{M}$ *в* $\mathrm{H}$ *имеет ортогональную проекцию*. Другими словами, $\mathrm{H}$ можно представить в виде

$$\mathrm{H} = \mathrm{M} \oplus \mathrm{M}^{\perp}, \tag{1.3}$$

где $\mathrm{M}^{\perp}$ — ортогональное дополнение к $\mathrm{M}$ (т. е. множество всех $u \in \mathrm{H}$ таких, что $(u, v) = 0$ для всех $v \in \mathrm{M}$). Заметим, что $\mathrm{M}^{\perp}$ также является замкнутым подпространством в $\mathrm{H}$; это — непосредственное следствие непрерывности скалярного произведения.

Для любого $u \in \mathrm{H}$ положим $d = \operatorname{dist}(u, \mathrm{M})$ и возьмем последовательность $u_n \in \mathrm{M}$ такую, что $\| u_n - u \| \to d$. Имеем в силу (I.6.7)

$$\left\| \frac{1}{2}(u_n + u_m) - u \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(u_n - u_m) \right\|^2 = \frac{1}{2} \| u_n - u \|^2 + \frac{1}{2} \| u_m - u \|^2. \tag{1.4}$$

---

странство $\tilde{\mathrm{H}}$ определяется как множество классов эквивалентности последовательностей Коши $\{u_n\}$ (см. примечание 1 на стр. 165). Скалярное произведение двух элементов из $\mathrm{H}$, представленных последовательностями Коши $\{u_n\}$ и $\{v_n\}$, определяется как $\lim (u_n, v_n)$.

При $n, m \to \infty$ правая часть стремится к $d^2$, тогда как первый член в левой части не меньше чем $d^2$, ибо $(u_n + u_m)/2 \in \mathrm{M}$. Поэтому $\|u_n - u_m\| \to 0$ и существует $u' \in \mathrm{H}$ такое, что $u_n \to u'$ (H полно). Так как M замкнуто, то $u' \in \mathrm{M}$. Кроме того, имеем $\|u - u'\| = \lim \|u - u_n\| = d$.

Мы покажем теперь, что $u'' = u - u' \in \mathrm{M}^\perp$. Для этого достаточно доказать, что $(u'', x) = 0$ для любого $x \in \mathrm{M}$ с $\|x\| = 1$. Но это следует из того, что

$d^2 = \|u''\|^2 = \|u'' - (u'', x)x\|^2 + |(u'', x)|^2 \geqslant d^2 + |(u'', x)|^2$

(мы положили $u = u''$, $v = x$ в формуле (I.6.5)).

Возможность разложения $u = u' + u''$ для каждого $u \in \mathrm{H}$ доказывает справедливость (1.3). Единственность этого разложения доказывается просто. Как и в конечномерном случае, из (1.3) следует, что

$$\mathrm{M}^{\perp\perp} = \mathrm{M}. \tag{1.5}$$

Таким образом, (1.3) определяет ортогональный проектор $P = P_\mathrm{M}$ на M с помощью соотношения $Pu = u'$, как и ранее.

Докажем теперь возможность отождествления $\mathrm{H}^*$ с H. Пусть $f \in \mathrm{H}^*$; форма $f$ — ограниченная полулинейная форма на H. Пусть $\mathrm{N} = \mathrm{N}(f)$ есть нуль-пространство $f$; оно является замкнутым линейным подпространством в H. Если $f \neq 0$, то $\mathrm{N} \neq \mathrm{H}$, так что $\mathrm{N}^\perp \neq 0$. Пусть $v \in \mathrm{N}^\perp$, $v \neq 0$. Можно считать, что $f[v] = 1$. Для любого $w \in \mathrm{H}$ имеем $w' = w - \overline{f[w]}\, v \in \mathrm{N}$, так как $f[w'] = 0$. Следовательно, $0 = (v, w') = (v, w) - f[w]\, \|v\|^2$, или $f[w] = (u, w)$, где $u = v/\|v\|^2$. *Таким образом, каждое* $f \in \mathrm{H}^*$ *может быть отождествлено с некоторым* $u \in \mathrm{H}$ (теорема Рисса). Остальные рассуждения, необходимые для завершения доказательства, остаются теми же, что и в п. I.6.2.

Как и в случае банаховых пространств, в H можно определить кроме обычной (сильной) сходимости понятие слабой сходимости (см. п. III.1.6).

В силу отождествления $\mathrm{H}^* = \mathrm{H}$ сходимость $u_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} u$ эквивалентна сходимости $(u_n, v) \to (u, v)$ для каждого $v \in \mathrm{H}$.

**Лемма 1.2.** *Если* $u_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} u$ *и* $\limsup \|u_n\| \leqslant \|u\|$, *то* $u_n \xrightarrow[\mathrm{s}]{} u$.

Доказательство. Имеем $\|u_n - u\|^2 = \|u_n\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,(u_n, u) + \|u\|^2$. Но $(u_n, u) \to (u, u) = \|u\|^2$ и $\limsup \|u_n\|^2 \leqslant \|u\|^2$. Следовательно, $\lim \|u_n - u\| = 0$.

**Лемма 1.3.** *Пространство* H *слабо полно: если* $\{u_n\}$ *слабо сходится, то* $u_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} u$ *для некоторого* $u \in \mathrm{H}$.

Доказательство. Так как $\{u_n\}$ ограничена (см. п. III. 1.6), то $\lim (u_n, v) = f[v]$ определяет ограниченную полулинейную форму $f$.

Следовательно, $f[v] = (u, v)$ для некоторого $u \in \mathrm{H}$ и $u_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} u$.

**Лемма 1.4.** *Пространство* H *секвенциально слабо компактно. Другими словами, если* $u_n \in \mathrm{H}$ *— ограниченная последовательность, то найдется такая ее подпоследовательность* $\{v_n\}$, *что* $v_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} v$ *для некоторого* $v \in \mathrm{H}$.

Доказательство. Поскольку $|(u_n, u_1)| \leqslant \|u_n\| \|u_1\|$ ограничено по $n$, то найдется такая подпоследовательность $\{u_n^1\}$ последовательности $\{u_n\}$, что $(u_n^1, u_1)$ сходится. Так как $(u_n^1, u_2)$ ограничено по $n$, то найдется такая подпоследовательность $\{u_n^2\}$ последовательности $\{u_n^1\}$, что $(u_n^2, u_2)$ сходится. Продолжая этот процесс, мы получим последовательность подпоследовательностей $\{u_n^m\}$, обладающих тем свойством, что $\{u_n^{m+1}\}_{n=1, 2, \ldots}$ есть подпоследовательность последовательности $\{u_n^m\}_{n=1, 2, \ldots}$ и $\lim_n (u_n^m, u_m)$ существует. Тогда для диагональной последовательности $\{v_n\}$, $v_n = u_n^n$, $\lim_n (v_n, u_m)$ существует для всех $m$. Так как $\|v_n\|$ ограничено по $n$, отсюда следует, что $\lim (v_n, u)$ существует для любого $u$ из замкнутой линейной оболочки M множества $\{u_n\}$ (см. лемму III.1.31).

Кроме того, $\lim (v_n, u)$ существует для любого $u \in \mathrm{M}^{\perp}$, так как $(v_n, u) = 0$. Таким образом, $\{v_n\}$ слабо сходится и, следовательно, $v_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} v$ для некоторого $v$ (лемма 1.3).

Полуторалинейная форма $\mathfrak{t}\,[u, u']$ на $\mathrm{H} \times \mathrm{H}'$, где $\mathrm{H}$, $\mathrm{H}'$ — гильбертовы пространства, может быть определена так же, как в п. I.6.2, и мы снова имеем формулу (I.6.11). Форма $\mathfrak{t}$ называется *ограниченной*, если существует константа $M$ такая, что

$$|\mathfrak{t}\,[u, u']| \leqslant M \|u\| \|u'\|. \tag{1.6}$$

Наименьшую из таких констант $M$ мы обозначим через $\|\mathfrak{t}\|$. *Ограниченная полуторалинейная форма* $\mathfrak{t}\,[u, u']$ *непрерывна по совокупности переменных* $u$, $u'$; доказательство такое же, как и в случае скалярного произведения. Справедливо и обратное утверждение: *полуторалинейная форма* $\mathfrak{t}[u, u']$ *ограничена, если она непрерывна по* $u$ *при каждом фиксированном* $u'$ *и непрерывна по* $u'$ *при каждом фиксированном* $u$. Это следствие принципа равномерной ограниченности (п. III.1.5).

Задача 1.5. Доказать последнее утверждение.

Задача 1.6. Пусть $\{\mathfrak{t}_n\}$ — последовательность ограниченных полуторалинейных форм на $\mathrm{H} \times \mathrm{H}'$, и пусть $\{\mathfrak{t}_n\,[u, u']\}$ ограничена по $n$ для каждого фиксированного $u \in \mathrm{H}$ и $u' \in \mathrm{H}'$. Тогда последовательность $\{\|\mathfrak{t}_n\|\}$ ограничена. [*Указание*: еще раз применить принцип равномерной ограниченности.]

## 2. Полные ортонормированные системы

В общем банаховом пространстве мы не вводили понятия базиса. В гильбертовом пространстве роль базиса играет *полная ортонормированная система.*

Система $\{x_\mu\}$ векторов из H, где индекс $\mu$ пробегает некоторое множество, называется *ортонормированной,* если

$$(x_\mu, x_\nu) = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 1, & \mu = \nu, \\ 0, & \mu \neq \nu. \end{cases} \tag{1.7}$$

Для любого $u \in$ H числа

$$\xi_\mu = (u, x_\mu) \tag{1.8}$$

называются *коэффициентами* вектора $u$ относительно системы $\{x_\mu\}$. Так как любая конечная подсистема $\{x_{\mu_1}, \ldots, x_{\mu_n}\}$ из $\{x_\mu\}$ также ортонормирована, то из (I.6.15) следует, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |\xi_{\mu_k}|^2 \leqslant \|u\|^2$. Поскольку это верно при любом выборе $\mu_1, \ldots, \mu_n$, мы получаем *неравенство Бесселя*

$$\sum_\mu |\xi_\mu|^2 = \sum_\mu |(u, x_\mu)|^2 \leqslant \|u\|^2. \tag{1.9}$$

Из неравенства (1.9) следует, в частности, что каждое $u \in$ H имеет не более чем счетное множество отличных от нуля коэффициентов $\xi_\mu$.

Из (1.9) следует также существование такого $u' \in$ H, что

$$u' = \sum_\mu \xi_\mu x_\mu = \sum_\mu (u, x_\mu) x_\mu \tag{1.10}$$

Действительно, правая часть (1.10) содержит не более чем счетное множество отличных от нуля коэффициентов. Обозначим их в произвольном порядке через $\xi_{\mu_k}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $u'_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_{\mu_k} x_{\mu_k}$ образуют последовательность Коши, ибо

$$\|u'_n - u'_m\| = \sum_{k=m+1}^{n} |\xi_{\mu_k}|^2 \to 0, \quad m, n \to \infty,$$

в силу неравенства (1.9). Легко видеть, что предел $u'$ последовательности $\{u'_n\}$ не зависит от способа нумерации последовательности $\{\mu_k\}$. Он равен ортогональной проекции $Pu$ вектора $u$ на замкнутую линейную оболочку M системы $\{x_\mu\}$, ибо ясно, что $u' \in$ M, тогда как $u'' = u - u' \in$ M$^\perp$, поскольку $(u'', x_\mu) = (u - u', x_\mu) = \xi_\mu - (\sum \xi_\nu x_\nu, x_\mu) = 0$ для каждого $\mu$. В частности,

$$\|u'\|^2 = \sum_\mu |\xi_\mu|^2 = \sum_\mu |(u, x_\mu)|^2, \quad \|u''\|^2 = \|u\|^2 - \|u'\|^2. \tag{1.11}$$

Ортонормированная система называется *полной*, если $\mathbf{M} = \mathbf{H}$. Необходимым и достаточным условием полноты является равенство $u'' = 0$ для всех $u \in \mathbf{H}$; это условие эквивалентно *равенству Парсеваля*

$$\sum_{\mu} |\xi_{\mu}|^2 = \sum_{\mu} |(u, x_{\mu})|^2 = \| u \|^2 \tag{1.12}$$

для каждого $u \in \mathbf{H}$. В этом случае мы имеем также

$$u = \sum_{\mu} \xi_{\mu} x_{\mu} = \sum_{\mu} (u, x_{\mu}) x_{\mu}; \tag{1.13}$$

это *разложение* $u$ по полной ортонормированной системе $\{x_{\mu}\}$.

Если $\mathbf{H}$ *сепарабельно* (см. п. III.1.2), то любая ортонормированная система $\{x_{\mu}\}$ в $\mathbf{H}$ состоит из не более чем счетного множества элементов. Чтобы доказать это, обозначим через $\{u_n\}$ счетное всюду плотное в $\mathbf{H}$ подмножество. Для каждого $\mu$ найдется такое $u_n$, что $\| x_{\mu} - u_n \| < 1/2$. Так как $\| x_{\mu} - x_{\nu} \| = \sqrt{2}$ при $\mu \neq \nu$, то индекс $n$ различен для различных $\mu$. Таким образом, между системой $\{x_{\mu}\}$ и подмножеством множества натуральных чисел $\{n\}$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Обратно, $\mathbf{H}$ сепарабельно, если в нем существует полная ортонормированная система $\{x_n\}$, состоящая из счетного множества элементов, ибо множество всех (конечных) линейных комбинаций $x_n$ с рациональными коэффициентами счетно и плотно в $\mathbf{H}$.

Если $\mathbf{H}$ сепарабельно, то полная ортонормированная система может быть построена с помощью процесса ортогонализации Шмидта (см. п. I.6.3) из любой плотной в $\mathbf{H}$ последовательности. Подобное построение можно использовать даже и в несепарабельном пространстве с привлечением аксиомы выбора, но мы не будем вдаваться в подробности, поскольку в основном будем иметь дело с сепарабельными пространствами.

Задача 1.7. Ортонормированная система $\{x_n\}$ полна тогда и только тогда, когда не существует ненулевого вектора, ортогонального всем $x_n$.

Задача 1.8. Канонический базис в $\mathbf{l}^2$, состоящий из векторов $x_n = (\delta_{nk})$, является полной ортонормированной системой.

Задача 1.9. Множество тригонометрических функций $(2\pi)^{-1/2} e^{inx}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, образует полную ортонормированную систему в $\mathbf{L}^2(a, a + 2\pi)$, где $a$ — любое вещественное число [1]).

Задача 1.10. Пусть $\varphi_k(x)$, $\psi_j(y)$ — две последовательности функций на E и F, образующие полные ортонормированные системы в $\mathbf{L}^2(\mathrm{E})$ и $\mathbf{L}^2(\mathrm{F})$ соответственно. Тогда функции $\chi_{kj}(x, y) = \varphi_k(x) \psi_j(y)$ образуют полную ортонормированную систему в $\mathbf{L}^2(\mathrm{E} \times \mathrm{F})$ — пространстве всех измеримых функций $w(x, y)$, определенных при $x \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{F}$ и таких, что $\| w \|^2 =$

---

[1]) См. любой учебник по рядам Фурье или гильбертовым пространствам; например, Стоун [[1]].

$= \int\limits_{E\times F} |w(x, y)|^2 \, dx\, dy < \infty$. Ортонормированность $\chi_{kj}$ очевидна, ибо $(\chi_{kj}, \chi_{li}) = (\varphi_k, \varphi_l)(\psi_j, \psi_i) = \delta_{kl}\delta_{ji}$. Чтобы доказать полноту, достаточно показать, что из $(w, \chi_{kj}) = 0$ для всех $k$, $j$ следует $w = 0$ (задача 1.7). Положим

$$w_k(y) = \int\limits_{E} w(x, y)\, \overline{\varphi_k(x)}\, dx; \tag{1.14}$$

тогда $w_k \in L^2(F)$, так как $|w_k(y)|^2 \leqslant \int\limits_{E} |w(x, y)|^2 \, dx$ в силу неравенства Шварца и

$$\int\limits_{F} |w_k(y)|^2 \, dy \leqslant \int\limits_{E\times F} |w(x, y)|^2 \, dx\, dy = \|w\|^2.$$

Это позволяет написать $(w, \chi_{kj}) = (w, \varphi_k\psi_j) = (w_k, \psi_j)$. Таким образом, из того, что $(w, \chi_{kj}) = 0$ для всех $k$ и $j$, следует, что $(w_k, \psi_j) = 0$, и потому в силу полноты $\{\psi_j\}$ $w_k = 0$. С другой стороны, $w_k(y)$ определено для почти всех $y \in F$ и его значения должны быть равны нулю при каждом $k$ для почти всех $y$. В силу полноты $\{\varphi_k\}$ из (1.14) вытекает теперь, что $w(x, y) = 0$ для почти всех $x$ и $y$. Таким образом, $w = 0$ как элемент из $L^2(E \times F)$.

## § 2. Ограниченные операторы в гильбертовых пространствах

### 1. Ограниченные операторы и их сопряженные

Оператор (линейный) $T$ из гильбертова пространства $\mathrm{H}$ в другое гильбертово пространство $\mathrm{H}'$ определяется так же, как в банаховых пространствах. Однако имеются некоторые специфические свойства, присущие операторам в гильбертовых пространствах (или между ними). Мы начнем с ограниченных операторов $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$.

Отметим, прежде всего, что

$$T^{**} = T; \tag{2.1}$$

это равенство справедливо, ибо $\mathrm{H}$ рефлексивно (см. п. III.3.3).

Оператор $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ тесно связан с ограниченной полуторалинейной формой $\mathfrak{t}$ на $\mathrm{H} \times \mathrm{H}'$:

$$\mathfrak{t}[u, u'] = (Tu, u') = (u, T^*u'). \tag{2.2}$$

Отметим, что $T^* \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$, ибо $\mathrm{H}^* = \mathrm{H}$, $\mathrm{H}'^* = \mathrm{H}'$. Формула (2.2) устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством всех ограниченных полуторалинейных форм $\mathfrak{t}$ на $\mathrm{H} \times \mathrm{H}'$, множеством всех $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ и множеством всех $T^* \in \mathscr{B}(\mathrm{H}', \mathrm{H})$. Это можно доказать так же, как в конечномерном случае (см. п. I.6.4). Очевидно, что $(Tu, u')$ — ограниченная форма, ибо

$$|(Tu, u')| \leqslant \|Tu\| \|u'\| \leqslant \|T\| \|u\| \|u'\|.$$

Обратно, ограниченная полуторалинейная форма $\mathfrak{t}\,[u, u']$ может быть записана в виде $(v', u')$, $v' \in \mathrm{H}'$, так как она является ограниченной полулинейной формой по $u'$ при фиксированном $u$. Полагая $v' = Tu$, определяем линейный оператор $T$ из $\mathrm{H}$ в $\mathrm{H}'$; его ограниченность следует из того, что

$$\|T\| = \sup |(Tu, u')| / \|u\| \|u'\| =$$
$$= \sup |\mathfrak{t}\,[u, u']| / \|u\| \|u'\| = \|\mathfrak{t}\|.$$

**Задача 2.1.** Пусть $T_n \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ таковы, что $(T_n u, u')$ ограничено для каждой фиксированной пары $u \in \mathrm{H}$, $u' \in \mathrm{H}'$. Тогда семейство $\{T_n\}$ равномерно ограничено (т. е. ограничено $\{\|T_n\|\}$). [*Указание*: принцип равномерной ограниченности.]

Для оператора $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ имеет место матричное представление того же вида, что и в конечномерном случае (п. I.6.4). Для простоты предположим, что $\mathrm{H}$ и $\mathrm{H}'$ сепарабельны, и пусть $\{x_k\}$, $\{x'_j\}$ — полные ортонормированные системы в $\mathrm{H}$ и $\mathrm{H}'$ соответственно. Матрица оператора $T$ определяется по формуле (I.6.27), и остается верным разложение (I.6.28) (теперь, вообще говоря, справа будет стоять бесконечный ряд).

**Замечание 2.2.** $(Tu, u')$ для *неограниченного* оператора $T$ также есть полуторалинейная форма, которая, однако, не обязательно определена для всех $u \in \mathrm{H}$. Связь между оператором и полуторалинейной формой в этом случае довольно сложна. Позже мы рассмотрим ее подробно в частном случае так называемых секториальных операторов.

*Симметричная* полуторалинейная форма $\mathfrak{t}\,[u, v]$ в гильбертовом пространстве $\mathrm{H}$ определяется, как и в п. I.6.5, равенством $\mathfrak{t}\,[v, u] = \overline{\mathfrak{t}\,[u, v]}$. Если при этом форма $\mathfrak{t}$ ограничена, то все установленные там результаты остаются в силе. Оператор $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, связанный с ограниченной симметричной полуторалинейной формой $\mathfrak{t}$ соотношением (2.2), обладает тем свойством, что

$$T^* = T; \tag{2.3}$$

в этом случае говорят, что оператор $T$ *симметричен*. Понятие положительного (или неотрицательного) симметричного оператора (или формы) и отношение порядка $S \leqslant T$ для симметричных операторов $S$, $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ определяются, как и раньше (см. там же).

Результаты п. I.6.7 о проекторах также остаются в силе; речь идет об операторах $P \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, удовлетворяющих условию $P^2 = P$. См. также результаты п. III.3.4 о проекторах в банаховых пространствах. Приведем еще следующую лемму.

**Лемма 2.3.** *Пусть* $\{P_n\}$ — *последовательность ортогональных проекторов в* H *таких, что* $P_nP_m = \delta_{mn}P_n$. *Тогда* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n = P$ *существует в сильном смысле и* $P$ — *ортогональный проектор. Область значений* $P$ *есть замкнутая линейная оболочка объединения областей значений всех* $P_n$.

Доказательство. Для любого $u \in \mathbf{H}$ имеем $\sum\limits_{k=1}^{n} \| P_k u \|^2 = \| \sum\limits_{k=1}^{n} P_k u \|^2 \leqslant \| u \|^2$, так как $\sum\limits_{k=1}^{n} P_k$ есть ортогональный проектор [см. (I.6.49)]. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \| P_k u \|^2$ сходится и $\| \sum\limits_{k=n}^{n+p} P_k u \|^2 = \sum\limits_{k=n}^{n+p} \| P_k u \|^2 \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P_n = P$ сильно сходится. Легко видеть, что так определенный оператор $P$ обладает требуемыми свойствами.

Мы будем говорить, что последовательность $\{P_n\}$ леммы 2.3 *полна*, если $\sum P_n = 1$.

Нормальный оператор $T \in \mathscr{B}$ (H) определяется равенством $T^*T = TT^*$; результаты п. I.6.6 остаются в силе. Например

$$\operatorname{spr} T = \| T \|, \quad \text{если} \quad T \text{ — нормальный оператор.} \tag{2.4}$$

**Задача 2.4.** Квазинильпотентный нормальный оператор является нулевым.

**Пример 2.5.** Рассмотрим интегральный оператор $T$ из примера III.2.4 с ядром $t\,(x,\, y)$. Если $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ и $t\,(x,\, y) = \overline{t\,(y,\, x)}$ (эрмитово симметричное ядро), то $T$ — симметричный оператор в $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2\,(\mathrm{E})$ (см. пример III.3.17). Это же верно и для оператора $T$ из примера III.2.3, определенного данной матрицей $(\tau_{jk})$, если он рассматривается в $\mathrm{H} = \mathrm{l}^2$ и если $(\tau_{jk})$ эрмитово симметрична $\tau_{kj} = \bar{\tau}_{jk}$); см. пример III.3.18.

*Неограниченные* симметричные и нормальные операторы будут подробно изучены в дальнейших параграфах.

## 2. Унитарные и изометричные операторы

Говорят, что оператор $T \in \mathscr{B}$ (**H**, **H**′) *изометричен*, если он сохраняет норму:

$$\| Tu \| = \| u \| \quad \text{для каждого} \quad u \in \mathbf{H}. \tag{2.5}$$

Как и в конечномерном случае (п. I.6.6), это означает, что $T^*T = 1_{\mathrm{H}}$ (единичный оператор в H) и $(Tu,\, Tv) = (u,\, v)$ для всех $u,\, v \in \mathbf{H}$.

Изометричный оператор $T$ обратим, так как из $Tu = 0$ следует, что $u = 0$. Но $T^{-1}$ не обязательно принадлежит $\mathscr{B}$ ($\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}$), поскольку его область определения может не совпадать со всем пространством $\mathbf{H}'$. Отметим, что это может случиться в отличие от конечномерного случая даже тогда, когда $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$.

Изометричный оператор $T$ называется *унитарным*, если область определения $T^{-1}$ есть все $\mathbf{H}'$, т. е. если область значений $T$ есть все $\mathbf{H}'$. Тогда $T^{-1} \in \mathscr{B}$ ($\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}$) и является унитарным. Таким образом, оператор $T \in \mathscr{B}$ ($\mathbf{H}$, $\mathbf{H}'$) унитарен тогда и только тогда, когда

$$T^*T = 1_{\mathrm{H}} \quad \text{и} \quad TT^* = 1_{\mathrm{H}'}, \tag{2.6}$$

что в свою очередь эквивалентно равенству

$$T^{-1} = T^*. \tag{2.7}$$

Существование унитарного оператора $T$ из $\mathbf{H}$ в $\mathbf{H}'$ означает, что $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}'$ как гильбертовы пространства имеют одинаковую структуру, ибо $T$ сохраняет линейные операции и скалярное произведение. Оператор $A'$ в $\mathbf{H}'$ называется *унитарно эквивалентным* оператору $A$ в $\mathbf{H}$, если существует унитарный оператор $T$ из $\mathbf{H}$ в $\mathbf{H}'$, такой, что

$$A'T = TA, \quad \text{или} \quad A' = TAT^{-1} = TAT^*. \tag{2.8}$$

Это означает, что $\mathbf{D}(A')$ есть в точности образ $\mathbf{D}(A)$ при унитарном отображении $T$ и $A'Tu = TAu$ справедливо для любого $u \in \mathbf{D}(A)$. Операторы $A'$ и $A$ имеют одинаковую внутреннюю структуру, ибо соответствие $u \leftrightarrow u' = Tu$ не изменяется при действии операторов $A$ и $A'$ в силу того, что $Au \leftrightarrow TAu = A'Tu = A'u'$.

Пусть $T \in \mathscr{B}$ ($\mathbf{H}$, $\mathbf{H}'$) — изометричный оператор, и пусть $\mathbf{M}' = \mathbf{R}(T)$. Изометрия означает, что $\mathbf{M}'$ — замкнутое линейное подпространство в $\mathbf{H}'$. Оператор $T^* \in \mathscr{B}$ ($\mathbf{H}'$, $\mathbf{H}$) является продолжением оператора $T^{-1}$, как это легко видеть из $T^*T = 1_{\mathrm{H}}$, поскольку $T^*u' = 0$ тогда и только тогда, когда $u' \in \mathbf{M}'^{\perp}$ [см. (III.5.10)]. Таким образом, $T^*$ не изометричен, если $T$ не унитарен; он является частично изометричным.

Оператор $W \in \mathscr{B}$ ($\mathbf{H}$, $\mathbf{H}'$) называется *частично изометричным*, если существует замкнутое линейное подпространство $\mathbf{M}$ в $\mathbf{H}$ такое, что $\| Wu \| = \| u \|$ для $u \in \mathbf{M}$ и $Wu = 0$ для $u \in \mathbf{M}^{\perp}$. Подпространство $\mathbf{M}$ называется *исходным множеством*, а $\mathbf{M}' = W\mathbf{M}$ — *финальным множеством* для $W$; $\mathbf{M}'$ — замкнутое линейное подпространство. Эквивалентное определение таково:

$$\| Wu \| = \| Pu \| \quad \text{для любого} \quad u \in \mathbf{H}, \tag{2.9}$$

где $P$ — ортогональный проектор $\mathrm{H}$ на $\mathrm{M}$. Определение (2.9) в свою очередь эквивалентно такому определению:

$$W^*W = P. \tag{2.10}$$

Для любого $u \in \mathrm{H}$ имеем $W(1 - P)u = 0$, так как $(1 - P)u \in \mathrm{M}^{\perp}$. Следовательно,

$$W = WP. \tag{2.11}$$

Мы имеем $W^*u' = 0$ для $u' \in \mathrm{M}'^{\perp}$, как и в случае изометричного оператора. Кроме того, соотношение $\| W^*Wu \| = \| Pu \| = \| Wu \|$ показывает, что $\| W^*u' \| = \| u' \|$ для $u' \in \mathrm{M}'$. Следовательно, $W^*$ — тоже частично изометричный оператор с исходным множеством $\mathrm{M}'$. Применение этого результата к $W$, замененному на $W^*$, показывает, что финальное множество $W^*$ совпадает с исходным множеством $\mathrm{M}$ для $W^{**} = W$. Таким образом, имеется полная симметрия между $W$ и $W^*$. Следующие соотношения являются прямыми следствиями этих рассуждений ($P'$ — ортогональный проектор $\mathrm{H}'$ на $\mathrm{M}'$):

$$W^*W = P, \quad WP = P'W = W, \quad WW^*W = W, \tag{2.12}$$
$$WW^* = P', \quad W^*P' = PW^* = W^*, \quad W^*WW^* = W^*.$$

**Задача 2.6.** Оператор $W \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ частично изометричен тогда и только тогда, когда $W = WW^*W$. [*Указание*: из $W = WW^*W$ следует, что $W^*W = W^*WW^*W$. Таким образом, $P = W^*W$ — ортогональный проектор $\mathrm{H}$ на некоторое подпространство в $\mathrm{M}$.]

**Пример 2.7.** Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{E})$ и $\hat{\mathrm{H}} = \mathrm{L}^2(\mathrm{E}')$, где $\mathrm{E}$ и $\mathrm{E}'$ — вещественные $n$-мерные гильбертовы пространства (так что их можно отождествить), точки которых мы обозначим через $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $k = (k_1, \ldots, k_n)$ соответственно. *Преобразование Фурье* $\hat{u} = Tu$, определяемое формулой

$$\hat{u}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathrm{E}} e^{-ik\cdot x} u(x)\, dx, \quad k\cdot x = k_1x_1 + \ldots + k_nx_n, \tag{2.13}$$

задает унитарный оператор $T$ из $\mathrm{H}$ в $\hat{\mathrm{H}}$. Обратный оператор $T^{-1}\hat{u} = u$ определяется так:

$$u(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathrm{E}'} e^{ik\cdot x}\hat{u}(k)\, dk. \tag{2.14}$$

Эти результаты известны как теорема Фурье — Планшереля. Интегралы в (2.13) и (2.14) понимаются в смысле *предела в среднем*: интеграл (2.13) берется сначала по ограниченному подмножеству $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}$, а получившаяся в результате функция сходится по норме $\| \ \|$ пространства $\hat{\mathrm{H}}$ к $\hat{u}$, когда $\mathrm{K}$ стремится к $\mathrm{E}$ 1)). Таким образом, $T$ и $T^{-1}$ не являются интегральными операторами в смысле примера III.2.4.

---

1) См. по этому поводу Стоун [[1]].

**Пример 2.8.** Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$. Для любого $u \in \mathrm{H}$ определены коэффициенты Фурье

$$\xi_n = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} u(x)\, e^{-inx}\, dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \tag{2.15}$$

Оператор $T$, который переводит $u$ в вектор $v = (\xi_n)$, есть унитарный оператор из $\mathrm{H}$ в $\mathrm{H}' = \mathrm{l}^2$. Обратный оператор $T^{-1}$ ставит в соответствие каждому $v = (\xi_n) \in \mathrm{H}'$ функцию $u(x)$, определяемую рядом Фурье

$$u(x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \xi_n e^{inx}, \tag{2.16}$$

который сходится по норме $\| \; \|$. Эти результаты суть выражение полноты системы тригонометрических функций $e^{inx}$. Аналогичные результаты справедливы для любой полной ортонормированной системы в $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$ или в любом абстрактном гильбертовом пространстве.

**Пример 2.9.** Примером изометричного оператора, не являющегося унитарным, может служить оператор сдвига (см. пример III.3.16). Пусть $\{x_n\}_{n=1,2,\ldots}$ — полная ортонормированная система в гильбертовом пространстве $\mathrm{H}$, и пусть $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ таков, что $Tx_n = x_{n+1}$. Оператор $T$ изометричен, а $T^*$ частично изометричен, $T^*x_{n+1} = x_n$ и $T^*x_1 = 0$. Исходное множество оператора $T$ есть $\mathrm{H}$, а финальное множество есть подпространство $\mathrm{H}$, натянутое на $x_2, x_3, \ldots$.

## 3. Компактные операторы

Пусть $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ — компактный оператор. Мы знаем, что спектр $\Sigma(T)$ состоит из не более чем счетного множества собственных значений, имеющих конечную кратность, за исключением, быть может, нуля (теорема III.6.26). Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — эти отличные от нуля собственные значения, расположенные в порядке убывания их величин, и пусть $P_1, P_2, \ldots$ — отвечающие им собственные проекторы. Отметим, что $|\lambda_1|$ равно спектральному радиусу оператора $T$:

$$|\lambda_1| = \operatorname{spr} T = \lim_{n\to\infty} \| T^n \|^{1/n} \tag{2.17}$$

(см. п. III.6.2; надо положить $\lambda_1 = 0$, если отсутствуют ненулевые собственные значения).

Предположим, кроме того, что $T$ — нормальный оператор. Тогда $P_k$ — ортогональный проектор, как и в конечномерном случае (см. п. I.6.9), и соответствующие собственные нильпотенты равны нулю. Полагая $Q_n = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$, видим, в силу (III.6.55), что $TQ_n = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n$. Так как $Q_n$ коммутирует с $T$, $T(1 - Q_n)$ — нормальный оператор, имеющий собственные значения $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$ и, возможно, 0. Для нормального оператора спектральный радиус совпадает с нормой [см. (2.4)]. Поэтому, в силу (2.17), мы имеем $\| T(1 - Q_n) \| =$

$= \operatorname{spr} T\,(1 - Q_n) = |\,\lambda_{n+1}\,| \to 0$ при $n \to \infty$. Это дает[1])

$$\|\, T \; - (\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_n P_n)\,\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2.18}$$

Таким образом, оказывается справедливой спектральная теорема, аналогичная полученной в конечномерном случае [см. (I.6.65)].

**Теорема 2.10.** *Если* $T \in \mathscr{B}\,(\mathbf{H})$ *— нормальный компактный оператор, то имеет место спектральное представление*

$$T = \sum_h \lambda_h P_h, \quad P_h^* = P_h, \quad \dim P_h < \infty, \tag{2.19}$$

*в смысле сходимости по норме. Проекторы* $P_h$ *вместе с ортогональным проектором* $P_0$ *на нуль-пространство* $\mathbf{N}\,(T)$ *образуют полную ортогональную систему.*

Доказательство. Нам осталось доказать только последнее утверждение. Пусть $Q$ — ортогональный проектор на подпространство $\mathbf{H}$, натянутое на все $P_h\mathbf{H}$; имеем $Q = \text{s-}\lim Q_n$ (см. лемму 2.3). Оператор $Q$ коммутирует с $T$, ибо все $Q_n$ коммутируют с $T$. Таким образом, $QH$ и $(1 - Q)\,H$ инвариантны относительно $T$. Но часть $T_0$ оператора $T$ в $(1 - Q)\,\mathbf{H}$ не имеет ненулевого собственного значения, ибо из $T_0 u = \lambda u$ с $u \in (1 - Q)\,\mathbf{H}$ и $\lambda \neq 0$ следует, что $Tu = \lambda u$. Поэтому $\lambda = \lambda_h$ для некоторого $h$ и $u \in P_h\mathbf{H}$, так что $u = P_h u = P_h Q u = 0$, поскольку $P_h = P_h Q$ и $Qu = 0$. Так как $T_0$ — нормальный оператор, то в силу (2.19), примененного к $T_0$, $T_0 = 0$. Это означает, что $(1 - Q)\,\mathbf{H} \subset \mathbf{N}\,(T)$. Поскольку, с другой стороны, $T$ не есть нуль в $Q\mathbf{H}$, то $(1 - Q)\,\mathbf{H} = \mathbf{N}\,(T)$.

Иногда удобно рассматривать собственные векторы оператора $T$, а не собственные проекторы. В каждом подпространстве $P_h\mathbf{H}$ выберем произвольный ортонормированный базис, состоящий из $m_h = \dim P_h$ векторов. Вместе эти векторы образуют ортонормированный базис $\{\varphi_k\}$ в подпространстве $Q\mathbf{H}$, и (2.19) может быть записано в виде

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k\,(\quad, \varphi_k)\,\varphi_k, \tag{2.20}$$

где $\mu_k$ — собственные значения $T$ с собственными векторами $\varphi_k$ (каждое собственное значение $\lambda_j$ учитывается столько раз, какова его кратность). [По поводу обозначений в (2.20) см. (III.4.7).]

Рассмотрим теперь произвольный компактный оператор $T \in \mathscr{B}_0\,(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$, где $\mathbf{H}'$ — другое гильбертово пространство. Так

---

[1]) Оператор $T$ может иметь лишь конечное число $n$ собственных значений; тогда (2.18) означает, что $T = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$. Подобные изменения нужно делать и в некоторых последующих формулах.

как $T^*T$ — неотрицательный симметричный компактный оператор в $\mathbf{H}$, то мы имеем такое спектральное разложение (отметим, что собственные значения $T^*T$ неотрицательны):

$$T^*T=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k^2(\quad,\varphi_k)\varphi_k,\qquad(\varphi_j,\varphi_k)=\delta_{jk},\qquad(2.21)$$

где $T^*T\varphi_k=\alpha_k^2\varphi_k$, $k=1,2,\dots$ и $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\dots>0$. Положим

$$\varphi_k'=\alpha_k^{-1}T\varphi_k\in\mathbf{H}',\quad k=1,2,\dots.\qquad(2.22)$$

Векторы $\varphi_k'$ образуют ортонормированную систему в $\mathbf{H}'$, ибо $(\varphi_j',\varphi_k')=(\alpha_j\alpha_k)^{-1}(T\varphi_j,T\varphi_k)=(\alpha_j\alpha_k)^{-1}(T^*T\varphi_j,\varphi_k)=\alpha_j\alpha_k^{-1}(\varphi_j,\varphi_k)=$ $=\delta_{jk}$. Мы утверждаем теперь, что

$$T=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\quad,\varphi_k)\varphi_k'.\qquad(2.23)$$

Поскольку $\{\varphi_k\}$, $\{\varphi_k'\}$ — ортонормированные системы и $\alpha_k\to0$, ряд в (2.23) сходится по норме. В самом деле,

$$\Big\|\sum_{k=n}^{n+1}\alpha_k(u,\varphi_k)\varphi_k'\Big\|^2=\sum_{k=n}^{n+p}\alpha_k^2|(u,\varphi_k)|^2\leqslant\alpha_n^2\sum_{k=n}^{n+p}|(u,\varphi_k)|^2\leqslant\alpha_n^2\|u\|^2,$$

так что $\Big\|\sum_{k=n}^{n+p}\alpha_k(\quad,\varphi_k)\varphi_k'\Big\|\leqslant\alpha_n\to0$ при $n\to\infty$. Поэтому достаточно доказать справедливость (2.23) для плотного подмножества в $\mathbf{H}$. Для этого достаточно в свою очередь доказать (2.23) для $u=\varphi_n$ и $u=\psi_n$, где $\{\psi_n\}$ — ортонормированный базис в $\mathbf{N}(T)=\mathbf{N}(T^*T)$ (собственные векторы $T^*T$, отвечающие нулевому собственному значению). Но это очевидно в силу (2.22) и того факта, что $\varphi_n\perp\psi_m$.

Равенство (2.23) называется *каноническим разложением* оператора $T$. Строго говоря, оно не единственно, так как $\{\varphi_k\}$ можно выбирать разными способами, если имеет место вырождение собственных значений $\alpha_k^2$ оператора $T^*T$. Числа $\alpha_1$, $\alpha_2$, ... называются ненулевыми *сингулярными значениями* (с учетом их кратностей) [1] оператора $T$.

Из (2.23) следует, что

$$T^*=\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k(\quad,\varphi_k')\varphi_k\qquad(2.24)$$

является каноническим разложением для $T^*$. Также имеем

$$TT^*=\sum\alpha_k^2(\quad,\varphi_k')\varphi_k'.\qquad(2.25)$$

---

[1] Очевидным образом можно определить множество всех сингулярных значений $T$ и их кратности. Нуль должен быть включен в это множество, если $T^*T$ имеет нулевое собственное значение.

Следовательно, кратные ненулевые собственные значения $TT^*$ есть в точности $\alpha_k^2$. Другими словами, *$T$ и $T^*$ имеют одинаковые ненулевые сингулярные значения.*

Кроме того, положим

$$|T| = \sum \alpha_k(\ \ ,\varphi_k)\varphi_k, \qquad |T^*| = \sum \alpha_k(\ \ ,\varphi_k')\varphi_k'. \tag{2.26}$$

Отметим, что $|T|$ определяется оператором $T$ независимо от выбора $\varphi_k$.

**Задача 2.11.** Любой компактный оператор из $\mathscr{B}$ (H, H′) есть предел по норме последовательности вырожденных операторов.

**Задача 2.12.** Если $T$ — компактный и симметричный оператор, то сингулярные значения $T$ суть абсолютные величины собственных значений $T$.

**Задача 2.13.** Для любых унитарных операторов $U$ и $V$ операторы $T$ и $UTV$ имеют одинаковые сингулярные значения.

## 4. Класс Шмидта

Одним из наиболее важных классов компактных операторов в $\mathscr{B}$ (**H**, **H**′) является *класс Шмидта.* В этом пункте мы ради простоты будем считать, что **H** и **H**′ сепарабельны, хотя результаты справедливы и в общем случае.

Пусть $T \in \mathscr{B}$ (**H**, **H**′); положим

$$\|T\|_2 = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \|T\varphi_k\|^2\Big)^{1/2}, \tag{2.27}$$

где $\{\varphi_k\}$ — полная ортонормированная система в **H**. Если ряд в (2.27) расходится, положим $\|T\|_2 = \infty$. Норма $\|T\|_2$ называется *нормой Шмидта* оператора $T$.

Норма Шмидта не зависит от выбора системы $\{\varphi_k\}$, участвующей в определении. Чтобы доказать это, заметим, что

$$\sum_k \|T\varphi_k\|^2 = \sum_k \sum_j |(T\varphi_k, \varphi_j')|^2 = \sum_j \sum_k |(\varphi_k, T^*\varphi_j')|^2 = \sum_j \|T^*\varphi_j'\|^2, \tag{2.28}$$

где $\{\varphi_j'\}$ — полная ортонормированная система в **H**′; изменение порядка суммирования в (2.28) законно, поскольку все члены ряда неотрицательны. Левая часть (2.28) не зависит от выбора системы $\{\varphi_j'\}$, тогда как правая часть не зависит от выбора системы $\{\varphi_k\}$. Следовательно, обе части не зависят от выбора систем $\{\varphi_k\}$ и $\{\varphi_j'\}$.

Попутно мы доказали, что

$$\|T\|_2 = \|T^*\|_2. \tag{2.29}$$

Подмножество в $\mathscr{B}$ (H, H′), состоящее из всех $T$ с $\| T \|_2 < \infty$, называется *классом Шмидта*; он будет обозначаться через $\mathscr{B}_2$ (H, H′).

Мы имеем неравенства:

$$\| ST \|_2 \leqslant \| S \| \, \| T \|_2, \quad \| TS \|_2 \leqslant \| T \|_2 \| S \|. \tag{2.30}$$

Их надо понимать в следующем смысле: если $T \in \mathscr{B}_2$ (H, H′) и $S \in \mathscr{B}$ (H′, H″), то $ST \in \mathscr{B}_2$ (H, H″) и справедливо первое неравенство в (2.30); аналогично понимается второе неравенство.

**Задача 2.14.** $\mathscr{B}_2$ (H, H′) есть векторное пространство, $\alpha T + \beta S$ принадлежит $\mathscr{B}_2$ (H, H′), если $S$, $T \in \mathscr{B}_2$ (H, H′).

**Задача 2.15.** $\| T \| \leqslant \| T_2 \|$.

Мы можем ввести скалярное произведение $(S, T)$ для $S$, $T \in \mathscr{B}_2$ (H, H′), так что $\mathscr{B}_2$ (H, H′) становится гильбертовым пространством с нормой Шмидта в качестве нормы. Положим

$$(S, T) = \sum_k (S\varphi_k, T\varphi_k). \tag{2.31}$$

Ряд сходится абсолютно, так как $2 \, | (S\varphi_k, T\varphi_k) | \leqslant \| S\varphi_k \|^2 + \| T\varphi_k \|^2$, а $\| S \|_2$, $\| T \|_2$ конечны. В силу тождества (I.6.8) имеем

$$(S, T) = \frac{1}{4} (\| S + T \|_2^2 - \| S - T \|_2^2 + i \| S + iT \|_2^2 - i \| S - iT \|_2^2). \tag{2.32}$$

Формула (2.32) показывает, что $(S, T)$ не зависит от выбора системы $\{\varphi_k\}$, используемой в определении (2.31). Легко видеть, что $(S, T)$ удовлетворяет всем условиям, предъявляемым к скалярному произведению, и что

$$\| T \|_2^2 = (T, T). \tag{2.33}$$

Это в свою очередь показывает, что $\| \;\; \|_2$ обладает свойствами нормы.

Докажем, что $\mathscr{B}_2$ (H, H′) — полное пространство; пусть $\{T_n\}$ — последовательность Коши в $\mathscr{B}_2$ (H, H′), т. е. $\| T_m - T_n \|_2 \to 0$ при $m$, $n \to \infty$. Тогда $\| T_m - T_n \| \to 0$ в силу результата задачи 2.15, так что существует оператор $T \in \mathscr{B}$ (H, H′) такой, что $\| T_n - T \| \to 0$. Так как

$$\sum_{k=1}^{s} \| (T_n - T_m) \varphi_k \|^2 \leqslant T_n - T_m \|_2^2 < \varepsilon^2$$

для достаточно больших $m$, $n$ и любых $s$, то при $m \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{s} \| (T_n - T) \varphi_k \|^2 \leqslant \varepsilon^2$$

для достаточно больших $n$ и любых $s$. Следовательно, $\| T_n - T \|_2 \leqslant \varepsilon$ для достаточно больших $n$. Отсюда следует, что $T_n - T \in \mathscr{B}_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$; значит, $T \in \mathscr{B}_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$ и $\| T_n - T \|_2 \to 0$.

Отметим, что $\mathscr{B}_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}') \subset \mathscr{B}_0(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$: каждый оператор из $\mathscr{B}_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$ компактен. Чтобы доказать зто, возьмем $n$ столь большим, чтобы $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \| T\varphi_k \|^2 < \varepsilon^2$. Положим $T_n\varphi_k = T\varphi_k$ для $k \leqslant n$ и $T_n\varphi_k = 0$ для $k > n$. Ясно, что оператор $T_n$ может быть продолжен до вырожденного линейного оператора и $\| T_n - T \| \leqslant \| T_n - T \|_2 < \varepsilon$. Следовательно $T$, как предел по норме последовательности $\{T_n\}$ компактен (см. теорему III.4.7).

**Задача 2.16.** Если $\alpha_k$ суть кратные сингулярные значения оператора $T$, то

$$\| T \|_2 = \Big( \sum_k \alpha_k^2 \Big)^{1/2}. \qquad (2.34)$$

**Задача 2.17.** Если $T \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$, то каноническое разложение (2.23) для $T$ сходится по норме $\| \; \|_2$.

**Задача 2.18.** $T \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ тогда и только тогда, когда $T^* \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H}', \mathrm{H})$ и

$$(S, T) = (T^*, S^*). \qquad (2.35)$$

**Задача 2.19.** *Интегральные операторы Гильберта — Шмидта.* Пусть $t(y, x)$ — ядро, определенное для $x \in \mathrm{E}$, $y \in \mathrm{F}$, где E, F — измеримые множества гильбертова пространства, и пусть

$$\| t \|^2 = \iint\limits_{\mathrm{E}\times\mathrm{F}} | t(y, x) |^2 \, dx\, dy < \infty. \qquad (2.36)$$

Тогда интегральный оператор с ядром $t(y, x)$ определяет оператор $T \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$, где $\mathrm{H} = \mathbf{L}^2(\mathrm{E})$ и $\mathrm{H}' = \mathbf{L}^2(\mathrm{F})$.

Для доказательства заметим сначала, что формальное выражение (III.2.7) для $Tu$ определяет оператор $T \in \mathscr{B}(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$ (см. задачу III.2.5). Чтобы показать, что $T \in \mathscr{B}_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$, обозначим через $\{\varphi_k(x)\}$ и $\{\varphi_j'(y)\}$ полные ортонормированные системы в $\mathbf{H}$ и $\mathbf{H}'$ соответственно. В силу (2.27) и (2.28)

$$\begin{aligned} \| T \|_2^2 &= \sum_{j,k} | (T\varphi_k, \varphi_j') |^2 = \sum_{j,k} \Big| \iint\limits_{\mathrm{E}\times\mathrm{F}} t(y, x)\, \varphi_k(x) \overline{\varphi_j'(y)} \, dx\, dy \Big|^2 = \\ &= \iint\limits_{\mathrm{E}\times\mathrm{F}} | t(y, x) |^2 \, dx\, dy = \| t \|^2; \end{aligned} \qquad (2.37)$$

здесь использован тот факт, что функции $\overline{\varphi_k(x)}\, \varphi_j'(y)$ образуют полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}^2(\mathrm{E} \times \mathrm{F})$ (см. пример 1.10).

Пусть $s(y, x)$, $t(y, x) \in \mathbf{L}^2(\mathrm{E} \times \mathrm{F})$; определим, как и выше, соответствующие интегральные операторы $S$, $T \in \mathscr{B}_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$. Тогда в силу (2.37)

$$(S, T) = \iint\limits_{\mathrm{E}\times\mathrm{F}} s(y, x)\, \overline{t(y, x)} \, dx\, dy. \qquad (2.38)$$

Равенство (2.38) показывает, что отображение $t \to T$ есть изометричное преобразование из $\mathbf{L}^2(\mathrm{E} \times \mathrm{F})$ в $\mathscr{B}_2(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$. В действительности это преобразование унитарно: каждое $T \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ может быть получено таким способом из ядра $t \in \mathbf{L}^2(\mathrm{E} \times \mathrm{F})$. Чтобы доказать это, достаточно вспомнить каноническое разложение (2.23) для $T$, которое сходится по норме $\| \ \|_2$ (задача 2.17). Так как частичная сумма этого разложения есть интегральный оператор с ядром

$$t_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k'(y) \overline{\varphi_k(x)} \quad \text{и} \quad \| t_n \|^2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2, \tag{2.39}$$

то отсюда следует, что $T$ есть интегральный оператор с ядром $t(y, x)$, являющимся пределом в $\mathbf{L}^2(\mathrm{E} \times \mathrm{F})$ последовательности $t_n(y, x)$.

## 5. Возмущение ортонормированных систем

В качестве применения теории операторов класса Шмидта рассмотрим возмущение полной ортонормированной системы в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. Пусть $\{\varphi_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$,— полная ортонормированная система в $\mathrm{H}$, а $\{\psi_j\}$ — последовательность векторов из $\mathbf{H}$, не обязательно ортонормированных, такая, что разности $\psi_j - \varphi_j$ в том или ином смысле малы. Задача состоит в нахождении условий, при которых последовательность $\{\psi_j\}$ фундаментальна (полна) или является базисом в $\mathbf{H}$. Напомним, что $\{\psi_j\}$ фундаментальна, если множество всех линейных комбинаций векторов $\psi_j$ плотно в $\mathrm{H}$; $\{\psi_j\}$ называется *базисом* в $\mathrm{H}$, если каждый вектор $u \in \mathrm{H}$ может быть *единственным* образом представлен в виде

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j \psi_j = \text{s-}\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \eta_j \psi_j. \tag{2.40}$$

Условие базиса сильнее условия фундаментальности.

Удобной мерой малости разностей $\psi_j - \varphi_j$ является величина

$$r^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \| \psi_j - \varphi_j \|^2. \tag{2.41}$$

Теорема 2.20[1]. *Пусть $\{\varphi_j\}$ — полная ортонормированная система в $\mathrm{H}$, а $\{\psi_j\}$ — такая последовательность, что $r^2 < \infty$. Тогда $\{\psi_j\}$ является базисом в $\mathbf{H}$, если из (2.40) для $u = 0$ следует, что все $\eta_j = 0$*[2].

Доказательство. Определим линейный оператор $T$ в $\mathbf{H}$, полагая

$$Tu = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \psi_j \quad \text{для} \quad u = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \varphi_j. \tag{2.42}$$

---

[1] См. Бари [1], Крейн [4].

[2] Последнее условие выражают словами: $\psi_j$ **являются** $\omega$**-линейно независимыми.**

Возможность такого определения следует из того, что любое $u \in \mathrm{H}$ имеет единственное разложение вида (2.42) с $\sum |\xi_j|^2 = \|u\|^2$ и что ряд $Tu - u = \sum \xi_j (\psi_j - \varphi_j)$ сходится абсолютно в силу неравенства Шварца:

$$\| Tu - u \|^2 \leqslant (\sum |\xi_j|^2)(\sum \|\psi_j - \varphi_j\|^2) = r^2 \|u\|^2. \tag{2.43}$$

Полагая $\xi_j = \delta_{jk}$ в (2.42), видим, что $T\varphi_k = \psi_k$, $k = 1, 2, \ldots$ . Следовательно,

$$\| T - 1 \|_2^2 = \sum \| (T - 1)\varphi_j \|^2 = \sum \| \psi_j - \varphi_j \|^2 = r^2 < \infty, \tag{2.44}$$

так что $A = T - 1 \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H})$ с $\|A\|_2 \leqslant r$. В частности, $A$ — компактный оператор, и поэтому $T = 1 + A$ имеет обратный $T^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, ибо 0 не является собственным значением $T$ (теорема III.6.26). В самом деле, из $Tu = 0$ следует, что $\sum \xi_j \psi_j = 0$ и, по предположению, все $\xi_j = 0$, так что $u = 0$.

Таким образом, область значений $T$ есть все пространство H, и (2.42) показывает, что для любого элемента $v = Tu$ из H справедливо разложение $v = \sum \xi_j \psi_j$. Единственность этого разложения следует из последнего условия теоремы.

Легко видеть, что это условие удовлетворяется, если $r$ достаточно мало; например, достаточно, чтобы $r < 1$, ибо из проведенного выше доказательства видно, что $T = 1 + A$ имеет в этом случае ограниченный обратный оператор, так как $\|A\| \leqslant \|A\|_2 \leqslant r < 1$ (ряд Неймана для $T^{-1}$). Несколько более слабое условие дает

**Теорема 2.21.** *Пусть* $\{\varphi_j\}$ *— полная ортонормированная система в* H. *Тогда последовательность* $\{\psi_j\}$ *ненулевых векторов является базисом в* H, *если*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left( \|\psi_j - \varphi_j\|^2 - \frac{|(\psi_j - \varphi_j, \psi_j)|^2}{\|\psi_j\|^2} \right) < 1. \tag{2.45}$$

Доказательство. Из определения сразу же следует, что $\{\psi_j\}$ является базисом тогда и только тогда, когда $\{\rho_j \psi_j\}$ есть базис, где $\rho_j$ — любые отличные от нуля комплексные числа. Поэтому $\{\psi_j\}$ является базисом, если можно выбрать $\rho_j$ так, чтобы $\sum \| \rho_j \psi_j - \varphi_j \|^2 < 1$ (см. замечание выше). Наилучший выбор $\rho_j$ обеспечивается минимизацией величины $\| \rho_j \psi_j - \varphi_j \|$. Если $P_j$ — ортогональный проектор на одномерное подпространство, натянутое на $\psi_j$, то этот минимум $r'_j$ равен

$$\begin{aligned} r_j'^2 = \|(1-P_j)\varphi_j\|^2 = \|(1-P_j)(\varphi_j-\psi_j)\|^2 &= \\ = \|\varphi_j-\psi_j\|^2 - \|P_j(\varphi_j-\psi_j)\|^2 &= \\ = \|\varphi_j-\psi_j\|^2 - |(\varphi_j-\psi_j,\ \psi_j)|^2 / \|\psi_j\|^2&. \end{aligned}$$

Формула (2.45) есть в точности условие, что $\sum r_j'^2 < 1$. Отметим, что минимизирующие значения $\rho_j$ отличны от нуля, ибо $r'_j < 1$.

**Следствие 2.22** [1]). *Каждое из следующих условий, в которых $r_j = \|\psi_j - \varphi_j\|$, достаточно для того, чтобы $\{\psi_j\}$ было базисом:*

i) $\sum r_j < 1$;

ii) $\|\psi_j\| = 1$ *для всех* $j$ *и* $\sum r_j^2\left(1 - \frac{1}{4}r_j^2\right) < 1$;

iii) $(\psi_j, \varphi_j) = 1$ *для всех* $j$ *и* $\sum r_j^2/(1+r_j^2) < 1$.

Доказательство. Условие i), очевидно, влечет (2.45). В случаях ii) и iii) положим $\chi_j = \psi_j - \varphi_j$; тогда если $\|\psi_j\| = 1$, то $1 = \|\varphi_j\|^2 = \|\psi_j - \chi_j\|^2 = 1 - 2\mathrm{Re}\,(\chi_j,\ \psi_j) + \|\chi_j\|^2$. Следовательно, $|(\chi_j,\ \psi_j)| \geqslant \mathrm{Re}\,(\chi_j,\ \psi_j) = \|\chi_j\|^2/2 = r_j^2/2$, и из ii) следует (2.45). Если $(\psi_j,\ \varphi_j) = 1$, то $(\chi_j,\ \varphi_j) = 0$, так что $(\psi_j - \varphi_j,\ \psi_j) = (\chi_j,\ \varphi_j + \chi_j) = \|\chi_j\|^2 = r_j^2$ и $\|\psi_j\|^2 = \|\varphi_j + \chi_j\|^2 = 1 + \|\chi_j\|^2 = 1 + r_j^2$. Таким образом, из iii) следует (2.45).

**Следствие 2.23** [2]). *Пусть $\{\varphi_j\}$ — полная ортонормированная система, а $\{\psi_j\}$ — ортонормированная система. Тогда $\{\psi_j\}$ полна, если $\sum r_j^2\left(1 - \frac{1}{4}r_j^2\right) < \infty$, где $r_j = \|\psi_j - \varphi_j\|$.*

Доказательство. Как в доказательстве следствия 2.22, из предположения теоремы следует, что ряд $\sum \|\rho_j\psi_j - \varphi_j\|^2$ сходится для подходящей последовательности комплексных чисел $\rho_j$. Может случиться, что некоторые из $\rho_j$ равны нулю, но имеется лишь конечное число таких $\rho_j$, ибо $\|\varphi_j\| = 1$. Следовательно, мы можем заменить эти обращающиеся в нуль $\rho_j$, скажем, на $\rho_j = 1$, при этом ряд $\sum \|\rho_j\psi_j - \varphi_j\|^2$ по-прежнему сходится и все $\rho_j \neq 0$. Далее, из $\sum \eta_j\rho_j\psi_j = 0$ следует, что $\eta_j = 0$, так как $\psi_j$ — ортогональные и ненулевые векторы. Следовательно, $\{\rho_j\psi_j\}$ образует базис в $\mathbf{H}$ в силу теоремы 2.20, а значит, и $\{\psi_j\}$ образует базис.

---

[1]) См. Хилдинг [1].

[2]) См. Исэки [1].

# § 3. Неограниченные операторы в гильбертовых пространствах

## 1. Общие замечания

Пусть $\mathsf{H}$, $\mathsf{H}'$ — гильбертовы пространства, а $T$ — оператор из $\mathsf{H}$ в $\mathsf{H}'$. Если $T$ плотно определен, то определен сопряженный оператор $T^*$, действующий из $\mathsf{H}' = \mathsf{H}'^*$ в $\mathsf{H} = \mathsf{H}^*$. В соответствии с (III.5.9) обратный график $\mathsf{G}'(-T^*)$ для $-T^*$ есть аннулятор графика $\mathsf{G}(T)$ оператора $T$. Но теперь произведение пространств $\mathsf{H} \times \mathsf{H}'$, в котором лежат графики $\mathsf{G}(T)$ и $\mathsf{G}'(-T^*)$, является гильбертовым пространством, в котором скалярное произведение двух элементов $\{u, u'\}$ и $\{v, v'\}$ полагается по определению равным сумме $(u, v) + (u', v')$ [что согласуется с нашим определением (III.5.4) нормы в $\mathsf{H} \times \mathsf{H}'$]. Если $T$ замкнут, то $\mathsf{G}(T)$ и $\mathsf{G}'(-T^*)$ суть ортогональные дополнения друг к другу в $\mathsf{H} \times \mathsf{H}'$.

В частности, мы имеем теорему III.5.29: если $T$ замыкаем, то $T^*$ замкнут, плотно определен и $T^{**} = \tilde{T}$ (замыкание оператора $T$). Если, в частности, $T \in \mathscr{C}(\mathsf{H}, \mathsf{H}')$, то $T^{**} = T$. Обратно, $T$ замыкаем, если $T^*$ плотно определен, ибо $T^{**} \supset T$.

Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathsf{H}, \mathsf{H}')$ плотно определен. В силу симметрии между $T$ и $T^*$, имеем (см. задачу III.5.27):

$$\mathsf{N}(T^*) = \mathsf{R}(T)^{\perp}, \quad \mathsf{N}(T) = \mathsf{R}(T^*)^{\perp}. \tag{3.1}$$

Заметим, далее, что $\mathsf{R}(T^*)$ замкнуто тогда и только тогда, когда замкнуто $\mathsf{R}(T)$ (теорема IV.5.13). В этом случае

$$\mathsf{H} = \mathsf{N}(T) \oplus \mathsf{R}(T^*), \quad \mathsf{H}' = \mathsf{N}(T^*) \oplus \mathsf{R}(T). \tag{3.2}$$

## 2. Числовая область значений

Для операторов в гильбертовом пространстве $\mathsf{H}$ в различных приложениях оказывается важным понятие *числовой области значений* (или *поля значений*).

Пусть $T$ — оператор в $\mathsf{H}$. Числовая область значений $\Theta(T)$ оператора $T$ есть множество всех комплексных чисел $(Tu, u)$, где $u$ пробегает все $\mathsf{D}(T)$, $\|u\| = 1$. (Мы предполагаем, что $\dim \mathsf{H} > 0$.)

В общем случае множество $\Theta(T)$ не является ни открытым, ни замкнутым, даже если оператор $T$ замкнут. Следующая теорема Хаусдорфа является очень важной, но ее доказательство [1] мы опускаем.

---

[1] Доказательство см. в Стоун [1], стр. 131.

**Теорема 3.1.** *Множество* $\Theta(T)$ *выпукло.*

Обозначим через $\Gamma$ замыкание $\Theta(T)$; $\Gamma$ — замкнутое выпуклое множество. Пусть $\Delta$ — дополнение к $\Gamma$ в комплексной плоскости. Ввиду выпуклости $\Gamma$ простое геометрическое рассуждение приводит к следующему результату: $\Delta$ является связным открытым множеством, за исключением того особого случая, когда $\Gamma$ есть полоса, ограниченная двумя параллельными прямыми (возможен и предельный случай, когда прямые сливаются). В этом особом случае $\Delta$ состоит из двух компонент $\Delta_1$ и $\Delta_2$, являющихся полуплоскостями.

**Теорема 3.2.** *Пусть* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{H})$, *а* $\Gamma$, $\Delta$, $\Delta_1$, $\Delta_2$ *определены так же, как и выше. Для любого* $\zeta \in \Delta$ *оператор* $T - \zeta$ *имеет замкнутую область значений,* $\operatorname{nul}(T-\zeta) = 0$, $\operatorname{def}(T-\zeta)$ *постоянен для* $\zeta \in \Delta$, *за исключением указанного выше особого случая, в котором* $\operatorname{def}(T-\zeta)$ *постоянен в каждом из* $\Delta_1$ *и* $\Delta_2$. [*Это постоянное значение (или пара значений) называется индексом дефекта оператора* $T$.] *Если* $\operatorname{def}(T-\zeta) = 0$ *для* $\zeta \in \Delta$ ($\zeta \in \Delta_1$ *или* $\zeta \in \Delta_2$), *то* $\Delta$ ($\Delta_1$ *или* $\Delta_2$) *есть некоторое подмножество в* $\mathrm{P}(T)$ *и* $\|R(\zeta, T)\| \leqslant 1/\operatorname{dist}(\zeta, \Gamma)$.

Доказательство. Эта теорема является следствием первой теоремы об устойчивости размерности нуль-пространства и дефекта (см. теорему IV.5.17). Отметим прежде всего, что $|(Tu, u) - \zeta| = |((T-\zeta)u, u)| \leqslant \|(T-\zeta)u\|$ для любого $u \in \mathrm{D}(T)$ с $\|u\| = 1$ и любого комплексного числа $\zeta$. Если $\zeta \in \Delta$, так что $\operatorname{dist}(\zeta, \Gamma) = \delta > 0$, то $\|(T-\zeta)u\| \geqslant \delta$ при $\|u\| = 1$, или

$$\|(T-\zeta)u\| \geqslant \delta \|u\| \quad \text{для любого} \quad u \in \mathrm{D}(T). \tag{3.3}$$

Отсюда вытекает, что $\operatorname{nul}(T-\zeta) = 0$ и $\gamma(T-\zeta) \geqslant \delta$ (см. п. IV.5.1, где определено $\gamma$); следовательно, $\mathrm{R}(T-\zeta)$ замкнуто (теорема IV.5.2). Теперь из теоремы IV.5.17 следует, что $\operatorname{def}(T-\zeta) = -\operatorname{ind}(T-\zeta)$ постоянен в $\Delta$, если $\Delta$ связно, и в каждом из $\Delta_k$ в противном случае.

**Следствие 3.3.** *Если* $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, *то* $\Sigma(T)$ *есть подмножество замыкания* $\Theta(T)$.

Доказательство. Множество $\Theta(T)$ и его замыкание $\Gamma$ ограничены, так как $|(Tu, u)| \leqslant \|T\|$ при $\|u\| = 1$. Следовательно, $\Delta$ — связное открытое множество, содержащее внешность круга $|\zeta| \leqslant \|T\|$. Но внешность круга принадлежит $\mathrm{P}(T)$, так что здесь $\operatorname{def}(T-\zeta) = 0$. В силу теоремы 3.2 это же справедливо для всех $\zeta \in \Delta$. Поскольку мы имеем также, что $\operatorname{nul}(T-\zeta) = 0$ для $\zeta \in \Delta$, то отсюда следует, что $\Delta \subset \mathrm{P}(T)$, а это эквивалентно включению $\Gamma \supset \Sigma(T)$.

**Теорема 3.4.** *Если $T$ определен на плотном множестве и $\Theta(T)$ не совпадает со всей комплексной плоскостью, то $T$ замыкаем (следовательно, $T^*$ также плотно определен).*

Доказательство. Так как $\Theta(T)$ — выпуклое множество, не совпадающее со всей плоскостью, то $\Theta(T)$ содержится в полуплоскости. Заменяя $T$ на $\alpha T+\beta$ с некоторыми комплексными числами $\alpha$ и $\beta$, мы можем считать, что $\Theta(T)$ лежит в правой полуплоскости. Это означает, что

$$\operatorname{Re}(Tu,\ u)\geqslant 0 \quad \text{для} \quad u\in \mathbf{D}(T). \tag{3.4}$$

Пусть мы имеем последовательность $u_n\in\mathbf{D}(T)$ такую, что $u_n\to 0$, $Tu_n\to v$; достаточно показать, что $v=0$.

Для любого $w\in\mathbf{D}(T)$ имеем

$$0\leqslant \operatorname{Re}(T(u_n+w),\ u_n+w)=$$
$$=\operatorname{Re}[(Tu_n,\ u_n)+(Tu_n,\ w)+(Tw,\ u_n)+(Tw,\ w)].$$

Отсюда при $n\to\infty$ получаем

$$0\leqslant\operatorname{Re}(v,\ w)+\operatorname{Re}(Tw,\ w).$$

Если мы заменим $w$ на $\alpha w$, $\alpha>0$, разделим получившееся неравенство на $\alpha$ и устремим $\alpha$ к 0, то получим, что $0\leqslant\operatorname{Re}(v,\ w)$. Так как $w\in\mathbf{D}(T)$ произвольно и $\mathbf{D}(T)$ плотно в $\mathbf{H}$, $v$ должно быть нулем.

**Задача 3.5.** Чему равна числовая область значений оператора $T$, определенного матрицей $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ в $C^2$ (двумерное гильбертово пространство)?

**Задача 3.6.** Если $T\in\mathscr{C}(\mathbf{H})$, то существенный спектр оператора $T$ (см. п. IV.5.6) является подмножеством замыкания $\Theta(T)$.

**Задача 3.7.** Если $T$ замыкаем, то $\Theta(T)$ плотно в $\Theta(\tilde{T})$ и множества $\Theta(T)$ и $\Theta(\tilde{T})$ имеют одинаковое замыкание.

## 3. Симметричные операторы

Оператор $T$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ называется *симметричным*, если он имеет плотную область определения и

$$T^*\supset T; \tag{3.5}$$

если

$$T^*=T, \tag{3.6}$$

то $T$ называется *самосопряженным*. Если $\mathbf{D}(T)=\mathbf{H}$, то из (3.5) следует, что $T^*=T$. Таким образом, данное здесь определение симметричного оператора согласуется с определением п. 2.1 для ограниченных операторов.

**Задача 3.8.** Оператор $T$ симметричен тогда и только тогда, когда он определен на плотном множестве и

$$(Tu, v) = (u, Tv) \text{ для любых } u, v \in \mathrm{D}(T). \tag{3.7}$$

**Задача 3.9.** Определенный на плотном множестве оператор $T$ симметричен тогда и только тогда, когда числовая область значений $\Theta(T)$ представляет собой подмножество вещественной прямой.

Из (3.7) видно, что $(Tu, u)$ вещественно. Если $(Tu, u) \geqslant 0$, то симметричный оператор $T$ называется *неотрицательным* (это обозначается так: $T \geqslant 0$). Условие (3.5) показывает, что *симметричный оператор замыкаем*, ибо $T^*$ замкнут. Поскольку из (3.5) следует, что $T^{***} \supset T^{**}$, и так как $T^{**}$ — замыкание $T$, то *замыкание симметричного оператора является симметричным оператором*. Симметричный оператор называется *существенно самосопряженным*, если его замыкание $T^{**}$ самосопряженно.

**Задача 3.10.** Если $T$ — симметричный оператор, то следующие условия эквивалентны:

a) $T$ существенно самосопряженный;
b) $T^*$ симметричный;
c) $T^*$ самосопряженный;
d) $T^{**}$ самосопряженный.

**Задача 3.11.** Если оператор $T$ симметричен, обратим и имеет плотную область значений, то оператор $T^{-1}$ симметричен.

**Задача 3.12.** Замкнутый симметричный оператор ограничен тогда и только тогда, когда его область определения есть все $\mathrm{H}$. [*Указание*: теорема о замкнутом графике.]

**Пример 3.13.** Пусть $(\tau_{jk})$ — (эрмитова) симметричная матрица:

$$\overline{\tau_{jk}} = \tau_{kj}, \quad j, k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{3.8}$$

и пусть

$$\sum_k |\tau_{jk}|^2 < \infty \quad \text{для любого } j. \tag{3.9}$$

Покажем, что матрице $(\tau_{jk})$ можно сопоставить симметричный оператор $T_0$ в $\mathrm{H} = \mathrm{l}^2$. Пусть $\mathrm{D}$ — линейное подпространство в $\mathrm{H}$, натянутое на канонический базис $x_n = (\delta_{kn})$. Подпространство $\mathrm{D}$ является подмножеством области определения максимального оператора $T$, определенного так же, как в примере III.2.3, ибо $Tx_n = (\tau_{kn})$ принадлежит $\mathrm{H}$ в силу (3.8) и (3.9). Определим $T_0$ как сужение $T$ на область $\mathrm{D}$. Оператор $T_0$ симметричен, так как $\mathrm{D}$ плотно в $\mathrm{H}$, и (3.7) справедливо для $T_0$ в силу условия (3.8).

Оператор $T$ не является, вообще говоря, замкнутым или существенно самосопряженным, но можно показать [1], что $T_0^* = T$. Таким образом, $T$ симметричен, только если $T_0$ является существенно самосопряженным (см. задачу 3.10). В общем случае довольно трудно решить, справедливо ли это для данной матрицы $(\tau_{jk})$. Это заведомо так в довольно специальном случае диагональной матрицы: $\tau_{jk} = \lambda_j \delta_{jk}$ с вещественными диагональными элементами $\lambda_j$; доказательство будет дано ниже, но и прямое доказательство также очень просто.

**Пример 3.14.** Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(a, b)$, где $(a, b)$ — конечный или бесконечный интервал; рассмотрим дифференциальный оператор $d/dx$. Пусть $T$ и $\dot{T}$ —

---

[1] См. Стоун [1], стр. 90.

соответствующие максимальный и минимальный операторы в $\mathbf{H}$ (см. пример III.2.7). Из примера III.5.31 следует, что $-\dot{T}^* = T \supset T$, а это означает, что $i\dot{T}$ симметричен. Аналогично можно показать, что оператор $iT_0$ из того же примера симметричен [для конечного интервала $(a, b)$].

Оператор $iT$ не симметричен на конечном интервале $(a, b)$, ибо $-T^* = T_0$ есть собственное сужение $T$. С другой стороны, если $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, то $iT = (i\dot{T})^*$ не только симметричен, но и самосопряжен. Для доказательства достаточно показать, что $iT$ симметричен (задача 3.10). Пусть $u, v \in \mathbf{D}(T)$. Так как $Tu = u'$, то $(Tu)\bar{v} + u\overline{Tv} = (u\bar{v})'$ и

$$\lim_{b'\to\infty} u(b')\,\overline{v(b')} = u(0)\,\overline{v(0)} + \lim_{b'\to\infty}\int_0^{b'} ((Tu)\bar{v} + u\overline{Tv})\,dx \tag{3.10}$$

существует; заметим, что $u, v, Tu, Tv$ принадлежат $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2$. Предел (3.10) должен быть равен нулю, ибо в противном случае $u\bar{v}$ не было бы интегрируемо, а это невозможно в силу того, что $u, v \in \mathbf{L}^2$. Аналогично, $u(x)\,\overline{v(x)} \to 0$ при $x \to -\infty$, так что

$$(Tu, v) + (u, Tv) = \lim_{b'\to\infty} u(b')\,\overline{(b')\,v} - \lim_{a'\to-\infty} u(a')\,\overline{v(a')} = 0. \tag{3.11}$$

Это показывает, что $iT$ симметричен.

Для конечного интервала $(a, b)$ были определены операторы $T_1$, $T_2$, $T_3$, которые являются сужениями оператора $T$ и продолжениями $T_0$ (см. пример III.2.7). Как легко видеть, операторы $iT_1$ и $iT_2$ не являются симметричными; $iT_3$ симметричен тогда и только тогда, когда постоянная $k$, входящая в граничное условие $u(b) = ku(a)$, равна по модулю единице ($k = e^{i\theta}$ с вещественным $\theta$).

## 4. Спектры симметричных операторов

Пусть $T$ — замкнутый симметричный оператор в $\mathbf{H}$; поскольку каждый симметричный оператор замыкаем, то предположение о замкнутости $T$ не является существенным ограничением. Важным свойством оператора $T$ является равенство

$$\|(T - \zeta)\,u\|^2 = \|(T - \operatorname{Re}\zeta)\,u\|^2 + (\operatorname{Im}\zeta)^2\,\|u\|^2, \quad u \in \mathbf{D}(T). \tag{3.12}$$

Его нетрудно получить, заметив, что $T - \operatorname{Re}\zeta$ есть симметричный оператор. Из (3.12) вытекает неравенство

$$\|(T - \zeta)\,u\| \geqslant |\operatorname{Im}\zeta|\,\|u\|, \quad u \in \mathbf{D}(T). \tag{3.13}$$

Отсюда следует, что $T - \zeta$ имеет ограниченный обратный оператор с нормой, не превосходящей $|\operatorname{Im}\zeta|^{-1}$. Следовательно, $\mathbf{R}(T - \zeta)$ замкнута для невещественных $\zeta$. Отсюда в силу первой теоремы об устойчивости размерности нуль-пространства и дефекта (теорема IV.5.17) вытекает, что $\operatorname{def}(T - \zeta)$ постоянно в каждой полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta \gtrless 0$. Это также непосредственно следует из теоремы 3.2; отметим, что числовая область значений $\Theta(T)$ оператора $T$ есть подмножество вещественной оси, и поэтому $\Delta$ в теореме 3.2 либо является связным множеством, либо состоит из указанных выше полуплоскостей. Пара $(m', m'')$ постоянных значений $\operatorname{def}(T-\zeta)$ для $\operatorname{Im}\zeta \gtrless 0$ называется *индексом дефекта* симметричного оператора $T$. Если $T$ не замкнут, то его индекс дефекта определяется как индекс дефекта его замыкания $\tilde{T}$.

В силу равенства (3.1), примененного к $T-\zeta$, $T^*-\zeta = (T-\bar{\zeta})^*$ имеет область значений, совпадающую с $\mathbf{H}$, и размерность нуль-пространства $m''$ или $m'$ в соответствии со знаком $\operatorname{Im}\zeta \gtrless 0$.

Если $m' = 0$, то $\mathbf{R}(T-\zeta)$ при $\operatorname{Im}\zeta > 0$ есть все $\mathbf{H}$ и существует $R(\zeta, T) = (T-\zeta)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$. Другими словами, верхняя полуплоскость принадлежит резольвентному множеству $\mathrm{P}(T)$. Если $m' > 0$, то никакое $\zeta$ из верхней полуплоскости не принадлежит $\mathrm{P}(T)$. Аналогичные результаты справедливы для $m''$ и $\zeta$ с $\operatorname{Im}\zeta < 0$. Таким образом, имеет место следующая альтернатива:

i) $m' = m'' = 0$. Все невещественные числа принадлежат $\mathrm{P}(T)$, спектр $\Sigma(T)$ представляет собой подмножество вещественной оси.

ii') $m' = 0$, $m'' > 0$; $\mathrm{P}(T)$ есть открытая верхняя полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ и $\Sigma(T)$ есть замкнутая нижняя полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta \leqslant 0$.

ii'') $m' > 0$, $m'' = 0$; надо поменять местами слова «верхняя» и «нижняя» в ii').

iii) $m' > 0$, $m'' > 0$; $\mathrm{P}(T)$ пусто и $\Sigma(T)$ есть вся плоскость.

**Задача 3.15.** Случай i) имеет место всякий раз, когда $\mathrm{P}(T)$ содержит хотя бы одно вещественное число.

Замкнутый симметричный оператор называется *максимальным*, если хотя бы одно из чисел $m'$, $m''$ равно нулю [случаи i), ii') или ii'')]. *Максимальный симметричный оператор не имеет собственных симметричных продолжений.* Чтобы доказать это, предположим, что $m' = 0$. Пусть $T_1$ — симметричное продолжение $T$; можно считать $T_1$ замкнутым (в противном случае возьмем его замыкание). Для любого $u \in \mathbf{D}(T_1)$ найдется $v \in \mathbf{D}(T)$ такое, что $(T-i)v = (T_1-i)u$, ибо $\mathbf{R}(T-i) = \mathbf{H}$. Так как $T \subset T_1$, то $(T_1-i)(u-v) = 0$. Отсюда в силу того, что $T_1$ симметричен, получаем $u - v = 0$. Это означает, что $\mathbf{D}(T_1) \subset \mathbf{D}(T)$, и потому $T_1 = T$.

Если и $m'$, и $m''$ равны нулю [случай i)], то $T$ — самосопряженный оператор. Справедлива

**Теорема 3.16.** *Замкнутый симметричный оператор $T$ имеет индекс дефекта* (0, 0) *тогда и только тогда, когда он самосопря-*

*жен. В этом случае резольвента* $R(\zeta, T) = (T - \zeta)^{-1}$ *существует при* $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$ *и*

$$\|R(\zeta, T)\| \leqslant |\operatorname{Im}\zeta|^{-1}, \quad \|(T - \operatorname{Re}\zeta)\,R(\zeta, T)\| \leqslant 1. \quad (3.14)$$

Доказательство. Пусть $T$ имеет индекс дефекта (0, 0). Тогда область значений обоих операторов $T \pm i$ есть все $\mathbf{H}$, так что для каждого $u \in \mathbf{D}(T^*)$ существует $v \in \mathbf{D}(T)$ такое, что $(T - i)\,v = (T^* - i)\,u$. Так как $T \subset T^*$, это можно переписать так: $(T^* - i)(u - v) = 0$. Но размерность нуль-пространства оператора $T^* - i$ равна нулю, ибо $m'' = 0$, и потому $u - v = 0$. Таким образом, $\mathbf{D}(T^*) \subset \mathbf{D}(T)$ и, значит, $T^* = T$.

Обратно, пусть $T^* = T$. Тогда $T^*$ также симметричен, а размерность нуль-пространства операторов $T^* \pm i$ должна быть равна нулю. Но эта размерность есть дефект для $T \mp i$; следовательно, индекс дефекта оператора $T$ есть (0, 0).

Неравенства (3.14) следуют непосредственно из (3.12).

**Задача 3.17.** Симметричный оператор $T$ является существенно самосопряженным тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих условий (ср. с задачей 3.10):

a) $T^*$ не имеет невещественных собственных значений;

b) $\mathbf{R}(T - \zeta)$ плотно в $\mathbf{H}$ для каждого невещественного $\zeta$;

c) $\mathbf{R}(T - \zeta)$ плотно в $\mathbf{H}$ для некоторого $\zeta = \zeta'$ с $\operatorname{Im}\zeta' > 0$ и для некоторого $\zeta = \zeta''$ с $\operatorname{Im}\zeta'' < 0$.

**Задача 3.18.** Если $T$ самосопряжен и обратим, то $T^{-1}$ также самосопряжен. [*Указание*: воспользуйтесь, например, задачей 3.11 и теоремой III.6.15. Отметим, что $T^{-1}$ определен на плотном множестве, так как из $u \in \mathbf{R}(T)^{\perp}$ следует, что $Tu = T^*u = 0$, $u = 0$.]

**Задача 3.19.** Если $T$ — замкнутый симметричный оператор с конечным индексом дефекта, то $T^*$ является конечным продолжением $T$ (см. п. III.2.1).

**Задача 3.20.** Пусть $T$, $S$ — замкнутые симметричные операторы, и пусть $S$ — конечное продолжение $T$ порядка $r$. Если $T$ имеет индекс дефекта $(m', m'')$, то индекс дефекта оператора $S$ равен $(m' - r, m'' - r)$.

**Пример 3.21.** Найдем индекс дефекта замкнутого симметричного оператора $iT_0$ из примера 3.14. Так как $(iT_0)^* = iT$, достаточно решить уравнения $iTu = \pm iu$, т. е. $u' = \pm u$. Решения этих дифференциальных уравнений суть $u(x) = ce^{\pm x}$ (где $c$ — константа). Если интервал $(a, b)$ конечен, эти решения принадлежат $\mathbf{D}(T)$ при любом $c$ и удовлетворяют уравнениям $iTu = \pm iu$. Таким образом, для обоих операторов $iT \pm i$ размерность нуль-пространств равна 1; индекс дефекта для $iT_0$ есть (1,1).

Если $(a, b) = (-\infty, +\infty)$, то указанные выше решения не принадлежат $\mathbf{H}$, если $c \neq 0$. Таким образом, размерность нуль-пространства для $iT \pm i$ равна нулю, и индекс дефекта оператора $i\dot{T}$ равен (0, 0) [1]. Это согласуется с результатом, установленным в примере 3.14 и состоящим в том, что оператор $iT = (i\dot{T})^*$ в этом случае самосопряжен.

Рассмотрим теперь случай полубесконечного интервала $(a, b)$, скажем $a = 0$, $b = \infty$. Тогда функция $e^{-x}$ принадлежит $\mathbf{D}(T)$, а $e^{x}$ нет. Итак, раз-

---

[1] Отметим, что $i\dot{T}$ не замкнут.

мерность нуль-пространства для $iT - i$ равна нулю, тогда как для оператора $iT + i$ она равна единице, и индекс дефекта оператора $i\dot{T}$ есть (1, 0). Замыкание $i\dot{T}$ есть максимальный симметричный оператор, однако он не самосопряжен и не имеет самосопряженного продолжения. (На самом деле $\dot{T} = T_1$.)

Наконец, рассмотрим симметричный оператор $iT_3 \subset iT$ на конечном интервале $(a, b)$ с граничным условием $u(b) = e^{i\theta}u(a)$. Так как $iT_3$ симметричен и является продолжением $iT_0$, а индекс дефекта $iT_0$ равен (1,1), то индекс дефекта $iT_3$ равен (0, 0) и, стало быть, $iT_3$ самосопряжен.

Задача 3.22. Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{E})$, а $T$ — максимальный оператор умножения на вещественную измеримую функцию $f(x)$ (см. пример III.2.2). Тогда $T$ самосопряжен.

## 5. Резольвента и спектр самосопряженных операторов

Пусть $T$ — самосопряженный оператор в H. Его спектр $\Sigma(T)$ есть подмножество вещественной оси, и резольвента $R(\zeta) = R(\zeta, T) = (T - \zeta)^{-1}$ определена по крайней мере для всех невещественных $\zeta$. В силу (III.6.50)

$$R(\zeta)^* = R(\bar{\zeta}). \tag{3.15}$$

Отсюда следует, что $R(\zeta)$ — нормальный оператор, ибо $R(\zeta)$ для различных $\zeta$ коммутируют друг с другом.

В частности, в силу (2.4) имеем $\|R(\zeta)\| = \operatorname{spr} R(\zeta)$ и, следовательно, в силу результата задачи III.6.16,

$$\|R(\zeta)\| = 1/\operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T)) \leqslant |\operatorname{Im}\zeta|^{-1}. \tag{3.16}$$

Далее,

$$\|TR(\zeta)\| = \sup_{\lambda\in\Sigma(T)} |\lambda|\,|\lambda - \zeta|^{-1}, \tag{3.17}$$

ибо $TR(\zeta) = 1 + \zeta R(\zeta)$, так что $\|TR(\zeta)\| = \operatorname{spr}(1 + \zeta R(\zeta)) = \sup|1 + \zeta(\lambda - \zeta)^{-1}| = \sup|\lambda(\lambda - \zeta)^{-1}|$. [Отметим, что спектр $1 + \zeta R(\zeta)$ есть образ $\Sigma(T)$ при отображении $\lambda \to 1 + \zeta(\lambda - \zeta)^{-1}$.]

Если вещественное число $\alpha$ принадлежит резольвентному множеству $\mathrm{P}(T)$, то $\mathrm{P}(T)$ содержит некоторую окрестность $\alpha$; мы говорим тогда, что $\Sigma(T)$ имеет *лакуну* в точке $\alpha$. Заметим, что $\mathrm{P}(T)$ — связное множество, если $\Sigma(T)$ имеет хотя бы одну лакуну.

Предположим, что $\Sigma(T)$ имеет лакуны в точках $\alpha$ и $\beta$, $\alpha < \beta$. Пусть $\Gamma$ — замкнутая кривая, проходящая через $\alpha$ и $\beta$ и ограничивающая часть $\Sigma(T)$ между $\alpha$ и $\beta$. Далее, предположим, что $\Gamma$ симметрична относительно вещественной оси [например, в качестве $\Gamma$ можно взять круг, для которого отрезок $(\alpha, \beta)$ является диаметром]. Спектр $\Sigma(T)$ разбивается кривой $\Gamma$ на две части; часть $\Sigma'$ лежит в интервале $(\alpha, \beta)$, а часть $\Sigma''$ лежит вне этого интервала. Пусть

$$\mathrm{H} = \mathrm{M}' \oplus \mathrm{M}'' \tag{3.18}$$

есть соответствующее разложение пространства $\mathrm{H}$ (см. п. III.6.4). Здесь $\mathrm{M}'$ и $\mathrm{M}''$ — ортогональные дополнения друг к другу, ибо проектор $P$ на $\mathrm{M}'$ параллельно $\mathrm{M}''$ ортогонален:

$$P^* = P; \tag{3.19}$$

это следует из определенных формулой (III.6.52) выражений для $P$ и $P^*$, а они совпадают ввиду того, что $T^* = T$ и кривая $\Gamma$ симметрична относительно вещественной оси.

Если $\Sigma(T)$ имеет изолированную точку $\lambda$ (которая обязательно вещественна), то для $R(\zeta) = R(\zeta, T)$ мы получаем разложение Лорана (III.6.32). Здесь не только $P$, но также $D$ и $S$ симметричны (и ограничены). Из (III.6.28) следует, что $D^* = D$, а из (III.6.31), что $S^* = S$. Но $D$ как симметричный квазинильпотентный оператор должен быть нулевым (см. задачу 2.4). Следовательно, $(T - \lambda) P = 0$ и $\lambda$ — *собственное значение* $T$ с соответствующим собственным подпространством $\mathrm{M}' = P\mathrm{H}$. Отметим, что в этом случае $\mathrm{M}'$ является как геометрическим, так и алгебраическим собственным подпространством. Далее, имеем

$$\| S \| = 1/d, \quad \text{где} \quad d = \operatorname{dist}(\lambda, \Sigma''), \tag{3.20}$$

а $\Sigma''$ — спектр $T$ с единственной исключенной точкой $\lambda$. Мы будем называть $d$ *изолирующим расстоянием* собственного значения $\lambda$. Соотношение (3.20) можно доказать так же, как и (3.16), если принять во внимание то, что $S$ можно рассматривать как значение в точке $\lambda$ резольвенты части $T_{\mathrm{M}''}$ оператора $T$, спектр которой есть в точности $\Sigma''$ [см. (III.6.31)], и то, что $\mathrm{M}' \perp \mathrm{M}''$.

Аналогичные результаты имеют место при наличии в спектре $\Sigma(T)$ нескольких изолированных точек $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$. Имеем [см. (III.6.35)]

$$R(\zeta) = -\sum_{h=1}^{s} \frac{P_h}{\zeta - \lambda_h} + R_0(\zeta), \tag{3.21}$$

где $P_h$ обладают следующими свойствами:

$$P_h^* = P_h, \quad P_h P_k = \delta_{hk} P_h, \tag{3.22}$$

а $R_0(\zeta)$ голоморфна при $\zeta = \lambda_h$, $h = 1, \ldots, s$. И снова $\lambda_h$ — собственные значения оператора $T$ с соответствующими собственными подпространствами $\mathrm{M}_h = P_h\mathrm{H}$, ортогональными друг к другу.

## 6. Обыкновенные дифференциальные операторы второго порядка

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu=-\frac{d}{dx}p(x)\frac{du}{dx}+q(x)u,\quad a<x<b, \qquad (3.23)$$

где $p(x)$ — положительная непрерывно дифференцируемая функция, а $q(x)$ — вещественная непрерывная функция на открытом интервале $(a, b)$. Оператор $L$ *формально самосопряжен*: $M = L$, где $M$ — формально сопряженный к $L$ оператор, определенный формулой (III.2.27). Таким образом,

$$\int_{a'}^{b'}((Lu)v-uLv)\,dx=[puv'-pu'v]_{a'}^{b'},\quad a<a'<b'<b. \qquad (3.24)$$

Рассмотрим линейные операторы $T$, $\dot{T}$ и т. д., построенные по $L$ в п. III.2.3, где теперь $\mathrm{X} = \mathrm{H} = \mathrm{L}^2(a, b)$ (см. также пример III.5.32). В силу (III.5.14) имеет место соотношение $\dot{T}^* = T \supset \dot{T}$, так что *минимальный оператор $\dot{T}$ симметричен*; *$\dot{T}$ существенно самосопряжен тогда и только тогда, когда максимальный оператор $T$ симметричен* (см. задачу 3.10). Будет ли это верно, зависит от свойств коэффициентов $p(x)$, $q(x)$.

Это заведомо не так, если $(a, b)$ — конечный интервал, функции $p(x)$, $q(x)$ непрерывны в замкнутом интервале $[a, b]$ и $p > 0$ (*регулярный* случай). Тогда $T$ не является симметричным; замыкание $\dot{T}$ есть в точности оператор $T_0$ с граничным условием $u(a) = u'(a) = u(b) = u'(b) = 0$ и $T_0$ имеет индекс дефекта (2.2). Это очевидно, поскольку $T_0^* = T$ и уравнение $(T \pm i)u = 0$ имеет два линейно независимых решения (принадлежащие $\mathrm{H}$). Существует бесконечное множество самосопряженных операторов $H$ таких, что $T_0 \subset H \subset T$. Не пытаясь определить все[1] такие $H$, отметим лишь, что $T_1$, $T_2$ и $T_3$ из п. III.2.3 являются такими операторами; это немедленно следует из последних результатов примера III.5.32 ввиду того, что $S = T$.

Желая получить типичный пример *сингулярного* дифференциального оператора, рассмотрим случай, когда $(a, b) = (-\infty, +\infty)$. Мы покажем, что *$\dot{T}$ существенно самосопряжен* (*а $T$ самосопряжен*), *если $p(x) > 0$ ограничена, а $q(x)$ ограничена снизу на $(-\infty, +\infty)$*. Без ограничения общности можно считать, что $q(x) \geqslant 1$, ибо добавление вещественной постоянной к $T$ не влияет на его самосопряженность. Тогда

$$(\dot{T}u, u)=\int_{-\infty}^{\infty}(p\,|u'|^2+q\,|u|^2)\,dx \geqslant \|u\|^2,\quad u \in \mathrm{D}(\dot{T}), \qquad (3.25)$$

так что числовая область значений $\Theta(\dot{T})$ лежит справа от $\zeta = 1$, и это же верно для $\Theta(\tilde{\dot{T}})$ (см. задачу 3.7). Отсюда следует, что дополнение к $\Theta(\tilde{\dot{T}})$ есть открытое связное множество, содержащее начало координат. Поэтому для доказательства самосопряженности $\tilde{\dot{T}}$ достаточно показать, что $\mathrm{R}(\tilde{\dot{T}})$ имеет нулевой дефект или что размерность нуль-пространства оператора $T = \dot{T}^*$ равна нулю (см. п. 3 и 4).

---

[1] По этому поводу см. Стоун [1].

Предположим теперь, что $Tu = 0$. Возьмем любую гладкую вещественную функцию $w(x)$, обращающуюся в нуль вне конечного интервала. Тогда $v = wu$ принадлежит $\mathrm{D}(\tilde{\dot{T}})$ (см. задачу .5.33), и прямое вычисление дает

$$\tilde{\dot{T}}v = Lv = wLu - (pw')'\,u - 2pw'u'.$$

Так как $Lu = Tu = 0$, отсюда следует, что

$$(\tilde{\dot{T}}v,\ v) = -\int\limits_{-\infty}^{\infty}(pw')'\,w\,|u|^2\,dx - 2\int\limits_{-\infty}^{\infty}pw'wu'\bar{u}\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty}pw'^2\,|u|^2\,dx + \int\limits_{-\infty}^{\infty}pw'w\,(u\bar{u}' - u'\bar{u})\,dx \qquad (3.26)$$

(интегрирование по частям). Так как $(\tilde{\dot{T}}v,\ v)$ вещественно, первый член в правой части (3.26) вещественный, а второй чисто мнимый, то этот второй член равен нулю. Поскольку $(\tilde{\dot{T}}v,\ v) \geqslant \|v\|^2$, получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}w^2\,|u|^2\,dx = \|v\|^2 \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}pw'^2\,|u|^2\,dx \leqslant c\int\limits_{-\infty}^{\infty}w'^2\,|u|^2\,dx, \qquad (3.27)$$

где $p(x) \leqslant c$ по предположению.

Из (3.27) легко получить, что $u = 0$. С этой целью положим $w(x)$ равной 1 при $|x| \leqslant r$ с $|w'| \leqslant s$ всюду. Тогда (3.27) дает

$$\int\limits_{-r}^{r}|u|^2\,dx \leqslant \int\limits_{-\infty}^{\infty}w^2\,|u|^2\,dx \leqslant c\int\limits_{-\infty}^{\infty}w'^2\,|u|^2\,dx \leqslant cs^2\int\limits_{|x|\geqslant r}|u|^2\,dx. \qquad (3.28)$$

При фиксированном $s$ можно брать $r$ сколь угодно большим. Полагая $r \to \infty$ при фиксированном $s$, получаем $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|u|^2\,dx = 0$, поскольку известно, что $u \in \mathrm{L}^2$. Таким образом, $u = 0$.

**Задача 3.23.** Сделанное выше предположение о том, что функция $p(x)$ ограничена, может быть заменено более слабым условием. что интегралы от $p(x)^{-1/2}$ на интервалах $(-\infty,\ 0)$ и $(0,\ \infty)$ расходятся.

Наконец, рассмотрим случай $(a,\ b) = (0,\ \infty)$ и предположим, что $p(x)$ положительна и ограничена, а $q(x)$ ограничена снизу на $[0,\ \infty)$ [1]. Соображения, аналогичные приведенным выше, показывают, что $\tilde{\dot{T}}$ имеет индекс дефекта (1,1). Типичное самосопряженное продолжение $T_1$ оператора $\tilde{\dot{T}}$ получается сужением $T$ с помощью граничного условия $u(0) = 0$. И снова предположение о том, что $p(x)$ ограничена, можно заменить условием $\int\limits_{0}^{\infty}p(x)^{-1/2}\,dx = \infty$. Провести подробное доказательство мы предоставляем читателю.

---

[1] Функция $p(x)$ может стремиться к 0, а $q(x)$ может стремиться к $+\infty$ при $x \to \infty$.

## 7. Операторы $T^*T$

Следующая теорема фон Неймана имеет фундаментальное значение.

**Теорема 3.24.** *Пусть* $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}'$ *— гильбертовы пространства, а* $T \in \mathscr{C}(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$ *определен на плотном множестве. Тогда оператор* $T^*T$ *самосопряжен в* $\mathbf{H}$ *и* $\mathbf{D}(T^*T)$ *есть ядро* $T$.

Доказательство. Как указано в п. 1, графики $\mathbf{G}(T)$ и $\mathbf{G}'(-T^*)$ являются ортогональными дополнениями друг к другу в гильбертовом пространстве $\mathbf{H} \times \mathbf{H}'$. Поэтому любой вектор $\{u, u'\} \in \mathbf{H} \times \mathbf{H}'$ можно представить в виде $\{v, Tv\} + \{-T^*v', v'\}$ с некоторыми $v$ и $v'$, $v \in \mathbf{D}(T)$, $v' \in \mathbf{D}(T^*)$. Если, в частности, $u' = 0$, то $u = v - T^*v'$ и $0 = Tv + v'$. Следовательно, $Tv = -v' \in \mathbf{D}(T^*)$ и $u = (1 + T^*T)\,v$. Так как $u \in \mathbf{H}$ — произвольный вектор, то оператор $S = 1 + T^*T$ имеет область значений, совпадающую с $\mathbf{H}$. Легко видеть, что $S^{-1}$ симметричен и $\| S^{-1} \| \leqslant 1$. Таким образом, $S^{-1}$ симметричен и принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{H})$; значит, он самосопряжен. Следовательно, $S$ и $T^*T$ также самосопряжены (см. задачу 3.18). Отсюда следует, что $T^*T$ плотно определен, что отнюдь не очевидно.

Чтобы доказать, что $\mathbf{D} = \mathbf{D}(T^*T)$ — ядро $T$, достаточно показать, что множество всех элементов $\{v, Tv\}$ с $v \in \mathbf{D}$ плотно в $\mathbf{G}(T)$ (см. п. III.5.3). Таким образом, нам нужно показать только, что элемент $\{u, Tu\}$ с $u \in \mathbf{D}(T)$, ортогональный всем $\{v, Tv\}$, где $v \in \mathbf{D}$, равен нулю. Но из этого условия ортогональности следует, что $0 = (u, v) + (Tu, Tv) = (u, (1 + T^*T)\,v) = (u, Sv)$. А так как $Sv$ заполняет все пространство $\mathbf{H}$, когда $v$ пробегает $\mathbf{D}$, то $u = 0$, что и требовалось доказать.

**Пример 3.25.** Рассмотрим операторы $T$, $T_0$ и т. д. из примера 3.14 для конечного интервала $(a, b)$. Мы знаем, что $T_0^* = -T$, $T_1^* = -T_2$, $T_2^* = -T_1$, $T^* = -T_0$ (см. также пример III.5.31). Итак, имеем $T^*T = -T_0T$; это дифференциальный оператор $-d^2/dx^2$ с граничным условием $Tu \in \mathbf{D}(T_0)$, т. е. $u'(a) = u'(b) = 0$ (совпадающий с $T_2$ из п. III.2.3 в специальном случае, когда $p_0 = -1$, $p_1 = p_2 = 0$, $h_a = h_b = 0$). Далее, имеем $T_0^*T_0 = -TT_0$; это тот же дифференциальный оператор $-d^2/dx^2$ с граничным условием $u(a) = u(b) = 0$ (он совпадает с $T_1$ из того же примера). Наконец, $T_1^*T_1 = -T_2T_1$ есть тот же дифференциальный оператор с граничным условием $u(a) = u'(b) = 0$, а $T_2^*T_2 = -T_1T_2$ получается из него заменой $a$ на $b$ и $b$ на $a$. Самосопряженность этих дифференциальных операторов является непосредственным следствием теоремы 3.24.

**Пример 3.26.** Конструкция, подобная указанной выше, в применении к дифференциальным операторам второго порядка из п. III.2.3 с $\mathbf{X} = \mathbf{H} = \mathbf{L}^2$, приводит к различным самосопряженным дифференциальным операторам четвертого порядка.

## 8. Нормальные операторы

Самосопряженные операторы представляют собой особый случай *нормальных операторов*. Определение не обязательно ограниченного нормального оператора в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ формально такое же, как для нормального оператора из $\mathscr{B}(\mathbf{H})$: $T$ является нормальным оператором, если он замкнут, определен на плотном множестве и

$$T^*T = TT^*; \tag{3.29}$$

заметим, что оба оператора $T^*T$ и $TT^*$ самосопряжены (см. предыдущий пункт). Из (3.29) следует, что $\| Tu \| = \| T^*u \|$ для $u \in \mathbf{D} \equiv \mathbf{D}(T^*T) = \mathbf{D}(TT^*)$. Так как $\mathbf{D}$ является ядром для $T$ и $T^*$, то $\mathbf{D}(T) = \mathbf{D}(T^*) \equiv \mathbf{D}_1 (\supset \mathbf{D})$ и $\| Tu \| = \| T^*u \|$ для любого $u \in \mathbf{D}_1$.

Для любых комплексных чисел $\zeta$, $\zeta'$ имеем $\mathbf{D}[(T^* - \zeta')(T - \zeta)] = \mathbf{D}$. В самом деле, из того, что $u \in \mathbf{D}[(T^* - \zeta')(T - \zeta)]$, вытекает, что $u \in \mathbf{D}_1$ и $Tu - \zeta u \in \mathbf{D}_1$; следовательно, $Tu \in \mathbf{D}_1$ и поэтому $u \in \mathbf{D}$. Обратное включение очевидно. Поскольку, аналогично, $\mathbf{D}[(T - \zeta)(T^* - \zeta')] = \mathbf{D}$, то из (3.29) вытекает, что $(T^* - \zeta')(T - \zeta) = (T - \zeta)(T^* - \zeta')$. Отсюда, в частности, следует, что если $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ и $\zeta' \in \mathrm{P}(T^*)$, то [мы пишем $R(\zeta) = R(\zeta, T)$, $R^*(\zeta) = R(\zeta, T^*)$]

$$R^*(\zeta') R(\zeta) = R(\zeta) R^*(\zeta'). \tag{3.30}$$

Равенство (3.30) означает просто, что резольвенты $R(\zeta)$ и $R^*(\zeta')$ коммутируют. Поскольку в силу (III.6.50) $R^*(\zeta') = R(\bar{\zeta}')^*$, то $R(\zeta)$ — нормальный оператор. Как и в (3.16) и (3.17), имеем

$$\begin{gathered} \| R(\zeta, T) \| = \frac{1}{\operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T))} = \sup_{\lambda \in \Sigma(T)} |\zeta - \lambda|^{-1}, \\ \| TR(\zeta, T) \| = \sup_{\lambda \in \Sigma(T)} |\lambda(\zeta - \lambda)^{-1}|. \end{gathered} \tag{3.31}$$

Предположим, что спектр $\Sigma(T)$ нормального оператора $T$ разделен на две части $\Sigma'$ и $\Sigma''$. Проектор $P$, ассоциированный с этим разбиением, и его сопряженный $P^*$ снова задаются формулами (III.6.52). Из (3.30) следует, что $P$ и $P^*$ коммутируют, так что $P$ нормален. Как и в конечномерном случае, это означает, что $P$ — ортогональный проектор (см. задачу I.6.30). Если $\Sigma'$ состоит из одной точки, то соответствующий квазинильпотентный оператор $D$ аналогичным образом оказывается нормальным, а значит, $D = 0$ (см. задачу 2.4). Таким образом, мы приходим к тому же выражению (3.21) для $R(\zeta)$, как и в случае самосопряженного оператора $T$, когда $\Sigma(T)$ содержит изолированные собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, с единственным отличием в том, что собственные значения $\lambda_h$ не обязательно вещественны.

Задача 3.27. Если $T$ нормален, то $T$ и $T^*$ имеют одинаковое нуль-пространство.

Пусть $T$ — нормальный оператор с компактной резольвентой (см. п. III.6.8). Применение (2.19) к резольвенте $R(\zeta) = R(\zeta, T)$ приводит к формуле $R(\zeta) = \sum\limits_{h=1}^{\infty} \mu_h P_h$, где $\mu_h$ — собственные значения $R(\zeta)$ и $\mu_h \to 0$ при $h \to \infty$, а $P_h$ — соответствующие собственные проекторы. Ортогональное семейство $\{P_h\}$ полно, так как $R(\zeta)$ имеет нуль-пространство, состоящее из одного нуля (см. теорему 2.10). Но $R(\zeta)$ и $T$ имеют одинаковое множество собственных проекторов, а собственные значения $\lambda_h$ оператора $T$ связаны с $\mu_h$ соотношением $\mu_h = (\lambda_h - \zeta)^{-1}$. Таким образом, получаем

$$R(\zeta) = \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_h - \zeta} P_h, \quad \lambda_h \to \infty, \quad h \to \infty, \tag{3.32}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} P_h = 1 \text{ (сильная сходимость).} \tag{3.33}$$

Пример 3.28. Равенство (3.32) справедливо для *всех* самосопряженных сужений оператора $iT$ из примера 3.21. Это же верно для всех самосопряженных сужений оператора $T$ из п. 6 в *регулярном* случае (см. пример III.6.31). Все эти операторы имеют дискретные спектры, состоящие из *вещественных* собственных значений конечной кратности (которая не превышает порядка $m$ рассматриваемого дифференциального оператора, поскольку дифференциальное уравнение порядка $m$ имеет не более $m$ линейно независимых решений).

## 9. Приведение симметричных операторов

Предположим, что симметричный оператор $T$ разложен в соответствии с разложением пространства $\mathbf{H} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{M}^{\perp}$ в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}^{\perp}$. В силу (III.5.24) это возможно только тогда, когда $T$ коммутирует с ортогональным проектором $P$ на $\mathbf{M}$:

$$PT \subset TP. \tag{3.34}$$

В этом случае мы говорим, что $T$ *приведен* подпространством $\mathbf{M}$. Так как $1 - P$ есть проектор на $\mathbf{M}^{\perp}$, то $T$ приводится подпространством $\mathbf{M}$ тогда и только тогда, когда он приводится подпространством $\mathbf{M}^{\perp}$.

*Симметричный оператор $T$ приводится подпространством* $\mathbf{M}$ *тогда и только тогда, когда из $u \in \mathbf{D}(T)$ следует, что $Pu \in$*

$\in \mathbf{D}(T)$ и $TPu \in \mathbf{M}$. Утверждение «только тогда» очевидно в силу (3.34); докажем утверждение «тогда». Из нашего предположения следует, что $TPu = PTPu$ для каждого $u \in \mathbf{D}(T)$. Следовательно, $(u, PTPv) = (PTPu, v) = (TPu, v) = (u, PTv)$ для всех $u, v \in \in \mathbf{D}(T)$, откуда $PTPv = PTv$. Итак, $TPu = PTPu = PTu$ для $u \in \mathbf{D}(T)$, что эквивалентно соотношению (3.34).

**Задача 3.29.** Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{M}_1 \oplus \mathbf{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{M}_s$ есть разложение $\mathbf{H}$ в прямую сумму взаимно ортогональных подпространств. Если симметричный оператор $T$ приводится каждым $\mathbf{M}_j$, то $T$ разлагается в смысле п. III.5.6 в соответствии с указанным выше разложением пространства $\mathbf{H}$.

## 10. Полуограниченные и аккретивные операторы

Говорят, что симметричный оператор $T$ ограничен снизу, если его числовая область значений (являющаяся подмножеством вещественной оси) ограничена снизу, т. е. если

$$(Tu, u) \geqslant \gamma\,(u, u), \quad u \in \mathbf{D}(T). \tag{3.35}$$

В этом случае мы пишем $T \geqslant \gamma$. Наибольшее число $\gamma$, обладающее этим свойством, называется *нижней границей* (или *нижней гранью*) $T$. Аналогично определяется ограниченность сверху и верхняя грань. Симметричный оператор, ограниченный сверху или снизу, называется *полуограниченным*.

Если $T$ ограничен одновременно сверху и снизу, то он ограничен и его норма равна наибольшей по абсолютной величине грани. Доказательство такое же, как в конечномерном случае [см. (I.6.33)]. В этом случае $T \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$, если $T$ замкнут.

Если $T$ самосопряжен, то $T$ ограничен снизу (с нижней гранью $\gamma_T$) тогда и только тогда, когда $\Sigma(T)$ ограничено снизу (с нижней гранью $\gamma_\Sigma$). В самом деле, пусть $T$ ограничен снизу. Тогда открытое множество $\Delta$, дополнительное к замыканию $\Theta(T)$, связно, включает в себя вещественные числа $\zeta$, $\zeta < \gamma_T$, и содержится в резольвентном множестве $\mathrm{P}(T)$ (см. теорему 3.2). Итак, $\Sigma(T)$ ограничено снизу и его нижняя грань $\gamma_\Sigma \geqslant \gamma_T$. Обратно, пусть $\Sigma(T)$ ограничено снизу, а $\gamma_\Sigma$ есть нижняя грань. Положим $T' = T - \gamma_\Sigma$. Спектр $T'$ лежит на неотрицательной вещественной полуоси, и для любого $\alpha > 0$ имеем, в силу (3.14), $\|(T' + \alpha)^{-1}\| = \alpha^{-1}$. Поэтому для любого $u \in \mathbf{D}(T)$ выполняется неравенство $\|u\| \leqslant \alpha^{-1} \|(T' + \alpha)\,u\|$ и, следовательно,

$$\|u\|^2 \leqslant \alpha^{-2} \|T'u\|^2 + 2\alpha^{-}\,(T'u, u) + \|u\|^2, \tag{3.36}$$

или $0 \leqslant \alpha^{-1} \|T'u\|^2 + 2\,(T'u, u)$. Устремляя $\alpha$ к $\infty$, получаем, что $(T'u, u) \geqslant 0$, так что $T' \geqslant 0$, $T \geqslant \gamma_\Sigma$. Таким образом, $T$ ограничен снизу и $\gamma_T \geqslant \gamma_\Sigma$.

Оператор $T$ в $\mathrm{H}$ называется *аккретивным* [1], если его числовая область значений $\Theta(T)$ есть некоторое подмножество правой полуплоскости, т. е. если

$$\mathrm{Re}\,(Tu,\ u) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathrm{D}(T). \tag{3.37}$$

Если $T$ замкнут, то, как следует из результатов п. 2, $\mathrm{def}\,(T-\zeta)=\mu$ постоянен для $\mathrm{Re}\,\zeta<0$. Если $\mu=0$, то открытая левая полуплоскость содержится в резольвентном множестве $\mathrm{P}(T)$ и

$$\left.\begin{array}{l}(T+\lambda)^{-1}\in\mathscr{B}(\mathrm{H})\\ \|(T+\lambda)^{-1}\|\leqslant(\mathrm{Re}\,\lambda)^{-1}\end{array}\right\}\ \text{при}\ \mathrm{Re}\,\lambda>0. \tag{3.38}$$

Оператор $T$, удовлетворяющий условиям (3.38), мы будем называть *m-аккретивным* [2].

*m-аккретивный оператор $T$ является максимальным аккретивным оператором* в том смысле, что $T$ аккретивен и не имеет собственных аккретивных продолжений. Действительно, рассуждения, использованные выше, приводят к неравенству (3.36), в котором $T'$ заменено на $T$ и $(T'u,\ u)$ — на $\mathrm{Re}\,(Tu,\ u)$, а также к тому, что $\mathrm{Re}\,(Tu,\ u)\geqslant 0$. Таким образом, $T$ аккретивен. Пусть $T_1$ — аккретивное продолжение $T$. Тогда $(T_1+\lambda)^{-1}$ существует и является продолжением $(T+\lambda)^{-1}$ при $\mathrm{Re}\,\lambda>0$. Но область определения последнего оператора есть все $\mathrm{H}$, поэтому $(T_1+\lambda)^{-1}$ и $(T+\lambda)^{-1}$ совпадают, а значит, и $T_1=T$.

*m-аккретивный оператор $T$ определен на плотном множестве.* В самом деле, поскольку $\mathrm{D}(T)$ есть область значений оператора $(T+\lambda)^{-1}$, $\mathrm{Re}\,\lambda>0$, достаточно показать, что из $((T+\lambda)^{-1}u,\ v)=0$ для всех $u\in\mathrm{H}$ следует, что $v=0$. Полагая $u=v$ и $(T+\lambda)^{-1}v=w$, получаем: $0=\mathrm{Re}\,((T+\lambda)^{-1}v,\ v)=$ $=\mathrm{Re}\,(w,\ (T+\lambda)\,w)\geqslant\mathrm{Re}\,\lambda\,\|w\|^2$; следовательно, $w=0$, $v=0$.

Будем говорить, что $T$ — *квазиаккретивный оператор*, если $T+\alpha$ аккретивен для некоторого числа $\alpha$. Это эквивалентно условию, что $\Theta(T)$ лежит в полуплоскости вида $\mathrm{Re}\,\zeta\geqslant\mathrm{const}$. Аналогично будем говорить, что $T$ — *квази-m-аккретивный оператор*, если $T+\alpha$ является *m-аккретивным* для некоторого $\alpha$.

Как и $m$-аккретивные операторы, квази-$m$-аккретивные операторы максимальны и плотно определены.

---

[1] В этом случае оператор $-T$ называется *диссипативным*. Диссипативные операторы изучались Фридрихсом [6] (в этой работе и был введен термин «аккретивный») и Филлипсом [2] — [4]. См. также Дольф [1], [2], Дольф и Пенцлин [1], М. С. Лившиц [1], Бродский и Лившиц [1]. Некоторые авторы определяют диссипативный оператор условием $\mathrm{Im}\,(Tu,\ u)\geqslant 0$. Люмер и Филлипс [1] дали определение диссипативных операторов в банаховых пространствах.

[2] $m$-аккретивный оператор эквивалентен замкнутому максимальному аккретивному оператору; здесь мы не доказываем полностью этого утверждения; см. Филлипс [3].

**Задача 3.30.** Если $T$ — аккретивный и обратимый оператор, то $T^{-1}$ аккретивен.

**Задача 3.31.** Если $T$ есть $m$-аккретивный оператор, то $T^*$, $(T+\lambda)^{-1}$ и $T(T+\lambda)^{-1}$ также $m$-аккретивны при $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Если $T$ является $m$-аккретивным и обратимым, то $T^{-1}$ тоже $m$-аккретивен.

**Задача 3.32.** Если $T$ симметричен, то $T$ является $m$-аккретивным оператором тогда и только тогда, когда он самосопряжен и неотрицателен. Если $T$ самосопряжен и неотрицателен, то такое же утверждение верно для $(T+\lambda)^{-1}$ и $T(T+\lambda)^{-1}$ при $\lambda > 0$. Кроме того, $\| T(T+\lambda)^{-1} \| \leqslant 1$ и

$$0 \leqslant (\mathrm{T}(1+\alpha T)^{-1} u, u) \leqslant (Tu, u), \quad u \in \mathrm{D}(T), \quad \alpha \geqslant 0. \tag{3.39}$$

**Задача 3.33.** Если $T$ является $m$-аккретивным, то $(1+n^{-1}T)^{-1} \to 1$ в сильном смысле. [*Указание*: $\|(1+n^{-1}T)^{-1}\| \leqslant 1$ и $\|(1+n^{-1}T)^{-1}u - u\| = n^{-1}\|(1+n^{-1}T)^{-1}Tu\| \leqslant n^{-1}\|Tu\| \to 0$, если $u \in \mathrm{D}(T)$.]

У некоторых квазиаккретивных операторов $T$ числовая область значений $\Theta(T)$ не только лежит в полуплоскости $\operatorname{Re}\zeta \geqslant \mathrm{const}$, но является подмножеством сектора $|\arg(\zeta-\gamma)| \leqslant \theta < \pi/2$. В таком случае $T$ называется *секториальнозначным* или просто *секториальным* оператором; $\gamma$ и $\theta$ называются *вершиной* и *полууглом* секториального оператора $T$ (они определены неоднозначно). Оператор $T$ называется *m-секториальным*, если он секториальный и квази-$m$-аккретивный.

Если $T$ есть $m$-секториальный оператор с вершиной $\gamma$ и полууглом $\theta$, то $\Sigma(T)$ представляет собой подмножество сектора $|\arg(\zeta-\gamma)| \leqslant \theta$. Другими словами, $\mathrm{P}(T)$ содержит внешность этого сектора. Это следует из теоремы 3.2, поскольку дополнение к $\Theta(T)$ является связным множеством.

**Пример 3.34.** Рассмотрим формальный регулярный дифференциальный оператор $Lu = p_0(x)u'' + p_1(x)u' + p_2(x)u$ на конечном интервале $[a, b]$ (см. п. III.2.3), где $p_k(x)$ вещественны и $p_0(x) < 0$. Пусть $T_1$ — оператор, определенный в гильбертовом пространстве $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(a, b)$ по оператору $L$ с граничным условием $u(a) = u(b) = 0$ (см. п. III.2.3). Покажем, что $T_1$ является $m$-секториальным оператором.

Для $u \in \mathrm{D}(T_1)$ имеем

$$(T_1u, u) = \int (p_0u'' + p_1u' + p_2u)\, u\, dx =$$
$$= -\int_a^b p_0 |u'|^2 dx + \int_a^b [(p_1 - p_0')u' + p_2u]\, \bar{u}\, dx.$$

Так как $-p_0(x) \geqslant m_0 > 0$ и $|p_1(x) - p_0'(x)| \leqslant M_1$, $|p_2(x)| \leqslant M_2$ с некоторыми положительными постоянными $m_0$, $M_1$, $M_2$, то

$$\operatorname{Re}(T_1u, u) \geqslant m_0 \int |u'|^2 dx - M_1 \int |u'|\,|u|\, dx - M_2 \int |u|^2 dx,$$
$$|\operatorname{Im}(T_1u, u)| = \left| \operatorname{Im} \int (p_1 - p_0')\, u'\bar{u}\, dx \right| \leqslant M_1 \int |u'|\,|u|\, dx.$$

Следовательно, для любого $k > 0$

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(T_1u,\ u)-k\,|\operatorname{Im}(T_1u,\ u)| &\geqslant \\ \geqslant m_0\int |u'|^2\,dx-(1+k)M_1\int |u'|\,|u|\,dx-M_2\int |u|^2\,dx &\geqslant \\ \geqslant [m_0-\varepsilon(1+k)M_1]\int |u'|^2\,dx-\left(\frac{(1+k)M_1}{4\varepsilon}+M_2\right)\int |u|^2\,dx&,\end{aligned}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно. Если $\varepsilon$ выбрано так, что $m_0-\varepsilon(1+k)M_1 \geqslant 0$, то $\operatorname{Re}(T_1u,\ u)-k\,|\operatorname{Im}(T_1u,\ u)| \geqslant \gamma(u,\ u)$ для некоторого отрицательного $\gamma$. Таким образом,

$$|\operatorname{Im}(T_1u,\ u)| \leqslant \frac{1}{k}\operatorname{Re}((T_1-\gamma)\,u,\ u).$$

Это означает, что $\Theta\,(T_1)$ лежит в секторе с вершиной $\gamma$ и полууглом $\theta = \operatorname{arctg}(1/k)$. Таким образом, $T_1$ — секториальный оператор с произвольно малым полууглом.

Чтобы показать, что $T_1$ квази-$m$-аккретивен, достаточно заметить, что $(T_1+\lambda)^* = S_1+\lambda$, где $\lambda$ вещественно, а $S_1$ — оператор в $\mathbf{H}$, определенный по формально сопряженному к $L$ оператору $M$ (см. пример III.5.32). Оператор $S_1$ секториальный, также как и оператор $T_1$, и $S_1+\lambda$ имеет размерность нуль-пространства равную 0, если $\lambda$ достаточно велико. Итак, дефект оператора $T_1+\lambda$ равен нулю, а значит, $T_1$ — квази-$m$-аккретивный оператор.

Нетрудно доказать, что аналогичный результат справедлив для дифференциального оператора второго порядка в частных производных эллиптического типа.

## 11. Квадратный корень $m$-аккретивного оператора

Целью этого пункта является доказательство следующей теоремы[1]:

**Теорема 3.35.** *Пусть $T$ есть $m$-аккретивный оператор. Существует единственный $m$-аккретивный квадратный корень $T^{1/2}$ оператора $T$, такой, что $(T^{1/2})^2 = T$; $T^{1/2}$ имеет следующие свойства:*

i) *$T^{1/2}$ есть $m$-секториальный оператор с числовой областью значений, содержащейся в секторе $|\arg\zeta| \leqslant \pi/4$;*

ii) *$\mathbf{D}(T)$ — ядро оператора $T^{1/2}$;*

iii) *$T^{1/2}$ коммутирует с любым оператором $B \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$, коммутирующим с $T$;*

iv) *если $T$ самосопряжен и неотрицателен, то это же верно и относительно $T^{1/2}$.*

Доказательство начнем с рассмотрения специального случая, когда $T$ — *сильно аккретивный* оператор, т. е. $\operatorname{Re}(Tu,\ u) \geqslant \delta\,\|u\|^2$, $u \in \mathbf{D}(T)$, $\delta > 0$. Отсюда следует, что $T-\delta$ является $m$-аккретивным; поэтому

$$\|(T+\zeta)^{-1}\| \leqslant (\operatorname{Re}\zeta+\delta)^{-1},\quad \operatorname{Re}\zeta \geqslant 0. \tag{3.40}$$

---

[1] Ср. Лангер [1].

Определим теперь оператор $A$ при помощи интеграла Данфорда — Тейлора:

$$A=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\zeta^{-1/2}(T-\zeta)^{-1}\,d\zeta; \tag{3.41}$$

здесь контур интегрирования $\Gamma$ принадлежит резольвентному множеству оператора $T$, начинается и оканчивается на $-\infty$ и обходит в положительном направлении начало координат (это возможно, ибо $\mathrm{P}(T)$ содержит полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta<\delta$). Значения $\zeta^{-1/2}$ должны быть выбраны так, чтобы $\zeta^{-1/2}>0$ в точке, где контур $\Gamma$ пересекает положительную вещественную полуось. Интеграл (3.41) сходится абсолютно в силу неравенства (3.40). Таким образом, $A$ определен и принадлежит $\mathscr{B}(\mathrm{H})$.

Лемма 3.36. $A^2=T^{-1}$.

Доказательство. Возьмем еще одно выражение для $A$, в котором контур интегрирования $\Gamma$ заменен немного сдвинутым контуром $\Gamma'$, не пересекающим контур $\Gamma$, и перемножим два эти выражения. Так как двойной интеграл сходится абсолютно, порядок интегрирования безразличен. Применяя резольвентное уравнение для $(T-\zeta)^{-1}(T-\zeta')^{-1}$, приходим к такому результату:

$$A^2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\zeta^{-1}(T-\zeta)^{-1}\,d\zeta=T^{-1}. \tag{3.42}$$

Это в точности такой же прием, как и в доказательстве соотношения (I.5.17).

Из равенства $A^2=T^{-1}$ следует, что $A$ обратим, ибо если $Au=0$, то $T^{-1}u=A^2u=0$ и $u=0$. Определим теперь $T^{1/2}$ так: $T^{1/2}=A^{-1}$, так что $T^{-1/2}\equiv(T^{1/2})^{-1}=A$. Заметим, что в силу (3.41) $T^{-1/2}$, а также $T^{1/2}$ коммутируют с резольвентой $(T-\zeta)^{-1}$.

Более удобное выражение для $T^{-1/2}$ получается деформацией контура интегрирования $\Gamma$ к контуру, состоящему из верхнего и нижнего берегов разреза вдоль отрицательной вещественной полуоси. Полагая $\zeta=-\lambda$ и замечая, что $\zeta^{-1/2}=\mp i\lambda^{-1/2}$, получаем

$$T^{-1/2}=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\lambda^{-1/2}(T+\lambda)^{-1}\,d\lambda. \tag{3.43}$$

Отсюда видно, в частности, что $T^{-1/2}$ — неотрицательный самосопряженный оператор, если $T$ самосопряжен, ибо $(T+\lambda)^{-1}$ обладает этими свойствами. В общем случае $T^{-1/2}$ аккретивен, так как $(T+\lambda)^{-1}$ — аккретивный оператор, откуда следует, что

$T^{1/2}$ $m$-аккретивный (см. задачу 3.31). Кроме того,

$$\| T^{-1/2} \| \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{-1/2} \| (T+\lambda)^{-1} \| \, d\lambda \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{-1/2} (\lambda+\delta)^{-1} \, d\lambda = \delta^{-1/2}. \tag{3.44}$$

**Лемма 3.37.** $(T^{1/2})^2 = T$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathbf{D}(T)$. Так как $A^2 T u = u$, то $u \in \mathbf{R}(A) = \mathbf{D}(T^{1/2})$ и $T^{1/2} u = A^{-1} u = A T u$. Следовательно, $T^{1/2} u \in \mathbf{D}(T^{1/2})$ и $T^{1/2}(T^{1/2} u) = A^{-1} A T u = T u$. Обратно, пусть $u \in \mathbf{D}((T^{1/2})^2)$; положим $v = (T^{1/2})^2 u$. Тогда $T^{-1} v = A^2 (T^{1/2})^2 u = A(T^{1/2} u) = u$, так что $u \in \mathbf{D}(T)$ и $T u = v = (T^{1/2})^2 u$. Лемма доказана.

**Лемма 3.38.** $\mathbf{D}(T)$ *является ядром* $T^{1/2}$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathbf{D}(T^{1/2})$; мы должны показать, что существует последовательность $u_n \in \mathbf{D}(T)$ такая, что $u_n \to u$ и $T^{1/2}(u_n - u) \to 0$. Такой последовательностью является, например, последовательность $u_n = (1 + n^{-1} T)^{-1} u = n(T+n)^{-1} u$. В самом деле, ясно, что $u_n \in \mathbf{D}(T)$. Положим $v = T^{1/2} u$; тогда $u = A v$ и $u_n = n(T+n)^{-1} A v = nA(T+n)^{-1} v$ (см. замечание выше), так что $T^{1/2} u_n = n(T+n)^{-1} v \to v = T^{1/2} u$ (см. задачу 3.33).

Попутно отметим, что справедлива формула

$$T^{1/2} u = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{-1/2} (T+\lambda)^{-1} T u \, d\lambda, \quad u \in \mathbf{D}(T), \tag{3.45}$$

которая получается из (3.43) заменой $u$ на $Tu$ с учетом того, что $T^{-1/2} T u = T^{1/2} u$, в силу леммы 3.37.

Задача 3.39. Доказать, что $\operatorname{Re}(T^{1/2} u, u) \geqslant \delta^{1/2} \| u \|^2$, $u \in \mathbf{D}(T^{1/2})$. [*Указание*: $\operatorname{Re}((T+\lambda)^{-1} T u, u) \geqslant \delta(\delta+\lambda)^{-1} \| u \|^2$.]

**Лемма 3.40.** *Предложение* i) *теоремы* 3.35 *имеет место, если* $T$ — *сильно аккретивный оператор.*

Доказательство. Мы получим из (3.41) еще одно представление для $A$, деформируя контур интегрирования $\Gamma$ к двум берегам разреза вдоль луча $\zeta = -\lambda e^{i\theta}$, $0 < \lambda < \infty$, где $\theta$ — фиксированный угол с $|\theta| < \pi/2$. Вычисления, аналогичные использованным при выводе (3.43), дают

$$T^{-1/2} = \frac{1}{\pi} e^{i\theta/2} \int\limits_0^\infty \lambda^{-1/2} (T + \lambda e^{i\theta})^{-1} \, d\lambda; \tag{3.46}$$

интеграл абсолютно сходится, так как $\| (T + \lambda e^{i\theta})^{-1} \| \leqslant (\delta + \lambda \cos \theta)^{-1}$ в силу (3.40). Оператор $T + \lambda e^{i\theta}$ аккретивен одновременно с $T$, ибо $\operatorname{Re} \lambda e^{i\theta} = \lambda \cos \theta > 0$; значит, и $(T + \lambda e^{i\theta})^{-1}$ также аккретивен. Следовательно, $e^{-i\theta/2} (T^{-1/2}u, u)$ имеет, в силу (3.46), неотрицательную вещественную часть. Так как это справедливо для $| \theta | < \pi/2$, то значения $(T^{-1/2}u, u)$ лежат в секторе $| \arg \zeta | \leqslant \pi/4$; это условие можно записать так:

$$| \operatorname{Im} (T^{1/2}u, u) | \leqslant \operatorname{Re} (T^{1/2}u, u), \quad u \in \mathbf{D} (T^{1/2}). \tag{3.47}$$

Предложение iii) следует из формулы (3.41), которая показывает, что $A = T^{-1/2}$ коммутирует с $B$. Сопоставляя полученные выше результаты, видим, что наша теорема доказана в специальном случае сильно аккретивного оператора $T$, за исключением единственности $T^{1/2}$. Докажем при некоторых ограничениях единственность $T^{1/2}$.

**Лемма 3.41.** *Предположим, что $T$ сильно аккретивен и что существует m-аккретивный оператор $S$, такой, что $S^{-1} = B \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$ и $S^2 = T$. Тогда $S = T^{1/2}$.*

Доказательство. Оператор $B = S^{-1}$ коммутирует с $B^2 = T^{-1}$, а значит, коммутирует с $T$ и с резольвентой $(T - \zeta)^{-1}$ (см. теорему III.6.5). Из (3.41) следует, что $BA = AB$. Так как $A^2 = T^{-1} = B^2$, то $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 = 0$. Поэтому для любого $u \in \mathbf{H}$ имеем $(A + B) v = 0$, где $v = (A - B) u$. Отсюда $\operatorname{Re} (Av, v) + \operatorname{Re} (Bv, v) = \operatorname{Re} ((A + B) v, v) = 0$. Но оба выражения $(Av, v)$ и $(Bv, v)$ имеют неотрицательные вещественные части, ибо $A$ и $B$ — аккретивные операторы; поэтому $\operatorname{Re} (Av, v) = 0$, или $\operatorname{Re} (w, T^{1/2}w) = 0$, где $w = Av$. Так как $\operatorname{Re} (w, T^{1/2}w) \geqslant \delta^{1/2} \| w \|^2$ в силу результата задачи 3.39, то $w = 0$, $(A - B) u = v = T^{1/2}w = 0$, а поскольку $u$ произвольно, то $B = A$ и, следовательно[1], $S = T^{1/2}$.

Теперь мы избавимся от сделанного выше предположения о сильной аккретивности оператора $T$. Пусть $T$ является $m$-аккретивным. Для любого $\varepsilon > 0$ оператор $T_\varepsilon = T + \varepsilon$ сильно аккретивен, так что $T_\varepsilon^{1/2} = S_\varepsilon$ может быть построен так же, как выше. Покажем, что в некотором смысле существует $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} S_\varepsilon = S$.

Для любого $u \in \mathbf{D}(T_\varepsilon) = \mathbf{D}(T)$ мы имеем для $S_\varepsilon u$ выражение (3.45), в котором $T$ заменено на $T_\varepsilon$. Так как $(T_\varepsilon + \lambda)^{-1} T_\varepsilon u = u - \lambda (T_\varepsilon + \lambda)^{-1} u = u - \lambda (T + \varepsilon + \lambda)^{-1} u$, то $\frac{d}{d\varepsilon} (T_\varepsilon + \lambda)^{-1} T_\varepsilon u = \lambda (T + \varepsilon + \lambda)^{-2} u = \lambda (T_\varepsilon + \lambda)^{-2} u = -\lambda \frac{d}{d\lambda} (T_\varepsilon + \lambda)^{-1} u$. Следовательно,

---

[1] Использованное здесь рассуждение является обобщением доказательства Рисса и Секефальви-Надя [[1]], в котором рассматриваются симметричные операторы $T \geqslant 0$.

$$\frac{d}{d\varepsilon}S_\varepsilon u = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \lambda^{1/2}\frac{d}{d\lambda}(T_\varepsilon+\lambda)^{-1}u\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty \lambda^{-1/2}(T_\varepsilon+\lambda)^{-1}u\,d\lambda = \frac{1}{2}T_\varepsilon^{-1/2}u; \qquad (3.48)$$

здесь произведено интегрирование по частям и использовано (3.43) для $T_\varepsilon^{-1/2}$. Интегрируя (3.48) от $\eta$ до $\varepsilon$, где $0<\eta<\varepsilon$, получаем: $S_\varepsilon u - S_\eta u = \frac{1}{2}\int\limits_\eta^\varepsilon T_\varepsilon^{-1/2}u\,d\varepsilon$. Используя оценку $\| T_\varepsilon^{-1/2}\| \leqslant \varepsilon^{-1/2}$, которая вытекает из (3.44), получаем:

$$\| S_\varepsilon u - S_\eta u \| \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_\eta^\varepsilon \| T_\varepsilon^{-1/2}u\|\,d\varepsilon \leqslant \frac{1}{2}\int\limits_\eta^\varepsilon \varepsilon^{-1/2}\|u\|\,d\varepsilon = (\varepsilon^{1/2}-\eta^{1/2})\|u\|. \qquad (3.49)$$

Это показывает, что $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} S_\varepsilon u = S'u$ существует для $u \in \mathbf{D}(T)$ и что

$$\| S_\varepsilon u - S'u \| \leqslant \varepsilon^{1/2}\|u\|, \quad u \in \mathbf{D}(T). \qquad (3.50)$$

Таким образом, оператор $S' - S_\varepsilon$ [с областью определения $\mathbf{D}(T)$] ограничен, а его норма $\leqslant \varepsilon^{1/2}$. Так как $\mathbf{D}(T) = \mathbf{D}(T_\varepsilon)$ есть ядро $S_\varepsilon$ (см. лемму 3.38), то из теоремы об устойчивости замкнутости (теорема IV.1.1) следует, что $S'$ замыкаем и замыкание $S = \tilde{S}'$ имеет ту же область определения, что и $S_\varepsilon$ [откуда в свою очередь вытекает, что $\mathbf{D}(S_\varepsilon)$ не зависит от $\varepsilon$]. В то же время неравенство (3.50) может быть распространено на все $u \in \mathbf{D}(S)$ с заменой в левой части $S'$ на $S$. Поэтому можно написать

$$S_\varepsilon = S + B_\varepsilon, \quad B_\varepsilon \in \mathscr{B}(\mathbf{H}), \quad \|B_\varepsilon\| \leqslant \varepsilon^{1/2}. \qquad (3.51)$$

Так как $(S_\varepsilon u, u) \to (Su, u)$ при $\varepsilon \to 0$, $u \in \mathbf{D}(S) = \mathbf{D}(S_\varepsilon)$, то $S$ — секториальный оператор, причем $\Theta(S)$ содержится в секторе $|\arg\zeta| \leqslant \pi/4$, ибо это справедливо для $S_\varepsilon$. Кроме того, любое $\zeta$, лежащее вне этого сектора, принадлежит резольвентному множеству оператора $S$, в силу представления $R(\zeta, S)$ с помощью ряда Неймана для $S = S_\varepsilon - B_\varepsilon$, где $\varepsilon$ выбрано столь малым, что $\varepsilon^{1/2}$ меньше расстояния от $\zeta$ до этого сектора. Это показывает, что $S$ $m$-аккретивен.

**Лемма 3.42.** $S^2 = T$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathbf{D}(T)$; положим $v_\varepsilon = S_\varepsilon u$. Имеем $v_\varepsilon \to Su$, $\varepsilon \to 0$. Поскольку мы знаем, что $S_\varepsilon^2 = T_\varepsilon$, то $v_\varepsilon \in \mathbf{D}(S_\varepsilon) = \mathbf{D}(S)$ и $S_\varepsilon v_\varepsilon = T_\varepsilon u$. Следовательно,

$Sv_\varepsilon = (S_\varepsilon - B_\varepsilon)\, v_\varepsilon = T_\varepsilon u - B_\varepsilon v_\varepsilon \to Tu$ при $\varepsilon \to 0$. Так как $S$ замкнут, то $Su \in \mathbf{D}(S)$ и $SSu = Tu$. Таким образом, доказано, что $T \subset S^2$. Отсюда $T + 1 \subset S^2 + 1 = (S + i)(S - i)$, и поэтому $(T + 1)^{-1} \subset (S - i)^{-1} (S + i)^{-1}$. Но $(T + 1)^{-1}$ и $(S \pm i)^{-1}$ принадлежат $\mathscr{B}(\mathbf{H})$; поэтому вместо последнего включения надо поставить знак равенства, откуда в свою очередь следует, что $T = S^2$.

Полагая $S = T^{1/2}$, видим, что предложения i), ii) теоремы 3.35 доказаны [ii) следует из того, что $S = \widetilde{S}'$]. Предложение iv) очевидно, ибо $S_\varepsilon$ и $S$ симметричны и, следовательно, самосопряжены, если $T$ — самосопряженный оператор.

**Лемма 3.43.** *Равенство* (3.45) *справедливо в общем случае.*

Доказательство. Интеграл в (3.45) сходится абсолютно, ибо $\| \lambda^{-1/2} (T + \lambda)^{-1} \| \leqslant \lambda^{-3/2}$ при $\lambda \to \infty$ и $\| \lambda^{-1/2} (T + \lambda)^{-1}\, Tu \| \leqslant 2\lambda^{-1/2} \| u \|$ при $\lambda \to 0$. Соответствующее интегральное представление для $T_\varepsilon^{1/2} u$ обладает теми же свойствами, причем оценки не зависят от $\varepsilon$. Так как $(T_\varepsilon + \lambda)^{-1}\, T_\varepsilon u - (T + \lambda)^{-1}\, Tu = -\lambda\, [(T_\varepsilon + \lambda)^{-1}\, u - (T + \lambda)^{-1}\, u] \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ для каждого $\lambda > 0$, то в силу принципа мажорантной сходимости $T_\varepsilon^{1/2} u$ сходится к правой части формулы (3.45). Поскольку $T_\varepsilon^{1/2} u \to T^{1/2} u$, то $T^{1/2} u$ должно быть равно правой части (3.45).

**Лемма 3.44.** *Справедливо предложение* iii) *теоремы* 3.35.

Доказательство. Оператор $B$ коммутирует с $T_\varepsilon = T + \varepsilon$, а значит, и с $S_\varepsilon = T_\varepsilon^{1/2}$, в силу доказанного выше. Как легко видеть, $(S_\varepsilon + 1)^{-1} \to (S + 1)^{-1}$ при $\varepsilon \to 0$; поэтому $B$ коммутирует с $(S + 1)^{-1}$, а следовательно, и с $S = T^{1/2}$ (см. теорему III.6.5).

**Лемма 3.45.** *Пусть $R$ — любой m-аккретивный квадратный корень из $T$: $R^2 = T$. Тогда $R$ коммутирует с резольвентой оператора $T$ и $\mathbf{D}(T)$ — ядро $R$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \neq 0$ вещественно; тогда область значений $(R - i\lambda)(R + i\lambda) = R^2 + \lambda^2 = T + \lambda^2$ есть все $\mathbf{H}$, и это же верно относительно $R - i\lambda$. С другой стороны, размерность нуль-пространства оператора $R - i\lambda$ равна нулю, ибо если $Ru = i\lambda u$, то $Tu = R^2 u = i\lambda R u = -\lambda^2 u$, т. е. $(T + \lambda^2)\, u = 0$ и $u = 0$. Таким образом, $\pm i\lambda \in \mathrm{P}(R)$ и $(T + \lambda^2)^{-1} = (R - i\lambda)^{-1} (R + i\lambda)^{-1}$ и, стало быть, $R$ коммутирует с $(T + \lambda^2)^{-1}$. Отсюда также следует, что $\mathbf{D}(R) \supset \mathbf{D}(T)$ и $(R - i\lambda)\, \mathbf{D}(T) = \mathbf{R}\, [(R - i\lambda)(T + \lambda^2)^{-1}] = \mathbf{R}\, [(R + i\lambda)^{-1}] = \mathbf{D}(R)$ плотно в $\mathbf{H}$. так что $\mathbf{D}(T)$ есть ядро $R$.

**Лемма 3.46.** *Существует единственный $m$-аккретивный квадратный корень из $T$.*

Доказательство. Пусть $R$ — любой $m$-аккретивный квадратный корень из $T$; тогда $R+\varepsilon$ сильно $m$-аккретивен при любом $\varepsilon>0$ и $(R+\varepsilon)^2=R^2+2\varepsilon R+\varepsilon^2=T+2\varepsilon R+{}$ $+\varepsilon^2\equiv Q_\varepsilon$ также сильно аккретивен и даже $m$-аккретивен. Чтобы доказать последнее, достаточно заметить, что оператор $R$ ограничен относительно $T$, поскольку $\mathrm{D}(R)\supset\mathrm{D}(T)$ (см. замечание IV.1.5), так что $(Q_\varepsilon+1)^{-1}\in\mathscr{B}(\mathrm{H})$ для достаточно малых $\varepsilon$ (см. теорему IV.1.16). В силу леммы 3.41, $R+\varepsilon$ совпадает с единственным квадратным корнем $Q_\varepsilon^{1/2}$.

Пусть $u\in\mathrm{D}(T)$; тогда $u\in\mathrm{D}(R)$ и $(R+\varepsilon)u\to Ru$, $\varepsilon\to0$. С другой стороны, как будет показано, $Q_\varepsilon^{1/2}u\to T^{1/2}u$. Поэтому $Ru=T^{1/2}u$ для $u\in\mathrm{D}(T)$. Так как $\mathrm{D}(T)$ является ядром для $R$ и $T^{1/2}$ (см. лемму 3.45), то $R=T^{1/2}$, что и требовалось доказать.

Чтобы доказать, что $Q_\varepsilon^{1/2}u\to T^{1/2}u$, $\varepsilon\to0$, $u\in\mathrm{D}(T)$, мы воспользуемся формулой (3.45) и аналогичным выражением для $Q_\varepsilon^{1/2}u$ (см. лемму 3.43). Поскольку $(T+\lambda)^{-1}\,Tu=u-\lambda(T+\lambda)^{-1}u$, мы имеем

$$Q_\varepsilon^{1/2}u-T^{1/2}u=-\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{1/2}\left[(Q_\varepsilon+\lambda)^{-1}u-(T+\lambda)^{-1}u\right]d\lambda=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty\lambda^{1/2}(Q_\varepsilon+\lambda)^{-1}(2R+\varepsilon)(T+\lambda)^{-1}u\,d\lambda.\qquad(3.52)$$

Для оценки этого интеграла разобьем его на две части: $\int_0^\varepsilon$ и $\int_\varepsilon^\infty$, причем в первом интеграле будем использовать первую часть формулы (3.52), а во втором — вторую. Заметив, что $R$ коммутирует с $(T+\lambda)^{-1}$ (см. лемму 3.45), получим:

$$\pi\,\|Q_\varepsilon^{1/2}u-T^{1/2}u\|\leqslant\int_0^\varepsilon\lambda^{1/2}\left[\|(Q_\varepsilon+\lambda)^{-1}\|+\|(T+\lambda)^{-1}\|\right]\|u\|\,d\lambda+$$

$$+\varepsilon\int_\varepsilon^\infty\lambda^{1/2}\,\|(Q_\varepsilon+\lambda)^{-1}\|\;\|(T+\lambda)^{-1}\|\;\|(2R+\varepsilon)u\|\,d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant\left(\int_0^\varepsilon2\lambda^{-1/2}\,d\lambda\right)\|u\|\leqslant+\varepsilon\left(\int_0^\infty\lambda^{-3/2}\,d\lambda\right)\|(2R+\varepsilon)u\|=$$

$$=4\varepsilon^{1/2}\,\|u\|+2\varepsilon^{1/2}\,\|(2R+\varepsilon)u\|\to0,\quad\varepsilon\to0.$$

**Задача 3.47.** Если $T\in\mathscr{B}(\mathrm{H})$ — симметричный и неотрицательный оператор, то $\|T^{1/2}\|=\|T\|^{1/2}$.

**Задача 3.48.** Если $T$ есть $m$-аккретивный оператор, то следующие условия на $u$ эквивалентны: a) $Tu = 0$, b) $T^{1/2}u = 0$, c) $(\lambda + T)^{-1} u = \lambda^{-1}u$, $\lambda > 0$.

**Теорема 3.49.** *Пусть $T$ — $m$-аккретивный оператор. Он имеет компактную резольвенту тогда и только тогда, когда $T^{1/2}$ имеет компактную резольвенту.*

Доказательство. Пусть $S = T^{1/2}$. Доказанная выше (при доказательстве леммы 3.42) формула $(T+1)^{-1} = (S+i)^{-1} \times \times (S-i)^{-1}$ показывает, что $T$ имеет компактную резольвенту, если $S$ имеет компактную резольвенту. Чтобы доказать обратное утверждение, положим, как и выше, $T_\varepsilon = T + \varepsilon$ и $S_\varepsilon = T_\varepsilon^{1/2}$. Оператор $S_\varepsilon^{-1}$ задается формулой (3.43), в которой справа $T$ заменен на $T_\varepsilon$. Так как интеграл сходится по норме и $(T_\varepsilon + \lambda)^{-1}$ компактен для всех $\lambda > 0$, то $S_\varepsilon^{-1}$ компактен. Таким образом, $S_\varepsilon$ имеет компактную резольвенту, так что $(1 + S_\varepsilon)^{-1}$ компактен. Далее, в силу (3.51)

$$\| (1+S_\varepsilon)^{-1} - (1+S)^{-1} \| = \| (1+S_\varepsilon)^{-1} (1+S)^{-1} (S - S_\varepsilon) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| B_\varepsilon \| \leqslant \varepsilon^{1/2} \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0.$$

Следовательно, $(1+S)^{-1}$ компактен и $S$ имеет компактную резольвенту.

**Замечание 3.50.** Более общо можно определить дробные степени $T^\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $m$-аккретивного оператора $T$ с помощью конструкции, аналогичной приведенной выше для $T^{1/2}$. Если $T$ — строго $m$-аккретивный оператор, то для получения $T^{-\alpha}$ можно просто заменить $\zeta^{-1/2}$ на $\zeta^{-\alpha}$ в формуле (3.41). Формула, соответствующая (3.43), в этом случае имеет такой вид:

$$T^{-\alpha} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (T+\lambda)^{-1} \, d\lambda. \tag{3.53}$$

Общий случай допускает изучение методом, описанным в данном пункте. Следует отметить, что степени $T^\alpha$ могут быть определены для более общего класса операторов, действующих в банаховом пространстве.

**Задача 3.51.** Пусть $T_n$, $T$ суть $m$-аккретивные операторы, такие, что $T_n \to T$ в обобщенном смысле. Тогда $(T_n + \varepsilon)^{-1/2} \to (T + \varepsilon)^{-1/2}$ по норме для любого $\varepsilon > 0$.

**Задача 3.52.** Пусть $T_n$, $T$ суть $m$-аккретивные операторы и $(T_n + \lambda)^{-1} \xrightarrow[s]{} (T + \lambda)^{-1}$ для всех $\lambda > 0$. Тогда $(T_n + \varepsilon)^{-1/2} \xrightarrow[s]{} (T + \varepsilon)^{-1/2}$ для любого $\varepsilon > 0$.

## § 4. Возмущение самосопряженных операторов

### 1. Устойчивость самосопряженности

Поскольку самосопряженные операторы образуют наиболее важный с точки зрения приложений класс операторов, изучение возмущений самосопряженных операторов и устойчивости самосопряженности является нашей главной задачей[1].

Рассмотрим сначала вопрос о том, при каких условиях для «малых» возмущений сохраняется самосопряженность. Основной результат в этом направлении дает

**Теорема 4.1.** *Пусть $T$ — самосопряженный оператор. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что любой замкнутый симметричный оператор $S$ с $\hat{\delta}(S, T) < \delta$ является самосопряженным; $\hat{\delta}(S, T)$ обозначает раствор между $S$ и $T$.*

Доказательство. Так как $\pm i$ принадлежит $\mathrm{P}(T)$, то в силу теоремы IV.3.15 существует $\delta > 0$, такое, что из $\hat{\delta}(S, T) < \delta$ следует $\pm i \in \mathrm{P}(S)$. Тогда $S$ самосопряжен в силу теоремы 3.16.

**Следствие 4.2.** *Пусть $T$, $T_n$ — замкнутые симметричные операторы и $\{T_n\}$ сходится к $T$ в обобщенном смысле (см. п. IV.2.4). Если $T$ самосопряжен, то $T_n$ — самосопряженные операторы для достаточно больших $n$.*

Хотя эта теорема является довольно общей, она не очень удобна для приложений, поскольку определение раствора $\hat{\delta}(S, T)$ сложно. Менее общий, но более удобный критерий получается с помощью относительно ограниченных возмущений.

Напомним, что оператор $A$ ограничен относительно оператора $T$ (или $T$-ограничен), если $\mathbf{D}(A) \supset \mathbf{D}(T)$ и

$$\| Au \| \leqslant a \| u \| + b \| Tu \|, \quad u \in \mathbf{D}(T) \tag{4.1}$$

(см. (IV.1.1)). Эквивалентным условием является следующее условие:

$$\| Au \|^2 \leqslant a'^2 \| u \|^2 + b'^2 \| Tu \|^2, \quad u \in \mathbf{D}(T), \tag{4.2}$$

где постоянные $a'$, $b'$, вообще говоря, конечно, отличны от $a$ и $b$. Легко видеть, что из (4.2) следует (4.1) с $a = a'$, $b = b'$, тогда как из (4.1) следует (4.2) с $a'^2 = (1 + \varepsilon^{-1}) a^2$, $b'^2 = (1 + \varepsilon) b^2$ при любом $\varepsilon > 0$. Поэтому $T$-грань (определенная как точная нижняя грань всех $b$) может быть определена и как точная нижняя грань всех $b'$.

---

[1] В этом параграфе все операторы, если не оговорено противное, предполагаются действующими в гильбертовом пространстве.

**Теорема 4.3** [1]. *Пусть $T$ — самосопряженный оператор. Если $A$ — симметричный и $T$-ограниченный оператор с $T$-гранью, меньшей 1, то $T+A$ также самосопряженный оператор. В частности, $T+A$ самосопряжен, если $A$ — ограниченный симметричный оператор с* $\mathrm{D}(A) \supset \mathrm{D}(T)$.

Доказательство. Очевидно, $T+A$ имеет область определения $\mathrm{D}(T)$ и симметричен. Без ограничения общности можно считать, что (4.2) выполняется с константами $a', b'$ такими, что $a' > 0$ и $0 < b' < 1$. В силу тождества (3.12), условие (4.2) можно записать так:

$$\| Au \| \leqslant \| (b'T \mp ia') u \|, \quad u \in \mathrm{D}(T). \tag{4.3}$$

Отсюда, положив $(T \mp ic') u = v$, имеем

$$\| AR (\pm ic') v \| \leqslant b' \| v \|, \quad c' = a'/b', \tag{4.4}$$

где $R(\zeta) = R(\zeta, T)$ — резольвента $T$. Так как $T$ — самосопряженный оператор, $v$ пробегает все пространство $\mathrm{H}$, когда $u$ изменяется в $\mathrm{D}(T)$; поэтому

$$B_{\pm} = -AR(\pm ic') \in \mathscr{B}(\mathrm{H}), \quad \| B_{\pm} \| \leqslant b'. \tag{4.5}$$

Поскольку $b' < 1$, то $(1 - B_{\pm})^{-1}$ существует и принадлежит $\mathscr{B}(\mathrm{H})$ (ряд Неймана), так что $1 - B_{\pm}$ взаимно однозначно отображает $\mathrm{H}$ на себя. Но $T + A \mp ic' = (1 - B_{\pm})(T \mp ic')$ и образ $T \mp ic'$ есть все $\mathrm{H}$; поэтому образ $T + A \mp ic'$ также совпадает с $\mathrm{H}$, а это доказывает, что $T+A$ есть самосопряженный оператор. Отметим, что данное здесь доказательство по существу такое же, как и доказательство теоремы IV.3.17.

**Теорема 4.4.** *Пусть $T$ — существенно самосопряженный оператор. Если $A$ — симметричный и $T$-ограниченный оператор с $T$-гранью, меньшей 1, то $T+A$ — существенно самосопряженный оператор и его замыкание $(T+A)^{\sim}$ равно $\tilde{T} + \tilde{A}$. В частности, это имеет место, если $A$ — симметричный и ограниченный оператор с* $\mathrm{D}(A) \supset \mathrm{D}(T)$.

---

[1] Теоремы 4.3 и 4.4 принадлежат Реллиху [3]. См. также Т. Като [3, 4]. Эти теоремы оказываются удобными для установления самосопряженности или существенной самосопряженности различных операторов, встречающихся в приложениях. Применение к операторам Шрёдингера и Дирака будет рассмотрено в § 5. По поводу приложений к квантовой теории поля см. И. Като [1] и Като и Мугибаяси [1]; ср. также Кук [2].

Доказательство. Сначала покажем, что $\tilde{A}$ является $\tilde{T}$-ограниченным, т. е. что

$$\mathrm{D}(\tilde{A}) \supset \mathrm{D}(\tilde{T}) \quad \text{и} \quad \|\tilde{A}u\|^2 \leqslant a'^2 \|u\|^2 + b'^2 \|\tilde{T}u\|^2, \quad u \in \mathrm{D}(\tilde{T}), \tag{4.6}$$

если выполнено (4.2). Для любого $u \in \mathrm{D}(\tilde{T})$ существует последовательность $\{u_n\}$, которая $T$-сходится к $u$ (т. е. $u_n \to u$ и $Tu_n \to \tilde{T}u$). Неравенство (4.2) показывает, что $\{u_n\}$ является также $A$-сходящейся, так что $u \in \mathrm{D}(\tilde{A})$ и $Au_n \to \tilde{A}u$. Неравенство (4.6) получается теперь из (4.2) заменой $u$ на $u_n$ и переходом к пределу. Попутно мы получаем также, что $(T+A)u_n \to (\tilde{T}+\tilde{A})u$, так что $u \in \mathrm{D}((T+A)^{\sim})$ и $(T+A)^{\sim} u = (\tilde{T}+\tilde{A})u$. Это показывает, что

$$(T+A)^{\sim} \supset \tilde{T}+\tilde{A}. \tag{4.7}$$

Отметим, что мы пока не использовали тот факт, что $b' < 1$.

С другой стороны, из теоремы 4.3, примененной к операторам $\tilde{T}$, $\tilde{A}$, следует, что $\tilde{T}+\tilde{A}$ есть самосопряженный оператор (здесь мы используем предположение о том, что $b' < 1$). Таким образом, $\tilde{T}+\tilde{A}$ есть замкнутое продолжение оператора $T+A$, а поэтому и оператора $(T+A)^{\sim}$. Сопоставляя это с (4.7), видим, что $\tilde{T}+\tilde{A} = (T+A)^{\sim}$. Теорема доказана.

Теоремы 4.3 и 4.4 не симметричны по отношению к операторам $T$ и $S = T + A$. Следующий симметризованный вариант является обобщением этих теорем. Его доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы об устойчивости замкнутости (теорема IV.1.3) и может быть опущено.

**Теорема 4.5.** *Пусть* $T$, $S$ — *два симметричных оператора, таких, что* $\mathrm{D}(T) = \mathrm{D}(S) = \mathrm{D}$ *и*

$$\|(S-T)u\| \leqslant a\|u\| + b(\|Tu\| + \|Su\|), \quad u \in \mathrm{D}, \tag{4.8}$$

*где* $a$ *и* $b$ — *неотрицательные константы, причем* $b < 1$. *Оператор* $S$ *существенно самосопряжен тогда и только тогда, когда* $T$ *существенно самосопряжен*; *в этом случае* $\tilde{S}$ *и* $\tilde{T}$ *имеют одинаковую область определения. В частности,* $S$ *самосопряжен тогда и только тогда, когда самосопряжен оператор* $T$.

## 2. Случай, когда относительная грань равна 1

В теоремах, доказанных в предыдущем пункте, предположение о том, что относительная грань меньше 1, в общем случае (по крайней мере «самосопряженном») не может быть опущено. Это видно из простого примера, в котором $T$ — не ограниченный и самосопряженный оператор и $A = -T$; здесь оператор $A$ является $T$-ограниченным с $T$-гранью, равной 1, а $T + A$ есть собственное сужение нулевого оператора, которое не является самосопряженным.

В этой связи представляет интерес следующая теорема, относящаяся к случаю, когда относительная грань равна 1 (но *не* исчерпывающая этот случай).

Теорема 4.6. *Пусть $T$ — существенно самосопряженный и $A$ — симметричный операторы. Если $A$ является $T$-ограниченным и неравенство* (4.2) *справедливо с $b' = 1$, то $T + A$ — существенно самосопряженный оператор.*

Доказательство. Сначала мы предположим, что $T$ самосопряжен, и определим операторы $B_{\pm}$ так же, как в доказательстве теоремы 4.3. Тогда $\| B_{\pm} \| \leqslant 1$ в силу (4.5), а области значений операторов $1 - B_{\pm}$ не обязательно будут совпадать со всем $\mathbf{H}$. Однако мы докажем, что они плотны в $\mathbf{H}$; тогда в силу проведенных ранее рассуждений области значений операторов $T + A \pm ic'$ будут плотны в $\mathbf{H}$, откуда вытекает, что $T + A$ существенно самосопряжен [см. задачу 3.17, с)].

Для того чтобы доказать, что область значений оператора $1 - B_{+}$ плотна в $\mathbf{H}$ (оператор $1 - B_{-}$ рассматривается аналогично), достаточно показать, что любое $v \in \mathbf{H}$, ортогональное этой области значений, равно нулю. Для такого $v$ выполняется соотношение $B_{+}^{*}v = v$. В силу леммы 4.7, которая будет доказана ниже, отсюда следует, что $B_{+}v = v$, т. е. $AR(ia')v + v = 0$ (заметим, что $c' = a'$, поскольку $b' = 1$). Полагая $u = R(ia')v \in \mathbf{D}(T)$, имеем $(T + A - ia')u = 0$. Но так как $T + A$ — симметричный оператор и $a' > 0$ (как предполагалось выше), то $u = 0$ и, следовательно, $v = 0$. Тем самым, в предположении, что $T$ самосопряжен, теорема доказана.

Рассмотрим теперь общий случай, в котором $T$ предполагается только существенно самосопряженным. В этом случае мы имеем включение (4.7); напомним, что (4.7) было получено без предположения, что $b' < 1$. Теперь $\widetilde{T}$ самосопряжен и (4.6) выполняется с $b' = 1$. Применяя доказанное выше для операторов $\widetilde{T}$ и $\widetilde{A}$, видим, что $\widetilde{T} + \widetilde{A}$ есть существенно самосопряженный оператор. Формула (4.7) показывает, что замкнутый симметричный оператор $(T + A)^{\sim}$ является продолжением существенно самосопряженного оператора. Таким образом, $(T + A)^{\sim}$ самосопряжен, а, стало быть, $T + A$ существенно самосопряжен.

Лемма 4.7. *Пусть $B \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$ и $\| B \| \leqslant 1$. Тогда равенство $Bu = u$ эквивалентно равенству $B^{*}u = u$ (такой оператор $B$ называется сжатием).*

Доказательство. Так как $B^{**}=B$ и $\|B^*\|\leqslant\leqslant\|B\|\leqslant 1$, достаточно показать, что из $Bu=u$ следует $B^*u==u$. Но это очевидно, ибо

$$\|B^*u-u\|^2=\|B^*u\|^2+\|u\|^2-2\operatorname{Re}(B^*u,\ u)\leqslant$$
$$\leqslant 2\|u\|^2-2\operatorname{Re}(u,\ Bu)=0.$$

### 3. Возмущение спектра

Результаты § IV.3 о возмущении спектра замкнутых линейных операторов применимы к самосопряженным операторам, часто со значительными упрощениями. В качестве примера оценим возмущение изолированных собственных значений.

Пусть $T$ — самосопряженный оператор, а $A$ есть $T$-ограниченный оператор с $T$-гранью, меньшей 1, т. е. выполняется неравенство (4.1) с $b<1$. В общем случае нет необходимости предполагать, что $A$ симметричен; поэтому оператор $S$, замкнутый в силу теоремы IV.1.1, не обязательно симметричен. Рассмотрим вопрос о том, когда данное комплексное число $\zeta$ принадлежит $\mathrm{P}(S)$.

Достаточное условие для выполнения этого включения дается неравенством (IV.3.12). Но так как $T$ самосопряжен, имеем [см. (3.16) и (3.17)]

$$\|R(\zeta,\ T)\|=\sup_{\lambda'\in\Sigma(T)}|\lambda'-\zeta|^{-1},\quad \|TR(\zeta,\ T)\|=\sup_{\lambda'\in\Sigma(T)}|\lambda'|\,|\lambda'-\zeta|^{-1}. \tag{4.9}$$

Следовательно, $\zeta\in\mathrm{P}(S)$, если

$$a\sup_{\lambda'\in\Sigma(T)}|\lambda'-\zeta|^{-1}+b\sup_{\lambda'\in\Sigma(T)}|\lambda'|\,|\lambda'-\zeta|^{-1}<1. \tag{4.10}$$

В частности, пусть $T$ имеет изолированное собственное значение $\lambda$ кратности $m<\infty$ с изолирующим расстоянием $d$ (см. п. 3.5). Пусть $\Gamma$ — круг с центром в точке $\lambda$ и радиусом $d/2$. Если $\zeta\in\Gamma$, то $|\lambda'-\zeta|^{-1}\leqslant 2/d$ и

$$|\lambda'(\lambda'-\zeta)^{-1}|\leqslant 1+(|\zeta-\lambda|+|\lambda|)\,|\lambda'-\zeta|^{-1}\leqslant$$
$$\leqslant 2+2|\lambda|/d.$$

Следовательно, (4.10) выполняется, если

$$a+b(|\lambda|+d)<d/2. \tag{4.11}$$

Из теоремы IV.3.18 следует, что $\Gamma$ *содержит в точности* $m$ (с учетом кратностей) *собственных значений* оператора $S=T+A$ и не содержит других точек $\Sigma(S)$. Если, кроме того, $A$ симметричен, то $S$ самосопряжен и любое собственное значение $S$ должно быть вещественным. Поэтому $S$ имеет точно $m$ собственных значений (с учетом кратности) [и не имеет других точек из $\Sigma(S)$]

на интервале $(\lambda - d/2, \lambda + d/2)$ при условии, что выполнено (4.11).

Условие (4.11) не является очень общим; более слабое достаточное условие может быть получено путем непосредственного применения теоремы IV.3.18.

**Задача 4.8.** Пусть $T$ — нормальный оператор, $A \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, а $d(\zeta) = \operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T))$. Тогда из $d(\zeta) \geqslant \|A\|$ следует, что $\zeta \in \mathrm{P}(T + A)$ и $\|R(\zeta, T + A)\| \leqslant 1/(d(\zeta) - \|A\|)$.

**Замечание 4.9.** Мы видели в п. IV.3.1 и IV.3.2, что спектр замкнутого оператора полунепрерывен сверху относительно $T$, но не обязательно полунепрерывен снизу. Однако, если рассматривать изменение $T$ на множестве самосопряженных операторов, то можно показать, что $\Sigma(T)$ полунепрерывен также и снизу, так что $\Sigma(T)$ *непрерывен* относительно $T$. Здесь полунепрерывность $\Sigma(T)$ снизу означает, что любое открытое множество комплексной плоскости, содержащее точку из $\Sigma(T)$, содержит также точку из $\Sigma(T_n)$ при достаточно большом $n$, если $T$ и все $T_n$ самосопряжены и $\{T_n\}$ сходится к $T$ в обобщенном смысле. Эта полунепрерывность снизу спектра будет доказана в дальнейшем при небольших ограничениях. Здесь мы ограничимся доказательством более слабой теоремы, в которой, однако, очень четко выражена указанная непрерывность спектра.

**Теорема 4.10.** *Пусть $T$ — самосопряженный, а $A \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ — симметричный операторы. Тогда $S = T + A$ самосопряжен и* $\operatorname{dist}(\Sigma(S), \Sigma(T)) \leqslant \|A\|$, *т. е.*

$$\sup_{\zeta \in \Sigma(S)} \operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T)) \leqslant \|A\|,$$
$$\sup_{\zeta \in \Sigma(T)} \operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(S)) \leqslant \|A\|. \tag{4.12}$$

Доказательство. Так как $S$ так же, как и $T$, самосопряжен, то из соображений симметрии достаточно доказать первое неравенство. Для этого в свою очередь достаточно показать, что любое $\zeta$ такое, что $\operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T)) > \|A\|$, принадлежит $\mathrm{P}(S)$. Но это очевидно, поскольку $\|R(\zeta, T)\| < \|A\|^{-1}$ в силу (4.9), и второй ряд Неймана для $R(\zeta, T + A)$ сходится [см. (II.1.13)].

## 4. Полуограниченные операторы

Важным свойством относительно ограниченных симметричных возмущений является то, что они сохраняют полуограниченность. Более точно, справедлива

**Теорема 4.11.** *Пусть $T$ — самосопряженный ограниченный снизу оператор, а $A$ — симметричный оператор, $T$-ограниченный* *с $T$-гранью, меньшей единицы. Тогда $S = T + A$ самосопряжен и ограничен снизу. Если выполняется неравенство* (4.1) *с $b < 1$, то для нижних граней $\gamma_T$ и $\gamma_S$ операторов $T$ и $S$ справедливо неравенство*

$$\gamma_S \geqslant \gamma_T - \max\left(\frac{a}{1-b},\ a + b\,|\gamma_T|\right). \tag{4.13}$$

Доказательство. Поскольку самосопряженность $S$ доказана в теореме 4.3, нам надо показать только, что любое вещественное число $\zeta$, меньшее правой части (4.13) (которую мы обозначим через $\gamma$), принадлежит резольвентному множеству $\mathrm{P}(S)$ (см. п. 3.10).

Обращаясь ко второму ряду Неймана для $R(\zeta, S) = R(\zeta, T + A)$, видим, что нам достаточно доказать только неравенство $\|AR(\zeta)\| \leqslant 1$ для $\zeta < \gamma$, где $R(\zeta) = R(\zeta, T)$. Но в силу (4.1), (3.16) и (3.17)

$$\begin{aligned}\|AR(\zeta)\| &\leqslant a\,\|R(\zeta)\| + b\,\|TR(\zeta)\| \leqslant \\ &\leqslant a(\gamma_T - \zeta)^{-1} + b \sup_{\lambda \in \Sigma(T)} |\lambda|\,(\lambda - \zeta)^{-1} \leqslant \\ &\leqslant a(\gamma_T - \zeta)^{-1} + b \max(1,\ |\gamma_T|\,(\gamma_T - \zeta)^{-1}).\end{aligned} \tag{4.14}$$

Последний член в (4.14) меньше 1, если $\zeta < \gamma$.

Из теоремы 4.11 вытекает

**Теорема 4.12**[1]. *Пусть $T$ — самосопряженный и неотрицательный оператор, $A$ — симметричный оператор, $\mathrm{D}(A) \supset \mathrm{D}(T)$ и $\|Au\| \leqslant \|Tu\|$ для $u \in \mathrm{D}(T)$. Тогда*

$$|(Au, u)| \leqslant (Tu, u), \quad u \in \mathrm{D}(T). \tag{4.15}$$

Доказательство. Для любого вещественного $\varkappa$, $-1 < \varkappa < 1$, теорема 4.11 может быть применена к операторам $T$ и $\varkappa A$ с $a = 0$, $b = |\varkappa|$ и $\gamma_T = 0$. В результате мы получим, что $T + \varkappa A$ ограничен снизу с нижней гранью $\geqslant 0$. Следовательно, $-\varkappa(Au, u) \leqslant (Tu, u)$, откуда, устремляя $\varkappa$ к $\pm 1$, мы приходим к (4.15).

**Замечание 4.13.** Теорема 4.11, вообще говоря, не имеет места, если возмущение не является относительно ограниченным. Если последовательность самосопряженных операторов $T_n$ сходится в обобщенном смысле к самосопряженному оператору $T$, ограниченному снизу, то операторы $T_n$ не обязательно ограничены

---

[1] Это частный случай более общего неравенства, принадлежащего Лёвнеру [1] и Хайнцу [1]. См. также Реллих [7], Т. Като [5], [14], Кордес [1].

снизу, и даже если каждый оператор $T_n$ ограничен снизу, их нижняя грань может стремиться к $-\infty$ при $n \to \infty$. Это видно из следующего примера[1]).

**Пример 4.14.** Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0, 1)$, и пусть $T(\varkappa)$ — дифференциальный оператор $-d^2/dx^2$ с граничным условием $u(0) = 0$, $\varkappa u'(1) - u(1) = 0$. Легко видеть, что $T(\varkappa)$ самосопряжен при любом вещественном $\varkappa$ [ср. п. 3.6; отметим, что граничное условие при $x = 0$ является граничным условием типа (III.2.15), а при $x = 1$ — типа (III.2.16)]. Резольвента $R(\zeta, \varkappa) = R(\zeta, T(\varkappa))$ может быть представлена с помощью интегрального оператора с ядром (функция Грина)

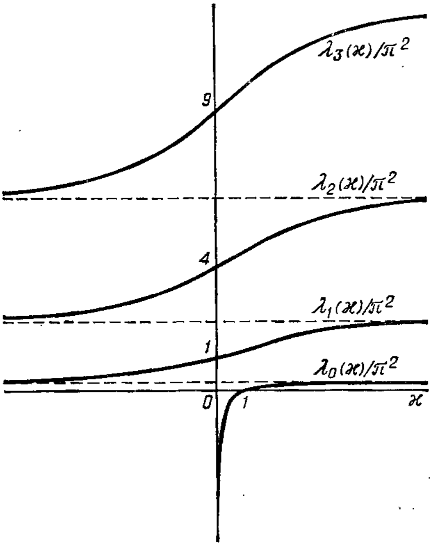

Рис. 1. Собственные значения оператора $-u''$ на отрезке $[0, 1]$ с граничными условиями $u(0) = 0$, $\varkappa u'(1) = u(1)$.

$$g(y, x; \zeta, \varkappa) = \frac{\sin \zeta^{1/2} y}{\sin \zeta^{1/2} - \varkappa \zeta^{1/2} \cos \zeta^{1/2}} \times$$
$$\times [\zeta^{-1/2} \sin \zeta^{1/2} (1-x) - \varkappa \cos \zeta^{1/2} (1-x)], \qquad (4.16)$$

$0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$ (при $x \leqslant y$ надо поменять ролями $x$ и $y$). Эта резольвента существует всюду, за исключением тех $\zeta$, для которых знаменатель обращается в нуль; эти значения $\zeta$ совпадают с собственными значениями $T(\varkappa)$. Нетрудно видеть, что имеется лишь одно отрицательное собственное значение $\lambda_0(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ при $0 < \varkappa < 1$, и это $\lambda_0(\varkappa)$, будучи нижней гранью для $T(\varkappa)$, стремится к $-\infty$ при $\varkappa \searrow 0$, тогда как $T(0)$ неотрицателен (см. рис. 1). Тем не менее $T(\varkappa)$ сходится при $\varkappa \to 0$ к $T(0)$ в обобщенном смысле; это видно из того факта, что $g(y, x; \zeta, \varkappa) \to g(y, x; \zeta, 0)$ при $\varkappa \to 0$ равномерно для любого фиксированного невещественного $\zeta$, откуда следует, что $R(\zeta, \varkappa) \to R(\zeta, 0)$ *по норме*. (Проверку этих утверждений мы предоставляем читателю. Ср. пример VII.1.11.)

---

[1]) Который принадлежит Реллиху [5], [6].

### 5. Полнота собственных проекторов слабо несамосопряженных операторов

В п. IV.3.7 мы упоминали о трудностях, возникающих при одновременном рассмотрении всех собственных значений или собственных проекторов возмущенного оператора $S = T + A$. Там мы привели пример возмущенного оператора в банаховом пространстве, для которого можно было получить равномерные оценки всех возмущенных собственных значений и собственных проекторов. Здесь мы будем изучать *полноту* собственных проекторов несамосопряженного оператора как задачу о возмущении самосопряженного оператора.

**Теорема 4.15.** *Пусть $T$ — самосопряженный ограниченный снизу оператор с компактной резольвентой и простыми (т. е. кратности 1) собственными значениями $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$, такими, что $\lambda_h - \lambda_{h-1} \to \infty$ при $h \to \infty$. Пусть оператор $A \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$ (не обязательно симметричный). Тогда оператор $S = T + A$ замкнут, имеет компактную резольвенту, а его собственные проекторы полны в следующем смысле: существует последовательность $Q_1$, $Q_2$, ... собственных проекторов оператора $S$, такая, что*

$$\operatorname{s-lim}_{n\to\infty} \sum_{h=1}^{n} Q_h = 1. \tag{4.17}$$

*Кроме того, $\dim Q_h = 1$, за исключением конечного числа номеров $h$.*

Доказательство. Известно, что $S$ замкнут и имеет компактную резольвенту (см. теорему IV.3.17); заметим, что $\zeta = i\eta$ удовлетворяет неравенству (IV.3.12), если $|\eta|$ достаточно велико.

Пусть $P_h$ — собственный проектор оператора $T$, отвечающий собственному значению $\lambda_h$. Так как $T$ самосопряжен и имеет компактную резольвенту, проекторы $P_h$ образуют полное множество собственных проекторов в том смысле, что $P_h P_k = \delta_{hk} P_h$ и [см. (3.33)]

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{h=1}^{n} P_h u = u, \quad u \in \mathbf{H}. \tag{4.18}$$

Пусть $d_h = \max(\lambda_h - \lambda_{h-1}, \lambda_{h+1} - \lambda_h)$ есть изолирующее расстояние для $\lambda_h$; тогда $d_h \to \infty$ по предположению. Поэтому существуют целое $N$ и $\delta$ такие, что $\|A\| < \delta \leqslant d_h/2$ для $h > N$. Пусть $\Gamma_h$ — окружность с центром в точке $\lambda_h$ и радиусом $\delta$, $h > N$, а $\Gamma_0$ — окружность с диаметром $[\lambda_1 - \delta, \lambda_N + \delta]$. Тогда каждая окружность $\Gamma_h$ при $h > N$ охватывает точно одно собственное значение $\mu_h$ оператора $S$, а $\Gamma_0$ охватывает ровно $N$ собственных значений (с учетом их кратностей) оператора $S$, и эти собственные значения исчерпывают спектр $S$. Это очевидно в силу тех же соображений, что и в п. 3; отметим, что все рассматриваемые окружности лежат одна вне другой и $\| R(\zeta, T) \| \leqslant 1/\delta < \| A \|^{-1}$, если $\zeta$ принадлежит одной из этих окружностей или лежит вне всех них, так что $R(\zeta, S)$ существует.

Пусть $Q_h$, $h > N$,— одномерный собственный проектор, отвечающий собственному значению $\mu_h$ оператора $S$, а $Q_0$ — тотальный проектор, отвечающий конечному числу собственных значений $S$, лежащих внутри $\Gamma_0$. Тогда

$$Q_h - P_h = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_h}(R(\zeta, S) - R(\zeta, T))\,d\zeta =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int R(\zeta, S)AR(\zeta, T)\,d\zeta, \quad h = 0 \text{ или } h > N, \tag{4.19}$$

где $P_0 = P_1 + \ldots + P_N$. Следовательно, для $n > N$

$$Q_0 + \sum_{h=N+1}^{n} Q_h - P_0 - \sum_{h=N+1}^{n} P_h = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n'} R(\zeta, S)AR(\zeta, T)\,d\zeta, \tag{4.20}$$

где $\Gamma_n'$ есть объединение $\Gamma_0$, $\Gamma_{N+1}$, ..., $\Gamma_n$. Так как подинтегральное выражение голоморфно вне объединения всех кругов, ограниченных $\Gamma_0$ и $\Gamma_h$, то контур интегрирования может быть продеформирован в прямую линию $\Gamma_n''$, перпендикулярную вещественной оси и проходящую через точку $\alpha_n = (\lambda_n + \lambda_{n+1})/2$; отметим, что (см. задачу 4.8)

$$\| R(\zeta, T) \| \leqslant \frac{1}{d(\zeta)}, \quad \| R(\zeta, S) \| \leqslant \frac{1}{d(\zeta) - \| A \|}, \tag{4.21}$$

где $d(\zeta) = \operatorname{dist}(\zeta, \Sigma(T))$, так что подинтегральное выражение по норме убывает на бесконечности как $|\zeta|^{-2}$ и замена контура $\Gamma_n'$ на $\Gamma_n''$ законна. Для $\zeta = \alpha_n + i\eta \in \Gamma_n''$ имеем

$$\| R(\zeta, T) \| \leqslant \frac{1}{d(\zeta)} = (\delta_n^2 + \eta^2)^{1/2}, \quad \delta_n = \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{2},$$
$$\| R(\zeta, S) \| \leqslant \frac{1}{d(\zeta) - \| A \|} = ((\delta_n^2 + \eta^2)^{1/2} - \| A \|)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\int_{\Gamma_n''} \| R(\zeta, S)AR(\zeta, T) \|\,|d\zeta| \leqslant 2\int_0^\infty \frac{\| A \|\,d\eta}{(\delta_n^2 + \eta^2)^{1/2}((\delta_n^2 + \eta^2)^{1/2} - \| A \|)} \leqslant$$
$$\leqslant 2\| A \| \left(1 + \frac{\| A \|}{\delta_n}\right) \int_0^\infty \frac{d\eta}{\eta^2 + \delta_n^2 - \| A \|^2} \leqslant$$
$$\leqslant \pi \| A \| \left(1 + \frac{\| A \|}{\delta_n}\right)(\delta_n^2 - \| A \|^2)^{-1/2} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поэтому (4.20) стремится к нулю по норме при $n\to\infty$. **Так как** $\left(P_0+\sum\limits_{h=N+1}^{n}P_h\right)u\to u$ в силу (4.18), то

$$\left(Q_0+\sum_{h=N+1}^{n}Q_h\right)u\to u,\quad u\in\mathrm{H}.$$

Поскольку $Q_0$ есть сумма собственных проекторов $Q_{0k}$, отвечающих собственным значениям $S$, лежащим внутри $\Gamma_0$, то мы получаем требуемый результат (4.17), перенумеровав последовательность $\{Q_{0k},\ Q_h\}$.

Результат теоремы 4.15 зависит от способа нумерации собственных проекторов $Q_h$ оператора $S$. Желательно, чтобы равенство (4.17) имело место при любом способе нумерации. Это можно доказать при несколько более сильных предположениях относительно оператора $T$.

**Теорема 4.16.** *В теореме 4.15 предположим дополнительно, что ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\lambda_{n+1}-\lambda_n)^{-2}$ *сходится. Тогда равенство* (4.17) *выполняется при любом способе нумерации* $Q_h$. *Кроме того, существует константа* $M$ *такая, что* $\left\|\sum\limits_{h\in I}Q_h\right\|\leqslant M$ *для любого конечного множества* I *натуральных чисел*[1]).

Доказательство. I. Докажем сначала второе утверждение теоремы. Так как $\sum\limits_{h\in I}P_h$ является ортогональной проекцией, то $\left\|\sum\limits_{h\in I}P_h\right\|\leqslant 1$. Поэтому достаточно показать, что $\left\|\sum\limits_{h\in I}(Q_h-P_h)\right\|\leqslant M'$ для любого множества I номеров $h>N$, ибо $Q_h$ с $h>N$ исчерпывают все собственные проекторы оператора $S$ за исключением конечного их числа (мы используем обозначения из доказательства теоремы 4.15).

В силу (4.19) имеем

$$Q_h-P_h=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_h}R(\zeta,\ T)AR(\zeta,\ T)\,d\zeta-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_h}R(\zeta,\ S)AR(\zeta,\ T)AR(\zeta,\ T)\,d\zeta\equiv B_h'+B_h''; \qquad (4.22)$$

здесь использована формула $R(\zeta,\ S)=R(\zeta,\ T)-R(\zeta,\ S)\times\times AR(\zeta,\ T)$. Второй член $B_h''$ из (4.22) оценивается просто. Контур

---

[1]) Отсюда следует, что $S$ — *спектральный оператор* (см. Данфорд [1]). Относительно теорем 4.15, 4.16 и их обобщений см. Шварц [1] и Г. Крамер [1].

$\Gamma_h$ может быть продеформирован в бо́льшую окружность с центром в точке $\lambda_h$ и радиусом $d_h/2$ (ибо $\lambda_h$ — единственная особенность внутри этого круга). Используя оценку (4.21), нетрудно видеть, что норма подинтегрального выражения не превосходит $\|A\|^2\Big/\left(\frac{d_h}{2}\right)^2\left(\frac{d_h}{2}-\|A\|\right)$. Так как длина окружности есть $\pi d_h$, то

$$\|B''_h\|\leqslant\|A\|^2\Big/\frac{d_h}{2}\left(\frac{d_h}{2}-\|A\|\right). \tag{4.23}$$

Поскольку из условия $\sum(\lambda_{n+1}-\lambda_n)^{-2}<\infty$ следует, что $\sum d_n^{-2}<\infty$, то из (4.23) имеем

$$\sum_{h=N+1}^{\infty}\|B''_h\|<\infty. \tag{4.24}$$

С другой стороны, первый член $B'_h$ в (4.22) в силу (II.2.14) представим в виде

$$B'_h=-P_hAR_h-R_hAP_h, \tag{4.25}$$

где $R_h$ — приведенная резольвента $T$ в $\lambda_h$ [заметим, что $B'_h$ равно $P^{(1)}$, члену первого порядка в ряде теории возмущений для собственного проектора $P(\varkappa)$]. Но так как для любого $u\in \mathrm{H}$

$$\Big\|\sum_{h\in\mathrm{I}}R_hAP_hu\Big\|\leqslant\sum_{h\in\mathrm{I}}\|R_hA\|\,\|P_hu\|\leqslant$$
$$\leqslant\Big(\sum_{h\in\mathrm{I}}\|R_hA\|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{h\in\mathrm{I}}\|P_hu\|^2\Big)^{1/2}\leqslant\Big(\sum_{h\in\mathrm{I}}\|R_hA\|^2\Big)^{1/2}\|u\|,$$

то

$$\Big\|\sum_{h\in\mathrm{I}}R_hAP_h\Big\|\leqslant\Big(\sum_{h\in\mathrm{I}}\|R_hA\|^2\Big)^{1/2}.$$

Аналогично

$$\Big\|\sum P_hAR_h\Big\|=\Big\|\sum(AR_h)^*P_h\Big\|\leqslant\Big(\sum\|(AR_h)^*\|^2\Big)^{1/2}=\Big(\sum\|R_hA\|^2\Big)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\Big\|\sum_{h\in\mathrm{I}}B'_h\Big\|\leqslant2\Big(\sum_{h\in\mathrm{I}}\|R_hA\|^2\Big)^{1/2}\leqslant2\|A\|\Big(\sum_{h\in\mathrm{I}}\|R_h\|^2\Big)^{1/2}. \tag{4.26}$$

Поскольку $\|R_h\|\leqslant1/d_h$ в силу (3.20), получаем

$$\Big\|\sum_{h\in\mathrm{I}}B'_h\Big\|\leqslant2\|A\|\Big(\sum_{n=1}^{\infty}d_n^{-2}\Big)^{1/2}<\infty. \tag{4.27}$$

Сопоставляя (4.23) и (4.27), видим, что $\Big\|\sum_{h\in\mathrm{I}}(B'_h+B''_h)\Big\|\leqslant M'<\infty$ для любого конечного множества I номеров $h$ ($>N$).

II. Теперь легко закончить доказательство теоремы. Будем использовать обозначение $\{Q_h\}$ для собственных проекторов оператора $S$, перенумерованных таким образом, что справедливо утверждение теоремы 4.15. Пусть $\{Q'_h\}$ — произвольная перестановка операторов $Q_h$. Мы должны показать, что

$$\sum_{h=1}^{n} Q'_h u \to u \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.28}$$

для всех $u \in \mathbf{H}$. Поскольку выше мы доказали, что $\sum_{h=1}^{n} Q'_h$ равномерно ограничена, достаточно доказать (4.28) для всех $u$ из плотного в $\mathbf{H}$ подмножества.

Пусть $\mathbf{M}_h$ — область значений $Q_h$. Если $u \in \mathbf{M}_k$, то $\sum_{h=1}^{n} Q'_h u = Q_k u = u$ для достаточно большого $n$, ибо множество $\{Q'_1, \ldots, Q'_n\}$ должно содержать $Q_k$ и $Q_h Q_k = \delta_{hk} Q_k$. Следовательно, (4.28) справедливо для $u \in \mathbf{M}_k$. Поскольку $k$ произвольно, (4.28) имеет место для всех $u$ из линейного подпространства $\mathbf{M}$, натянутого на $\mathbf{M}_k$. Но $\mathbf{M}$ плотно в $\mathbf{H}$, ибо любое $u \in \mathbf{H}$ есть сильный предел сумм $\sum_{h=1}^{n} Q_h u \in \mathbf{M}$ при $n \to \infty$ в силу теоремы 4.15.

**Замечание 4.17.** В приведенных выше теоремах предположение о том, что $T$ ограничен снизу, не является существенным. Если $T$ неограничен как сверху, так и снизу, мы можем перенумеровать его собственные значения так: $\ldots < \lambda_{-2} < \lambda_{-1} < \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ и соответствующим образом собственные проекторы $P_h$. Затем предположим, что $\lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty$ при $n \to \pm\infty$ (теорема 4.15) или $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-2} < \infty$ (теорема 4.16). Изменяя очевидным образом приведенное выше доказательство, можно показать, что собственные проекторы оператора $S$ могут быть занумерованы как $Q_h$, $h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и $\lim\limits_{m, n \to \infty} \sum_{h=-m}^{n} Q_h u = u$ для любого $u \in \mathbf{H}$.

**Пример 4.18.** Рассмотрим дифференциальный оператор $S = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$ на замкнутом интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$ с граничным условием $u(0) = u(1) = 0$, где $q(x)$ — ограниченная комплекснозначная функция. Если $A$ — оператор умножения на $q(x)$, то $A \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$, где $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0, 1)$. Оператор $T = -d^2/dx^2$ с теми же граничными условиями, что и у $S$, является самосопряженным оператором с собственными значениями $\lambda_n = \pi^2 n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, теорема 4.16 применима к этому случаю и собственные проекторы $S$ образуют полное множество при любом способе нумерации. Поэтому $S$ — спектральный оператор.

# § 5. Операторы Шрёдингера и Дирака

## 1. Дифференциальные операторы в частных производных

Теперь мы применим полученные выше результаты к некоторым дифференциальным операторам в частных производных, а именно к операторам Шрёдингера и Дирака, с которыми имеет дело квантовая механика.

Начнем с рассмотрения оператора Шрёдингера

$$L = -\Delta + q(x) \tag{5.1}$$

в области E трехмерного евклидова пространства $\mathrm{R}^3$ с координатами $x = (x_1, x_2, x_3)$. Здесь $\Delta$ обозначает лапласиан

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \tag{5.2}$$

а $q(x) = q(x_1, x_2, x_3)$ — вещественная функция, определенная в E. Исходя из *формального* дифференциального оператора $L$ могут быть построены различные линейные операторы, действующие в некоторых функциональных пространствах (так же, как и в случае обыкновенных дифференциальных операторов; см. п. III.2.3). В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные операторы в гильбертовом пространстве $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{E})$, которое является наиболее важным для приложений.

Совсем не очевидно, что (5.1) определяет линейный оператор в H. Функция $u = u(x)$ должна быть достаточно гладкой, чтобы $\Delta u$ имело смысл, но произведение $q(x)\, u(x)$ может для таких функций не принадлежать $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2$, если $q(x)$ — слишком «плохая» функция. Поэтому мы раз и навсегда предположим, что $q(x)$ *локально интегрируема с квадратом*, т. е. $q \in \mathrm{L}^2(\mathrm{K})$ для каждого компакта $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}$. Тогда $q(x)\, u(x)$ принадлежит H, если $u$ — гладкая функция с *компактным носителем* в E (т. е. $u$ обращается в нуль вне компактного подмножества из E, которое зависит от $u$). Обозначим через $\mathrm{C}_0^\infty = \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{E})$ множество всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в E, а через $\dot{S}$ — сужение $L$ на $\mathrm{D}(\dot{S}) = \mathrm{C}_0^\infty$. Оператор $\dot{S}$ — линейный оператор в H с плотной областью определения; он называется *минимальным оператором*, построенным по формальному дифференциальному оператору $L$.

Область определения $\dot{S}$ сужена больше, чем это необходимо; в приведенном выше определении можно заменить $\mathrm{C}_0^\infty$ на $\mathrm{C}_0^2$ (множество дважды непрерывно дифференцируемых функций с компактными носителями), поскольку в выражение для $\Delta u$ входят только вторые производные, при этом мы получим продолжение оператора $\dot{S}$. Мы можем также определить еще большее продолжение $S$ оператора $\dot{S}$, беря в качестве области определения $S$ все функции $u \in \mathrm{H}$ такие, что $u \in C^2(\mathrm{E})$ (дважды непрерывно дифференцируемые в $\mathrm{E}$ функции) и $Lu = -\Delta u + qu \in \mathrm{H}$ (здесь $u$ не обязано иметь компактный носитель). В некотором смысле $S$ — наибольший оператор в $\mathrm{H}$, построенный по $L$. Так как $S \supset \dot{S}$, то $S$ определен на плотном множестве в $\mathrm{H}$. [Формально $S$ может быть определен без предположения, что $q(x)$ локально интегрируема с квадратом, однако тогда трудно решить, будет ли $S$ определен на плотном множестве.] Одна из основных задач для дифференциальных операторов состоит в изучении соотношений между операторами $\dot{S}$, $S$ и их сопряженными.

Оператор $L$ *формально самосопряжен*; это означает, что справедливо тождество Грина

$$\int_{\mathrm{E}_0} ((Lu)v - uLv)\,dx = \int_{\partial \mathrm{E}_0} \left(\frac{\partial u}{\partial n} v - u\frac{\partial v}{\partial n}\right) dS, \tag{5.3}$$

где $\mathrm{E}_0$ — любая подобласть в $\mathrm{E}$ с компактным замыканием и с гладкой границей $\partial \mathrm{E}_0$, $dS$ — элемент поверхности, а $\partial/\partial n$ — производная по внутренней нормали к $\partial \mathrm{E}_0$. Если $u \in \mathbf{D}(\dot{S})$ и $v \in \mathbf{D}(S)$, то из (5.3) получим, заменив $v$ на $\bar{v}$, что

$$(\dot{S}u, v) = (u, Sv). \tag{5.4}$$

Это означает, что $\dot{S}$ и $S$ сопряжены; следовательно,

$$\dot{S} \subset S \subset \dot{S}^*, \qquad \dot{S} \subset \tilde{\dot{S}} = \dot{S}^{**} \subset S^* \subset \dot{S}^*. \tag{5.5}$$

В частности, $\dot{S}$ симметричен и симметрично его замыкание $\tilde{\dot{S}} = \dot{S}^{**}$. Возникает вопрос, будет ли $\tilde{\dot{S}}$ самосопряженным. Вообще говоря, ответ отрицательный, как вытекает из рассмотрения обыкновенных дифференциальных операторов (см. примеры в п. 3.6). Но отметим, что *$\dot{S}$ существенно самосопряжен, только если $S$ симметричен*. Действительно, из самосопряженности $\dot{S}^{**}$ следует, что $\dot{S}^{**} = \dot{S}^{***} = \dot{S}^*$, так что (5.5) влечет за собой $S^* = \dot{S}^* \supset S$. Обратно, *$\dot{S}$ существенно самосопряжен, если $S$ симметричен*. Доказательство этого утверждения требует более глубоких знаний свойств дифференциальных операторов.

В общем случае существует много самосопряженных операторов, лежащих между $\dot{S}$ и $\dot{S}^*$, обычно они получаются сужением оператора $\dot{S}^*$ (который оказывается дифференциальным оператором в обобщенном смысле) с помощью соответствующих *граничных условий* (так же, как и в случае обыкновенных дифференциальных операторов; см. п. 3.6). Например, предположим, что $q(x) = 0$; тогда граничное условие $u = 0$ на $\partial\mathrm{E}$ определяет оператор, отвечающий *задаче Дирихле*, а граничное условие $\partial u/\partial n = 0$ задает оператор, отвечающий *задаче Неймана*. Мы будем называть $\dot{S}^*$ *максимальным оператором*, построенным по $L$.

## 2. Оператор Лапласа во всем пространстве

В этом пункте мы рассмотрим специальный случай, в котором $\mathrm{E} = \mathrm{R}^3$ (все пространство) и $q(x) = 0$. Мы покажем, что минимальный оператор $\dot{T}$, построенный по формальному оператору Лапласа $L = -\Delta$, существенно самосопряжен, и, кроме того, дадим полное описание самосопряженного оператора $H_0 = \dot{T}^{**} = \dot{T}^*$.

Эти результаты легко получаются с помощью преобразования Фурье. В силу теоремы Фурье — Планшереля (см. пример 2.7) каждой $u(x) \in \mathrm{L}^2$ отвечает фурье-образ $\hat{u}(k) \in \mathrm{L}^2$, определенный формулой (2.13). Для удобства мы считаем, что $u(x)$ и $\hat{u}(k)$ принадлежат разным гильбертовым пространствам $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(x)$ и $\hat{\mathrm{H}} = \mathrm{L}^2(k)$. Отображение $u \to \hat{u} = Uu$ определяет унитарный оператор $U$ из $\mathrm{H}$ в $\hat{\mathrm{H}}$.

Если $u \in \mathrm{C}_0^\infty$, то, как легко видеть, $\dot{T}u = -\Delta u$ имеет фурье-образ $|k|^2\hat{u}(k)$, где $|k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$. Пусть теперь $K^2$ — максимальный оператор умножения на $|k|^2$ в гильбертовом пространстве $\hat{\mathrm{H}}$ (см. пример III.2.2). Оператор $K^2$ самосопряжен (см. задачу 3.22). Обозначим через $H_0$ оператор

$$H_0 = U^{-1}K^2U. \tag{5.6}$$

Оператор $H_0$ самосопряжен в $\mathrm{H}$, поскольку он является унитарным образом самосопряженного оператора $K^2$ $\hat{\mathrm{H}}$, причем $\mathrm{D}(H_0) = U^{-1}\mathrm{D}(K^2)$. Другими словами, $\mathrm{D}(H_0)$ *есть множество всех* $u \in \mathrm{L}^2(x)$ *таких, что их фурье-образы, будучи умноженными на* $|k|^2$, *принадлежат* $\mathrm{L}^2(k)$. Из сказанного выше следует, что $H_0 \supset \dot{T}$. Таким образом, тот факт, что $\dot{T}$ существенно самосопряжен, эквивалентен утверждению, что $\dot{T}$ имеет замыкание $H_0$, т. е. что $\mathrm{D}(\dot{T}) = \mathrm{C}_0^\infty$ *является ядром* $H_0$ (см. III.5.3).

Прежде чем доказывать это предложение, отметим, что существуют другие подмножества в $\mathrm{D}(H_0)$, также являющиеся ядром $H_0$. Например, множество $\mathrm{S}$ всех функций вида

$$e^{-|x|^2/2}P(x) \quad (P(x) \text{ — полиномы относительно } x_1, x_2, x_3) \tag{5.7}$$

является ядром $H_0$. Чтобы доказать это, достаточно заметить, что множество $\hat{\mathbf{S}}$ фурье-образов функций (5.7) образует ядро оператора $K^2$. Докажем последнее утверждение. Так как $K^2$ — неотрицательный оператор, то в силу результата задачи III.6.3 достаточно доказать, что $K^2+1$ отображает $\hat{\mathbf{S}}$ на плотное множество в $\hat{\mathbf{H}}$. Но преобразование Фурье функций вида (5.7) имеет тот же вид, с тем отличием, что $x$ заменено на $k$. Замечая, что функция $(|k|^2+1)\,e^{-|k|^2/4} = f(k)$ ограничена, видим, что $(K^2+1)\,\hat{\mathbf{S}}$ является образом множества $\hat{\mathbf{S}}'$ всех функций вида

$$e^{-|k|^2/4}P(k) \tag{5.8}$$

при действии оператора $F$ [максимальный оператор умножения на $f(k)$]. Но множество $\hat{\mathbf{S}}'$ плотно в $\mathbf{L}^2(k)$, так как оно содержит множество всех функций Эрмита [1]. Поскольку $F$ — ограниченный симметричный оператор, размерность ядра которого равна нулю, и, следовательно, $\mathbf{R}(F)$ плотно в $\hat{\mathbf{H}}$, то $(K^2+1)\,\hat{\mathbf{S}}$ плотно в $\hat{\mathbf{H}}$ (см. задачу III.2.9).

Теперь мы можем доказать, что $\widetilde{\dot{T}} = H_0$. Обозначим через $T_1$ сужение $H_0$ на множество $\mathbf{S}$. Так как выше было показано, что $\widetilde{T}_1 = H_0$, то достаточно доказать, что $\widetilde{\dot{T}} \supset T_1$ (ибо отсюда $\widetilde{\dot{T}} \supset \widetilde{T}_1 = H_0$). Для этого построим по каждому $u$ вида (5.7) последовательность $u_n \in \mathrm{C}_0^\infty$ такую, что $u_n \underset{\mathrm{s}}{\to} u$ и $\dot{T}u_n = -\Delta u_n \underset{\mathrm{s}}{\to} -\Delta u = T_1 u$. Искомая последовательность задается, например, формулой

$$u_n(x) = w\left(\frac{x}{n}\right)u(x), \tag{5.9}$$

где $w(x)$ — вещественная функция из $\mathrm{C}_0^\infty$ такая, что всюду $0 \leqslant w(x) \leqslant 1$ и $w(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$. Очевидно, $u_n \in \mathrm{C}_0^\infty$ и $u_n \underset{\mathrm{s}}{\to} u$. Далее, равенство

$$\Delta u_n(x) = w\left(\frac{x}{n}\right)\Delta u(x) + \frac{2}{n}(\operatorname{grad} w)\left(\frac{x}{n}\right)\cdot \operatorname{grad} u(x) + \\ + \frac{1}{n^2}(\Delta w)\left(\frac{x}{n}\right)u(x) \tag{5.10}$$

показывает, что $\Delta u_n \underset{\mathrm{s}}{\to} \Delta u$.

С точностью до размерной постоянной $H_0$ *является гамильтонианом для свободной частицы* в нерелятивистской квантовой механике, а $K^2$ дает его *представление* в импульсном пространстве.

---

[1] О полноте ортонормированной системы функций Эрмита см. Курант и Гильберт [1]. Рассматриваемые здесь трехмерные функции Эрмита являются произведением одномерных функций.

**Задача 5.1.** Пусть $T$ — оператор $S$ из п. 1 в том частном случае, когда $L = -\Delta$. Он является симметричным и существенно самосопряженным, причем $\widetilde{T} = H_0$. Приведите *прямое* доказательство того факта, что $(Tu, u)$ вещественно для каждого $u \in \mathbf{D}(T)$.

**Замечание 5.2.** Самосопряженный оператор $H_0$ не является дифференциальным оператором в обычном смысле, ибо функция $u(x) \in \mathbf{D}(H_0)$ не обязана быть всюду дифференцируемой. Но $u(x)$ имеет производные до второго порядка в обобщенном смысле, принадлежащие $\mathbf{L}^2$. Обобщенная производная $\partial u/\partial x_j$, как естественное обобщение случая «гладких» $u(x)$, определяется как обратное преобразование Фурье от $ik_j\hat{u}(k)$, и, аналогично, обобщенная производная $\partial^2 u/\partial x_j\,\partial x_l$ есть обратное преобразование Фурье от $-k_jk_l\hat{u}(k)$. Поскольку $u \in \mathbf{D}(H_0)$ влечет за собой $(1+|k|^2)\,\hat{u}(k) \in \mathbf{L}^2$, то все эти обобщенные производные принадлежат $\mathbf{L}^2$[1]).

Благодаря этой обобщенной дифференцируемости функции из $\mathbf{D}(H_0)$ более «регулярны», чем обычные функции из $\mathbf{L}^2$. В самом деле, *каждая функция* $u \in \mathbf{D}(H_0)$ *является* (*эквивалентна*) *ограниченной и равномерно непрерывной функцией*. Чтобы доказать это, заметим, что

$$\left(\int |\hat{u}(k)|\,dk\right)^2 \leqslant \int \frac{dk}{(|k|^2+\alpha^2)^2} \int (|k|^2+\alpha^2)^2\,|\hat{u}(k)|^2\,dk = \\ = \frac{\pi^2}{\alpha}\,\|(H_0+\alpha^2)\,u\|^2 < \infty, \qquad (5.11)$$

где $\alpha > 0$ произвольно. Но хорошо известно (и легко проверяется), что функция $u(x)$ ограничена и непрерывна, если ее фурье-образ интегрируем, причем

$$|u(x)| \leqslant (2\pi)^{-3/2}\int |\hat{u}(k)|\,dk \leqslant c\alpha^{-1/2}\,\|(H_0+\alpha^2)\,u\| \leqslant \\ \leqslant c\,(\alpha^{-1/2}\,\|H_0u\| + \alpha^{3/2}\,\|u\|), \qquad (5.12)$$

где $c$ — некоторая постоянная. В частности, значение $u(x)$ функции $u$ в любой фиксированной точке $x$ является $H_0$-ограниченным с относительной гранью, равной нулю.

Аналогичные вычисления дают

$$|u(x)-u(y)| \leqslant C_\gamma\,|x-y|^\gamma\,(\alpha^{-(1/2-\gamma)}\,\|H_0u\| + \alpha^{3/2+\gamma}\,\|u\|), \qquad (5.13)$$

где $\gamma$ — любое положительное число, меньшее $1/2$, $C_\gamma$ — постоянная, зависящая только от $\gamma$, и $\alpha$ — любое положительное число. В выводе (5.13) отметим следующие моменты: $|e^{ik\cdot x} - e^{ik\cdot y}| = |e^{ik\cdot(x-y)} - 1|$ не более 2 или $|k|\,|x-y|$, и потому

---

[1] Эти обобщенные производные являются частным случаем производных в теории *обобщенных функций* (или *распределений*). По поводу обобщенных функций см., например, Иосида [[1]] [или Владимиров [[12*]], Гельфанд и Шилов [[14*]].—*Ред.*].

не более $2^{1-\gamma}\,|k|^{\gamma}\,|x-y|^{\gamma}$, а интеграл $\int |k|^{\gamma}\,|\hat{u}(k)|\,dk$, оцениваемый как в (5.11), конечен, если $0<\gamma<1/2$. Неравенство (5.13) означает, что $u(x)$ *непрерывна по Гёльдеру* с любым показателем, меньшим 1/2.

Формулы (5.12) и (5.13) являются частными случаями *неравенств Соболева*[1].

**Замечание 5.3.** Установленные выше результаты могут быть распространены на $n$-мерный случай, за исключением неравенств (5.12) и (5.13), для которых существенна трехмерность пространства.

### 3. Оператор Шрёдингера со статическим потенциалом

Теперь мы рассмотрим оператор Шрёдингера (5.1) во всем пространстве $\mathrm{E}=\mathrm{R}^3$. Здесь мы предположим, что $q(x)$ не только локально интегрируема с квадратом, но может быть представлена в виде

$$q=q_0+q_1,\quad \text{где}\quad q_0\in \mathrm{L}^{\infty}(\mathrm{R}^3),\quad q_1\in \mathrm{L}^2(\mathrm{R}^2). \tag{5.14}$$

Как и выше, рассмотрим минимальный оператор $\dot{S}$ и «более широкий» оператор $S$, построенные по $L=-\Delta+q$. Пусть $\dot{T}$ — минимальный оператор для $q=0$, изученный в предыдущем пункте. Тогда $\dot{S}$ можно представить в виде

$$\dot{S}=\dot{T}+Q=\dot{T}+Q_0+Q_1, \tag{5.15}$$

где $Q$, $Q_0$ и $Q_1$ — максимальные операторы умножения на $q(x)$, $q_0(x)$, $q_1(x)$ соответственно; заметим, что $\dot{S}$ и $\dot{T}$ имеют одну и ту же область определения $\mathrm{C}_0^{\infty}(\mathrm{R}^3)$. Оператор $S$ не может быть представлен подобным образом, ибо нет простой зависимости между областями определения операторов $S$ и $T$ ($T$ — соответствующий оператор при $q=0$).

Сейчас мы докажем, что $\dot{S}$ — *существенно самосопряженный* оператор. Для этого достаточно применить теорему 4.4, рассматривая $\dot{S}$ как оператор, полученный из $\dot{T}$ добавлением возмущения $Q$, и доказывая, что оператор $Q$ является *$\dot{T}$-ограниченным с относительной гранью, равной нулю*. Обозначая через $H$ и $H_0$ самосопряженные замыкания $\dot{S}$ и $\dot{T}$ соответственно, мы покажем далее, что

$$H=H_0+Q,\quad \mathrm{D}(H)=\mathrm{D}(H_0)\subset \mathrm{D}(Q). \tag{5.16}$$

---

[1] См. Соболев [1].

Каждая функция $u(x) \in \mathbf{D}(H_0)$ является ограниченной в силу (5.12). Поэтому $Q_1 u$ принадлежит $\mathbf{L}^2$, причем

$$\| Q_1 u \| \leqslant \| q_1 \|_2 \, \| u \|_\infty \leqslant c \, \| q_1 \|_2 \, (\alpha^{-1/2} \, \| H_0 u \| + \alpha^{3/2} \, \| u \|).$$

К тому же $Q_0 u \in \mathbf{L}^2$ и $\| Q_0 u \| \leqslant \| q_0 \|_\infty \, \| u \|$. Следовательно,

$$\mathbf{D}(Q) \supset \mathbf{D}(H_0) \supset \mathbf{D}(\dot{T}), \quad \| Qu \| \leqslant a \, \| u \| + b \, \| H_0 u \|,$$
$$b = c\alpha^{-1/} \, \| q_1 \|_2, \quad a = c\alpha^{3/2} \, \| q_1 \|_2 + \| q_0 \|_\infty. \tag{5.17}$$

Так как $\alpha$ может быть выбрано сколь угодно большим, то (5.17) показывает, что $Q$ $H_0$-ограничен (и заведомо $\dot{T}$-ограничен) с относительной гранью, равной нулю. Итак, мы получаем из теоремы 4.3, что оператор $H_0 + Q$ самосопряжен, а из теоремы 4.4, что оператор $\dot{S} = \dot{T} + Q$ существенно самосопряжен.

Поскольку очевидно, что $H_0 + Q \supset \dot{S}$, то оператор $H_0 + Q$ совпадает с замыканием $\dot{S}$. Таким образом, *возмущенный оператор $H$ имеет ту же область определения, что и невозмущенный оператор $H_0$*. Наконец, отметим, что в силу теоремы 4.11 $H$ ограничен снизу. Объединяя доказанные утверждения, получаем такой результат:

**Теорема 5.4** [1]. *Если выполнено условие* (5.14), *то $\dot{S}$ — существенно самосопряженный оператор. Его самосопряженное продолжение $H$ равно $H_0 + Q$, причем $\mathbf{D}(H) = \mathbf{D}(H_0)$ и оператор $H$ ограничен снизу.*

**Задача 5.5.** *Кулоновский потенциал* $q(x) = e \, | x |^{-1}$ удовлетворяет (5.14). При каких $\beta$ условие (5.14) выполняется для $q(x) = e \, | x |^{-\beta}$?

**Замечание 5.6.** Полученные выше результаты могут быть распространены на оператор Шрёдингера для системы из $s$ частиц, взаимодействующих друг с другом по закону Кулона. В этом случае оператор Шрёдингера имеет вид (5.1), где $\Delta$ есть $3s$-мерный лапласиан, а потенциал $q(x)$ равен

$$q(x) = \sum_{j=1}^{s} \frac{e_j}{r_j} + \sum_{j<k} \frac{e_{jk}}{r_{jk}}, \tag{5.18}$$

---

[1] Данное здесь доказательство принадлежит Т. Като [4]. Этот результат, однако, не очень сильный, хотя его доказательство совсем простое. Было получено много более сильных результатов (см. Штуммель [1], Вьенхольц [1], Браунел [1], Икэбэ и Като [1], Роде [1], Г. Хельвиг [1], Б. Хельвиг [1], Йоргенс [1]), но большинство этих работ используют специальные свойства дифференциальных операторов. Бэббит [1] и Нельсон [1] получили интересные результаты в этом направлении, используя интеграл Винера в функциональных пространствах.

где $e_j$, $e_{jk}$ — постоянные и

$$r_j = (x_{3j-2}^2 + x_{3j-1}^2 + x_{3j}^2)^{1/2},$$
$$r_{jk} = [(x_{3j-2} - x_{3k-2})^2 + (x_{3j-1} - x_{3k-1})^2 + (x_{3j} - x_{3k})^2]^{1/2}.$$

Можно доказать, что минимальный оператор $\dot{T}$, построенный по формальному оператору $-\Delta$, существенно самосопряжен с самосопряженным замыканием $H_0$ (замечание 5.3) и что $Q$ $H_0$-ограничен и $\dot{T}$-ограничен с относительной гранью, равной нулю. Приведенное выше для случая $s = 1$ доказательство непосредственно неприменимо, ибо неравенство (5.12) не выполняется, но оно может быть модифицировано с учетом того обстоятельства, что $q(x)$ состоит из членов, каждый из которых на самом деле зависит лишь от 3 переменных [1]).

Рассматривая спектр оператора $H$, мы получим более полные результаты, если сделаем дополнительное предположение относительно $q(x)$.

**Теорема 5.7.** *Пусть выполнено условие* (5.14), *и, кроме того, предположим, что* $q_0(x) \to 0$ *при* $|x| \to \infty$. *Тогда существенный спектр* $H$ *совпадает с неотрицательной вещественной полуосью.* (*Таким образом, спектр* $H$ *на отрицательной вещественной полуоси состоит только из изолированных собственных значений конечной кратности* [2]).)|

Доказательство. Легко видеть, что спектр $H_0$ совпадает с неотрицательной вещественной полуосью, которая является в то же время существенным спектром $H_0$. Поэтому в силу теоремы IV.5.35 достаточно доказать следующую лемму:

**Лемма 5.8.** *В предположениях теоремы* 5.7 *оператор* $Q$ *компактен относительно* $H_0$.

Доказательство. Пусть $\{u_n\}$ — ограниченная последовательность в $\mathbf{H}$ такая, что $\{H_0 u_n\}$ также ограничена; надо показать, что последовательность $\{Qu_n\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Так как $Q = Q_0 + Q_1$, то достаточно доказать это отдельно для $\{Q_0 u_n\}$ и $\{Q_1 u_n\}$.

В силу (5.12) и (5.13) $u_n(x)$ равномерно ограничены по $x$ и $n$ и равностепенно непрерывны. По теореме Асколи $\{u_n\}$ содержит подпоследовательность $\{v_n\}$, равномерно сходящуюся в любой ограниченной области пространства $\mathrm{R}^3$. Обозначим через $v$ ее предел; функция $v$ непрерывна, ограничена и принадлежит $\mathbf{H}$.

---

[1]) Относительно деталей см. Т. Като [4].

[2]) О спектре операторов Шрёдингера см. Т. Като [4], [4а], Повзнер [1], Бирман [5], Браунел [2], Жислин [1], Икэбэ [1].

Тогда $Q_1 v_n = q_1 v_n \xrightarrow[s]{} q_1 v$ в $\mathbf{H}$ в силу теоремы о мажорантной сходимости. Чтобы доказать, что $q_0 v_n \rightarrow q_0 v$ в $\mathbf{H}$, возьмем любое $\varepsilon > 0$ и столь большое $R$, что $|q_0(x)| \leqslant \varepsilon$ при $|x| \geqslant R$. Тогда

$$\int\limits_{|x| \geqslant R} |q_0 v_n - q_0 v|^2 dx \leqslant 2\varepsilon^2 (\|v_n\|^2 + \|v\|^2) \leqslant 4M^2\varepsilon^2 \quad \text{при всех } n,$$

где $M = \sup \|u_n\|$, и

$$\int\limits_{|x| \leqslant R} |q_0 v_n - q_0 v|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

в силу равномерной сходимости $v_n \rightarrow v$ при $|x| \leqslant R$. Отсюда $q_0 v_n \xrightarrow[s]{} q_0 v$ в $\mathbf{H}$, что завершает доказательство.

**Замечание 5.9.** В доказанных выше теоремах предполагалось, что $q(x)$ — вещественная функция, однако в некотором смысле это требование не существенно. Конечно, оператор $\dot{S}$ не симметричен, если $q(x)$ невещественна, и о существенной самосопряженности $\dot{S}$ не может быть и речи. Тем не менее можно рассматривать спектр оператора $\tilde{\dot{S}}$; при этом, например, теорема 5.7 имеет место, если оператор $H$ заменить на $\tilde{\dot{S}}$; ее доказательство остается в силе, ибо в нем существенно лишь то, что $Q_0$ и $Q_1$ компактны относительно $H_0$, а это верно и тогда, когда $q_0$ и $q_1$ не обязательно вещественны.

## 4. Оператор Дирака

В связи с оператором Шрёдингера интересно также рассмотреть оператор Дирака[1]. Для свободной частицы этот оператор имеет следующий вид (с точностью до размерной постоянной)[2]:

$$L = i^{-1}\alpha \cdot \operatorname{grad} + \beta. \tag{5.19}$$

Оператор $L$ — снова формальный дифференциальный оператор, действующий на векторнозначные (или, скорее, *спинорнозначные*) функции $u(x) = (u_1(x), \ldots, u_4(x))$ с четырьмя компонентами, зависящие от $x = (x_1, x_2, x_3)$. Обозначим через $\mathrm{C}^4$ четырехмерное комплексное векторное пространство, в котором лежат значения $u(x)$. Вектор $\alpha$ есть вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ с тремя компонентами $\alpha_k$, которые являются операторами в $\mathrm{C}^4$ и могут быть отож-

---

[1] По поводу самосопряженности оператора Дирака см. Т. Като [4], Проссер [1].

[2] См., например, Шифф [1].

дествлены с их представлениями в виде квадратных ($4 \times 4$)-матриц. Аналогично $\beta$ есть ($4 \times 4$)-матрица. Таким образом, $Lu = v = (v_1, \ldots, v_4)$ имеет компоненты

$$v_j(x) = i^{-1}\sum_{l=1}^{3}\sum_{h=1}^{4}(\alpha_l)_{jh}\frac{\partial u_h}{\partial x_l} + \sum_{h=1}^{4}\beta_{jh}u_h(x). \qquad (5.20)$$

Матрицы $\alpha_k$ и $\beta$ эрмитовы и удовлетворяют соотношениям коммутации:

$$\alpha_j\alpha_h + \alpha_h\alpha_j = 2\delta_{jh}1, \quad j,\ h = 1,\ 2,\ 3,\ 4; \qquad (5.21)$$

для удобства мы положили $\alpha_4 = \beta$ (1 есть единичная ($4 \times 4$)-матрица). Известно, что такая система матриц $\alpha_j$, $\beta$ существует; для наших целей не требуется выписывать их в явном виде.

Так как $L$ — формальный дифференциальный оператор, то по нему можно строить различные операторы в гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = (\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3))^4$, состоящем из всех $\mathbf{C}^4$-значных функций, таких, что

$$\|u\|^2 = \int |u(x)|^2\,dx < \infty, \quad |u(x)|^2 = \sum_{j=1}^{4}|u_j(x)|^2. \qquad (5.22)$$

Соответствующее скалярное произведение таково:

$$(u,\ v) = \int u(x)\cdot\overline{v(x)}\,dx, \quad u(x)\cdot\overline{v(x)} = \sum_{j=1}^{4}u_j(x)\overline{v_j(x)}. \qquad (5.23)$$

Обозначим через $\dot{T}$ минимальный оператор $\dot{T}u = Lu$ с областью определения $\mathbf{D}(\dot{T}) = (\mathrm{C}_0^\infty)^4$, состоящей из всех $u(x)$ с компонентами, принадлежащими $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbf{R}^3)$.

*Оператор $\dot{T}$ существенно самосопряжен.* Доказательство снова легко получить с помощью преобразования Фурье. Пусть $\hat{u}(k)$ есть фурье-образ $u(x)$; это означает, что $\hat{u}(k)$ имеет 4 компоненты $\hat{u}_j(k)$, которые являются фурье-образами $u_j(x)$. Отображение $u \to \hat{u} = Uu$ снова определяет унитарный оператор из $\mathbf{H}$ в $\hat{\mathbf{H}} = (\mathbf{L}^2(k))^4$. Легко проверить, что для $u \in \mathbf{D}(\dot{T})$, $\dot{T}u = Lu = v$ имеет фурье-образ, равный

$$\hat{v}(k) = (k\cdot\alpha + \beta)\,\hat{u}(k) = (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + \beta)\,\hat{u}(k). \qquad (5.24)$$

Определим оператор $K$ в $\hat{\mathbf{H}}$ как максимальный оператор умножения на $k\cdot\alpha + \beta$; здесь термин «оператор умножения» употребляется в обобщенном смысле, ибо $k\cdot\alpha + \beta$ при каждом фиксированном $k$ является ($4 \times 4$)-матрицей, а не скаляром. Поскольку порядок этой матрицы конечен, легко показать, что $K$ — самосопряженный оператор (как и в случае обычных операторов умножения). Положим

$$H_0 = U^{-1}KU. \tag{5.25}$$

Оператор $H_0$ является самосопряженным в $\mathbf{H}$ с областью определения $\mathbf{D}(H_0) = U^{-1}\mathbf{D}(K)$, а $\mathbf{D}(K)$ по определению есть множество всех $\hat{u} \in (\mathbf{L}^2)^4$, таких, что $(k\cdot\alpha + \beta)\,\hat{u}(k) \in (\mathbf{L}^2)^4$. Так как матрица $k\cdot\alpha + \beta$ эрмитова и в силу (5.21)

$$(k\cdot\alpha + \beta)^2 = (k^2 + 1)\,\mathbf{1}, \tag{5.26}$$

то включение $\hat{u} \in \mathbf{D}(K)$ эквивалентно тому, что

$$\int (k^2 + 1)\,|\,\hat{u}(k)\,|^2\,dk = \|\,K\hat{u}\,\|^2 < \infty. \tag{5.27}$$

Из сказанного выше следует, что $\dot{T} \subset H_0$. Таким образом, $\dot{T}$ существенно самосопряжен тогда и только тогда, когда $\widetilde{\dot{T}} = H_0$.

Чтобы доказать существенную самосопряженность $\dot{T}$, покажем, что $K$ является прямой суммой четырех операторов, два из которых изоморфны оператору умножения на $(1 + k^2)^{1/2}$, а два других — оператору умножения на $-(1 + k^2)^{1/2}$. Введем при каждом $k$ новый ортонормированный базис в $C^4$, состоящий из собственных векторов эрмитовой матрицы $k\cdot\alpha + \beta$. В силу (5.26) собственные значения этой матрицы суть $\pm(k^2 + 1)^{1/2}$, и известно, что существует по два собственных вектора, отвечающих каждому знаку $+$ и $-$, которые образуют ортонормированное множество из четырех собственных векторов. С введением для каждого $k$ такого базиса (который никоим образом не является единственным из-за вырожденности собственных значений) гильбертово пространство $\mathbf{H}$ распадается в прямую сумму четырех подпространств, в каждом из которых оператор $K$ действует просто как оператор умножения на $(k^2 + 1)^{1/2}$ или на $-(k^2 + 1)^{1/2}$. Таким образом, доказательство существенной самосопряженности оператора $\dot{T}$ может быть проведено так же, как и в случае оператора Шрёдингера для свободной частицы. Детали предоставляем читателю [1]).

Оператор Дирака для частицы в статическом поле с потенциалом $q(x)$ задается выражением

$$L = i^{-1}\alpha\cdot\mathrm{grad} + \beta + Q, \tag{5.28}$$

где $Q$ — оператор умножения на $q(x)\,\mathbf{1}$. Если $q(x)$ вещественна и локально интегрируема с квадратом, то минимальный оператор

---

[1]) Ср. **Проссер** [1].

$\dot{S}$ с областью определения $(C_0^\infty)^4$, построенный по (5.28), определен на плотном множестве и симметричен (ср. с п. 1). Однако, для того чтобы $\dot{S}$ был существенно самосопряженным, нам потребуются некоторые предположения. Не стремясь к большой общности, мы ограничимся тем, что покажем, что кулоновский потенциал

$$q(x) = e/|x|, \quad |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, \tag{5.29}$$

обеспечивает существенную самосопряженность $\dot{S}$, если $|e|$ не слишком велико. Чтобы доказать это, достаточно проверить, что оператор $Q$ является $H_0$-ограниченным с относительной гранью, меньшей 1 (см. аналогичные рассуждения в предыдущем пункте). Но хорошо известно, по крайней мере для скалярных функций, что

$$\int |x|^{-2} \, |u(x)|^2 \, dx \leqslant 4 \int |\operatorname{grad} u(x)|^2 \, dx = \\ = 4 \int k^2 \, |\hat{u}(k)|^2 \, dk. \tag{5.30}$$

Это же неравенство для векторнозначных функций $u \in (C_0^\infty)^4$ получается простым сложением неравенств (5.30) для отдельных компонент $u_j(x)$. В силу (5.29) и (5.27) это дает неравенство

$$\| Qu \| \leqslant 2 \, |e| \, \| K\hat{u} \| = 2 \, |e| \, \| H_0 u \| \tag{5.31}$$

для $u \in \mathrm{D}(\dot{T})$; оно может быть распространено на все $u \in \mathrm{D}(H_0)$, ибо $H_0$ — замыкание $\dot{T}$, как было показано выше. Таким образом, оператор $Q$ $H_0$-ограничен с относительной гранью $\leqslant 2\,|e|$. Итак, доказана (см. теоремы 4.4 и 4.6)

**Теорема 5.10.** *Если $q(x) = e/|x|$ с вещественным $e$ таким, что $|e| \leqslant 1/2$, то минимальный оператор Дирака $\dot{S}$ существенно самосопряжен. Если $|e| < 1/2$, то замыкание оператора $\dot{S}$ имеет ту же область определения, что и $H_0$.*

**Задача 5.11.** Аналогичный результат справедлив, если

$$q(x) = \sum_j \frac{e_j}{|x - a_j|} + q_0(x), \tag{5.32}$$

где $a_j$, $j = 1, 2, \ldots$,— точки в $\mathrm{R}^3$, $q_0(x)$ — ограниченная функция и $\sum |e_j| \leqslant 1/2$.

**Замечание 5.12.** Теорема 5.10 не вполне удовлетворительна, поскольку условие $|e| \leqslant 1/2$ слишком ограничительно, чтобы охватить все интересные случаи водородоподобных атомов. В обычной системе единиц условие $|e| \leqslant 1/2$ означает, что $|Z| \leqslant$

$\leqslant 137/2 = 68{,}5$, где $Z$ — атомный номер и $1/137$ — константа тонкой структуры. В этой связи следует отметить, что условие $|e| \leqslant 1/2$ может быть несколько улучшено, если использовать теорему VI.3.11. В самом деле, легко видеть, что $|H_0| = (H_0^2)^{1/2}$ есть также оператор умножения на $(k^2+1)^{1/2}$ в $\hat{\mathbf{H}}$. Но мы имеем

$$\int |x|^{-1}|u(x)|^2\,dx \leqslant \frac{\pi}{2}\int |k|\,|\hat{u}(k)|^2\,dk \leqslant \frac{\pi}{2}(|H_0|u, u); \qquad (5.33)$$

это можно доказать, используя фурье-образ оператора $|x|^{-1}$, который является интегральным оператором с ядром $1/2\pi^2\,|k-k'|^2$. Из указанной теоремы теперь следует, что *если*

$$|e| < \frac{2}{\pi} = \frac{1}{1{,}57}, \qquad (5.34)$$

*то $\dot{S}$ имеет самосопряженное продолжение с областью определения, содержащейся в* $\mathbf{D}(|H_0|^{1/2})$. Условие (5.34) означает, что $|Z| \leqslant \leqslant 137/1{,}57 = 87$.

Следует отметить, что хотя теорема VI.3.11 не гарантирует единственности самосопряженного продолжения $\dot{S}$ для каждого фиксированного $e$, рассматриваемое продолжение «аналитично» по $e$ и является единственным продолжением, обладающим таким свойством. Этот результат следует из теоремы VII.5.1

# ГЛАВА VI

# ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫЕ ФОРМЫ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И АССОЦИИРОВАННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В конечномерном гильбертовом пространстве понятия полуторалинейной формы и линейного оператора эквивалентны, причем симметричным формам соответствуют симметричные операторы. Для ограниченных форм и ограниченных операторов это верно даже в бесконечномерном гильбертовом пространстве. Однако для неограниченных форм и операторов такой очевидной связи нет. Тем не менее существует замкнутая теория о связи между полуограниченными симметричными формами и полуограниченными самосопряженными операторами[1]. При определенных ограничениях эта теория может быть распространена на несимметричные формы и операторы. Так как ее результаты существенны для применений в теории возмущений, они будут подробно изложены в этой главе[2]. В нее же включены и некоторые непосредственные применения; дальнейшие результаты содержатся в гл. VII и VIII.

Последний параграф этой главы посвящен спектральной теореме и возмущению спектральных семейств. Эти вопросы не связаны существенным образом с полуторалинейными формами, хотя приводимое здесь доказательство спектральной теоремы использует некоторые результаты из теории форм. Учитывая тот факт, что спектральная теорема обладает довольно специфическими особенностями, мы всюду, где это возможно, стараемся избегать ее применения. Но поскольку эта теорема необходима для самой формулировки некоторых задач теории возмущений, полностью обойтись без нее невозможно, и нам кажется уместным обсудить ее после предварительного рассмотрения гильбертовых пространств.

## § 1. Полуторалинейные и квадратичные формы

### 1. Определения

В п. V.3.1 мы рассмотрели ограниченные полуторалинейные формы, определенные на прямом произведении $\mathrm{H} \times \mathrm{H}'$. Займемся теперь *неограниченными* формами $\mathfrak{t}[u, v]$; при этом мы будем рассматривать лишь только те формы, которые определены для $u$. $v$ из линейного подпространства $\mathrm{D}$ гильбертова пространства $\mathrm{H}$. Итак, пусть функция $\mathfrak{t}[u, v]$ комплекснозначна, линейна по $u \in \mathrm{D}$ при каждом фиксированном $v \in \mathrm{D}$ и полулинейна по $v \in \mathrm{D}$ при каждом фиксированном $u \in \mathrm{D}$. Будем называть $\mathrm{D}$ *областью*

---

[1] Эта теория принадлежит Фридрихсу [1]. См. также Т. Като [8].

[2] О других подходах к этой проблеме см. Аронштайн [4], Лионс [1].

*определения* формы $\mathfrak{t}$ и обозначать через $\mathrm{D}(\mathfrak{t})$. Если множество $\mathrm{D}(\mathfrak{t})$ плотно в $\mathbf{H}$, то мы будем говорить, что форма $\mathfrak{t}$ *плотно определена*.

Назовем функцию $\mathfrak{t}[u] = \mathfrak{t}[u, u]$ *квадратичной формой, ассоциированной* с $\mathfrak{t}[u, v]$. Согласно (I.6.11), $\mathfrak{t}[u, v]$ определяется по $\mathfrak{t}[u]$ однозначно, а именно

$$\mathfrak{t}[u, v] = \frac{1}{4}(\mathfrak{t}[u+v] - \mathfrak{t}[u-v] + i\mathfrak{t}[u+iv] - i\mathfrak{t}[u-iv]). \tag{1.1}$$

Отметим еще раз, что равенство (1.1) справедливо только в комплексном гильбертовом пространстве (замечание I.6.10). В дальнейшем будем называть $\mathfrak{t}[u, v]$ или $\mathfrak{t}[u]$ просто *формой*, если нет возможности их спутать.

Две формы $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}'$ равны, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}'$, тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же область определения $\mathrm{D}$ и $\mathfrak{t}[u, v] = \mathfrak{t}'[u, v]$ для всех пар $u$, $v$ из $\mathrm{D}$. *Продолжения* и *сужения* форм определяются очевидным образом, так же как и для операторов, и обозначаются следующим образом: $\mathfrak{t}' \supset \mathfrak{t}$ или $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{t}'$.

Тот факт, что область определения формы не обязательно совпадает со всем пространством, усложняет действия над формами, как и в случае операторов. Сумма $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2$ двух форм $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$ определяется формулой

$$\mathfrak{t}[u, v] = \mathfrak{t}_1[u, v] + \mathfrak{t}_2[u, v], \quad \mathrm{D}(\mathfrak{t}) = \mathrm{D}(\mathfrak{t}_1) \cap \mathrm{D}(\mathfrak{t}_2), \tag{1.2}$$

а произведение $\alpha\mathfrak{t}$ формы $\mathfrak{t}$ на скаляр $\alpha$ — формулой

$$(\alpha\mathfrak{t})[u, v] = \alpha\mathfrak{t}[u, v], \quad \mathrm{D}(\alpha\mathfrak{t}) = \mathrm{D}(\mathfrak{t}). \tag{1.3}$$

*Единичная форма* $1[u, v]$ по определению равна скалярному произведению $(u, v)$, а нулевая форма $0[u, v]$ принимает нулевое значение для всех $u$, $v$, причем областью определения обеих форм является $\mathbf{H}$. Таким образом, $0t \subset 0$ для любой формы $\mathfrak{t}$, и $\mathfrak{t} + \alpha = \mathfrak{t} + \alpha 1$ определяется для любой формы $\mathfrak{t}$ так:

$$(\mathfrak{t} + \alpha)[u, v] = \mathfrak{t}[u, v] + \alpha(u, v), \quad \mathrm{D}(\mathfrak{t} + \alpha) = \mathrm{D}(\mathfrak{t}). \tag{1.4}$$

Форму $\mathfrak{t}$ назовем *симметричной*, если

$$\mathfrak{t}[u, v] = \overline{\mathfrak{t}[v, u]}, \quad u, v \in \mathrm{D}(\mathfrak{t}). \tag{1.5}$$

Из (1.1) ясно, что форма $\mathfrak{t}$ симметрична тогда и только тогда, когда функция $\mathfrak{t}[u]$ вещественнозначна.

С каждой формой $\mathfrak{t}$ связана другая форма $\mathfrak{t}^*$, которая называется *сопряженной* к $\mathfrak{t}$ и определяется равенством

$$\mathfrak{t}^*[u, v] = \overline{\mathfrak{t}[v, u]}, \quad \mathrm{D}(\mathfrak{t}^*) = \mathrm{D}(\mathfrak{t}). \tag{1.6}$$

Форма $\mathfrak{t}$ симметрична тогда и только тогда, когда $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{t}$. Имеет место тождество

$$(\alpha_1\mathfrak{t}_1 + \alpha_2\mathfrak{t}_2)^* = \bar{\alpha}_1\mathfrak{t}^* + \bar{\alpha}_2\mathfrak{t}_2^*. \tag{1.7}$$

Для любой формы $\mathfrak{t}$ две формы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$, определенные равенствами

$$\mathfrak{h}=\frac{1}{2}(\mathfrak{t}+\mathfrak{t}^*), \quad \mathfrak{k}=\frac{1}{2i}(\mathfrak{t}-\mathfrak{t}^*), \tag{1.8}$$

симметричны, причем

$$\mathfrak{t}=\mathfrak{h}+i\mathfrak{k}. \tag{1.9}$$

Будем называть $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$ соответственно *вещественной* и *мнимой частью* формы $\mathfrak{t}$ и обозначать так: $\mathfrak{h}=\operatorname{Re}\mathfrak{t}$, $\mathfrak{k}=\operatorname{Im}\mathfrak{t}$. Такое обозначение оправдано тем, что

$$\mathfrak{h}[u]=\operatorname{Re}\mathfrak{t}[u], \quad \mathfrak{k}[u]=\operatorname{Im}\mathfrak{t}[u], \tag{1.10}$$

хотя функции $\mathfrak{h}[u, v]$ и $\mathfrak{k}[u, v]$ не являются вещественными и не имеют ничего общего с $\operatorname{Re}(\mathfrak{t}[u, v])$ и $\operatorname{Im}(\mathfrak{t}[u, v])$.

## 2. Полуограниченность

Симметричная форма $\mathfrak{h}$ называется ограниченной снизу, если множество (вещественных) значений $\mathfrak{h}[u]$ для $\|u\|=1$ ограничено снизу или, что эквивалентно,

$$\mathfrak{h}[u]\geqslant\gamma\|u\|^2, \quad u\in\mathbf{D}(\mathfrak{h}). \tag{1.11}$$

Этот факт будем записывать так:

$$\mathfrak{h}\geqslant\gamma. \tag{1.12}$$

Наибольшее число $\gamma$, обладающее этим свойством, называется *нижней гранью* формы $\mathfrak{h}$ и обозначается $\gamma_{\mathfrak{h}}$. Если $\mathfrak{h}\geqslant 0$, то форма $\mathfrak{h}$ называется неотрицательной. Аналогично вводятся понятия ограниченности сверху, верхней грани, неположительности и т. д. Так как мы будем большей частью иметь дело с формами, ограниченными снизу, то символ $\gamma$ будет использоваться только для обозначения нижней грани.

Если $\mathfrak{h}$ — неотрицательная симметричная форма, то справедливо неравенство (I.6.32). Если симметричная форма $\mathfrak{h}$ ограничена снизу и сверху, тогда она ограничена и ее норма равна большему из абсолютных значений верхней и нижней граней. Иными словами, если $|\mathfrak{h}[u]|\leqslant M\|u\|^2$ для всех $u\in\mathbf{D}(\mathfrak{h})$, то $|\mathfrak{h}[u, v]|\leqslant M\|u\|\|v\|$ для всех $u, v\in\mathbf{D}(\mathfrak{h})$. Доказательство проводится так же, как и в конечномерном случае [см. (I.6.33)]. Следует заметить, что в более общем случае, если $|\mathfrak{k}[u]|\leqslant M\mathfrak{h}[u]$ для всех $u\in\mathbf{D}=\mathbf{D}(\mathfrak{h})=\mathbf{D}(\mathfrak{k})$, то $|\mathfrak{k}[u, v]|\leqslant\leqslant M\mathfrak{h}[u]^{1/2}\mathfrak{h}[v]^{1/2}$ для всех $u, v\in\mathbf{D}$, если формы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$ симметричны и форма $\mathfrak{h}$ неотрицательна.

Рассмотрим теперь несимметричную форму $\mathfrak{t}$. Множество значений, которые принимает функция $\mathfrak{t}[u]$, когда $u\in\mathbf{D}(\mathfrak{t})$, $\|u\|=1$, называется *числовой областью значений* формы $\mathfrak{t}$ и обозначается $\Theta(\mathfrak{t})$. Так же как и в случае операторов, $\Theta(\mathfrak{t})$ — выпуклое множество в комплексной плоскости (ср. с теоремой V.3.1). Симметричная форма $\mathfrak{h}$ ограничена снизу тогда и только тогда, когда $\Theta(\mathfrak{h})$ — конечный или полубесконечный интервал вещественной оси, ограниченный снизу. Более общо будем говорить, что форма $\mathfrak{t}$ *ограничена слева*, если $\Theta(\mathfrak{t})$ является подмножеством полуплоскости вида $\operatorname{Re}\zeta \geqslant \gamma$. В частности, форму $\mathfrak{t}$ назовем *секториально ограниченной слева* (или просто *секториальной*), если $\Theta(\mathfrak{t})$ — подмножество сектора вида

$$|\arg(\zeta-\gamma)| \leqslant \theta, \quad 0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}, \quad \gamma \text{ вещественно.} \tag{1.13}$$

Это означает, что

$$\mathfrak{h} \geqslant \gamma \quad \text{и} \quad |\mathfrak{k}[u]| \leqslant (\operatorname{tg}\theta)(\mathfrak{h}-\gamma)[u], \quad u \in \mathrm{D}(\mathfrak{t}), \tag{1.14}$$

где $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}\mathfrak{t}$, $\mathfrak{k} = \operatorname{Im}\mathfrak{t}$. Числа $\gamma$ и $\theta$ определяются формой $\mathfrak{t}$ неоднозначно; будем называть $\gamma$ *вершиной*, а $\theta$ — соответствующим ей *полууглом* формы $\mathfrak{t}$. Из сделанного выше замечания следует, что

$$\begin{gathered}
|(\mathfrak{h}-\gamma)[u, v]| \leqslant (\mathfrak{h}-\gamma)[u]^{1/2}(\mathfrak{h}-\gamma)[v]^{1/2}, \\
|\mathfrak{k}[u, v]| \leqslant (\operatorname{tg}\theta)(\mathfrak{h}-\gamma)[u]^{1/2}(\mathfrak{h}-\gamma)[v]^{1/2}, \\
|(\mathfrak{t}-\gamma)[u, v]| \leqslant (1+\operatorname{tg}\theta)(\mathfrak{h}-\gamma)[u]^{1/2}(\mathfrak{h}-\gamma)[v]^{1/2}.
\end{gathered} \tag{1.15}$$

В следующих параграфах мы будем иметь дело в основном с секториальными формами.

**Задача 1.1.** Из (1.15) следуют неравенства

$$\begin{gathered}
(\mathfrak{h}-\gamma)[u] \leqslant |(\mathfrak{t}-\gamma)[u]| \leqslant (\sec\theta)(\mathfrak{h}-\gamma)[u], \\
|(\mathfrak{t}-\gamma)[u+v]|^{1/2} \leqslant (\sec\theta)^{1/2}\{|(\mathfrak{t}-\gamma)[u]|^{1/2}+|(\mathfrak{t}-\gamma)[v]|^{1/2}\}, \\
|(\mathfrak{t}-\gamma)[u+v]| \leqslant 2(\sec\theta)\{|(\mathfrak{t}-\gamma)[u]|+|(\mathfrak{t}-\gamma)[v]|\}.
\end{gathered} \tag{1.16}$$

**Пример 1.2.** Пусть $T$ — оператор в $\mathbf{H}$; положим

$$\mathfrak{t}[u, v] = (Tu, v), \quad \mathrm{D}(\mathfrak{t}) = \mathrm{D}(T). \tag{1.17}$$

Области числовых значений оператора $T$ и формы $\mathfrak{t}$ совпадают. В частности, форма $\mathfrak{t}$ симметрична, если оператор $T$ симметричен; $\mathfrak{t}$ ограничена снизу, если $T$ ограничен снизу; $\mathfrak{t}$ ограничена слева, если $T$ квазиаккретивен; $\mathfrak{t}$ секториальна, если $T$ секториален (см. п. V.3.10).

**Пример 1.3.** Пусть $S$ — оператор из $\mathbf{H}$ в другое гильбертово пространство $\mathbf{H}'$ (которое может и совпадать с $\mathbf{H}$); положим

$$\mathfrak{h}[u, v] = (Su, Sv), \quad \mathrm{D}(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}(S), \tag{1.18}$$

где скалярное произведение берется, конечно, в $\mathbf{H}'$. Форма $\mathfrak{h}$ неотрицательна и симметрична.

**Пример 1.4.** Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{l}^2$ и

$$\mathfrak{t}[u, v] = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \xi_j \bar{\eta}_j \quad \textbf{при} \quad u = (\xi_j), \quad v = (\eta_j), \tag{1.19}$$

где $\{\alpha_j\}$ — последовательность комплексных чисел. Определим $\mathrm{D}(\mathfrak{t})$ как множество всех $u = (\xi_j) \in \mathrm{H}$, таких, что $\sum |\alpha_j|\,|\xi_j|^2 < \infty$. Пусть $\dot{\mathfrak{t}}$ — сужение формы $\mathfrak{t}$ на область $\mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}})$, состоящую из всех $u \in \mathrm{H}$, имеющих лишь конечное число ненулевых компонент. Форма $\dot{\mathfrak{t}}$ плотно определена; заведомо это верно для формы $\mathfrak{t}$. Форма $\mathfrak{t}$ симметрична тогда и только тогда, когда все $\alpha_j$ вещественны; $\mathfrak{t}$ секториальна с вершиной $\gamma$ и полууглом $\theta$ тогда и только тогда, когда все $\alpha_j$ лежат в секторе (1.13).

Можно получить дальнейшее сужение $\dot{\mathfrak{t}}_1$ формы $\dot{\mathfrak{t}}$, потребовав, чтобы каждый элемент $u \in \mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}}_1)$ удовлетворял (в дополнение к условию $u \in \mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}})$) условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\beta}_j \xi_j = 0, \qquad (1.20)$$

где $\{\beta_j\}$ — фиксированная последовательность комплексных чисел, не все из которых равны нулю. *Форма* $\dot{\mathfrak{t}}_1$ *плотно определена тогда и только тогда, когда* $\sum |\beta_j|^2 = \infty$. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим вектор $w = (\zeta_j) \in \mathrm{H}$, ортогональный к множеству $\mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}}_1)$. Так как вектор $(\beta_k, 0, \ldots, -\bar{\beta}_1, 0, \ldots)$ с $k$-й компонентой $-\bar{\beta}_1$ принадлежит $\mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}}_1)$, то $\beta_k \zeta_1 - \beta_1 \zeta_k = 0$. Поскольку это верно для всех $k$, то $\zeta_1 : \zeta_2 : \ldots = \beta_1 : \beta_2 : \ldots$. Если $\sum |\beta_j|^2 = \infty$, то все $\zeta_j = 0$, так что $w = 0$. Это показывает, что множество $\mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}}_1)$ плотно в $\mathrm{H}$. Если $\sum |\beta_j|^2 < \infty$, то вектор $(\beta_j) = b$ принадлежит $\mathrm{H}$, а значит, ортогонален в силу (1.20) множеству $\mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}}_1)$. Следовательно, множество $\mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}}_1)$ не плотно в $\mathrm{H}$.

**Пример 1.5.** Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{E})$ и

$$\mathfrak{t}[u, v] = \int_{\mathrm{E}} f(x)\, u(x)\, \overline{v(x)}\, dx, \qquad (1.21)$$

где $f(x)$ — комплексная измеримая функция на $\mathrm{E}$. По определению $\mathrm{D}(\mathfrak{t})$ — множество всех $u \in \mathrm{H}$, таких, что $\int |f(x)|\,|u(x)|^2\,dx < \infty$. Форма $\mathfrak{t}$ плотно определена (так же как и в случае максимального оператора умножения; см. пример III.2.2). Форма $\mathfrak{t}$ симметрична, если $f(x)$ вещественна. Форма $\mathfrak{t}$ секториальна с вершиной $\gamma$ и полууглом $\theta$, если значения $f(x)$ лежат в секторе (1.13).

Предположим, что $\mathrm{E}$ — ограниченное открытое множество. Тогда сужение $\dot{\mathfrak{t}}$ формы $\mathfrak{t}$ на область $\mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}}) = \mathrm{C}_0^{\infty}(\mathrm{E})$ — также плотно определенная форма. Пусть $\dot{\mathfrak{t}}_1$ — сужение формы $\dot{\mathfrak{t}}$ с областью определения $\mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}}_1)$, состоящей из всех $u \in \mathrm{D}(\dot{\mathfrak{t}})$, таких, что

$$\int_{\mathrm{E}} \overline{g(x)}\, u(x)\, dx = 0, \qquad (1.22)$$

где $g(x)$ — локально интегрируемая функция. Тогда форма $\dot{\mathfrak{t}}_1$ плотно определена, если $0 \neq g \notin \mathrm{L}^2(\mathrm{E})$, и не является плотно определенной, если $0 \neq g \in \mathrm{L}^2(\mathrm{E})$. Доказательство проводится так же, как в предыдущем примере.

**Пример 1.6.** Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0, 1)$ и

$$\mathfrak{h}[u, v] = u(0)\overline{v(0)}. \tag{1.23}$$

По определению $\mathbf{D}(\mathfrak{h})$ — это множество всех функций $u(x)$, непрерывных (более точно, эквивалентных непрерывным) на замкнутом интервале $[0, 1]$; тогда значение $u(0)$ определено для всех $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h})$. Форма $\mathfrak{h}$ плотно определена, симметрична и неотрицательна. Действительно, $\mathfrak{h}$ является частным случаем формы (1.18) при $Su = u(0)$, где $S$ — оператор из $\mathbf{H}$ в одномерное пространство $\mathbf{C}$.

**Пример 1.7.** Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(a, b)$, где $(a, b)$ — конечный интервал; положим

$$\mathfrak{t}[u, v] = \int\limits_a^b \{p(x)u'(x)\overline{v'(x)} + q(x)u(x)\overline{v(x)} +$$

$$+ r(x)u'(x)\overline{v(x)} + s(x)u(x)\overline{v'(x)}\}\,dx + h_a u(a)\overline{v(a)} + h_b u(b)\overline{v(b)}, \tag{1.24}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $s(x)$ — фиксированные комплексные функции, а $h_a$, $h_b$ — константы. Предположим, что функции $p$, $q$, $r$, $s$ непрерывны на замкнутом интервале $[a, b]$ (регулярный случай), и пусть $\mathbf{D}(\mathfrak{t})$ — множество всех $u \in \mathbf{H}$, таких, что $u(x)$ абсолютно непрерывна на $[a, b]$, причем $u'(x) \in \mathbf{H}$ (так что правая часть (1.24) определена для $u, v \in \mathbf{D}(\mathfrak{h})$]. Форма $\mathfrak{t}$ плотно определена и симметрична, если функции $p$, $q$ вещественны, $\overline{r(x)} = s(x)$ и числа $h_a$, $h_b$ вещественны. Если мы сузим $\mathbf{D}(\mathfrak{t})$ до множества всех $u(x)$, для которых $u(a) = u(b) = 0$, то получим сужение $\mathfrak{t}_0$ формы $\mathfrak{t}$, причем форма $\mathfrak{t}_0$ плотно определена. Определим дальнейшее сужение $\dot{\mathfrak{t}}$ формы $\mathfrak{t}_0$, положив $\mathbf{D}(\dot{\mathfrak{t}}) = \mathbf{C}_0^\infty(a, b)$.

Форма $\mathfrak{t}$ секториальна, если $p(x) > 0$ на $[a, b]$. Для того чтобы убедиться в этом, заметим, что существуют положительные числа $\delta$ и $M$ такие, что $p(x) \geqslant \delta$, $|q(x)| \leqslant M$, $|r(x)| \leqslant M$, $|s(x)| \leqslant M$. Таким образом,

$$\operatorname{Re}\mathfrak{t}[u] \geqslant \int \{\delta\,|u'|^2 - M(|u|^2 + 2\,|uu'|)\}\,dx -$$

$$- |h_a|\,|u(a)|^2 - |h_b|\,|u(b)|^2.$$

Так как $2\,|uu'| \leqslant \varepsilon\,|u'|^2 + \varepsilon^{-1}\,|u|^2$, то мы получим, используя (IV.1.19) при $p = 2$, неравенство

$$\mathfrak{h}[u] = \operatorname{Re}\mathfrak{t}[u] \geqslant \delta\,\|u'\|^2 - M\,\|u\|^2, \tag{1.25}$$

в котором положительные числа $\delta$ и $M$, вообще говоря, не те, что были введены выше. Аналогично получаем, учитывая, что функция $p(x)$ вещественна:

$$|\mathfrak{k}[u]| = |\operatorname{Im}\mathfrak{t}[u]| \leqslant \varepsilon\,\|u'\|^2 + M_\varepsilon\,\|u\|^2, \tag{1.26}$$

где $\varepsilon > 0$ можно выбрать сколь угодно малым. Таким образом, легко видеть, что справедливо неравенство вида (1.14) с подходящими константами $\gamma$ и $\theta$, причем $\theta$ может быть выбрано произвольно малым, если $-\gamma$ выбрано достаточно большим.

**Задача 1.8.** Форма $\mathfrak{t}$ из предыдущего примера секториальна, даже если функция $p(x)$ не является вещественной, при условии, что $\operatorname{Re} p(x) > 0$ (функция $p(x)$, как и выше, предполагается непрерывной).

**Пример 1.9.** Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$ и

$$\mathfrak{t}[u, v] = \int [\operatorname{grad} u(x) \cdot \operatorname{grad}\overline{v(x)} + q(x)u(x)\overline{v(x)}]\,dx, \tag{1.27}$$

где $q(x)$ — фиксированная функция, которая предполагается локально интегрируемой. В качестве $\mathrm{D}(\mathfrak{t})$ мы можем выбрать $\mathrm{C}_0(\mathrm{R}^3)$ (множество непрерывно дифференцируемых функций с компактными носителями). Форма $\mathfrak{t}$ плотно определена; она симметрична, если функция $q(x)$ вещественна. Мы можем сузить $\mathrm{D}(\mathfrak{t})$, потребовав большей гладкости функций $u(x)$, $v(x)$ (например, $\mathrm{D}(\mathfrak{t}) = \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^3)$) и сохраняя при этом указанные свойства формы $\mathfrak{t}$, или несколько расширить $\mathrm{D}(\mathfrak{t})$, включив функции с некомпактными носителями.

## 3. Замкнутые формы

Пусть $\mathfrak{t}$ — секториальная форма. Последовательность векторов $\{u_n\}$ будем называть *$\mathfrak{t}$-сходящейся* (к $u \in \mathrm{H}$) и обозначать

$$u_n \underset{\mathfrak{t}}{\to} u, \quad n \to \infty, \tag{1.28}$$

если $u_n \in \mathrm{D}(\mathfrak{t})$, $u_n \to u$ и $\mathfrak{t}[u_n - u_m] \to 0$ при $n$, $m \to \infty$. Заметим, что $u$ может и не принадлежать $\mathrm{D}(\mathfrak{t})$ (ср. с замечанием из п. III.5.2 о $T$-сходимости в случае, когда $T$ — оператор).

Непосредственно из определения следует, что *$\mathfrak{t}$-сходимость эквивалентна $(\mathfrak{t} + \alpha)$-сходимости для любого скаляра $\alpha$*. Далее, *$\mathfrak{t}$-сходимость эквивалентна $\mathfrak{h}$-сходимости, где* $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}\mathfrak{t}$; это следует из формулы (1.16), согласно которой $(\mathfrak{h} - \gamma)[u_n - u_m] \to 0$ тогда и только тогда, когда $(\mathfrak{t} - \gamma)[u_n - u_m] \to 0$. Кроме того, если $u_n \underset{\mathfrak{t}}{\to} u$ и $v_n \underset{\mathfrak{t}}{\to} v$, то $\alpha u_n + \beta v_n \underset{\mathfrak{t}}{\to} \alpha u + \beta v$. Для доказательства достаточно заметить, что форму $\mathfrak{t}$ можно без потери общности считать симметричной и неотрицательной в силу предыдущего замечания; требуемый результат вытекает тогда из (I.6.32).

Секториальная форма $\mathfrak{t}$ называется *замкнутой*, если из $u_n \underset{\mathfrak{t}}{\to} u$ следует, что $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{t})$ и $\mathfrak{t}[u_n - u] \to 0$. Согласно сделанным выше замечаниям, $\mathfrak{t}$ *замкнута тогда и только тогда, когда форма* $\operatorname{Re}\mathfrak{t}$ *замкнута*; $\mathfrak{t}$ *замкнута тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{t} + \alpha$ *замкнута*.

**Задача 1.10.** Ограниченная форма замкнута тогда и только тогда, когда ее область определения является замкнутым линейным подпространством.

Пусть $\mathfrak{h}$ — симметричная неотрицательная форма, и пусть

$$(u, v)_{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h} + 1)[u, v] = \mathfrak{h}[u, v] + (u, v), \quad u, v \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}). \tag{1.29}$$

Мы можем рассматривать форму $(u, v)_{\mathfrak{h}}$ как скалярное произведение в $\mathrm{D}(\mathfrak{h})$, так как она симметрична и ассоциированная с ней квадратичная форма положительно определена:

$$\| u \|_{\mathfrak{h}}^2 = (u, u)_{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h} + 1)[u] = \mathfrak{h}[u] + \| u \|^2 \geqslant \| u \|^2. \tag{1.30}$$

Будем обозначать линейное подпространство $\mathrm{D}(\mathfrak{h})$ через $\mathrm{H}_{\mathfrak{h}}$, если оно рассматривается как предгильбертово пространство со скалярным произведением $( \ , \ )_{\mathfrak{h}}$.

Для фиксированной секториальной формы $\mathfrak{t}$ определим предгильбертово пространство $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$, совпадающее с $\mathbf{H}_{\mathfrak{h}'}$ при $\mathfrak{h}' = \mathrm{Re}\,\mathfrak{t} - \gamma \geqslant 0$, где $\gamma$ — вершина формы $\mathfrak{t}$. Будем называть $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$ предгильбертовым пространством, ассоциированным с формой $\mathfrak{t}$. Оно совпадает с $\mathbf{D}(\mathfrak{t})$ как векторное пространство, однако скалярное произведение $(\ ,\ )_{\mathfrak{t}} = (\ ,\ )_{\mathfrak{h}'}$ в $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$ зависит от выбора $\gamma$, так что $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$ определяется формой $\mathfrak{t}$ неоднозначно. Во всяком случае, следующее утверждение является непосредственным следствием неравенства (1.30). *Последовательность* $u_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$ *является* $\mathfrak{t}$-*сходящейся тогда и только тогда, когда она фундаментальна в* $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$. *Если* $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$, *то* $\mathfrak{t}$-*сходимость* $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$ *эквивалентна сходимости по норме* $\| u_n - u \|_{\mathfrak{t}} \to 0$.

Из (1.15) и (1.30) получаем

$$\begin{aligned} |\,\mathfrak{t}[u, v]\,| &\leqslant |\,\gamma\,|\,|\,(u, v)\,| + (1 + \mathrm{tg}\,\theta)\,\mathfrak{h}'[u]^{1/2}\,\mathfrak{h}'[v]^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant |\,\gamma\,|\,\|u\|\,\|v\| + (1 + \mathrm{tg}\,\theta)\,\|u\|_{\mathfrak{t}}\,\|v\|_{\mathfrak{t}} \leqslant \\ &\leqslant (|\,\gamma\,| + 1 + \mathrm{tg}\,\theta)\,\|u\|_{\mathfrak{t}}\,\|v\|_{\mathfrak{t}}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Это показывает, что $\mathfrak{t}[u, v]$ *является ограниченной полуторалинейной формой, определенной всюду в* $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$.

**Теорема 1.11.** *Секториальная форма* $\mathfrak{t}$ *в* $\mathbf{H}$ *замкнута тогда и только тогда, когда предгильбертово пространство* $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$ *полно.*

Доказательство. Поскольку форма $\mathfrak{t}$ замкнута тогда и только тогда, когда замкнута форма $\mathfrak{h}' = \mathrm{Re}\,\mathfrak{t} - \gamma$, мы можем предположить, что $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$ — симметричная и неотрицательная форма, и скалярное произведение в $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}} = \mathbf{H}_{\mathfrak{h}}$ определяется формулой (1.29). Предположим, что форма $\mathfrak{h}$ замкнута, и пусть последовательность $\{u_n\}$ фундаментальна в $\mathbf{H}_{\mathfrak{h}}$: $\| u_n - u_m \|_{\mathfrak{h}} \to 0$. Тогда $\{u_n\}$ фундаментальна также и в $\mathbf{H}$ в силу (1.30), так что существует $u \in \mathrm{H}$, такое, что $u_n \to u$. Так как $\mathfrak{h}[u_n - u_m] \to 0$ в силу (1.30), то последовательность $\{u_n\}$ $\mathfrak{h}$-сходится, и из замкнутости формы $\mathfrak{h}$ следует, что $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}) = \mathbf{H}_{\mathfrak{h}}$ и $\mathfrak{h}[u_n - u] \to 0$. Следовательно, и $\| u_n - u \|_{\mathfrak{h}} \to 0$ в силу (1.30), а это показывает, что пространство $\mathbf{H}_{\mathfrak{h}}$ полно.

Обратно, предположим теперь, что пространство $\mathbf{H}_{\mathfrak{h}}$ полно. Пусть $u_n \xrightarrow[\mathfrak{h}]{} u$; тогда $\mathfrak{h}[u_n - u_m] \to 0$ и $\| u_n - u_m \| \to 0$, так что $\| u_n - u_m \|_{\mathfrak{h}} \to 0$ в силу (1.30). Поскольку пространство $\mathrm{H}_{\mathfrak{h}}$ полно, то существует вектор $u_0 \in \mathbf{H}_{\mathfrak{h}} = \mathbf{D}(\mathfrak{h})$, такой, что

$\| u_n - u_0 \| \to 0$. Из (1.30) следует, что $\mathfrak{h}[u_n - u_0] \to 0$ и $\| u_n - u_m \| \to 0$. Следовательно, $u = u_0 \in \mathbf{D}(\mathfrak{h})$ и $\mathfrak{h}[u_n - u] \to 0$. Это доказывает замкнутость формы $\mathfrak{h}$.

**Теорема 1.12.** *Пусть $\mathfrak{t}$ — секториальная форма. Если $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$ и $v_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} v$, то существует $\lim \mathfrak{t}[u_n, v_n]$. Если $\mathfrak{t}$ замкнута, то этот предел равен $\mathfrak{t}[u, v]$*

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
| \mathfrak{t}[u_n, v_n] - \mathfrak{t}[u_n, v_m] | &\leqslant | \mathfrak{t}[u_n - u_m, v_n] | + \\
&+ | \mathfrak{t}[u_m, v_n - v_m] | \leqslant \\
&\leqslant (1 + \operatorname{tg}\theta) \{ \mathfrak{h}[u_n - u_m]^{1/2}\, \mathfrak{h}[v_n]^{1/2} + \mathfrak{h}[u_m]^{1/2}\, \mathfrak{h}[v_n - v_m]^{1/2} \},
\end{aligned}
$$

где предполагается, что $\gamma = 0$ [см. (1.15)]. Так как $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$ влечет за собой $\mathfrak{h}[u_n - u_m] \to 0$ и ограниченность последовательности $\mathfrak{h}[u_n]$ и то же самое справедливо для $v_n$, то существует $\lim \mathfrak{t}[u_n, v_n]$. Вторую часть теоремы можно доказать таким же образом, рассматривая $\mathfrak{t}[u_n, v_n] - \mathfrak{t}[u, v]$.

**Пример 1.13.** Рассмотрим симметричную неотрицательную форму $\mathfrak{h}[u, v] = (Su, Sv)$ из примера 1.3. *Форма $\mathfrak{h}$ замкнута тогда и только тогда, когда $S$ — замкнутый оператор.* Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что сходимость $u_n \xrightarrow[\mathfrak{h}]{} u$ эквивалентна сходимости $u_n \xrightarrow[S]{} u$, а сходимость $\mathfrak{h}[u_n - u] \to 0$ эквивалентна сходимости $Su_n \to Su$ (см. п. III.5.2).

**Пример 1.14.** Рассмотрим форму $\mathfrak{t}[u, v] = \sum \alpha_j \xi_j \overline{\eta}_j$, определенную в примере 1.4, и предположим, что все $\alpha_j$ лежат в секторе (1.13), так что форма $\mathfrak{t}$ секториальна. Тогда она замкнута. Действительно, $\| u \|_{\mathfrak{t}}^2 = \sum (1 + \mathrm{Re}\, \alpha_j - \gamma) \, | \xi_j |^2$ для $u = (\xi_j)$. Но $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}} = \mathbf{D}(\mathfrak{t})$ — множество всех $u \in \mathbf{H}$, таких, что $\sum | \alpha_j | \, | \xi_j |^2 < \infty$, и, как легко видеть, при сделанных нами предположениях это условие эквивалентно условию $\| u \|_{\mathfrak{t}}^2 < \infty$. Таким образом, $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$ включает все $u = (\xi_j)$, для которых $\| u \|_{\mathfrak{t}} < \infty$, и поэтому является полным (так же как и $l^2$).

**Пример 1.15.** Рассмотрим форму $\mathfrak{t}[u, v] = \int f(x)\, u(x)\, \overline{v}(x)\, dx$ из примера 1.5. Если предположить, что значения функции $f(x)$ лежат в секторе (1.13), так что форма $\mathfrak{t}$ секториальна, то она замкнута. Доказательство проводится так же, как и в предыдущем примере.

В заключение приведем теорему, которая является важной с той точки зрения, что позволяет установить, принадлежит ли данный элемент $u \in \mathbf{H}$ области определения замкнутой формы $\mathfrak{t}$. По определению замкнутости $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$, если существует последовательность $u_n \in \mathbf{D}(t)$, такая, что $u_n \to u$ и $\mathfrak{t}[u_n - u_m] \to 0$. В действительности, однако, достаточно более слабого условия, а именно справедлива

**Теорема 1.16.** *Пусть* $\mathfrak{t}$ — *замкнутая секториальная форма. Пусть* $u_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$, $u_n \to u$ *и последовательность* $\{\mathfrak{t}[u_n]\}$ *ограничена. Тогда* $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$ *и* $\operatorname{Re}\mathfrak{t}[u] \leqslant \liminf \operatorname{Re}\mathfrak{t}[u_n]$.

Доказательство будет дано после того, как будет установлена теорема о представлении (см. п. 2.2).

## 4. Замыкаемые формы

Секториальная форма называется *замыкаемой*, если она имеет замкнутое продолжение.

**Теорема 1.17.** *Для того чтобы секториальная форма* $\mathfrak{t}$ *была замыкаемой, необходимо и достаточно, чтобы из* $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} 0$ *следовало, что* $\mathfrak{t}[u_n] \to 0$. *Если это условие выполнено, то* $\mathfrak{t}$ *имеет замыкание* (*наименьшее замкнутое продолжение*) $\tilde{\mathfrak{t}}$, *которое определяется следующим образом. Множество* $\mathbf{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$ *есть множество всех* $u \in \mathbf{H}$ *таких, что существует последовательность* $\{u_n\}$, *обладающая следующими свойствами*: $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$ *и*

$$\tilde{\mathfrak{t}}[u, v] = \lim \mathfrak{t}[u_n, v_n] \tag{1.32}$$

*для любых* $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$, $v_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} v$. *Любое замкнутое продолжение формы* $\mathfrak{t}$ *является также продолжением формы* $\tilde{\mathfrak{t}}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{t}_1$ — замкнутое продолжение формы $\mathfrak{t}$. Из $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} 0$ следует $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}_1]{} 0$, так что $\mathfrak{t}[u_n] = \mathfrak{t}_1[u_n] = \mathfrak{t}_1[u_n - 0] \to 0$ в силу замкнутости $\mathfrak{t}_1$. Этим доказана необходимость.

Для доказательства достаточности определим $\mathbf{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$ так же, как это сделано в формулировке теоремы. Тогда по теореме 1.12 существует предел в правой части формулы (1.32). Мы покажем, что этот предел зависит лишь от $u$, $v$ и не зависит от выбора последовательностей $\{u_n\}$, $\{v_n\}$. Пусть $\{u'_n\}$, $\{v'_n\}$ — другие последовательности, такие, что $u'_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$, $v'_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} v$. Тогда $u'_n - u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} 0$, $v'_n - v_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} 0$ (см. п. 3), так что $\mathfrak{t}[u'_n - u_n] \to 0$, $\mathfrak{t}[v'_n - v_n] \to 0$ по предположению. Следовательно, $\mathfrak{t}[u'_n, v'_n] - \mathfrak{t}[u_n, v_n] = \mathfrak{t}[u'_n - u'_n, v'_n] + [u_n, v'_n - v_n] \to 0$, так же как и в доказательстве теоремы 1.12 .

Заметим, что

$$\tilde{\mathfrak{t}}[u_n - u] \to 0, \quad \text{если} \quad u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u. \tag{1.33}$$

Действительно, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{\mathfrak{t}}[u_n - u] = \lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} \mathfrak{t}[u_n - u_m]$ в силу соотношения (1.32), а этот предел равен нулю, так как $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$.

Мы ввели форму $\tilde{\mathfrak{t}}$ с областью определения $\mathrm{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$. Очевидно, что эта форма секториальна и $\tilde{\mathfrak{t}} \supset \mathfrak{t}$. Покажем, что она замкнута. Рассмотрим предгильбертово пространство $\mathrm{H}_{\tilde{\mathfrak{t}}}$, ассоциированное с $\tilde{\mathfrak{t}}$; достаточно показать, что это пространство полно (см. теорему 1.11).

Так как $\tilde{\mathfrak{t}} \supset \mathfrak{t}$, то $\mathrm{H}_{\mathfrak{t}}$ — линейное подпространство в $\mathrm{H}_{\tilde{\mathfrak{t}}}$. Из приведенного выше построения формы $\mathfrak{t}$ ясно, что $\mathrm{H}_{\mathfrak{t}}$ плотно в $\mathrm{H}_{\tilde{\mathfrak{t}}}$ и что любая фундаментальная последовательность в $\mathrm{H}_{\mathfrak{t}}$ имеет предел из $\mathrm{H}_{\tilde{\mathfrak{t}}}$ [см. (1.33)]. Как известно, это означает, что пространство $\mathrm{H}_{\tilde{\mathfrak{t}}}$ полно[1]).

То, что $\mathfrak{t}$ является наименьшим замкнутым продолжением формы $\mathfrak{t}$, следует также из самого построения, ибо если форма $\mathfrak{t}_1 \supset \mathfrak{t}$ замкнута и $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$, то $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}_1]{} u$, а значит, $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{t}_1)$. Следовательно, $\mathrm{D}(\mathfrak{t}) \supset \mathrm{D}(\mathfrak{t}_1)$ и $\tilde{\mathfrak{t}}[u, v] = \mathfrak{t}_1[u, v]$ в силу (1.32) и теоремы 1.12.

**Теорема 1.81.** *Пусть* $\mathfrak{t}$, $\tilde{\mathfrak{t}}$ *— введенные выше формы. Числовая область значений* $\Theta(\mathfrak{t})$ *формы* $\mathfrak{t}$ *является плотным подмножеством числовой области значений* $\Theta(\tilde{\mathfrak{t}})$ *формы* $\tilde{\mathfrak{t}}$.

Доказательство. Для любого $u \in \mathrm{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$, $\|u\| = 1$, существует последовательность $u_n \in \mathrm{D}(\mathfrak{t})$ такая, что $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$. Мы можем предполагать, что $\|u_n\| = 1$, в противном случае нужно лишь заменить $u_n$ на $u_n/\|u_n\|$. Утверждение теоремы следует немедленно из того, что $\mathfrak{t}[u_n] \to \tilde{\mathfrak{t}}[u]$.

**Следствие 1.19.** *Вершину* $\gamma$ *и полуугол* $\theta$ *формы* $\tilde{\mathfrak{t}}$ *можно выбрать такими же, как и для формы* $\mathfrak{t}$. *Если* $\mathfrak{h}$ *— симметричная ограниченная снизу замыкаемая форма, то* $\mathfrak{h}$ *и* $\tilde{\mathfrak{h}}$ *имеют равные нижние грани.*

**Теорема 1.20.** *Замыкаемая секториальная форма* $\mathfrak{t}$ *с областью определения* $\mathrm{H}$ *замкнута.*

Доказательство. Форма $\mathfrak{t}$ обязательно замкнута, так как $\mathfrak{t}$ и $\tilde{\mathfrak{t}}$ имеют одинаковую область определения $\mathrm{H}$, а значит, $\mathfrak{t} = \tilde{\mathfrak{t}}$. Мы опять можем предположить, что $\mathfrak{t}$ имеет нулевую

---

[1]) Пусть $\{u_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathrm{H}_{\tilde{\mathfrak{t}}}$; так как $\mathrm{H}_{\mathfrak{t}}$ плотно в $\mathrm{H}_{\tilde{\mathfrak{t}}}$, то существует последовательность $v_n \in \mathrm{H}_{\mathfrak{t}}$, такая, что $\|v_n - u_n\|_{\tilde{\mathfrak{t}}} \leqslant 1/n$. Тогда последовательность $\{v_n\}$ фундаментальна, так что $v_n \to v$ для некоторого $v \in \mathrm{H}_{\tilde{\mathfrak{t}}}$; поэтому $u_n \to v$, и $\mathrm{H}_{\tilde{\mathfrak{t}}}$ полно.

вершину. Полное гильбертово пространство $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}}$, ассоциированное с $\mathfrak{t}$, совпадает с $\mathsf{H}$ как векторное пространство, причем $\| u \|_{\mathfrak{t}} \geqslant \| u \|$. По теореме о замкнутом графике эти две нормы эквивалентны, т. е. существует константа $M$, такая, что $\| u \|_{\mathfrak{t}} \leqslant M \| u \|$. (Для доказательства рассмотрим оператор $T$ из $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}}$ в $\mathsf{H}$, определенный равенством $Tu = u$; этот оператор ограничен: $\| T \| \leqslant 1$, и отображает $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}}$ на все $\mathsf{H}$; отсюда получаем, согласно результату задачи III.5.21, что оператор $T^{-1}$ ограничен.) Следовательно, $0 \leqslant \mathfrak{h}[u] \leqslant M^2 \| u \|^2$ и $| \mathfrak{t}[u, v] | \leqslant (1 + \operatorname{tg} \theta) \times M^2 \| u \| \| v \|$ в силу (1.15).

Пусть $\mathfrak{t}$ — замкнутая секториальная форма; линейное подпространство $\mathsf{D}'$ множества $\mathsf{D}(\mathfrak{t})$ называется *ядром* формы $\mathfrak{t}$, если ее сужение $\mathfrak{t}'$ с областью определения $\mathsf{D}'$ имеет своим замыканием форму $\mathfrak{t} : \tilde{\mathfrak{t}}' = \mathfrak{t}$ (ср. с соответствующим замечанием относительно операторов; п. III.5.3). Очевидно, что линейное подпространство $\mathsf{D}'$ является ядром формы $\mathfrak{t}$ тогда и только тогда, когда оно является ядром формы $\mathfrak{t} + \alpha$ для любого скаляра $\alpha$. Если форма $\mathfrak{t}$ ограничена, то $\mathsf{D}'$ является ее ядром тогда и только тогда, когда оно плотно в $\mathsf{D}(\mathfrak{t})$ (заметим, что в этом случае $\mathsf{D}(\mathfrak{t})$ — замкнутое линейное подпространство).

Две следующие теоремы вытекают непосредственно из доказательства теоремы 1.17.

**Теорема 1.21.** *Пусть $\mathfrak{t}$ — замкнутая секториальная форма. Для того чтобы линейное подпространство $\mathsf{D}'$ области определения $\mathsf{D}(\mathfrak{t})$ являлось ее ядром, необходимо и достаточно, чтобы $\mathsf{D}'$ было плотно в гильбертовом пространстве $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}}$, ассоциированном с $\mathfrak{t}$.*

**Теорема 1.22.** *Пусть $\mathfrak{t}'$, $\mathfrak{t}''$ — две секториальные формы, такие, что $\mathfrak{t}' \subset \mathfrak{t}''$. Пусть $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}'}$ и $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}''}$ — ассоциированные с ними предгильбертовы пространства*[1]*. Если форма $\mathfrak{t}''$ замкнута, то для замкнутости формы $\mathfrak{t}'$ необходимо и достаточно, чтобы пространство $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}'}$ было замкнутым подпространством пространства $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}''}$. Если форма $\mathfrak{t}''$ замыкаема, то $\tilde{\mathfrak{t}}' = \tilde{\mathfrak{t}}''$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}'}$ плотно в $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}''}$.*

**Пример 1.23.** Рассмотрим форму $\mathfrak{h}[u, v] = (Su, Sv)$ из примеров 1.3 и 1.13. *Она замыкаема тогда и только тогда, когда оператор $S$ замыкаем.* Действительно, сходимость $u_n \xrightarrow[\mathfrak{h}]{} 0$ эквивалентна сходимости $u_n \xrightarrow[S]{} 0$, а сходимость $\mathfrak{h}[u_n] \to 0$ — сходимости $Su_n \to 0$. Если $S$ замыкаем, то

$$\tilde{\mathfrak{h}}[u, v] = (\tilde{S}u, \tilde{S}v), \quad \mathsf{D}(\tilde{\mathfrak{h}}) = \mathsf{D}(\tilde{S}). \tag{1.34}$$

---

[1] Здесь мы предполагаем, что для $\mathfrak{t}'$ и $\mathfrak{t}''$ выбрана общая вершина $\gamma$, а нормы в $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}'}$, $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}''}$ определяются соответственно следующим образом: $(\operatorname{Re} \mathfrak{t}' - \gamma)[u] + \| u \|^2$, $(\operatorname{Re} \mathfrak{t}'' - \gamma)[u] + \| u \|^2$.

Мы знаем, кроме того, что форма $\mathfrak h$ замкнута тогда и только тогда, когда замкнут оператор $S$; в этом случае подмножество $\mathrm D'$ линейного подпространства $\mathrm D(\mathfrak h) = \mathrm D(S)$ является ядром формы $\mathfrak h$ тогда и только тогда, когда оно является ядром оператора $S$.

**Пример 1.24.** Рассмотрим форму $\mathfrak t[u, v] = \sum \alpha_j \xi_j \overline{\eta_j}$ из примеров 1.4 и 1.14. Предположим, что все $\alpha_j$ лежат в секторе (1.13), так что форма $\mathfrak t$ секториальна и замкнута. Форма $\dot{\mathfrak t}$ замыкаема, причем $\tilde{\dot{\mathfrak t}} = \mathfrak t$; это следует из того, что, как легко проверить, $\mathrm D(\dot{\mathfrak t})$ плотно в $\mathsf H_{\mathfrak t}$. Рассмотрим теперь замыкание формы $\dot{\mathfrak t}_1$. Дополнительное условие (1.20) может быть представлено в виде $\sum (1 + \operatorname{Re}\alpha_j - \gamma)\,\overline{\beta_j'}\,\xi_j = 0$, где $\beta_j' = \beta_j (1 + \operatorname{Re}\alpha_j - \gamma)^{-1}$. Принимая во внимание формулу $\| u \|_{\mathfrak t}^2 = \sum (1 + \operatorname{Re}\alpha_j - \gamma)\, | \xi_j |^2$ из примера 1.14, мы видим, что $\mathrm D(\dot{\mathfrak t}_1)$ плотно в $\mathsf H_{\mathfrak t}$ тогда и только тогда, когда $\sum (1 + \operatorname{Re}\alpha_j - \gamma)\, | \beta_j' |^2 = \infty$ (см. аналогичное рассуждение в примере 1.4). Как легко видеть, это условие эквивалентно условию

$$\sum (| \alpha_j | + 1)^{-1} | \beta_j |^2 = \infty. \qquad (1.35)$$

Итак, $\tilde{\dot{\mathfrak t}}_1 = \mathfrak t$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (1.35). С другой стороны, если левая часть в (1.35) сходится, то $\mathrm D(\dot{\mathfrak t}_1)$ является плотным подмножеством ортогонального дополнения $\mathsf M$ в $\mathsf H_{\mathfrak t}$ линейной оболочки вектора $(\beta_j') \in \mathsf H_{\mathfrak t}$ и $\mathrm D(\tilde{\dot{\mathfrak t}}_1)$ совпадает с $\mathsf M$. Таким образом, вектор $u \in \mathrm D(\tilde{\dot{\mathfrak t}}_1)$ характеризуется тем, что $\sum (| \alpha_j | + 1)\, | \xi_j |^2 < \infty$ и $\sum \overline{\beta_j} \xi_j = 0$ [заметим, что ряд $\sum \overline{\beta_j} \xi_j$ абсолютно сходится при $u \in \mathrm D(\mathfrak t)$, в чем можно убедиться, применяя неравенство Шварца].

**Пример 1.25.** Рассмотрим форму $\mathfrak t[u, v] = \int f(x)\, u(x)\, \overline{v(x)}\, dx$ из примеров 1.5 и 1.15 и предположим, что значения функции $f(x)$ лежат в секторе (1.13), так что форма $\mathfrak t$ секториальна и замкнута. С помощью рассуждения, аналогичного использованному в предыдущем примере, можно показать, что $\tilde{\dot{\mathfrak t}} = \mathfrak t$ и что $\tilde{\dot{\mathfrak t}}_1 = \mathfrak t$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_E (| f(x) | + 1)^{-1}\, | g(x) |^2\, dx = \infty. \qquad (1.36)$$

**Пример 1.26.** Примером плотно определенной секториальной (и даже симметричной и неотрицательной), но не замыкаемой формы является форма $\mathfrak h[u, v] = u(0)\,\overline{v(0)}$ из примера 1.6. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $u_n \xrightarrow[\mathfrak h]{} 0$ влечет за собой $\| u_n \| \to 0$, а также существование $\lim u_n(0) = \alpha$ (где $\{u_n\}$ — последовательность непрерывных функций). однако $\alpha$ *не обязано* быть равным нулю.

### 5. Формы, построенные с помощью секториальных операторов

Напомним, что оператор $T$, действующий в пространстве $\mathbf{H}$, называется секториальным, если его числовая область значений есть подмножество сектора вида (1.13) (см. п. V.3.10). Пусть оператор $T$ секториален; положим (см. пример 1.2)

$$\mathfrak{t}[u, v] = (Tu, v), \quad \mathbf{D}(\mathfrak{t}) = \mathbf{D}(T). \tag{1.37}$$

Очевидно, что форма $\mathfrak{t}$ секториальна с вершиной $\gamma$ и полууглом $\theta$.

**Теорема 1.27** [1]. *Форма* $\mathfrak{t}$, *определенная выше с помощью секториального оператора* $T$, *замыкаема* [2].

Доказательство. Мы можем предположить без ограничения общности, что оператор $T$ имеет вершину 0, так что $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}\mathfrak{t} \geqslant 0$. Пусть последовательность $u_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{t}) = \mathbf{D}(T)$ $\mathfrak{t}$-сходится к нулю: $u_n \to 0$ и $\mathfrak{t}[u_n - u_m] \to 0$; мы должны показать, что $\mathfrak{t}[u_n] \to 0$.

В силу (1.15) имеем:

$$\begin{gathered}|\mathfrak{t}[u_n]| \leqslant |\mathfrak{t}[u_n, u_n - u_m]| + |\mathfrak{t}[u_n u_m]| \leqslant \\ \leqslant (1 + \operatorname{tg}\theta)\,\mathfrak{h}[u_n]^{1/2}\,\mathfrak{h}[u_n - u_m]^{1/2} + |(Tu_n, u_m)|.\end{gathered} \tag{1.38}$$

Так как $\mathfrak{h}[u_n - u_m] \to 0$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N$, что $\mathfrak{h}[u_n - u_m] \leqslant \varepsilon^2$ при $n, m \geqslant N$. По той же причине последовательность $\mathfrak{h}[u_n]$ ограничена, поэтому из (1.38) следует, что

$$|\mathfrak{t}[u_n]| \leqslant M\varepsilon + |(Tu_n, u_m)|, \quad n, m \geqslant N, \tag{1.39}$$

где $M$ — некоторая константа. При $m \to \infty$ мы получим, что $|\mathfrak{t}[u_n]| \leqslant M\varepsilon$ для $n \geqslant N$, т. е. $\mathfrak{t}[u_n] \to 0$, что и доказывает утверждение теоремы.

**Следствие 1.28.** *Если $T$ — симметричный оператор, ограниченный снизу, то форма (1.37) замыкаема.*

**Задача 1.29.** В условиях теоремы 1.27 справедливо равенство $\tilde{\mathfrak{t}}[u, v] = (Tu, v)$ для всех $u \in \mathbf{D}(T)$ и $v \in \mathbf{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$.

**Пример 1.30.** Рассмотрим оператор $\dot{T}$ из п. III.2.3 при $\mathbf{X} = \mathbf{H} = \mathbf{L}^2(a, b)$, который является минимальным оператором в $\mathbf{H}$, соответствующим дифференциальному оператору $Lu = p_0 u'' + p_1 u' + p_2 u$. Интегрируя по частям, получаем:

$$(\dot{T}u, v) = \int_a^b \{-p_0 u'\bar{v}' + (p_1 - p_0')\,u'\bar{v} + p_2 u\bar{v}\}\,dx. \tag{1.40}$$

---

[1] Эта теорема принадлежит Шехтеру [3]. Автор первоначально доказал ее только для случая $\theta < \pi/4$; ср. с работой Т. Като [15].

[2] Заметим, что секториальный оператор допускает замыкание, если он плотно определен (см. теорему V.3.4).

Эта форма имеет такой же вид, как и форма $\dot{\mathfrak{t}}$ из примера 1.7, и является секториальной, если $p_0(x) < 0$ и $p_0$, $p_0'$, $p_1$, $p_2$ непрерывны на замкнутом конечном интервале $[a, b]$. Следовательно, форма $\dot{\mathfrak{t}}[u, v] = (\dot{T}u, v)$ замыкаема.

## 6. Суммы форм

**Теорема 1.31.** *Пусть $\mathfrak{t}_1, \ldots, \mathfrak{t}_s$ — секториальные формы в* $\mathrm{H}$, *и пусть* $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \ldots + \mathfrak{t}_s$ [*с* $\mathrm{D}(\mathfrak{t}) = \mathrm{D}(\mathfrak{t}_1) \cap \ldots \cap \mathrm{D}(\mathfrak{t}_s)$]. *Тогда форма $\mathfrak{t}$ секториальна. Если все $\mathfrak{t}_j$ замкнуты, то и $\mathfrak{t}$ замкнута. Если все $\mathfrak{t}_j$ замыкаемы, то и форма $\mathfrak{t}$ замыкаема, причем*

$$\tilde{\mathfrak{t}} \subset \tilde{\mathfrak{t}}_1 + \ldots + \tilde{\mathfrak{t}}_s. \tag{1.41}$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что все формы $\mathfrak{t}_j$ имеют нулевую вершину. Пусть $\theta_j$ — полууглы форм $\mathfrak{t}_j$, соответствующие нулевой вершине. Числовая область значений формы $\mathfrak{t}_j$ есть подмножество сектора $|\arg\zeta| \leqslant \theta_j < \pi/2$, поэтому числовая область значений формы $\mathfrak{t}$ есть подмножество сектора $|\arg\zeta| \leqslant \theta = \max\theta_j < \pi/2$. Итак, форма $\mathfrak{t}$ секториальна с вершиной 0 и полууглом $\theta$.

Предположим, что все $\mathfrak{t}_j$ замкнуты, и пусть $u_n \underset{\mathfrak{t}}{\to} u$. Тогда $u_n \underset{\mathfrak{h}}{\to} u$, где $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}\mathfrak{t} = \mathfrak{h}_1 + \ldots + \mathfrak{h}_s$, $\mathfrak{h}_j = \operatorname{Re}\mathfrak{t}_j$; поэтому $\mathfrak{h}[u_n - u_m] \to 0$ при $n$, $m \to \infty$. Так как $\mathfrak{h}_j \geqslant 0$, то $\mathfrak{h}_j[u_n - u_m] \to 0$ для каждого $j$. Итак, $u_n \underset{\mathfrak{h}_j}{\to} u$, а значит, $u_n \underset{\mathfrak{t}_j}{\to} u$, так что $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{t}_j)$ и $\mathfrak{t}_j[u_n - u] \to 0$ для каждого $j$. Следовательно, $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{t})$ и $\mathfrak{t}[u_n - u] \to 0$. Это доказывает замкнутость формы $\mathfrak{t}$.

Предположим теперь, что все $\mathfrak{t}_j$ замыкаемы. Тогда форма $\tilde{\mathfrak{t}}_1 + \ldots + \tilde{\mathfrak{t}}_s$ замкнута согласно только что доказанному утверждению и является продолжением формы $\mathfrak{t}$. Следовательно, форма $\mathfrak{t}$ замыкаема, причем справедлива формула (1.41).

**Замечание 1.32.** Включение в формуле (1.41), вообще говоря, не может быть заменено равенством, даже если все $\mathfrak{t}_j$ симметричны[1]. Теорему 1.31 можно распространить на случай суммирования бесконечного числа форм при некоторых предположениях, обеспечивающих сходимость и секториальную ограниченность суммы.

Пусть $\mathfrak{t}$ — секториальная форма в $\mathrm{H}$. Форма $\mathfrak{t}'$ в $\mathrm{H}$ (не обязательно секториальная) называется *ограниченной относительно формы* $\mathfrak{t}$ или просто $\mathfrak{t}$-*ограниченной*, если $\mathrm{D}(\mathfrak{t}') \supset \mathrm{D}(\mathfrak{t})$ и

$$|\mathfrak{t}'[u]| \leqslant a\|u\|^2 + b\,|\mathfrak{t}[u]|, \quad u \in \mathrm{D}(\mathfrak{t}), \tag{1.42}$$

---

[1] Относительно контрпримера см. Т. Като [8].

где $a$ и $b$ — неотрицательные константы. Наибольшую нижнюю грань всех возможных значений $b$ мы будем называть *$\mathfrak{t}$-гранью* формы $\mathfrak{t}'$.

Очевидно, что $\mathfrak{t}$-ограниченность эквивалентна $(\mathfrak{t}+\alpha)$-ограниченности для любого скаляра $\alpha$. Кроме того, $\mathfrak{t}$-ограниченность эквивалентна $\mathfrak{h}$-ограниченности, если $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}\mathfrak{t}$, так как неравенство (1.42) эквивалентно [см. (1.16)] неравенству

$$|\mathfrak{t}'[u]| \leqslant a\|u\|^2 + b\mathfrak{h}[u], \quad u \in \mathbf{D}(\mathfrak{t}) = \mathbf{D}(\mathfrak{h}); \tag{1.43}$$

константы $a$ и $b$ в (1.42) и (1.43), вообще говоря, не совпадают.

Если обе формы $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}'$ секториальны и замыкаемы, то неравенство (1.42) распространяется на все $u \in \mathbf{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$ с теми же константами $a$ и $b$ и формами $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ вместо форм $\tilde{\mathfrak{t}}$, $\tilde{\mathfrak{t}}'$ соответственно [как следствие получаем, что $\mathbf{D}(\tilde{\mathfrak{t}}') \supset \mathbf{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$]. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть для каждого $u \in \mathbf{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$ последовательность $\{u_n\}$, такую, что $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$, и перейти к пределу в неравенстве $|\tilde{\mathfrak{t}}'[u_n]| \leqslant a\|u_n\|^2 + b\,|\tilde{\mathfrak{t}}[u_n]|$.

Для симметричных форм можно ввести понятие относительной полуограниченности. Пусть $\mathfrak{h}$ — симметричная форма, ограниченная снизу. Симметричная форма $\mathfrak{h}'$ (не обязательно полуограниченная) называется *полуограниченной снизу относительно* $\mathfrak{h}$ или просто *$\mathfrak{h}$-полуограниченной снизу*, если $\mathbf{D}(\mathfrak{h}') \supset \mathbf{D}(\mathfrak{h})$ и

$$\mathfrak{h}'[u] \geqslant -a'\|u\|^2 - b'\mathfrak{h}[u], \quad u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}), \tag{1.44}$$

где $a'$, $b'$ — неотрицательные числа. Аналогично форма $\mathfrak{h}'$ называется *$\mathfrak{h}$-полуограниченной сверху*, если $\mathbf{D}(\mathfrak{h}') \supset \mathbf{D}(\mathfrak{h})$ и

$$\mathfrak{h}'[u] \leqslant a''\|u\|^2 + b''\mathfrak{h}[u], \quad u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}). \tag{1.45}$$

Если форма $\mathfrak{h}'$ $\mathfrak{h}$-полуограничена сверху и снизу, то она $\mathfrak{h}$-ограничена. Заметим, что понятия $\mathfrak{h}$-полуограниченности сверху и снизу не совсем аналогичны, так как форма $\mathfrak{h}$ предполагается полуограниченной снизу.

**Теорема 1.33.** *Пусть $\mathfrak{t}$ — секториальная форма, и пусть форма $\mathfrak{t}'$ $\mathfrak{t}$-ограничена с константой $b < 1$ в (1.43). Тогда форма $\mathfrak{t}+\mathfrak{t}'$ секториальна. Для замкнутости формы $\mathfrak{t}+\mathfrak{t}'$ необходимо и достаточно, чтобы была замкнута форма $\mathfrak{t}$. Для замыкаемости формы $\mathfrak{t}+\mathfrak{t}'$ необходимо и достаточно, чтобы была замкнута форма $\mathfrak{t}$; в этом случае $\mathbf{D}(\mathfrak{t}+\mathfrak{t}') = \mathbf{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$.*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{D}(\mathfrak{t}') \supset \mathbf{D}(\mathfrak{t})$, то $\mathbf{D}(\mathfrak{t}+\mathfrak{t}') = \mathbf{D}(\mathfrak{t})$. Мы можем предположить без ограничения общности, что форма $\mathfrak{t}$ имеет нулевую вершину, так что $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}\mathfrak{t} \geqslant 0$; заметим, что замена $\mathfrak{h}$ на $\mathfrak{h}-\gamma$ не изменяет константу $b$ из (1.43) (хотя может изменить $a$). Обозначив полуугол формы $\mathfrak{t}$ через $\theta$ и положив $\mathfrak{k} = \operatorname{Im} \mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}' = \operatorname{Re} \mathfrak{t}'$, $\mathfrak{k}' = \operatorname{Im} \mathfrak{t}'$, получим

$$\begin{aligned} |\,(\mathfrak{k} + \mathfrak{k}')\,[u]\,| &\leqslant |\,\mathfrak{k}\,[u]\,| + |\,\mathfrak{k}'\,[u]\,| \leqslant |\,\mathfrak{k}\,[u]\,| + |\,\mathfrak{t}'\,[u]\,| \leqslant \\ &\leqslant (\operatorname{tg}\theta + b)\,\mathfrak{h}\,[u] + a\,\|\,u\,\|^2, \end{aligned} \tag{1.46}$$

$$(\mathfrak{h} + \mathfrak{h}')\,[u] \geqslant \mathfrak{h}\,[u] - |\,\mathfrak{h}'\,[u]\,| \geqslant (1 - b)\,\mathfrak{h}\,[u] - a\,\|\,u\,\|^2. \tag{1.47}$$

Следовательно,

$$(\,|\,\mathfrak{k}\cdot+\mathfrak{k})\,[u]\,| \leqslant (1 - b)^{-1}\,(\operatorname{tg}\theta + b)\,((\mathfrak{h} + \mathfrak{h}')\,[u] + a) + a \tag{1.48}$$

при $\|\,u\,\| = 1$. Это показывает, что числовая область значений формы $\mathfrak{t}' + \mathfrak{t}'$ есть подмножество сектора $|\arg(\zeta + R)\,| \leqslant \theta'$ при достаточно большом $R$ и $\theta' < \pi/2$, т. е. форма $\mathfrak{t} + \mathfrak{t}'$ секториальна.

В силу (1.42) из $u_n \underset{\mathfrak{t}}{\to} u$ следует $u_n \underset{\mathfrak{t}'}{\to} u$, а значит, $u_n \underset{\mathfrak{t}+\mathfrak{t}'}{\longrightarrow} u$. Обратно, из (1.47) следует, что $u_n \underset{\mathfrak{h}+\mathfrak{h}'}{\longrightarrow} u$ (эквивалентно: $u_n \underset{\mathfrak{t}+\mathfrak{t}'}{\longrightarrow} u$) влечет за собой $u_n \underset{\mathfrak{h}}{\to} u$ (эквивалентно: $u_n \underset{\mathfrak{t}}{\to} u$). Аналогично убедимся в том, что сходимость последовательности $\mathfrak{t}\,[u_n - u] \to 0$ эквивалентна сходимости последовательности $(\mathfrak{t} + \mathfrak{t}')\,[u_n - u) \to \to 0$. Оставшиеся утверждения теоремы непосредственно следуют из этих эквивалентностей. Заметим попутно, что если форма $\mathfrak{t}$ замыкаема, то все приведенные выше неравенства распространяются на случай, когда $u \in \mathbf{D}\,(\tilde{\mathfrak{t}})$, с заменой форм $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t} + \mathfrak{t}'$ и т. д. на формы $\tilde{\mathfrak{t}}$, $(\mathfrak{t} + \mathfrak{t}')$ и т. д.

**Замечание 1.34.** Если в теореме 1.33 форма $\mathfrak{t}'$ также секториальна и замыкаема, то $\mathbf{D}\,(\tilde{\mathfrak{t}}') < \mathbf{D}\,(\tilde{\mathfrak{t}})$ и $(\mathfrak{t} + \mathfrak{t}') = \tilde{\mathfrak{t}} + \tilde{\mathfrak{t}}'$. Действительно, $(\mathfrak{t} + \mathfrak{t}')^{\sim} \subset \tilde{\mathfrak{t}} + \tilde{\mathfrak{t}}'$ по теореме 1.31, а из теоремы 1.33 следует, что $\mathbf{D}\,((\mathfrak{t} + \mathfrak{t}')^{\sim}) = \mathbf{D}\,(\tilde{\mathfrak{t}})$.

**Замечание 1.35.** Если в теореме 1.33 формы $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ симметричны, то достаточно предположить лишь $\mathfrak{t}$-полуограниченность формы $\mathfrak{t}'$ сверху и снизу с константой $b' < 1$ в (1.44).

**Пример 1.36.** Рассмотрим форму $\mathfrak{t}$ из примера 1.7. Она может быть представлена в виде $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_3$, где

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_1\,[u, v] &= \int p\,(x)\,u'\overline{v'}\,dx, \\ \mathfrak{t}_2\,[u, v] &= \int \{q\,(x)\,u\overline{v} + r\,(x)\,u'\overline{v} + s\,(x)\,u\overline{v'}\}\,dx, \\ \mathfrak{t}_3\,[u, v] &= h_a u\,(a)\,\overline{v\,(a)} + h_b u\,(b)\,\overline{v\,(b)} \end{aligned} \tag{1.49}$$

и $D(\mathfrak{t}_1) = D(\mathfrak{t}_2) = D(\mathfrak{t}_3) = D(\mathfrak{t})$. Если, как и прежде, предполагать, что $p(x) > 0$, то форму $\mathfrak{t}_1$ можно представить в виде $\mathfrak{t}_1[u, v] = (Su, Sv)$, где $S$ — линейный оператор, определенный формулой $Su(x) = p(x)^{1/2}u'(x)$ с $D(S) = D(\mathfrak{t})$. Если область $D(\mathfrak{t})$ такая же, как в примере 1.7, то $S$ — замкнутый оператор в $H$ [см. пример III.5.14 и задачу III.5.7; заметим, что функция $p(x)^{-1}$ ограничена]. Следовательно, форма $\mathfrak{t}_1'$ неотрицательна и замкнута согласно результату примера 1.13.

С другой стороны, формы $\mathfrak{t}_2$ и $\mathfrak{t}_3$ являются $\mathfrak{t}_1$-ограниченными с $\mathfrak{t}_1$-гранью 0; фактически это было доказано в примере 1.7. Таким образом, из теоремы 1.33 следует замкнутость формы $\mathfrak{t}$. Аналогично сужение $\mathfrak{t}_0$ формы $\mathfrak{t}$ из примера 1.7 есть замкнутая форма; это следует из того факта, что соответствующее сужение $S_0$ оператора $S$ — замкнутый оператор (см. пример III.5.14).

**Задача 1.37.** Пусть формы $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ секториальны, причем $\mathfrak{t}$ замкнута, а $\mathfrak{t}'$ замыкаема. Если $D(\mathfrak{t}') \supset D(\mathfrak{t})$, то форма $\mathfrak{t}'$ $\mathfrak{t}$-ограничена. [*Указание*: см. теорему 1.20.]

## 7. Относительная ограниченность форм и операторов

Мы ввели важные для теории возмущений понятия относительной ограниченности *операторов* и *квадратичных форм* (для последних — только в гильбертовом пространстве). К секториальным операторам $S$ и $S'$ применимы оба понятия: с одной стороны, $S'$ может быть $S$-ограничен; с другой стороны, секториальная форма $(S'u, u)$ может быть $\mathfrak{s}$-ограничена при $\mathfrak{s}(u, v) = (Su, v)$. При подходящих предположениях относительно замкнутости и достаточной малости относительной грани операторы $S + S'$ и $S$ в первом случае и соответствующие замкнутые формы во втором случае имеют одну и ту же область определения.

В общем случае неясно, есть ли какая-либо связь между этими двумя понятиями относительной ограниченности. Однако если рассматривать лишь симметричные операторы $S$, $S'$, то относительная ограниченность форм слабее, чем относительная ограниченность соответствующих операторов. Более точно, справедлива

**Теорема 1.38.** *Пусть оператор $T$ самосопряжен и ограничен снизу, а симметричный оператор $A$ $T$-ограничен с $T$-гранью $b$. Тогда форма $(Au, u)$ является $\mathfrak{t}$-ограниченной при $\mathfrak{t}(u, v) = (Tu, v)$ с $\mathfrak{t}$-гранью $\leqslant b$, и то же верно для замыканий этих форм* [1].

Доказательство. Имеет место неравенство $\|Au\| \leqslant a'\|u\| + b'\|Tu\|$, $u \in D(T)$, где константу $b'$ можно выбрать сколь угодно близкой к $b$. Из теоремы V.4.11 следует, что оператор $T(\varkappa) = T + \varkappa A$ самосопряжен и ограничен снизу, если $\varkappa$ вещественно и $|\varkappa| < b'^{-1}$, причем нижняя грань $\gamma(\varkappa)$ оператора

---

[1] Эта теорема по существу совпадает с теоремой V.4.11.

$T(\varkappa)$ удовлетворяет неравенству

$$\gamma(\varkappa) \geqslant \gamma_T - |\varkappa| \max\left(\frac{a'}{1-b'|\varkappa|},\ a' + b'|\gamma_T|\right). \tag{1.50}$$

Поскольку $\gamma(\varkappa)$ — нижняя грань оператора $T(\varkappa)$, то

$$-\varkappa(Au,\ u) \leqslant -\gamma(\varkappa)(u,\ u) + (Tu,\ u), \quad u \in \mathrm{D}(T). \tag{1.51}$$

Число $\pm\varkappa$ можно выбрать сколь угодно близким к $b'^{-1}$, а значит, и к $b^{-1}$; поэтому из (1.51) следует, что форма $(Au,\ u)$ $\mathfrak{t}$-ограничена с $\mathfrak{t}$-гранью $\leqslant b$. Последнее утверждение теоремы следует из замечания, сделанного в п. 6.

## § 2. Теоремы о представлении

### 1. Первая теорема о представлении

Если $\mathfrak{t}[u,\ v]$ — ограниченная форма, определенная всюду в $\mathrm{H}$, то существует ограниченный оператор $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ такой, что $\mathfrak{t}[u,\ v] = (Tu,\ v)$ (см. п. V.2.1). Теперь мы можем обобщить эту теорему на случай неограниченной формы $\mathfrak{t}$, предполагая, что она плотно определена, секториальна и замкнута. Возникающий при этом оператор $T$ секториален, как это и следует ожидать ввиду замкнутости формы $\mathfrak{t}$. В действительности этот оператор оказывается даже $m$-секториальным (см. п. V.3.10), а значит, он замкнут и его резольвентное множество $\mathrm{P}(T)$ содержит внешность множества $\Theta(T)$. В частности, оператор $T$ самосопряжен и ограничен снизу, если $\mathfrak{t}$ — симметричная форма. Точный результат дает

**Теорема 2.1** (первая теорема о представлении)[1]. *Пусть* $\mathfrak{t}[u,\ v]$ *— плотно определенная замкнутая секториальная полуторалинейная форма в* $\mathrm{H}$. *Существует такой* $m$*-секториальный оператор* $T$, *что*

i) $\mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{t})$ *и*

$$\mathfrak{t}[u,\ v] = (Tu,\ v) \tag{2.1}$$

*для всех* $u \in \mathrm{D}(T)$ *и* $v \in \mathrm{D}(\mathfrak{t})$;

ii) $\mathrm{D}(T)$ *является ядром формы* $\mathfrak{t}$;

iii) *если* $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{t})$, $w \in \mathrm{H}$ *и равенство*

$$\mathfrak{t}[u,\ v] = (w,\ v) \tag{2.2}$$

---

[1] Для случая симметричной формы $\mathfrak{t}$ эта теорема принадлежит Фридрихсу [1]. Обобщение на несимметричные формы $\mathfrak{t}$ сделано, по-видимому, многими авторами, по крайней мере неявно; систематическое изложение этих результатов можно найти в работе Лионса [[1]], где эта теорема дана в несколько иной формулировке.

*справедливо для всех* $v$, *принадлежащих ядру формы* $\mathfrak{t}$, *то* $u \in \mathrm{D}(T)$ *и* $Tu = w$.

*Условие* i) *определяет т-секториальный оператор* $T$ *однозначно.*

**Следствие 2.2.** *Если форма* $\mathfrak{t}_0$ *определена с помощью оператора* $T$ *из теоремы* 2.1 *равенством* $\mathfrak{t}_0[u, v] = (Tu, v)$ *и* $\mathrm{D}(\mathfrak{t}_0) = \mathrm{D}(T)$, *то* $\mathfrak{t} = \tilde{\mathfrak{t}}_0$.

**Следствие 2.3.** *Числовая область значений* $\Theta(T)$ *оператора* $T$ *есть плотное подмножество числовой области значений* $\Theta(\mathfrak{t})$ *формы* $\mathfrak{t}$.

**Следствие 2.4.** *Если оператор* $S$ *таков, что* $\mathrm{D}(S) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{t})$ *и* $\mathfrak{t}[u, v] = (Su, v)$ *для всех* $u \in \mathrm{D}(S)$ *и всех* $v$, *принадлежащих ядру формы* $\mathfrak{t}$, *то* $S \subset T$.

Будем называть $T$ *т-секториальным оператором* (или просто *оператором*), *ассоциированным с формой* $\mathfrak{t}$. В этом случае мы часто будем писать $T = T_{\mathfrak{t}}$.

**Теорема 2.5.** *Если* $T = T_{\mathfrak{t}}$, *то* $T^* = T_{\mathfrak{t}^*}$. *Иными словами, если* $T$ — *оператор, ассоциированный с плотно определенной замкнутой секториальной формой* $\mathfrak{t}$, *то* $T^*$ — *оператор, ассоциированный с формой* $\mathfrak{t}^*$, *сопряженной к* $\mathfrak{t}$ (*которая также плотно определена, секториальна и замкнута*).

**Теорема 2.6.** *Если* $\mathfrak{h}$ — *плотно определенная, симметричная замкнутая форма, ограниченная снизу, то оператор* $T = T_{\mathfrak{h}}$, *ассоциированный с формой* $\mathfrak{h}$, *самосопряжен и ограничен снизу. Оператор* $T$ *и форма* $\mathfrak{h}$ *имеют одинаковые нижние грани.*

**Теорема 2.7.** *Соответствие* $\mathfrak{t} \to T = T_{\mathfrak{t}}$ *между множеством всех плотно определенных замкнутых секториальных форм и множеством всех т-секториальных операторов взаимно однозначно. Форма* $\mathfrak{t}$ *ограничена тогда и только тогда, когда оператор* $T$ *ограничен. Форма* $\mathfrak{t}$ *симметрична тогда и только тогда, когда оператор* $T$ *самосопряжен.*

**Замечание 2.8.** Эти результаты показывают, что замкнутые секториальные формы представляют собой удобное средство для построения $m$-секториальных операторов (в частности, самосопряженных операторов, ограниченных снизу), так как такие формы легко строить благодаря тому факту, что не существует «максимальных» секториальных форм.

## 2. Доказательство первой теоремы о представлении

При доказательстве теорем 2.1 и 2.5 мы можем предположить, не ограничивая общности, что форма $\mathfrak{t}$ имеет нулевую вершину, так что $\mathfrak{h} = \operatorname{Re} \mathfrak{t} \geqslant 0$. Пусть $\mathbf{H}_\mathfrak{t}$ — (полное) гильбертово пространство, в которое превращается линейное подпространство $\mathbf{D}(\mathfrak{h})$, если ввести в нем скалярное произведение $(u, v)_\mathfrak{t} = (u, v_\mathfrak{h})$, определенное формулой (1.29).

Рассмотрим форму $\mathfrak{t}_1 = \mathfrak{t} + 1$. Она, так же как и форма $\mathfrak{t}$, ограничена в $\mathbf{H}_\mathfrak{t}$. Следовательно, существует оператор $B \in \mathscr{B}(\mathbf{H}_\mathfrak{t})$ такой, что

$$\mathfrak{t}_1 [u, v] = (Bu, v)_\mathfrak{t}, \quad u, v \in \mathbf{H}_\mathfrak{t} = \mathbf{D}(\mathfrak{t}). \tag{2.3}$$

Поскольку $\| u \|_\mathfrak{t}^2 = (\mathfrak{h} + 1)[u] = \operatorname{Re} \mathfrak{t}_1 [u] = \operatorname{Re} (Bu, u)_\mathfrak{t} \leqslant \| Bu \|_\mathfrak{t} \| u \|_\mathfrak{t}$, то $\| u \|_\mathfrak{t} \leqslant \| Bu \|_\mathfrak{t}$. Следовательно, $B$ имеет ограниченный обратный $B^{-1}$ с плотной в $\mathbf{H}_\mathfrak{t}$ областью определения. Эта область есть все $\mathbf{H}_\mathfrak{t}$, так что $B^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{H}_\mathfrak{t})$, причем $\| B^{-1} \|_\mathfrak{t} \leqslant 1$ [1]. Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что любой элемент $u \in H_\mathfrak{t}$, ортогональный в $\mathbf{H}_\mathfrak{t}$ к множеству $\mathbf{D}(B^{-1}) = \mathbf{R}(B)$, равен нулю. Это ясно из равенства $\| u \|_\mathfrak{t}^2 = \operatorname{Re} (Bu, u)_\mathfrak{t} = 0$.

При любом фиксированном $u \in \mathbf{H}$ рассмотрим полулинейную форму $v \to l_u [u] = (u, v)$, определенную для $v \in \mathbf{H}_\mathfrak{t}$. Эта форма ограничена в $\mathbf{H}_\mathfrak{t}$ с нормой $\leqslant \| u \|$, так как $| l_u [v] | \leqslant \| u \| \| v \| \leqslant \| u \| \| v \|_\mathfrak{t}$. По теореме Рисса (п. V.1.1) существует единственный элемент $u' \in \mathbf{H}_\mathfrak{t}$, такой, что $(u, v) = l_u [v] = (u', v)_\mathfrak{t}$, $\| u' \|_\mathfrak{t} \leqslant \| u \|$. Определим теперь оператор $A$ равенством $Au = B^{-1}u'$; это линейный оператор с областью определения $\mathbf{H}$ и областью значений в $\mathbf{H}_\mathfrak{t}$. Рассматриваемый как оператор в $\mathbf{H}$, он принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{H})$, причем $\| A \| \leqslant 1$, так как $\| Au \| = \| B^{-1}u \| \leqslant \| B^{-1}u' \|_\mathfrak{t} \leqslant \| u' \|_\mathfrak{t} \leqslant \| u \|$. Из определения оператора $A$ следует, что

$$(u, v) = (u', v)_\mathfrak{t} = (BAu, v)_\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 [Au, v] = (\mathfrak{t} + 1)[Au, v]. \tag{2.4}$$

Следовательно,

$$\mathfrak{t} [Au, v] = (u - Au, v), \quad u \in \mathbf{H}, \ v \in \mathbf{H}_\mathfrak{t} = \mathbf{D}(\mathfrak{t}). \tag{2.5}$$

Оператор $A$ обратим, так как из равенства $Au = 0$ следует, согласно формуле (2.4), что $(u, v) = 0$ для всех $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$ и $\mathbf{D}(\mathfrak{t})$ плотно в $\mathbf{H}$. Полагая $w = Au$, $u = A^{-1}w$ в (2.5), получим $\mathfrak{t} [w, v] = (A^{-1} - 1) w, v) = (Tw, v)$ для всех $w \in \mathbf{D}(T) =$

---

[1] Этот результат известен как теорема Лакса — Мильграма; см. Лакс и Мильграм [1].

$= \mathbf{R}(A) \subset \mathbf{D}(T)$ и $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$; здесь $T = A^{-1} - 1$. Этим доказано утверждение i) теоремы 2.1.

Оператор $T$ замкнут в $\mathbf{H}$, так как $A \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$. Он секториален, так как $\Theta(T) \subset \Theta(\mathfrak{t})$; последнее следует из того, что $(Tu, u) = \mathfrak{t}[u]$ в силу равенства (2.1). Оператор $T$ $m$-секториален, так как $\mathbf{R}(T+1) = \mathbf{R}(A^{-1}) = \mathbf{D}(A) = \mathbf{H}$ (см. п. V.3.10).

Для доказательства утверждения ii) теоремы 2.1 достаточно показать, что множество $\mathbf{D}(T) = \mathbf{R}(A)$ плотно в $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$ (см. теорему 1.21). Поскольку $B$ есть непрерывное в обе стороны отображение пространства $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$ на себя, достаточно показать, что множество $B\mathbf{R}(A) = \mathbf{R}(BA)$ плотно в $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$. Пусть элемент $v \in \mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$ ортогонален в $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$ к множеству $\mathbf{R}(BA)$. Тогда из (2.4) следует, что $(u, v) = 0$ для всех $u \in \mathbf{H}$, так что $v = 0$. Следовательно, множество $\mathbf{R}(BA)$ плотно в $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}}$.

Следствие 2.2 есть иная формулировка только что доказанного утверждения ii), а следствие 2.3 можно получить из него, используя теорему 1.18.

Для доказательства следующих утверждений теоремы удобно на этом этапе рассмотреть форму $\mathfrak{t}^*$, сопряженную к $\mathfrak{t}$. Форма $\mathfrak{t}^*$, так же как и форма $\mathfrak{t}$, плотно определена, секториальна с вершиной 0 и замкнута; поэтому можно построить ассоциированный с ней $m$-секториальный оператор $T'$ так же, как мы строили $T$ по форме $\mathfrak{t}$. Тогда для любого $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{t}^*) = \mathbf{D}(\mathfrak{t})$ и $v \in \mathbf{D}(T')$

$$\mathfrak{t}^*[v, u] = (T'v, u) \quad \text{или} \quad \mathfrak{t}[u, v] = (u, T'v). \tag{2.6}$$

В частности, полагая $u \in \mathbf{D}(T) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{t})$ и $v \in \mathbf{D}(T') \subset \mathbf{D}(\mathfrak{t})$, из формул (2.1) и (2.6) получаем, что $(Tu, v) = (u, T'v)$. Поэтому $T' \subset T^*$. Но так как оба оператора $T^*$ и $T'$ являются $m$-секториальными (а значит, максимально аккретивными; см. п. V.3.10), то $T' = T^*$, а следовательно, $T'^* = T$.

Отсюда сразу же следует утверждение iii) теоремы 2.1. Действительно, если равенство (2.2) выполняется для всех $v$ из ядра формы $\mathfrak{t}$, то оно может быть распространено по непрерывности на все $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$. Для элементов $v \in \mathbf{D}(T')$ мы получим тогда, что $(u, T'v) = \mathfrak{t}[u, v] = (w, v)$. Следовательно, $u \in \mathbf{D}(T'^*) = \mathbf{D}(T)$ и $w = T'^*u = Tu$ по определению оператора $T'^*$.Следствие 2.4 вытекает непосредственно из условия iii), а единственность $m$-секториального оператора $T$, удовлетворяющего условию i), вытекает из самого следствия. Это завершает доказательство теоремы 2.1.

Теорема 2.5 непосредственно следует из доказанного выше равенства $T' = T^*$. Этим доказана также и теорема 2.6, так как если $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^*$, то $T = T^*$; утверждение о нижней грани формы $\mathfrak{t}$ и оператора $T$ вытекает из следствия 2.3.

Доказательство теоремы 2.7. Заметим прежде всего, что отображение $\mathfrak{t} \to T = T_{\mathfrak{t}}$ взаимно однозначно; это вытекает непосредственно из теоремы 2.1 и следствия 2.2. Остается показать, что любой $m$-секториальный оператор $T$ ассоциирован при данном отображении с плотно определенной замкнутой секториальной формой $\mathfrak{t}$. Согласно следствию 2.2, такая форма $\mathfrak{t}$ является замыканием формы

$$\mathfrak{t}_0[u, v] = (Tu, v), \quad \mathbf{D}(\mathfrak{t}_0) = \mathbf{D}(T). \tag{2.7}$$

Форма $\mathfrak{t}_0$ плотно определена и секториальна; в силу теоремы 1.27 она замыкаема. Рассмотрим оператор $T_{\mathfrak{t}}$, ассоциированный с формой $\mathfrak{t} = \tilde{\mathfrak{t}}_0$; согласно следствию 2.4, $T_{\mathfrak{t}} \supset T$. Но оба оператора $T$ и $T_{\mathfrak{t}}$ являются $m$-секториальными, поэтому $T = T_{\mathfrak{t}}$.

Доказательство теоремы 1.16. Теперь мы можем провести доказательство теоремы 1.16. По предположению последовательности $\{u_n\}$ и $\{(\operatorname{Re}\mathfrak{t} - \gamma)[u_n]\}$ ограничены. Так как замкнутость формы $\mathfrak{t}$ влечет за собой замкнутость формы $\mathfrak{h}' = \operatorname{Re}\mathfrak{t} - \gamma$ и сходимость $u_n \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$ эквивалентна сходимости $u_n \xrightarrow[\mathfrak{h}']{} u$ (см. п. 1.3), то, не ограничивая общности, можно предположить, что форма $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$ симметрична и неотрицательна.

Рассмотрим определенное ранее гильбертово пространство $\mathbf{H}_{\mathfrak{h}}$. Последовательности $\{\| u_n \|\}$ и $\{\mathfrak{h}[u_n]\}$ ограничены, поэтому последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $\mathbf{H}$ . Следовательно, существует слабо сходящаяся в $\mathbf{H}_{\mathfrak{h}}$ подпоследовательность $\{v_n\}$ последовательности $\{u_n\}$ (см. лемму V.1.4). Пусть $v \in \mathbf{H}_{\mathfrak{h}}$ — слабый предел последовательности $\{v_n\}$, и пусть $H = T_{\mathfrak{h}}$. Для любого $w \in \mathbf{D}(H)$

$$\begin{aligned}(v_n, (H+1)w) = (\mathfrak{h}+1)[v_n, w] = (v_n, w)_{\mathfrak{h}} \to \\ \to (v, w)_{\mathfrak{h}} = (\mathfrak{h}+1)[v, w] = (v, (H+1)w).\end{aligned}$$

С другой стороны, $(v_n, (H+1)w) \to (u, (H+1)w)$, откуда $(u - v, (H+1)w) = 0$. Но если $w$ пробегает всю область $\mathbf{D}(H)$, то $(H+1)w$ принимает все значения из $\mathbf{H}$. Поэтому $u = v$, так что $u \in \mathbf{H}_{\mathfrak{h}} = \mathbf{D}(\mathfrak{h})$.

Таким образом, $\| u \|_{\mathfrak{h}} \leqslant \| v \|_{\mathfrak{h}} \leqslant \liminf \| v_n \|_{\mathfrak{h}}$, что в силу (1.30) эквивалентно неравенству $\mathfrak{h}[u] \leqslant \liminf \mathfrak{h}[v_n]$. Так как мы могли бы заменить последовательность $\{u_n\}$ любой подпоследовательностью, то $\mathfrak{h}[u] \leqslant \liminf \mathfrak{h}[u_n]$.

### 3. Расширение по Фридрихсу

В этом пункте мы будем обозначать через $S$ плотно определенный секториальный оператор. Определим форму $\mathfrak{s}$ следующим образом: $\mathfrak{s}[u, v] = (Su, v)$, $\mathbf{D}(\mathfrak{s}) = \mathbf{D}(S)$; согласно теореме 1.27, эта форма замыкаема. Пусть $\mathfrak{t} = \bar{\mathfrak{s}}$, и пусть $T = T_{\mathfrak{t}}$ — ассоциированный с формой $\mathfrak{t}$ $m$-секториальный оператор. В силу следствия 2.4 $T \supset S$, так как $\mathbf{D}(S) = \mathbf{D}(\mathfrak{s})$ — ядро формы $\mathfrak{t}$. Будем называть оператор $T$ *расширением по Фридрихсу*, *или фридрихсовым расширением* оператора $S$. Первоначально расширение по Фридрихсу определялось для полуограниченных *симметричных* операторов $S$; в этом случае, согласно теореме 2.6, оператор $T$ самосопряжен [1]).

**Теорема 2.9.** *Если оператор $S$ $m$-секториален, то он совпадает со своим расширением по Фридрихсу. В частности, расширение по Фридрихсу оператора $T$, являющегося расширением по Фридрихсу плотно определенного секториального оператора, совпадает с $T$.*

Это ясно из того, что $m$-секториальный оператор не имеет собственного секториального расширения (см. п. V.3.10).

Следущие две теоремы представляют собой характеристическое описание расширения по Фридрихсу. Здесь операторы $S$, $T$ и формы $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{t}$ те же, что и выше.

**Теорема 2.10.** *Из всех $m$-секториальных расширений $T'$ оператора $S$ расширение по Фридрихсу $T$ имеет наименьшую область определения формы (т. е. область определения ассоциированной с ним формы $\mathfrak{t}$ содержится в области определения формы, ассоциированной с любым из операторов $T'$).*

Доказательство. Определим форму $\mathfrak{t}'$ равенством $\mathfrak{t}'[u, v] = (T'u, v)$, $\mathbf{D}(\mathfrak{t}') = \mathbf{D}(T')$. Тогда оператор $T'$ соответствует форме $\widetilde{\mathfrak{t}'}$ (см. теорему 2.7). Но поскольку $T' \supset S$, то $\mathfrak{t}' \supset \mathfrak{s}$, так что $\widetilde{\mathfrak{t}'} \supset \widetilde{\mathfrak{s}} = \mathfrak{t}$. Поэтому $\mathbf{D}(\widetilde{\mathfrak{t}'}) \supset \mathbf{D}(\mathfrak{t})$.

**Теорема 2.11.** *Расширение по Фридрихсу оператора $S$ является его единственным $m$-секториальным расширением с областью определения, содержащейся в $\mathbf{D}(\mathfrak{t})$* [2])

---

[1]) См. Фридрихс [1], Фрейденталь [1]. Об обобщении понятия расширения по Фридрихсу на случай операторов из банахова пространства $X$ в его сопряженное $X^*$ см. Бирман [2].

[2]) Ср. Фрейденталь [1]. Мы не рассматриваем задачу об определении всех $m$-секториальных расширений оператора $S$. Для полуограниченных самосопряженных расширений полуограниченного симметричного оператора $S$ эта задача решена Крейном [1, 2]. См. также Бирман [1], Вишик [1].

Доказательство. Пусть $T'$ — любое $m$-секториальное расширение оператора $S$ с областью определения $\mathbf{D}(T') \subset \mathbf{D}(\mathfrak{t})$. Пусть форма $\mathfrak{t}'$ та же, что и ранее. Для любых $u \in \mathbf{D}(T')$ и $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$ справедливо равенство $(T'u, v) = \tilde{\mathfrak{t}}' [u, v] = \mathfrak{t} [u, v]$, так как $T' = T_{\tilde{\mathfrak{t}}'}$, $\tilde{\mathfrak{t}}' \supset \mathfrak{t}$ и $\mathbf{D}(T') \subset \mathbf{D}(\mathfrak{t})$. Из следствия 2.4 вытекает, что $T' \subset T$. Но поскольку оба оператора $T'$ и $T$ являются $m$-секториальными, то $T' = T$.

**Замечание 2.12.** Значение понятия расширения по Фридрихсу состоит в том, что каждому плотно определенному секториальному оператору $S$ ставится в соответствие определенное $m$-секториальное расширение, даже если замыкание $\tilde{S}$ оператора $S$ не есть $m$-секториальный оператор.

## 4. Некоторые другие примеры приложения теоремы о представлении

**Пример 2.13.** Рассмотрим форму $\mathfrak{h}[u, v] = (Su, Sv)$ из примеров 1.3, 1.13 и 1.23. Предположим, что оператор $S$ плотно определен и замкнут; тогда форма $\mathfrak{h}$ также обладает этими свойствами. Пусть $T = T_{\mathfrak{h}}$. Так как $(Su, Sv) = (Tu, v)$ для всех $u \in \mathbf{D}(T)$ и $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}) = \mathbf{D}(S)$, то $T \subset S^*S$. Очевидно, что оператор $S^*S$ симметричен, а оператор $T$ самосопряжен; следовательно, $T = S^*S$. Итак, $\mathbf{D}(T)$ есть ядро формы $\mathfrak{t}$, а значит, и оператора $S$, согласно теореме 2.1 и результату примера 1.23. Тем самым дано другое доказательство того факта, что *оператор $S^*S$ самосопряжен в $\mathbf{H}$, если $S$ — плотно определенный замкнутый оператор из $\mathbf{H}$ в $\mathbf{H}'$, и что $\mathbf{D}(S^*S)$ есть ядро оператора $S$* (см. теорему V.3.24).

**Пример 2.14.** Рассмотрим форму $\mathfrak{t}[u, v] = \sum \alpha_j \xi_j \overline{\eta_j}$ из примеров 1.4, 1.14 и 1.24. Пусть $T = T_{\mathfrak{t}}$, $u = (\xi_i) \in \mathbf{D}(T)$, $Tu = w = (\zeta_j)$ и $v = (\eta_i) \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$. Имеем: $\sum \zeta_j \overline{\eta_j} = (w, v) = (Tu, v) = \mathfrak{t}[u, v] = \sum \alpha_j \xi_j \overline{\eta_j}$. Полагая, в частности, $\eta_j = \delta_{jk}$, мы получим, что $\zeta_k = \alpha_k \xi_k$. Поскольку $w \in \mathbf{l}^2$, то $\sum |\alpha_j|^2 \cdot |\xi_j|^2 < \infty$. Это условие является достаточным для того, чтобы элемент $u \in \mathbf{l}^2$ принадлежал $\mathbf{D}(T)$, так как в этом случае $\mathfrak{t}[u, v] = \sum \alpha_j \xi_j \overline{\eta_j} = \sum \zeta_j \overline{\eta_j} = (w, v)$, так что элемент $Tu$ существует и равен $w = (\alpha_j \xi_j)$ в силу теоремы 2.1,iii.

Рассмотрим теперь сужение $\dot{\mathfrak{t}}_1$ формы $\dot{\mathfrak{t}}$, определяемое дополнительным условием $\sum \overline{\beta}_j \xi_j = 0$ при $u \in \mathbf{D}(\dot{\mathfrak{t}}_1)$; мы предполагаем, что

$$\sum |\beta_j|^2 = \infty, \quad \sum (|\alpha_j| + 1)^{-1} |\beta_j|^2 < \infty. \tag{2.8}$$

Форма $\dot{\mathfrak{t}}_1$ плотно определена, а форма $\tilde{\dot{\mathfrak{t}}}_1$ есть собственное сужение формы $\mathfrak{t}$ (см. указанные выше примеры). Пусть $T_1 = T_{\tilde{\dot{\mathfrak{t}}}_1}$, $u = (\xi_j) \in \mathbf{D}(T_1)$, $T_1 u = w = (\zeta_j)$ и $v \in \mathbf{D}(\tilde{\dot{\mathfrak{t}}}_1)$. Тогда, как и прежде, $\sum (\zeta_j - \alpha_j \xi_j) \overline{\eta_j} = 0$. Пусть, в частности, $\eta_1 = \overline{\beta}_k$, $\eta_k = -\overline{\beta}_1$, а все остальные $\eta_j$ равны нулю [тогда $v \in$

$\in \mathbf{D}(\dot{\mathfrak{t}}_1)]$. Поэтому $\zeta_1 - \alpha_1\xi_1 : \zeta_k - \alpha_k\xi_k = \beta_1 : \beta_k$ и, поскольку это верно для всех $k$, то $\zeta_j - \alpha_j\xi_j = \rho\beta_j$, где $\rho$ не зависит от $j$. Так как $w \in \mathbf{l}^2$, то число $\rho$ должно быть таким, что $\sum |\alpha_j\xi_j + \rho\beta_j|^2 < \infty$. Из (2.8) следует, что существует не больше одного $\rho$, обладающего таким свойством. Поэтому каждое $u \in \mathbf{D}(T_1)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum (|\alpha_j| + 1) |\xi_j|^2 < \infty, \quad \sum \bar{\beta}_j\xi_j = 0 \quad \text{и} \quad \sum |\alpha_j\xi_j + \rho\beta_j|^2 < \infty \tag{2.9}$$

для некоторого $\rho$. Эти условия также достаточны для того, чтобы элемент $u \in \mathbf{l}^2$ принадлежал $\mathbf{D}(T_1)$, так как в этом случае $u \in \mathbf{D}(\tilde{\dot{\mathfrak{t}}}_1)$ и $\tilde{\dot{\mathfrak{t}}}_1[u, v] = \sum \alpha_j\xi_j\bar{\eta}_j = \sum (\alpha_j\xi_j + \rho\beta_j)\bar{\eta}_j = (w, v)$ при $w = (\alpha_j\xi_j + \rho\beta_j) \in \mathbf{l}^2$ для всех $v = (\eta_j) \in \mathbf{D}(\dot{\mathfrak{t}}_1)$. Таким образом, элемент $T_1u$ существует и равен $w$ в силу теоремы 2.1, iii.

**Пример 2.15.** С формой $\mathfrak{t}[u, v] = \int f u\bar{v}\,dx$ из примеров 1.5, 1.15 и 1.25 можно поступить так же, как в предыдущем примере. В результате $T = T_{\mathfrak{t}}$ есть максимальный оператор умножения на $f(x)$ (см. пример III.2.2). Если функция $g(x)$ такова, что $\sum |g(x)|^2\,dx = \infty$, но интеграл в левой части (1.36) сходится, то $T_1 = T_{\tilde{\dot{\mathfrak{t}}}_1}$ задается формулой $T_1u(x) = f(x)u(x) + \rho g(x)$, где $\rho$ определяется из условия $T_1u \in \mathbf{L}^2$.

**Пример 2.16.** Рассмотрим форму $\mathfrak{t}$ из примеров 1.7 и 1.36 при сделанных в этих примерах предположениях. Пусть $T = T_{\mathfrak{t}}$ и $u \in \mathbf{D}(T)$, $Tu = w$. Соотношение $(w, v) = (Tu, v) = \mathfrak{t}[u, v]$, $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$, означает, что

$$\int_a^b w\bar{v}\,dx = \int_a^b \{pu'\bar{v}' + qu\bar{v} + ru'\bar{v} + su\bar{v}'\}\,dx + h_a u(a)\overline{v(a)} + h_b u(b)\overline{v(b)}. \tag{2.10}$$

Пусть $z$ — первообразная (интегрируемой) функции $w - qu - ru'$:

$$z' = w - qu - ru'. \tag{2.11}$$

Тогда

$$\int_a^b (w - qu - ru')\bar{v}\,dx = \int_a^b z'\bar{v}\,dx = z(b)\overline{v(b)} - z(a)\overline{v(a)} - \int_a^b z\bar{v}'\,dx,$$

и из (2.10) следует, что

$$\int_a^b (pu' + z + su)\bar{v}'\,dx + [h_a u(a) + z(a)]\overline{v(a)} + [h_b u(b) - z(b)]\overline{v(b)} = 0. \tag{2.12}$$

Равенство (2.12) верно для любого $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$, т. е. такого $v$, что функция $v(x)$ абсолютно непрерывна и $v' \in \mathbf{L}^2(a, b)$. Для любой функции $v' \in \mathbf{L}^2$, обладающей тем свойством, что $\int_a^b v'\,dx = 0$, функция $v(x) = \int_a^x v'(x)\,dx$ удовлетворяет условиям $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$ и $v(a) = v(b) = 0$, так что функция $pu' + z + su$ ортогональна в силу (2.12) функции $v'$. Таким образом, функция $pu' + z + su$ должна быть равна константе $c$, так как она ортогональна всем функциям, ортогональным 1. Поэтому из (2.12) получаем

$$[-c + h_a u(a) + z(a)]\,\overline{v(a)} + [c + h_b u(b) - z(b)]\,\overline{v(b)} = 0. \qquad (2.13)$$

Поскольку $v(a)$ и $v(b)$ принимают все комплексные значения, когда $v(x)$ пробегает всю область $\mathrm{D}(\mathfrak{t})$, коэффициенты при $\overline{v(a)}$ и $\overline{v(b)}$ в (2.13) равны нулю. Учитывая, что $c = p(a)\,u'(a) + z(a) + s(a)\,u(a) = p(b)\,u'(b) + z(b) + s(b)\,u(b)$, мы приходим к следующим равенствам:

$$p(a)\,u'(a) + (s(a) - h_a)\,u(a) = 0, \quad p(b)\,u'(b) + (s(b) + h_b)\,u(b) = 0. \qquad (2.14)$$

Так как $pu' + z + su = c$, то $pu'$ абсолютно непрерывна и $(pu')' = -z' - (su)' = -w + qu + ru' - (su)'$, или $w = -(pu')' + qu + ru' - (su)'$. Таким образом, мы доказали, что каждое $u \in \mathrm{D}(T)$ обладает следующими свойствами:

i) $u(x)$ и $u'(x)$ абсолютно непрерывны и $u'' \in \mathrm{L}^2(a, b)$;

ii) $u(x)$ удовлетворяет граничным условиям (2.14).

Обратно, любая функция $u \in \mathrm{L}^2$, удовлетворяющая условиям i) и ii), принадлежит $\mathrm{D}(T)$ и

$$Tu = w = -(pu')' + qu + ru' - (su)'. \qquad (2.15)$$

В самом деле, интегрирование по частям показывает, что $\mathfrak{t}[u, v] = (w, v)$ для всех $v \in \mathrm{D}(\mathfrak{t})$, и доказываемое утверждение следует непосредственно из теоремы 2.1, iii. Таким образом, мы получили следующее описание оператора $T_{\mathfrak{t}}$: $T = T_{\mathfrak{t}}$ *есть дифференциальный оператор второго порядка* (2.15) *с граничными условиями* (2.14). Оператор $T$ аналогичен оператору $T_2$ из п. III.2.3.

Отсюда следует, что такой дифференциальный оператор $m$-секториален, в частности самосопряжен, если функция $q(x)$ вещественная, $\overline{r(x)} = s(x)$ и числа $h_a$, $h_b$ вещественны.

**Пример 2.17.** Рассмотрим сужение $\mathfrak{t}_0$ формы $\mathfrak{t}$ из предыдущего примера с областью определения, состоящей из всех $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{t})$, таких, что $u(a) = u(b) = 0$. Можно показать, что форма $\mathfrak{t}_0$ замкнута, так же как это было сделано в случае формы $\mathfrak{t}$. Положим $T_0 = T_{\mathfrak{t}_0}$. Если $u \in \mathrm{D}(T_0)$ и $T_0 u = w$, то снова справедливо равенство (2.10), где $v(a) = v(b) = 0$. Такое же рассуждение, как и выше, приводит к выводу, что $w$ определяется равенством (2.15). Поэтому каждая функция $u \in \mathrm{D}(T_0)$ обладает свойством i) из предыдущего примера и

ii′) $u(x)$ удовлетворяет граничным условиям $u(a) = u(b) = 0$.

Эти условия также достаточны для того, чтобы функция $u \in \mathrm{L}^2$ принадлежала $\mathrm{D}(T_0)$; в этом случае $T_0 u$ определяется правой частью равенства (2.15). Доказательство опять следует из того, что $\mathfrak{t}_0[u, v] = (w, v)$, как показывает интегрирование по частям, для всех $v \in \mathrm{D}(t_0)$. Итак $T_0$ — дифференциальный оператор (2.15) с граничными условиями $u(a) = u(b) = 0$.

Заметим, что выполнение этих граничных условий требовалось уже в определении формы $\mathfrak{t}_0$. С другой стороны, граничные условия (2.14) для оператора $T$ из предыдущего примера налагались лишь на этот оператор, но не на форму $\mathfrak{t}$. В этом смысле условия (2.14) называются *естественными граничными условиями* [1]).

---

[1]) По аналогии с соответствующим понятием в вариационном исчислении.

**Задача 2.18.** Пусть $\dot{T}$ — минимальный оператор в $L^2(a, b)$, соответствующий *формальному* дифференциальному оператору (2.15). Все операторы $T$ из примера 2.16 с различными константами $h_a$, $h_b$ и $T_0$ из примера 2.17 суть $m$-секториальные продолжения оператора $\dot{T}$. Какой из этих операторов является расширением по Фридрихсу оператора $\dot{T}$ (ср. с примером 1.30)?

## 5. Дополнительные замечания

Самосопряженность является важным, но довольно тонким, а поэтому трудным для доказательства свойством. Установленное нами соответствие $\mathfrak{h} \to H = T_{\mathfrak{h}}$ приводит к удобному методу получения самосопряженных операторов, так как строить замкнутые формы сравнительно легко. Примеры из п. 4 показывают, что действительно таким путем можно получать различные виды самосопряженных операторов. Единственный недостаток этого метода состоит в том, что он позволяет строить не все, а лишь полуограниченные самосопряженные операторы. Однако если рассматривать несимметричные формы, то все $m$-секториальные операторы могут быть построены с помощью полуторалинейных форм.

Следующие соображения иллюстрируют, насколько удобен этот способ построения самосопряженных или $m$-секториальных операторов. Если формы $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$ замкнуты и секториальны, то по теореме 1.31 этими же свойствами обладает и их сумма $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2$. Если форма $\mathfrak{t}$ плотно определена, то определены ассоциированные с указанными формами $m$-секториальные операторы $T$, $T_1$, $T_2$. Оператор $T$ можно рассматривать как *сумму* операторов $T_1$, $T_2$ в некотором обобщенном смысле; мы будем записывать этот факт так:

$$T = T_1 \dotplus T_2. \tag{2.16}$$

Для любых двух самосопряженных ограниченных снизу операторов $T_1$, $T_2$ существуют ассоциированные с ними формы $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$; а обобщенную сумму этих операторов можно положить по определению равной $T_{\mathfrak{t}}$, если форма $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2$ плотно определена. Сформулированное условие является более слабым, чем требование, чтобы обычная сумма $S = T_1 + T_2$ была плотно определена, а оператор $S$ не обязан быть самосопряженным или существенно самосопряженным, даже если он плотно определен. В любом случае $T$ есть продолжение оператора $T_1 + T_2$, а потому и его единственное самосопряженное продолжение, если $T_1 + T_2$ — существенно самосопряженный оператор (в этом легко убедиться, применяя теорему 2.1, iii).

Этот результат можно распространить на случай, когда $T_1$ и $T_2$ $m$-секториальны; тогда существуют ассоциированные с ними замкнутые формы $\mathfrak{t}_1$ и $\mathfrak{t}_2$, а обобщенная сумма (2.16) определена, если множество $\mathrm{D}(\mathfrak{t}_1) \cap \mathrm{D}(\mathfrak{t}_2)$ плотно (см. замечание 2.8).

Если $T_1$ и $T_2$ — самосопряженные операторы, ограниченные снизу, и их сумма $T_1 + T_2$ плотно определена, то существует продолжение по Фридрихсу $T_F$ оператора $T_1 + T_2$ (см. п. 3). Однако, вообще говоря, $T_F$ отличен от оператора (2.16). Это показывает следующий пример.

**Пример 2.19.** Пусть $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ — формы (1.24) при различном выборе чисел $h_a$, $h_b$, которые предполагаются вещественными. Для простоты будем предполагать в дальнейшем, что $p(x) = 1$ и $q = r = s = 0$. Тогда $\mathfrak{t} = \frac{1}{2}(\mathfrak{t}_1 + \mathfrak{t}_2)$ есть форма такого же вида. Таким образом, все формы $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$ и $\mathfrak{t}$ симметричны; ассоциированные с ними операторы $T_1$, $T_2$ и $T$ самосопряжены и формально задаются как $-d^2/dx^2$ с граничными условиями вида (2.14) при $p = 1$, $s = 0$ и различными парами констант $h_a$, $h_b$. Поэтому оператор $S = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ имеет область определения $\mathrm{D}(S) = \mathrm{D}(T_1) \cap \mathrm{D}(T_2)$, состоящую из всех таких $u$, что $u'' \in \mathrm{L}^2$, $u(a) = u(b) = u'(a) = u'(b) = 0$. Замыкание формы $(Su, v)$, определенной на $\mathrm{D}(S)$, есть форма $\mathfrak{t}_0$ из примера 2.17 (см. также пример 1.30), так что $T_F$ является дифференциальным оператором $-d^2/dx^2$ с граничным условием $u(a) = u(b) = 0$ и не совпадает с $T$.

Другое преимущество рассмотрения симметричных форм, а не симметричных операторов состоит в том, что такие формы легко продолжить: за исключением ограниченных форм, определенных на $\mathrm{H}$, любая замкнутая симметричная форма, ограниченная снизу, допускает собственное замкнутое симметричное продолжение, ограниченное снизу; не существует такого объекта, как *максимальная* симметричная форма, тогда как максимальный симметричный оператор существует (самосопряженные операторы являются максимальными симметричными). Аналогичное замечание можно сделать и в более общем случае: для секториальных форм, с одной стороны, и $m$-секториальных операторов — с другой.

Возникает такой вопрос: какова связь между $m$-секториальными операторами $H_1$, $H_2$, соответствующими двум таким формам $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$, что $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2$? На этот вопрос не удается ответить прямо: не существует простой связи между областями определения этих операторов. Позже мы ответим на этот вопрос лишь частично.

Другой вопрос касается связи между самосопряженными операторами $H_1$ и $H_2$, ассоциированными с двумя симметричными формами $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$, такими, что $\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2$. Мы находим удобным определить отношение порядка $\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2$ для любых двух симметричных ограниченных снизу форм $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ следующим образом:

$$\mathrm{D}(\mathfrak{h}_1) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{h}_1) \quad \text{и} \quad \mathfrak{h}_1[u] \geqslant \mathfrak{h}_2[u] \quad \text{для} \quad u \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_1). \qquad (2.17)$$

Заметим, что, согласно этому определению, для симметричных и ограниченных снизу форм $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ из $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2$ следует $\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2$.

**Задача 2.20.** Если $\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2$, то $\tilde{\mathfrak{h}}_1 \geqslant \tilde{\mathfrak{h}}_2$.

Пусть $H_1$, $H_2$ — самосопряженные ограниченные снизу операторы, ассоциированные с замкнутыми симметричными ограниченными снизу формами $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$ соответственно. Будем писать $H_1 \geqslant H_2$, если $\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2$ в указанном выше смысле. Это понятие порядка совпадает с обычным в случае, когда $H_1$ и $H_2$ симметричны и принадлежат $\mathscr{B}$ (**H**).

**Теорема 2.21.** *Пусть $H_1$, $H_2$ — самосопряженные ограниченные снизу операторы с нижними гранями $\gamma_1$, $\gamma_2$ соответственно. Для того чтобы $H_1 \geqslant H_2$, необходимо, чтобы $\gamma_1 \geqslant \gamma_2$ и $R(\zeta, H_1) \leqslant R(\zeta, H_2)$ для всех вещественных $\zeta < \gamma_2$, и достаточно, чтобы $R(\zeta, H_1) \leqslant R(\zeta, H_2)$ для некоторого $\zeta < \min(\gamma_1, \gamma_2)$ (через $R$ обозначена резольвента).*

Доказательство. Сначала докажем необходимость. Пусть $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ — ассоциированные с операторами $H_1$, $H_2$ симметричные ограниченные снизу формы. По определению, отношения $H_1 \geqslant H_2$ и $\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2$ эквивалентны; следовательно, $\gamma_{\mathfrak{h}_1} \geqslant \gamma_{\mathfrak{h}_2}$. Поскольку $\gamma_1 = \gamma_{\mathfrak{h}_1}$, $\gamma_2 = \gamma_{\mathfrak{h}_2}$, согласно теореме 2.6, то $\gamma_1 \geqslant \gamma_2$. Таким образом, при $\zeta < \gamma_2$ существуют резольвенты $R(\zeta, H_1)$ и $R(\zeta, H_2)$. Заменим $\mathfrak{h}_1 - \zeta$, $\mathfrak{h}_2 - \zeta$, $H_1 - \zeta$, $H_2 - \zeta$ на $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, $H_1$, $H_2$ соответственно; достаточно показать, что из неравенств $H_1 \geqslant H_2 \geqslant \delta > 0$ следует $H_1^{-1} \leqslant H_2^{1-}$ [где $H_1^{-1}$, $H_2^{-1} \in \mathscr{B}$ (**H**)].

Для любого $u \in \mathbf{H}$ положим $v_1 = H_1^{-1}u$, $v_2 = H_2^{-1}u$. Тогда

$$(H_1^{-1}u, u)^2 = (v_1, H_2v_2)^2 = \mathfrak{h}_2[v_1, v_2]^2 \leqslant \mathfrak{h}_2[v_1]\, \mathfrak{h}_2[v_2] \leqslant$$

$$\leqslant \mathfrak{h}_1[v_1]\, \mathfrak{h}_2[v_2] = (H_1v_1, v_1)(H_2v_2, v_2) = (u, H_1^{-1}u)(u, H_2^{-1}u),$$

откуда получается требуемый результат: $(H_1^{-1}u, u) \leqslant (H_2^{-1}u, u)$. Заметим, что $v_1 \in \mathbf{D}(H_1) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{h}_1) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{h}_2)$ и что операторы $H_1$, $H_2$, $H_1^{-1}$, $H_2^{-1}$ симметричны и неотрицательны.

Докажем достаточность. Опять заменим $H_1 - \zeta$ на $H_1$ и т. д.; достаточно показать, что если оба оператора $H_1$ и $H_2$ имеют положительные нижние грани и $H_1^{-1} \leqslant H_2^{-1}$, то $H_1 \geqslant H_2$, т. е. $\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2$. С этой целью мы вначале применим первую часть теоремы к паре неотрицательных *ограниченных* операторов $S_1 = H_1^{-1}$, $S_2 = H_2^{-1}$; поскольку по предположению $S_1 \leqslant S_2$, получаем: $(S_1 + \alpha)^{-1} \geqslant (S_2 + \alpha)^{-1}$, $\alpha > 0$. Обозначая через $\mathfrak{h}_{1n}$, $\mathfrak{h}_{2n}$ формы, ассоциированные с ограниченными симметричными операторами $(S_1 + n^{-1})^{-1} = H_1(1 + n^{-1})H_1)^{-1}$ и $H_2(1 + n^{-1}H_2)^{-1}$, получаем, таким образом, что $\mathfrak{h}_{1n} \geqslant \mathfrak{h}_{2n}$.

С другой стороны, $\mathfrak{h}_{1n} \leqslant \mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_{2n} \leqslant \mathfrak{h}_2$. Действительно, пусть $u \in \mathrm{D}(H_1)$; тогда, согласно результату задачи V.3.32, $\mathfrak{h}_{1n}[u] = (H_1(1+n^{-1}H_1)^{-1}u, u) \leqslant (H_1u, u) = \mathfrak{h}_1[u]$. Этот вывод переносится на все $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_1)$, так как $\mathrm{D}(H_1)$ есть ядро формы $\mathfrak{h}_1$.

Пусть $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_1)$. Тогда, как доказано выше, $\mathfrak{h}_{2n}[u] \leqslant \mathfrak{h}_{1n}[u] \leqslant \mathfrak{h}_1[u]$, так что форма $\mathfrak{h}_{2n}[u]$ ограничена. Положим $u_n = (1+n^{-1}H_2)^{-1}u \in \mathrm{D}(H_2) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{h}_2)$. Тогда $\mathfrak{h}_{2n}[u] = (H_2(1+n^{-1}H_2)^{-1}u, u) = (H_2u_n, (1+n^{-1}H_2)u_n) = (H_2u_n, u_n) + n^{-1}\|H_2u_n\|^2 \geqslant (H_2u_n, u_n)$, так что форма $(H_2u_n, u_n) = \mathfrak{h}_2[u_n]$ ограничена сверху формой $\mathfrak{h}_1[u]$.

Поскольку $u_n \to u$, согласно результату задачи V.3.33, то мы заключаем, используя теорему 1.16, что $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_2)$ и $\mathfrak{h}_2[u] \leqslant \mathfrak{h}_1[u]$. Требуемый результат $\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2$ доказан [1]).

**Задача 2.22.** Пусть $K$ — симметричный ограниченный снизу оператор, и пусть $H$ — его продолжение по Фридрихсу. Тогда $H \geqslant H'$ для любого самосопряженного ограниченного снизу продолжения $H'$ оператора $K$.

## 6. Вторая теорема о представлении

Пусть $\mathfrak{h}$ — плотно определенная, замкнутая, ограниченная снизу, симметричная форма, и пусть $H = T_{\mathfrak{h}}$ — ассоциированный с ней самосопряженный оператор. Соотношение $\mathfrak{h}[u, v] = (Hu, v)$, связывающее форму $\mathfrak{h}$ с оператором $H$, неудовлетворительно в том отношении, что оно имеет смысл не для всех $u$, $v \in \mathrm{D}(\mathfrak{h})$, так как $\mathrm{D}(H)$, вообще говоря, есть собственное подмножество множества $\mathrm{D}(\mathfrak{h})$. Более полное представление формы $\mathfrak{h}$ дает следующая теорема.

**Теорема 2.23** (вторая теорема о представлении). *Пусть $\mathfrak{h}$ — плотно определенная замкнутая симметричная форма, $\mathfrak{h} \geqslant 0$, и пусть $H = T_{\mathfrak{h}}$ — ассоциированный с ней самосопряженный оператор. Тогда $\mathrm{D}(H^{1/2}) = \mathrm{D}(\mathfrak{h})$ и*

$$\mathfrak{h}[u, v] = (H^{1/2}u, H^{1/2}v), \quad u, v \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}). \tag{2.18}$$

*Подмножество $\mathrm{D}'$ множества $\mathrm{D}(\mathfrak{h})$ является ядром формы $\mathfrak{h}$ тогда и только тогда, когда оно является ядром оператора $H^{1/2}$.*

**Замечание 2.24.** Напомним, что оператор $H^{1/2}$ определен в п. V.3.11, так как неотрицательный самосопряженный оператор $H$ $m$-аккретивен. В теореме 2.23 существенно то, что $H^{1/2}$ самосопряжен, неотрицателен, $(H^{1/2})^2 = H$ и что $\mathrm{D}(H)$ есть ядро оператора $H^{1/2}$ (см. теорему V.3.35).

---

[1]) Приведенное доказательство теоремы 2.21 не является простым. Несколько более простое доказательство, использующее вторую теорему о представлении, дано в п. 6.

Доказательство теоремы 2.23. Определим симметричную форму $\mathfrak{h}'[u, v] = (H^{1/2}u, H^{1/2}u)$ с областью определения $\mathrm{D}(\mathfrak{h}') = \mathrm{D}(H^{1/2})$. Оператор $H^{1/2}$ плотно определен и замкнут (так как он самосопряжен), и потому такими же свойствами обладает форма $\mathfrak{h}'$ (см. пример 1.13). Поскольку множество $\mathrm{D}(H)$ есть ядро оператора $H^{1/2}$, оно также является ядром формы $\mathfrak{h}'$ (см. пример 1.23). С другой стороны, $\mathrm{D}(H)$ является ядром формы $\mathfrak{h}$, согласно теореме 2.1. Но на множестве $\mathrm{D}(H)$ формы $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ совпадают, так как

$$\mathfrak{h}[u, v] = (Hu, v) = (H^{1/2}u, H^{1/2}v), \quad u, v \in \mathrm{D}(H). \tag{2.19}$$

Итак, $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$ должны совпадать, поскольку они являются замыканиями одной и той же формы — сужения формы $\mathfrak{h}$ на множество $\mathrm{D}(H)$. Этим доказано равенство (2.18). Последнее утверждение теоремы следует из того, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}'$, и из результата примера 1.23.

**Задача 2.25.** Пусть $\mathfrak{h}$ — плотно определенная симметричная замкнутая форма с нижней гранью $\gamma$, и пусть $H = T_{\mathfrak{h}}$. Тогда для любого $\zeta \leqslant \gamma$

$$\mathrm{D}(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}((H-\zeta)^{1/2}), \quad \mathfrak{h}[u, v] = ((H-\zeta)^{1/2}u, (H-\zeta)^{1/2}v) + \zeta(u, v).$$

**Теорема 2.26.** *Пусть $\mathfrak{h}$ и $H$ такие же, как в теореме 2.23, и, кроме того, $\mathfrak{h}$ имеет положительную нижнюю грань. Подмножество $\mathrm{D}'$ множества $\mathrm{D}(\mathfrak{h})$ является ядром формы $\mathfrak{h}$ тогда и только тогда, когда $H^{1/2}\mathrm{D}'$ плотно в $H$.*

Доказательство. Эта теорема следует из теоремы 2.23 и результата задачи III.5.19 [заметим, что оператор $H^{1/2}$ имеет положительную нижнюю грань, как это видно из теоремы 2.23, так что обратный к нему принадлежит $\mathscr{B}(\mathrm{H})$].

**Следствие 2.27.** *Пусть $\mathfrak{h}$ — плотно определенная симметричная форма, $\mathfrak{h} \geqslant 0$, и пусть $H$ — самосопряженный оператор, ассоциированный с ее замыканием $\tilde{\mathfrak{h}}$. Тогда $\mathrm{D}(\mathfrak{h})$ является ядром оператора $H^{1/2}$. Если $\mathfrak{h}$ имеет положительную нижнюю грань, то множество $H^{1/2}\mathrm{D}(\mathfrak{h})$ плотно в $\mathrm{H}$.*

**Замечание 2.28.** В следствии 2.27 множество $\mathrm{D}(\mathfrak{h})$ не обязательно должно быть ядром оператора $H$, даже если оно является подмножеством множества $\mathrm{D}(H)$.

**Замечание 2.29.** Вторая теорема о представлении была доказана только для симметричных форм. Соответствующая теорема для несимметричных форм неизвестна. Естественное обобщение этой теоремы на несимметричные формы $\mathfrak{t}$ должно было бы выглядеть так: $\mathfrak{t}[u, v] = (T^{1/2}u, T^{*1/2}v)$, $\mathrm{D}(\mathfrak{t}) = \mathrm{D}(T^{1/2}) = \mathrm{D}(T^{*1/2})$, где $T = T_{\mathfrak{t}}$, но вопрос о том, верно ли это для замкнутой секториальной формы (с вершиной $\geqslant 0$) в общем случае, остается открытым, несмотря на то что операторы $T^{1/2}$, $T^{*1/2}$ определены корректно (п. V.3.11) [1].

В качестве применения второй теоремы о представлении дадим другое определение отношения порядка $H_1 \geqslant H_2$ для двух самосопряженных ограниченных снизу операторов. В предыдущем пункте мы ввели это отношение как отношение, эквивалентное отношению порядка $\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2$ для ассоциированных с этими операторами замкнутых форм $\mathfrak{h}_1$ и $\mathfrak{h}_2$, которое было определено следующим образом: $\mathrm{D}(\mathfrak{h}_1) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{h}_2)$ и $\mathfrak{h}_1[u] \geqslant \mathfrak{h}_2[u]$ для всех $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_1)$. Согласно теореме 2.23, это в свою очередь означает, что

$$\mathrm{D}(H_1^{1/2}) \subset \mathrm{D}(H_2^{1/2}) \quad \text{и} \quad \|H_1^{1/2}u\| \geqslant \|H_2^{1/2}u\| \quad \text{при} \quad u \in \mathrm{D}(H_1^{1/2}) \tag{2.20}$$

в предположении, что $H_1$ и $H_2$ неотрицательны (это не ограничивает общности, так как отношения $H_1 \geqslant H_2$ и $H_1 + \alpha \geqslant H_2 + \alpha$ эквивалентны). Если, кроме того, мы предположим, что $H_1$ имеет положительную нижнюю грань, так что $H_1^{-1/2} = (H_1^{1/2})^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, то соотношения (2.20) эквивалентны следующим соотношениям:

$$H_2^{1/2}H_1^{-1/2} \in \mathscr{B}(\mathrm{H}), \quad \|H_2^{1/2}H_1^{-1/2}\| \leqslant 1, \tag{2.21}$$

которые в рассматриваемом случае можно принять за определение отношения порядка $H_1 \geqslant H_2$.

Теперь можно дать более простое доказательство теоремы 2.21. Как отмечалось в приведенном выше доказательстве этой теоремы, основным его моментом является то, что отношения $H_1 \geqslant H_2$ и $H_1^{-1} \leqslant H_2^{-1}$ эквивалентны, если $H_1$ и $H_2$ имеют положительные нижние грани. Ввиду эквивалентности условия $H_1 \geqslant H_2$ и условия (2.21) остается лишь доказать следующую лемму.

**Лемма 2.30.** *Пусть $S$, $T$ — плотно определенные замкнутые операторы в* $\mathrm{H}$, *такие, что сопряженные к ним операторы $S^*$, $T^*$ обратимы. Если $\mathrm{D}(S) \supset \mathrm{D}(T)$ и $\|Su\| \leqslant \|Tu\|$ для всех $u \in \mathrm{D}(T)$, то $\mathrm{D}(T^{*-1}) \supset \mathrm{D}(S^{*-1})$ и $\|T^{*-1}u\| \leqslant \|S^{*-1}u\|$ для всех $u \in \mathrm{D}(S^{*-1})$.*

Доказательство. Пусть $u \in \mathrm{D}(S^{*-1}) = \mathrm{R}(S^*)$; $u = S^*g$ для некоторого $g \in \mathrm{D}(S^*)$. Для любого $v \in \mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(S)$ тогда имеет место равенство $(u, v) = (S^*g, v) = (g, Sv)$, так что $|(u, v)| \leqslant \|g\|\,\|Sv\| \leqslant \|g\|\,\|Tv\|$. Таким образом, из $Tv = 0$ следует, что $(u, v) = 0$, а из $Tv_1 = Tv_2$ следует, что $(u, v_1) = (u, v_2)$. Поэтому форму $(u, v)$ можно рассматривать как функ-

---

[1] По этому вопросу см. работы Лионса [1], Т. Като [16].

цию вектора $w = Tv$, полулинейную по $w$. Если $v$ пробегает множество $\mathbf{D}(T)$, то область изменения вектора $w$ есть плотное линейное подпространство $\mathbf{H}$, так как $\mathbf{R}(T)^{\perp} = \mathbf{N}(T^*) = 0$. Поскольку норма этой полулинейной формы не превосходит $\| g \|$, как это видно из приведенного выше неравенства, ее можно продолжить по непрерывности на все $w \in \mathbf{H}$. Тогда она может быть представлена в виде $(f, w)$ с однозначно определенным $f \in \mathbf{H}$, таким, что $\| f \| \leqslant \| g \|$. Таким образом, получаем $(u, v) = (f, w) = (f, Tv)$ для всех $v \in \mathbf{D}(T)$, откуда следует, что $f \in \mathbf{D}(T^*)$ и $u = T^*f$. Итак, $u \in \mathbf{R}(T^*) = \mathbf{D}(T^{*-1})$ и $\| T^{*-1}u \| = \| f \| \leqslant \| g \| = \| S^{*-1}u \|$, что мы и хотели показать.

**Пример 2.31.** Рассмотрим форму $\mathfrak{t}[u, v]$ из примеров 1.4, 1.14, 1.24 и 2.14. Предположим, что все $\alpha_j$ вещественны и неотрицательны, так что $\mathfrak{t}$ — симметричная и неотрицательная форма. Пусть $T = T_{\mathfrak{t}}$; оператор $\boldsymbol{T}$ описан в примере 2.14. Теперь легко видеть, что $T^{1/2}$ — максимальный диагонально-матричный оператор $(\alpha_j{}^{1/2})$. Аналогично для формы $\mathfrak{t}[u, v] = \int\limits_{E} f u \bar{v}\, dx$ из примеров 1.5, 1.15, 1.25 и 2.15 $T^{1/2}$ есть максимальный оператор умножения на $f(x)^{1/2}$ в предположении, что $f(x) \geqslant 0$, так что форма $\mathfrak{t}$ неотрицательна и симметрична.

**Замечание 2.32.** За исключением простых примеров, таких, как приведенные выше, оператор $T^{1/2}$ трудно описать в элементарных терминах даже в тех случаях, когда $T$ описать легко. В частности, это относится к дифференциальному оператору $T$ из примера 2.16. В этом смысле формула (2.18) имеет скорее теоретический, чем практический интерес. Однако, как мы увидим позже, некоторые результаты, имеющие практическое значение, легче вывести с помощью формулы (2.18), чем какими-нибудь другими методами.

## 7. Полярное разложение замкнутого оператора

Пусть $T$ — плотно определенный замкнутый оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathbf{H}$ в другое гильбертово пространство $\mathbf{H}'$. Рассмотрим симметричную форму $\mathfrak{h}[u, v] = (Tu, Tv)$. Как мы видели в примере 2.13, форма $\mathfrak{h}$ неотрицательна, замкнута и с ней ассоциирован самосопряженный оператор $T_{\mathfrak{h}} = H = T^*T$. Пусть $G = H^{1/2}$. По второй теореме о представлении

$$(Tu,\ Tv) = (Gu,\ Gv), \quad \| Tu \| = \| Gu \|, \quad u,\ v \in \mathbf{D}(T) = \mathbf{D}(G). \tag{2.22}$$

**Отсюда следует, что соответствие** $Gu \to Tu$ определяет изометрическое **отображение** $U$ **множества** $\mathbf{R}(G) \subset \mathbf{H}$ на множество $\mathbf{R}(T) \subset$

$\subset \mathbf{H}'$ : $Tu = UGu$. Оператор $U$ можно по непрерывности продолжить до изометрического оператора, отображающего $\overline{\mathbf{R}(G)}$ [замыкание множества $\mathbf{R}(G)$] на $\overline{\mathbf{R}(T)}$. Более того, $U$ можно продолжить до оператора из $\mathscr{B}(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$, который мы будем обозначать также через $U$, полагая $Uu = 0$ при $u \in \mathbf{R}(G)^{\perp} = \mathbf{N}(G)$. Так определенный оператор $U$ частично изометричен с исходным множеством $\overline{\mathbf{R}(G)}$ и финальным множеством $\overline{\mathbf{R}(T)}$ (см. п. V.2.2), причем

$$T = UG, \quad \mathrm{D}(T) = \mathrm{D}(G). \tag{2.23}$$

Формула (2.23) называется *полярным разложением* оператора $T$; здесь оператор $G$ неотрицателен и самосопряжен, а $U$ частично изометричен. Если, как и выше, потребовать, чтобы $U$ имел $\overline{\mathbf{R}(G)}$ в качестве исходного множества, то разложение (2.23) единственно. Действительно, из (2.23) легко видеть, что

$$T^* = GU^* \tag{2.24}$$

[откуда следует, что $\mathrm{D}(T^*)$ есть прообраз множества $\mathrm{D}(G)$ при отображении $U^*$]; поэтому $T^*T = GU^*UG = G^2$, так как $U^*Uu = u$ для всех $u$ из исходного множества оператора $U$. Таким образом, $G$ является неотрицательным квадратным корнем из оператора $T^*T$ и тем самым определен однозначно (см. п. V.3.11). Поэтому формула (2.23) определяет оператор $U$ на $\mathbf{R}(G)$, а значит, и всюду, так как по определению $U = 0$ на $\mathbf{R}(G)^{\perp}$.

По аналогии с комплексными числами оператор $G$ называется *абсолютной величиной* оператора $T$ и обозначается через $|T|$. Таким образом, оператор $|T|$ определен для любого плотно определенного замкнутого оператора из $\mathbf{H}$ в $\mathbf{H}'$ и является неотрицательным самосопряженным оператором в $\mathbf{H}$; разумеется, его не следует путать со скаляром $\|T\|$.

Аналогично $|T^*|$ есть неотрицательный самосопряженный оператор в $H'$; он связан с оператором $|T|$ следующим образом:

$$|T^*| = U\,|T|\,U^*. \tag{2.25}$$

Для того чтобы в этом убедиться, положим $G' = U\,|T|\,U^* = UGU^*$. Тогда $G'u = 0$ при $u \in \mathbf{R}(T)^{\perp}$, так как $U^*u = 0$ и $\mathbf{R}(G') \subset \mathbf{R}(U) = \overline{\mathbf{R}(T)}$. Таким образом, оператор $G'$ равен нулю на $\mathbf{R}(T)^{\perp}$, а на $\overline{\mathbf{R}(T)}$ он унитарно эквивалентен проекции на $\overline{\mathbf{R}(G)}$ оператора $G$. Следовательно, оператор $G'$ самосопряжен и неотрицателен. Но $G'^2 = UGU^*UGU^* = UGGU^* = TT^*$; поэтому $G'$ должен совпадать с $|T^*|$ в силу единственности квадратного корня.

Из (2.23), (2.24), (2.25) получаем следующие равенства:

$$\begin{gathered} T = U \mid T \mid = \mid T^* \mid U = UT^*U, \\ T^* = U^* \mid T^* \mid = \mid T \mid U^* = U^*TU^*, \\ \mid T \mid = U^*T = T^*U = U^* \mid T^* \mid U, \\ \mid T^* \mid = UT^* = TU^* = U \mid T \mid U^*. \end{gathered} \tag{2.26}$$

В частности, равенство $T^* = U^* \mid T^* \mid$ есть полярное разложение оператора $T^*$.

**Задача 2.33.** $\mathbf{N}(T) = \mathbf{N}(\mid T \mid)$; $\mathbf{R}(T) = \mathbf{R}(\mid T^* \mid)$.

**Пример 2.34.** Каноническое разложение компактного оператора $T \in \in \mathscr{B}(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$, обсуждавшееся в п. V.2.3, является частным случаем полярного разложения. Пусть $U\varphi_k = \varphi'_k$, $u = 1, 2, \ldots$, в формуле (V.2.23). Если система $\{\varphi_k\}$ не полна, то положим $Uu = 0$ для $u \perp \varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $\mid T \mid = \sum \alpha_k ( \, , \varphi_k) \varphi_k$ [см. (V.2.26)] и равенство (V.2.23) совпадает с равенством $T = U \mid T \mid$.

Рассмотрим теперь частный случай, когда оператор $T = H$ самосопряжен: $H^* = H$. Пусть $H = U \mid H \mid$ — его полярное разложение. Поскольку $H = H^* = U^* \mid H^* \mid = U^* \mid H \mid$ есть полярное разложение того же оператора, то $U^* = U$ в силу доказанной выше единственности. Более того, согласно результату задачи 2.33, исходное множество $\overline{\mathbf{R}(\mid H \mid)}$ оператора $U$ совпадает с его финальным множеством $\overline{\mathbf{R}(H)}$; обозначим это подпространство пространства $\mathbf{H}$ через $\mathbf{R}$. Имеем $U^2u = U^*Uu = u$ при $u \in \mathbf{R}$ и $Uu = 0$ при $u \in \mathbf{R}^\perp$. Любое $u \in \mathbf{R}$ может быть представлено в виде $u = u_+ + u_-$, где $Uu_+ = u_+$ и $Uu_- = -u_-$; для этого достаточно положить $u_\pm = (1 \pm U) u/2$. Более того, это разложение, как легко видеть, единственно. Пусть $\mathbf{M}_\pm$ — подпространства пространства $\mathbf{R}$, состоящие из всех таких $u$, что $Uu = \pm u$. Таким образом, имеет место разложение

$$\mathbf{H} = \mathbf{M}_+ \oplus \mathbf{M}_- \oplus \mathbf{M}_0, \quad \mathbf{M}_0 = \mathbf{R}^\perp, \tag{2.27}$$

где все три подпространства попарно ортогональны.

Из (2.66) следует также, что $UH = U^*H = \mid H \mid = \mid H^* \mid = = HU^* = HU$, т. е. $H$ и $U$ коммутируют. Аналогично, $\mid H \mid$ коммутирует с $U$. Поэтому из определения пространств $\mathbf{R}$, $\mathbf{M}_\pm$ следует, что $H$ и $\mid H \mid$ можно разложить в соответствии с разложением (2.27). При $u \in \mathbf{M}_0$ мы получим $Hu = \mid H \mid u = 0$, так как $\mathbf{M}_0 = \mathbf{R}(\mid H \mid)^\perp = \mathbf{N}(\mid H \mid) = \mathbf{N}(H)$ (см. задачу 2.33). При $u \in \mathbf{M}_+$ получим $Hu = HUu = \mid H \mid u$ и аналогично $Hu = = - \mid H \mid u$ при $u \in \mathbf{M}_-$. Поскольку оператор $\mid H \mid$ положителен в $\mathbf{R}$, его проекция на $\mathbf{M}_+$ положительна, а на $\mathbf{M}_-$ отрицательна. Таким образом, разложение (2.27) приводит к разложению оператора $H$ на положительную, отрицательную и нулевую части и к соответствующему разложению оператора $|H|$.

В частности, отсюда следует, что $H$ и $|H|$ коммутируют, поскольку это утверждение, очевидно, справедливо для проекции этих операторов на каждое из трех рассматриваемых подпространств. [Под этим мы подразумеваем, что резольвенты $R(\zeta, H)$ и $R(\zeta', |H|)$ коммутируют, так как коммутативность двух неограниченных операторов не была определена.]

**Задача 2.35.** Если оператор $H$ самосопряжен, то $\mathbf{D}(H) = \mathbf{D}(|H|)$ и при $u \in \mathbf{D}(H)$

$$\| Hu \| = \| \, |H| u \|, \quad |(Hu, u)| \leqslant (|H| u, u), \tag{2.28}$$

$$\| (H + \alpha) u \| \leqslant \| (|H| + |\alpha|) u \|,$$

$$(|H + \alpha| u, u) \leqslant ((|H| + |\alpha|)u, u)$$

[*Указание*: относительно последнего неравенства см. (V.4.15).]

**Задача 2.36.** Ортогональные проекторы на подпространства $\mathbf{M}_+$, $\mathbf{M}_-$ и $\mathbf{M}_0$ определяются формулами

$$P_+ = (U^2 + U)/2, \quad P_- = (U^2 - U)/2, \quad P_0 = 1 - U^2. \tag{2.29}$$

Лемма 2.37. *Если оператор $A \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$ коммутирует с оператором $H$, то он коммутирует с $|H|$ и $U$.*

Доказательство. Оператор $A$ коммутирует с резольвентой оператора $H$, а значит, и с резольвентой оператора $H^2$, поскольку $(H^2 - \zeta)^{-1} = (H - \zeta^{1/2})^{-1} (H + \zeta^{1/2})^{-1}$. Отсюда в силу теоремы V.3.35 следует, что $A$ коммутирует с $|H| = (H^2)^{1/2}$. Для того чтобы показать, что $A$ коммутирует с $U$, заметим, что $AU|H| = AH \subset HA$ и $UA|H| \subset U|H|A = HA$. Следовательно, $AUu = UAu$ при $u \in \mathbf{R}$. С другой стороны, если $u \in \mathbf{R}^{\perp} = \mathbf{M}_0 = \mathbf{N}(H)$, то $AUu = 0 = UAu$, так как из $Hu = 0$ следует $HAu = AHu = 0$. Поэтому $AU = UA$.

Лемма 2.38. *Разложение* (2.27) *пространства* $\mathbf{H}$ *на подпространства, в которых $H$ является положительным, отрицательным и нулевым оператором, единственно в следующем смысле. Пусть $H$ приводится подпространством $\mathbf{M}'$ и $(Hu, u) \geqslant 0$ $[(Hu, u) \leqslant 0]$ для всех $u \in \mathbf{M}' \cap \mathbf{D}(H)$. Тогда $\mathbf{M}'$ есть подпространство пространства $\mathbf{M}_+ \oplus \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_-^{\perp}$ $(\mathbf{M}_- \oplus \mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_+^{\perp})$.*

Доказательство. Пусть $P'$ — ортогональный проектор на $\mathbf{M}'$. Так как $\mathbf{M}'$ приводит $H$, то $P'$ коммутирует с $H$. Из леммы 2.37 и формул (2.29) следует, что $P'$ коммутирует с $U$ и $P_{\pm}$, $P_0$. Поэтому $P'P_- = P_-P'$ является проектором на $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}_-$. Но это — нулевое подпространство, так как из $u \in \mathbf{D}' \equiv \mathbf{D}(H) \cap \mathbf{M}' \cap \mathbf{M}_-$ следует, что $u = 0$ [в противном случае мы имеем противоречие: $(Hu, u) \geqslant 0$ и $(Hu, u) < 0$] и множество $\mathbf{D}'$ плотно в $\mathbf{M}' \cap \mathbf{M}_-$, поскольку последнее приводит $H$. Этим доказано, что $P'P_- = P_-P' = 0$, а значит, $\mathbf{M}' \subset \mathbf{M}_-^{\perp}$.

## § 3. Возмущение полуторалинейных форм и ассоциированных с ними операторов

### 1. Вещественная часть $m$-секториального оператора

В этом параграфе мы будем рассматривать возмущение $m$-секториального оператора $T$ при малом возмущении ассоциированной с ним формы $\mathfrak{t}$.

**Лемма 3.1.** *Пусть $\mathfrak{h}$ — плотно определенная симметричная неотрицательная замкнутая форма и $H = T_{\mathfrak{h}}$ — ассоциированный с ней неотрицательный самосопряженный оператор. Пусть форма $\mathfrak{a}$ является $\mathfrak{h}$-ограниченной, так что*

$$|\,\mathfrak{a}[u]\,| \leqslant b\mathfrak{h}[u], \quad u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}). \tag{3.1}$$

*Тогда существует оператор $C \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$ с нормой $\|C\| \leqslant \varepsilon b$ ($\varepsilon = 1$ или $2$ в зависимости от того, является ли симметричной форма $\mathfrak{a}$), такой, что*

$$\mathfrak{a}[u, v] = (CGu, Gv), \quad G = H^{1/2}; \quad u, v \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}) = \mathbf{D}(G). \tag{3.2}$$

Доказательство. Из (3.1) следует, что

$$|\,\mathfrak{a}[u, v]\,| \leqslant \varepsilon b\mathfrak{h}[u]^{1/2}\,\mathfrak{h}[v]^{1/2} = \varepsilon b\,\|Gu\|\,\|Gv\|; \tag{3.3}$$

чтобы убедиться в этом, нужно применить (1.15) к $\mathrm{Re}^{1/2}\,\mathfrak{a}$ и $\mathrm{Im}\,\mathfrak{a}$ и учесть тот факт, что $\mathfrak{h}[u] = \|Gu\|^2$ по второй теореме о представлении. Из (3.3) следует, что значение формы $\mathfrak{a}[u, v]$ определяется элементами $Gu$, $Gv$, так как $Gu = Gu'$, $Gv = Gv'$ влечет за собой $\mathfrak{a}[u', v'] - \mathfrak{a}[u, v] = \mathfrak{a}[u' - u, v] + \mathfrak{a}[u, v' - v] = 0$. Таким образом, $\mathfrak{a}[u, v]$ можно рассматривать как ограниченную полуторалинейную форму, зависящую от переменных $x = Gu$, $y = Gv$; эту форму можно продолжить на все $x$, $y$ из замыкания $\mathbf{M}$ области значений оператора $G$. Следовательно, существует ограниченный оператор $C$ из $\mathbf{M}$ в $\mathbf{M}$, такой, что $\mathbf{D}(C) = \mathbf{M}$, $\|C\| \leqslant \varepsilon b$ и $\mathfrak{a}[u, v] = (Cx, y)$. Для удобства оператор $C$ можно продолжить без увеличения нормы до оператора из $\mathscr{B}(\mathbf{H})$, полагая $Cx = 0$ при $x \in \mathbf{M}^{\perp}$.

В качестве применения этой леммы выведем соотношение, связывающее $m$-секториальный оператор $T$ с его *вещественной* частью $H$. Пусть $T$ — оператор, ассоциированный по теореме 2.7

с замкнутой плотно определенной секториальной формой $\mathfrak{t}$. Пусть $H = T_{\mathfrak{h}}$, где симметричная форма $\mathfrak{h} = \operatorname{Re} t$ также замкнута. По определению оператор $H$ является вещественной частью оператора $T$ (символически $H = \operatorname{Re} T$). Если $T$ ограничен, то, очевидно, $H = \frac{1}{2}(T + T^*)$, но в общем случае это неверно. Из теоремы 2.5 непосредственно следует, что $\operatorname{Re} T^* = \operatorname{Re} T$.

**Теорема 3.2.** *Пусть $T$ есть $m$-секториальный оператор с вершиной* 0 *и полууглом $\theta$. Тогда оператор $H = \operatorname{Re} T$ неотрицателен и существует симметричный оператор $B \in \mathscr{B}$* (H) *такой, что $\|B\| \leqslant \operatorname{tg} \theta$ и*

$$T = G(1 + iB)G, \quad G = H^{1/2}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $T = T_{\mathfrak{t}}$ и $\mathfrak{h} = \operatorname{Re} \mathfrak{t}$, $\mathfrak{k} = \operatorname{Im} \mathfrak{t}$. Так как по предположению $|\mathfrak{h}[u]| \leqslant (\operatorname{tg} \theta)\, \mathfrak{h}[u]$, то в силу леммы 3.1 $\mathfrak{k}[u, v] = (BGu, Gv)$, где B — симметричный оператор, $\|B\| \leqslant \operatorname{tg} \theta$. Следовательно,

$$\mathfrak{t}[u, v] = (\mathfrak{h} + i\mathfrak{k})[u, v] = ((1 + iB)Gu, Gv). \tag{3.5}$$

Пусть теперь $u \in \mathbf{D}(T)$. По определению оператора $T$ имеем $\mathfrak{t}[u, v] = (Tu, v)$ для всех $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t}) = \mathbf{D}(\mathfrak{h}) = \mathbf{D}(G)$. Сравнивая это равенство с (3.5) и учитывая, что оператор $G$ самосопряжен, мы видим, что вектор $G(1 + iB)Gu$ существует и равен вектору $Tu$. Это показывает, что $T \subset G(1 + iB)G$. Но легко видеть, что оператор $G(1 + iB)G$ аккретивен. Учитывая, что оператор $T$ $m$-аккретивен, мы должны знак включения заменить знаком равенства. Тем самым формула (3.4) доказана.

**Теорема 3.3.** *Пусть $T$ есть $m$-секториальный оператор, $H = \operatorname{Re} T$. Резольвента оператора $T$ компактна тогда и только тогда, когда компактна резольвента оператора $H$.*

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что оператор $T$ имеет положительную вершину, так что точка $\zeta = 0$ принадлежит резольвентному множеству операторов $T$ и $H$ [т. е. операторы $T^{-1}$ и $H^{-1}$ принадлежат $\mathscr{B}$ (H)]. Предположим, что $H$ имеет компактную резольвенту; тогда резольвента оператора $G = H^{1/2}$ также компактна (см. теорему V.3.49). Поскольку $T^{-1} = G^{-1}(1 + iB)^{-1}G^{-1}$ в силу (3.4), то $T^{-1}$ компактен, откуда следует компактность резольвенты оператора $T$. Доказательство обратного утверждения несколько сложнее. Известно, что $GT^{-\alpha} \in \mathscr{B}$ (H) при $1/2 < \alpha < 1$ [1] и что оператор $T^{-(1-\alpha)}$ компактен, если $T$ имеет компактную резольвенту [2]. Поэтому

---

[1] См. Т. Като [15], [16].

[2] См. теорему V.3.49 и замечание V.3.50.

оператор $GT^{-1} = GT^{-\alpha}T^{-(1-\alpha)}$, а значит, и оператор $G^{-1} = (1 + iB)\,GT^{-1}$ компактны. Таким образом, оператор $H^{-1} = G^{-2}$ компактен, и $H$ имеет компактную резольвенту.

## 2. Возмущение $m$-секториального оператора и его резольвенты

Пусть $\mathfrak{t}$ — плотно определенная замкнутая $m$-секториальная форма, и пусть $T = T_{\mathfrak{t}}$ — ассоциированный с ней $m$-секториальный оператор. Зададим такой вопрос: как изменяется $T$, если $\mathfrak{t}$ испытывает «малые» возмущения. Мы рассмотрим эту задачу в случае, когда возмущение формы $\mathfrak{t}$ *относительно ограничено*.

Напомним, что если форма $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{t}$-ограничена с $\mathfrak{t}$-гранью, меньшей чем 1, то форма $\mathfrak{t} + \mathfrak{a} = \mathfrak{f}$ также секториальна и замкнута (теорема 1.33). Прямое сравнение оператора $S = T_{\mathfrak{f}}$, ассоциированного с формой $\mathfrak{f}$, с невозмущенным оператором $T$ не является простой задачей, так как $S$ и $T$ не всегда имеют одинаковую область определения. Однако мы можем сравнить резольвенты $R(\zeta, S)$ и $R(\zeta, T)$ и оценить их разность через $\mathfrak{t}$-грань формы $\mathfrak{a}$.

Теорема 3.4. *Пусть $\mathfrak{t}$ — плотно определенная замкнутая секториальная форма, причем $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}\mathfrak{t} \geqslant 0$, и пусть $T = T_{\mathfrak{t}}$ — ассоциированный с ней m-секториальный оператор. Пусть форма $\mathfrak{a}$ является $\mathfrak{t}$-ограниченной:*

$$|\mathfrak{a}[u]| \leqslant a\,\|u\|^2 + b\mathfrak{h}[u], \quad u \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}) = \mathrm{D}(\mathfrak{t}) \subset \mathrm{D}(\mathfrak{a}), \tag{3.6}$$

*где $a$ и $b$ — неотрицательные числа и $b < 1$. Тогда форма $\mathfrak{f} = \mathfrak{t} + \mathfrak{a}$ также секториальна и замкнута. Пусть $S = T_{\mathfrak{f}}$ — ассоциированный с этой формой m-секториальный оператор. При $b < 1/2$ существуют резольвенты $R(\zeta, T)$ и $R(\zeta, S)$, причем*

$$\|R(\zeta, S) - R(\zeta, T)\| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} \dfrac{2a}{(-\operatorname{Re}\zeta - 2a)(-\operatorname{Re}\zeta)} & \textit{при} -\dfrac{a}{b} < \operatorname{Re}\zeta < -2a, \\[2ex] \dfrac{2b}{(1-2b)(-\operatorname{Re}\zeta)} & \textit{при} \quad \operatorname{Re}\zeta \leqslant -\dfrac{a}{b} \end{cases} \tag{3.7}$$

*(если $b = 0$, то вместо $a/b$ следует писать $\infty$). Если $T$ имеет компактную резольвенту, то и $S$ имеет компактную резольвенту.*

Доказательство. Замкнутость формы $\mathfrak{f}$ была доказана в теореме 1.33. Пусть $\rho$ — положительное число (которое будет определено позже), $\mathfrak{t} = \mathfrak{t} + \rho$, $\mathfrak{h}' = \operatorname{Re}\mathfrak{t}' = \mathfrak{h} + \rho$, и пусть $T' = T + \rho$, $H' = H + \rho \geqslant \rho > 0$ — операторы, ассоциированные с формами $\mathfrak{t}'$ и $\mathfrak{h}'$. В силу (3.5) справедливо равенство $\mathfrak{t}'[u, v] = ((1 + iB')\,G'u,\ G'v)$, где $G' = H'^{1/2}$ и $B'^{*} \in B' \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$. С другой стороны, (3.6) можно представить в виде

$$|\,\mathfrak{a}[u]\,| \leqslant k\mathfrak{h}'[u], \tag{3.8}$$

где $k = \max(b, a/\rho)$. Поэтому из леммы 3.1 следует, что $\mathfrak{a}[u, v] = (CG'u,\ G'v)$, $\|C\| \leqslant 2k$. Для формы $\mathfrak{f}' = \mathfrak{s} + \rho$ мы имеем выражение $\mathfrak{f}'[u, v] = (\mathfrak{t}' + \mathfrak{a})[u, v] = ((1 + iB' + C)\,G'u,\ G'v)$. Отсюда получим так же, как и при доказательстве формулы (3.4), что

$$S + \rho = S' = G'(1 + iB' + C)\,G', \quad \|C\| \leqslant 2k. \tag{3.9}$$

Таким образом, $S - \zeta = S' - \zeta' = G'(1 - \zeta' H'^{-1} + iB' + C)\,G'$, где $\zeta' = \zeta + \rho$, так что

$$R(\zeta, S) = R(\zeta', S') = G'^{-1}(1 - \zeta' H'^{-1} + iB' + C)^{-1}\,G'^{-1} \tag{3.10}$$

при условии, что средний сомножитель правой части существует и принадлежит $\mathscr{B}(\mathrm{H})$. Но оператор $(1 - \zeta' H'^{-1} + iB)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ существует и его норма $\leqslant 1$, если число $\rho$ выбрано так, что $\operatorname{Re}\zeta' = \operatorname{Re}\zeta + \rho \leqslant 0$, так как в этом случае числовая область значений оператора $1 - \zeta' H'^{-1} + iB' \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ лежит в полуплоскости $\operatorname{Re} z \geqslant 1$. Следовательно [см. (I.4.24)], указанный сомножитель существует и

$$\|(1 - \zeta' H'^{-1} + iB' + C)^{-1} - (1 - \zeta' H'^{-1} + iB)^{-1}\| \leqslant \leqslant 2k\,(1 - 2k)^{-1}, \tag{3.11}$$

если $2k < 1$. Поэтому из (3.10) и аналогичного выражения для $R(\zeta, T)$, которое получается из (3.10), если положить $C = 0$, следует неравенство

$$\|R(\zeta, S) - R(\zeta, T)\| \leqslant 2k\,(1 - 2k)^{-1}\,\rho^{-1}; \tag{3.12}$$

здесь мы также использовали тот факт, что $\|G'^{-1}\| \leqslant \rho^{-1/2}$. Если положить $\rho = -\operatorname{Re}\zeta$, то из (3.12) и определения (3.8) числа $k$ мы получим требуемое неравенство (3.7).

Если оператор $T$ имеет компактную резольвенту, то и резольвенты операторов $H$, $H'$, $G'$ компактны, согласно теоремам 3.3 и V.3.49. Поэтому оператор $G'^{-1}$, а значит, согласно (3.10), и оператор $R(\zeta, S)$ компактны.

**Замечание 3.5.** Теорема 3.4 показывает, что величина $\|R(\zeta, S) - R(\zeta, T)\|$ мала, если $a$ и $b$ достаточно малы. Из (3.7) это следует только при $\operatorname{Re}\zeta < 0$. Однако, согласно замечанию IV.3.13, это утверждение верно для любых $\zeta \in \mathrm{P}(T)$; используя

(IV.3.10), можно получить явную формулу, оценивающую разность $R(\zeta, S) - R(\zeta, T)$, хотя мы и не будем ее выписывать. Такая формула будет дана в следующем пункте для *симметричного* оператора $T$, так как в этом частном случае она особенно проста.

**Теорема 3.6.** *Пусть* $\mathfrak{t}$ — *плотно определенная, замыкаемая секториальная форма, и пусть* $\{\mathfrak{t}_n\}$ — *последовательность форм с* $\mathrm{D}(\mathfrak{t}_n) = \mathrm{D}(\mathfrak{t})$ *такая, что*

$$|(\mathfrak{t} - \mathfrak{t}_n)[u]| \leqslant a_n \|u\|^2 + b_n \mathfrak{h}[u], \quad u \in \mathrm{D}(\mathfrak{t}), \tag{3.13}$$

*где* $\mathfrak{h} = \operatorname{Re} \mathfrak{t}$ *и положительные числа* $a_n$, $b_n$ *стремятся к нулю при* $n \to \infty$. *Тогда при достаточно большом* $n$ *формы* $\mathfrak{t}_n$ *также секториальны и замыкаемы. Пусть* $\tilde{\mathfrak{t}}$, $\tilde{\mathfrak{t}}_n$ — *замыкания форм* $\mathfrak{t}$ *и* $\mathfrak{t}_n$ *соответственно, и пусть* $T$, $T_n$ — *ассоциированные с ними m-секториальные операторы. Тогда последовательность* $\{T_n\}$ *сходится к* $T$ *в обобщенном смысле (см. п.* IV.2.4). *Если* $T$ *имеет компактную резольвенту, то* $T_n$ *при достаточно большом* $n$ *также имеет компактную резольвенту.*

Доказательство. То, что формы $\mathfrak{t}_n$ секториальны и замыкаемы, следует из теоремы 1.33. Заметим также, что неравенство (3.13) справедливо, если $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_n$ заменить на $\tilde{\mathfrak{t}}$, $\tilde{\mathfrak{t}}_n$ соответственно.

Без ограничения общности мы можем предполагать, что $h \geqslant 0$ (в противном случае следует добавить к $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}_n$ одну и ту же константу). Предположим также, что $a_n = b_n$ (в противном случае достаточно заменить $a_n$ и $b_n$ числом $\max(a_n, b_n)$). Тогда из (3.7) следует, что $\|R(-1, T_n) - R(-1, T)\| \leqslant 2a_n(1 - 2a_n)^{-1} \to 0$, что доказывает сходимость $T_n$ к $T$ в обобщенном смысле. Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 3.4.

**Замечание 3.7.** Теорема 3.6 дает удобный критерий сходимости в обобщенном смысле последовательности операторов $T_n$ к оператору $T$. Полезно сравнить этот критерий с аналогичным критерием, относящимся к относительно ограниченным возмущениям оператора, который дает теорема IV.2.24.

**Замечание 3.8.** Все результаты, касающиеся сходимости последовательности операторов в обобщенном смысле, применимы к операторам $T_n$ из теоремы 3.6. Заметим, например, что спектр оператора $T$ не расширяется скачком и, в частности, любая конечная система собственных значений устойчива относительно замены $T$ на $T_n$ (см. п. IV.3.5).

## 3. Симметричные невозмущенные операторы

**Теорема 3.9.** *Пусть* $\mathfrak{h}$ *— плотно определенная замкнутая симметричная ограниченная снизу форма, и пусть форма* $\mathfrak{a}$ *(не обязательно симметричная)* $\mathfrak{h}$*-ограничена, так что* $\mathbf{D}(\mathfrak{a}) \supset \mathbf{D}(\mathfrak{h})$ *и*

$$|\mathfrak{a}[u]| \leqslant a\|u\|^2 + b\mathfrak{h}[u], \tag{3.14}$$

*где* $0 \leqslant b < 1$, *а число* $a$ *может быть положительным, отрицательным или равным нулю. Тогда форма* $\mathfrak{t} = \mathfrak{h} + \mathfrak{a}$ *секториальна и замкнута. Пусть* $H$, $S$ *— операторы, ассоциированные с* $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{t}$ *соответственно. Если* $\zeta \in \mathrm{P}(H)$ *и*

$$\varepsilon\,\|(a+bH)\,R(\zeta, H)\| \leqslant 1, \tag{3.15}$$

*то* $\zeta \in \mathrm{P}(S)$ *и*

$$\|R(\zeta, S) - R(\zeta, H)\| \leqslant \frac{4\varepsilon\,\|(a+bH)\,R(\zeta, H)\|}{(1-\varepsilon\,\|(a+bH)\,R(\zeta, H)\|)^2}\,\|R(\zeta, H)\|. \tag{3.16}$$

*Здесь* $\varepsilon = 1$ *или* $2$ *в зависимости от того, симметрична или нет форма* $\mathfrak{a}$.

Доказательство. Предположим сначала, что $b > 0$, и положим $\mathfrak{h}' = \mathfrak{h} + ab^{-1} + \delta$, $\mathfrak{t}' = \mathfrak{t} + ab^{-1} + \delta$, где число $\delta$ будет определено позже. Форма $\mathfrak{t}'$ так же, как и $\mathfrak{t}$, замкнута согласно теореме 1.33. С $\mathfrak{h}'$ и $\mathfrak{t}'$ ассоциированы операторы $H' = H + ab^{-1} + \delta$ и $S' = S + ab^{-1} + \delta$.

Согласно (3.14), $\mathfrak{h} + ab^{-1} \geqslant 0$, так что $\mathfrak{h}' \geqslant \delta$. Из (3.14) следует также, что $|\mathfrak{a}[u]| \leqslant b\mathfrak{h}'[u]$. Теперь мы можем применить рассуждение, использованное в доказательстве теоремы 3.4; заметим, что форма $\mathfrak{a}[u, v]$ может быть представлена в виде $(CG'u, G'u)$, где $\|C\| \leqslant \varepsilon b$, $\varepsilon = 1$ или $2$ в зависимости от того, симметрична или нет форма $\mathfrak{a}$ (см. лемму 3.1), $G' \geqslant \delta^{1/2}$ или $\|G'^{-1}\| \leqslant \delta^{-1/2}$. Таким образом, получаем

$$\|R(\zeta, S) - R(\zeta, H)\| \leqslant \varepsilon b M^2 (1 - \varepsilon b M)^{-1}\,\delta^{-1}, \tag{3.17}$$

если $\varepsilon b M < 1$, где $M = \|(1 - \zeta' H'^{-1})^{-1}\|$, $\zeta' = \zeta + ab^{-1} + \delta$ (заметим, что здесь $B' = 0$, так как оператор $T = H$ симметричен). Таким образом,

$$\begin{aligned} M = \|H'(H' - \zeta')^{-1}\| = \|(H + ab^{-1} + \delta)(H - \zeta)^{-1} \leqslant \\ \leqslant b^{-1}\,\|(a + bH)\,R(\zeta, H)\| + \delta\,\|R(\zeta, H)\|. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Требуемое неравенство (3.16) следует из (3.17), если учесть оценку (3.18) и положить $\delta = \alpha(1-\alpha)(1+\alpha)^{-1}\beta^{-1}$, где $\alpha = \varepsilon\,\|(a + bH)\,R(\zeta, H)\|$ и $\beta = \varepsilon b\,\|R(\zeta, H)\|$; заметим, что $1 - \varepsilon b M = (1-\alpha)(1+\alpha)^{-1} < 0$, если $\alpha < 1$.

Утверждение теоремы в случае $b = 0$ получается переходом к пределу при $b \to 0$.

**Замечание 3.10.** Условие (3.15) при $\zeta \in \mathrm{P}(S)$ вполне удовлетворительно, но оценка (3.16) не совсем точна, как это видно из рассмотрения частного случая $b = 0$. В этом случае, согласно (I.4.24), имеется более точная оценка с правой частью, равной $\varepsilon a \,\| R \|^2 (1 - \varepsilon a \,\| R \|)^{-1}$, где $R = R(\zeta, H)$, так как из $| \mathfrak{a}[u] | = | (\mathfrak{t} - \mathfrak{h})[u] | \leqslant a \,\| u \|^2$ следует $| \mathfrak{a}[u, v] | \leqslant \varepsilon a \,\| u \| \, \| v \|$, так что $\mathfrak{a}[u, v] = (Cu, v)$, $S = H + C$, где $\| C \| \leqslant \varepsilon a$. Значение теоремы 3.9 скорее всего объясняется тем, что $a$ может быть отрицательным. Можно было бы получить более удовлетворительный результат, если в оценке явно использовать тот факт, что $\gamma \geqslant 0$ является нижней гранью формы $a + bH$.

## 4. Псевдорасширения по Фридрихсу

Расширение по Фридрихсу рассматривалось нами для плотно определенных секториальных операторов, и потому оно тесно связано с секториальной ограниченностью. Теперь мы изучим расширение нового вида, аналогичное расширению по Фридрихсу, которое применимо не только к секториальным операторам; новое расширение симметричного оператора приводит к самосопряженному оператору [1].

**Теорема 3.11.** *Пусть $H$ — самосопряженный оператор, и пусть оператор $A$ таков, что* $\mathrm{D} = \mathrm{D}(A) \subset \mathrm{D}(H)$ *и*

$$| (Au, u) | \leqslant a \,\| u \|^2 + b \,(| H | \, u, u), \quad u \in \mathrm{D}(A), \tag{3.19}$$

*где $0 \leqslant b < 1$ или $0 \leqslant b < 1/2$ в зависимости от того, симметричен или нет оператор $A$. Если $\mathrm{D}(A)$ есть ядро оператора $| H |^{1/2}$, то существует единственное замкнутое расширение $T$ оператора $H + A$, такое, что $\mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(| H |^{1/2})$, $\mathrm{D}(T^*) \subset \mathrm{D}(| H |^{1/2})$ и $i\eta \in \mathrm{P}(T)$ для всех вещественных $\eta$ с достаточно большим модулем. Оператор $T$ самосопряжен, если $A$ симметричен. (Будем называть $T$ псевдорасширением по Фридрихсу, или псевдофридрихсовым расширением оператора $H + A$.)*

Доказательство. Напомним, что $| H | = (H^2)^{1/2}$ — самосопряженный оператор с областью определения $\mathrm{D}(| H |) = \mathrm{D}(H)$ и что этот оператор коммутирует с $H$ в смысле, указанном в п. 2.7 [2].

Мы можем предположить, не ограничивая общности, что $b > 0$. Положим $H' = | H | + ab^{-1} + \delta$, где $\delta > 0$. Из (3.19) следует,

---

[1] Результаты этого пункта не связаны существенным образом с полуторалинейными формами. Мы рассматриваем их здесь потому, что в доказательствах используется такая же техника, как и в предыдущих пунктах.

[2] Эта коммутативность существенна для доказательства; именно по этой причине мы должны предполагать, что оператор самосопряжен.

что $|(Au, u)| \leqslant b\,(H'u, u) = b\,\|G'u\|^2$, где $G' = H'^{1/2}$. Поскольку множество $\mathrm{D}(A)$ есть ядро оператора $|H|^{1/2}$, то оно является и ядром оператора $G'$, и из последнего неравенства следует, что форма $(Au, u)$ может быть продолжена до формы $\mathfrak{a}[u, v]$ с областью определения $\mathrm{D}(\mathfrak{a}) = \mathrm{D}(G')$, такой, что $|\mathfrak{a}[u, v]| \leqslant \varepsilon b\,(G'u, G'v)$, где $\varepsilon = 1$ или 2 в зависимости от того, симметрична или нет форма $\mathfrak{a}$ (см. предыдущий пункт). Отсюда получим (см. п. 1):

$$\mathfrak{a}[u, v] = (CG'u, G'v), \quad C \in \mathscr{B}(H), \quad \|C\| < \varepsilon b. \tag{3.20}$$

Потребуем теперь, чтобы оператор $T$, определенный формулой

$$T = G'\,(HH'^{-1} + C)\,G', \tag{3.21}$$

обладал свойствами, указанными в формулировке теоремы. Ясно, что $\mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(G') = \mathrm{D}(|H|^{1/2})$. Пусть $u \in \mathrm{D}(A)$; тогда вектор $G'HH'^{-1}G'u$ существует и равен $Hu$, так как $H' = G'^2$, а $G'^{-1}$ и $H$ коммутируют. Поскольку, кроме того, $(Au, v) = \mathfrak{a}[u, v] = (CG'u, G'v)$ для всех $v \in \mathrm{D}(A)$, где $\mathrm{D}(A)$ — ядро оператора $G'$, то вектор $G'CG'u$ существует и равен $Au$. Таким образом, вектор $Tu$ существует и равен $(H + A)\,u$, т. е. $T \supset H + A$.

Пусть $\zeta \in \mathrm{P}(H)$. Тогда $T - \zeta = G'\,[(H - \zeta)\,H'^{-1} + C]\,G'$, так как $1 \supset G'H'^{-1}G'$, так что

$$(T - \zeta)^{-1} = G'^{-1}\,[(H - \zeta)\,H'^{-1} + C]^{-1}G'^{-1} \tag{3.22}$$

при условии, что $(H - \zeta)\,H'^{-1} + C$ имеет обратный, принадлежащий $\mathscr{B}$ (H). Это верно, если норма оператора $C\,[(H - \zeta)\,H'^{-1}]^{-1} = CH'\,(H - \zeta)^{-1}$ меньше, чем 1 (ряд Неймана), или если

$$\|C\|\,\|(|H| + ab^{-1} + \delta)\,(H - \zeta)^{-1}\| < 1. \tag{3.23}$$

Вспоминая, что $\|C\| \leqslant \varepsilon b$, видим, что это условие выполнено, если

$$\varepsilon\,\|(a + b\,|H| + b\delta)\,(H - \zeta)^{-1}\| < 1. \tag{3.24}$$

Выбирая вещественное $\eta$ достаточно большим, мы можем добиться, чтобы величина $|a + b\delta|\,\|(H - i\eta)^{-1}\|$ была сколь угодно малой и выполнялось неравенство $\|\,|H|\,(H - i\eta)^{-1}\| = \|\,|H|\,(H - i\eta)^{-1}\| \leqslant 1$; поэтому $(T - i\eta)^{-1} \in \mathscr{B}$ (H) существует, если $\varepsilon b < 1$ и $|\eta|$ достаточно велико. Таким образом, оператор $T$ замкнут и множество $\mathrm{P}(T)$ непусто.

Если оператор $A$ симметричен, то $C$ и $T$ также симметричны, (заметим, что $HH'^{-1}$ — симметричный оператор). Следовательно оператор $T$ самосопряжен.

Из (3.22) следует, что $(T^* - \bar{\zeta})^{-1} = G'^{-1}\,[(H - \bar{\zeta})\,H'^{-1} + C^*]^{-1}\,G'^{-1}$; заметим, что $[(H - \bar{\zeta})\,H'^{-1} + C^*]^{-1}$, как и выше, существует в силу того, что $\| C^* \| = \| C \|$. Следовательно, $\mathrm{D}(T^*) = \mathrm{R}((T^* - \bar\zeta)^{-1}) \subset \mathrm{R}(G'^{-1}) = \mathrm{D}(G')$ и

$$T^* = G'(HH'^{-1} + C^*)G'. \tag{3.25}$$

В заключение докажем единственность оператора $T$. Предположим, что $T_1$ — замкнутое продолжение оператора $H + A$, обладающее свойствами, указанными в формулировке теоремы. Пусть $u \in \mathrm{D}(T^*)$, $v \in \mathrm{D}(A)$. Тогда $u \in \mathrm{D}(G')$ и $(T_1^* u, v) = (u, T_1 v) = (u, (H + A) v) = (u, Tv) = (u, G'(HH'^{-1} + C)G'v) = ((HH'^{-1} + C^*)G'u, G'v)$. Поскольку это верно для всех $v \in \mathrm{D}(A)$ и поскольку $\mathrm{D}(A)$ есть ядро оператора $G'$, вектор $T^*u = G'(HH'^{-1} + C^*)G'u$ существует и равен $T_1^* u$. Отсюда ясно, что $T_1^* \subset T^*$, а значит, $T_1 \supset T$ и $T_1 - \zeta \supset T - \zeta$. Число $\zeta = i\eta$ принадлежит при достаточно больших $|\eta|$ обоим множествам $\mathrm{P}(T)$ и $\mathrm{P}(T_1)$; поэтому $T_1 - \zeta = T - \zeta$, или $T_1 = T$.

Следствие 3.12. *Пусть оператор $H$ самосопряжен, и пусть операторы $A_n$, $n = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют условию (3.19) для оператора $A$ с константами $a_n$, $b_n$ вместо $a$, $b$, причем $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Предположим, что множество $\mathrm{D}(A_n) \subset \mathrm{D}(H)$ является ядром оператора $|H|^{1/2}$ при любом $n$. Тогда при достаточно больших $n$ существуют псевдопродолжения по Фридрихсу $T_n$ операторов $H + A_n$, причем $T_n \to H$ в обобщенном смысле.*

Доказательство. Прежде всего можно предположить, что $a_n = b_n > 0$. Мы можем использовать доказательство теоремы 3.11, полагая $\delta = 0$; тогда $H' = |H| + 1$. Неравенство (3.24) выполняется для любого $\zeta \in \mathrm{P}(H)$, если $a$ и $b$ заменены на $a_n$ и $b_n$ и $n$ достаточно велико. При таких $n$ существуют резольвенты $(T_n - \zeta)^{-1}$, которые образуют последовательность, сходящуюся по норме к $(H - \zeta)^{-1}$, поскольку

$$[(H - \zeta)H'^{-1} + C_n]^{-1} \to [(H - \zeta)H'^{-1}]^{-1}$$

в силу того, что $\| C_n \| \to 0$ (операторы $C_n$ определяются очевидным образом). Таким образом, $T_n \to H$ в обобщенном смысле (см. теорему IV.2.25).

Замечание 3.13. Поскольку $\mathrm{D}(|H|) = \mathrm{D}(H)$ и $|(Hu, u)| \leqslant (|H| u, u)$ согласно (2.28), то неравенство (3.19) выполняется, если

$$|(Au, u)| \leqslant a \| u \|^2 + b \,|(Hu, u)|, \quad u \in \mathrm{D}(A). \tag{3.26}$$

Задача 3.14. Пусть $H$ — самосопряженный, $A$ — симметричный операторы, и пусть $\mathrm{D}(A) = \mathrm{D}(H)$. Если оператор $A$ $H$-ограничен: $\| Au \|^2 \leqslant a^2 \| u \|^2 + b^2 \| Hu \|^2$, то он удовлетворяет условию (3.19). [*Указание*: учесть тот факт, что $\| Au \| \leqslant \| (a + b |H| u \|$, и использовать теорему V.4.12.]

## § 4. Квадратичные формы и оператор Шрёдингера

### 1. Обыкновенные дифференциальные операторы

Ранее мы уже встречались с простыми типами *регулярных* дифференциальных операторов (см. примеры 2.16, 2.17). Поэтому теперь мы рассмотрим *сингулярный* дифференциальный оператор вида [1])

$$L = -d^2/dx^2 + q(x), \quad 0 < x < \infty. \tag{4.1}$$

Предположим для простоты, что функция $q(x)$ вещественна, хотя это условие и не является необходимым. В дальнейшем мы будем также временно предполагать, что $q(x) \geqslant 0$ и что $q(x)$ — *локально интегрируемая* на $(0, \infty)$ функция.

Так же, как и в § V.5, нас будет главным образом интересовать построение по формальному дифференциальнму оператору $L$ самосопряженного оператора, действующего в пространстве $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0, \infty)$. Здесь следует заметить, что при довольно слабых ограничениях, которые мы налагаем на $q(x)$, нельзя определить «минимальный» оператор, такой, как оператор $\dot{T}$ из п. III.2.3 или п. V.5.1, так как при $u \in \mathbf{C}_0^\infty$ функция $Lu$ не всегда принадлежит $\mathbf{L}^2$ [поскольку от функции $q(x)$ не требуется, чтобы она локально принадлежала $\mathbf{L}^2$].

Вместо этого мы рассмотрим полуторалинейную форму

$$\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}', \tag{4.2}$$

где

$$\mathfrak{h}_0[u, v] = \int_0^\infty u'\overline{v}'\,dx = (u', v'); \quad u(0) = v(0) = 0, \tag{4.3}$$

$$\mathfrak{h}'[u, v] = \int_0^\infty q(x)\,u\overline{v}\,dx. \tag{4.4}$$

Определим $\mathbf{D}(\mathfrak{h}_0)$ как множество всех $u \in \mathbf{H}$, таких, что функция $u(x)$ абсолютно непрерывна, $u' \in \mathbf{H}$ и $u(0) = 0$. Как и выше (ср. с примером 1.36), форма $\mathfrak{h}_0$ симметрична, неотрицательна и замкнута. Область определения $\mathbf{D}(\mathfrak{h}')$ формы $\mathfrak{h}'$ есть множество всех $u \in \mathbf{H}$, таких, что $\int q(x)\,|u|^2\,dx < \infty$; форма $\mathfrak{h}'$ также симметрична, неотрицательна и замкнута (пример 1.15). Поэтому по теореме 1.31 форма $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}'$ симметрична, неотрицательна

---

[1] Мы выбрали полубесконечный интервал $(0, \infty)$, поскольку он более важен для приложений, чем интервал $(-\infty, \infty)$. Последний случай может быть рассмотрен аналогично.

и замкнута. Кроме того, форма $\mathfrak{h}$ плотно определена, так как $\mathbf{C}_0^\infty(0, \infty) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{h}) = \mathbf{D}(\mathfrak{h}_0) \cap \mathbf{D}(\mathfrak{h}')$.

Согласно теореме о представлении, существует неотрицательный самосопряженный оператор $H = T_{\mathfrak{h}}$, ассоциированный с $\mathfrak{h}$. Так же, как и в примере 2.16, оператор $H$ может быть описан следующим образом: *функции* $u \in \mathbf{D}(H)$ *характеризуются следующими условиями:* i) $u$, $u'$ *абсолютно непрерывны на* $(0, \infty)$ *и принадлежат* $\mathbf{H}$; ii) $u(0) = 0$; iii) $\int\limits_0^\infty q\,|u|^2\,dx < \infty$; iv) $Lu = -u'' + qu \in \mathbf{H}$; для таких функций $Hu = Lu$. При выводе этого результата нужно отметить следующие моменты. Для доказательства необходимости условий i—iv рассмотрим тождество, аналогичное тождеству (2.12), в котором $v \in \mathbf{C}_0^\infty$, граничные члены отсутствуют и в котором используется неопределенный интеграл $z$ от функции $w - qu$ (полагаем $r = s = 0$); заметим, что функция $w - q$ локально интегрируема, так как $w = Hu \in \mathbf{L}^2$, функция $u \in \mathbf{D}(H) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{h})$ непрерывна, а функция $q$ локально интегрируема. Для доказательства достаточности заметим, что если $u$ удовлетворяет условиям i—iv, то $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h})$ и для любого $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{h})$

$$\mathfrak{h}[u, v] = \lim_{a\to 0,\ b\to\infty} \int\limits_a^b u'\overline{v}'\,dx + \int\limits_a^b qu\overline{v}\,dx =$$

$$= -\lim_{a\to 0} u'(a)\,\overline{v(a)} + \lim_{b\to\infty} u'(b)\,\overline{v(b)} + \int\limits_0^\infty (-u'' + qu)\,\overline{v}\,dx. \qquad (4.5)$$

Если первые два члена в правой части равны нулю, то $\mathfrak{h}[u, v] = (-u'' + qu, v)$, и мы получаем по теореме 2.1, что $u \in \mathbf{D}(H)$, $Hu = -u'' + qu$. Далее, из (4.5) следует *существование* пределов $\lim u'(x)\,\overline{v(x)}$ при $x \to 0$ и $x \to \infty$. Отсюда $\lim\limits_{x\to\infty} u'(x)\,\overline{v(x)}$ должен равняться нулю, так как функция $u'\overline{v}(x)$ интегрируема на $(0, \infty)$, причем $u'$ и $v$ принадлежат $\mathbf{H}$. Таким же образом получим, что $\lim\limits_{x\to 0} u'\overline{v} = 0$ ввиду того факта, что функция $v/x$ интегрируема с квадратом в окрестности точки $x = 0$, тогда как функция $1/x$ неинтегрируема. Действительно, имеет место неравенство[1])

$$\int\limits_0^\infty x^{-2}\,|u(x)|^2\,dx \leqslant 4 \int\limits_0^\infty |u'(x)|^2\,dx = 4\mathfrak{h}_0[u], \quad u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}_0). \qquad (4.6)$$

---

[1]) Если $u \in \mathbf{C}_0^\infty$, то неравенство (4.6) можно доказать, интегрируя тождество $d(x^{-1}\,|u|^2)/dx = -x^{-2}\,|u|^2 + 2x^{-1}\operatorname{Re} u'\overline{u}$ и замечая, что

$\int x^{-2}\,|u|^2\,dx = 2\operatorname{Re}\int x^{-1}u'\overline{u}\,dx \leqslant (2\int x^{-2}\,|u|^2\,dx)^{1/2}\,(\int |u'|^2\,dx)^{1/2}$.

Для произвольного $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}_0)$ неравенство получается путем предельного перехода, так как $\mathbf{C}_0^\infty$ является ядром формы $\mathfrak{h}_0$.

**Замечание 4.1.** Функция $Hu = -u'' + qu$ принадлежит $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2$ при $u \in \mathbf{D}(H)$, но $u''$ и $qu$ в отдельности не обязательно принадлежат $\mathbf{L}^2$, *даже локально*. Однако они локально принадлежат $\mathbf{L}^1$ [1]).

Ослабим теперь сделанное выше предположение о том, что $q(x) \geqslant 0$. Предположим, что

$$q = q_1 + q_2 + q_3, \quad q_1(x) \geqslant 0, \tag{4.7}$$

где функция $q_1(x)$ *локально интегрируема*, функция $q_2(x)$ *локально равномерно интегрируема* (и не обязательно неотрицательна), а $q_3(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|q_3(x)| \leqslant \alpha/4x^2, \quad \alpha < 1. \tag{4.8}$$

Локально равномерная интегрируемость функции $q_2(x)$ означает следующее:

$$\int\limits_{a}^{a+1} |q_2(x)|\,dx \leqslant M < \infty, \quad a \geqslant 0, \tag{4.9}$$

где $M$ не зависит от $a$.

Введем формы $\mathfrak{h}'_j$, $j = 1, 2, 3$, с помощью замены $q$ на $q_j$ в (4.4). Форма $\mathfrak{h}'_2$ $\mathfrak{h}_0$-ограничена с $\mathfrak{h}_0$-гранью, равной 0. Для того чтобы в этом убедиться, используем неравенство

$$|u(x)|^2 \leqslant \varepsilon \int\limits_{x}^{x+1} |u'(y)|^2\,dy + \delta \int\limits_{x}^{x+1} |u(y)|^2\,dy, \tag{4.10}$$

которое следует из (IV.1.19) при $p = 2$; здесь $\varepsilon > 0$ может быть выбрано произвольно малым, если $\delta$ выбрано достаточно большим. Из (4.9) и (4.10) вытекает [полагаем $q_2(x) = 0$ при $x < 0$], что

$$\int\limits_{0}^{\infty} |q_2(x)|\,|u(x)|^2\,dx \leqslant \int\limits_{0}^{\infty} (\varepsilon\,|u'(y)|^2 + \delta\,|u(y)|^2)\,dy \int\limits_{y-1}^{y} |q_2(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant M\,(\varepsilon\mathfrak{h}_0[u] + \delta\,\|u\|^2). \tag{4.11}$$

С другой стороны, форма $\mathfrak{h}'_3$ $\mathfrak{h}_0$-ограничена с $\mathfrak{h}_0$-гранью $\alpha < 1$, как это ясно из (4.6) и (4.8). Следовательно, форма $\mathfrak{h}'_3$ также $(\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}'_2)$-ограничена с относительной гранью $\alpha$ (ср. с задачей IV.1.2, в которой имеется аналогичное утверждение об операторах). Поскольку форма $\mathfrak{h}_0$ замкнута, то $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}'_2$, а значит, и $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}'_2 + \mathfrak{h}'_3$ ограничены снизу и замкнуты (см. теорему 1.33).

---

[1]) Оператор $H$, конечно, плотно определен; хотя этот факт отнюдь не тривиален, он может быть без труда доказан, если использовать специальные свойства дифференциального оператора $L$.

Как и прежде, форма $\mathfrak{h}_1'$ неотрицательна и замкнута; поэтому по теореме 1.31 сумма $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_2' + \mathfrak{h}_3') + \mathfrak{h}_1' = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}'$ замкнута. Описание оператора $H = T_{\mathfrak{h}}$, ассоциированного с $\mathfrak{h}$, можно получить точно так же, как и выше. Таким образом, доказана

**Теорема 4.2.** *Пусть* $q(x) = q_1 + q_2 + q_3$, *где все* $q_j$ *вещественны, функция* $q_1$ *неотрицательна и локально интегрируема, функция* $q_2$ *локально равномерно интегрируема, а* $q_3$ *удовлетворяет неравенству* (4.8). *Пусть оператор* $H$ *определен формулой* $Hu = -u'' + q(x)\,u$, *причем* $\mathbf{D}(H)$ *состоит из всех таких* $u \in \mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0, \infty)$, *что* i) $u$, $u'$ *абсолютно непрерывны на* $(0, \infty)$ *и* $u' \in \mathbf{H}$; ii) $u(0) = 0$; iii) $q_1^{1/2}u \in \mathbf{H}$; iv) $-u'' + qu \in \mathbf{H}$. *Тогда оператор* $H$ *самосопряжен в* $\mathbf{H}$ *и ограничен снизу.*

**Замечание 4.3.** Отметим, что в формулировке теоремы 4.2 не имеется ссылок на теорию форм. Ее можно было бы доказать и не используя результатов этой теории, однако в этом случае доказательство стало бы сложнее.

**Замечание 4.4.** Можно показать, что $\mathbf{C}_0^\infty$ есть ядро формы $\mathfrak{h}$. Если это известно, то в (4.5) достаточно рассматривать только интегральные члены, так как можно ограничиться функциями $v$ из $\mathbf{C}_0^\infty$, и тогда дополнительные члены не возникают.

## 2. Форма Дирихле и оператор Лапласа

Рассмотрим *форму Дирихле*

$$\mathfrak{h}[u, v] = (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) = \int\limits_{\mathbf{R}^3} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_2} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_3} \right) dx \qquad (4.12)$$

в трехмерном пространстве $\mathbf{R}^3$. То, что размерность равна 3, не существенно; большинство из последующих результатов справедливо в случае $m$-мерного пространства. Мы рассматриваем $\mathfrak{h}$ как полуторалинейную форму, определенную в гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$. Будем временно предполагать, что $\mathbf{D}(\mathfrak{h})$ состоит из всех непрерывно дифференцируемых функций $u(x)$, таких, что $\mathfrak{h}[u] < \infty$. Очевидно, форма $\mathfrak{h}$ плотно определена, симметрична и неотрицательна.

Форма $\mathfrak{h}$ допускает замыкание. Это можно доказать разными способами. Например, (4.12) можно записать в виде $\mathfrak{h}[u, v] = (Tu, Tv)$, где $Tu = \operatorname{grad} u$ — линейный оператор из $\mathbf{H}$ в $\mathbf{H}' = (\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3))^3$ — пространство, состоящее из всех векторнозначных функций с тремя компонентами, каждая из которых принадлежит $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$. [Обозначение $(\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v)$ в (4.12) в точности соответствует этой интерпретации.] Оператор $T^*$, сопряженный к $T$, существует и формально задается равенством $T^*u' = -\operatorname{div} u'$. Действительно, равенство $(\operatorname{grad} u, u') = -(u, \operatorname{div} u')$ справедливо по крайней мере в том случае, когда векторнозначная функция $u'(x)$ непрерывно дифференцируема и имеет компактный носитель. Поскольку такие функции образуют плотное множество в $\mathbf{H}'$, оператор $T^*$ плотно определен и, следовательно, оператор $T$ допускает замыкание (см. п. V.3.1). Поэтому, согласно примеру 1.23, форма $\mathfrak{h}$ допускает замыкание.

Другой способ изучения формы $\mathfrak{h}$ состоит в введении фурье-образов $\hat{u}(k)$, $\hat{v}(k)$ функций $u(x)$, $v(x)$ (см. пример V.2.7). Тогда формулу (4.12) можно записать в виде

$$\mathfrak{h}[u, v] = \int |k|^2 \hat{u}(k) \overline{\hat{v}(k)}\, dk, \quad |k|^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2. \tag{4.13}$$

Формула (4.13) определяет замкнутую форму $\mathfrak{h}$, если область определения этой формы состоит из всех таких $u \in \mathbf{H}$, что интеграл $\int |k|^2 |\hat{u}(k)|^2 dk$ конечен (см. пример 1.15), так как отображение $u \to \hat{u}$ унитарно. Правда, данное ранее определение области $\mathbf{D}(\mathfrak{h})$ не столь широко, как это, но отсюда по крайней мере следует, что форма $\mathfrak{h}$ замыкаема. Более того, замкнутая форма, определенная с помощью преобразования Фурье, совпадает с замыканием первоначальной формы $\mathfrak{h}$; это можно доказать так же, как в п. V.5.2, где установлена существенная самосопряженность оператора Лапласа. В действительности мы могли сузить $\mathbf{D}(\mathfrak{h})$ до $C_0^\infty(R^3)$, не изменяя результат.

Отсюда непосредственно следует, что оператор $H = T_{\tilde{\mathfrak{h}}}$, ассоциированный с замыканием $\tilde{\mathfrak{h}}$ формы $\mathfrak{h}$, определяется следующим равенством (см. пример 2.15):

$$(Hu)\hat{}\,(k) = |k|^2 \hat{u}(k); \tag{4.14}$$

его область определения $\mathbf{D}(H)$ состоит из всех $u \in \mathbf{H}$, таких, что $|k|^2 \hat{u}(k) \in \mathbf{L}^2(R^3)$. Таким образом, $H$ совпадает с замыканием рассмотренного ранее оператора $-\Delta$ (см. п. V.5.2).

В частности, справедливо равенство

$$\mathfrak{h}[u, v] = (-\Delta u, v) \tag{4.15}$$

для любого $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{h})$, если, например, $u(x)$ имеет непрерывные вторые производные и $u$, $\Delta u \in \mathbf{H}$. Равенство (4.15) справедливо даже для всех $u \in \mathbf{D}(H)$ и $v \in \mathbf{D}(\tilde{\mathfrak{h}})$, если $\mathfrak{h}$ заменить на $\tilde{\mathfrak{h}}$, а дифференцирование в $\Delta u$ понимать в обобщенном смысле (ср. с замечанием V.5.2).

### 3. Оператор Шрёдингера в $\mathbf{R}^3$

Рассмотрим оператор Шрёдингера

$$L = -\Delta + q(x) \tag{4.16}$$

во всем пространстве $\mathbf{R}^3$ [см. (V.5.1)], причем функция $q(x)$ предполагается вещественной, хотя это и не является необходимым. По аналогии с одномерным случаем (п. 1) мы сначала предположим, что функция $q(x)$ *локально интегрируема* и неотрицательна. Наша цель состоит в том, чтобы построить по формальному оператору $L$ самосопряженный оператор, действующий в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$. Вновь заметим, что «минимальный» оператор, такой, как $\dot{S}$ из п. V.5.1, вообще говоря, не существует как оператор в $\mathbf{H}$, поскольку при $u \in \mathbf{C}_0^\infty$ функция $Lu$ не обязана принадлежать $\mathbf{H}$.

Вместо этого мы начнем с рассмотрения формы $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}'$, где $\mathfrak{h}_0$ — *замкнутая форма Дирихле* (замыкание формы $\mathfrak{h}$, которая рассматривалась в предыдущем пункте) и

$$\mathfrak{h}'[u, v] = \int_{\mathbf{R}^3} q(x)\, u(x)\, \overline{v(x)}\, dx, \tag{4.17}$$

причем $\mathbf{D}(\mathfrak{h}')$ — множество всех $u \in \mathbf{H}$, таких, что $\mathfrak{h}'[u] < \infty$. Согласно результату примера 1.15, форма $\mathfrak{h}'$ неотрицательна, симметрична и замкнута. По теореме 1.31 форма $\mathfrak{h}$ замкнута, как сумма двух замкнутых форм. Кроме того, она плотно определена, так как $\mathbf{C}_0^\infty \subset \mathbf{D}(\mathfrak{h})$ в силу предположения о локальной интегрируемости функции $q(x)$. Поэтому оператор $H = T_{\mathfrak{h}}$, ассоциированный с формой $\mathfrak{h}$, определен и является неотрицательным и самосопряженным.

Исследуем теперь связь между оператором $H$ и формальным дифференциальным оператором $L$. Предположим, что $u \in \mathbf{D}(H)$ и $v \in \mathbf{C}_0^\infty \subset \mathbf{D}(\mathfrak{h}) = \mathbf{D}(\mathfrak{h}_0) \cap \mathbf{D}(\mathfrak{h}')$. Тогда

$$(Hu, v) = \mathfrak{h}[u, v] = \mathfrak{h}_0[u, v] + \mathfrak{h}'[u, v] = (u, -\Delta v) + \int qu\bar{v}\, dx \tag{4.18}$$

в силу (2.1) и (4.15). Следовательно,

$$(u, -\Delta v) = \int (Hu - qu)\bar{v}\, dx. \tag{4.19}$$

Здесь функция $qu$ локально интегрируема, так как $2q\,|u| \leqslant q + q\,|u|^2$ и обе функции $q$ и $q\,|u|^2$ локально интегрируемы [заметим, что $u \in \mathbf{D}(H) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{h}')$]. Следовательно, функция $Hu - qu$ локально интегрируема, а из (4.19) следует, что

$$-\Delta u = Hu - qu, \quad \text{или} \quad Hu = -\Delta u + qu, \tag{4.20}$$

причем оператор $\Delta$ понимается в обобщенном смысле [1].

---

[1] Это в точности совпадает с определением оператора $-\Delta$ в обобщенном смысле; см. Иосида [1] [или Владимиров [12*], Тихонов и Самарский [43*].— *Ред.*].

В этом смысле $H$ есть дифференциальный оператор $L$ с надлежащим образом суженной областью определения. Однако трудно дать полное описание области определения оператора $H$ без дальнейших предположений[1]) относительно $q(x)$. Заметим, что мы показали лишь *необходимость* существования функции $\Delta u$ в обобщенном смысле для того, чтобы $u \in \mathbf{D}(H)$.

Для того чтобы ввести такие предположения, сформулируем следующую лемму, доказательство которой будет дано ниже.

**Лемма 4.5.** *Пространство* $\mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^3)$ *является ядром формы* $\mathfrak{h}$, *если* $q(x) \geqslant 0$ *и если при некотором* $\rho > 0$ *функция*

$$M_q(x) = \int\limits_{|y-x| \leqslant 1} |x-y|^{-1-\rho}\, |q(y)|\, dy \tag{4.21}$$

*локально ограничена.*

В предположениях этой леммы мы можем доказать, что функция $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h})$ принадлежит $\mathbf{D}(H)$, если $\Delta u$ существует в обобщенном смысле и $Lu = -\Delta u + qu \in \mathbf{H}$. Действительно, для любого $v \in \mathrm{C}_0^\infty$

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}[u, v] &= \mathfrak{h}_0[u, v] + \mathfrak{h}'[u, v] = (u, -\Delta v) + \int qu\bar{v}\, dx = \\ &= -\int \Delta u \bar{v}\, dx + \int qu\bar{v}\, dx = \text{[в силу (4.15)] (поскольку } \Delta u \text{ существует в обобщенном смысле)} \\ &= (Lu, v). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Так как $Lu \in \mathbf{H}$ и формула (4.22) справедлива для всех $v \in \mathrm{C}_0^\infty$, причем $\mathrm{C}_0^\infty$ есть ядро формы $\mathfrak{h}$, согласно лемме 4.5, то из теоремы 2.1 следует, что $u \in \mathbf{D}(H)$ и $Hu = Lu$.

Эти результаты можно теперь распространить на тот случай, когда функция $q(x)$ не обязательно неотрицательна. Предположим, что

$$q = q_1 + q_2 + q_3, \tag{4.23}$$

где $q_1(x) \geqslant 0$, а функции $q_2$ и $q_3$ не предполагаются знакоопределенными. Предположим, что функция $M_{q_1}(x)$ локально ограничена, а функция $M_{q_2}(x)$ ограничена во всем пространстве $\mathrm{R}^3$. Относительно функции $q_3$ мы будем предполагать, что она является суммой конечного числа слагаемых вида $e_j\, |x - a_j|^{-2}$, где сумма всех $|e_j|$ для *отрицательных* $e_j$ (если такие есть) должна быть меньше чем $1/4$.

**Теорема 4.6.** *Пусть $H$ — оператор в* $\mathrm{H}$, *определенный следующим образом*: $\mathbf{D}(H)$ *есть множество всех таких* $u \in \mathrm{H}$, *что* i) *обобщенная производная* $\operatorname{grad} u$ *принадлежит* $\mathbf{H}' = \mathrm{H}^3$;

---

[1]) Заметим, что в одномерном случае (п. 1) не требовалось никаких дополнительных предположений.

ii) $\int q_1(x)\,|\,u(x)\,|^2\,dx < \infty$; iii) $\Delta u$ *существует в обобщенном смысле и* $Lu = -\Delta u + qu$ *принадлежит* $\mathbf{H}$; *при* $u \in \mathbf{D}(H)$ *по определению* $Hu = Lu$. *Если функция* $q$ *удовлетворяет сформулированным выше условиям, то оператор* $H$ *самосопряжен и ограничен снизу.*

Доказательство. Определим $H$ как оператор, ассоциированный с замкнутой симметричной формой $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}' = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1' + \mathfrak{h}_2' + \mathfrak{h}_{3+}' + \mathfrak{h}_{3-}'$, где форма $\mathfrak{h}_0$ та же, что и выше (форма Дирихле), а $\mathfrak{h}_j'$ определяются формулой (4.17) с заменой $q$ на $q_j$, $j = 1, 2, 3$ (формы $\mathfrak{h}_{3\pm}'$ определяются положительной и отрицательной частями функции $q_3$). Как показано выше, формы $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{h}_1'$ и $\mathfrak{h}_{3+}'$ неотрицательны и замкнуты. Основным моментом в доказательстве замкнутости формы $\mathfrak{h}$ является то, что формы $\mathfrak{h}_2'$ и $\mathfrak{h}_{3-}'$ $\mathfrak{h}_0$-ограничены с $\mathfrak{h}_0$-гранями 0 и $b < 1$ соответственно. Отсюда вытекает замкнутость формы $\mathfrak{h}$ так же, как и в доказательстве теоремы 4.2. Относительная ограниченность формы $\mathfrak{h}_2'$ может быть доказана с помощью неравенства (4.28), которое будет выведено ниже; так как $M_{q_2}(x) \leqslant \mathrm{const}$ по предположению, то из (4.28) следует неравенство $|\,\mathfrak{h}_2'[u]\,| \leqslant \mathrm{const}\,(R^{\rho}\mathfrak{h}_0[u] + R^{\rho-2}\,\|\,u\,\|^2)$, где число $R$ может быть выбрано сколь угодно малым. Относительная ограниченность формы $\mathfrak{h}_3'$ следует из неравенства

$$\int |\,x - a\,|^{-2}\,|\,u(x)\,|^2\,dx \leqslant 4\int |\,\mathrm{grad}\,u(x)\,|^2\,dx = 4\mathfrak{h}_0[u], \qquad (4.24)$$

которое можно доказать так же, как (4.6) (используя полярные координаты с центром в точке $a$). Нам также потребуется тот факт, что $C_0^\infty$ есть ядро формы $\mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}_1' + \mathfrak{h}_{3+}'$, при этом мы можем поступить со слагаемым $\mathfrak{h}_{3+}'$ точно так же, как и с $\mathfrak{h}_1'$, используя вместо неравенства (4.28) неравенство (4.24). Детали доказательства предоставляется восполнить читателю.

**Замечание 4.7.** На $q_1(x)$ в теореме 4.6 налагается только локальное условие, а именно требование локальной ограниченности функции $M_{q_1}(x)$; единственное условие при $|\,x\,| \to \infty$ состоит в том, чтобы $q_1(x) \geqslant 0$.

**Замечание 4.8.** Теорема 4.6 может быть перенесена без существенных изменений на случай оператора Шрёдингера в $\mathrm{R}^m$ при $m > 3$. Для этого надо лишь показатель степени $-1-\rho$ в определении (4.21) функции $M_q(x)$ заменить на $2-m-\rho$, а оценку 1/4 суммы $\sum |\,e_j\,|$ для отрицательных $e_j$ в формуле для $q_3(x)$ заменить на $(m-2)^2/4$. Теперь понятно, почему в одномерном случае (п. 1) такое условие, как в формулировке леммы 4.5, было ненужным.

**Задача 4.9.** Условие леммы 4.5 выполняется, если $q(x)$ локально принадлежит $\mathbf{L}^p$ при $p > 3/2$ и, в частности, локально принадлежит $\mathbf{L}^2$.

Доказательство леммы 4.5. Пусть $j(x)$ — функция из $\mathbf{C}_0^\infty$, такая, что $0 \leqslant j(x) \leqslant 1$, $j(x) = 0$ при $|x| \geqslant 1$, $j(x) = 1$ в некоторой окрестности нуля и $\int j(x)\,dx = 1$. Положим $j_n(x) = j(x/n)$; $j_n(x) = 0$ при $|x| \geqslant n$ и $j_n(x) = 1$ в окрестности точки $x = 0$, которая бесконечно увеличивается с ростом $n$.

Пусть $u \in \mathbf{H}$; положим $u_n(x) = j_n(x)\,u(x)$; тогда $u_n(x) = 0$ при $|x| \geqslant n$ и $u_n(x) \to u(x)$, $n \to \infty$, при фиксированном $x$. Поскольку $|u_n(x)| \leqslant |u(x)|$, то $u_n \xrightarrow[\mathrm{s}]{} u$ в $\mathbf{H}$. Если $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}_0)$, то $\operatorname{grad} u_n = j_n \operatorname{grad} u + u \operatorname{grad} j_n$. Но $\operatorname{grad} j_n(x) = n^{-1}(\operatorname{grad} j)(x/n) \to 0$ равномерно. Следовательно, $\operatorname{grad} u_n \xrightarrow[\mathrm{s}]{} \operatorname{grad} u$ в $\mathbf{H}'$, так что $u_n \xrightarrow[\mathfrak{h}_0]{} u$. Если $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}')$, то $q(x)\,|u_n(x) - u(x)|^2 \to 0$ при каждом $x$ и $q(x)\,|u_n(x) - u(x)|^2 \leqslant q(x)\,|u(x)|^2 \in \mathbf{L}^1(\mathrm{R}^3)$, так что $u_n \xrightarrow[\mathfrak{h}']{} u$. Значит, $u_n \xrightarrow[\mathfrak{h}]{} u$, если $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}) = \mathbf{D}(\mathfrak{h}_0) \cap \mathbf{D}(\mathfrak{h}')$. Отсюда следует, что множество функций вида $u_n$ образует ядро формы $\mathfrak{h}$.

Для того чтобы доказать лемму 4.5, мы должны «сгладить» функции $u_n$ так, чтобы они стали бесконечно дифференцируемыми. С этой целью мы используем интегральные операторы $J_{1/m}$ с ядрами $mj_{1/m}(y - x) = mj(m(y - x))$. Эти ядра неотрицательны, и интегралы от них по $x$, так же как и по $y$, равны единице; поэтому операторы $J_{1/m}$ ограничены в любом из банаховых пространств $\mathbf{L}^p(\mathrm{R}^3)$ или $\mathbf{C}(\mathrm{R}^3)$ (см. пример III.2.11). Мы утверждаем, что

$$J_{1/m}u \xrightarrow[\mathrm{s}]{} u, \quad m \to \infty, \quad u \in \mathbf{H}. \tag{4.25}$$

Поскольку операторы $J_{1/m}$ равномерно ограничены, достаточно это доказать для всех $u$ из плотного подмножества пространства $\mathbf{H}$, например для всех $u \in \mathbf{C}_0^\infty$. Но это легко сделать ввиду того, что ядра $mj_{1/m}(y - x)$ равны нулю вне малого шара $|x - y| < 1/m$, и интегралы от них по $x$ равны единице.

Если $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}_0)$, то $\operatorname{grad} J_{1/m}u(y) = \int m^2 (\operatorname{grad} j)(m(y - x))\,u(x)\,dx = \int mj(m(y - x)) \operatorname{grad} u(x)\,dx = J_{1/m}(\operatorname{grad} u) \xrightarrow[\mathrm{s}]{} \operatorname{grad} u$ (в $\mathbf{H}'$), $m \to \infty$. Следовательно,

$$J_{1/m}u \xrightarrow[\mathfrak{h}_0]{} u, \quad m \to \infty, \quad \text{если } u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}_0). \tag{4.26}$$

Теперь докажем, что

$$J_{1/m}u \xrightarrow[\mathfrak{h}']{} u, \quad m \to \infty, \quad \text{при} \quad u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}); \tag{4.27}$$

для этого нам потребуются предположения леммы. Начнем с неравенства

$$\int |q(x)|\,|v(x)|^2\,dx \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2\pi\rho} \iint\limits_{x - y| \leqslant R} (R^\rho\,|\operatorname{grad} v(y)|^2 + R^{\rho - 2}\,|v(y)|^2)\,|y - x|^{-1-\rho}\,|q(x)|\,dx\,dy, \tag{4.28}$$

которое выполняется для любых $R > 0$ и $v \in \mathbf{C}^1(\mathrm{R}^3)$. Доказательство этого неравенства будет дано ниже. Предположим, что $u(x) \in \mathbf{D}(\mathfrak{h})$, и положим $u_{mn} = J_{1/m}u_n$, $u_n(x) = j_n(x)\,u(x)$. Тогда $u_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{h})$, как показано выше, и $u_n(x) = 0$ при $|x| \geqslant n$, а значит, $u_{mn} \in \mathbf{C}_0^\infty$, причем $u_{mn}(x) = 0$ при $|x| \geqslant n + 1$, если $m \geqslant 1$. Положим теперь $R = 1$ в (4.28) и подставим

$u_{mn} - u_{m'n}$ вместо $v$. Поскольку $v(y) = 0$ при $|y| \geqslant n+1$, то интеграл в (4.28) можно брать по области $|x-y| \leqslant R$, $|y| \leqslant n+1$. Интегрируя сначала по $x$ и учитывая, что при $|y| \leqslant n+1$ значения $M_q(y)$ ограничены, получаем оценку $\mathfrak{h}'[u_{mn} - u_{m'n}] \leqslant \text{const}\,(\mathfrak{h}_0[u_{mn} - u_{m'n}] + \| u_{mn} - u_{m'n} \|^2) \to 0$, $m, m' \to \infty$, так как $u_{mn} \xrightarrow[\mathfrak{h}]{} u_n$, $m \to \infty$, в силу (4.26). Форма $\mathfrak{h}'$ замкнута; поэтому $u_n \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}')$ и $\mathfrak{h}'[u_n - u_{mn}] \to 0$, $m \to \infty$.

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать столь большое $n$, что $(\mathfrak{h}+1)[u - u_n] < \varepsilon$, а затем выбрать такое $m$, чтобы выполнялось неравенство $(\mathfrak{h}+1)[u_n - u_{mn}] < \varepsilon$; тогда $(\mathfrak{h}+1)[u - u_{mn}] < 4\varepsilon$. Поскольку $u_{mn} \in C_0^\infty$, отсюда следует, что $C_0^\infty$ есть ядро формы $\mathfrak{h}$.

Доказательство неравенства (4.28). Начнем с неравенства

$$|v(0)| \leqslant \int_0^R |v_r|\,dr + R^{-1} \int_0^R |v|\,dr, \tag{4.29}$$

где $r = |x|$, $v_r = \partial v/\partial r$, а интеграл берется по любому фиксированному лучу, выходящему из начала координат; это неравенство непосредственно следует из (IV.1.20). Поскольку направление луча произвольно, мы можем усреднить (4.29) по всем направлениям; в результате получим

$$|v(0)| \leqslant \frac{1}{4\pi} \int\limits_{r \leqslant R} |v_r|\, r^{-2}\, dx + \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{r \leqslant R} |v|\, r^{-2}\, dx. \tag{4.30}$$

Поскольку в качестве начала координат можно выбрать любую точку, то

$$|v(y)| \leqslant \frac{1}{4\pi} \int\limits_{r \leqslant R} r^{-2}\, |\operatorname{grad} v(x)|\, dx + \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{r \leqslant R} r^{-2}\, |v(x)|\, dx, \quad r = |y - x|. \tag{4.31}$$

Вообще, рассмотрим выражение

$$g(y) = \int\limits_{r \leqslant R} r^{-2} f(x)\, dx, \quad f(x) \geqslant 0. \tag{4.32}$$

Для любой функции $q(x) \geqslant 0$ мы покажем, что

$$\int q(y)\, g(y)^2\, dy \leqslant \frac{4\pi}{\rho} R^\rho \iint\limits_{r \leqslant R} r^{-1-\rho}\, |f(x)|^2\, q(y)\, dx\, dy. \tag{4.33}$$

Тогда, применяя это неравенство к каждому из двух слагаемых в правой части (4.31) и полагая при этом $f(x) = (4\pi)^{-1}\,|\operatorname{grad} \bar{v}(x)|$ и $f(x) = (4\pi R)^{-1}\,|v(x)|$ соответственно, мы получим (4.28). Из (4.32) в силу неравенства Шварца следует, что

$$g(y)^2 \leqslant \int\limits_{r \leqslant R} r^{\rho - 3}\, dx \int\limits_{r \leqslant R} r^{-1-\rho} f(x)^2\, dx \leqslant 4\pi\rho^{-1} R^\rho \int\limits_{r \leqslant R} r^{-1-\rho} f(x)^2\, dx, \tag{4.34}$$

откуда сразу же получается неравенство (4.33).

## 4. Ограниченные области

Если область E пространства $R^3$ или $R^m$, в которой рассматривается дифференциальный оператор (4.16), ограничена, то могут возникнуть некоторые трудности, связанные с возможностью наложения различных граничных условий. Для того чтобы упростить ситуацию, предположим, что область

Е открыта, имеет гладкую границу $\partial$E, и что $q(x)$ является гладкой функцией в замкнутой области $\bar{\text{E}}$. Тогда так же, как и в п. V.5.1, может быть определен минимальный оператор $\dot{S}$ в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\text{E})$, и может показаться, что для построения самосопряженных операторов по оператору $L$ не нужно привлекать теорию форм. Тем не менее использование формы $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0 + \mathfrak{h}'$, аналогичной той, которая рассматривалась в предыдущем пункте (интегрирование в этом случае должно проводиться по $\bar{\text{E}}$), является удобным способом получения различных самосопряженных продолжений оператора $\dot{S}$.

Предположим сначала, что $\mathbf{D}(\mathfrak{h}) = \mathbf{C}_0^\infty(\text{E})$ (множество бесконечно дифференцируемых функций на Е с компактными носителями); как и выше, можно показать, что форма $\mathfrak{h}$ плотно определена, симметрична, ограничена снизу и замыкаема. Обозначим эту форму через $\mathfrak{h}_1$ и положим $H_1 = T_{\tilde{\mathfrak{h}}_1}$. Теперь мы расширим область определения формы $\mathfrak{h}$ и включим в $\mathbf{D}(\mathfrak{h})$ все функции, непрерывно дифференцируемые в замкнутой области $\bar{\text{E}}$; полученная форма, которую мы будем обозначать через $\mathfrak{h}_2$, плотно определена, симметрична, ограничена снизу и замыкаема. Положим $H_2 = T_{\tilde{\mathfrak{h}}_2}$. Очевидно, что $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{h}_2$, так что $\tilde{\mathfrak{h}}_1 \subset \tilde{\mathfrak{h}}_2$. Согласно определению отношения порядка для самосопряженных операторов, данному в п. 2.5, отсюда следует, что $\tilde{\mathfrak{h}}_1 \geqslant \tilde{\mathfrak{h}}_2$ и $H_1 \geqslant H_2$.

Определим третью форму $\mathfrak{h}_3$ равенством

$$\mathfrak{h}_3[u, v] = \mathfrak{h}_2[u, v] + \int\limits_{\partial \text{E}} \sigma u \bar{v}\, dS,$$
$$\mathbf{D}(\mathfrak{h}_3) = \mathbf{D}(\mathfrak{h}_2), \tag{4.35}$$

где интеграл берется по границе $\partial$E, а $\sigma$ — фиксированная гладкая функция, определенная на $\partial$E. Можно показать, что дополнительное слагаемое в (4.35) $\mathfrak{h}_2$-*ограничено* с $h_2$-гранью 0. Доказательство мы опускаем; заметим только, что утверждение соответствует тому факту в примере 1.36, что форма $\mathfrak{t}_3$ $\mathfrak{t}_1$-ограничена.

Положим $H_3 = T_{\tilde{\mathfrak{h}}_3}$. Отметим, что $\mathfrak{h}_3 \supset \mathfrak{h}_1$, а значит, $\tilde{\mathfrak{h}}_3 \supset \tilde{\mathfrak{h}}_1$, так как граничный член в (4.35) равен нулю при $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}_1)$. Отсюда опять следует, что $\tilde{\mathfrak{h}}_3 \leqslant \tilde{\mathfrak{h}}_1$ и $H_3 \leqslant H_1$.

Теперь можно показать, что $H_1$, $H_2$, $H_3$ — самосопряженные продолжения минимального оператора $\dot{S}$ и сужения максимального оператора $\dot{S}^*$. Грубо говоря, каждый из этих операторов есть формальный дифференциальный оператор $L = -\Delta + q(x)$ со следующими *граничными условиями* на $\partial$E:

$$\begin{aligned} &u = 0 \quad \text{для } H_1, \\ &\frac{\partial u}{\partial u} = 0 \quad \text{для } H_2, \\ &\frac{\partial u}{\partial n} - \sigma u = 0 \quad \text{для } H_3, \end{aligned} \tag{4.36}$$

где $\partial/\partial n$ — производная по внутренней нормали, как подсказывает сравнение с обыкновенными дифференциальными операторами (см. пример 2.16). Однако это утверждение нуждается в некоторых комментариях. Функция $u$ из области определения любого из этих операторов не обязана быть дифференцируемой в обычном смысле, оператор $Lu$ нужно понимать в обобщенном смысле; соответствующим образом следует интерпретировать граничные условия (4.36). Во всяком случае легко видеть, что функция $u$ с непрерывными вторыми производными в $\bar{\text{E}}$, удовлетворяющая граничному условию

$\partial u/\partial n = 0$, принадлежит $\mathrm{D}(H_2)$ и $H_2 u = Lu$. Для этого нужно лишь проверить, что $\mathfrak{h}_2[u, v] = (Lu, v)$ для всех $v \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_2)$ (см. теорему 2.1); здесь мы имеем дело только с гладкими функциями, и потому трудностей не возникает.

Эти результаты можно обобщить, вводя форму

$$\mathfrak{h}[u, v] = \int\limits_{\mathrm{E}} \sum_{j,k=1}^{3} \left[ p_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_k} + q(x) u\bar{v} \right] + \int\limits_{\partial \mathrm{E}} \sigma u\bar{v}\, dS, \tag{4.37}$$

где $(p_{jk}(x))$ — симметричная $(3 \times 3)$-матрица, элементами которой являются вещественные гладкие функции переменной $x$, причем предполагается, что эта матрица *равномерно положительно определена*; это означает, что существуют числа $\alpha, \beta > 0$, такие, что

$$\alpha \sum |\xi_j|^2 \leqslant \sum_{j,k} p_{jk}(x) \xi_j \bar{\xi}_k \leqslant \beta \sum |\xi_j|^2 \tag{4.38}$$

для всех комплексных векторов $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$. Неравенство (4.38) эквивалентно тому условию, что собственные значения симметричной матрицы $(p_{jk}(x))$ лежат между $\alpha$ и $\beta$. Заметим попутно, что эти собственные значения являются гладкими функциями переменной $x$; это следует из теории возмущений для симметричных операторов (см. п. II.5.5).

Из (4.38) вытекает, что форма $\mathfrak{h}$ из (4.37) *сравнима* с прежней формой $\mathfrak{h}$ в том смысле, что каждая из них ограничена относительно другой, так что они, так же как и их замыкания, имеют одинаковые области определения. (Как и прежде, мы должны различать три различные формы $\mathfrak{h}_n$, $n = 1, 2, 3$.) Таким образом, мы пришли к самосопряженным операторам $H_n$, $n = 1, 2, 3$, которые формально совпадают с одним и тем же дифференциальным оператором

$$Lu = -\sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} p_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + q(x) u \tag{4.39}$$

с различными граничными условиями. Последние аналогичны условиям (4.36), но отличаются тем, что $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по направлению *конормали*, которая определяется функциями $(p_{jk}(x))$.

Одно из преимуществ рассмотрения форм $\mathfrak{h}_n$ состоит в том, что, как было указано выше, замыкания форм $\mathfrak{h}_n$ имеют такие же области определения, как в частном случае $p_{jk}(x) = \delta_{jk}$, а значит, не зависят от коэффициентов $p_{jk}(x)$, $q(x)$ и $\sigma(x)$ при условии, что матрица $(p_{jk}(x))$ равномерно положительно определена и $q(x)$, $\sigma(x)$ — гладкие функции. В общем случае не существует простой связи между областями определения операторов $H_n$ при различных выборах коэффициентов.

Однако более глубокая теория дифференциальных операторов[1] показывает, что зависимость областей определения операторов $H_n$ от коэффициентов $p_{jk}(x)$ и т. д. определяется исключительно зависимостью *граничных условий* от этих величин. *Свойства* функций $u \in \mathrm{D}(H_n)$ *во внутренних точках* одинаковы для всех $n$ и не зависят от $p_{jk}(x)$; самым важным фактом здесь является то, чтобы обобщенные производные второго порядка функции $u$ принадлежали $\mathrm{L}^2$. Обращаясь к рассмотренным выше граничным условиям, мы видим, что условие Дирихле ($u = 0$ на $\partial\mathrm{E}$) не зависит от $p_{jk}(x)$ и $q(x)$. Следовательно, $\mathrm{D}(H_1)$ *не гависит от коэффициентов* $p_{jk}(x)$ *и* $q(x)$.

---

[1] См., например, **Лионс** [[1]].

## § 5. Спектральная теорема и возмущение спектральных семейств

### 1. Спектральные семейства

Пусть $\{\mathrm{M}(\lambda)\}$ — неубывающее семейство[1] замкнутых подпространств гильбертова пространства $\mathrm{H}$, зависящее от вещественного параметра $\lambda \in (-\infty, \infty)$, причем пересечение всех $\mathrm{M}(\lambda)$ содержит лишь 0, а их объединение плотно в $\mathrm{H}$.

Тогда для любого фиксированного $\lambda$ пересечение $\mathrm{M}(\lambda+0)$ всех $\mathrm{M}(\lambda')$ с $\lambda' > \lambda$ содержит $\mathrm{M}(\lambda)$. Аналогично $\mathrm{M}(\lambda) \supset \mathrm{M}(\lambda-0)$, где $\mathrm{M}(\lambda-0)$ — *замыкание* объединения всех $\mathrm{M}(\lambda')$ с $\lambda' < \lambda$. Будем говорить, что семейство$^3\{\mathrm{M}(\lambda)\}$ *непрерывно справа* в точке $\lambda$, если $\mathrm{M}(\lambda+0) = \mathrm{M}(\lambda)$; *непрерывно слева*, если $\mathrm{M}(\lambda-0) = \mathrm{M}(\lambda)$, и *непрерывно*, если оно непрерывно справа и слева, Как легко видеть, семейство $\{\mathrm{M}(\lambda+0)\}$ обладает теми же свойствами, что и $\{\mathrm{M}(\lambda)\}$, и, более того, оно всюду непрерывно справа.

Эти свойства могут быть сформулированы как свойства семейства $\{E(\lambda)\}$ ортогональных проекторов на $\mathrm{M}(\lambda)$. Имеем

$$E(\lambda) \text{ не убывает: } E(\lambda') \leqslant E(\lambda'') \text{ при } \lambda' \leqslant \lambda'', \tag{5.1}$$

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda \to -\infty} E(\lambda) = 0, \quad \operatorname*{s-lim}_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) = 1. \tag{5.2}$$

Свойство (5.1) эквивалентно равенству

$$E(\lambda)\,E(\mu) = E(\mu)\,E(\lambda) = E(\min(\lambda, \mu)). \tag{5.3}$$

Семейство $\{E(\lambda)\}$ ортогональных проекторов, удовлетворяющее условиям (5.1) и (5.2), называется *спектральным семейством* или *разложением единицы*.

Проекторы $E(\lambda \pm 0)$ на $\mathrm{M}(\lambda \pm 0)$ задаются формулой

$$E(\lambda \pm 0) = \lim_{\varepsilon \to +0} E(\lambda \pm \varepsilon). \tag{5.4}$$

Таким образом, семейство $\{\mathrm{M}(\lambda)\}$ непрерывно справа (слева) тогда и только тогда, когда семейство $\{E(\lambda)\}$ сильно непрерывно справа (слева). Обычно спектральное семейство предполагается всюду непрерывным справа:

$$E(\lambda+0) = E(\lambda), \quad -\infty < \lambda < +\infty; \tag{5.5}$$

мы будем следовать этому соглашению. В любом случае семейство $\{E(\lambda+0)\}$ всюду непрерывно справа.

Спектральное семейство $\{E(\lambda)\}$ называется *ограниченным снизу*, если $E(\mu) = 0$ для некоторого конечного $\mu$ [тогда тем более

---

[1] То есть $\mathrm{M}(\lambda') \subset \mathrm{M}(\lambda'')$ при $\lambda' < \lambda''$.

$E(\lambda) = 0$ при $\lambda < \mu]$. Наименьшая верхняя грань всех таких $\mu$ называется *нижней гранью* семейства $\{E(\lambda)\}$. Аналогично семейство $\{E(\lambda)\}$ *ограничено сверху*, если $E(\mu) = 1$ для некоторого конечного $\mu$; соответственно определяется *верхняя грань*. Заметим, что оператор $E(\lambda)$ не обязан быть нулевым, если $\lambda$ — нижняя грань, тогда как $E(\lambda) = 1$, если $\lambda$ — верхняя грань; это объясняется принятым нами соглашением (5.5).

Для любого полуоткрытого интервала $\mathrm{I} = (\lambda', \lambda'']$ вещественной оси положим

$$E(\mathrm{I}) = E(\lambda'') - E(\lambda'); \tag{5.6}$$

оператор $E(\mathrm{I})$ является проектором на подпространство $\mathbf{M}(\mathrm{I}) = \mathbf{M}(\lambda'') \ominus \mathbf{M}(\lambda')$ [1]. Если два таких интервала $\mathrm{I}_1$ и $\mathrm{I}_2$ не имеют общих точек, то подпространства $\mathbf{M}(\mathrm{I}_1)$ и $\mathbf{M}(\mathrm{I}_2)$ ортогональны; действительно, если $\mathrm{I}_1$ лежит слева от $\mathrm{I}_2$, то $\mathbf{M}(\mathrm{I}_2) = \mathbf{M}(\lambda_2'') \ominus \ominus \mathbf{M}(\lambda_2') \perp \mathbf{M}(\lambda_2') \supset \mathbf{M}(\lambda_1'') \supset \mathbf{M}(\mathrm{I}_1)$. Соответствующее утверждение для проекторов состоит в том, что

$$E(\mathrm{I}_1)\, E(\mathrm{I}_2) = E(\mathrm{I}_2)\, E(\mathrm{I}_1) = 0 \tag{5.7}$$

для непересекающихся $\mathrm{I}_1$, $\mathrm{I}_2$; это также можно проверить непосредственно, используя (5.3).

Проектором на $\mathbf{M}(\lambda) \ominus \mathbf{M}(\lambda - 0)$ является оператор

$$P(\lambda) = E(\lambda) - E(\lambda - 0). \tag{5.8}$$

Как и выше, получим

$$P(\lambda)\, P(\mu) = P(\mu)\, P(\lambda) = 0 \tag{5.9}$$

при $\lambda \neq \mu$. Неравенство $P(\lambda) \neq 0$ выполняется тогда и только тогда, когда $E(\lambda)$ имеет разрыв в точке $\lambda$. Если пространство $\mathbf{H}$ сепарабельно, то ортогональная система ненулевых проекторов не более чем счетна. Следовательно, в сепарабельном пространстве $E(\lambda)$ имеет не более чем счетное множество точек разрыва.

Если множество $\mathrm{S}$ является объединением конечного числа интервалов вещественной оси (открытых, замкнутых или полуоткрытых), то оно может быть представлено как объединение непересекающихся множеств вида $\mathrm{I} = (\lambda', \lambda'']$ или $\{\lambda\}$. Определим $E(\mathrm{S})$ как сумму соответствующих $E(\mathrm{I})$ и $P(\lambda)$; легко видеть, что $E(\mathrm{S})$ обладает таким свойством: $E(\mathrm{S}')\, E(\mathrm{S}'') = E(\mathrm{S}' \cap \mathrm{S}'')$. Функция $E(\mathrm{S})$ называется *спектральной мерой* на классе всех множеств $\mathrm{S}$ описанного вида. Эту меру $E(\mathrm{S})$ можно распространить на класс всех борелевских множеств $\mathrm{S}$ вещественной оси с помощью стандартной конструкции, используемой в теории меры.

---

[1] Множество $\mathbf{M} \ominus \mathbf{N} = \mathbf{M} \cap \mathbf{N}^{\perp}$ является ортогональным дополнением к $\mathbf{N}$ в $\mathbf{M}$ (см. п. I.6.3).

Для любого $u \in \mathrm{H}$ скалярное произведение $(E(\lambda)u, u)$ является неотрицательной, неубывающей функцией от $\lambda$, которая стремится к нулю при $\lambda \to -\infty$ и к $\| u \|^2$ при $\lambda \to +\infty$. Для любых $u, v \in \mathrm{H}$ полярная форма $(E(\lambda)u, v)$, согласно формуле (I.6.26), может быть представлена в виде линейной комбинации функций вида $(E(\lambda)w, w)$. Следовательно, комплекснозначная функция $(E(\lambda)u, v)$ переменной $\lambda$ имеет *ограниченную вариацию*. В этом можно убедиться более непосредственным образом. Для любого $\mathrm{I} = (\lambda', \lambda'']$ имеем

$$\begin{aligned} |(E(\lambda'')u, v) - (E(\lambda')u, v)| = |(E(\mathrm{I})u, v)| &= \\ = |(E(\mathrm{I})u, E(\mathrm{I})v)| &\leqslant \\ \leqslant \| E(\mathrm{I})u \| \, \| E(\mathrm{I})v \|. & \qquad (5.10) \end{aligned}$$

Если $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_n$ — система непересекающихся интервалов указанного вида, то

$$\begin{aligned} \sum_j |(E(\mathrm{I}_j)u, v)| &\leqslant \sum \| E(\mathrm{I}_j)u \| \, \| E(\mathrm{I}_j)v \| \leqslant \\ &\leqslant (\sum \| E(\mathrm{I}_j)u \|^2)^{1/2} (\sum \| E(\mathrm{I}_j)v \|^2)^{1/2} = \\ &= [\sum (E(\mathrm{I}_j)u, u)]^{1/2} [\sum (E(\mathrm{I}_j)v, v)]^{1/2} = \\ &= (\sum E(\mathrm{I}_j)u, u)^{1/2} (\sum E(\mathrm{I}_j)v, v)^{1/2} \leqslant \| u \| \, \| v \|. \qquad (5.11) \end{aligned}$$

Таким образом, полная вариация функции $(E(\lambda)u, v)$ не превосходит $\| u \| \, \| v \|$.

Точка $\lambda = \alpha$ называется *точкой постоянства* спектрального семейства $\{E(\lambda)\}$, если функция $E(\lambda)$ постоянна в окрестности $\alpha$: $E(\alpha + \varepsilon) = E(\alpha - \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Точка $\alpha$ в этом случае является внутренней точкой максимального интервала, в котором функция $E(\lambda)$ постоянна. Множество всех точек, не являющихся точками постоянства, называется *носителем* спектрального семейства $E(\lambda)$ [или спектральной меры $E(\mathrm{S})$]. Спектральное семейство $\{E(\lambda)\}$ ограничено снизу (сверху) тогда и только тогда, когда его носитель ограничен сверху (снизу).

## 2. Самосопряженные операторы, порождаемые спектральным семейством

Любое спектральное семейство $\{E(\lambda)\}$ порождает **самосопряженный** оператор $H$, который определяется формулой

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda); \qquad (5.12)$$

**D** $(H)$ есть множество всех $u \in \mathbf{H}$, таких, что[1]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E(\lambda)u, u) < \infty. \tag{5.13}$$

Для таких $u$ скалярное произведение $(Hu, v)$ определяется формулой

$$(Hu, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda)u, v), \quad v \in \mathbf{H}. \tag{5.14}$$

Сходимость интеграла в (5.14) следует из оценки (5.10), которую можно представить в виде $|d(E(\lambda)u, v)| \leqslant [d(E(\lambda)u, u) \times \times d(E(\lambda)v, v)]^{1/2}$, условия (5.13) и неравенства Шварца. Очевидно, что $H$ — симметричный оператор. Его самосопряженность будет доказана ниже. Отметим, что

$$\begin{aligned} \|Hu\|^2 = (Hu, Hu) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(E(\lambda)u, Hu) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mu d_\mu (E(\lambda)u, E(\mu)u) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d_\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \mu d(E(\mu)u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E(\lambda)u, u) \end{aligned} \tag{5.15}$$

при $u \in$ **D** $(H)$; здесь была использована формула (5.3). Обобщая данную конструкцию, мы можем аналогичным образом определить операторы

$$\phi(H) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda) dE(\lambda). \tag{5.16}$$

Формула (5.14) соответствует частному случаю $\phi(\lambda) = \lambda$. В определении (5.16) $\phi(\lambda)$ может быть любой комплексной непрерывной функцией[2]. Если функция $\phi(\lambda)$ ограничена на носителе $\Sigma$ спектрального семейства $\{E(\lambda)\}$, то условие, соответствующее условию (5.13), всегда выполнено, так что **D** $(\phi(H)) =$ **H** и оператор

---

[1] Интегралы в (5.13) и (5.14) являются *интегралами Стильтьеса* с непрерывными подинтегральными функциями $\lambda$ и $\lambda^2$.

[2] Можно рассматривать функции $\phi$ более общего вида, но тогда интеграл $(\phi(H)u, v) = \int \phi(\lambda)\, d(E(\lambda)u, v)$ нужно брать в смысле Радона — Стильтьеса. Относительно деталей см., например, **Стоун** [1].

$\phi(H)$ ограничен [ср. с (5.15)]:

$$\|\phi(H)\| \leqslant \sup_{\lambda\in\Sigma} |\phi(\lambda)|. \tag{5.17}$$

Итак, оператор $\phi(H)$ принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{H})$. Далее, оператор $\phi(H)$ *нормален*. Это следует из общих соотношений

$$\phi(H)^* = \overline{\phi}(H), \quad \text{если } \overline{\phi}(\lambda) = \overline{\phi(\lambda)}; \tag{5.18}$$

$$\phi(H) = \phi_1(H)\,\phi_2(H), \quad \text{если } \phi(\lambda) = \phi_1(\lambda)\,\phi_2(\lambda); \tag{5.19}$$

$$\begin{gathered}\phi(H) = \alpha_1\phi_1(H) + \alpha_2\phi_2(H),\\ \text{если } \phi(\lambda) = \alpha_1\phi_1(\lambda) + \alpha_2\phi_2(\lambda),\end{gathered} \tag{5.20}$$

где функции $\phi$, $\phi_1$ и $\phi_2$ предполагаются ограниченными на $\Sigma$. Доказательства формул (5.18) и (5.20) просты. Формула (5.19) может быть доказана с помощью вычислений, аналогичных проведенным в (5.15). Эти соотношения оправдывают обозначение $\phi(H)$ для оператора (5.16).

Важным частным случаем является функция $\phi(\lambda) = (\lambda - \zeta)^{-1}$, где $\zeta$ — число с ненулевой мнимой частью. Оказывается, что соответствующий этой функции оператор $\phi(H)$ является резольвентой $(H - \zeta)^{-1}$, откуда следует самосопряженность оператора $H$. Для доказательства прежде всего заметим, что $\phi(H)(H - \zeta)u = u$ при $u \in \mathbf{D}(H)$; это опять легко получить с помощью вычислений, аналогичных проведенным в (5.15). Отсюда следует, что $\phi(H) \supset (H - \zeta)^{-1}$. С другой стороны, любой элемент $u \in \mathbf{R}(\phi(H))$ удовлетворяет условию (5.13) ввиду того, что функция $\lambda(\lambda - \zeta)^{-1}$ ограничена [здесь снова используются такие же вычисления, что и в (5.15)]. Следовательно, $(H - \zeta)^{-1} = \phi(H)$, что мы и хотели показать.

Функция $(H - \zeta)^{-1} = \int (\lambda - \zeta)^{-1}\, dE(\lambda)$ определена и принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{H})$ не только при $\zeta$ с ненулевой мнимой частью, но также и при любом вещественном $\zeta$, являющемся точкой постоянства для $E(\lambda)$, так как при $\lambda \in \Sigma$ значения функции $(\lambda - \zeta)^{-1}$ ограничены. Следовательно, такие $\zeta$ принадлежат резольвентному множеству $\mathrm{P}(H)$, а значит, $\Sigma(H) \subset \Sigma$. В действительности $\Sigma(H) = \Sigma$. Для доказательства заметим, что

$$\|(H - \mu)u\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \mu)^2\, d(E(\lambda)u, u), \quad u \in \mathbf{D}(H), \tag{5.21}$$

в чем можно убедиться, применяя равенство (5.15) к $H - \mu$. Если $\mu \in \Sigma$, то $E' = E(\mu + \varepsilon) - E(\mu - \varepsilon) \neq 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, существует $u \neq 0$, такое, что $E'u = u$, откуда $E(\mu - \varepsilon)u = 0$ и $E(\mu + \varepsilon)u = u$. Поэтому из (5.21) получаем, что $\| (H - \mu) u \|^2 = \int\limits_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} \leqslant \varepsilon^2 \| u \|^2$. Поскольку такое $u$ существует для каждого $\varepsilon > 0$, $\mu$ не принадлежит $\mathrm{P}(H)$. Таким образом, $\Sigma \subset \Sigma(H)$, а значит, $\Sigma = \Sigma(H)$.

Из (5.21) следует также, что $(H - \mu) u = 0$ тогда и только тогда, когда функция $(E(\lambda) u, u)$ постоянна в окрестности любой точки, кроме точки $\lambda = \mu$, где она имеет такой разрыв, что $E(\mu) u = u$, $E(\mu - 0) u = 0$. Следовательно, $\mu$ является собственным значением оператора $H$ тогда и только тогда, когда $P(\mu) \neq 0$, а $u$ является соответствующим собственным вектором тогда и только тогда, когда $P(\mu) u = u$.

Для операторов $\phi(H)$ может быть построено операторное исчисление. Если функция $\phi(\lambda)$ неограничена, то и оператор $\phi(H)$, вообще говоря, неограничен; множество $\mathbf{D}(\phi(H))$ состоит из всех $u \in \mathbf{H}$, таких, что $\int | \phi(\lambda) |^2 d(E(\lambda) u, u) < \infty$. Если не требовать ограниченности функций $\phi$, $\phi_1$, $\phi_2$, то формула (5.18) остается справедливой, тогда как (5.19) и (5.20) нужно, вообще говоря, заменить следующими соотношениями:

$$\phi(H) \supset \phi_1(H) \phi_2(H), \quad \phi(H) \supset \alpha_1\phi_1(H) + \alpha_2\phi_2(H). \tag{5.22}$$

Однако равенство (5.19) справедливо и тогда, когда обе функции $\phi_2$ и $\phi_1\phi_2 = \phi$ ограничены на $\Sigma$.

**Задача 5.1.** Все операторы $E(\lambda)$ и $E(\lambda - 0)$ коммутируют с $H$, или, что эквивалентно, подмножества $\mathrm{M}(\lambda)$ и $\mathrm{M}(\lambda - 0)$ приводят $H$.

**Задача 5.2.** Объединение областей значений $\mathrm{M}(\mu) \ominus \mathrm{M}(\lambda)$ операторов $E(\mu) - E(\lambda)$ по всем $\lambda$, удовлетворяющим условию $-\infty < \lambda < \mu < \infty$, является ядром оператора $H$.

**Задача 5.3.** Неравенство $H \geqslant \gamma$ выполняется тогда и только тогда, когда $E(\gamma - 0) = 0$.

**Задача 5.4.** Если $H \geqslant 0$, то $H^{1/2} = \int\limits_0^\infty \lambda^{1/2} dE(\lambda)$.

**Задача 5.5.** Если $H_1 \geqslant H_2$ в смысле п. 2.5, то $\dim E_1(\lambda) \leqslant \dim E_2(\lambda)$ (обобщение теоремы I.6.44)[1].

Мы показали, что любое спектральное семейство $\{E(\lambda)\}$ определяет по формуле (5.12) самосопряженный оператор $H$. Покажем теперь, что различные спектральные семейства приводят к различным самосопряженным операторам. Для этого достаточно вывести явную формулу для определения $E(\lambda)$ по оператору $H$.

---

[1] Если пространство $\mathbf{H}$ конечномерно, то функция $E(\lambda)$ чисто разрывна по $\lambda$; множество ее точек разрыва совпадает с множеством собственных значений оператора $H$.

Определим оператор

$$|H| = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|\, dE(\lambda) = \int_{0}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda) - \int_{-\infty}^{0} \lambda\, dE(\lambda), \tag{5.23}$$

причем $\mathrm{D}(|H|) = \mathrm{D}(H)$. Легко видеть, что оператор $|H|$ самосопряжен и неотрицателен и что $\mathrm{N}(|H|) = \mathrm{N}(H) = \mathrm{R}(P(0))$. Легко также видеть, что $|H|u = Hu$, если $E(0)u = 0$, и $|H|u = -Hu$, если $u = E(-0)u$. Следовательно,

$$H = [1 - E(0) - E(-0)]\,|H|. \tag{5.24}$$

Но оператор $U = 1 - E(0) - E(-0)$ обладает тем свойством, что $Uu = 0$ при $u \in \mathrm{N}(H) = \mathrm{R}(P(0))$, и $\|Uu\| = \|u\|$, если $P(0)u = 0$. Таким образом, формула (5.24) является в точности полярным разложением оператора $H$ (см. п. 2.7), которое однозначно определяет операторы $|H|$ и $U$ по оператору $H$.

Заменяя в этом рассуждении $H$ на $H - \lambda$, мы получаем, что оператор

$$U(\lambda) \equiv 1 - E(\lambda) - E(\lambda - 0) \tag{5.25}$$

есть однозначно определенный частично изометричный оператор, участвующий в полярном разложении $H - \lambda = U(\lambda)\,|H - \lambda|$ оператора $H - \lambda$. Поскольку из (5.25) следует, что

$$E(\lambda) = 1 - \frac{1}{2}[U(\lambda) + U(\lambda)^2], \tag{5.26}$$

то $E(\lambda)$ определен по оператору $H$.

Приведенное выше определение оператора $U(\lambda)$, однако, не является явным. Явную формулу дает

**Лемма 5.6.** *Справедливо равенство*

$$\operatorname*{s-lim}_{\substack{\delta\to 0\\ \rho\to 0}} U_{\delta,\rho}(\lambda) = U(\lambda) = 1 - E(\lambda) - E(\lambda - 0), \tag{5.27}$$

*где*

$$U_{\delta,\rho}(\lambda) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\rho}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\rho}\right](H - \lambda - i\eta)^{-1}\, d\eta =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\rho} (H - \lambda)\,[(H - \lambda)^2 + \eta^2]^{-1}\, d\eta. \tag{5.28}$$

Доказательство. Равенство (5.27), очевидно, выполняется для любого элемента $u \in \mathrm{R}(P(\lambda)) = \mathrm{N}(H - \lambda)$, так как в этом случае $U_{\delta,\rho}(\lambda)u = 0$ тождественно и $(1 - E(\lambda) - E(\lambda - 0))u = 0$. Поэтому достаточно доказать, что это равенство выполняется для любого элемента $u \in \mathrm{M}(\lambda - 0)$ или $u \in$

$\in \mathbf{M}(\lambda)^{\perp}$; так как рассмотрение обоих этих случаев проводится аналогично, то мы можем предположить, что $u \in \mathbf{M}(\lambda)^{\perp}$, т. е. $E(\lambda)u = 0$, и доказать, что

$$U_{\delta,\rho}(\lambda)u \to u = (1 - E(\lambda) - E(\lambda - 0))u. \tag{5.29}$$

Далее, легко видеть, что

$$U_{\delta,\rho}(\lambda) = \phi_{\delta,\rho,\lambda}(H), \tag{5.30}$$

где

$$\phi_{\delta,\rho,\lambda}(\mu) = \frac{2}{\pi}\int_{\delta}^{\rho} \frac{\mu-\lambda}{(\mu-\lambda)^2+\eta^2}\,d\eta = \\ = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\mu-\lambda}\right]_{\eta=\delta}^{\eta=\rho} \quad \text{при } \mu \neq \lambda. \tag{5.31}$$

Таким образом, $|\phi_{\delta,\rho,\lambda}(\mu)| \leqslant 1$, откуда следует неравенство $\| U_{\delta,\rho}(\lambda) \| \leqslant 1$. Поэтому для того, чтобы доказать формулу (5.29) при $E(\lambda)u = 0$, достаточно показать, что она справедлива для любого $u$, такого, что $E(\lambda + \varepsilon)u = 0$ при некотором $\varepsilon > 0$ [множество таких $u$ плотно в $\mathbf{M}(\lambda)^{\perp}$ ]. Имеем

$$(U_{\delta,\rho}(\lambda)u, u) = \int_{\lambda+\varepsilon}^{\infty} \phi_{\delta,\rho,\lambda}(\mu)\,d(E(\mu)u, u) \to \\ \to \int_{\lambda+\varepsilon}^{\infty} d(E(\mu)u, u) = (u, u), \quad \delta \to 0, \quad \rho \to \infty,$$

так как $\phi_{\delta,\rho,\lambda}(\mu) \to 1$ равномерно при $\mu \geqslant \lambda + \varepsilon$. Поэтому

$$\| U_{\delta,\rho}(\lambda)u - u \|^2 = \\ = \| U_{\delta,\rho}(\lambda)u \|^2 + \| u \|^2 - 2\operatorname{Re}(U_{\delta,\rho}(\lambda)u, u) \leqslant \\ \leqslant 2\| u \|^2 - 2\operatorname{Re}(U_{\delta,\rho}(\lambda)u, u) \to 0,$$

что и доказывает (5.29).

**Задача 5.7.** Для любых вещественных $\lambda$ и $\mu$, таких, что $\lambda < \mu$, справедливо равенство

$$\frac{1}{2}[E(\mu) - E(\mu - 0)] - \frac{1}{2}[E(\lambda) + E(\lambda - 0)] = \\ = \operatorname*{s-lim}_{\varepsilon \to +0} \frac{-1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\varepsilon} (H - \zeta)^{-1}\,d\zeta, \tag{5.32}$$

где $\Gamma_\varepsilon$ — объединение двух спрямляемых кривых $\Gamma_\varepsilon^{+}$ и $\Gamma_\varepsilon^{-}$, которые определяются следующим образом: $\Gamma_\varepsilon^{+}$ — любая кривая в верхней полуплоскости с началом в $\mu + i\varepsilon$ и концом в $\lambda + i\varepsilon$; $\Gamma_\varepsilon^{-}$ — любая кривая в нижней полуплоскости с началом в $\lambda - i\varepsilon$ и концом в $\mu - i\varepsilon$.

**Задача 5.8.** Оператор $A \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ коммутирует с оператором $H$ тогда и только тогда, когда он коммутирует с $E(\lambda)$ при любом $\lambda$. В частности, подпространство $\mathbf{M}$ пространства $\mathrm{H}$ приводит $H$ тогда и только тогда, когда ортогональный проектор $P$ на подпространство $\mathbf{M}$ коммутирует с $E(\lambda)$ при любом $\lambda$. Это в свою очередь верно тогда и только тогда, когда подпространство $\mathbf{M}$ инвариантно относительно $E(\lambda)$ при любом $\lambda$.

**Задача 5.9.** Пусть $H = \int \lambda \, dE(\lambda)$; тогда $\lambda \in \mathrm{P}(H)$ в том и только том случае, когда $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon) = 0$ при некотором $\varepsilon > 0$, и $\lambda \in \Sigma(H)$ тогда и только тогда, когда $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda - \varepsilon) \neq 0$ при любом $\varepsilon > 0$.

## 3. Спектральная теорема

Мы показали выше, что каждое спектральное семейство $\{E(\lambda)\}$ определяет по формуле (5.12) самосопряженный оператор. Спектральная теорема утверждает, что любой самосопряженный оператор $H$ допускает представление (5.12) с помощью спектрального семейства $\{E(\lambda)\}$, которое однозначно определяется оператором $H$.

Если провести в обратном порядке рассуждения предыдущего пункта, то мы получим естественное доказательство спектральной теоремы. *Определим* $E(\lambda)$ формулой (5.26), где $U(\lambda)$ — частично изометричный оператор, возникающий при полярном разложении $H - \lambda = U(\lambda) \, | H - \lambda |$ оператора $H - \lambda$. Мы должны показать, что операторы $E(\lambda)$ образуют спектральное семейство и что оператор $H$, определяемый формулой (5.12), совпадает с данным оператором $H$.

Отметим прежде всего, что $E(\lambda) = 1 - P_+(\lambda) = P_-(\lambda) + P_0(\lambda)$, где $P_\pm(\lambda)$, $P_0(\lambda)$ совпадают с $P_\pm$, $P_0$ из (2.29), если в этих формулах $H$ заменить на $H - \lambda$. Следовательно, $((H - \lambda) u, u) \leqslant 0$ при $u \in \mathbf{D}(H) \cap \mathbf{M}(\lambda)$, где $\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{R}(E(\lambda))$. Если $\mu > \lambda$, то для таких $u$ заведомо $((H - \mu) u, u) \leqslant 0$. Поскольку $\mathbf{M}(\lambda)$ приводит оператор $H$ (см. п. 2.7), из леммы 2.38 следует, что $\mathrm{M}(\lambda) \subset \mathbf{M}(\mu)$, а это эквивалентно условию (5.1).

Таким образом, $\{E(\lambda)\}$ является монотонным семейством проекторов; отсюда следует, что существуют сильные пределы $E(\pm\infty) = \underset{\lambda \to \pm\infty}{\text{s-lim}} E(\lambda)$ [ср. с (5.4)]. Поскольку все $\mathbf{M}(\lambda)$ приводят $H$, то подпространства $\mathbf{M}(\pm\infty) = \mathbf{R}(E(\pm\infty))$ также приводят $H$ и множество $\mathbf{D}(H) \cap \mathrm{M}(\pm\infty)$ плотно в $\mathbf{M}(\pm\infty)$. Пусть $u \in \mathbf{D}(H) \cap \mathbf{M}(-\infty)$. Тогда $u \in \mathrm{M}(\lambda)$ при любом $\lambda$, так что $((H - \lambda) u, u) \leqslant 0$ при всех $\lambda < 0$. Следовательно, $(u, u) \leqslant \lambda^{-1} (Hu, u)$ при всех $\lambda < 0$, и элемент $u$ должен быть равен нулю. Этим доказано, что $\mathbf{M}(-\infty) = 0$, или $E(-\infty) = 0$. Аналогично можно доказать, что $E(\infty) = 1$.

Таким образом, мы показали, что $\{E(\lambda)\}$ — спектральное семейство. Осталось показать, что это семейство непрерывно справа. Оператор $E(\lambda + 0)$ является проектором на $\mathrm{M}(\lambda + 0)$ — пересечение семейства $\{\mathrm{M}(\mu)\}$ при $\mu > \lambda$. Поскольку каждое из множеств $\mathbf{M}(\mu)$ приводит $H$, этим же свойством обладает множество $\mathbf{M}(\lambda + 0)$. Для каждого $u \in \mathbf{D}(H) \cap \mathbf{M}(\lambda + 0)$ справедливо неравенство $(Hu, u) \leqslant \mu\,(u, u)$ при любом $\mu > \lambda$, так что $(Hu, u) \leqslant \lambda\,(u, u)$. Из леммы 2.38 следует, что $\mathbf{M}\,(\lambda + 0) \subset \mathbf{M}\,(\lambda)$; поэтому $E\,(\lambda + 0) \leqslant E\,(\lambda)$. Поскольку справедливо и противоположное неравенство, имеет место равенство $E\,(\lambda + 0) = E\,(\lambda)$.

В заключение мы должны показать, что самосопряженный оператор $H' = \int \lambda\, dE\,(\lambda)$ совпадает с $H$. Поскольку оба оператора $H$ и $H'$ являются самосопряженными и поскольку объединение областей значений $\mathbf{M}\,(\lambda, \mu) = \mathbf{M}\,(\mu) \ominus \mathbf{M}\,(\lambda)$ операторов $E\,(\mu) - E\,(\lambda)$ является ядром оператора $H'$ (см. задачу 5.2), достаточно доказать, что $\mathbf{M}\,(\lambda, \mu) \subset \mathbf{D}\,(H)$ и $Hu = H'u$ при $u \in \mathbf{M}\,(\lambda, \mu)$.

С этой целью мы заметим сначала, что множество $\mathbf{M}\,(\lambda, \mu)$ приводит оператор $H$ и что $\lambda\,(u, u) \leqslant (Hu, u) \leqslant \mu\,(u, u)$ при $u \in \mathbf{D}' = \mathbf{M}\,(\lambda, \mu) \cap \mathbf{D}\,(H)$. Таким образом, $H$ ограничен на подмножестве $\mathbf{D}'$. Поскольку это подмножество плотно в $\mathbf{M}\,(\lambda, \mu)$, оно должно совпадать с $\mathbf{M}\,(\lambda, \mu)$ в силу замкнутости $H$. Другими словами, справедливо включение $\mathbf{M}\,(\lambda, \mu) \subset \mathbf{D}\,(H)$. Поскольку $H$ имеет на $\mathbf{M}\,(\lambda, \mu)$ верхнюю грань $\mu$ и нижнюю грань $\lambda$, норма оператора $H - (\lambda + \mu)/2$ равна $(\mu - \lambda)/2$.

Разделим теперь интервал $\mathrm{I} = (\lambda, \mu]$ на $n$ равных подинтервалов $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_n$; пусть $\lambda_k$ — средняя точка интервалов $\mathrm{I}_k$, $k = 1, \ldots, n$. Определим $E\,(\mathrm{I}_k)$ по формуле (5.6) и положим $u_k = E\,(\mathrm{I}_k)\, u$. Имеем: $u = u_1 + \ldots + u_n$ и все $u_k$ взаимно ортогональны. Каждое множество $E\,(\mathrm{I}_k)\,\mathbf{H}$ приводит $H$; поэтому $Hu_k$ принадлежит $E\,(\mathrm{I}_k)\,\mathbf{H}$. Значит, векторы $(H - \lambda_k)\, u_k$ также взаимно ортогональны. Кроме того, $\|(H - \lambda_k)\, u_k\| \leqslant (\mu - \lambda)\,\|u_k\|/2n$, согласно сделанному выше замечанию. Таким образом,

$$\Big\| Hu - \sum_k \lambda_k u_k \Big\|^2 = \Big\| \sum_k (H - \lambda_k)\, u_k \Big\|^2 =$$

$$= \sum_k \|(H - \lambda_k)\, u_k\|^2 \leqslant \frac{(\mu - \lambda)^2}{4n^2} \sum_k \|u_k\|^2 = \frac{(\mu - \lambda)^2}{4n^2}\, \|u\|^2. \qquad (5.33)$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $\sum\limits_k E\,(\mathrm{I}_k)\, u = Hu$. Отсюда следует, что $(H'u, v) = \int \lambda\,(dE\,(\lambda)\, u, v) = \lim \sum\limits_k \lambda_k\,(E\,(\mathrm{I}_k)\, u, v) = (Hu, v)$ для всех $v \in \mathbf{H}$, а значит, $H'u = Hu$, что мы и хотели показать.

### 4. Теоремы об устойчивости для спектральных семейств

Спектральное семейство $\{E\,(\lambda)\}$, порожденное данным самосопряженным оператором $H$, является весьма важным объектом, и потому естественно напрашивается вопрос, является ли зависимость $E(\lambda)$ от $H$ непрерывной в том или ином смысле[1]. Ясно, что, вообще говоря, ответ на этот вопрос отрицателен, так как даже в случае конечномерного пространства $\mathbf{H}$ спектральное семейство $E_\varkappa(\lambda)$ оператора $H_\varkappa = H + \varkappa$ будет разрывным при тех значениях $\varkappa$, для которых $H + \varkappa$ имеет $\lambda$ своим собственным значением.

Однако такая разрывность спектрального семейства $E(\lambda)$ как функции оператора $H$ по своей природе связана с разрывностью $E(\lambda)$ как функции $\lambda$. Разумно ожидать, что $E(\lambda)$ будет изменяться непрерывно с изменением $H$, если $\lambda$ — точка непрерывности спектрального семейства $\{E(\lambda)\}$. Однако оказывается, что это может быть так, а может быть и не так в зависимости от того, в каком смысле мы будем понимать «непрерывность»[2].

Простейший результат такого рода можно получить, рассматривая случай, когда $\Sigma(H)$ имеет лакуны в точках $\lambda = \alpha$ и $\lambda = \beta$, $\alpha < \beta$ (см. п. V.3.5). В этом случае $\alpha$ и $\beta$ являются точками постоянства спектрального семейства $\{E(\lambda)\}$. Из (5.32) следует, что

$$E(\beta) - E(\alpha) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} (H - \zeta)^{-1}\, d\zeta, \qquad (5.34)$$

где $\Gamma$ — например замкнутая положительно ориентированная окружность с диаметром, соединяющим $\alpha$ и $\beta$. Оператор (5.34) есть в точности ортогональный проектор $P$ на подпространство $\mathbf{M}'$, соответствующее части $\Sigma'$ множества $\Sigma(H)$, заключенной внутри $\Gamma$ [см. (V.3.18)]. Мы знаем, что такая часть $\Sigma'$ спектра полунепрерывна сверху и что проектор $P$ изменяется непрерывно при непрерывном изменении $H$ в смысле обобщенной сходимости (см. теорему IV.3.16). Таким образом, доказана

**Теорема 5.10.** *Пусть оператор $H$ самосопряжен, и пусть его спектр $\Sigma(H)$ имеет лакуны в точках $\alpha$, $\beta$ $(\alpha < \beta)$. Тогда существует такое $\delta > 0$, что для любого самосопряженного оператора $H'$, удовлетворяющего условию $\hat{\delta}(H', H) < \delta$, $\Sigma(H')$ имеет лакуны в точках $\alpha$, $\beta$ и*

$$\| [E'(\beta) - E'(\alpha)] - [E(\beta) - E(\alpha)] \| \to 0, \qquad (5.35)$$

*если $\hat{\delta}(H', H) \to 0$.*

**Замечание 5.11.** Если $H' = H + A$, где $A$ — симметричный и $H$ — ограниченный оператор с малыми коэффициентами $a$ и $b$ в (V.4.1), то $\hat{\delta}(H', H)$ мало (см. теорему IV.2.14). Кроме того

---

[1] В последующем через $\{E(\lambda)\}$, $\{E'(\lambda)\}$, $\{E_n(\lambda)\}$ и т. д. обозначаются спектральные семейства самосопряженных операторов $H$, $H'$, $H_n$ и т. д.

[2] В этом пункте речь идет о непрерывности $E(\lambda)$ *по норме*. Непрерывность $E(\lambda)$ в сильном смысле будет рассмотрена в гл. VIII.

в этом случае $H'$ ограничен снизу, если $H$ ограничен снизу (см. теорему V.4.11), и нижняя грань оператора $H'$ стремится к нижней грани оператора $H$, когда $a, b \to 0$. Поэтому, если $\alpha$ достаточно мало (алгебраически), то $E'(\alpha) = E(\alpha) = 0$ в (5.35). Таким образом, $\| E'(\beta) - E(\beta) \| \to 0$, $a, b \to 0$, если $\Sigma(H)$ имеет лакуну в точке $\beta$. Замечателен, однако, тот факт, что это утверждение верно, даже если $H$ не является полуограниченным. А именно справедлива

**Теорема 5.12**[1]. *Пусть оператор $H$ самосопряжен, и пусть $A_n$ — симметричные и $H$-ограниченные операторы: $\| A_n u \| \leqslant \leqslant a_n \| u \| + b_n \| Hu \|$, $u \in \mathbf{D}(H) \subset \mathbf{D}(A_n)$, где $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда при достаточно больших $n$ операторы $H_n = H + A_n$ являются самосопряженными и $H_n \to H$ в обобщенном смысле. Если $\Sigma(H)$ имеет лакуну в точке $\beta$, то и $\Sigma(H_n)$ имеет лакуну в точке $\beta$ при достаточно больших $n$, причем $\| E_n(\beta) - E(\beta) \| \to 0$, когда $n \to \infty$.*

Дальнейшим обобщением этой теоремы является[2]

**Теорема 5.13.** *Пусть $H$ — самосопряженный, а $A_n$ — симметричный оператор, причем $\mathbf{D}(A_n) \subset \mathbf{D}(H)$. Предположим, что*

$$| (A_n u, u) | \leqslant a_n (u, u) + b_n (| H | u, u), \quad u \in \mathbf{D}(A_n), \tag{5.36}$$

*где $a_n, b_n \to 0$. Если при каждом $n$ множество $\mathbf{D}(A_n)$ является ядром оператора $| H |^{1/2}$, то при достаточно большом $n$ определено псевдопродолжение по Фридрихсу $H_n$ оператора $H + A_n$, и $H_n \to H$ в обобщенном смысле. Если $\Sigma(H)$ имеет лакуну в точке $\beta$, то и $\Sigma(H_n)$ при достаточно больших $n$ имеет лакуну в точке $\beta$ и $\| E_n(\beta) - E(\beta) \| \to 0$, $n \to \infty$.*

Доказательство. В следствии 3.12 было доказано, что операторы $H_n$ существуют и $H_n \to H$ в обобщенном смысле.

Для упрощения доказательства заметим, что оператор $| H |$ в правой части неравенства (5.36) можно заменить на $| H - \beta |$ (при этом, возможно, $a_n$ и $b_n$ изменятся), так как $(| H | u, u) \leqslant \leqslant | \beta | (u, u) + (| H - \beta | u, u)$, согласно (2.28). Это означает, что мы можем без ограничения общности положить $\beta = 0$. В этом случае $| H |$ имеет положительную нижнюю грань, так что мы можем далее положить $a_n = 0$, изменяя, если это необходимо, $b_n$. Тогда в конструкции псевдопродолжения по Фридрихсу, приведенной при доказательстве теоремы 3.11, мы можем положить

---

[1] Эта теорема была доказана Хайнцем [1]. Доказательство более общей теоремы 5.13, данное ниже, принадлежит в основном Хайнцу.

[2] Заметим, что неравенство (5.36) выполняется, если операторы $A_n$ $H$-ограничены, как и в теореме 5.12 [положим $\mathbf{D}(A_n) = \mathbf{D}(H)$ и воспользуемся результатом задачи 3.14].

$\delta = 0$, так как число $\delta$ было введено для того, чтобы $H'$ имел положительную нижнюю грань. При этих упрощениях воспользуемся обозначениями из доказательства теоремы 3.11; в частности, $H' = |\,H\,|$.

Далее, из (3.22) следует, что

$$R_n(\zeta) = G'^{-1}H'R(\zeta)\,[1 + C_nH'R(\zeta)]^{-1}\,G'^{-1} =$$

$$= R(\zeta) + G'^{-1}K(\zeta)\sum_{p=1}^{\infty}[-C_nK(\zeta)]^p\,G'^{-1}, \tag{5.37}$$

где

$$K\,|\,\zeta\,| = H'R(\zeta) = |\,H\,|\,(H - \zeta)^{-1}. \tag{5.38}$$

Из обобщенной сходимости $H_n \to H$ следует, что $\Sigma\,(H_n)$ имеет лакуну в точке $\beta$ (см. теорему IV.2.25). Таким образом, по лемме 5.6 имеем

$$1 - 2E_n(0) = U_n(0) = \text{s-}\lim_{p\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\rho}^{\rho} R_n(i\eta)\,d\eta$$

и аналогичное выражение для $1 - 2E(0)$. В силу (5.37) для любых $u,\ v \in \mathbf{H}$

$$-2\pi\,([E_n(0) - E(0)]\,u,\ v) = \lim_{p\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho}([R_n(i\eta)\,R(i\eta)]\,u,\ v)\,d\eta =$$

$$= \lim_{p\to\infty}\int_{-\rho}^{\rho} G'^{-1}K(i\eta)\sum_{p=1}^{\infty}[-C_nK(i\eta)]^p\,G'^{-1}u,\ v)\,d\eta. \tag{5.39}$$

Оценим последний интеграл. Имеем: $\|\,K(i\eta)\,\| = \|\,|\,H\,|\,(H - i\eta)^{-1}\,\| \leqslant \leqslant 1$. Поскольку $\|\,C_n\,\| \leqslant b_n$, согласно (3.20), то подинтегральная функция в правой части (5.39) мажорируется рядом

$$\sum_{p=1}^{\infty} b_p^n\,\|\,K(i\eta)\,G'^{-1}u\,\|\,\|\,K(i\eta)^*\,G'^{-1}v\,\| =$$

$$= \frac{b_n}{1 - b_n}\,\|\,G'R(i\eta)\,u\,\|\,\|G'R(i\eta)^*\,v\,\|$$

(с учетом того, что $|\,H\,| = H' = G'^2$).

Следовательно, интеграл в (5.39) не превосходит числа

$$\frac{b_n}{1 - b_n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\,G'R(i\eta)\,u\,\|^2\,d\eta\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\|\,G'R(-i\eta)\,v\,\|^2\,d\eta\right)^{1/2}.$$

Но

$$\| G'R(i\eta) u \|^2 = (G'^2 R(i\eta) R(-i\eta) u, u) = (|H| (H^2 + \eta^2)^{-1} u, u),$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \| G'R(i\eta) u \|^2 \, d\eta = \int_0^{\infty} ((H^2 + \lambda)^{-1} u, |H| u) \lambda^{-1/2} \, d\lambda =$$

$$= \pi ((H^2)^{-1/2} u, |H| u) = \pi (|H|^{-1} u, |H| u) = \pi \| u \|^2$$

[см. (V.3.43); нужно также учесть, что $| H | = (H^2)^{1/2}$ по определению]. Следовательно,

$$2\pi | ([E_n(0) - E(0)] u, v) | \leqslant \frac{b_n}{1 - b_n} \pi \| u \| \| v \|,$$

или

$$\| E_n(\beta) - E(\beta) \| \leqslant \frac{b_n}{2(1 - b_n)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

**Замечание 5.14.** Если $H_n \to H$ в обобщенном смысле, то не обязательно $\| E_n(\beta) - E(\beta) \| \to 0$. Контрпримером является пример V.4.14, где оператор $T(\varkappa)$ самосопряжен при вещественных $\varkappa$, и $\dim E_\varkappa(0) = 1$ при $0 < \varkappa < 1$ (так как $T(\varkappa)$ имеет одно отрицательное собственное значение), но $E_0(0) = 0$ (так как оператор $T(0)$ положителен).

## ГЛАВА VII

# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

Теория аналитических возмущений исторически явилась исходным разделом теории возмущений. Эта теория изучает главным образом поведение изолированных собственных значений и соответствующих собственных векторов (или собственных проекторов) оператора, голоморфно зависящего от параметра.

Мы уже рассмотрели эту задачу в том частном случае, когда основное пространство конечномерно. По сравнению с этим частным случаем в общем случае с формальной точки зрения мало нового. Как только введено понятие голоморфной зависимости (вообще говоря, неограниченных) операторов от параметра, нетрудно показать, что результаты, полученные в конечномерном случае, можно без существенных изменений перенести на общий случай.

Таким образом, основной задачей этой главы является определение голоморфных семейств операторов и отыскание достаточных условий голоморфности. Общее определение голоморфности можно ввести естественным образом в рамках теории обобщенной сходимости, построенной в гл. IV. Существует несколько полезных критериев голоморфности. В соответствии с этим мы рассматриваем различные типы голоморфных семейств: (A), (B), $(B_0)$ и (C). Тип (A) определяется через ограниченность возмущения относительно невозмущенного оператора. Тип (B) определяется для гильбертова пространства в терминах голоморфного семейства полуторалинейных форм, причем возмущающая форма ограничена относительно невозмущенной формы. Тип $(B_0)$ является частным случаем типа (B) и связан с понятием расширения по Фридрихсу. Тип (C) формально аналогичен типу $(B_0)$, однако отличается от него во многих отношениях. Разумеется, каждый из этих типов голоморфных семейств имеет свою специфику.

## § 1. Аналитические семейства операторов

### 1. Аналитичность векторно- и операторнозначных функций

Мы будем рассматривать семейства $u(\varkappa)$ векторов в банаховом пространстве X или семейства $T(\varkappa)$ операторов из X в другое банахово пространство Y; особенно нас будет интересовать случай, когда $u(\varkappa)$ или $T(\varkappa)$ голоморфны по $\varkappa$ в области D комплексной плоскости. Голоморфную вектор-функцию мы уже определили как функцию, дифференцируемую в каждой точке $\varkappa \in$ D; при этом несущественно, в каком смысле понимается дифференцирование: в сильном или слабом (см. п. III.1.6). Таким образом, $u(\varkappa)$ голоморфна тогда и только тогда, когда функция $(u(\varkappa), f)$

голоморфна по $\varkappa$ для каждого $f \in X^*$. В приложениях часто бывает удобен следующий критерий: *$u(\varkappa)$ голоморфна тогда и только тогда, когда у каждой точки $\varkappa \in D$ существует окрестность, в которой $\| u(\varkappa) \|$ ограничена и $(u(\varkappa), f)$ голоморфна для всех $f$ из фундаментального подмножества в* $X^*$ (см. замечание п. III.1.38).

Иногда мы рассматриваем семейство $u(\varkappa)$, зависящее от вещественного параметра $\varkappa$, $a < \varkappa < b$. Вектор-функция $u(\varkappa)$ называется *вещественно-голоморфной*, если она допускает разложение Тейлора в каждой точке $\varkappa$. В этом случае $u(\varkappa)$ можно продолжить с помощью разложения Тейлора на некоторую комплексную окрестность D интервала $(a, b)$. Возникающее таким образом продолжение голоморфно в D.

**Пример 1.1.** Пусть $X = L^p(0, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, и $u(\varkappa) = u(x; \varkappa) = e^{-\varkappa x}$. Для того чтобы $u(\varkappa) \in X$, число $\varkappa$ должно удовлетворять условию $\operatorname{Re} \varkappa > 0$. Так как $du(\varkappa)/d\varkappa = -xu(\varkappa) \in X$, то $u(x)$ голоморфна при $\operatorname{Re} \varkappa > 0$. Если положить $X = L^p(a, b)$, где $(a, b)$ — конечный интервал, то $u(\varkappa) = e^{-\varkappa x}$ оказывается голоморфной для *всех* $\varkappa$. Далее, положим $u(\varkappa) = u(x; \varkappa) = (x - \varkappa)^{-1}$ и $X = L^p(a, b)$. Функция $u(\varkappa)$ голоморфна во всей комплексной плоскости, за исключением точек отрезка $a \leqslant \varkappa \leqslant b$ вещественной оси.

При рассмотрении операторнозначных голоморфных функций $T(\varkappa)$ мы ограничимся пока случаем, когда $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(X, Y)$. Функция $T(\varkappa)$ голоморфна, если она дифференцируема по норме в каждой точке комплексной области. Имеем следующий критерий: *$T(\varkappa) \in \mathscr{B}(X, Y)$ голоморфна в области D тогда и только тогда, когда у каждой точки области D существует окрестность, в которой $T(\varkappa)$ ограничена и функция $(T(\varkappa) u, g)$ голоморфна для каждого $u$ из фундаментального подмножества в X и каждого $g$ из фундаментального подмножества в* $Y^*$ (см. п. III.3.1).

Отметим также, что в том случае, когда $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(X, Y)$ голоморфна и существует оператор $T(\varkappa_0)^{-1} \in \mathscr{B}(Y, X)$, функция $T(\varkappa)^{-1}$ существует, принадлежит $\mathscr{B}(Y, X)$ и голоморфна для достаточно малых $| \varkappa - \varkappa_0 |$. Это следствие теоремы об устойчивости ограниченной обратимости (см. разложение Неймана для обратного оператора в теореме IV.1.16); согласно (I.4.28) имеем $(d/d\varkappa) T(\varkappa)^{-1} = -T(\varkappa)^{-1} (dT(\varkappa)/d\varkappa)$.

Вещественно-голоморфное семейство $T(\varkappa)$ определяется аналогично вещественно-голоморфной вектор-функции; $T(\varkappa)$ можно продолжить до голоморфного семейства в некоторой области D комплексной плоскости.

## 2. Аналитичность семейства неограниченных операторов

В приложениях мы не можем ограничиться рассмотрением лишь ограниченных операторов, и поэтому возникает необходимость обобщить понятие аналитической зависимости семейства операторов от параметра на случай неограниченных операторов. Для того чтобы отличить введенное выше понятие голоморфности от обобщенного понятия, которое будет сейчас определено, мы будем называть функцию $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *ограниченно-голоморфной*, если она голоморфна в смысле п. 1.

Обобщение понятия голоморфной зависимости на неограниченные операторы подсказывается понятием обобщенной сходимости, введенным в п. IV.2.4. Семейство операторов $T(\varkappa) \in \mathscr{C}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, определенное в окрестности точки $\varkappa = 0$, называется *голоморфным* в нуле (в обобщенном смысле), если существует третье банахово пространство $\mathrm{Z}$ и два семейства операторов $U(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{Z}, \mathrm{X})$ и $V(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{Z}, \mathrm{Y})$, ограниченно-голоморфные в точке $\varkappa = 0$ и такие, что $U(\varkappa)$ отображает $\mathrm{Z}$ *на* $\mathrm{D}(T(\varkappa))$ взаимно однозначно и

$$T(\varkappa)\, U(\varkappa) = V(\varkappa)\,^{1)}. \tag{1.1}$$

Функция $T(\varkappa)$ голоморфна в области $\mathrm{D}$ комплексной плоскости, если она голоморфна в каждой точке $\varkappa \in \mathrm{D}$. Голоморфная функция $T(\varkappa)$ непрерывна в обобщенном смысле: $T(\varkappa) \to T(\varkappa_0)$ в обобщенном смысле, если $x \to \varkappa_0$; это следует из теоремы IV.2.29.

Это новое понятие голоморфности обобщает понятие, введенное в п. 1: $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ голоморфна в новом смысле тогда и только тогда, когда $T(\varkappa)$ ограниченно-голоморфна. Для доказательства необходимости заметим, что оператор $U(\varkappa)$ из (1.1) отображает $\mathrm{Z}$ на $\mathrm{X}$ и поэтому $U(\varkappa)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$ (см. задачу III.5.21). Тогда $U(x)^{-1}$ (см. п. 1) и, следовательно, $T(\varkappa) = V(\varkappa)\, U(\varkappa)^{-1}$ ограниченно-голоморфны.

Если $T(\varkappa)$ голоморфна и $T(\varkappa_0) \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$, то $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ для достаточно малых $|\varkappa - \varkappa_0|$ [и поэтому $T(\varkappa)$ ограниченно-голоморфна для таких $\varkappa$]. Это следствие теоремы IV.2.23, так как $T(\varkappa)$ непрерывна в смысле обобщенной сходимости.

Понятие вещественно-голоморфного семейства $T(\varkappa)$ можно определить так же, как и выше, требуя, чтобы $U(\varkappa)$ и $V(\varkappa)$ были вещественно-голоморфны. Однако в общем случае нельзя продолжить вещественно-голоморфное семейство в комплексную плоскость. Функции $U(\varkappa)$ и $V(\varkappa)$ можно продолжить в комплексную область, но $U(\varkappa)$ может не быть взаимно однозначным отображением для невещественных $\varkappa$ [2]).

---

[1]) Это определение соответствует теореме IV.2.29, которая дает достаточное условие для обобщенной сходимости. Это формальное обобщение определения, предложенного Реллихом [3], в котором предполагается, что $\mathrm{Z} = \mathrm{X} = \mathrm{Y}$.

[2]) Пусть, например, $T(\varkappa) = (U - \varkappa)^{-1}$, где $U \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ и $\varkappa$ — вещественное число. Предположим, что невещественные собственные значения оператора $U$ плотны в комплексной окрестности нуля. Функция $T(\varkappa)$ вещественно-голоморфна [можно положить $U(\varkappa) = U - \varkappa$, $V(\varkappa) = 1$], однако не продолжается в комплексную область в достаточно малой окрестности

**Задача 1.2. Если $T(\varkappa)$ голоморфна и $A(\varkappa)$ ограниченно-голоморфна, то $T(\varkappa) + A(\varkappa)$ голоморфна.**

**Теорема 1.3**[1]. *Пусть семейство $T(\varkappa) \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ определено в окрестности нуля и $\zeta \in \mathrm{P}(T(0))$. Семейство $T(\varkappa)$ голоморфно в нуле тогда и только тогда, когда $\zeta \in \mathrm{P}(T(\varkappa))$ и резольвента $R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1}$ ограниченно-голоморфна для достаточно малых $|\varkappa|$. В этом случае $R(\zeta, \varkappa)$ ограниченно-голоморфна по совокупности переменных $\zeta$ и $\varkappa$ таких, что $\zeta \in \mathrm{P}(T(0))$ и $|\varkappa|$ достаточно мал (в зависимости от $\zeta$).*

Доказательство аналогично соответствующему доказательству для обобщенной сходимости (п. IV.2.6). Предположим, что $T(\varkappa)$ голоморфна и $U(\varkappa)$, $V(\varkappa)$ удовлетворяют (1.1). Имеем $(T(\varkappa) - \zeta)\, U(\varkappa) = V(\varkappa) - \zeta U(\varkappa)$, причем оператор $V(0) - \zeta U(0)$ отображает $\mathbf{Z}$ взаимно однозначно на $\mathbf{X}$. Поэтому $[V(0) - \zeta U(0)]^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{Z})$ и функция $[V(\varkappa) - \zeta U(\varkappa)]^{-1}$ ограниченно-голоморфна в окрестности нуля (см. аналогичные рассуждения выше). Таким образом, $(T(\varkappa) - \zeta)^{-1} = U(\varkappa)[V(\varkappa) - \zeta U(\varkappa)]^{-1}$ ограниченно-голоморфна. Обратно, предположим, что $R(\zeta, \varkappa)$ ограниченно-голоморфна по $\varkappa$. Чтобы удовлетворить соотношению (1.1), достаточно положить $\mathbf{Z} = \mathbf{X}$, $U(\varkappa) = R(\zeta, \varkappa)$, $V(\varkappa) = 1 + \zeta U(\varkappa)$. Тот факт, что $R(\zeta, \varkappa)$ голоморфна по совокупности переменных $\zeta$ и $\varkappa$, следует из теоремы IV.3.12, согласно которой $R(\zeta, \varkappa)$ голоморфно зависит от $\zeta$ и $R(\zeta_0, T(\varkappa))$.

Понятие голоморфности, введенное здесь, интересно в том отношении, что непостоянная функция $T(\varkappa)$ может быть голоморфна *всюду* в расширенной плоскости[2]. В связи с этим смотри

**Пример 1.4.** Пусть $T(\varkappa)$ — обыкновенный дифференциальный оператор на интервале $(0, 1)$, определенный равенством $T(\varkappa)u = -u''$ на функциях, удовлетворяющих граничным условиям $u(0) = 0$, $u'(1) + \varkappa u(1) = 0$. Оператор $T(\varkappa)$ зависит от $\varkappa$ только через граничное условие в точке $x = 1$. Оператор $T(\infty)$ соответствует граничному условию $u(1) = 0$. Резольвента $R(\zeta, \varkappa)$ есть интегральный оператор с ядром $g(y, x; \zeta, \varkappa)$ (функция Грина оператора $T(\varkappa) - \zeta$):

$$g(y, x; \zeta, \varkappa) = \frac{\sin \zeta^{1/2} y\, [\cos \zeta^{1/2}(1-x) + x\zeta^{-1/2} \sin \zeta^{1/2}(1-\varkappa)]}{\zeta^{1/2} \cos \zeta^{1/2} + \varkappa \sin \zeta^{1/2}} \tag{1.2}$$

---

нуля. В самом деле, $0 \in \mathrm{P}(T(0))$, так как $T(0)^{-1} = U \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$; поэтому $0 \in \mathrm{P}(T(\varkappa))$ и $T(\varkappa)^{-1}$ ограниченно-голоморфна для достаточно малых $|\varkappa|$, если существует голоморфное продолжение функции $T(\varkappa)$ в некоторую окрестность нуля (см. теорему 1.3). Тогда $T(\varkappa)^{-1} = U - \varkappa$, так как это равенство выполняется для вещественных $\varkappa$. Это приводит к противоречию, так как оператор $U - \varkappa$ необратим, если $\varkappa$ — собственное значение.

[1] Эта теорема доказана Реллихом [3] в том случае, когда $T(\varkappa)$ — самосопряженное семейство (см. § 3).

[2] Как обычно, считаем, что функция $T(\varkappa)$ голоморфна в бесконечности, если $T\left(\frac{1}{\varkappa}\right)$ голоморфна в нуле.

при $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1$, причем $x$ и $y$ в правой части в (1.2) следует поменять местами, если $x \leqslant y$. При фиксированном $\zeta$ функция (1.2) голоморфна по $\varkappa$ всюду, за исключением полюса $\varkappa = -\zeta^{1/2} \operatorname{ctg} \zeta^{1/2}$. Для любого $\varkappa_0$ можно указать $\zeta$ такое, что вблизи $\varkappa_0$ нет полюсов функции $g(y, x; \zeta, \varkappa)$. Согласно теореме 1.3, семейство $T(\varkappa)$ голоморфно всюду в расширенной комплексной плоскости.

**Пример 1.5.** Пусть $T(\varkappa)$ — обыкновенный дифференциальный оператор $u \to -u''$ с граничными условиями $u(0) = 0$, $\varkappa u'(1) - u(1) = 0$. Оператор $T(\varkappa)$ совпадает с оператором $T(-\varkappa^{-1})$ из примера 1.4 и голоморфен для всех $\varkappa$. Резольвента $R(\zeta, \varkappa)$ задается функцией Грина (V.4.16).

**Замечание 1.6.** Справедлива ли *теорема единственности* для операторных функций, голоморфных в определенном выше смысле? Другими словами, пусть $T_1(\varkappa)$ и $T_2(\varkappa)$ голоморфны в (связной) области $\mathrm{D}$ и $T_1(\varkappa_n) = T_2(\varkappa_n)$ для последовательности $\{\varkappa_n\}$, сходящейся к точке $\varkappa_0 \in \mathrm{D}$ такой, что $\varkappa_0 \neq \varkappa_n$ для всех $n$. Верно ли, что $T_1(\varkappa) = T_2(\varkappa)$ для всех $\varkappa \in \mathrm{D}$? Неясно, верно ли это в общем случае. Однако это так, если $\mathrm{Y} = \mathrm{X}$ и семейства $T_1(\varkappa)$ и $T_2(\varkappa)$ имеют непустые резольвентные множества для каждого $\varkappa \in \mathrm{D}$.

Для доказательства заметим сначала, что $T_1(\varkappa_0) = T_2(\varkappa_0) = T_0$ в силу единственности обобщенного предела. Пусть $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T_0)$; по теореме 1.3 $R(\zeta_0, T_1(\varkappa))$ и $R(\zeta_0, T_2(\varkappa))$ существуют и ограниченно-голоморфны в окрестности точки $\varkappa_0$. Так как теорема единственности верна для ограниченно-голоморфных функций, так же как и для числовых функций [достаточно рассмотреть функцию $(R(\zeta_0, T_1(\varkappa))u, f)$ при фиксированных $u \in \mathrm{X}$ и $f \in \mathrm{X}^*$], то $R(\zeta_0, T_1(\varkappa)) = R(\zeta_0, T_2(\varkappa))$ и, следовательно, $T_1(\varkappa) = T_2(\varkappa)$ в указанной окрестности.

Теперь нетрудно показать, что $T_1(\varkappa) = T_2(\varkappa)$ для всех $\varkappa \in \mathrm{D}$. Продолжение тождества $T_1(\varkappa) \equiv T_2(\varkappa)$ с окрестности на всю область $\mathrm{D}$ совершается с помощью стандартного приема [1], и мы опустим соответствующее рассуждение.

## 3. Разложение спектра и конечные системы собственных значений

**Теорема 1.7.** *Если спектр оператора $T(\varkappa) \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$, голоморфно зависящего от $\varkappa$, допускает разложение на две части, то подпространства в $\mathrm{X}$, соответствующие этим частям, зависят от $\varkappa$ голоморфно.*

Доказательство. Сначала уточним формулировку теоремы. Пусть $T(\varkappa)$ голоморфна в окрестности нуля и $\Sigma(0) = \Sigma(T(0))$ разбивается замкнутой кривой $\Gamma$ на части $\Sigma'(0)$ и $\Sigma''(0)$ (см. п. III.6.4). Так как $T(\varkappa)$ сходится к $T(0)$ в обобщен-

---

[1] См. Кнопп [1], стр. 87. (См. также любой курс теории аналитических функций.— *Прим. перев.*)

ном смысле при $\varkappa \to 0$, то, согласно теореме IV.3.16, $\Gamma \subset \mathrm{P}(\varkappa) = \mathrm{P}(T(\varkappa))$ для достаточно малых $|\varkappa|$ и $\Sigma(\varkappa)$ разбивается кривой $\Gamma$ на части $\Sigma'(\varkappa)$, $\Sigma''(\varkappa)$. Пусть $\mathrm{M}'(\varkappa) \oplus \mathrm{M}''(\varkappa)$ — разложение пространства $\mathrm{X}$, соответствующее этому разбиению. Проектор $P(\varkappa)$ на $\mathrm{M}'(\varkappa)$ параллельно $\mathrm{M}''(\varkappa)$ выражается по формуле (см. (IV.3.11))

$$P(\varkappa) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R(\zeta, \varkappa)\, d\zeta. \tag{1.3}$$

Так как $R(\zeta, \varkappa)$ ограниченно-голоморфна по совокупности переменных $\zeta$ и $\varkappa$ (теорема 1.3), то из (1.3) следует, что семейство $P(\varkappa)$ ограниченно-голоморфно в окрестности нуля. Это и означает по определению, что подпространства $\mathrm{M}'(\varkappa)$ и $\mathrm{M}''(\varkappa)$ голоморфно зависят от $\varkappa$.

В том случае, когда $\Sigma(\varkappa)$ допускает разбиение, как в теореме 1.7, задача на собственные значения для $T(\varkappa)$ сводится к соответствующим задачам для частей оператора $T(\varkappa)$ в подпространствах $\mathrm{M}'(\varkappa)$ и $\mathrm{M}''(\varkappa)$. То обстоятельство, что эти подпространства зависят от $\varkappa$, вызывает некоторые неудобства. Эти неудобства можно преодолеть с помощью следующего приема.

Так как проектор $P(\varkappa)$ на $\mathrm{M}'(\varkappa)$ голоморфен, то существует трансформирующая функция $U(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, ограниченно-голоморфная вместе с функцией $U(\varkappa)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ и преобразующая $P(0)$ в $P(\varkappa)$:

$$P(\varkappa) = U(\varkappa)\, P(0)\, U(\varkappa)^{-1} \tag{1.4}$$

(см. п. II.4.2, результаты этого пункта верны также и для банаховых пространств). Поскольку оператор $T(\varkappa)$ коммутирует с $P(\varkappa)$ (см. п. III.6.4), то оператор

$$\check{T}(\varkappa) = U(\varkappa)^{-1}\, T(\varkappa)\, U(\varkappa) \tag{1.5}$$

коммутирует с $P(0)$. Поэтому для каждого $\varkappa$ оператор $\check{T}(\varkappa)$ разложим относительно подпространств $\mathrm{M}'(0) = P(0)\,\mathrm{X}$ и $\mathrm{M}''(0) = (1 - P(0))\,\mathrm{X}$. Задача на собственные значения для части оператора $T(\varkappa)$ в $\mathrm{M}'(\varkappa)$ эквивалентна соответствующей задаче для части оператора $\check{T}(\varkappa)$ в $\mathrm{M}'(0)$, так как собственные значения этих частей совпадают, а их собственные проекторы и нильпотентные части связаны посредством трансформирующей функции $U(\varkappa)$.

Опишем эту связь более подробно в предположении, что $\Sigma'(0)$ есть конечная система собственных значений (см. п. III.6.5). Тогда $\mathrm{M}'(0)$ конечномерно и, согласно (1.4), то же самое верно для $\mathrm{M}'(\varkappa)$. Пусть

$$\check{T}(\varkappa)\, \check{P}_h(\varkappa) = \lambda_h(\varkappa)\, \check{P}_h(\varkappa) + \check{D}_h(\varkappa), \quad h = 1, \ldots, s, \tag{1.6}$$

есть решение задачи на собственные значения для части оператора

$\check{T}(\varkappa)$ в $\mathbf{M}'(0)$, где [см. (I.5.35)]

$$\begin{aligned}\check{P}_h(\varkappa)\,P(0) &= P(0)\,\check{P}_h(\varkappa) = \check{P}_h(\varkappa),\\ \check{D}_h(\varkappa)\,P(0) &= P(0)\,\check{D}_h(\varkappa) = \check{D}_h(\varkappa).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Тогда решение задачи на собственные значения для части оператора $T(\varkappa)$ в $\mathbf{M}'(\varkappa)$ имеет вид

$$T(\varkappa)\,P_h(\varkappa) = \lambda_h(\varkappa)\,P_h(\varkappa) + D_h(\varkappa), \quad n = 1, \ldots, s, \tag{1.8}$$

где

$$\begin{aligned}P_h(\varkappa) &= U(\varkappa)\,\check{P}_h(\varkappa)\,U(\varkappa)^{-1},\\ D_h(\varkappa) &= U(\varkappa)\,\check{D}_h(\varkappa)\,U(\varkappa)^{-1}.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Все результаты аналитической теории возмущений в конечномерном пространстве (гл. II) можно применить к задаче на собственные значения для $T(\varkappa)$ в фиксированном подпространстве $\mathbf{M}'(0)$. Таким образом, изучение конечной системы собственных значений оператора $T(\varkappa)$ сводится к задаче в конечномерном случае. Отметим, что часть оператора $\check{T}(\varkappa)$ в $\mathbf{M}'(0)$ равна части *ограниченно-голоморфного* оператора $\check{T}(\varkappa)\,P(0) = U(\varkappa)^{-1}\,T(\varkappa) \times \times P(\varkappa)\,U(\varkappa)$ в $\mathbf{M}'(0)$; семейство $T(\varkappa)\,P(\varkappa)$ ограниченно-голоморфно, как это следует из (III.6.24).

Применяя результаты, полученные в п. II.1.8, мы приходим к следующей теореме.

**Теорема 1.8** [1]. *Если семейство $T(\varkappa)$ голоморфно в окрестности нуля, то любая конечная система собственных значений $\lambda_h(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ представляется ветвями одной или нескольких аналитических функций, имеющих самое большее алгебраические особенности в нуле. То же самое верно и для соответствующих собственных проекторов $P_h(\varkappa)$ и собственных нильпотентов $D_h(\varkappa)$.*

Более подробную информацию о функциях $\lambda_h(\varkappa)$, $P_h(\varkappa)$ и $D_h(\varkappa)$ можно извлечь из результатов § II.1; все эти результаты верны в рассматриваемом случае, поскольку мы ограничились *конечной системой* собственных значений.

В качестве применения полученных результатов докажем две теоремы, касающиеся «нелинейной задачи на собственные значения» [2].

---

[1] Эта теорема доказана Секефальви-Надем [2], Вольфом [1] и Т. Като [6]. См. также Баумгертель [1] (где содержится наиболее полное описание аналитических функций $\lambda_n(\varkappa)$) и Шефке [1] — [5].

[2] См. сноску [1] на стр. 50. Если $T(\varkappa) = \varkappa T$, где $T$ компактен, то особая точка $\varkappa$ в теореме 1.9 обратна собственному значению оператора $T$. По этой причине мы говорим здесь о «нелинейной задаче на собственные значения». Теорему 1.9 доказал Аткинсон [2] (см. также Секефальви-Надь [4]) в предложении, что $T(\varkappa)$ — полином $\varkappa$.

**Теорема 1.9.** *Пусть $T(\varkappa)$ — голоморфное в области $\mathrm{D}_0$ семейство компактных операторов в $\mathrm{X}$. Назовем $\varkappa$ особой точкой, если 1 является*[1]) *собственным значением для $T(\varkappa)$. Тогда либо*[2]) *все $\varkappa \in \mathrm{D}_0$ суть особые точки, либо каждое компактное подмножество в $\mathrm{D}_0$ содержит лишь конечное число особых точек.*

Доказательство. Если точка $\varkappa_0 \in \mathrm{D}_0$ не особая, то $1 \in \mathrm{P}(T(\varkappa_0))$, так как $T(\varkappa_0)$ компактен. По теореме 1.3 $1 \in \mathrm{P}(T(\varkappa))$ для достаточно малых $|\varkappa - \varkappa_0|$. Если значение $\varkappa_0$ особое, то 1 является изолированным собственным значением конечной кратности для $T(\varkappa_0)$ (см. п. III.6.7). Из теоремы 1.8 следует, что собственные значения оператора $T(\varkappa)$ в некоторой окрестности единицы образуют конечную систему, если точки $\varkappa$ и $\varkappa_0$ достаточно близки, причем эти собственные значения имеют самое большее алгебраические особенности при $\varkappa = \varkappa_0$. Если некоторые из этих значений тождественно равны единице, то все точки $\varkappa$ в окрестности $\varkappa_0$ особые. В противном случае вблизи $\varkappa_0$ нет особых точек, если $\varkappa$ и $\varkappa_0$ достаточно близки.

Итак, для каждого $\varkappa_0 \in \mathrm{D}_0$ существует окрестность $\mathrm{D}$, либо целиком состоящая из особых точек, либо не содержащая их. Отсюда следует утверждение теоремы.

**Теорема 1.10.** *Предположим, что семейство $T(\varkappa) \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ голоморфно в $\mathrm{D}_0$ и для каждого $\varkappa \in \mathrm{D}_0$ оператор $T(\varkappa)$ имеет компактную резольвенту. Назовем $\varkappa$ особой точкой, если 0 является*[3]) *собственным значением для $T(\varkappa)$. Тогда справедливо заключение теоремы* 1.9.

Доказательство. Для каждого $\varkappa_0$ существует ненулевое $\zeta_0 \in \mathrm{P}(T(\varkappa_0))$, причем оператор $\zeta_0 R(\zeta_0, \varkappa)$ компактен и голоморфен по $\varkappa$ в окрестности точки $\varkappa_0$. Сингулярная точка $\varkappa$ является особой в смысле теоремы 1.9 для семейства компактных операторов $-\zeta_0 R(\zeta_0, \varkappa)$. Отсюда вытекает утверждение теоремы для некоторой окрестности точки $\varkappa_0$. Но так как $\varkappa_0 \in \mathrm{D}_0$ произвольно, то теорема верна и для $\mathrm{D}_0$.

## 4. Замечания о бесконечных системах собственных значений

При рассмотрении бесконечного набора собственных значений оператора $T(\varkappa)$ возникают различные трудности[4]). Для упрощения рассматриваемой ситуации предположим, что оператор $T(\varkappa)$

---

[1]) Значение 1 можно заменить любым числом $\alpha \neq 0$.

[2]) Первая возможность исключается, если $\| T(\varkappa_0) \| < 1$ для некоторого $\varkappa_0 \in \mathrm{D}_0$.

[3]) Значение 0 можно заменить на любое комплексное число.

[4]) См. Реллих [5]; в этой статье содержится пример 1.11 и ряд других примеров.

имеет компактную резольвенту для каждого $\varkappa \in \mathrm{D}_0$. Удобно считать, что точка $\varkappa = 0$ принадлежит $\mathrm{D}_0$. Каждое собственное значение $\lambda(0)$ оператора $T(0)$ изолировано, имеет конечную кратность и может быть включено в одно или несколько семейств $\lambda(\varkappa)$ собственных значений операторов $T(\varkappa)$. Каждое из этих семейств аналитично в некоторой области $\mathrm{D}' \subset \mathrm{D}_0$, причем $\mathrm{D}'$ может зависеть от семейства $\lambda(\varkappa)$. Значения функций $\lambda(\varkappa)$ не обязательно исчерпывают все собственные значения операторов $T(\varkappa)$ независимо от того, насколько мало $\varkappa$. Возможен даже такой случай, когда оператор $T(0)$ не имеет собственных значений (пустой спектр), в то время как $T(\varkappa)$ при $\varkappa \neq 0$ имеет бесконечное число собственных значений. Таким образом, в общем случае нельзя говорить об аналитической зависимости от $\varkappa$ собственных значений операторов $T(\varkappa)$.

**Пример 1.11.** Рассмотрим семейство $T(\varkappa)$ из примера 1.5. Это семейство голоморфно в *расширенной комплексной плоскости* и имеет компактную резольвенту. Собственные значения оператора $T(\varkappa)$ являются нулями целой функции

$$\zeta^{-1/2}\sin\zeta^{1/2} - \varkappa\cos\zeta^{1/2};$$

эта функция служит знаменателем соответствующей функции Грина, см. (V.4.16). Собственные значения оператора $T(0)$ суть $\lambda_n = n^2\pi^2$, $n = 1, 2, \ldots$, а соответствующие собственные функции $\sqrt{2}\sin n\pi x$ образуют полную ортонормированную систему в $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(0, 1)$. Так как каждое собственное значение $\lambda_n$ — простое, то соответствующие собственные значения $\lambda_n(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ голоморфны в окрестности нуля. Из рис. 1 (см. стр. 367) мы видим, что $\lambda_n(\varkappa) - \lambda_n$ возрастает по $n$ при фиксированном вещественном $\varkappa$, и поэтому сходимость степенного ряда для $\lambda_n(\varkappa)$ ухудшается при возрастании $n$.

Отметим еще одну особенность этого примера. Нетрудно проверить, что числа $\lambda_n(\varkappa)$ исчерпывают все собственные значения оператора $T(\varkappa)$ при $\varkappa \leqslant 0$, а для $\varkappa > 0$ появляется «новое» собственное значение $\lambda_0(\varkappa)$. Если $0 < \varkappa < 1$, то $\lambda_0(\varkappa) = -\rho(\varkappa)^2$, где $\rho(\varkappa)$ — (единственный) положительный корень уравнения $\operatorname{th}\rho = \varkappa\rho$. Функция $\lambda_0(\varkappa)$ голоморфна в окрестности положительной вещественной полуоси и $\lambda_0(\varkappa) \to -\infty$ при $\varkappa \searrow 0$; эта функция не может быть аналитически продолжена через точку $\varkappa = 0$ на отрицательные значения $\varkappa$ [1].

Если выйти в комплексную область, то окажется, что все функции $\lambda_n(\varkappa)$, включая $\lambda_0(\varkappa)$, имеют аналитические продолжения и образуют одну аналитическую функцию $\lambda(\varkappa)$, которая является обратной к мероморфной функции $\zeta^{-1/2}\operatorname{tg}\zeta^{1/2}$. Аналитическая функция $\lambda(\varkappa)$ весьма сложно устроена в окрестности нуля; сама точка $\varkappa = 0$ является предельной для точек ветвления. Это объясняет невозможность продолжения функции $\lambda_0(\varkappa)$ вдоль вещественной оси на отрицательные значения $\varkappa$; однако в любой комплексной окрестности нуля можно, обходя вокруг подходящей точки ветвления, перейти от ветви $\lambda_0(\varkappa)$ к любой ветви $\lambda_n(\varkappa)$ с достаточно большим $n$.

---

[1] При вещественном $\varkappa$ оператор $T(\varkappa)$ самосопряжен и его собственные векторы $\varphi_n(\varkappa)$ образуют полную ортонормированную систему. Если $\varkappa > 0$, то эта система содержит собственный вектор $\varphi_0(\varkappa)$, соответствующий собственному значению $\lambda_0(\varkappa)$. Таким образом, *полная* система собственных векторов $\{\varphi_n(0)\}$, $n \geqslant 1$, оператора $T(0)$ при возмущении $T(\varkappa)$, $\varkappa > 0$, теряет свойство полноты.

Зная расположение точек ветвления, можно найти радиусы сходимости степенных разложений для функций $\lambda_n(\varkappa)$.

**Пример 1.12.** В качестве примера, более простого, чем предыдущий, рассмотрим дифференциальный оператор первого порядка $T(\varkappa) = -i\frac{d}{dx}$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant 1$, с граничным условием $(1+i\varkappa)\,u(0) = (1-i\varkappa)\,u(1)$. Так же как в предыдущем примере, нетрудно видеть, что семейство $T(\varkappa)$ голоморфно в расширенной комплексной плоскости. Собственные значения оператора $T(\varkappa)$ суть

$$\lambda_n(\varkappa) = 2\operatorname{arctg}\varkappa + 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.10}$$

Оператор $T(\varkappa)$ самосопряжен при вещественных $\varkappa$, если его рассматривать в гильбертовом пространстве $\mathbf{L}^2(0, 1)$. Из (1.10) следует, что ряд Тейлора для каждой функции $\lambda_n(\varkappa)$ имеет радиус сходимости 1. Все функции $\lambda_n(\varkappa)$ в совокупности образуют одну аналитическую функцию $2\operatorname{arctg}\varkappa$, имеющую логарифмические особенности в точках $\pm i$.

Интересно выяснить, что представляют собой точки $\varkappa = \pm i$ в терминах семейства $T(\varkappa)$. Оказывается, что операторы $T(\pm i)$ не имеют собственных значений: их спектры пусты. Если $T(i)$ рассматривать как невозмущенный оператор, а в качестве параметра возмущения взять $\varkappa' = \varkappa - i$, то окажется, что для семейства $T(\varkappa) = T(i+\varkappa')$ не существует рядов теории возмущений (здесь нет противоречия с общим результатом, согласно которому ряды теории возмущений для простых собственных значений — ряды Тейлора).

**Замечание 1.13.** В предыдущих примерах многообразие $\mathrm{D}(T(\varkappa))$ зависело от $\varkappa$. В том случае, когда операторы $T(\varkappa)$ имеют одну и ту же область определения, можно ожидать более регулярное поведение собственных значений. Мы вернемся к этому вопросу позднее (см. п. 3.5, 4.7).

### 5. Ряды теории возмущений

Формальные степенные ряды по $\varkappa$ для собственных значений оператора $T(\varkappa)$, входящих в конечную систему, можно получить, применяя метод § II.2,3 к ограниченно-голоморфному семейству

$$T_r(\varkappa) = T(\varkappa)\,P(\varkappa) = T_r + \varkappa T_r^{(1)} + \varkappa^2 T_r^{(2)} + \ldots \tag{1.11}$$

Сделаем, кроме того, следующие замечания:

a) Трансформирующую функцию $U(\varkappa)$ не обязательно вводить явно, как это было сделано в п. 3; достаточно применить результаты из § II.2,3 непосредственно к (1.11).

b) Если интересоваться только собственными значениями, входящими в $\lambda$-группу (см. п. II.1.2), где $\lambda$ — изолированное собственное значение оператора $T = T(0)$, то удобно выбрать в качестве контура $\Gamma$ окружность, охватывающую одно собственное значение $\lambda$ оператора $T$; тогда $P(\varkappa)$ совпадает с проектором $P(\varkappa)$ из § II.2,3. Следует отметить, что ряд (II.2.1) в рассматриваемом случае теряет смысл, так как семейство $T(\varkappa)$ не обязано быть ограниченно-голоморфным. Таким образом, коэффициенты $T^{(n)}$ нужно заменить коэффициентами разложения (1.11). Что касается оператора $S$ [см. (II.2.11)], то в качестве его определения следует взять (III.6.31). Операторы $P_j^1$, $S_j^1$ и т. д. определяются так же, как и раньше.

с) Следы различных операторов, фигурирующие в (II.2.5), (II.2.32) и т. д., также можно определить в рассматриваемом случае ввиду того, что по крайней мере один множитель в каждом выражении под знаком следа является *вырожденным оператором*, в то время как остальные множители ограничены (теорию следа см. в п. III.4.3). Так, например, все операторы $P(\varkappa)$ $P$, $D$, $P^{\binom{1}{j}}$, $S^{\binom{1}{j}}$ вырождены, причем их ранги не превосходят кратности собственного значения $\lambda$. Далее, коэффициенты $T_r^{(n)}$ разложения (1.11), которыми, согласно предыдущему замечанию, следует заменить коэффициенты $T^{(n)}$ конечномерного разложения (II.2.1), также вырождены. Это следует из леммы II.2.12, если ее применить к семейству $T_r(\varkappa) = T(\varkappa) P(\varkappa)$, где $T_r(\varkappa)$ ограниченно-голоморфен, а $P = P(0)$ вырожден.

## 6. Голоморфное семейство, связанное с вырожденным возмущением

Пусть семейство операторов $T(\varkappa) \in \mathscr{C}(X)$ определено в некоторой окрестности нуля и существуют операторы $T_0$, $T^0 \in \mathscr{C}(X)$ такие, что

$$T_0 \subset T(\varkappa) \subset T^0, \quad [T(\varkappa)/T_0] = [T^0/T(\varkappa)] = m < \infty. \tag{1.12}$$

Другими словами, оператор $T(\varkappa)$ является продолжением конечного порядка $m$ фиксированного «минимального оператора» $T_0$ и в то же время сужением порядка $m$ одного и того же «максимального оператора» $T^0$. (Такая ситуация часто встречается в теории обыкновенных дифференциальных операторов; см. ниже пример 1.15.) Далее, предположим, что для некоторого $\zeta$ резольвенты $R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1}$ существуют для всех $\varkappa$.

Нас интересует здесь следующий вопрос: *при каких условиях оператор $T(\varkappa)$ голоморфно зависит от $\varkappa$?* Для того чтобы ответить на этот вопрос, заметим прежде всего, что оператор

$$A(\zeta, \varkappa) = R(\zeta, \varkappa) - R(\zeta, 0) \tag{1.13}$$

вырожден и может быть представлен в виде

$$A(\zeta, \varkappa) u = \sum_{j, k=1}^{m} a_{jk}(\zeta, \varkappa)(u, f_j) w_k, \tag{1.14}$$

где векторы $w_k$, $k = 1, \ldots, m$, образуют базис в $\mathrm{N}(T^0 - \zeta)$, а векторы $f_j$, $j = 1, \ldots, m$, образуют базис в $\mathrm{R}(T_0 - \zeta)^{\perp}$ (см. лемму III.6.36).

Пусть векторы $u_j \in \mathbf{X}$, $j = 1, \ldots, m$, линейно независимы относительно $\mathbf{R}(T_0 - \zeta)$ и образуют систему, биортогональную для $\{f_j\}$. Полагая $u = u_j$ в (1.14) и подставляя (1.13), получаем

$$R(\zeta, \varkappa)\, u_j - R(\zeta, 0)\, u_j = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(\zeta, \varkappa)\, w_k. \tag{1.15}$$

Пусть $e_j$, $j = 1, \ldots, m$,— линейно независимые линейные формы, определенные на $\mathbf{D}(T^0)$ и такие, что $\det(e_i[w_k]) \neq 0$. Применение формы $e_i$ к обеим частям предыдущего равенства дает

$$\begin{gathered} e_i[R(\zeta, \varkappa)\, u_j] - e_i[R(\zeta, 0)\, u_j] = \sum_{k=1}^{m} a_{jk}(\zeta, \varkappa)\, e_i[w_k], \\ i,\ j = 1, \ldots, m. \end{gathered} \tag{1.16}$$

Эти уравнения позволяют найти коэффициенты $a_{jk}(\zeta, \varkappa)$, которые оказываются голоморфными по $\varkappa$, если функции

$$e_i[R(\zeta, \varkappa)\, u_j], \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{1.17}$$

голоморфно зависят от $\varkappa$. Возвращаясь к (1.14) и (1.13), мы видим, что резольвента $R(\zeta, \varkappa)$ голоморфна по $\varkappa$. Таким образом, доказана

**Теорема 1.14.** *Семейство $T(\varkappa)$ голоморфно, если $m^2$ функций (1.17) голоморфны по $\varkappa$.*

**Пример 1.15.** На конечном интервале $(a, b)$ рассмотрим обыкновенный дифференциальный оператор

$$Lu = p_0(x)\, u'' + p_1(x)\, u' + p_2(x)\, u \tag{1.18}$$

с граничными условиями

$$u'(a) - h_a\, u(a) = 0, \quad u'(b) + h_b\, u(b) = 0. \tag{1.19}$$

Предположим, что $h_a$ и $h_b$ суть голоморфные функции от $\varkappa$. Тогда операторы $T(\varkappa)$ в пространстве $\mathbf{X} = \mathbf{L}^p(a, b)$ или $\mathscr{C}[a, b]$, определенные формальным оператором $L$ и граничными условиями (1.19) (так же как оператор $T_3$ из п. III.2.3), образуют голоморфное семейство. Для доказательства достаточно применить теорему 1.14 с оператором $T_0$ в качестве «минимального оператора» $T_0$ и максимальным дифференциальным оператором $T$ в качестве $T^0$ (см. п. III.2.3). Здесь $m = 2$ и векторы $w_k \in \mathbf{N}(T - \zeta)$ и $f_j \in \mathbf{R}(T_0 - \zeta)^{\perp} = \mathbf{N}(T_0^* - \zeta)$ могут быть любыми двумя линейно независимыми решениями уравнения $(L - \zeta)\, w = 0$ и формально сопряженного уравнения $(M - \bar{\zeta})\, f = 0$ соответственно. В качестве линейных форм $e_i$ можно выбрать, например, такие: $e_i[w_k] = w_k(c_i)$, где $c_1, c_2$ — любые две точки на $(a, b)$ такие, что $\det(w_k(c_i)) \neq 0$. Тогда функции (1.17) голоморфны и применима теорема 1.14. В самом деле, для любого $u \in \mathbf{X}$ вектор $v = R(\zeta, \varkappa)\, u$ является единственным решением уравнения $(L - \zeta)\, v = u$, удовлетворяющим граничным условиям (1.19), и поэтому $v(x)$ для любого фиксированного $x$ является голоморфной функцией от $\varkappa$, если $h_a$ и $h_b$ также голоморфны по $\varkappa$, при условии, что $\zeta$ не является собственным значением оператора $T(\varkappa)$.

Таким образом, мы видим, что *граничные условия, голоморфно зависящие от параметра, приводят к голоморфному семейству операторов.* Следует отметить, что «голоморфными» граничными условиями мы можем считать условия вида

$$l_a u'(a) - h_a u(a) = 0, \quad l_b u'(b) + h_b u(b) = 0, \tag{1.20}$$

где $l_a$, $h_a$, $l_b$, $h_b$ голоморфно зависят от $\varkappa$, причем детерминант

$$\begin{vmatrix} l_a & h_a \\ l_b & h_b \end{vmatrix}$$

не обращается в нуль. Таким образом, в граничных условиях (1.19) величины $h_a(\varkappa)$ и $h_b(\varkappa)$ могут принимать значение $\infty$. Так будет в том случае, когда, например, $h_a$ и $h_b$ линейны по $\varkappa$. Итак, семейство $T(\varkappa)$ может оказаться голоморфным во всех точках расширенной плоскости (ср. примеры 1.4, 1.5).

## § 2. Голоморфные семейства типа (A)

### 1. Определение

Важный класс голоморфных семейств операторов образуют семейства, которые мы назовем *голоморфными типа* (A) [1]. Семейство операторов $T(\varkappa) \in \mathscr{C}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, определенное в области $\mathrm{D}_0$ комплексной плоскости, называется голоморфным типа (A), если i) многообразие $\mathbf{D}(T(\varkappa)) = \mathbf{D}$ не зависит от $\varkappa$ и ii) вектор-функция $T(\varkappa)u$ голоморфна в $\mathrm{D}_0$ для каждого $u \in \mathbf{D}$.

В этом случае $T(\varkappa)u$ имеет разложение Тейлора в каждой точке $\varkappa \in \mathrm{D}_0$. Если, например, точка $\varkappa = 0$ принадлежит $\mathrm{D}_0$, то

$$T(\varkappa)u = Tu + \varkappa T^{(1)}u + \varkappa^2 T^{(2)}u + \ldots, \quad u \in \mathbf{D}, \tag{2.1}$$

причем радиус сходимости этого ряда не зависит от $u$. Коэффициенты $T^{(n)}$ суть линейные операторы из $\mathbf{X}$ в $\mathbf{Y}$ с областью определения $\mathrm{D}$ [их линейность следует из единственности разложения (2.1) и линейности $T(\varkappa)$].

Тот факт, что голоморфное семейство $T(\varkappa)$ типа (A) голоморфно в смысле п. 1.2, может быть доказан следующим образом. Фиксируем произвольную точку в $\mathrm{D}_0$, без ограничения общности можно считать, что эта точка нулевая. Так как оператор $T = T(0)$ замкнут, то $\mathbf{D} = \mathbf{D}(T)$ является банаховым пространством относительно нормы $|||u||| = \|u\| + \|Tu\|$ (см. замечание IV.1.4); обозначим это пространство через $\mathbf{Z}$. Пусть $U$ — оператор, переводящий каждый вектор $u \in \mathbf{Z}$ в вектор $u \in \mathbf{X}$; $U$ ограничен, так как $\|u\| \leqslant |||u|||$. Оператор $T(\varkappa)$, рассматриваемый как

---

[1] Голоморфные семейства этого типа и, в частности, ограниченно-голоморфные семейства изучались, начиная с работ Реллиха [1] и [3] (в которых рассматриваются только самосопряженные семейства). См. Хайнц [1], Гёльдер [1], Т. Като [1], [3], [6], Секефальви-Надь [1], [2], Порат [1], [2], Реллих [6], [7], [8], Розенблум [1], Шефке [3], [4], [5], Шрёдер [1], [2], [3], Шмульян [1], Вольф [1].

оператор из $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Y}$, обозначим через $V(\varkappa)$. Ввиду неравенства $\|u\| \leqslant |||u|||$ из замкнутости $T(\varkappa)$ следует замкнутость $V(\varkappa)$. Так как оператор $V(\varkappa)$, кроме того, определен на всем $\mathbf{Z}$, то он принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$ (см. теорему III.5.20). Поскольку вектор-функция $V(\varkappa)u = T(\varkappa)u$ голоморфна для каждого $u \in \mathbf{Z}$, то семейство $V(\varkappa)$ ограниченно-голоморфно (см. теорему III.3.12). Так как $U$ отображает $\mathbf{Z}$ на $\mathbf{D}$ взаимнооднозначно и $T(\varkappa)U = V(\varkappa)$, то семейство $T(\varkappa)$ голоморфно.

Кстати, из ограниченной голоморфности $V(\varkappa)$ следует, что отношение $(\|u\| + \|V(\varkappa_1)u\|)/(\|u\| + \|V(\varkappa_2)u\|)$ ограничено для всех $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ из компактного подмножества $\mathrm{D} \subset \mathrm{D}_0$ и всех $u \in \mathbf{Z}$. Так как $V(\varkappa)u = T(\varkappa)u$, то

$$(\|u\| + \|T(\varkappa_1)u\|)/(\|u\| + \|T(\varkappa_2)u\|) \leqslant M,$$
$$\varkappa_1, \varkappa_2 \in \mathrm{D}, \quad u \in \mathbf{D}. \tag{2.2}$$

Далее, имеем $T'(\varkappa)u = V'(\varkappa)u$, где $T'(\varkappa)$ — оператор, определенный равенством $T'(\varkappa)u = dT(\varkappa)u/d\varkappa$, $u \in \mathbf{D}$. Так как отношение $\|V'(\varkappa)u\|/(\|u\| + \|V(\varkappa)u\|)$ ограничено для всех $\varkappa \in \mathrm{D}$ и $u \in \mathbf{Z}$, то справедливо неравенство вида

$$\|T'(\varkappa)u\| \leqslant a'\|u\| + b'\|T(\varkappa)u\|, \quad \varkappa \in \mathrm{D}, \quad u \in \mathbf{D}. \tag{2.3}$$

Отметим, однако, что оператор $T'(\varkappa)$ может быть незамкнут; поэтому семейство $T'(\varkappa)$ не обязано быть голоморфным.

Аналогично можно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\|T(\varkappa_1)u - T(\varkappa_2)u\| \leqslant \varepsilon(\|u\| + \|T(\varkappa)u\|), \tag{2.4}$$

если $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa \in \mathrm{D}$ и $|\varkappa_1 - \varkappa_2| < \delta$. Иначе можно сказать, что каждый оператор $T(\varkappa)$ ограничен относительно любого оператора $T(\varkappa')$ и семейство $T(\varkappa)$ относительно непрерывно.

**Пример 2.1.** В дальнейшем мы приведем много примеров голоморфных семейств типа (А). Здесь мы дадим почти тривиальный пример такого семейства. Пусть $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ и $T(\varkappa) = \varkappa T$. При $\varkappa \neq 0$ операторы $T(\varkappa)$ образуют голоморфное семейство типа (А). Нулевую точку, вообще говоря, следует исключить из рассмотрения, так как оператор 0 с областью определения $\mathbf{D}(T)$ незамкнут, если $T$ неограничен. [Можно было бы не исключать точку $\varkappa = 0$, если бы мы не требовали замкнутости $T(\varkappa)$ в определении голоморфного семейства, однако по ряду причин удобно рассматривать именно голоморфные семейства замкнутых операторов $T(\varkappa)$.]

Более того, семейство $T(\varkappa) = \varkappa T$ *нельзя* сделать всюду голоморфным [не говоря уже о типе (А)], *полагая* $T(0) = 0$ (с областью определения $\mathbf{X}$). Оператор $T(0)$ в этом случае замкнут, однако, как нетрудно видеть, резольвента $R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1}$ не является ограниченно голоморфной в точке $\varkappa = 0$ для любого $\zeta$ [даже в том случае, когда существует $\zeta \neq 0$, принадлежащее $\mathrm{P}(T(\varkappa))$ для всех $\varkappa$ в окрестности нуля]. Поэтому, согласно теореме 1.3, семейство $T(\varkappa)$ не может быть голоморфным.

**Замечание 2.2.** Остается открытым вопрос: является ли голоморфное семейство $T(\varkappa)$, для которого $\mathrm{D}(T(\varkappa))$ не зависит от $\varkappa$, голоморфным типа (А) [1]? При некоторых не очень жестких дополнительных предположениях на этот вопрос можно ответить положительно.

**Теорема 2.3.** *Пусть операторы* $T(\varkappa) \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$ *имеют постоянную (не зависящую от* $\varkappa$*) область определения* $D$ *и образуют голоморфное в окрестности нуля семейство. Далее, предположим, что оператор* $T(0)$ *имеет непустое резольвентное множество,* $T(0)$ *и* $T(0)^*$ *плотно определены (в* $\mathrm{X}$ *и* $\mathrm{X}^*$ *соответственно) и оператор* $T(0)\, R(\zeta, \varkappa)$ *равномерно ограничен в окрестности нуля для некоторого* $\zeta \in \mathrm{P}(T(0))$. *Тогда* $T(\varkappa)$ *— голоморфное семейство типа* (А) *в окрестности нуля.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что из равенства $\mathrm{D}(T(0)) = \mathrm{D}(T(\varkappa))$ следует, что $T(0)\, R(\zeta, \varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$, $T(0)\, R(\zeta, 0) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ (см. задачу III.5.22). Существенно, что операторы $T(0)\, R(\zeta, \varkappa)$ ограничены *равномерно* по $\varkappa$ в окрестности нуля.

Предположим для простоты, что $\zeta = 0$. Тогда семейство $R(0, \varkappa)$ ограниченно-голоморфно по теореме 1.3. Поэтому функция $\varphi(\varkappa; f) = (T(0)\, R(0, \varkappa)\, u, f) = (R(0, \varkappa)\, u,\ T(0)^* f)$ голоморфна в окрестности нуля для каждого $u \in \mathrm{X}$ и каждого $f \in \mathrm{D}(T(0)^*) \equiv \mathrm{D}^* \subset \mathrm{X}^*$. Так как многообразие $\mathrm{D}^*$ плотно в $\mathrm{X}^*$ и функция $\| T(0)\, R(0, \varkappa) \|$ ограничена по предположению, то из теоремы III.3.12 и следующего за ней замечания вытекает, что семейство $(T(0)\, R(0, \varkappa))^{-1}$ ограниченно-голоморфно. Поэтому семейство $(T(0)\, R(0, \varkappa))^{-1} = T(\varkappa)\, R(0, 0)$ ограниченно-голоморфно (см. замечание в конце п. 1.1) и, следовательно, вектор-функция $T(\varkappa)\, u$ голоморфна для каждого $u \in \mathrm{D}(T(0))$.

Как мы увидим в последующих параграфах, голоморфные семейства типа (А) по сравнению с общими голоморфными семействами обладают рядом специфических свойств. В этой связи представляет интерес

**Теорема 2.4.** *Предположим, что операторы* $T(\varkappa) \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$, $\varkappa \in \mathrm{D}_0$, *образуют голоморфное семейство типа* (А) *и имеют непустое резольвентное множество для каждого* $\varkappa$. *Если для некоторого* $\varkappa_0$ *оператор* $T(\varkappa_0)$ *имеет компактную резольвенту, то все операторы* $T(\varkappa)$ *имеют компактную резольвенту.*

---

[1] В этой связи интересно отметить, что Реллих [5] привел пример вещественно-голоморфного семейства $T(\varkappa)$ с постоянной областью определения $\mathrm{D} = \mathrm{D}(T(\varkappa))$, для которого вектор-функция $T(\varkappa)\, u$ не является вещественно-голоморфной ни для какого $u \in \mathrm{D}$. Это семейство имеет (комплексно) голоморфное расширение $T_1(\varkappa)$, для которого, однако, многообразие $\mathrm{D}(T(\varkappa))$ зависит от $\varkappa$.

Доказательство. Пусть $D'$ — множество тех $\varkappa$, для которых $T(\varkappa)$ имеет компактную резольвенту; докажем, что $D'$ открыто и замкнуто в $D_0$. Тот факт, что $D'$ открыто, следует из теоремы IV.3.17, так как оператор $T(\varkappa_2)$ ограничен относительно $T(\varkappa_1)$, если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ достаточно близки [см. (2.4)]. С другой стороны, теорема IV.2.26 показывает, что $D'$ замкнуто в $D_0$ [здесь семейство $T(\varkappa)$ не обязано быть голоморфным типа (А)].

**Пример 2.5.** Примером, в некотором смысле противоположным примеру 2.1, служит семейство $T(\varkappa) = (U + \varkappa)^{-1}$, где оператор $U \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ *квазинильпотентен* и обратим. Тогда $\mathrm{D}(T(\varkappa)) = \mathrm{X}$ для $\varkappa \neq 0$, в то время как $\mathrm{D}(T(0)) = \mathrm{R}(U)$ является собственным подмножеством в $\mathrm{X}$. Семейство $T(\varkappa)$ — голоморфное семейство типа (А) для $\varkappa \neq 0$; более того, оно ограниченно-голоморфно. Интересно отметить, что семейство $T(\varkappa)$ голоморфно для всех $\varkappa$ (это следует из равенств $T(\varkappa)\,U(\varkappa) = 1$, $U(\varkappa) = U + \varkappa$), но не является голоморфным типа (А) для всех $\varkappa$.

Предположим теперь, что $U$ *компактен*. Тогда $T(0) = U^{-1}$ имеет компактную резольвенту. Однако $T(\varkappa)$ не обладает этим свойством, если $\varkappa \neq 0$. Это замечание показывает, что теорема 2.4 неверна для общих голоморфных семейств $T(\varkappa)$.

## 2. Критерий голоморфности типа (А)

**Теорема 2.6** [1]. *Пусть $T$ — замыкаемый оператор из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$ и $T^{(n)}$, $n = 1, 2, \ldots,$ — операторы из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$, области определения которых содержат $\mathrm{D}(T) = \mathrm{D}$. Предположим, что существуют постоянные $a, b, c \geqslant 0$ такие, что*

$$\| T^{(n)}u \| \leqslant c^{n-1} (a \| u \| + b \| Tu \|), \quad u \in \mathrm{D}, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{2.5}$$

*Тогда ряд (2.1) для $|\varkappa| < 1/c$ определяет оператор $T(\varkappa)$ с областью определения $\mathrm{D}$. Если $|\varkappa| < (b + c)^{-1}$, то оператор $T(\varkappa)$ замыкаем и замыкания $\tilde{T}(\varkappa)$ образуют голоморфное семейство типа* (А).

**Замечание 2.7.** Условие (2.5) записано таким образом, чтобы оно принимало удобный вид, когда $T^{(2)} = T^{(3)} = \ldots = 0$. В этом случае можно положить $c = 0$, если

$$\| T^{(1)}u \| \leqslant a \| u \| + b \| Tu \|, \quad u \in \mathrm{D}. \tag{2.6}$$

Отметим также, что требуемые константы $a$, $b$, $c$ существуют, если ряд (2.1) конечен и операторы $T^{(n)}$ $T$-ограничены (см. п. IV.1.1).

Доказательство теоремы 2.6. Если $|\varkappa| < c^{-1}$, то оператор $T(\varkappa)$ корректно определен равенством (2.1), так как

---

[1] Эта теорема по существу доказана Реллихом [3] (в этой статье рассматриваются самосопряженные семейства).

$$\| \varkappa^n T^{(n)} u + \ldots + \varkappa^{n+p} T^{(n+p)} u \| \leqslant$$
$$\leqslant (c^{n-1} \,|\varkappa|^n + \ldots + c^{n+p-1}\, |\varkappa|^{n+p}) (a \|u\| + b \|Tu\|) \leqslant$$
$$\leqslant c^{n-1}\, |\varkappa|^n (1 - c\,|\varkappa|)^{-1} (a\|u\| + b\|Tu\|) \to 0, \quad n \to \infty,$$

и, следовательно, ряд в правой части (2.1) сходится.

Если мы запишем (2.1) в виде $T(\varkappa)\, u = Tu + A(\varkappa)\, u$, то из предыдущих неравенств будет следовать, что

$$\| A(\varkappa)\, u \| \leqslant |\varkappa|\, (1 - c\,|\varkappa|)^{-1} (a\|u\| + b\|Tu\|), \quad u \in \mathbf{D}. \tag{2.7}$$

Таким образом, оператор $A(\varkappa)$ является $T$-ограниченным, причем его $T$-грань не превосходит $b\,|\varkappa|\,(1 - c\,|\varkappa|)^{-1}$ и, следовательно, меньше 1, если $|\varkappa| < (b + c)^{-1}$. Из теоремы IV.1.1 следует, что $T(\varkappa)$ замыкаем при $|\varkappa| < (b + c)^{-1}$. Отметим попутно следующее неравенство, которое следует из (IV.1.3):

$$a\|u\| + b\|Tu\| \leqslant (1 - c\,|\varkappa|)\,(1 - (b + c)\,|\varkappa|)^{-1} \times$$
$$\times (a\|u\| + b\|T(\varkappa)\, u\|). \tag{2.8}$$

Пусть $\widetilde{T}$ — замыкание оператора $T$. Многообразие $\widetilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}(\widetilde{T})$ является банаховым пространством относительно нормы $|||u||| = (a + \varepsilon)\|u\| + b\|Tu\|$, $\varepsilon > 0$; обозначим это банахово пространство через $\mathbf{Z}$. Многообразие $\mathbf{D}$ плотно в $\mathbf{Z}$ ввиду того, что $\widetilde{T}$ есть замыкание $T$. Обозначим через $V^{(n)}$ оператор $T^{(n)}$, рассматриваемый как оператор из $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Y}$; $V^{(n)}$ плотно определен и $\|V^{(n)}u\| \leqslant c^{n-1} |||u|||$. Поэтому $V^{(n)}$ имеет замыкание $\widetilde{V}^{(n)} \in \mathscr{B}(\mathbf{Z}, \mathbf{Y})$, причем $\|\widetilde{V}^{(n)}\| \leqslant c^{n-1}$. Если обозначить через $V(\varkappa)$ и $V$ операторы $T(\varkappa)$ и $T$, рассматриваемые как операторы из $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Y}$, то имеем

$$V(\varkappa) = V + \varkappa V^{(1)} + \varkappa^2 V^{(2)} + \ldots; \tag{2.9}$$

очевидно, что $V(\varkappa)$ имеет замыкание $\widetilde{V}(\varkappa)$, получающееся заменой операторов $V$ и $V^{(n)}$ в правой части (2.9) на $\widetilde{V}$ и $\widetilde{V}^{(n)}$. Таким образом, для каждого $u \in \widetilde{\mathbf{D}}$ вектор-функция $\widetilde{T}(\varkappa)\, u = \widetilde{V}(\varkappa)\, u$ голоморфна, если $|\varkappa| < (b + c)^{-1}$.

**Замечание 2.8.** Неравенства (2.5) *необходимы* для того, чтобы семейство $T(\varkappa)$ было голоморфным типа (A) в следующем смысле. Если семейство $T(\varkappa)$ голоморфно типа (A) в окрестности нуля, то имеет место разложение (2.1), причем коэффициенты $T^{(n)}$ этого разложения удовлетворяют условиям (2.5). Это вытекает из того факта, что введенное выше семейство $V(\varkappa)$ ограниченно-голоморфно в окрестности нуля и, следовательно, допускает степенное разложение вида (2.9). Имеем $\|V^{(n)}\| \leqslant Mr^{-n}$, где $r$ — любое положительное число, меньшее радиуса сходимости этого ряда (неравенства Коши). Поэтому $\|T^{(n)}u\| = \|V^{(n)}u\| \leqslant Mr^{-n}\, |||u|||$, откуда вытекают условия (2.5).

### 3. Замечания о голоморфных семействах типа (А)

Результаты о голоморфных семействах операторов упрощаются и уточняются, если ограничиться голоморфными семействами типа (А). Здесь мы приведем эти модифицированные результаты в виде ряда замечаний.

**Замечание 2.9.** Предположим, что спектр $\Sigma = \Sigma(T)$ оператора $T$ разбивается на две части замкнутой кривой $\Gamma$. Тогда по теореме 1.7 $\Sigma(\varkappa) = \Sigma(T(\varkappa))$ также разбивается кривой $\Gamma$ для достаточно малых $\varkappa$. Можно дать оценку, насколько для этого должно быть мало $\varkappa$. Согласно теореме IV.3.18, достаточно, чтобы условие (IV.3.14) выполнялось для всех $\zeta \in \Gamma$, причем ввиду неравенства (2.7) постоянные $a$, $b$ следует заменить на $a\,|\varkappa|\,(1 - c\,|\varkappa|)^{-1}$ и $b\,|\varkappa|\,(1 - c\,|\varkappa|)^{-1}$. Это означает, что разбиение спектра кривой $\Gamma$ имеет место, если

$$|\varkappa| < r_0 = \min_{\zeta \in \Gamma} (a\,\|R(\zeta, T)\| + b\,\|TR(\zeta, T)\| + c)^{-1}. \qquad (2.10)$$

Проектор $P(\varkappa)$, определяемый формулой (1.3), голоморфен по $\varkappa$. Если часть спектра $\Sigma$, лежащая внутри контура $\Gamma$, является конечной системой собственных значений, то эти собственные значения и соответствующие им собственные проекторы и нильпотентные части рассматриваемого оператора $T(\varkappa)$ аналитичны при условии (2.10) и при этом возможны лишь алгебраические особенности (см. п. 1.3).

**Замечание 2.10.** Существование формального степенного ряда для $T(\varkappa)$, которого может и не быть в случае общего голоморфного семейства, дает возможность перенести на рассматриваемый случай результаты § II.1, II.2 без замены $T^{(n)}$ на $T_r^{(n)}$ (см. п. 1.5). Это возможно из-за того, что разложение (II.1.13) справедливо и для неограниченных операторов $T^{(n)}$; эти операторы входят в формулы п. II.1.2 только в комбинациях вида $T^{(n)}R(\zeta)$, $T^{(n)}S$, $T^{(n)}P$, $T^{(n)}D = T^{(n)}PD$, *каждая из которых принадлежит* $\mathscr{B}(X)$ (согласно утверждению задачи III.5.22). Таким образом, мы видим, что все формулы из п. II.1.2 справедливы в рассматриваемом случае.

Отметим, однако, следующее важное обстоятельство. Такие формулы, как (II.2.28), теряют смысл в рассматриваемом случае, так как операторы, фигурирующие в них под знаком *следа*, вообще говоря, не являются вырожденными. Тем не менее окончательный результат (II.2.29) и последующие аналогичные формулы верны ввиду того, что в этих формулах все операторы под знаком следа содержат множитель $P$ и, следовательно, вырождены. Это проверяется явным вычислением интеграла так же, как (II.2.18); в результате интеграл принимает вид полинома от ограниченных операторов, каждый член которого содержит в качестве множителя вырожденный оператор. В каждом таком члене сомножители можно переставлять циклически под знаком следа. Как нетрудно проверить, это приводит к доказательству формулы (II.2.30).

**Замечание 2.11.** Для приложений условие (2.5) полезно обобщить следующим образом [1]):

$$\| T^{(n)}u \| \leqslant c^{n-1} \chi (\| u \|, \ \| Tu \|), \quad u \in \mathbf{D}, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{2.11}$$

Здесь $\chi (s, t)$ — неотрицательная функция переменных $s, t \geqslant \geqslant 0$, обладающая следующими свойствами:

i) $\chi (s, t$ положительно однородна порядка 1, т. е. $\chi (ks, kt) = = (k\chi (s, t)$;

ii) $\chi (s, t)$ монотонно возрастает по совокупности $s$ и $t$, т. е. $\chi (s, t) \leqslant \chi (s', t')$, если $0 \leqslant s \leqslant s'$ и $0 \leqslant t \leqslant t'$. Теорему 2.6 можно обобщить, заменяя условие (2.5) на (2.11), при этом заключение теоремы примет вид: $\widetilde{T} (\varkappa)$ — *голоморфное семейство типа* (A), *если* $| \varkappa | < (\chi (+0, 1) + c)^{-1}$. Число $r_0$ из условия (2.10) вычисляется по формуле

$$r_0 = \min_{\zeta \in \Gamma} (\chi (\| R (\zeta, T) \|, \ \| TR (\zeta, T) \|) + c)^{-1}. \tag{2.12}$$

Примерами функций $\chi (s, t)$ могут служить

$$as + bt, \quad a (st)^{1/2}, \quad (as^2 + bt^2)^{1/2}. \tag{2.13}$$

Следует отметить, что из (2.11) вытекает условие (2.5) с подходящими постоянными $a$ и $b$. Но дело здесь в том, что, усиливая предположения, мы получаем более сильные результаты.

**Пример 2.12.** На конечном интервале $[a, b]$ рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$L (\varkappa) u = p_0 (x, \varkappa) u'' + p_1 (x, \varkappa) u' + p_2 (x, \varkappa) u, \tag{2.14}$$

коэффициенты которого предполагаются голоморфными по $\varkappa$ в окрестности нуля, вещественными для вещественных $\varkappa$ и обладающими подходящими свойствами непрерывности по $x$. Далее, пусть $-p_0 (x, \varkappa) \geqslant \delta > 0$ для вещественных $\varkappa$. Обозначим через $T (\varkappa)$ оператор в $\mathbf{X} = \mathbf{C} [a, b]$ или $\mathbf{L}^p (a, b)$, построенный по $L (\varkappa)$, так же как в п. III.2.3 по $L$ был построен оператор $T_1$ [граничные условия $u (a) = u (b) = 0$]. Семейство $T (\varkappa)$ удовлетворяет предположениям теоремы 2.6. В самом деле, $T (\varkappa)$ можно представить в виде (2.1), где $T^{(0)} = T$,

$$T^{(n)}u = p_0^{(n)} (x) u'' + p_1^{(n)} (x) u' + p_2^{(n)} (x) u, \quad u (a) = u (b) = 0, \tag{2.15}$$

и $p_j^{(n)} (x)$ суть коэффициенты Тейлора функции $p_j (x, \varkappa)$. Поскольку эти коэффициенты удовлетворяют неравенствам вида $| p_j^{(n)} (x) | \leqslant KN^n$, то, как следует из (IV.1.27), условия (2.5) выполнены. Учитывая, что спектр

---

[1]) См. Шрёдер [1], Шефке [4], Порат [1].

оператора $T = T(0)$ состоит из изолированных собственных значений кратности 1 (см. пример (III.6.20)), мы видим (теорема 2.6), что эти собственные значения и соответствующие им собственные проекторы голоморфны по $\varkappa$ в окрестности нуля.

**Пример 2.13.** Рассмотрим оператор Шрёдингера

$$L(\varkappa)\,u = -\Delta u + q(x)\,u + \varkappa q^{(1)}(x)\,u \tag{2.16}$$

в $\mathrm{R}^3$. Предположим, что потенциал $q(x)$ вещественнозначный и может быть представлен в виде $q_0 + q_1$, где $q_1 \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R}^3)$, а функция $q_0$ ограничена. Тогда существует самосопряженное сужение $H$ оператора $L(0)$ [действующее в $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{R}^3)$], которое определяется как замыкание минимального оператора (см. п. V.5.3). Многообразие $\mathrm{D}(H)$ совпадает с $\mathrm{D}(H_0)$, где $H_0$ — частный случай оператора $H$ для $q \equiv 0$. Оператор $Q$ умножения на функцию $q(x)$ является $H_0$-ограниченным, и его относительная грань равна нулю. Оператор $Q^{(1)} = q^{(1)}(x)$ также $H_0$-ограничен, и, следовательно, $H$-ограничен ($H$-грань равна нулю), если функция $q^{(1)}$ представима как сумма двух вещественных функций из $\mathrm{L}^2$ и $\mathrm{L}^\infty$. Итак, операторы $T(\varkappa)$, определенные как замыкания минимальных операторов для $L(\varkappa)$, образуют самосопряженное семейство, определенное для всех комплексных $\varkappa$. Отсюда следует, что изолированные собственные значения и соответствующие собственные проекторы оператора $T(\varkappa)$ голоморфно зависят от $\varkappa$ по крайней мере в окрестности вещественной оси [1]).

## 4. Радиусы сходимости и оценки погрешностей приближения

Полученные в конечномерном случае (см. § II.3) оценки радиусов сходимости рядов теории возмущений, а также оценки погрешностей приближений, даваемых частичными суммами этих рядов, можно перенести без существенных изменений на случай голоморфных семейств типа (А). Проектор $P(\varkappa)$, определенный формулой (1.3), голоморфен в круге $|\varkappa| < r_0$, где $r_0$ вычисляется по формуле (2.10) или (2.12) в зависимости от рассматриваемого случая. В частности, голоморфен тотальный проектор $P(\varkappa)$, соответствующий $\lambda$-группе собственных значений оператора $T(\varkappa)$, где $\lambda$ — изолированное собственное значение кратности $m$ оператора $T$; контур $\Gamma$, охватывающий точку $\zeta = \lambda$, следует выбрать так, чтобы число $r_0$ было максимально возможным. Среднее арифметическое $\hat{\lambda}(\varkappa)$ собственных значений $\lambda$-группы (учитываемых с кратностями) также голоморфно в круге $|\varkappa| < r_0$ и, следовательно, радиусы сходимости рядов для $P(\varkappa)$ и $\hat{\lambda}(\varkappa)$ не меньше чем $r_0$. Если $\lambda$-группа состоит из одного собственного значения $\lambda(\varkappa)$ (нет расщепления), как, например, в случае $m = 1$, то $\lambda(\varkappa)$ представляется степенным рядом, сходящимся в круге $|\varkappa| < r_0$.

---

[1]) Здесь мы использовали некоторые результаты о самосопряженных семействах.

Результаты п. II.3.2, II.3.3 переносятся на рассматриваемый случай без изменений; отметим, что в этом случае операторы в (II.3.10) ограничены (см. замечание 2.10).

Другие результаты § 3 главы II также полезны в нашем случае. Ясно, что теперь нужно положить $N = \infty$ в формуле (II.3.45) и последующих формулах, в которые явно входит размерность $N$ пространства $\mathbf{X}$. Эти оценки могут не быть очень точными, однако большинство из них достаточно удовлетворительно, так же как в конечномерном случае (см., в частности, п. II.3.5).

Оценка (II.3.32) для $(T - \lambda)\,\varphi(\varkappa)$, которая также верна в рассматриваемом случае, заслуживает особого внимания. Так как оператор $T - \lambda$, вообще говоря, неограничен, то эта оценка довольно сильная. Соединенная с оценкой (II.3.30) для $\varphi(\varkappa)$, она приводит к оценке погрешности приближения для функции $\varphi(\varkappa)$ относительно нормы

$$|||\, u \,||| = \alpha \,\| u \| + \beta \,\| (T - \lambda)\, u \|, \tag{2.17}$$

более сильной, чем исходная норма $\|\cdot\|$. Это дает возможность, например, оценить погрешность приближения в $\mathbf{L}^\infty$-норме для собственной функции оператора в $\mathbf{L}^2$ или дать оценку производных собственной функции.

**Пример 2.14.** Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{C}\,[0, \pi]$ [1]. Рассмотрим семейство $T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}$, где $T$ — дифференциальный оператор $Tu = -u''$ на интервале $0 \leqslant x \leqslant \pi$ с граничными условиями $u(0) = u(\pi) = 0$ (см. примеры III.6.21 и IV.3.20), а $T^{(1)}$ — *ограниченный* оператор. Каждое собственное значение $\lambda_n = n^2$ оператора $T$ изолировано и имеет кратность 1, поэтому соответствующие собственные значения $\lambda_n(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ голоморфны, по крайней мере для малых $\varkappa$. Оценим радиус сходимости ряда Тейлора функции $\lambda_n(\varkappa)$.

Для этого рассмотрим замкнутую кривую $\Gamma_n'$, аналогичную кривой $\Gamma_n$ из примера IV.3.20, но бóльшую по размерам: $\Gamma_n'$ состоит из отрезков парабол $\xi = \alpha^2 - \eta^2/4\alpha^2$, $\alpha = n \pm \frac{1}{2}$ [см. (III.6.49)], и отрезков горизонтальных прямых $\eta = \pm (2n - 1)/\pi$. Из (III.6.48) следует, что $\| R(\zeta) \| \leqslant \pi \left(n - \frac{1}{2}\right)^{-1}$ для $\zeta \in \Gamma_n'$. Так как контур $\Gamma_n'$ охватывает одно собственное значение $\lambda_n$, то нижняя граница для радиуса сходимости ряда Тейлора функции $\lambda_n(\varkappa)$ дается формулой (2.10), в которой следует положить $b = c = 0$ и $a = \| T^{(1)} \|$. Таким образом, получаем

$$r_0 \geqslant \left(n - \frac{1}{2}\right) \Big/ \pi a, \quad a = \| T^{(1)} \|. \tag{2.18}$$

Коэффициенты $\lambda_n^{(\nu)}$ ряда Тейлора для $\lambda_n(\varkappa)$ можно оценить, например, по формулам (II.3.5). Для этого требуется вычислить максимальное расстояние от точки $\lambda_n = n^2$ до точек контура $\Gamma_n'$. Непосредственные вычисле-

---

[1] Мы рассмотрим ниже ту же задачу в пространстве $\mathbf{L}^2(0, \pi)$; см. пример 2.17.

ния приводят к неравенству $\rho \leqslant (1+4\pi^{-2})^{1/2}\, n \leqslant 1{,}2\, n$ и поэтому

$$|\lambda_n^{(\nu)}| \leqslant 1{,}2n\left(\frac{\pi a}{n-1/2}\right)^{\nu}, \quad n, \nu = 1, 2, \ldots . \tag{2.19}$$

Эта оценка не очень точна, по крайней мере для малых $\nu$. Лучшую оценку можно получить методом мажорирующих рядов. Для этого вычислим величины $p$, $q$, $s$ из (II.3.15), соответствующие собственному значению $\lambda_n = n^2$. Оператор $S = S_n$ в рассматриваемом случае есть интегральный оператор с ядром $s(y, x)$, определенным формулой (III.6.46), и поэтому $\| S \| \leqslant \leqslant \sup \int\limits_0^{\pi} | s(y, x) | \, dx$ (см. пример III.2.11; так как $\mathrm{X} = \mathrm{C}[0, \pi]$, то применима оценка для $p = \infty$). Таким образом, имеем[1] $\| S \| < 1{,}7n$ и $\| S - P/4n^2 \| \leqslant \sqrt{2}/n$. Так как $\| P \| = 4/\pi < 1{,}3$ (см. пример III.3.23), то справедливы следующие оценки:

$$p < 1{,}3a, \quad q < 1{,}7a/n, \quad s < 1{,}5/n. \tag{2.20}$$

Подстановка этих неравенств в (II.3.21) дает нижнюю границу для рассматриваемого радиуса сходимости:

$$r > 0{,}136n/a; \tag{2.21}$$

эта оценка не так точна, как оценка (2.18). Из (II.3.22) следует, что

$$|\lambda_n^{(1)}| < 1{,}3a, \quad |\lambda_n^{(2)}| < 2{,}3a^2/n, \quad |\lambda_n^{(3)}| < 8{,}1a^3/n^2, \tag{2.22}$$

эти оценки значительно точнее тех, которые получаются из (2.19). Аналогично с помощью (II.3.18) оцениваем погрешность первого приближения для $\lambda_n(\varkappa)$:

$$|\lambda_n(\varkappa) - n^2 - \varkappa\lambda_n^{(1)}| \leqslant 8{,}8\, |\varkappa|^2 a^2/n, \tag{2.23}$$

если $|\varkappa| \leqslant 0{,}136n/a$.

Отметим, что коэффициент 8,8 в правой части неравенства (2.23) определяется областью изменения переменной $\varkappa$; этот коэффициент можно уменьшить, если сузить область изменения $\varkappa$. Если, например, $|\varkappa| \leqslant 0{,}12n/a$, то

$$|\lambda_n(\varkappa) - n^2 - \varkappa\lambda_n^{(1)}| \leqslant 4{,}9\, |\varkappa^2|\, a^2/n. \tag{2.24}$$

Для собственной функции $\varphi_n(\varkappa)$, нормированной условиями (II.3.26), справедлива оценка (см. (II.3.38)):

$$\| \varphi_n(\varkappa) - \sin n\varkappa \| \leqslant 3{,}7\, |\varkappa|\, a/n, \tag{2.25}$$

если $|\varkappa| \leqslant 0{,}12n/a$; здесь $\sin nx$ — невозмущенная собственная функция нормы 1. Отметим, что в (II.3.26) имеем $\psi(x) = 2\pi^{-1} \sin nx$, и поэтому из условия нормировки следует, что векторы $\sin nx$ и $\varphi_n(\varkappa) - \sin nx$ ортогональны.

Оценка для $(T - \lambda_n)\, \varphi_n(\varkappa) = -\varphi_n''(\varkappa) - n^2\varphi_n(\varkappa)$ дается неравенством (II.3.40). Так как правая часть этого неравенства совпадает с точностью до $s_0$ с правой частью в (II.3.38), то при $|\varkappa| < 0{,}12n/a$ имеем

$$\| \varphi_n''(\varkappa) + n^2\varphi_n(\varkappa) \| \leqslant 2{,}2\, |\varkappa|\, a. \tag{2.26}$$

Оценки (2.25) и (2.26) приводят к неравенству

$$\| d^2/dx^2\, (\varphi_n(\varkappa) - \sin nx) \| \leqslant (2{,}2 + 3{,}7n)\, |\varkappa|\, a, \tag{2.27}$$

---

[1] См. Розенблум [1], где тот же самый пример изучен другим методом. Отметим, что сумма первых двух членов в выражении (III.6.46) для ядра оператора $S$ служит ядром оператора $S - P/4n^2$.

откуда после интегрирования по $x$ получаем

$$\| d/dx\, (\varphi_n(\varkappa) - \sin nx) \| \leqslant \pi\, (2{,}2 + 3{,}7n)\, |\varkappa|\, a; \tag{2.28}$$

отметим, что производная функции $\varphi_n(\varkappa) - \sin nx$ обращается в нуль в некоторой точке интервала $(0, \pi)$, так как сама функция $\varphi_n(\varkappa) - \sin nx$ равна нулю в точках 0 и $\pi$.

**Замечание 2.15.** Оценка (2.28) очень грубая. Более точный результат можно получить с помощью формулы

$$\varphi_n(\varkappa) - \sin nx = S_n\, (T - \lambda_n)\, (\varphi_n(\varkappa) - \sin nx); \tag{2.29}$$

отметим, что $S_n\,(T - \lambda_n) \subset 1 - P_n$ и $P_n\,(\varphi_n(\varkappa) - \sin nx) = 0$ согласно нормировке функции $\varphi_n(\varkappa)$. Так как $S_n$ — интегральный оператор с ядром $s(y, x)$, то, дифференцируя (2.29), получаем

$$\frac{d}{dx}\, [\varphi_n(\varkappa) - \sin nx] = S'_n\, (T - \lambda_n)\, (\varphi_n(\varkappa) - \sin nx), \tag{2.30}$$

где $S'_n$ — интегральный оператор с ядром $\frac{\partial}{\partial y} s(y, x)$, которое кусочно-непрерывно по $x$ и $y$. Поэтому

$$\left\| \frac{d}{dx}\, [\varphi_n(\varkappa) - \sin nx] \right\| \leqslant 2{,}2\, |\varkappa|\, a\, \| S'_n \|. \tag{2.31}$$

Здесь $\| S'_n \|$ оценивается величиной $\sup\limits_{y} \int\limits_0^{\pi} \left| \frac{\partial}{\partial y} s(y, x) \right| dx$, которая, как можно показать, ограничена при $n \to \infty$. Таким образом, (2.31) приводит к более точному результату, чем (2.28).

**Задача 2.16.** В примере 2.14 оценить по формулам (II.3.19) и (3.41) погрешность второго приближения для $\lambda_n(\varkappa)$ и погрешность первого приближения для $\varphi_n(\varkappa)$.

## 5. Нормальные невозмущенные операторы

Если $\mathbf{X} = \mathbf{H}$ — гильбертово пространство и $T = T(0)$ — нормальный оператор, то предыдущие результаты значительно упрощаются. При этом требуются лишь незначительные модификации по сравнению с соответствующим конечномерным случаем (см. п. II.3.5).

В силу неравенств (V.4.9) формула (2.12) принимает вид

$$r_0 = \min_{\zeta \in \Gamma} [\, \chi\, (\sup_{\lambda' \in \Sigma(T)} |\lambda' - \zeta|^{-1}, \sup |\lambda'|\, |\lambda' - \zeta|^{-1}) + c]^{-1}. \tag{2.32}$$

Если $\lambda$ — изолированное собственное значение оператора $T$ и $d$ — расстояние от $\lambda$ до множества остальных собственных значений, то удобно взять в качестве контура $\Gamma$ окружность $|\zeta - \lambda| = d/2$. Тогда $|\lambda' - \zeta|^{-1} \leqslant 2/d$ и $|\lambda'|\, |\lambda' - \zeta|^{-1} \leqslant 1 + |\zeta|\, |\lambda' - \zeta|^{-1} \leqslant 1 + (|\lambda| + 2^{-1}d)\, 2d^{-1} = 2 + 2\,|\lambda|\, d^{-1}$ для $\lambda' \in \Sigma(T)$ и $\zeta \in \Gamma$. Поэтому

$$r_0 \geqslant \left[ \chi\left( \frac{2}{d},\, 2 + \frac{2|\lambda|}{d} \right) + c \right]^{-1}. \tag{2.33}$$

Если наложить условие (2.5), то предыдущая оценка принимает вид

$$r_0 \geqslant \left[ \frac{2(a+b\,|\lambda|)}{d} + 2b + c \right]^{-1}, \tag{2.34}$$

что соответствует формуле (II.3.51).

На мажорирующие ряды, рассмотренные в предыдущем пункте, можно перенести результаты п. II.3.2—3.3, полагая

$$p = \| T^{(1)} P \|, \quad q = \| T^{(1)} S \|, \quad s = \| S \| = 1/d \tag{2.35}$$

[см. (II.3.15) и (V.3.20)]. Если оператор $T^{(1)}$ ограничен, то можно положить

$$p = \| T^{(1)} \|, \quad q = \| T^{(1)} \|/d, \quad s = 1/d, \tag{2.36}$$

так как $\| P \| = 1$.

**Пример 2.17.** Рассмотрим в гильбертовом пространстве $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(0, \pi)$ оператор из примера 2.14. В рассматриваемом случае оператор $T$ самосопряжен; так же, как и выше, собственные значения оператора $T$ суть $\lambda_n = n^2$, а нормированные собственные функции имеют вид $\varphi_n = (2/\pi)^{1/2} \sin nx$. Резольвента $R(\zeta)$ оператора $T$ есть интегральный оператор с тем же ядром $s(y, x)$, но другой нормой по сравнению с предыдущим примером. В частности, норма приведенной резольвенты $S$, соответствующей собственному значению $\lambda_n = n^2$, равна $1/d$ [см. (2.35)], где $d = d_n$ — расстояние от $\lambda_n = n^2$ до множества остальных собственных значений:

$$d_n = 2n - 1, \quad n \geqslant 2, \quad d_1 = 3. \tag{2.37}$$

Рассмотрим теперь возмущенный оператор $T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}$, где оператор $T^{(1)}$ предположим $T$-ограниченным [см. (2.6)]. Радиус сходимости ряда Тейлора для собственного значения $\lambda_n(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ оценивается согласно (2.34), где следует положить $c = 0$. Если оператор $T^{(1)}$ ограничен, то можно считать, что $a = \| T^{(1)} \|$, $b = 0$, и в качестве нижней границы для радиуса сходимости получим величину

$$\frac{d}{2a} = \frac{n - 1/2}{a}; \tag{2.38}$$

если $n = 1$, то множитель $n - 1/2$ следует заменить на $3/2$. Эта оценка точнее, чем оценка (2.18), полученная в предыдущем примере; следует, однако, отметить, что ограниченный в $\mathrm{C}[0, \pi]$ оператор $T^{(1)}$ не обязан быть ограниченным в $\mathrm{L}^2(0, \pi)$, а если он ограничен, то не обязательно имеет ту же самую норму. Если $T^{(1)}$ — оператор умножения на функцию $q(x)$, то $\| T^{(1)} \|_{\mathrm{C}} = \| T^{(1)} \|_{\mathrm{L}^2} = \sup |q(x)|$; в этом случае $\mathrm{L}^2$-теория дает более точную оценку для $r_0$.

В этой связи поучительно сравнить различные оценки, получаемые методом мажорирующих рядов в $\mathrm{L}^2$-теории и С-теории. Подставляя значение $d = d_n$ из (2.37) в (2.36) и используя формулу (II.3.21), получаем в качестве нижней границы для радиуса сходимости величину $(n - 1/2)/2a$; эта оценка слабее, чем (2.38). Следующие оценки получаются так же, как в примере 2.14:

$$\lambda_n(\varkappa) - \lambda \ll \Psi(\varkappa) \equiv a\varkappa + \frac{\dfrac{a^2\varkappa^2}{n - 1/2}}{1 - \dfrac{a\varkappa}{n - 1/2} + \left(1 - \dfrac{2a\varkappa}{n - 1/2}\right)^{1/2}} =$$

$$= \left(n - \frac{1}{2}\right)\left[1 - \left(1 - \frac{2a\varkappa}{n - 1/2}\right)^{1/2}\right] = \frac{2a\varkappa}{1 + \left(1 - \dfrac{2a\varkappa}{n - 1/2}\right)^{1/2}}, \tag{2.39}$$

$$|\lambda_n^{(1)} \leqslant a, \ |\lambda_n^{(2)}| \leqslant a^2/2\,(n-1/2), \ |\lambda_n^{(3)}| \leqslant a^3/2\,(n-1/2)^2, \ \ldots, \tag{2.40}$$

$$|\lambda_n(\varkappa)-n^2-\varkappa\lambda_n^{(1)}| \leqslant 2\,|\varkappa|^2\,a^2/(n-1/2), \quad \text{если} \quad |\varkappa| \leqslant \frac{n-1/2}{2a}, \tag{2.41}$$

$$\left\| \varphi_n(\varkappa)-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx \right\| \leqslant \frac{2\,|\varkappa|\,a}{n-1/2}, \quad |\varkappa| \leqslant \frac{n-1/2}{2a}. \tag{2.42}$$

При $n = 1$ во всех предыдущих формулах выражение $n - 1/2$ следует заменить на 3/2. Оценки (2.39) — (2.42) интересно сравнить с соответствующими оценками в примере 2.14. При этом следует иметь в виду, что нормы в (2.25) и (2.42) суть C-норма и $L^2$-норма соответственно, собственные значения одинаковы в обоих случаях, а собственные функции отличаются лишь нормирующими множителями. Оказывается, что $L^2$-теория дает, как правило, более точные результаты, чем C-теория, в том случае когда $\| T^{(1)} \|_C = \| T^{(1)} \|_{L^2}$ (например, для оператора умножения на функцию).

Оценки погрешностей приближения для собственных векторов, полученные в рамках C-теории, имеют самостоятельный интерес, так как C-норма сильнее нормы пространства $L^2$. При получении этих оценок мы можем использовать результаты $L^2$-теории. В самом деле, при построении мажорирующей функции для собственного вектора (см. II.3.30)) мы использовали мажорирующую функцию $\Psi(\varkappa)$ для $\lambda(\varkappa) - \lambda$, а так как собственные значения рассматриваемого семейства одинаковы в двух теориях (C и $L^2$), то в качестве $\Psi(\varkappa)$ можно взять мажорирующую функцию, построенную в $L^2$-теории.

В заключение отметим, что оценки для собственных функций в C-норме можно вывести в рамках $L^2$-теории. Для этого нужно сначала оценить $(T - \lambda_n)\left(\varphi_n(\varkappa) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx\right)$ по формуле (II.3.32) и затем применить формулу (2.29) (где в соответствии с $L^2$-нормировкой функцию $\sin nx$ следует умножить на $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$). Если мы вычислим норму оператора $S_n$, рассматриваемого *как оператор из* $L^2$ *в* C, то сможем оценить C-норму вектора $\varphi_n(\varkappa) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin nx$. Норму такого оператора $S_n$ можно оценить в терминах ядра $s(y, x)$ величиной $\sup\limits_y \| s(y, \cdot) \|_2$ [$\| s(y, \cdot) \|_2$ означает $L^2$-норму $s(y, x)$, рассматриваемую как функция от $x$ при фиксированном $y$].

## § 3. Самосопряженные голоморфные семейства

### 1. Общие замечания

При рассмотрении голоморфных семейств $T(\varkappa)$ операторов в гильбертовом пространстве H наиболее важным частным случаем следует считать тот, в котором операторы $T(\varkappa)$ самосопряжены для вещественных $\varkappa$. Точнее, предположим, что семейство операторов $T(\varkappa) \in \mathscr{C}(\mathrm{H})$ голоморфно в области $\mathrm{D}_0$, симметричной относительно вещественной оси, операторы $T(\varkappa)$ плотно определены для каждого $\varkappa$ и $T(\varkappa)^* = T(\bar{\varkappa})$. Такое семейство $T(\varkappa)$

назовем *самосопряженным голоморфным семейством.* Ясно, что оператор $T(\varkappa)$ самосопряжен для каждого вещественного $\varkappa \in \mathrm{D}_0$.

Предположение самосопряженности приводит к значительным упрощениям в общей теории голоморфных семейств, изложенной в предыдущих параграфах. Предположим, например, что для некоторого вещественного $\varkappa_0 \in \mathrm{D}_0$ спектр $\Sigma(\varkappa_0) = \Sigma(T(\varkappa_0))$ имеет лакуны в точках $\alpha$ и $\beta$. Пусть $\Gamma$ — замкнутая кривая, проходящая через точки $\alpha$ и $\beta$, рассмотренная в п. V.3.5, и $\mathrm{M}'(\varkappa_0) \oplus \oplus \mathrm{M}''(\varkappa_0)$ — соответствующее разложение пространства $\mathrm{H}$ в прямую сумму. Согласно общим результатам п. 1.3, $\Sigma(\varkappa) = \Sigma(T(\varkappa))$ также разбивается кривой $\Gamma$ на части $\Sigma'(\varkappa)$, $\Sigma''(\varkappa)$ и имеет место соответствующее разложение $\mathrm{H} = \mathrm{M}'(\varkappa) \oplus \mathrm{M}''(\varkappa)$, если число $\varkappa$ достаточно близко к $\varkappa_0$. В частности, спектр $\Sigma(\varkappa)$ самосопряженного оператора $T(\varkappa)$ для вещественных $\varkappa$, близких к $\varkappa_0$, имеет лакуны в точках $\alpha$ и $\beta$. Проекторы $P(\varkappa)$ на $\mathrm{M}'(\varkappa)$ параллельно $\mathrm{M}''(\varkappa)$ образуют самосопряженное семейство:

$$P(\varkappa)^* = P(\bar{\varkappa}). \tag{3.1}$$

Для доказательства достаточно заметить, что равенство (3.1) справедливо для вещественных $\varkappa$, так как $T(\varkappa)$ самосопряжен и, следовательно, $P(\varkappa)$ — ортогональный проектор. Затем равенство (3.1) продолжается в комплексную область по теореме единственности [которая здесь очевидна, так как семейство $P(\varkappa)$ ограниченно-голоморфно].

Часть оператора $T(\varkappa)$ в инвариантном подпространстве $\mathrm{M}'(\varkappa)$ можно отождествить с оператором $T_r(\varkappa) = T(\varkappa)P(\varkappa) = P(\varkappa)T(\varkappa)P(\varkappa)$, который ограниченно-голоморфен по $\varkappa$ и самосопряжен. Для того чтобы избежать неудобств, связанных с зависимостью $\mathrm{M}'(\varkappa)$ от $\varkappa$, введем так же, как в п. 1.3, трансформирующую функцию $U(\varkappa)$. Оператор $U(\varkappa)$ в рассматриваемом случае *унитарен для вещественных* $\varkappa$, так же как в конечномерном случае (п. II.6.2). Операторы $\breve{T}(\varkappa)$, определенные формулой (1.5), образуют самосопряженное семейство, которое можно рассматривать как самосопряженное ограниченно-голоморфное семейство в (фиксированном) гильбертовом пространстве $\mathrm{M}'(\varkappa_0)$ [которое инвариантно относительно $\breve{T}(\varkappa)$]. Если, в частности, подпространство $\mathrm{M}'(\varkappa_0)$ конечномерно, то $\mathrm{M}'(\varkappa)$ также конечномерно и к семейству $\breve{T}(\varkappa)$ можно непосредственно применять результаты § II.6.

Эти рассмотрения приводят к следующим результатам. Если для вещественного $\varkappa_0$ оператор $T(\varkappa_0)$ имеет конечную систему собственных значений, то эти собственные значения *голоморфно* зависят от $\varkappa$ в окрестности точки $\varkappa_0$. При этом собственные значения могут расщепляться, но они *не имеют особенностей.* Соответствующие собственные проекторы также голоморфны по $\varkappa$, а нильпотентные части тождественно равны нулю. Короче говоря, существует полная аналогия с конечномерным случаем, если мы рассматриваем ограниченную часть спектра $\Sigma(\varkappa)$ для значений $\varkappa$, близких к $\varkappa_0$.

По поводу общих свойств рядов теории возмущений для самосопряженных голоморфных семейств $T(\varkappa)$ мы отсылаем читателя к материалу п. 1.5 и параграфа 2 гл. II. Самосопряженность семейства $T(\varkappa)$ (так же как и в конечномерном случае, см. п. II.6.1) обеспечивает неограниченную применимость процесса редукции к изолированному собственному значению $\lambda$ конечной кратности $m$ оператора $T(0)$. Этот процесс следует применять до того момента, с которого прекращается расщепление и, следовательно, среднее арифметическое собственных значений соответствующей группы совпадает с самим собственным значением. В рассматриваемом случае процесс редукции неограниченно применим потому, что на каждом шаге процесса оператор $T^{(n)}(0)$ является (конечномерным) самосопряженным оператором. Мы не будем входить в дальнейшие подробности, так как здесь нет ничего нового по сравнению с конечномерным случаем [см. п. II.6.1], поскольку мы рассматриваем ограниченно-голоморфное семейство $T_r(\varkappa) = T(\varkappa)P(\varkappa)$, которое по существу является частью $T(\varkappa)$ в $m$-мерном подпространстве $\mathbf{M}(\varkappa) = P(\varkappa)\mathbf{H}$.

Задача 3.1. Необходимым условием того, что $\lambda(\varkappa)$ не расщепляется, служит скалярность оператора $\tilde{T}^{(1)}(0)$. [В том случае, когда семейство $T(\varkappa)$ определено формулой (2.1), $\tilde{T}^{(1)}(0) = PT^{(1)}P$.]

Если $T(\varkappa)$ — самосопряженное голоморфное семейство типа (A) в окрестности точки $\varkappa = 0$, то оно представимо в виде (2.1), где $T$ — самосопряжен, а все $T^{(n)}$ симметричны [так как скалярное произведение $(T^{(n)}u, u)$ должно быть вещественным]. Обратно, семейство $T(\varkappa)$, определенное равенством (2.1), самосопряжено и принадлежит типу (A), если $T$ самосопряжен, а операторы $T^{(n)}$ *симметричны* и удовлетворяют условиям (2.5) или (2.11); это прямое следствие теоремы 2.6 и теоремы 4.4 главы V.

## 2. Продолжение собственных значений

Если $T(\varkappa)$ — самосопряженное голоморфное семейство, то изолированное собственное значение $\lambda$ конечной кратности оператора $T = T(0)$ расщепляется, вообще говоря, на несколько собственных значений $\lambda(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$, голоморфных в окрестности нуля [предполагается, что точка $\varkappa = 0$ принадлежит области определения $\mathrm{D}_0$ семейства $T(\varkappa)$]. Собственное значение $\lambda(\varkappa)$ и соответствующий ему собственный проектор будем продолжать вдоль вещественной оси, в результате снова получим собственные значения и собственные проекторы для операторов семейства $T(\varkappa)$. Это верно даже в том случае, когда график функции $\lambda(\varkappa)$

пересекает график другой такой функции, поскольку собственное значение изолировано и имеет конечную кратность. Таким образом, возникает максимальный интервал I вещественной оси, на котором функции $\lambda(\varkappa)$ и $P(\varkappa)$ голоморфны и представляют собственные значения и собственные проекторы операторов $T(\varkappa)$ [1].

Максимальный интервал I, вообще говоря, зависит от функции $\lambda(\varkappa)$. В конце интервала I собственное значение $\lambda(\varkappa)$ может вести себя по-разному: оно может стремиться к бесконечности или может поглощаться непрерывным спектром [2]. Мы проиллюстрируем эти явления на ряде примеров.

**Пример 3.2.** В качестве примера, в котором $\lambda(\varkappa) \to -\infty$ в граничной точке максимального интервала, возьмем собственное значение $\lambda_0(\varkappa)$ из примера 1.11. Максимальный интервал в этом случае есть полуось $(0, \infty)$ и $\lambda(\varkappa) \to -\infty$ при $x \to +0$ (см. рис. 1 на стр. 367).

**Пример 3.3.** Пример поглощения собственного значения непрерывным спектром дает оператор Шрёдингера, соответствующий прямоугольной потенциальной яме. Рассмотрим в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0, \infty)$ дифференциальный оператор $T(\varkappa) = -d^2/dx^2 + \varkappa q(x)$ с граничным условием $u(0) = 0$; предположим, что функция $q(x)$ имеет вид

$$q(x) = -1, \quad 0 < x < b; \quad q(x) = 0, \quad x \geqslant b. \tag{3.2}$$

Как следует из замечания в конце п. 1, $T(\varkappa)$ — самосопряженное голоморфное семейство типа (A); возмущение здесь даже ограничено, так как оператор умножения на функцию $q(x)$ ограничен. Допустим, что $T(\varkappa)$ имеет собственную функцию $\varphi(x) = \varphi(x; \varkappa)$, принадлежащую отрицательному собственному значению $\lambda = \lambda(\varkappa)$. Функция $\varphi$ удовлетворяет дифференциальным уравнениям

$$\varphi'' + (\lambda + \varkappa)\varphi = 0 \quad \text{для} \quad 0 < x < b \text{ и } \varphi'' + \lambda\varphi = 0 \quad \text{для } x \geqslant b. \tag{3.3}$$

Поэтому $\varphi = \alpha \sin(\lambda + \varkappa)^{1/2} x$ для $x < b$ и $\varphi = \beta e^{-(-\lambda)^{1/2} x}$ для $x > b$. Постоянные $\lambda$, $\alpha$, $\beta$ определяются из условий непрерывности функций $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ в точке $x = b$, так как все функции из $\mathbf{D}(T(\varkappa)) = \mathbf{D}$ должны удовлетворять этим условиям. Таким образом, приходим к следующему уравнению для $\mu = -\lambda(\varkappa) > 0$:

$$\sqrt{\varkappa - \mu} \operatorname{ctg}(\sqrt{\varkappa - \mu}\, b) = -\sqrt{\mu}. \tag{3.4}$$

Нетрудно показать, что это уравнение имеет $N$ положительных корней, если

$$\varkappa_N < \varkappa < \varkappa_{N+1}, \quad \text{где} \quad \varkappa_N = \left(N - \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 b^{-2}; \tag{3.5}$$

каждый из этих корней возрастает, начиная с нуля, при возрастании $\varkappa$ (см. рис. 2).

С другой стороны, известно, что $T(\varkappa)$ не имеет неотрицательных собственных значений; его спектр состоит из отрицательных изолированных собственных значений и непрерывной компоненты, заполняющей положительную вещественную полуось [3].

---

[1] Трансформирующая функция $U(\varkappa)$ существует и унитарна для $\varkappa \in \mathrm{I}$ и поэтому существует ортонормированный базис $\{\varphi_j(\varkappa)\}$ в $P(\varkappa)\mathbf{H}$, такой, что каждая вектор-функция $\varphi_j(\varkappa)$ голоморфна для $\varkappa \in \mathrm{I}$; см. п. 1.3 и п. II.6.2.

[2] Точное определение непрерывного спектра приведено в § X.1.

[3] Строгое доказательство этого факта будет приведено в главе X; см. сноску [2] на стр. 676.

Предположим теперь, что $\varkappa$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$. Оператор $T(\varkappa)$ не имеет собственных значений, если $\varkappa \leqslant \varkappa_1$; первое собственное значение $\lambda_1(\varkappa)$ возникает при $\varkappa = \varkappa_1 + 0$, функция $\lambda_1(\varkappa)$ убывает и $\lambda_1(\varkappa_1) = 0$; второе собственное значение $\lambda_2(\varkappa)$ возникает при $\varkappa = \varkappa_2 + 0$, $\lambda_2(\varkappa)$ убывает и $\lambda_2(\varkappa_2) = 0$ и т. д. Максимальным интервалом для $\lambda_n(\varkappa)$ служит $(\varkappa_n, \infty)$.

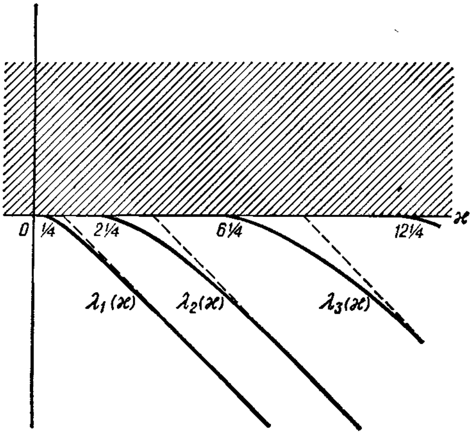

Рис. 2. Спектр оператора $-u'' + \varkappa q(x)u$ на полуоси $(0, \infty)$ с граничным условием $u(0) = 0$; потенциал — прямоугольная яма ширины $b$ и глубины $\varkappa$.

В левом конце этого интервала собственное значение $\lambda_n(\varkappa)$ поглощается непрерывным спектром. Простые вычисления показывают, что функция $\lambda_n(\varkappa)$ ведет себя в концах интервала $(\varkappa_n, \infty)$ следующим образом:

$$\lambda_n(\varkappa) = -\frac{b^2}{4}(\varkappa - \varkappa_n)^2 + \ldots, \quad \varkappa \searrow \varkappa_n, \tag{3.6}$$

$$\lambda_n(\varkappa) = -\varkappa + \frac{N^2\pi^2}{b^2} - \ldots, \quad \varkappa \nearrow \infty.$$

## 3. Уравнения Матье, Шрёдингера и Дирака

Приведем другие примеры самосопряженных голоморфных семейств типа (A).

**Пример 3.4.** Уравнение

$$u'' + (\lambda + 2\varkappa \cos 2x)\, u = 0, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi, \tag{3.7}$$

называется *уравнением Матье*. Рассмотрим решения этого уравнения (функции Матье), *периодические* по $x$ с периодом $2\pi$. Эти решения суть собственные функции оператора

$$T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}, \quad T = -d^2/dx^2, \quad T^{(1)} = -2\cos 2x, \tag{3.8}$$

с граничными условиями

$$u(-\pi) = u(\pi), \quad u'(-\pi) = u'(\pi). \tag{3.9}$$

Будем считать, что операторы в (3.8) действуют в гильбертовом пространстве $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(-\pi, \pi)$. Оператор $T$ самосопряжен и имеет дискретный спектр. Его собственные значения и нормированные собственные функции таковы:

$$\begin{aligned} &\lambda_0 = 0, && \varphi_0(x) = (2\pi)^{-1/2}, \\ &\lambda_n^+ = n^2, && \varphi_n^+(x) = \pi^{-1/2}\cos nx, \\ &\lambda_n^- = n^2, && \varphi_n^-(x) = \pi^{-1/2}\sin nx, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots; \end{aligned} \tag{3.10}$$

мы видим, что каждое положительное собственное значение $n^2$ имеет кратность 2. Оператор $T^{(1)}$ умножения на функцию $-2\cos 2x$ симметричен и ограничен, причем $\| T^{(1)} \| = \max | 2\cos 2x | = 2$. Очевидно, что $T(\varkappa)$ — самосопряженное голоморфное семейство типа (A). Вырожденность собственных значений оператора $T$ не усложняет рассмотрение задачи на собственные значения для $T(\varkappa)$, так как операторы $T$ и $T^{(1)}$ вполне приводимы относительно разложения

$$\mathsf{H} = \mathsf{M}_0^+ \oplus \mathsf{M}_1^+ \oplus \mathsf{M}_0^- \oplus \mathsf{M}_1^-, \tag{3.11}$$

где верхние индексы $\pm$ соответствуют множествам функций, симметричных и антисимметричных относительно точки $x = 0$ (четные и нечетные функции), а нижние индексы 0 и 1 отвечают множествам функций, соответственно симметричных и антисимметричных относительно точки $x = \pi/2$ (здесь мы предполагаем, что все рассматриваемые функции периодически продолжены на всю вещественную ось с периодом $2\pi$). Так, например, $\mathsf{M}_0^+$ — это множество функций, симметричных как относительно нуля, так и относительно точки $x = \pi/2$. Очевидно, что четыре подпространства в (3.11) взаимно ортогональны и порождают все пространство, а операторы $T$ и $T^{(1)}$ разложимы в прямые суммы, соответствующие (3.11), причем части этих операторов в каждом из подпространств $\mathsf{M}_0^+$, $\mathsf{M}_1^+$, $\mathsf{M}_0^-$, $\mathsf{M}_1^-$ снова самосопряжены. Каждая такая часть оператора $T$ имеет простые собственные значения, указанные в следующей таблице:

$$\begin{aligned} &\mathsf{M}_0^+: && \lambda_0,\ \varphi_0 \ \text{ и } \ \lambda_n^+,\ \varphi_n^+, && n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots, \\ &\mathsf{M}_1^+; && \lambda_n^+,\ \varphi_n^+, && n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots, \\ &\mathsf{M}_0^-; && \lambda_n^-,\ \varphi_n^-, && n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots, \\ &\mathsf{M}_1^-: && \lambda_n^-,\ \varphi_n^-, && n = 2,\ 4,\ 6,\ \ldots . \end{aligned}$$

Таким образом, при рассмотрении возмущенного оператора $T(\varkappa)$ мы можем считать собственные значения $\lambda_0$ и $\lambda_n^\pm$ простыми; расстояния $d_0$ и $d_n^\pm$ от этих собственных значений до множества остальных собственных значений в подпространствах (3.11) таковы:

$$\begin{aligned} &d_0 = 4, \quad d_1^\pm = 8, \quad d_2^+ = 4; \quad d_2^- = 12, \\ &d_n^\pm = n^2 - (n-2)^2 = 4(n-1) \quad \text{для} \quad n \geqslant 3. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Так как $\| T^{(1)} \| = 2$, то в качестве нижней границы радиуса сходимости $r_n^\pm$ ряда для собственного значения $\lambda_n^\pm(\varkappa)$ и соответствующей собственной функции оператора $T(\varkappa)$ можно взять число $d_n^\pm/2\, \| T^{(1)} \|$ [см. (2.34), где следует положить $b = c = 0$]; таким образом,

$$r_0 \geqslant 1, \quad r_1^\pm \geqslant 2, \quad r_2^+ \geqslant 1, \quad r_2^- \geqslant 3, \quad r_n^\pm \geqslant n-1 \quad \text{для} \quad n \geqslant 3\,^{1)}. \tag{3.13}$$

---

[1] См. также Шефке [4]. Число $r_0$ изучалось Уотсоном [1] (он показал, что $r_0 \geqslant \sqrt{2}$) и Баукэмпом [1] ($r_0 = 1{,}468\ \ldots$) посредством прямого, но более сложного метода.

В соответствии с результатами § II.3 и с учетом (2.36) можно также выписать мажорирующие ряды для собственных значений и собственных функций оператора $T(\varkappa)$.

Отметим, что аналогичное изучение семейства $T(\varkappa)$ можно провести также в пространстве $C[-\pi, \pi]$ (или, точнее, в его подпространствах, состоящих из периодических функций). Хотя результаты, касающиеся собственных значений, получатся при этом слабее, оценки для собственных функций могут оказаться полезными, особенно, если они улучшены с помощью оценок для собственных значений, полученных в рамках $L^2$-теории (ср. пример 2.17).

**Пример 3.5.** Рассмотрим оператор Шрёдингера

$$T(x) = -\Delta + Q + \varkappa Q' \tag{3.14}$$

в $R^3$, где $Q$ и $Q'$ суть операторы умножения на вещественные функции $q(x)$ и $q'(x)$ соответственно. Предположим, что $q$ и $q'$ представимы в виде суммы функции из $L^2(R^3)$ и функции из $L^\infty(R^3)$ (см. V.5.3). Тогда функция $q + \varkappa q'$ обладает таким же свойством для всех $\varkappa$ и поэтому $T(\varkappa)$ самосопряжен для вещественных $\varkappa$ (если лапласиан $\Delta$ понимать в обобщенном смысле).

Далее, так как $Q$ и $Q'$ ограничены относительно оператора $H = -\Delta$, причем их относительные границы равны нулю, то $Q'$ ограничен относительно оператора $T(0) = H + Q$ и его $H + Q$-граница равна нулю (см. задачу IV.1.2). Следовательно, операторы $T(\varkappa)$ *образуют самосопряженное голоморфное семейство типа* (A). Отсюда следует, что собственные значения и собственные функции оператора (3.14) суть голоморфные функции от $\varkappa$. Так же как в предыдущих примерах, можно дать оценки для радиусов сходимости рядов теории возмущений (см. также пример 4.23).

Точно так же мы можем рассмотреть *оператор Дирака*

$$T(\varkappa) = \frac{\alpha}{i}\,\mathrm{grad} + \beta + Q + \varkappa Q' \tag{3.15}$$

и получить аналогичные результаты, если потенциалы $Q$ и $Q'$ имеют вид (V.5.29) и $Q$ не слишком сильный (см. п. V.5.4 и, в частности, замечание 5.12).

## 4. Скорость роста собственных значений

В ряде случаев представляет интерес вопрос о том, как быстро возрастает собственное значение $\lambda(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ в зависимости от $\varkappa$. Для простоты мы ограничимся случаем самосопряженного голоморфного семейства $T(\varkappa)$ и вещественными значениями $\varkappa$; таким образом, операторы $T(\varkappa)$ самосопряжены, а функция $\lambda(\varkappa)$ вещественна.

В общем случае трудно оценить скорость роста функции $\lambda(\varkappa)$. Так, у оператора $T(\varkappa)$ из примера 1.11 существует собственное значение $\lambda_0(\varkappa)$, $\varkappa > 0$, которое стремится к $-\infty$ при $\varkappa \to +0$. Мы покажем сейчас, что такое быстрое возрастание собственных значений не имеет места для голоморфных семейств типа (A).

Для этого удобно рассматривать не только голоморфные функции $\lambda(\varkappa)$, но также и *кусочно-голоморфные* непрерывные функции $\mu(\varkappa)$, образованные из частей функций $\lambda(\varkappa)$. Такие функции получаются переходами с графика одной функции $\lambda(\varkappa)$ на график другой такой функции в точках пересечения их графиков. Собственные значения, рассмотренные в п. II.6.4, принадлежат этому типу. Такая функция $\mu(\varkappa)$ может быть определена на большем интервале, чем любая из составляющих ее голоморфных частей.

Предположим, что в области $D_0$ определено самосопряженное голоморфное семейство $T(\varkappa)$ типа (A). Справедливо неравенство (2.3), которое утверждает, что $T'(\varkappa)$ ограничен относительно $T(\varkappa)$:

$$\| T'(\varkappa) u \| \leqslant a' \| u \| + b' \| T(\varkappa) u \|, \quad u \in \mathrm{D}, \quad \varkappa \in \mathrm{I}, \tag{3.16}$$

где $\mathrm{D} = \mathrm{D}(T(\varkappa))$ и $\mathrm{I} \subset D_0$ — отрезок вещественной оси. Постоянные $a'$ и $b'$, вообще говоря, могут зависеть от выбора I. Предположим для удобства, что I содержит точку $\varkappa = 0$.

**Теорема 3.6.** *Сохраним обозначения предыдущего абзаца. Пусть $\mu(\varkappa)$ — непрерывное кусочно-голоморфное собственное значение оператора $T(\varkappa)$. Тогда*

$$|\mu(\varkappa)-\mu(0)| \leqslant \frac{1}{b'}(a'+b')|\mu(0)|)(e^{b'|\varkappa|}-1), \tag{3.17}$$

*если $\varkappa \in \mathrm{I}$ и функция $\mu$ определена в точке $\varkappa$.*

Доказательство. Для любой точки $\varkappa$, в которой $\mu(\varkappa)$ голоморфна, имеем

$$\mu'(\varkappa) = (T'(\varkappa)\varphi(\varkappa), \varphi(\varkappa)), \tag{3.18}$$

где $\varphi(\varkappa)$ — нормированный собственный вектор, принадлежащий собственному значению $\mu(\varkappa)$ [1]; представление (3.18) доказывается так же, как формула (II.6.10), с одним лишь несущественным отличием, что семейство $T'(\varkappa)$ здесь не постоянно. Из (3.12) и (3.16) следует, что

$$|\mu'(\varkappa)| \leqslant \| T'(\varkappa)\varphi(\varkappa) \| \leqslant a' + b' \| T(\varkappa)\varphi(\varkappa) \| =$$
$$= a' + b' |\mu(\varkappa)|. \tag{3.19}$$

Поскольку функция $|\mu(\varkappa)|$ кусочно-голоморфна, так же как и $\mu(\varkappa)$, то нетрудно решить дифференциальное неравенство (3.19) и, как следствие, получить оценку (3.17).

**Замечание 3.7.** Оценка (3.17) показывает, что функция $\mu(\varkappa)$ не может расти быстрее, чем показательная функция. Таким образом, собственное значение $\lambda(\varkappa)$ не может стремиться к бесконечности в вещественной точке $\varkappa \in D_0$.

Задача 3.8. В теореме 3.6 предположим, что $T(0)$ ограничен снизу. То же самое верно для всех операторов $T(\varkappa)$, $\varkappa \in \mathrm{I}$, и нижняя граница $\gamma(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ удовлетворяет неравенству (3.17). Это верно даже в том случае, когда $T(\varkappa)$ имеет непрерывный спектр. [*Указание*: применить неравенство (V.4.13) к $T = T(\varkappa)$ и $S = T(\varkappa + d\varkappa)$ и вывести дифференциальное неравенство типа (3.19) для $\gamma(\varkappa)$.]

---

[1] Существование нормированного собственного вектора $\varphi(\varkappa)$, кусочно-голоморфного для $\varkappa \in \mathrm{I}$, следует из утверждения в сноске [1] на стр. 485.

### 5. Одновременное рассмотрение всех собственных значений

Результат предыдущего пункта используется при изучении поведения всей совокупности собственных значений оператора $T(\varkappa)$ в том случае, когда эти операторы образуют самосопряженное голоморфное семейство типа (A). Так как наличие непрерывной компоненты в спектре оператора $T(\varkappa)$ приводит к значительным трудностям при изучении совокупности всех собственных значений этого оператора, то мы предположим, что $T(\varkappa)$ имеет *компактную резольвенту*. Достаточно предположить это для одного значения $\varkappa$, так как тогда в силу теоремы 2.4 то же самое верно для всех $\zeta$. В этом случае каждое собственное значение $\lambda(\varkappa)$, начиная с собственного значения $\lambda = \lambda(0)$ оператора $T = T(0)$, можно продолжить голоморфно на все вещественные точки $\varkappa \in \mathrm{D}_0$ (мы предполагаем, что точка $\varkappa = 0$ принадлежит $\mathrm{D}_0$); другими словами, максимальный интервал для $\lambda(\varkappa)$ совпадает со всем интервалом $\mathrm{I}_0$ вещественных чисел $\varkappa$, принадлежащих $\mathrm{D}_0$ (будем считать для простоты, что $\mathrm{I}_0$ связен).

Пусть I — максимальный интервал для $\lambda(\varkappa)$; предположим, что его правая граничная точка $\varkappa_1$ является внутренней точкой интервала $\mathrm{I}_0$. По теореме 3.6 функция $\lambda(\varkappa)$ ограничена при $\varkappa \nearrow \varkappa_1$. Покажем, что $\lambda(\varkappa)$ стремится при $\varkappa \nearrow \varkappa_1$ к собственному значению $\mu$ оператора $T(\varkappa_1)$. Так как $T(\varkappa_1)$ имеет компактную резольвенту, то существует лишь конечное число изолированных собственных значений $\mu_1, \ldots, \mu_N$ оператора $T(\varkappa_1)$ в интервале $|\lambda| < M$, где $M$ — такая постоянная, что $|\lambda(\varkappa)| < M$ при $\varkappa \nearrow \varkappa_1$; все другие точки интервала $|\lambda| < M$ принадлежат $\mathrm{P}(T(\varkappa_1))$. Согласно свойству полунепрерывности сверху спектра (см. п. IV.3.1), часть $\Sigma(T(\varkappa))$, лежащая в интервале $|\lambda| < M$, сосредоточена в малой окрестности множества $\{\mu_j, j = 1, \ldots, N\}$ при условии, что $\varkappa$ достаточно близко к $\varkappa_1$. Поэтому $\lambda(\varkappa)$ как собственное значение оператора $T(\varkappa)$, должно сходиться при $\varkappa \nearrow \varkappa_1$ к некоторому числу $\mu = \mu_j$. Таким образом, $\lambda(\varkappa)$ совпадает с одной из голоморфных функций, представляющих собственные значения оператора $T(\varkappa)$, возникающие при расщеплении собственного значения $\mu$ оператора $T(\varkappa_1)$. Итак, $\lambda(\varkappa)$ допускает аналитическое продолжение за точку $\varkappa_1$ в противоречии с предположением, что $\varkappa_1$ является правым концом максимального интервала для $\lambda(\varkappa)$.

**Теорема 3.9** [1]. *Пусть $T(\varkappa)$ — самосопряженное голоморфное семейство типа (A), определенное в окрестности интервала $\mathrm{I}_0$ вещественной оси. Предположим, что $T(\varkappa)$ имеет компактную*

---

[1] Эта теорема доказана Реллихом [5] другим методом.

*резольвенту. Тогда все собственные значения операторов $T(\varkappa)$ представляются голоморфными на $I_0$ функциями. Точнее, существует последовательность скалярных функций $\mu_n(\varkappa)$ и последовательность вектор-функций $\varphi_n(\varkappa)$, голоморфных на $I_0$ и таких, что для каждой точки $\varkappa \in I_0$ последовательность $\mu_n(\varkappa)$ представляет полный набор собственных значений оператора $T(\varkappa)$, а последовательность $\varphi_n(\varkappa)$ образует полное ортонормированное семейство собственных векторов этого оператора.*

Доказательство. Первая часть теоремы была доказана выше[1]). Остается показать, что собственные векторы образуют полную систему. Но это — другое выражение того факта, что все собственные проекторы самосопряженного оператора с компактной резольвентой образуют полный набор (см. V.3.8).

**Замечание 3.10.** Каждая функция $\lambda_n(\varkappa)$ голоморфна в некоторой комплексной окрестности интервала $I_0$, однако эта окрестность зависит от $n$; поэтому в общем случае не существует комплексной окрестности интервала $I_0$, в которой определены все функции $\lambda_n(\varkappa)$.

**Замечание 3.11.** Предположение теоремы 3.9 о том, что $T(\varkappa)$ имеет компактную резольвенту, довольно существенно. Аналогичный результат можно ожидать для самосопряженного голоморфного семейства *компактных* операторов $T(\varkappa)$; при этом некоторые трудности связаны с наличием в спектре оператора $T(\varkappa)$ точки, предельной для собственных значений. В самом деле, каждое собственное значение $\lambda(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ можно продолжать аналитически до тех пор, пока оно не обратится в нуль. Если же $\lambda(\varkappa_0) = 0$, то функция $\lambda(\varkappa)$ может не иметь аналитического продолжения через точку $\varkappa_0$. Можно указать достаточное условие того, что $\lambda(\varkappa)$ нигде не обращается в нуль, если только $\lambda(\varkappa) \not\equiv 0$; в этом случае заключение теоремы 3.9 сохраняет силу, если систему $\{\varphi_n(\varkappa)\}$ дополнить собственными векторами, принадлежащими собственному значению $\lambda_0(\varkappa) \equiv 0$ оператора $T(\varkappa)$. В качестве примера такого достаточного условия[2]) приведем следующее: существуют положительные постоянные $m$, $M$ такие, что для вещественных $\varkappa$

$$m\,\|T(0)\,u\| \leqslant \|T(\varkappa)\,u\| \leqslant M\,\|T(0)\,u\|, \quad u \in \mathsf{H}. \tag{3.20}$$

---

[1]) По поводу существования ортонормированного семейства $\{\varphi_n(\varkappa)\}$ собственных векторов см. сноску [1]) на стр. 485.

[2]) Другое достаточное условие таково: $0 < mT(0) \leqslant T(\varkappa) \leqslant MT(0)$; доказательство достаточности такое же, как для условия (3.20). Эти условия даны Реллихом [5].

В самом деле, из (3.20) следует, что ядро N оператора $T(\varkappa)$ не зависит от $\varkappa$ (для вещественных $\varkappa$). Таким образом, любое ортонормированное семейство в N может служить частью системы $\{\varphi_n(\varkappa)\}$, соответствующей собственному значению $\lambda_n(\varkappa) \equiv 0$. Поскольку $T(\varkappa)$ самосопряжен для вещественных $\varkappa$, то он разложим в прямую сумму своих частей в N и $\mathrm{N}^{\perp}$. В подпространстве $\mathrm{N}^{\perp}$ оператор $T(\varkappa)$ не имеет нулевого собственного значения и поэтому справедливо заключение теоремы 3.9.

## § 4. Голоморфные семейства типа (B)

### 1. Ограниченно-голоморфные семейства полуторалинейных форм

Пусть $\{\mathfrak{t}(\varkappa)\}$ — семейство *полуторалинейных форм* в гильбертовом пространстве H. Предположим, что $\mathfrak{t}(\varkappa)$ — *ограниченная* полуторалинейная форма с областью определения H для каждого $\varkappa \in \mathrm{D}_0$ и что функция $\mathfrak{t}(\varkappa)[u]$ голоморфна в области $\mathrm{D}_0$ для каждого $u \in \mathrm{H}$. Такое семейство назовем *ограниченно-голоморфным.*

Из принципа поляризации следует, что функция $\mathfrak{t}(\varkappa)[u, v]$ голоморфна в $\mathrm{D}_0$ для каждой пары $u, v \in \mathrm{H}$ [см. (VI.1.1)]. Семейство операторов $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, определенных равенством $(T(\varkappa)u, v) = \mathfrak{t}(\varkappa)[u, v]$, является ограниченно-голоморфным семейством операторов; это следует из теоремы III.3.12. Отсюда, в частности, следует, что формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ равномерно ограничены в каждом компактном подмножестве области $\mathrm{D}_0$.

Аналогичный результат верен для семейства $\mathfrak{t}(\varkappa)$, определенного для вещественных $\varkappa$. Допустим, что семейство $\mathfrak{t}(\varkappa)$ определено на интервале $-r < \varkappa < r$ и функция $\mathfrak{t}(\varkappa)[u]$ допускает разложение в степенной ряд, сходящийся на интервале $(-r, r)$. Тогда соответствующее семейство операторов $T(\varkappa)$ можно продолжить в круг $|\varkappa| < r$ комплексной плоскости, причем это продолжение ограниченно-голоморфно.

Достаточно показать, что семейство $\mathfrak{t}(\varkappa)$ можно продолжить в круг $|\varkappa| < r$ в классе *ограниченных* форм. Пусть

$$\mathfrak{t}(\varkappa)[u, v] = \mathfrak{t}[u, v] + \varkappa\mathfrak{t}^{(1)}[u, v] + \varkappa^2\mathfrak{t}^{(2)}[u, v] + \dots \tag{4.1}$$

— разложение Тейлора функции $\mathfrak{t}(\varkappa)[u, v]$, получающееся поляризацией разложения для $\mathfrak{t}(\varkappa)[u]$. Очевидно, что форма $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(0)$ ограничена. Покажем, что все $\mathfrak{t}^{(n)}$ суть ограниченные полуторалинейные формы. Полуторалинейность $\mathfrak{t}^{(n)}$ есть простое следствие полуторалинейности формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ и единственности разложения Тейлора.

Из (4.1) следует, что $\mathfrak{t}^{(1)}[u, v] = \lim\limits_{\varkappa \to 0} \varkappa^{-1} (\mathfrak{t}(\varkappa) - \mathfrak{t})[u, v]$. Так как этот предел существует для каждой пары $u, v \in \mathsf{H}$ и $\mathfrak{t}(\varkappa) - \mathfrak{t}$ — ограниченная форма для каждого вещественного $\varkappa$, то из принципа равномерной ограниченности следует, что форма $\mathfrak{t}^{(1)}$ ограничена (см. задачу III.1.30). Далее, согласно разложению (4.1), имеем $\mathfrak{t}^{(2)}[u, v] = \lim\limits_{\varkappa \to 0} \varkappa^{-2} (\mathfrak{t}(\varkappa) - \mathfrak{t} - \varkappa\mathfrak{t}^{(1)})[u, v]$ и рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что форма $\mathfrak{t}^{(2)}$ ограничена и т. д.

Таким образом, существуют операторы $T^{(n)} \in \mathscr{B}(\mathsf{H})$ такие, что $\mathfrak{t}^{(n)}[u, v] = (T^{(n)}u, v)$, и поэтому разложение (4.1) можно записать в следующем виде:

$$(T(\varkappa)u, v) = (Tu, v) + \varkappa(T^{(1)}u, v) + \varkappa(T^{(2)}u, v) + \dots \quad (4.2)$$

Этот ряд сходится в круге $|\varkappa| < r$ для каждой пары $u, v \in \mathsf{H}$. Поэтому $r'^n(T^{(n)}u, v) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $u, v$ и каждого $r' < r$. Еще раз применяя принцип равномерной ограниченности (см. задачу III.3.13), видим, что последовательность $\{r'^n \| T^{(n)} \|\}$ ограничена при $n \to \infty$. Поэтому ряд

$$T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)} + \varkappa^2 T^{(2)} + \dots \quad (4.3)$$

абсолютно сходится (по норме) для $|\varkappa| < r$ и определяет оператор $T(\varkappa) \in \mathscr{B}(\mathsf{H})$. Таким образом, равенство $\mathfrak{t}(\varkappa)[u, v] = (T(\varkappa)u, v)$ продолжено с интервала $(-r, r)$ на круг $|\varkappa| < r$ комплексной плоскости, причем операторы $T(\varkappa)$ образуют ограниченно-голоморфное семейство.

**Замечание 4.1.** Пусть $\mathfrak{t}(\varkappa)$ — семейство полуторалинейных форм с областью определения $\mathsf{H}$ такое, что функция $\mathfrak{t}(\varkappa)[u]$ голоморфна в области $\mathrm{D}_0$ для каждого $u \in \mathsf{H}$. Если, кроме того, существует последовательность $\varkappa_n \in \mathrm{D}_0$, сходящаяся к точке $\varkappa_0 \in \mathrm{D}_0$, $\varkappa_0 \neq \varkappa_n$, такая, что формы $\mathfrak{t}(\varkappa_n)$ ограничены для всех $n$, то $\mathfrak{t}(\varkappa)$ — ограниченно-голоморфное семейство.

Применяя принцип равномерной ограниченности, покажем, что формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ ограничены для всех $\varkappa \in \mathrm{D}_0$. Можно считать, что $\varkappa_0 = 0$, $\varkappa_n \neq 0$. Из существования предела $\lim\limits_{n \to \infty} (T(\varkappa_n)u, v) = \lim \mathfrak{t}(\varkappa_n)[u, v] = \mathfrak{t}[u, v]$ следует, что последовательность $T(\varkappa_n)$ равномерно ограничена и, следовательно, форма $\mathfrak{t}$ ограничена. Далее, равенство $\mathfrak{t}^{(1)}[u, v] = \lim \varkappa_n^{-1}(\mathfrak{t}(\varkappa_n) - \mathfrak{t})[u, v]$ показывает, что форма $\mathfrak{t}^{(1)}$ ограничена и т. д. Таким образом, формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ ограничены в окрестности нуля и это свойство распространяется на все точки $\varkappa \in \mathrm{D}_0$.

## 2. Голоморфные семейства форм типа (a) и голоморфные семейства операторов типа (B)

Рассмотрим семейство $\mathfrak{t}(\varkappa)$ полуторалинейных (возможно, неограниченных) форм, определенное в области $D_0$. Это семейство назовем *голоморфным семейством типа* (a), если i) каждая форма $\mathfrak{t}(\varkappa)$ секториальна и замкнута, причем многообразие $\mathsf{D}(\mathfrak{t}(\varkappa)) = \mathsf{D}$ не зависит от $\varkappa$ и плотно в $\mathsf{H}$, и ii) функция $\mathfrak{t}(\varkappa)[u]$ голоморфна в $D_0$ для каждого $u \in \mathsf{D}$. Отметим, что из предположения ii) и принципа поляризации следует, что функция $\mathfrak{t}(\varkappa)[u, v]$ голоморфна в $D_0$ для каждой пары $u, v \in \mathsf{D}$. (По поводу секториальных форм см. главу VI.)

**Теорема 4.2.** *Пусть* $\mathfrak{t}(\varkappa)$ *— голоморфное семейство форм типа* (a) *и* $T(\varkappa) = T_{\mathfrak{t}(\varkappa)}$ *— для каждого* $\varkappa$ *есть* $m$*-секториальный оператор, соответствующий форме* $\mathfrak{t}(\varkappa)$. *Тогда* $T(\varkappa)$ *— голоморфное семейство, а сами операторы* $T(\varkappa)$ *локально равномерно секториальны.*

Голоморфное семейство $m$-секториальных операторов, построенное в теореме 4.2 по голоморфному семейству форм типа (a), назовем *голоморфным семейством типа* (B) [1].

Доказательство теоремы 4.2. Можно считать, что точка $\varkappa = 0$ принадлежит $D_0$ и что $\mathfrak{h} = \operatorname{Re} \mathfrak{t} \geqslant 1$, $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}(0)$; в противном случае нужно сдвинуть начало комплексной плоскости и прибавить подходящую постоянную к $\mathfrak{t}(\varkappa)$.

Пусть $H = T_{\mathfrak{h}} \geqslant 1$ — самосопряженный оператор, соответствующий замкнутой форме $\mathfrak{h} \geqslant 1$ [$H$ есть по определению вещественная часть оператора $T = T(0)$, см. п. VI.3.1]; рассмотрим формы $\mathfrak{t}_0(\varkappa)[u, v] = \mathfrak{t}(\varkappa)[G^{-1}u, G^{-1}v]$, где $G = H^{1/2}$. Так как $G^{-1}u \in \mathsf{D}(G) = \mathsf{D}(\mathfrak{h}) = \mathsf{D}$ согласно теореме VI.2.23, то $\mathfrak{t}_0(\varkappa)$ — секториальная форма, определенная всюду на $\mathsf{H}$. Как нетрудно проверить, форма $\mathfrak{t}_0(\varkappa)$ замыкаема и поэтому, согласно теореме VI.1.20, она ограничена. Так как функция $\mathfrak{t}_0(\varkappa)[u, v]$ очевидным образом голоморфна в $D_0$ для каждой пары $u, v \in \mathsf{H}$, то формы $\mathfrak{t}_0(\varkappa)$ образуют ограниченно-голоморфное семейство. Поэтому существует ограниченно-голоморфное семейство операторов $T_0(\varkappa)$ такое, что $\mathfrak{t}_0(\varkappa)[u, v] = (T_0(\varkappa)u, v)$ (см. предыдущий пункт). Заменяя $u, v$ на $Gu, Gv$ соответственно, получаем

$$\mathfrak{t}(\varkappa)[u, v] = (T_0(\varkappa)Gu, Gv), \quad u, v \in \mathsf{D}, \; G = H^{1/2}. \tag{4.4}$$

Рассуждения, аналогичные тем, которые были использованы при выводе формулы (VI.3.4), дают

$$T(\varkappa) = GT_0(\varkappa)G, \tag{4.5}$$

$$T(\varkappa)^{-1} = G^{-1}T_0(\varkappa)^{-1}G^{-1}. \tag{4.6}$$

---

[1] В частном случае самосопряженных операторов **такие семейства** были введены в статье Т. Като [8].

Здесь $G^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ и семейство $T_0(\varkappa)^{-1}$ ограниченно-голоморфно в окрестности нуля, так как семейство $T_0(\varkappa)$ ограниченно-голоморфно, а оператор $T_0(0)$ имеет вид $1 + iB$, $B^* = B$ [см. (VI.3.4)] и поэтому $T_0(0)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$. Следовательно, семейство $T(\varkappa)$ голоморфно в окрестности нуля по теореме 1.3. Так как начало комплексной плоскости можно выбирать произвольно, то $T(\varkappa)$ голоморфно зависит от $\varkappa$ всюду в $\mathrm{D}_0$. Из (4.4) следует, что формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ равномерно секториальны в окрестности нуля, поскольку $T_0(0) = 1 + iB$ и операторы $T_0(\varkappa)$ равномерно ограничены в окрестности нуля. То же самое, следовательно, верно и для $T(\varkappa)$.

**Теорема 4.3.** *Пусть $T(\varkappa)$ — голоморфное семейство операторов типа* (B). *Если для некоторого $\varkappa_0$ оператор $T(\varkappa_0)$ имеет компактную резольвенту, то и все операторы $T(\varkappa)$ обладают этим свойством.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.4; нужно только воспользоваться теоремой VI.3.4 вместо теоремы IV.3.17. (Отметим, что $m$-секториальный оператор имеет непустое резольвентное множество.)

**Замечание 4.4.** В определении голоморфного семейства форм $\mathfrak{t}(\varkappa)$ типа (a) достаточно потребовать замкнутость форм $\mathfrak{t}(\varkappa)$ только для значений $\varkappa$, образующих последовательность $\varkappa_n$, сходящуюся к точке $\varkappa_0 \in \mathrm{D}_0$, $\varkappa_0 \neq \varkappa_n$. Для доказательства заметим, что форма $\mathfrak{t}_0(\varkappa)$, введенная в доказательстве теоремы 4.2, замкнута для $\varkappa = \varkappa_n$. Согласно замечанию 4.1, формы $t_0(\varkappa)$ ограничены всюду в $\mathrm{D}_0$ и доказательство теоремы 4.2 проводится как обычно. Далее, из равенства 4.4 следует, что форма $\mathfrak{t}(\varkappa)$ замкнута для достаточно малых $|\varkappa|$; затем мы распространяем это свойство на все $\varkappa \in \mathrm{D}_0$.

Это замечание дает возможность ограничиваться проверкой замкнутости формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ только для вещественных $\varkappa$ в том случае, когда область $\mathrm{D}_0$ пересекается с вещественной осью.

**Замечание 4.5.** Для голоморфного семейства $\mathfrak{t}(\varkappa)$ типа (a) имеют место следующие неравенства, которые соответствуют аналогичным неравенствам (2.2) — (2.4) для семейства операторов типа (A). (Здесь, так же как в доказательстве теоремы 4.2, мы предполагаем, что $\mathfrak{h} \geqslant 1$.)

$$\begin{gathered} |\,\mathfrak{t}(\varkappa_1)[u]\,| \leqslant b\,|\,\mathfrak{t}(\varkappa)[u]\,|, \\ |\,\mathfrak{t}'(\varkappa_1)[u, v]\,| \leqslant b'\,|\,\mathfrak{t}(\varkappa)[u]\,|^{1/2}\,|\,\mathfrak{t}(\varkappa)[v]\,|^{1/2}, \qquad (4.7) \\ |\,(\mathfrak{t}(\varkappa_1) - \mathfrak{t}(\varkappa_2))[u, v]\,| \leqslant \varepsilon\,|\,\mathfrak{t}(\varkappa)[u]\,|^{1/2}\,|\,\mathfrak{t}(\varkappa)[v]\,|^{1/2}. \end{gathered}$$

Здесь $u \in \mathbf{D}$ и $a$, $b$, $a'$, $b'$ — постоянные, если $\varkappa$ и $\varkappa_1$ пробегают компактное подмножество в $\mathrm{D}_0$; число $\varepsilon$ можно сделать сколь угодно малым, если $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ достаточно близки. Неравенства (4.7) нетрудно доказать, используя представление (4.4). Отметим также что выражение $|\,\mathfrak{t}(\varkappa)[u]\,|$ в правых частях этих неравенств можно заменить на $\mathfrak{h}(\varkappa)[u] = \operatorname{Re}\mathfrak{t}(\varkappa)[u]$, изменяя соответствующим образом постоянные $a$, $b$ и т. д. [см. (VI.1.42) — (VI.1.43)]. Неравенства (4.7) выражают тот факт, что формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ ограничены относительно друг друга и изменение формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ непрерывно относительно $\mathfrak{t}(\varkappa)$.

**Замечание 4.6.** Существует несколько полезных тождеств для резольвенты $R(\zeta, \varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$. Предполагая, как в доказательстве теоремы 4.2, что $\mathfrak{h} \geqslant 1$, имеем

$$((T(\varkappa_1)^{-1} - T(\varkappa_2)^{-1})\,u, v) = \\ = -(\mathfrak{t}(\varkappa_1) - \mathfrak{t}(\varkappa_2))\,[T(\varkappa_1)^{-1}u,\ T(\varkappa_2)^{*-1}v]. \qquad (4.8)$$

Это следует из равенств $\mathfrak{t}(\varkappa_1)\,[T(\varkappa_1)^{-1}u, g] = (u, g)$ и $\mathfrak{t}(\varkappa_2)\,[f,\ T(\varkappa_2)^{*-1}v] = \overline{\mathfrak{t}(\varkappa_2)^*\,[T(\varkappa_2)^{*-1}v, f]} = \overline{(v, f)} = (f, v)$, где $f = T(\varkappa_1)^{-1}u \in \mathbf{D}$, $g = T(\varkappa_2)^{*-1}v \in \mathbf{D}$.

Устремляя $\varkappa_1$ к $\varkappa_2$ в (4.8), получаем

$$\left(\frac{d}{d\varkappa}T(\varkappa)^{-1}u, v\right) = -\mathfrak{t}'(\varkappa)\,[T(\varkappa)^{-1}u,\ T(\varkappa)^{*-1}v], \qquad (4.9)$$

так как вектор-функция $T(\varkappa)^{-1}u$ непрерывна (и даже голоморфна) по норме $\|w\|_{\mathfrak{t}} = \|Gw\|$ в силу формулы (4.6).

При замене $\mathfrak{t}(\varkappa)$ и $T(\varkappa)$ на $\mathfrak{t}(\varkappa) - \zeta$ и $T(\varkappa) - \zeta$ соответственно формулы (4.8) и (4.9) дают

$$((R(\zeta, \varkappa_1) - R(\zeta, \varkappa_2))\,u, v) = -(\mathfrak{t}(\varkappa_1) - \mathfrak{t}(\varkappa_2))\,[R(\zeta, \varkappa_1)\,u,\ R(\zeta, \varkappa_2)^*v], \qquad (4.10)$$

$$\left(\frac{d}{a\varkappa}R(\zeta, \varkappa)\,u, v\right) = -\mathfrak{t}'(\varkappa)\,[R(\zeta, \varkappa)\,u,\ R(\zeta, \varkappa)^*v]. \qquad (4.11)$$

Учитывая неравенства (4.7), получаем из (4.11)

$$\left|\left(\frac{d}{d\varkappa}R(\zeta, \varkappa)\,u, v\right)\right| \leqslant b'\,|\,\mathfrak{t}(\varkappa)\,[R(\zeta, \varkappa)\,u]\,|^{1/2}\,|\,\mathfrak{t}(\varkappa)^*\,[R(\zeta, \varkappa)^*v]\,|^{1/2} = \\ = b'\,|\,(T(\varkappa)R(\zeta, \varkappa)\,u,\ R(\zeta, \varkappa)\,u)\,|^{1/2}\,|\,(T^*(\varkappa)\,R(\zeta, x)^*v,\ R(\zeta, \varkappa)^*v)\,|^{1/2}.$$

Но $\|T(\varkappa)\,R(\zeta, \varkappa)\| \leqslant 1$, если $\zeta < 0$ (см. задачу V.3.32) и аналогично $\|T(\varkappa)^*\,R(\zeta, \varkappa)^*\| \leqslant 1$. Поэтому

$$\left\|\frac{d}{d\varkappa}R(\zeta, \varkappa)\right\| \leqslant b'\,\|R(\zeta, \varkappa)\|^{1/2}\,\|R(\zeta, \varkappa)^*\|^{1/2} = \\ = b'\,\|R(\zeta, \varkappa)\| \leqslant \frac{b'}{1-\zeta}, \quad \zeta < 0. \qquad (4.12)$$

**Замечание 4.7.** Если $\mathfrak{t}(\varkappa)$ — голоморфное семейство форм типа (a) и функция $\mathfrak{t}(\varkappa)[u]$ вещественна для вещественных $\varkappa$ (предполагается, что вещественная ось пересекает область $\mathrm{D}_0$).

то, как нетрудно видеть, $\mathfrak{t}(\varkappa)^* = \mathfrak{t}(\bar{\varkappa})$; в этом смысле формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ образуют *самосопряженное семейство*. Тогда $T(\varkappa)^* = T(\bar{\varkappa})$ и $T(\varkappa)$ образуют самосопряженное семейство операторов (см. п. 3.1); в частности, для вещественных $\varkappa$ оператор $T(\varkappa)$ самосопряжен.

В этом случае по второй теореме о представлении оператор $(T(\varkappa)+\lambda)^{1/2}$ имеет постоянную область определения $\mathrm{D}$ для вещественных $\varkappa$ и больших $\lambda$. Неясно, однако, верно ли то же самое для комплексных значений $\varkappa$, хотя оператор $(T(\varkappa)+\lambda)^{1/2}$ корректно определен, согласно результатам п. V.3.11. Таким образом, мы не знаем, образуют ли операторы $(T(\varkappa)+\lambda)^{1/2}$ голоморфное семейство типа (A), если $T(\varkappa)$ принадлежит типу (B) или даже является самосопряженным семейством.

Однако голоморфное семейство операторы $(T(\varkappa)+\lambda)^{1/2}$ образуют. Для доказательства воспользуемся формулой [см. (V.3.43)]

$$(T(\varkappa)+\lambda)^{-1/2} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \mu^{-1/2}\,(T(\varkappa)+\lambda+\mu)^{-1}\,d\mu. \tag{4.13}$$

Правую часть в (4.13) можно дифференцировать по $\varkappa$ под знаком интеграла, так как, согласно (4.12), справедлива оценка $\| d(T(\varkappa)+\lambda+\mu)^{-1}/d\varkappa \| \leqslant b'(\lambda+\mu)^{-1}$ и поэтому интеграл, возникающий при дифференцировании подинтегрального выражения, абсолютно сходится. Это показывает, что операторы $(T(\varkappa)+\lambda)^{-1/2}$ образуют ограниченно-голоморфное семейство. Отсюда следует по теореме 1.3, что семейство $(T(\varkappa)+\lambda)^{1/2}$ голоморфно.

## 3. Критерий голоморфности типа (B)

**Теорема 4.8.** *Пусть* $\mathfrak{t}^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — *последовательность полуторалинейных форм в* $\mathrm{H}$. *Предположим, что форма* $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}^{(0)}$ *секториальна, замыкаема и имеет плотную в* $\mathrm{H}$ *область определения* $\mathrm{D}(\mathfrak{t}) = \mathrm{D}$. *Далее, предположим, что формы* $\mathfrak{t}^{(n)}$, $n \geqslant 1$, *ограничены относительно* $\mathfrak{t}^{(0)}$, *т. е.* $\mathrm{D}(\mathfrak{t}^{(n)}) \supset \mathrm{D}$ *и*

$$|\mathfrak{t}^{(n)}[u]| \leqslant c^{n-1}(a\|u\|^2 + b\mathfrak{h}[u]), \quad u \in \mathrm{D}, \quad n \geqslant 1, \tag{4.14}$$

*где* $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}\mathfrak{t}$ *и* $a, b \geqslant 0$. *Тогда форма*

$$\mathfrak{t}(\varkappa)[u] = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n \mathfrak{t}^{(n)}[u], \quad \mathrm{D}(\mathfrak{t}(\varkappa)) = \mathrm{D}, \tag{4.15}$$

*и соответствующая полярная форма* $\mathfrak{t}(\varkappa)[u, v]$ *определены в круге* $|\varkappa| < 1/c$. *Форма* $\mathfrak{t}(\varkappa)$ *секториальна и замыкаема при условии* $|\varkappa| < 1/(b+c)$. *Замыкания* $\tilde{\mathfrak{t}}(\varkappa)$ *форм* $\mathfrak{t}(\varkappa)$ *образуют голоморф-*

*ное семейство типа* (a), *если* $|\varkappa| < 1/(b+c)$. *Операторы* $T(\varkappa)$, *соответствующие формам* $\tilde{\mathfrak{t}}(\varkappa)$, *образуют голоморфное семейство типа* (B).

Доказательство. Правая часть в (4.15) сходится при $|\varkappa| < 1/c$ и определяет квадратичную форму. Полярная полуторалинейная форма $\mathfrak{t}(\varkappa)[u, v]$ также определена для $|\varkappa| < 1/c$. Имеем

$$|(\mathfrak{t}(\varkappa)-\mathfrak{t})[u]| \leqslant \frac{|\varkappa|}{1-c|\varkappa|}(a\|u\|^2+b\mathfrak{h}[u]), \quad |\varkappa|<1/c. \qquad (4.16)$$

По теореме VI.1.33 форма $\mathfrak{t}(\varkappa)$ секториальна и допускает замыкание, если $b|\varkappa|/(1-c|\varkappa|)<1$, или, что то же, $|\varkappa| < 1/(b+c)$. Из той же теоремы следует, что замыкания $\tilde{\mathfrak{t}}(\varkappa)$ и $\tilde{\mathfrak{t}}$ имеют общую область определения $\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$. Остается показать, что для каждого вектора $u \in \tilde{\mathbf{D}}$ функция $\tilde{\mathfrak{t}}(\varkappa)[u]$ допускает разложение в степенной ряд:

$$\tilde{\mathfrak{t}}(\varkappa)[u] = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n \tilde{\mathfrak{t}}^{(n)}[u], \quad u \in \tilde{\mathbf{D}}. \qquad (4.17)$$

Здесь $\tilde{\mathfrak{t}}^{(0)} = \tilde{\mathfrak{t}}$ и $\tilde{\mathfrak{t}}^{(n)}$ — продолжение формы $\mathfrak{t}^{(n)}$ с областью определения $\tilde{\mathbf{D}}$ (не обязательно замыкание формы $\mathfrak{t}^{(n)}$), причем такое, для которого справедливо неравенство (4.14) с $\tilde{\mathfrak{h}} = \operatorname{Re}\tilde{\mathfrak{t}}$ вместо $\mathfrak{h}$. Для $u \in \tilde{\mathbf{D}}$ число $\tilde{\mathfrak{t}}^{(n)}[u]$ определяется как предел $\lim\limits_{k\to\infty} \mathfrak{t}^{(n)}[u_k]$, где последовательность $\{u_k\}$ такова, что $u_k \xrightarrow[\mathfrak{t}]{} u$; существование этого предела следует из (4.14). Разложение (4.17) следует из (4.15), если в последнем $u$ заменить на $u_k$ и перейти к пределу при $k \to \infty$.

Так как оператор $T(\varkappa)$ в теореме 4.8 голоморфно зависит от $\varkappa$, то резольвента $R(\zeta, \varkappa) = R(\zeta, T(\varkappa))$ голоморфна по совокупности $\zeta$ и $\varkappa$ в подходящей области изменения этих переменных. Опишем эту область и оценим радиус сходимости ряда Тейлора и погрешности приближений. Такие оценки можно получить из доказательства теоремы VI.3.4. Предположим для простоты, что $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}\mathfrak{t} \geqslant 0$ и $a \geqslant 0$. Заменим в формуле (VI.3.10) оператор $S$ на $T(\varkappa)$; тогда $C$ в правой части этой формулы следует заменить на оператор $C(\varkappa)$, определенный формулой $(\tilde{\mathfrak{t}}(\varkappa) - \tilde{\mathfrak{t}})[u, v] = (C(\varkappa)G'u, G'v)$. Напомним, что $G' = H'^{1/2}$, $H' = H + \rho \geqslant 0$. Ввиду разложения (4.17) оператор $C(\varkappa)$ имеет вид

$$C(\varkappa) = \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n C^{(n)}, \quad C^{(n)} \in \mathscr{B}(\mathrm{H}), \quad (C^{(n)}G'u, G'v) = \tilde{\mathfrak{t}}^{(n)}[u, v]. \qquad (4.18)$$

Имеем

$$\|C^{(n)}\| \leqslant 2c^{n-1}k, \quad k = \max(b, a/\rho) \qquad (4.19)$$

[см. (VI.3.8) — (VI.3.9)]. Таким образом, резольвента $R(\zeta, S) = R(\zeta, T(\varkappa)) = R(\zeta, \varkappa)$ имеет разложение

$$\begin{aligned} R(\zeta, \varkappa) &= G'^{-1}(1-\zeta' H'^{-1}+iB'+C(\varkappa))^{-1} G'^{-1} = \\ &= R(\zeta)+G'^{-1}\sum_{p=1}^{\infty} J(\zeta)(-C(\varkappa) J(\zeta))^{p} G'^{-1}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

где

$$R(\zeta) = R(\zeta, 0) = R(\zeta, T), \quad J(\zeta) = (1-\zeta' H'^{-1}+iB')^{-1}, \quad \zeta' = \zeta+\rho, \tag{4.21}$$

если $|\varkappa|$ настолько мал, что

$$\|C(\varkappa)\|\,\|J(\zeta)\| \leqslant \|J(\zeta)\| \sum_{h=1}^{\infty} |\varkappa|^{n} \|C^{(n)}\| < 1. \tag{4.22}$$

В силу неравенств (4.19) условие (4.22) выполнено, если

$$|\varkappa| < (2k\,\|J(\zeta)\|+c)^{-1}. \tag{4.23}$$

Здесь молчаливо предполагается, что $J(\zeta) \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$; в общем случае трудно сказать, когда это предположение выполнено, но если $\operatorname{Re}\zeta' \leqslant 0$, то $J(\zeta) \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ и $\|J(\zeta)\| \leqslant 1$. Поэтому условие (4.23) выполнено, если

$$|\varkappa| < (2k+c)^{-1}, \quad \operatorname{Re}\zeta' = \operatorname{Re}\zeta+\rho \leqslant 0. \tag{4.24}$$

В частности, если $-\operatorname{Re}\zeta > a/b$, то, не нарушая условия $\operatorname{Re}\zeta' \geqslant 0$, можно считать, что $\rho > a/b$; в этом случае $k = h$ и условие (4.24) принимает вид $|\varkappa| < (2b+c)^{-1}$. Другими словами, резольвента $R(\zeta, \varkappa)$ *разлагается в ряд по степеням* $\varkappa$, *сходящийся в круге* $|\varkappa| < (2b+c)^{-1}$, *если число* $-\operatorname{Re}\zeta$ *достаточно велико и положительно*. Это приводит к другому доказательству голоморфности $T(\varkappa)$ в точке $\varkappa = 0$.

Эти результаты можно несколько усилить, если невозмущенная форма $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$ симметрична и, следовательно, соответствующий оператор $T = H$ самосопряжен. В этом случае форма $\mathfrak{h}$ не обязана быть положительной, постоянная $a$ может быть отрицательна и для каждого $\zeta \in \mathrm{P}(H)$ оператор $J(\zeta)$ ограничен. Для доказательства нужно сделать лишь следующие модификации в предыдущих рассуждениях. Положим $\rho = ab^{-1}+\delta$, $\delta > 0$; тогда, согласно (4.14), $H' = H+\rho \geqslant \delta > 0$, неравенства (4.19) справедливы при $k = b$ и ряд по степеням $\varkappa$ для $R(\zeta, \varkappa)$ сходится в круге $|\varkappa| < (2b\,\|J(\zeta)\|+c)^{-1}$ [см. (4.23)]. Так как теперь $B' = 0$, то $J(\zeta) = (1-\zeta' H'^{-1})^{-1} = H'(H'-\zeta')^{-1} = (H+ab^{-1}+\delta)(H-\zeta)^{-1} = b^{-1}(a+bH+b\delta)R(\zeta)$. Поскольку $\delta > 0$ произвольно, мы заключаем, что ряд по степеням $\varkappa$ для $R(\zeta, \varkappa)$ сходится в круге $|\varkappa| < (2\,\|(a+bH)R(\zeta)\|+c)^{-1}$. Множитель 2 в последнем неравенстве можно опустить, если все формы $\mathfrak{t}^{(n)}$ симметричны, так как тогда из $|\mathfrak{t}^{(n)}[u]| \leqslant \leqslant b\mathfrak{h}'[u]$ следует, что $|\mathfrak{t}^{(n)}[u, v]| \leqslant b \| G'u \| \| G'v \|$. Случай $b = 0$ можно рассмотреть, переходя к пределу при $b \to 0$. Из сделанных замечаний следует

**Теорема 4.9.** *Пусть в условиях теоремы 4.8 форма* $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$ *симметрична (оператор* $T = H$ *самосопряжен) и постоянная* $a$ *в неравенствах (4.14) не предполагается неотрицательной. Тогда для любого* $\zeta \in \mathrm{P}(H)$ *резольвента* $R(\zeta, \varkappa)$ *существует и представляется рядом по степеням* $\varkappa$ *в круге*

$$|\varkappa| < (\varepsilon \| (a + bH) R(\zeta, H) \| + c)^{-1}, \tag{4.25}$$

*где* $\varepsilon = 1$ *или* $2$ *в зависимости от того, все формы* $\mathfrak{t}^{(n)}$ *симметричны или нет.*

**Замечание 4.10.** Можно дать также оценку для самой резольвенты $R(\zeta, \varkappa)$, аналогичную оценке (VI.3.16), в которой постоянные $a$, $b$ следует заменить подходящими функциями от $\varkappa$. Детали опускаем.

**Пример 4.11.** Рассмотрим форму

$$\mathfrak{t}(\varkappa)[u, v] = \int_a^b p(x)\, u'\overline{v'}\, dx + \int_a^b [q(x) + \varkappa q^{(1)}(x)]\, u\overline{v}\, dx + \\ + (h_a + \varkappa h_a^{(1)})\, u(a)\, \overline{v(a)} + (h_b + \varkappa h_b^{(1)})\, u(b)\, \overline{v(b)}, \tag{4.26}$$

где $p(x)$, $q(x)$, $q^{(1)}(x)$ — непрерывные функции на отрезке $[a, b]$ и $p(x) > 0$ [см. пример VI.1.7; здесь мы для простоты положили $S(x) = r(x) = 0$, но последующие результаты верны и без этого предположения]. Как мы видели в примере VI.1.36, форма $\mathfrak{t}(\varkappa)$ удовлетворяет предположениям теоремы 4.8 со сколь угодно малой постоянной $b$, так как все формы в правой части (4.26), за исключением первой, ограничены относительно первого члена и имеют нулевые относительные границы. Оператор $T(\varkappa)$, ассоциированный с формой $\mathfrak{t}(\varkappa)$, имеет вид

$$T(\varkappa)\, u = -(pu')' + (q + \varkappa q^{(1)})\, u \tag{4.27}$$

и определен на функциях, удовлетворяющих граничным условиям

$$p(a)\, u'(a) - (h_a + \varkappa h_a^{(1)})\, u(a) = 0, \quad p(b)\, u'(b) + (h_b + \varkappa h_b^{(1)})\, u(b) = 0. \tag{4.28}$$

Таким образом, операторы $T(\varkappa)$ образуют голоморфное семейство типа (В), определенное для всех комплексных $\varkappa$.

Сузим форму $\mathfrak{t}(\varkappa)$ на многообразие функций, удовлетворяющих граничным условиям

$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \tag{4.29}$$

Этому сужению $\mathfrak{t}_0(\varkappa)$ соответствует другое голоморфное семейство $T_0(\varkappa)$, определенное формальным оператором (4.27) и граничными условиями (4.29). Однако этот результат тривиален, так как операторы $T_0(\varkappa)$ имеют постоянную область определения, а возмущающий оператор $\varkappa q^{(1)}$ в (4.27) ограничен, и поэтому семейство $T_0(\varkappa)$ принадлежит типу (А).

Ограничивая область определения формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ условием $u(a) = 0$, мы получаем третье семейство операторов, определенных формальным оператором (4.27) и граничными условиями: (4.28) — в точке $b$, (4.29) — в точке $a$. Это семейство также голоморфное типа (В).

## 4. Голоморфные семейства типа $(\mathrm{B}_0)$

В теореме 4.8 невозмущенная форма $\mathfrak{t}$ может и не быть замкнутой. Если же $\mathfrak{t}$ замкнута, то возмущенные формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ также замкнуты, так как тогда $\mathrm{D}(\tilde{\mathfrak{t}}(\varkappa)) = \mathrm{D}$. Однако критерий голоморфности типа (B) (теорема 4.8) полезен и в приведенной здесь общей форме без предположения о замкнутости $\mathfrak{t}$.

Проиллюстрируем это на одном важном примере. Предположим, что нам задано семейство операторов $S(\varkappa)$ вида

$$S(\varkappa) = S + \varkappa S^{(1)} + \varkappa S^{(2)} + \dots, \tag{4.30}$$

где оператор $S$ плотно определен и секториален, $\mathrm{D}(S^{(n)}) \supset \supset \mathrm{D}(S)$ и

$$|(S^{(n)}u, u)| \leqslant c^{n-1}(a\,\|u\|^2 + b\,\mathrm{Re}\,(Su, u)), \quad u \in \mathrm{D}(S), \tag{4.31}$$

причем постоянные $a$, $b$ таковы, что $a \geqslant 0$, $0 \leqslant b < 1$.

Тогда для форм $\mathfrak{t}[u, v] = (Su, v)$ и $\mathfrak{t}^{(n)}[u, v] = (S^{(n)}u, v)$ выполнены предположения теоремы 4.8, так как форма $\mathfrak{t}$ замыкаема (см. теорему VI.1.27). Построенный в теореме 4.8 оператор $T(\varkappa)$ является расширением по Фридрихсу для $S(\varkappa)$ (см. п. VI.2.3). Таким образом, доказана

**Теорема 4.12.** *Пусть $S(\varkappa)$ — введенное выше семейство. Расширения по Фридрихсу $T(\varkappa)$ операторов $S(\varkappa)$ существуют и образуют голоморфное семейство типа* (B) *в круге* $|\varkappa| < (b + c)^{-1}$.

Семейство $T(\varkappa)$, построенное в теореме 4.12, назовем голоморфным семейством типа $(\mathrm{B}_0)$ [1]. Такие семейства являются частным случаем голоморфных семейств типа (B). Области определения операторов $T(\varkappa)$ для различных $\varkappa$ имеют общую плотную в $\mathrm{H}$ часть $\mathrm{D}(S)$, что не всегда верно для семейств типа (B).

Оператор $T(\varkappa)$ является замкнутым расширением оператора $S(\varkappa)$, однако он может не совпадать с замыканием оператора $S(\varkappa)$. Если $T(\varkappa) \neq S(\tilde{\varkappa})$, то может существовать другое семейство $T_1(\varkappa)$, образованное $m$-секториальными расширениями операторов $S(\varkappa)$. В этой связи замечательна следующая теорема, по существу принадлежащая Реллиху [3].

**Теорема 4.13.** *Если замыкание $\tilde{S}$ оператора $S$ $m$-секториально, то семейство $T(\varkappa)$, построенное в теореме 4.12, является единственным голоморфным семейством [2] в окрестности нуля, состоящим из расширений операторов $S(\varkappa)$ и таким, что $T(0) = \tilde{S}$.*

---

[1] В частном случае голоморфных семейств этот тип введен Реллихом [3].

[2] Как следует из доказательства, единственность имеет место даже в том случае, когда семейство $T(\varkappa)$ предполагается лишь вещественно-голоморфным.

Доказательство. Операторы $T = T(0)$ и $\tilde{S}$ совпадают, так как $T$ является $m$-секториальным расширением оператора $S$. Пусть $T_1(\varkappa)$ — голоморфное семейство в окрестности нуля, такое, что $T_1(\varkappa) \supset S(\varkappa)$ и $T_1 = T_1(0) = \tilde{S} = T$. Тогда резольвентное множество $\mathrm{P}(T_1)$ непусто. Если $\zeta \in \mathrm{P}(T_1)$, то резольвента

$$R(\zeta, T_1(\varkappa)) = R + \varkappa R_1 + \varkappa^2 R_2 + \ldots \tag{4.32}$$

ограниченно-голоморфна в окрестности нуля по теореме 1.3. Для любого вектора $u \in \mathrm{D}(S)$ имеем $R(\zeta, T_1(\varkappa))(S(\varkappa) - \zeta)u = u$, так как $T_1(\varkappa) \supset S(\varkappa)$. Поэтому

$$(R + \varkappa R_1 + \varkappa^2 R_2 + \ldots)(S - \zeta + \varkappa S^{(1)} + \varkappa^2 S^{(2)} + \ldots) u = u \tag{4.33}$$

и сравнение коэффициентов дает

$$\begin{aligned} R(S - \zeta) u &= u, \\ R_1(S - \zeta) u &= -RS^{(1)}u, \\ R_2(S - \zeta) u &= -RS^{(2)}u - R_1S^{(1)}u, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{4.34}$$

для каждого вектора $u \in \mathrm{D}(S)$. Эти соотношения определяют операторы $R, R_1, R_2, \ldots \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ *однозначно*, так как многообразие $(S - \zeta)\,\mathrm{D}(S) = (T - \zeta)\,\mathrm{D}(S)$ плотно в $\mathrm{H}$ ввиду равенства $T = \tilde{S}$ (см. задачу III.6.3).

**Замечание 4.14.** Существенным моментом в теореме 4.13, помимо единственности семейства $T(\varkappa)$, является тот факт, что замыкание оператора $S(\varkappa)$ не обязано совпадать с $T(\varkappa)$ при $\varkappa \neq 0$. Во многих задачах, возникающих в приложениях, операторы $T(\varkappa)$ совпадают с замыканиями операторов $S(\varkappa)$ или даже $T(\varkappa) = S(\varkappa)$. Даже в этих случаях применение теоремы 4.8 и, в частности, оценки (4.25) в том случае, когда оператор $T = H$ самосопряжен, приводит к результатам более точным, чем результаты, получаемые другими методами.

**Пример 4.15.** Рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$L(\varkappa) u = -u'' + \varkappa x^{-2} u, \quad 0 < x < \infty. \tag{4.35}$$

Пусть $\dot{T}(\varkappa)$ — минимальный оператор в $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(0, \infty)$, построенный по оператору (4.35), $\mathrm{D}(\dot{T}(\varkappa)) = \mathrm{C}_0^\infty(0, \infty)$. Оператор $\dot{T}(\varkappa)$ симметричен для вещественных $\varkappa$; он секториален для каждого комплексного $\varkappa$, удовлетворяющего условию $\mathrm{Re}\,\varkappa > -1/4$. Последнее вытекает из (VI.4.6) и равенства $-(u'', u) = \int\limits_0^\infty |u'|^2\, dx$. Таким образом, семейство $T(\varkappa)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.12 и поэтому расширения по Фридрихсу $T(\varkappa)$ операторов $\dot T(\varkappa)$ образуют голоморфное семейство типа $(\mathrm{B}_0)$.

Является ли $T(\varkappa)$ единственным голоморфным семейством, состоящим из $m$-секториальных расширений операторов $\dot T(\varkappa)$? Ответ зависит от вида рассматриваемой области $\mathrm{D}_0$. Если $\mathrm{D}_0$ содержит точку $\varkappa = 3/4$, то ответ положительный. В самом деле, известно, что оператор $\dot T(3/4)$ существенно самосопряжен[1]; таким образом, мы находимся в условиях применимости теоремы 4.13, если точку $\varkappa = 0$ заменить на $\varkappa = 3/4$ (см. также замечание 1.6). Интересно отметить, что для $\varkappa < 3/4$ оператор $\dot T(\varkappa)$ не является существенно самосопряженным и, следовательно, $T(\varkappa)$ не единственное самосопряженное расширение оператора $\dot T(\varkappa)$. Тем не менее семейство $T(\varkappa)$ является единственным голоморфным расширением семейства $\dot T(\varkappa)$.

Это семейство $T(\varkappa)$ характеризуется условием $\mathrm{D}(T(\varkappa)) \subset \mathrm{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$, где $\tilde{\mathfrak{t}}$ — замыкание формы $\dot{\mathfrak{t}} = \dot{\mathfrak{t}}(3/4)$, соответствующей оператору $\dot T(3/4)$, т. е. $\dot{\mathfrak{t}}[u] = (u', u') + (3/4)\int\limits_0^\infty x^2 |u|^2\,dx$, $u \in \mathrm{C}_0^\infty$. Учитывая неравенство (VI.4.6), нетрудно видеть, что $\mathrm{D}(\tilde{\mathfrak{t}})$ есть множество всех векторов $u \in \mathrm{H}$ таких, что $u' \in \mathrm{H}$ и $u(0) = 0$ (ср. задачу VI.2.18). Следовательно, $T(\varkappa)$ является сужением оператора $L(\varkappa)$ на многообразие $\mathrm{D}(T(\varkappa))$ векторов $u \in \mathrm{H}$ таких, что $u' \in \mathrm{H}$ и $u(0) = u$.

## 5. Связь между голоморфными семействами типов (А) и (В)

Возникает естественный вопрос: существует ли связь между голоморфными семействами типа (А) и типа (В). В самом общем случае такая связь не может существовать, поскольку семейства типа (А) определены в любом банаховом пространстве, в то время как семейства типа (В) — только в гильбертовом пространстве. Если же ограничиться самосопряженными семействами секториальных операторов, то оказывается, что семейства типа (В) образуют более широкий класс, чем семейства типа (А). Точнее, верна

**Теорема 4.16.** *Самосопряженное голоморфное семейство $T(\varkappa)$ типа (А) принадлежит также типу $(\mathrm{B}_0)$, по крайней мере в окрестности вещественной оси, если оператор $T(\varkappa)$ ограничен снизу для некоторого вещественного $\varkappa$ (тогда операторы $T(\varkappa)$ ограничены снизу для всех вещественных $\varkappa$).*

---

[1] При $x = 0$ мы имеем для уравнения (4.35) случай *предельной точки*, если $\varkappa \geqslant 3/4$, и случай *предельной окружности*, если $\varkappa < 3/4$ (см. Коддингтон и Левинсон [1] стр. 247). В самом деле, уравнение $L(\varkappa)u = 0$ имеет два линейно независимых решения $u_\pm = x^{\alpha\pm}$, где $2\alpha_\pm = 1 \pm (1 + 4\varkappa)^{1/2}$; если $4\varkappa < 3$, то оба решения $u_\pm$ принадлежат $\mathrm{L}^2(0, 1)$, если же $4\varkappa \geqslant 3$, то решение $u_-$ не принадлежит пространству $\mathrm{L}^2(0, 1)$. Отсюда следует, что для вещественных $\varkappa$ оператор $\dot T(\varkappa)$ существенно самосопряжен тогда и только тогда, когда $\varkappa \geqslant 3/4$ (в бесконечности для уравнения (4.35) имеем случай предельной точки при любом вещественном $\varkappa$).

Доказательство. Можно считать, что точка $\varkappa = 0$ принадлежит области $\mathrm{D}_0$ определения семейства $T(\varkappa)$ и оператор $T = T(0)$ самосопряжен и неотрицателен. Тогда имеет место разложение (2.1) для вектор-функции $T(\varkappa)u$, $u \in \mathrm{D} = \mathrm{D}(T(\varkappa))$, причем коэффициенты $T^{(n)}$ симметричны и удовлетворяют неравенствам вида (2.5) (см. замечание 2.8). Замечая, что $a\|u\| + b\|Tu\| \leqslant \sqrt{2}\,\|(a + bT)u\|$, с помощью теоремы V.4.12 приходим к неравенству

$$|(T^{(n)}u, u)| \leqslant \sqrt{2}\,c^{n-1}((a + bT)u, u), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.36}$$

Пусть $T_F(\varkappa)$ — расширение по Фридрихсу оператора $T(\varkappa)$. Ввиду неравенства (4.36) из теоремы 4.12 следует, что операторы $T_F(\varkappa)$ существуют в окрестности точки $\varkappa = 0$ и образуют голоморфное семейство типа (B). Операторы $T(\varkappa)$ и $T_F(\varkappa)$ совпадают для вещественных $\varkappa$, так как $T(\varkappa)$ самосопряжен, а $T_F(\varkappa)$ — самосопряженное расширение оператора $T(\varkappa)$. Поскольку $T(\varkappa)$ и $T_F(\varkappa)$ образуют голоморфные семейства, то из теоремы единственности (замечание 1.6) следует, что $T(\varkappa) = T_F(\varkappa)$ для всех $\varkappa$ в общей области определения семейств $T(\varkappa)$ и $T_F(\varkappa)$. Это доказывает, что семейство $T(\varkappa)$ в окрестности нуля принадлежит типу (B); отсюда следует, что оператор $T(\varkappa)$ секториален и, в частности, ограничен снизу для вещественных $\varkappa$.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы, покажем, что полученный выше результат справедлив для некоторой окрестности каждого вещественного числа $\varkappa$ из области определения $\mathrm{D}_0$ семейства $T(\varkappa)$. Для этого в свою очередь достаточно доказать, что оператор $T(\varkappa)$ ограничен снизу для каждого вещественного $\varkappa \in \mathrm{D}_0$. Предположим, что для некоторого вещественного числа $\varkappa_0 \in D_0$ оператор $T(\varkappa_0)$ ограничен снизу. Так как, согласно неравенству (2.4), оператор $T(\varkappa) - T(\varkappa_0)$ ограничен относительно $T(\varkappa_0)$ и его относительная граница меньше единицы для малых $|\varkappa - \varkappa_0|$, то из теоремы V.4.11 следует, что оператор $T(\varkappa)$ ограничен снизу для вещественных $\varkappa$, близких к $\varkappa_0$. Поскольку требуемая близость $\varkappa$ и $\varkappa_0$ равномерна в любом компактном подмножестве области $\mathrm{D}_0$, то полуограниченность оператора $T(\varkappa)$ распространяется с точки $\varkappa = 0$ на все вещественные $\varkappa \in \mathrm{D}_0$.

## 6. Ряды теории возмущений для собственных значений и собственных проекторов

Общие результаты п. 1.3 о конечных системах собственных значений операторов $T(\varkappa)$ применимы к голоморфным семействам типа (B). Мы собрали здесь некоторые результаты, характерные для этого типа голоморфных семейств. Для простоты ограничимся случаем, рассмотренным в теореме 4.9.

Пусть $\lambda$ — изолированное собственное значение оператора $H$ и $P$ — соответствующий собственный проектор, причем $\dim P = m < \infty$. Тотальный проектор $P(\varkappa) = P + \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n P^{(n)}$ для $\lambda$-группы собственных значений оператора $T(\varkappa)$ голоморфен по $\varkappa$, что следует из формулы (1.3). Подстановка в (1.3) разложения (4.20) дает [ср. (II.2.8)]

$$P^{(n)} = -\sum_{p=1}^{n} (-1)^p \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_p=n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} G'^{-1} J(\zeta) C^{(\nu_1)} J(\zeta) \ldots$$
$$\ldots J(\zeta) C^{(\nu_p)} J(\zeta) G'^{-1} \, d\zeta. \qquad (4.37)$$

Здесь $G' = H^{1/2}$, $H' = H + \rho = H + ab^{-1} + \delta$, а оператор $J(\zeta)$ определен формулой (4.21), где $B' = 0$, так как форма t предполагается симметричной:

$$J(\zeta) = H'(H' - \zeta')^{-1} = H'R(\zeta), \quad R(\zeta) = (H - \zeta)^{-1}. \qquad (4.38)$$

Операторы $C^{(\nu)}$ определены формулами (4.18). Так же как в п. II.2.2, можно получить степенной ряд для среднего арифметического рассматриваемых собственных значений. Отметим, однако, что формула (II.2.23) теперь не имеет смысла, поскольку операторы $T^{(n)}$ не определены. Вместо (II.2.23) имеем

$$\hat{\lambda}(\varkappa) - \lambda = -\frac{1}{2\pi i m} \operatorname{tr} \int_{\Gamma} \log \left(1 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n C^{(n)}\right) J(\zeta)\right) d\zeta. \qquad (4.39)$$

Эту формулу с помощью интегрирования по частям и формулы $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ можно вывести из (II.2.25), где резольвенту $R(\zeta, \varkappa)$ нужно заменить разложением (4.20). При интегрировании по частям используем равенство $J(\zeta) G'^{-2} J(\zeta) = H'R(\zeta)^2 = (d/d\zeta) H'R(\zeta)$. Возможность применения формулы $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$ под знаком интеграла непосредственно не очевидна, однако ее можно обосновать с помощью рассуждений, приведенных в п. 2.3 для семейств типа (A).

Формула (4.39) дает следующие выражения для коэффициентов ряда $\hat{\lambda}(\varkappa) = \lambda + \sum \varkappa^n \hat{\lambda}^{(n)}$ [ср. (II.2.30)]:

$$\hat{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{2\pi i m} \operatorname{tr} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p} \sum_{\nu_1+\ldots+\nu_p=n} \int_{\Gamma} C^{(\nu_1)} J(\zeta) C^{(\nu_2)} \ldots$$
$$\ldots J(\zeta) C^{(\nu_p)} J(\zeta) \, d\zeta. \qquad (4.40)$$

Если с помощью равенства $R(\zeta) = -(\zeta - \lambda)^{-1} P + S + (\zeta - \lambda) S^2 + \ldots$ [см. (I.5.18) и (III.6.32)] ввести приведенную резольвенту $S$ (оператора $H$) для собственного значения $\lambda$.

то формулы (4.37) и (4.40) примут вид [ср. (II.2.12) и (II.2.31)]

$$P^{(n)} = -\sum_{p} (-1)^p \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_p=n \\ k_1+\dots+k_{p+1}=p}} G'^{-1} J^{(k_1)} C^{(\nu_1)} \dots J^{(k_p)} C^{(\nu_p)} J^{(k_{p+1})} G'^{-1}, \tag{4.41}$$

$$\hat{\lambda}^{(n)} = \frac{1}{m} \sum_{p} \frac{(-1)^p}{p} \sum_{\substack{\nu_1+\dots+\nu_p=n \\ k_1+\dots+k_p=p-1}} \operatorname{tr} C^{(\nu_1)} J^{(k_1)} \dots C^{(\nu_p)} J^{(k_p)}, \tag{4.42}$$

где

$$J^{(0)} = -H'P = -(\lambda + ab^{-1} + \delta) P, \quad J^{(k)} = H'S^k, \ k \geqslant 1. \tag{4.43}$$

Желательно выразить коэффициенты $P^{(n)}$ и $\hat{\lambda}^{(n)}$ через заданные формы $\mathfrak{t}^{(n)}$, не используя вспомогательные величины $H'$, $G'$, $C^{(n)}$ и т. д. В общем случае это сделать нелегко, но несколько первых коэффициентов можно вычислить без особого труда. Например,

$$\hat{\lambda}^{(1)} = -\frac{1}{m} \operatorname{tr} C^{(1)} J^{(0)} = \frac{1}{m} \operatorname{tr} C^{(1)} H'P = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} (C^{(1)} H' \varphi_j, \varphi_j) =$$

$$= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \tilde{\mathfrak{t}}^{(1)} [G'\varphi_j, G'^{-1}\varphi_j] = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \tilde{\mathfrak{t}}^{(1)} [\varphi_j], \tag{4.44}$$

где $\{\varphi_j, j = 1, \dots, m\}$ — ортонормированный базис в собственном подпространстве $P\mathsf{H}$ [заметим, что $G'^{\pm 1}\varphi_j = (\lambda + ab^{-1} + \delta)^{\pm 1/2} \varphi_j$].

**Задача 4.17.** Формулы (4.37) и (4.40) *формально* совпадают с формулами (II.2.8) и (II.2.30) соответственно после подстановки выражения (4.38) вместо $J(\zeta)$ и $G'^{-1} T^{(n)} G'^{-1}$ — вместо $C^{(n)}$.

Оценим теперь радиус сходимости ряда для $P(\varkappa)$. Согласно неравенству (4.25), в качестве нижней границы для радиуса сходимости можно взять

$$r_0 = \inf_{\zeta \in \Gamma} (\varepsilon \, \| (a + bH) R(\zeta) \| + c)^{-1} = \inf_{\substack{\zeta \in \Gamma \\ \mu \in \Sigma(H)}} \left( \varepsilon \left| \frac{a + b\mu}{\mu - \zeta} \right| + c \right)^{-1}, \tag{4.45}$$

где $\varepsilon = 1$ или $2$ в зависимости от того, симметричны формы $\mathfrak{t}^{(n)}$ или нет. Так же как и выше, выбор контура $\Gamma$ позволяет получить оценки для радиуса сходимости, коэффициентов и остатка ряда функции $\hat{\lambda}(\varkappa)$.

Если в качестве $\Gamma$ взять окружность $|\zeta - \lambda| = d/2$, где $d$ — расстояние от $\lambda$ до множества остальных собственных значений оператора $H$, то $\| R(\zeta) \| \leqslant 2/d$ и $\| (H - \lambda) R(\zeta) \| \leqslant 2$ для

$\zeta \in \Gamma$ (см. 2.5). Поэтому

$$\| (a+bH) R(\zeta) \| \leqslant (a+b\lambda) \| R(\zeta) \| + b \| (H-\lambda) R(\zeta) \| \leqslant \leqslant \frac{2}{d}(a+b\lambda) + 2b \qquad (4.46)$$

(отметим, что, хотя число $a$ может быть отрицательным, $a + b\lambda \geqslant \geqslant 0$, так как $a + bH \geqslant 0$ и $\lambda$ — собственное значение для $H$). Итак, из (4.45) вытекает оценка

$$r_0 \geqslant \left[ \frac{2\varepsilon(a+b\lambda)}{d} + 2\varepsilon b + c \right]^{-1}. \qquad (4.47)$$

Интересно проследить сходство и различие между (4.47) и оценкой (2.34) для семейств типа (А).

Более аккуратный выбор контура Г может привести к улучшению оценки (4.47) (см. пример 4.20).

**Замечание 4.18.** Процесс редукции при построении рядов теории возмущений для собственных значений и собственных проекторов применяется к оператору $T_r(\varkappa)$, определенному формулой (1.11). Применение этого процесса здесь довольно сложно, поскольку оператор $T(\varkappa)$ не имеет явного представления в виде степенного ряда [как в случае семейств типа (А)].

Это неудобство можно до некоторой степени избежать, рассматривая собственные значения и собственные проекторы оператора $R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1}$ при фиксированном $\zeta$. Так как резольвента $R(\zeta, \varkappa)$ ограниченно-голоморфна по $\varkappa$ и, следовательно, имеет разложение Тейлора (4.20), то ее собственные значения и собственные проекторы можно вычислять с помощью процесса редукции, описанного в конечномерном случае. Поскольку собственные значения и собственные проекторы оператора $T(\varkappa)$ и его резольвенты довольно просто связаны между собой, мы получаем таким образом искомые ряды теории возмущений для $T(\varkappa)$ [1].

Так, например, собственные значения резольвенты $R(\zeta, \varkappa)$, соответствующие собственному значению $(\lambda - \zeta)^{-1}$ «невозмущенного» оператора $R(\zeta, 0) = R(\zeta)$ имеют вид

$$(\lambda - \zeta)^{-1} - \varkappa\nu'_j + \ldots, \quad j = 1, \ldots, m, \qquad (4.48)$$

где числа $\nu_j$ суть собственные значения оператора

$$PG'^{-1}J(\zeta)\, G^{(1)} J(\zeta)\, G'^{-1}P = \frac{\lambda + ab^{-1} + \delta}{(\lambda-\zeta)^2} PC^{(1)}P \qquad (4.49)$$

в конечномерном пространстве $P$H. Но $PC^{(1)}P$ — ограниченный оператор, соответствующий ограниченной форме

---

[1] Семейство $T(\varkappa)^{-1}$ вместо $T(\varkappa)$ применялось Т. Като [3, 7] и В. Крамером [1, 2] (в основном в рамках асимптотической теории возмущений).

$$(PC^{(1)}Pu,\ v) = (C^{(1)}Pu,\ Pv) = \widetilde{\mathfrak{t}}^{(1)}[G'^{-1}Pu,\ G'^{-1}Pv] =$$
$$= (\lambda + ab^{-1} + \delta)^{-1}\,\widetilde{\mathfrak{t}}^{(1)}[Pu,\ Pv].$$

Поэтому $\nu_j' = (\lambda - \zeta)^{-2}\,\mu_j'$, где $\{\mu_j',\ j = 1, \ldots, m\}$ — полный набор собственных значений $m$-мерного оператора, соответствующего форме $\widetilde{\mathfrak{t}}^{(1)}\,[u, v]$, суженной на $m$-мерное пространство $P\mathrm{H}$. Из (4.48) следует, что собственные значения оператора $T(\varkappa)$ имеют вид

$$\lambda + \varkappa\mu_j' + \ldots . \tag{4.50}$$

Заметим, что этот результат уточняет формулу (4.44), которая дает только среднее арифметическое $m$ собственных значений $\mu_j'$. Аналогичным образом можно вычислить следующие коэффициенты рядов для собственных значений.

Задача 4.19. Необходимым условием отсутствия расщепления в первом приближении служит равенство $\widetilde{\mathfrak{t}}^{(0)}\,[u, v] = \lambda'\,(u, v)$, где $u, v \in P\mathrm{H}$, $\lambda'$ — постоянная. Эта постоянная равна $\mu_1' = \ldots = \mu_m'$.

**Пример 4.20.** Рассмотрим задачу на собственные значения:

$$-u'' + \varkappa q\,(x)\,u = \lambda\,(\varkappa)\,u, \quad u\,(0) = u\,(\pi) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \tag{4.51}$$

Предположим для простоты, что функция $q\,(x)$ непрерывна на отрезке $[0, \pi]$. Эта задача является частным случаем задачи, рассмотренной в примере 2.17 (в качестве $T^{(1)}$ нужно взять оператор умножения на $q\,(x)$). Поэтому здесь применимы результаты примера 2.17, в которых следует положить $\|\,T^{(1)}\,\| = \|\,q\,\|_\infty = \max\,|\,q\,(x)\,|$. Однако оценки (2.38) — (2.42) могут быть довольно грубыми, если $\max\,|\,q\,(x)\,|$ велик по сравнению со средним значением функции $|\,q\,(x)\,|$. В таком случае могут оказаться полезными результаты этого пункта. Заметим, что здесь мы имеем семейство $T\,(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}$ типа (A) и (B) одновременно; это очевидно, так как оператор $T^{(1)}$ ограничен.

Пусть $s\,(x)$ — первообразная функции $q\,(x)$. Имеем

$$\left|\int_0^\pi q\,|\,u\,|^2\,dx\right| = \left|\int_0^\pi s'\,|\,u\,|^2\,dx\right| = \left|\int_0^x s\,(u'\bar{u} + u\bar{u}')\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant (\max|\,s\,|)\,2\,\|\,u\,\|\,\|\,u'\,\| \leqslant a\,\|\,u\,\|^2 + b\,(Tu,\ u), \tag{4.52}$$

где $a, b > 0$ и $ab = (\max\,|\,s\,|)^2$ [отметим, что $\|\,u'\,\|^2 = (Tu,\ u)$]. Оценка для радиуса сходимости ряда, соответствующего собственному значению $\lambda = \lambda_n = n^2$, дается формулой (4.47), где $c = 0$, $d = 2n - 1$ ($d = 3$, если $n = 1$). Наилучший выбор постоянной $a$ в рассматриваемой задаче таков: $a = (n^2 + 2n - 1)^{1/2} \max\,|\,s\,|$; тогда

$$r_0 \geqslant \frac{2n - 1}{4\varepsilon\,(n^2 + 2n - 1)^{1/2}\max\,|\,s\,|} \tag{4.53}$$

($\varepsilon = 1$, если функция $q\,(x)$ вещественна).

Аддитивную постоянную в интеграле $\int^x q\,(x)\,dx = s\,(x)$ следует выбрать таким образом, чтобы минимизировать $\max\,|\,s\,|$. Поскольку величина $\max\,|\,s\,|$ может быть мала по сравнению с $\max\,|\,q\,|$, то оценка (4.53) независима от оценки (2.38), в которой $\|\,T^{(1)}\,\| = \max\,|\,q\,|$.

Тот же метод можно применить к уравнению Матье (см. пример 3.4). Однако коэффициент $q(x) = \cos 2x$ таков, что оценка (4.53) в этом случае не приводит к улучшению соответствующего результата примера 2.17.

## 7. Скорость роста и полная система собственных значений

Для *самосопряженного* семейства $T(\varkappa)$ типа (B) можно оценить скорость роста собственных значений точно так же, как для семейств типа (A) (см. п. 3.4). Воспользуемся неравенством [см. (4.7)]

$$|\mathfrak{t}'(\varkappa)[u]| \leqslant a'(u, u) + b'\mathfrak{t}(\varkappa)[u], \quad u \in \mathrm{D}, \quad \varkappa \in \mathrm{I}, \tag{4.54}$$

где многообразие $\mathrm{D} = \mathrm{D}(\mathfrak{t}(\varkappa))$ не зависит от $\varkappa$, а интервал I вещественной оси содержит точку $\varkappa = 0$. Снова рассмотрим кусочно-голоморфную непрерывную функцию $\mu(\varkappa)$, образованную из нескольких изолированных собственных значений оператора $\lambda(\varkappa)$ так, как это описано в п. 3.4.

**Теорема 4.21.** *Для функции* $\mu(\varkappa)$ *справедлива оценка*

$$|\mu(\varkappa) - \mu(0)| \leqslant \frac{1}{b'}(a' + b'\mu(0))(e^{b'|\varkappa|} - 1). \tag{4.55}$$

Доказательство. Оценка (4.55) аналогична соответствующей оценке (3.17) для типа (A) с тем лишь отличием, что здесь вместо $|\mu(0)|$ фигурирует $\mu(0)$. Доказательство этой оценки аналогично доказательству теоремы 3.6; при этом требуются некоторые модификации, поскольку теперь выражение $T'(\varkappa)\varphi(\varkappa)$ не имеет смысла. Воспользуемся результатом задачи 4.19, по которому

$$\mu'(\varkappa) = \mathfrak{t}'(\varkappa)[\varphi(\varkappa)] \tag{4.56}$$

в любой точке $\varkappa$, где график функции $\mu(\varkappa)$ не пересекается с графиками других собственных значений. Поэтому

$$\mu'(\varkappa) \leqslant a' + b'\mathfrak{t}(\varkappa)[\varphi(\varkappa)] = a' + b'(T(\varkappa)\varphi(\varkappa), \varphi(\varkappa)) = \\ = a' + b'\mu(\varkappa). \tag{4.57}$$

Это неравенство отличается от (3.19) тем, что оно связывает значения функции $\mu(\varkappa)$ и ее производной, а не их абсолютные значения. Решая дифференциальное неравенство (4.57), приходим к оценке (4.55).

**Замечание 4.22.** Так же как в п. 3.5, можно доказать, пользуясь на сей раз теоремой 4.21, что теорема 3.9 справедлива для самосопряженных семейств типа (B) с компактной резольвентой [оператор $T(\varkappa)$ имеет компактную резольвенту для всех $\varkappa$, если это верно для некоторого $\varkappa_0$, см. теорему 4.3]. Таким образом, существует полное семейство нормированных собственных векторов и соответствующее семейство собственных значений, которые голоморфны всюду на рассматриваемом интервале значений $\varkappa$ [1]).

## 8. Применения к дифференциальным операторам

Теория голоморфных семейств операторов типа (B) широко применяется в теории возмущений дифференциальных операторов. Простейшие из таких применений к регулярным обыкновенным дифференциальным операторам были приведены в примерах 4.11 и 4.20. Здесь мы приведем ряд других примеров в этом направлении, связанных с регулярными дифференциальными операторами в частных производных и некоторыми сингулярными дифференциальными операторами, как обыкновенными, так и в частных производных.

**Пример 4.23.** Рассмотрим формальный дифференциальный оператор

$$L(\varkappa)\,u = -\sum_{j,\,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\, p_{jk}(x, \varkappa)\, \frac{\partial u}{\partial x_k} + q(x, \varkappa)\, u \tag{4.58}$$

в ограниченной области $E \subset R^m$. Коэффициенты $p_{jk}(x, \varkappa)$ и $q(x, \varkappa)$ предполагаются достаточно гладкими функциями по $x$ в замкнутой области $\overline{E}$ и голоморфными по вещественному параметру $\varkappa$. Кроме того, предположим, что функции $p_{jk}$, $q$ вещественны и матрица $(p_{jk}(x, \varkappa))$ симметрична и положительно определена *равномерно* по $x$ и $\varkappa$.

Как мы видели в п. VI.4.4, рассматривая квадратичную форму

$$\mathfrak{h}[u] = \int\limits_E \left[\Sigma p_{jk}(x, \varkappa)\, \frac{\partial u}{\partial x_k}\, \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j} + q(x, \varkappa)\, |u|^2\right] dx, \tag{4.59}$$

можно определить различные самосопряженные операторы в $H = L^2(E)$, соответствующие формальному дифференциальному оператору $L(\varkappa)$.

Сужение $\mathfrak{h}_1(\varkappa)$ формы $\mathfrak{h}(\varkappa)$ с областью определения $D(\mathfrak{h}_1)$, состоящей из функций $u$, удовлетворяющих нулевому граничному условию $u \mid \partial E = 0$, приводит к оператору $H_1(\varkappa) = L(\varkappa)$ с нулевым граничным условием. Форма $\mathfrak{h}_2(\varkappa) = \mathfrak{h}(\varkappa)$ без каких-либо ограничений на область определения приводит к оператору $H_2(\varkappa) = L(\varkappa)$ с обобщенным условием Неймана $[\partial u/\partial n = 0$, где $n$ — конормаль к границе $\partial E$, которая определяется через матрицу $(p_{ij}(x, \varkappa))$ и поэтому зависит от $\varkappa]$. Форма $\mathfrak{h}_3(\varkappa)$, получающаяся при добавлении к $\mathfrak{h}_2(\varkappa)$ граничного члена $\int\limits_{\partial E} \sigma(x, \varkappa)\, |u|^2\, dS$, приводит к оператору $H_3(\varkappa) = L(\varkappa)$ с обобщенным граничным условием третьего рода $\partial u/\partial n - \sigma u = 0$.

Согласно результатам п. VI.4.4, формы $\mathfrak{h}_n(\varkappa)$ при различных $\varkappa$ (но при фиксированном $n = 1, 2, 3$) ограничены относительно друг друга, причем то же самое верно для их замыканий. Из теоремы 4.8 следует, что замыкания форм $\mathfrak{h}_n(\varkappa)$ имеют аналитическое продолжение $\mathfrak{t}_n(\varkappa)$, которое является голоморфным семейством типа (a), определенным в окрестности вещественной оси. Поэтому операторы $H_n(\varkappa)$, определенные выше для вещественных $\varkappa$, имеют аналитическое продолжение на комплексную окрестность вещественной оси. Операторы $T_n(\varkappa)$ образуют *самосопряженное голоморфное семейство типа* (B). Отсюда следует, в частности, что собственные значения и соб-

---

[1]) См. Реллих [5], где это доказано для семейств типа $(B_0)$.

ственные проекторы операторов $T_n(\varkappa)$ голоморфны в окрестности вещественной оси.

Фактически семейство $T_1(\varkappa)$ принадлежит типу (A). Мы не доказываем это здесь. Отметим, что аналитичность собственных значений и собственных проекторов оператора $H_1(\varkappa)$ следует уже из того факта, что $H_1(\varkappa)$ образуют, как было доказано, голоморфное семейство типа (B).

**Пример 4.24.** Рассмотрим сингулярный дифференциальный оператор

$$L(\varkappa)\,u = -u'' + q(x)\,u + \varkappa q^{(1)}(x)\,u, \quad 0 < x < \infty; \tag{4.60}$$

здесь функции $q(x)$ и $q^{(1)}(x)$ могут иметь особенности. Предположим, как в п. VI.4.1, что функция $q$ может быть представлена в виде $q_1 + q_2 + q_3$, где все слагаемые вещественны, $q_1 \geqslant 0$ локально интегрируема, $q_2$ равномерно локально интегрируема и $q_3$ мажорируется функцией $1/4x^2$ [как в (VI.4.8)]. Тогда можно построить замкнутую форму $\mathfrak{h}[u] = \int\limits_0^\infty (|u'|^2 + q(x)\,|u|^2)\,dx$ и соответствующий ей самосопряженный оператор $H(0) = L(0)$ в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0, \infty)$, определенный на функциях, удовлетворяющих граничному условию $u(0) = 0$. Предположим далее, что функция $q^{(1)}$ также может быть записана в виде суммы трех функций $q_j^{(1)}$, обладающих указанными выше свойствами. Кроме того, предположим, что $q_1^{(1)} \leqslant \beta q_1$ для некоторой постоянной $\beta$. Легко видеть, что форма $\mathfrak{h}^{(1)}[u] = \int q^{(1)}(x)\,|u|^2\,dx$ ограничена относительно $\mathfrak{h}$, поскольку $q_2^{(1)}$ и $q_3^{(1)}$ ограничены относительно $\mathfrak{h}_0[u] = \int |u'|^2\,dx$. Из теоремы 4.8 следует, что $\mathfrak{t}(\varkappa) = \mathfrak{h} + \varkappa\mathfrak{h}^{(1)}$ — самосопряженное голоморфное семейство типа (a) и соответствующие операторы $T(\varkappa) = L(\varkappa)$ образуют самосопряженное голоморфное семейство типа (B). Область определения оператора $T(\varkappa)$ состоит из всех векторов $u \in \mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0, \infty)$ таких, что i) $u$ и $u'$ абсолютно непрерывны на полуоси $(0, \infty)$ и $u' \in \mathbf{H}$, ii) $u(0) = 0$ и iii) $q_1^{1/2}u$ и $L(\varkappa)\,u$ принадлежат $\mathbf{H}$ ( см. теорему VI.4.2). На своей области определения оператор $T(\varkappa)$ совпадает с $L(\varkappa)$. Отметим, что многообразие $\mathbf{D}(T(\varkappa))$ зависит от $\varkappa$ через условие iii).

Следует отметить также, что возмущающий потенциал $q^{(1)}(x)$, имеющий особенность типа $1/x^2$, приводит к голоморфному семейству $T(\varkappa)$.

**Пример 4.25.** Рассмотрим оператор Шрёдингера

$$L(\varkappa)\,u = -\Delta u + q(x) + \varkappa q^{(1)}(x)\,u \tag{4.61}$$

в пространстве $\mathbf{R}^3$. Предположим, что функция $q$ может быть записана в виде $q_1 + q_2 + q_3$, где все слагаемые вещественны, $q_1 \geqslant 0$ и $M_{q_1}(x)$ локально ограничена [функция $M_q(x)$ определена формулой (VI.4.21)], $M_{q_2}(x)$ — ограничена и $q_3$ является суммой конечного числа слагаемых вида $e_j\,|x - a_j|^{-2}$, причем $\sum\limits_{e_j < 0} |e_j| < 1/4$. Тогда по теореме VI.4.6 с помощью симметричной формы $\mathfrak{h}[u] = \int (|\operatorname{grad} u|^2 + q\,|u|^2)\,dx$ можно определить самосопряженное сужение оператора $L(0)$. Предположим далее, что функцию $q^{(1)}$ также можно записать в виде суммы трех слагаемых $q_j^{(1)}$ с указанными выше свойствами (ограничение на коэффициенты $e_j$ для $q_3^{(1)}$ можно отбросить, так как мы рассматриваем только малые значения $|\varkappa|$); кроме того, предположим, что $q_1^{(1)} \leqslant \beta q_1$ для некоторой постоянной $\beta$. Так же, как в предыдущем примере, можно показать, что в окрестности нуля определено самосопряженное голоморфное семейство типа (B) операторов $T(\varkappa)$ [в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathrm{R}^3)$], являющихся сужениями операторов $L(\varkappa)$. Многообразие $\mathbf{D}(T(\varkappa))$ определяется следующим образом: $u \in \mathbf{D}(T(\varkappa))$ тогда и только тогда, когда i) $\operatorname{grad} u \in \mathbf{H}' = \mathbf{H}^3$, ii) $\int q_1 |u|^2 dx < \infty$ и iii) $\Delta u$ существует в обобщенном смысле и $L(\varkappa) u \in \mathbf{H}$. Здесь многообразия $\mathbf{D}(T(\varkappa))$, вообще говоря, зависят от $\varkappa$; эта зависимость исчезает, если функция $q^{(1)}$ имеет достаточно слабые особенности (см. пример 2.13).

## 9. Двухэлектронная задача [1]

В качестве еще одного применения построенной выше теории рассмотрим задачу, возникающую в квантовой механике атомных систем. Оператор Шрёдингера системы, состоящей из фиксированного ядра и двух электронов, в подходящей системе единиц имеет вид [2]:

$$H = -\Delta_1 - \Delta_2 - \frac{2}{r_1} - \frac{2}{r_2} + \frac{2}{Zr_{12}}. \tag{4.62}$$

Здесь основным пространством является 6-мерное евклидово пространство $\mathrm{R}^6$, координаты в котором обозначаются $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$; $\Delta_j$ это трехмерный оператор Лапласа $\partial^2/\partial x_j^2 + \partial^2/\partial y_j^2 + \partial^2/\partial z_j^2$, $j = 1, 2$; $r_j = (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2)^{1/2}$ и $r_{12} = [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2]^{1/2}$; $Z$ — атомное число ядра, $Z = 1, 2, 3, \ldots$.

Оператор $H$ самосопряжен в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathrm{R}^6)$, если лапласианы $\Delta_1$ и $\Delta_2$ понимаются в обобщенном смысле. Можно сначала определить оператор $H$ равенством (4.62) на многообразии $\mathbf{C}_0^\infty(\mathrm{R}^6)$ и затем взять его замыкание. Так или иначе, самосопряженный оператор $H$ определяется однозначно, причем его область определения $\mathbf{D}$ совпадает с областью определения оператора $-\Delta_1 - \Delta_2$. Это следует непосредственно из результатов п. V.5.3 (см. замечание V.5.6).

Положим

$$\begin{gathered} H = H(\varkappa) = H_0 + \varkappa H^{(1)}, \\ H_0 = -\Delta_1 - \Delta_2 - 2r_1^{-1} - 2r_2^{-1}, \quad H^{(1)} = 2r_{12}^{-1}, \quad \varkappa = Z^{-1}; \end{gathered} \tag{4.63}$$

будем рассматривать $H(\varkappa)$ как оператор, возникающий из $H_0$ при возмущении $\varkappa H^{(1)}$. Нас интересует поведение в зависимости от $\varkappa$ собственных значений оператора $H(\varkappa)$ в окрестности точки $\varkappa = 0$.

Заметим прежде всего, что оператор $H^{(1)}$ ограничен относительно $H_0$ и его относительная граница равна нулю. Это следует из того факта, что операторы умножения на функции $2r_1^{-1}$, $2r_2^{-1}$ и $2r_{12}^{-1}$ ограничены относительно $H_0$ и их относительные границы равны нулю (см. задачу IV.1.2). Следовательно, $H(\varkappa)$ (или точнее аналитическое продолжение этого семейства) является самосопряженным семейством типа (A), определенным для всех комплексных $\varkappa$ (см. теорему 2.6). Отсюда следует, что изолированные собственные значения конечной кратности и соответствующие им собственные проекторы оператора $H(\varkappa)$ голоморфно зависят от $\varkappa$ в окрестности вещественной оси.

Теперь нас будет интересовать оценка радиуса сходимости степенного ряда, представляющего наименьшее собственное значение $\lambda_1(\varkappa)$ оператора

---

[1] См. Т. Като [3].

[2] См. Кембл [[1]], стр. 209; мы предполагаем, что ядро имеет бесконечную массу.

$H(\varkappa)$. Радиус сходимости можно было бы оценить по формулам п. 2.5, но мы воспользуемся оценками из п. 4.6. Как мы увидим, этот путь более прост; семейство $H(\varkappa)$ фактически принадлежит типу $(B_0)$, а также типу (A), поскольку операторы $H(\varkappa)$ ограничены снизу для всех вещественных $\varkappa$ (см. теорему 4.16).

Структура оператора $H_0$ хорошо известна. Пространство $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathbf{R}^6)$ можно рассматривать как *тензорное произведение*[1] $\mathbf{H}_1 \otimes \mathbf{H}_2$ двух экземпляров $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ пространства $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$, при этом оператор $H_0$ принимает вид $(H_1 \otimes 1) + (1 \otimes H_2)$, где $H_1$, $H_2$ — два экземпляра оператора $-\Delta + 2r^{-1}$, действующего в $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$. Последний является оператором Шрёдингера для атома водорода (в подходящей системе единиц), и его спектр, как известно, состоит из изолированных отрицательных собственных значений $-n^{-2}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, с кратностями $n^2$ соответственно и непрерывного спектра, заполняющего положительную вещественную полуось[2]. Из этого описания структуры $H_0$ следует, что нижняя часть спектра оператора $H_0$ состоит из изолированных собственных значений

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -5/4,\ \ldots,\ \lambda_n = -1 - n^{-2},\ \ldots, \tag{4.64}$$

сходящихся к $-1$. Значение $\lambda_1$ — простое, значение $\lambda_n$ имеет кратность $2n^2$.

Так как собственное значение $\lambda_1$ просто, то радиус сходимости степенного ряда, представляющего собственное значение $\lambda_1(\varkappa)$ оператора $H(\varkappa)$, а также ряда для соответствующего собственного проектора $P_1(\varkappa)$, оценивается снизу числом $r_0$ из формулы (4.45). Для вычисления $r_0$ нам потребуются значения постоянных $a$ и $b$. В связи с этим рассмотрим оператор

$$H_0 - \beta H^{(1)} = (-\alpha\Delta_1 - 2r_1^{-1}) + (-\alpha\Delta_2 - 2r_2^{-1}) + [-(1-\alpha)(\Delta_1+\Delta_2) - 2\beta r_{12}^{-1}], \tag{4.65}$$

где постоянные $\alpha$, $\beta$ подчинены условиям $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$. Первый член в правой части (4.65) имеет вид $H_{1\alpha} \otimes 1$, $H_{1\alpha}$ — оператор $-\alpha\Delta - 2r^{-1}$ в $\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^3)$. Вообще, наименьшее собственное значение (т. е. нижняя граница спектра) оператора $-\alpha\Delta - 2\beta r^{-1}$ равно $-\beta^2/\alpha$; это выводится из рассмотренного выше частного случая $\alpha = \beta = 1$ простым преобразованием подобия. Поэтому первые два члена в правой части (4.65) имеют нижнюю границу $-1/\alpha$. Третий член можно привести к аналогичному виду с помощью линейного преобразования координат (соответствующего отделению движения центра масс от относительного движения); в результате получим, что этот оператор имеет нижнюю границу $-\beta^2/2(1-\alpha)$. Таким образом,

$$((H_0 - \beta H^{(1)})u, u) \geqslant -\left(\frac{2}{\alpha} + \frac{\beta^2}{2(1-\alpha)}\right)(u, u). \tag{4.66}$$

Это приводит к неравенству

$$0 \leqslant (H^{(1)}u, u) \leqslant a(u, u) + b(H_0u, u), \tag{4.67}$$

где

$$a = \frac{2}{\alpha\beta} + \frac{\beta}{2(1-\alpha)}, \quad b = \frac{1}{\beta}. \tag{4.68}$$

Наилучший выбор постоянной $a$ при фиксированном $b$, как нетрудно видеть, таков:

$$a = 2b + \frac{1}{2b} + 2. \tag{4.69}$$

---

[1] О тензорных произведениях см. Диксмье [1]. Нам потребуются лишь элементарные результаты о тензорных произведениях, которые известны из квантовой механики.

[2] См. Кембл [[1]], стр. 157.

Подставим (4.69), $c = 0$ и $\varepsilon = 1$ (заметим, что $H^{(1)}$ симметричен) в формулу (4.45). Контур $\Gamma$ в этой формуле выберем таким образом, чтобы из всех собственных значений (4.64) он охватывал только точку $\lambda_1 = -2$. При вычислении нижней грани (4.45) критическим значением $\zeta$ является точка $\zeta_0$, в которой $\Gamma$ пересекает отрицательную ось между точками $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -5/4$; другие значения $\zeta$ несущественны, если форму контура $\Gamma$ выбрать подходящим образом (например, взять в качестве $\Gamma$ прямоугольник с достаточно длинными вертикальными сторонами). Для того чтобы $r_0$ было максимальным, $\zeta_0$ должно удовлетворять уравнению

$$\frac{a+b\lambda_1}{\zeta_0-\lambda_1}=\frac{a+b\lambda_0}{\lambda_2-\zeta_0}\left(=\frac{1}{r_0}\right) \tag{4.70}$$

(заметим, что $a+b\lambda_1>0$). Отсюда получаем

$$\zeta_0=-\frac{13a-20b}{8a-13b}, \quad r_0=\frac{3}{8a-13b}=\frac{3}{3b+4b^{-1}+16}. \tag{4.71}$$

Так как $b>0$ произвольно, то наилучшее значение $r_0$ получаем при $b = 2/\sqrt{3}$:

$$r_0=\frac{3}{16+4\sqrt{3}}=\frac{1}{7,64}. \tag{4.72}$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что ряды для $\lambda_1(\varkappa)$ и $P_1(\varkappa)$ сходятся в круге $|\varkappa|<1/7,7$, или, что то же самое, $|Z|>7,7$.

**Замечание 4.26.** Нет никаких причин, указывающих на то, что разложение оператора $H$ на невозмущенную часть и возмущение следует выбирать именно в виде (4.63). Так, например, часть выражения $-2r_1^{-1}-2r_2^{-1}$ можно включить в возмущение. Посмотрим, не приведет ли это к улучшению полученного выше результата.

Положим

$$\begin{aligned} &H_\gamma(\varkappa)=H_{0\gamma}+\varkappa H_\gamma^{(1)},\\ &H_{0\gamma}=-\Delta_1-\Delta_2-2(1-\gamma)(r_1^{-1}+r_2^{-1}), \quad 0<\gamma<1,\\ &H_\gamma^{(1)}=-2\gamma(r_1^{-1}+r_2^{-1})+2Z^{-1}r_{12}^{-1}. \end{aligned} \tag{4.73}$$

Оператор $H_\gamma(\varkappa)$ отличается от $H(\varkappa)$ всюду, за исключением точки $\varkappa=1$, хотя оба семейства весьма похожи. Постоянная $\gamma$ будет выбрана позднее.

Так же как и выше, рассмотрим оператор $H_{0\gamma}-\beta H_\gamma^{(1)}$. Простые вычисления, аналогичные тем, которые были проведены при выводе неравенства (4.67), приводят к оценке

$$(H_\gamma^{(1)}u,u)\leqslant\left[\frac{2(1-\gamma-\beta\gamma)^2}{\alpha\beta}+\frac{\beta}{2(1-\alpha)Z^2}\right](u,u)+\frac{1}{\beta}(H_{0\gamma}u,u). \tag{4.74}$$

Поскольку оператор $H_\gamma^{(1)}$, в противоположность $H^{(1)}$, не является положительно определенным, необходимо также оценить сверху скалярное произведение $-(H_\gamma^{(1)}u,u)$. Для этого заметим, что

$$H_{0\gamma}+\beta H_\gamma^{(1)}\geqslant-\Delta_1-\Delta_2-2(1-\gamma+\beta\gamma)(r_1^{-1}+r_2^{-1})\geqslant-2(1-\gamma+\beta\gamma)^2, \tag{4.75}$$

откуда следует оценка

$$-(H_\gamma^{(1)}u,u)\leqslant\frac{2}{\beta}(1-\gamma+\beta\gamma)^2(u,u)+\frac{1}{\beta}(H_{0\gamma}u,u). \tag{4.76}$$

Изменяя $\alpha$, минимизируем коэффициент в первом члене правой части неравенства (4.74). В результате получим значение $\frac{2}{\beta}\left(1-\gamma-\beta\gamma+\frac{\beta}{2Z}\right)^2$, если $1-\gamma-\beta\gamma \geqslant 0$. Удобно выбрать значение постоянной $\gamma$ таким образом, чтобы этот коэффициент равнялся коэффициенту в первом члене правой части (4.76). Это условие приводит к значению

$$\gamma = 1/4Z. \tag{4.77}$$

Имеем

$$|(H_\gamma^{(1)}u, u)| \leqslant a\,(u, u) + b\,(H_{0\gamma}u, u), \tag{4.78}$$

где $b = 1/\beta$ и

$$a = 2b\left(1-\frac{1}{4Z}+\frac{1}{4Zb}\right)^2, \quad b \geqslant \frac{\gamma}{1-\gamma} = \frac{1}{4Z-1}. \tag{4.79}$$

Вычисляя $r_0$ по формуле (4.45), следует иметь в виду, что собственные значения оператора $H_{0\gamma}$ суть $-(1-\gamma)^2(1+n^{-2})$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. В результате вместо (4.71) получаем

$$r_0 = 3\left(\frac{8a}{(1-\gamma)^2}-13b\right)^{-1} = \frac{3}{6}\left[\frac{16\left(1-\frac{1}{4Z}+\frac{1}{4Zb}\right)^2}{\left(1-\frac{1}{4Z}\right)^2}-13\right]^{-1}. \tag{4.80}$$

Максимизируя $r_0$ по переменной $b$, получаем окончательный результат:

$$r_0 = \frac{3\left(Z-\frac{1}{4}\right)}{8+2\sqrt{3}} = \frac{2Z-\frac{1}{2}}{7{,}64} \quad \text{для} \quad b = \frac{1}{\sqrt{3}\left(Z-\frac{1}{4}\right)} > \frac{1}{4Z-1}. \tag{4.81}$$

Если $r_0 > 1$, то ряды теории возмущений в рассматриваемом случае сходятся, если $\varkappa = 1$, т. е. для реальной физической системы. Как следует из (4.81), эта сходимость имеет место, если $Z > 4{,}1$. Этот результат значительно улучшает предыдущий ($Z > 7{,}7$), однако недостаточен для рассмотрения важного случая атома гелия ($Z = 2$).

## § 5. Другие задачи аналитической теории возмущений

### 1. Голоморфные семейства типа (C)

В п. 4.4 мы рассматривали семейства операторов $T(\varkappa)$, являющихся расширениями по Фридрихсу операторов вида

$$S(\varkappa) = S + \varkappa S^{(1)} + \varkappa^2 S^{(2)} + \ldots, \tag{5.1}$$

причем оператор $S$ предполагается секториальным. Это предположение существенно, поскольку мы определили расширения по Фридрихсу только для секториальных операторов. Для симметричных операторов это условие сводится к ограниченности снизу.

Однако если оператор $S = H$ самосопряжен, то в ряде случаев можно определить голоморфное семейство $T(\varkappa)$ даже тогда, когда

$H$ не является полуограниченным. Это семейство строится с помощью техники псевдофридрихсовых расширений, изложенной в п. 3.4 главы VI.

**Теорема 5.1.** *Пусть* $S = H$ *самосопряжен*, $\mathbf{D} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{D}(S^{(n)}) \subset \mathbf{D}(H)$ *и*

$$|(S^{(n)}u,\ u)| \leqslant c^{n-1}(a\,\|u\|^2 + b\,(|H|\,u,\ u)),\quad u \in \mathbf{D},\quad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.2}$$

*где* $b$, $c \geqslant 0$ *и* $a$ *произвольно. Если* $\mathbf{D}$ — *ядро многообразия* $\mathbf{D}(|H|^{1/2})$ *(или, эквивалентно, ядро формы, соответствующей оператору* $|H|$*), то псевдофридрихсовы расширения* $T(\varkappa)$ *операторов* $S(\varkappa)$*, определенных разложением* (5.1)*, существуют в круге* $|\varkappa| < (\varepsilon b + c)^{-1}$ *и образуют там голоморфное семейство*; $\varepsilon = 1$ *или* 2 *в зависимости от того, симметричны все операторы* $S^{(n)}$ *или нет. Семейство* $T(\varkappa)$ *самосопряжено, если операторы* $S^{(n)}$ *симметричны. Если* $\mathbf{D}$ *является ядром многообразия* $\mathbf{D}(H)$*, то* $T(\varkappa)$ — *единственное голоморфное расширение семейства* $S(\varkappa)$.

Доказательство в основном аналогично доказательству теоремы VI.3.11. Используя введенные там обозначения, имеем $|(S^{(n)}u,\ u)| \leqslant bc^{n-1}\,\|G'u\|^2$ и поэтому форма $(S^{(n)}u,\ u)$ может быть продолжена до формы $\mathfrak{t}^{(n)}[u]$ на многообразии $\mathbf{D}(G')$. Форму, полярную $\mathfrak{t}^{(n)}[u]$, можно представить в виде $\mathfrak{t}^{(n)}[u, v] = (C^{(n)}G'u,\ G'v)$, где $C^{(n)} \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$, $\|C^{(n)}\| \leqslant \varepsilon bc^{n-1}$ [см. (VI.3.20)]. Положим

$$T(\varkappa) = G'(HH'^{-1} + C(\varkappa))\,G',\qquad C(\varkappa) = \sum_{n=1}^{\infty} \varkappa^n C^{(n)}; \tag{5.3}$$

нетрудно видеть, что $T(\varkappa) \supset S(\varkappa)$ и что $T(\varkappa)$ — голоморфное семейство в некоторой окрестности нуля [ср. (VI.3.21) — (VI.3.22)].

Поскольку $\|C(\varkappa)\| \leqslant \varepsilon b \sum\limits_{n=1}^{\infty} c^{n-1}\,|\varkappa|^n = \varepsilon b\,|\varkappa|\,(1 - c\,|\varkappa|)^{-1}$, то возможная область изменения $\varkappa$ такова: $\varepsilon b\,|\varkappa|\,(1 - c\,|\varkappa|)^{-1} < 1$, или, что то же самое, $|\varkappa| < (\varepsilon b + c)^{-1}$.

Единственность $T(\varkappa)$ доказывается так же, как в теореме 4.13.

**Замечание 5.2.** Если оператор $S$ симметричен и ограничен снизу, то расширение по Фридрихсу $T(\varkappa)$, построенное в п. 4.4, является частным случаем рассмотренного здесь псевдофридрихсова расширения; достаточно в качестве $H$ взять фридрихсово расширение оператора $S$ и заменить операторы $S^{(n)}$ сужениями на $\mathbf{D} = \mathbf{D}(S)$. Как нетрудно видеть, из (4.31) следует неравенство (5.2), и многообразие $\mathbf{D}$ служит ядром для $\mathbf{D}(|H|^{1/2})$ (ср. замечание VI.3.13). С другой стороны, семейство типа (А), построенное в теореме 2.6, также является частным случаем псевдофридрихсова расширения при условии, что невозмущенный оператор $T \geqslant 0$

существенно самосопряжен и все операторы $T^{(n)}$ симметричны, поскольку из (2.5) с помощью (4.36) вытекает неравенство $|(T^{(n)}u, u)| \leqslant \sqrt{2}\, c^{n-1}((a+b\,|\,\tilde{T}\,|)\, u, u)$. Таким образом, семейства типа (С) образуют довольно широкий класс, охватывая как частный случай голоморфные самосопряженные семейства типов (А) и ($\mathrm{B}_0$).

**Замечание 5.3.** Бо́льшую часть результатов о семействах типа ($\mathrm{B}_0$) с помощью очевидных модификаций можно перенести на семейства типа (С). Здесь мы отметим только, что оценки (4.45) и (4.47) справедливы, если $H$ и $\lambda$ заменить соответственно на $|\,H\,|$ и $|\,\lambda\,|$.

## 2. Аналитическое возмущение спектрального семейства

В аналитической теории возмущений мы интересуемся аналитическим характером зависимости различных величин от параметра $\varkappa$, предполагая, что заданное семейство операторов $T(\varkappa)$ аналитично. До сих пор мы рассматривали такие величины, как резольвента $R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1}$, изолированное собственное значение $\lambda_n(\varkappa)$ и соответствующие ему собственный проектор $P_n(\varkappa)$ и нильпотентная часть $D_n(\varkappa)$, а также проектор $P(\varkappa)$ на подпространство, отвечающее изолированной части спектра $\Sigma(T(\varkappa))$.

Существует много других величин, которые могут служить предметом изучения в рамках аналитической теории возмущений. Так, например, для любой функции $\varphi(\zeta)$ комплексного переменного можно поставить вопрос о том, голоморфно ли семейство $\varphi(T(\varkappa))$ или нет. В общем случае, функция $\varphi(\zeta)$ должна для этого быть голоморфна в некоторой области комплексной плоскости. Однако если $T(\varkappa)$ — самосопряженное семейство, то $\varphi(\zeta)$ может принадлежать более широкому классу функций, если только рассматривать вещественные значения $\varkappa$, в соответствии с определением $\varphi(H)$ для самосопряженного оператора $H$, приведенным в п. VI.5.2. Важным примером функции $\varphi(\zeta)$ является экспонента $e^{it\zeta}$ с вещественным показателем $t$. Соответствующая задача будет рассмотрена в главе IX.

Спектральная теория для самосопряженных операторов приводит к другим величинам, которые могут служить предметом изучения в аналитической теории возмущений. В качестве примера возьмем спектральное семейство $E(\lambda, \varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$ при вещественном $\varkappa$, когда $T(\varkappa)$ — самосопряженное семейство. Простые рассуждения показывают, однако, что оператор $E(\lambda, \varkappa)$ не обязан зависеть аналитически от $\varkappa$ для каждого фиксированного $\lambda$, если $T(\varkappa)$ — голоморфное семейство (см. п. VI.5.4). Тем не менее в некоторых случаях $E(\lambda, \varkappa)$ голоморфно зависит от $\varkappa$.

Пусть $H$ — самосопряженный оператор и $\{E(\lambda)\}$ — его спектральное семейство. Если спектр $\Sigma = \Sigma(H)$ имеет лакуны в точках $\alpha$ и $\beta$, $\alpha < \beta$, то, как мы знаем, оператор $E(\beta) - E(\alpha)$ непрерывно зависит от $H$ (см. теорему VI.5.10). Пусть $H(\varkappa)$ — голоморфное самосопряженное семейство. Предположим, что $H = H(0)$ имеет лакуны в спектре в точках $\alpha$ и $\beta$. Ранее было показано, что спектр $\Sigma(H(\varkappa))$ самосопряженного оператора $H(\varkappa)$ при вещественном $\varkappa$ также имеет лакуны в точках $\alpha$ и $\beta$ и что проектор $P(\varkappa)$, соответствующий изолированной части спектра $\Sigma(H(\varkappa))$ между $\alpha$ и $\beta$, голоморфен для малых $|\varkappa|$. Так как $P(\varkappa) = E(\beta, \varkappa) - E(\alpha, \varkappa)$, то отсюда следует, что оператор $E(\beta, \varkappa) - E(\alpha, \varkappa)$ *голоморфен в окрестности нуля, если* $\Sigma(H)$ *имеет лакуны в точках* $\alpha$ *и* $\beta$. Следует отметить, что, хотя семейство $E(\lambda, \varkappa)$ определено только для вещественных $\varkappa$, разность $E(\beta, \varkappa) - E(\alpha, \varkappa)$ имеет аналитическое продолжение $P(\varkappa)$, голоморфное в окрестности нуля.

Сам проектор $E(\beta, \varkappa)$, вообще говоря, не голоморфен по $\varkappa$ в том случае, когда $\Sigma(H)$ имеет лакуну в точке $\beta$. Соответствующий контрпример можно извлечь из примера 1.11; здесь $\Sigma(H(\varkappa))$ является подмножеством положительной вещественной полуоси при $\varkappa \leqslant 0$, а при $0 < \varkappa < 1$ существует отрицательное собственное значение $\lambda_0(\varkappa)$, причем $\lambda_0(\varkappa) \to -\infty$ при $\varkappa \searrow 0$. Таким образом,

$$\dim E(0, \varkappa) = \begin{cases} 0, & \varkappa \leqslant 0, \\ 1, & 0 < \varkappa < 1, \end{cases}$$

и поэтому проектор $E(0, \varkappa)$ не является голоморфным в окрестности нуля, хотя $\Sigma(H(\varkappa))$ имеет лакуну в нуле при $\varkappa < 1$.

Можно показать, однако, что проектор $E(\beta, \varkappa)$ голоморфно зависит от $\varkappa$ в частном, но важном случае, когда голоморфное самосопряженное семейство принадлежит типу (A) или, более общо, типу (C).

**Теорема 5.4** [1]. *Пусть* $H(\varkappa)$ *— самосопряженное голоморфное семейство типа* (C) *и* $E(\lambda, \varkappa)$ *— соответствующее спектральное семейство, определенное для вещественных* $\varkappa$. *Если* $\Sigma(H(0))$ *имеет лакуну в точке* $\beta$, *то* $\Sigma(H(\varkappa))$ *также имеет лакуну в точке* $\beta$ *при малых* $\varkappa$ *и проектор* $E(\beta, \varkappa)$ *голоморфен в окрестности нуля.*

Доказательство. Достаточно перенести на рассматриваемый случай рассуждения в доказательстве теоремы VI.5.13. При этом нужно сделать следующие изменения: заменить $H_n$, $R_n(\zeta)$, $E_n(\lambda)$ на $H(\varkappa)$, $R(\zeta, \varkappa)$, $E(\lambda, \varkappa)$ соответственно; заменить $C_n$ на семейство $C(\varkappa)$, использованное в доказательстве тео-

---

[1] Эта теорема доказана Хайнцем [2] для семейств типа (A). Отметим, что для семейств типа (B) результат тривиален (см. задачу 5.5).

ремы 5.1; заменить $a_n$, $b_n$ соответственно на $ac^{n-1} \mid \varkappa \mid$, $bc^{n-1} \mid \varkappa \mid$. В результате получим разложение оператора $E(0, \varkappa) - E(0, 0)$ в степенной ряд, сходящийся для достаточно малых $\mid \varkappa \mid$ (здесь предполагается, без ограничения общности, что $\beta = 0$).

Задача 5.5. Пусть $H(\varkappa)$ — голоморфное семейство такое, что операторы $H(\varkappa)$ имеют общую нижнюю границу $\gamma > -\infty$ для всех достаточно малых вещественных $\varkappa$. Тогда проектор $E(\beta, \varkappa)$ голоморфен в окрестности нуля, если $\Sigma(H(0))$ имеет лакуну в точке $\beta$. [*Указание*: $E(\alpha, \varkappa) = 0$ для достаточно малых $\alpha$.]

## 3. Аналитичность $| H(\varkappa) |$ и $| H(\varkappa) |^{\theta}$

Продолжим изучение семейства $H(\varkappa)$ типа (C), рассмотренного в теореме 5.4, предполагая, что $0 \in \mathrm{P}(T)$. Из голоморфности семейства $E(0, \varkappa)$ следует голоморфность $\mid H(\varkappa) \mid$ для вещественных $\varkappa$, так как

$$\mid H(\varkappa) \mid = (1 - 2E(0, \varkappa))\, H(\varkappa),$$
$$\mid H(\varkappa) \mid^{-1} = (1 - 2E(0, \varkappa))\, H(\varkappa)^{-1} \qquad (5.4)$$

для вещественных $\varkappa$; напомним, что, согласно (VI.2.26), $\mid H(\varkappa) \mid = U(\varkappa) H(\varkappa)$, где $U(\varkappa) = 1 - 2E(0, \varkappa)$ по формуле (VI.5.25).

Из (5.4) следует, что семейство $\mid H(\varkappa) \mid^{-1}$ представляется степенным рядом по $\varkappa$, поскольку $(1 - 2E(0, \varkappa))$ и $H(\varkappa)^{-1}$ допускают такое представление. Семейство $\mid H(\varkappa) \mid$ можно продолжить до голоморфного семейства $H_1(\varkappa)$, определенного в окрестности вещественной оси, при этом $H_1(\varkappa)$ не совпадает с $\mid H(\varkappa) \mid$ для невещественных $\varkappa$.

Из (5.4) также следует, что $H_1(\varkappa)$ — семейство типа (A), если $H(\varkappa)$ принадлежит типу (A).

Результаты этого параграфа можно обобщить следующим образом: семейство $\mid H(\varkappa) \mid^{\theta}$ имеет голоморфное аналитическое продолжение для любого $\theta$ из отрезка $[0, 1]$ [1]. Для доказательства удобно воспользоваться формулой [см. V.3.53)]

$$\mid H(\varkappa) \mid^{-\theta} = \frac{\sin \pi\theta}{\theta} \int_0^{\infty} \mu^{-\theta} (\mid H(\varkappa) \mid + \mu)^{-1}\, d\mu, \quad 0 < \theta < 1. \qquad (5.5)$$

Возможность разложения $\mid H(\varkappa) \mid^{-\theta}$ в сходящийся ряд по степеням $\varkappa$ устанавливается так же, как в доказательстве теоремы 5.4; подробности опускаем.

---

[1] Аналитичность $\mid H(\varkappa) \mid^{\theta}$ доказана Хайнцем [1] для семейств типа (A). См. замечание 5.6.

**Замечание 5.6.** Можно доказать, что $|H(\varkappa)|^\theta$ имеет аналитическое продолжение типа (A), если $0 \leqslant \theta < 1/2$. Если $H(\varkappa)$ — семейство типа (A), то $|H(\varkappa)|^\theta$ принадлежит типу (A) для всех $\theta \in [0, 1]$.

## § 6. Обобщенная задача на собственные значения

### 1. Общие замечания

До сих пор мы рассматривали задачу на собственные значения в следующем виде: $Tu = \lambda u$, где $T$ — линейный оператор в банаховом пространстве X. В приложениях часто встречается задача на собственные значения в более общей форме:

$$Tu = \lambda A u, \tag{6.1}$$

где $T$ и $A$ — операторы в X или, в более общем случае, операторы из X в другое банахово пространство Y.

Существует несколько различных подходов к обобщенной задаче на собственные значения. Например, если существует оператор $A^{-1}$, то уравнение (6.1) можно переписать в виде

$$A^{-1}Tu = \lambda u. \tag{6.2}$$

Поскольку $A^{-1}T$ — оператор в X, то мы свели задачу (6.1) к обычной задаче на собственные значения. Уравнение (6.1) можно переписать также в виде

$$TA^{-1}v = \lambda v, \quad v = Au, \tag{6.3}$$

и снова мы приходим к обычной задаче на собственные значения, на сей раз для оператора $TA^{-1}$, действующего в пространстве Y.

Можно сделать преобразование к более симметричному виду

$$A^{-1/2}TA^{-1/2}w = \lambda w, \quad w = A^{1/2}u. \tag{6.4}$$

Этот прием удобен, когда $T$ и $A$ — симметричные операторы в гильбертовом пространстве. Конечно, в (6.4) предполагается, что Y = X.

В каждом из приведенных выше приемов есть элемент произвола. Ни один из них не является более предпочтительным, чем другие. Кроме того, не ясны связи между первоначальной задачей на собственные значения и *спектрами* операторов $A^{-1}T$ и $TA^{-1}$. Конечно, каждое собственное значение задачи (6.1) является в то же время собственным значением задачи (6.2) или (6.3) и каждый собственный вектор для уравнения (6.1) соответствует собственному вектору задачи (6.2) или (6.3). Однако, неясно, что следует понимать под *изолированным собственным значением* задачи (6.1) или под *алгебраической кратностью* такого собственного значения; может случиться, что число $\lambda$ является изолированным собственным значением для (6.2) и не является таковым для (6.3), и наоборот.

Более естественным подходом к рассмотрению обобщенной задачи на собственные значения является изучение *обобщенной резольвенты* $(T-\zeta A)^{-1}$ и соответствующего ей *обобщенного спектра*. Конечно, при этом потребуется сделать ряд модификаций по сравнению с обычной теорией. Так, например, резольвентное уравнение примет вид

$$(T-\zeta' A)^{-1}-(T-\zeta'' A)^{-1}=\\ =(\zeta'-\zeta'')(T-\zeta' A)^{-1}(T-\zeta'' A)^{-1}. \qquad (6.5)$$

Далее теряет смысл утверждение о том, что резольвенты для различных $\zeta$ коммутируют между собой, поскольку теперь резольвента — оператор из $\mathbf{Y}$ в $\mathbf{X}$.

В этой книге мы не будем рассматривать обобщенную задачу на собственные значения в полной общности. Вместо этого мы ограничимся некоторыми частными случаями, когда достаточно рассматривать задачу в форме (6.2) или (6.3).

Предположим, что $T\in\mathscr{C}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$, $A\in\mathscr{B}(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ и $A^{-1}\in\in\mathscr{B}(\mathbf{Y},\mathbf{X})$, тогда $A^{-1}T\in\mathscr{C}(\mathbf{X})$ и $TA^{-1}\in\mathscr{C}(\mathbf{Y})$ и поэтому задача (6.1) эквивалентна любой из задач (6.2) или (6.3).

Пусть $\lambda$ — изолированное собственное значение конечной кратности для оператора $A^{-1}T$ и $P$, $D$ — собственный проектор и нильпотентная часть, соответствующие собственному значению $\lambda$. Имеем [см. (III.6.28) — (III.6.29)]

$$PA^{-1}T\subset A^{-1}TP=\lambda P+D,\quad D=DP=PD. \qquad (6.6)$$

Оператор $Q=APA^{-1}$ является проектором в $\mathbf{Y}$, так как $Q\in\in\mathscr{B}(\mathbf{Y})$ и $Q^2=Q$. Аналогично, $G=ADA^{-1}$ — нильпотентный оператор в $\mathbf{Y}$. Умножая (6.6) на $A$ слева, получаем

$$QT\subset TP=\lambda AP+AD=\lambda QA+GA,\quad G=GQ=QG. \qquad (6.7)$$

Рассмотрение собственного значения $\lambda$ оператора $TA^{-1}$ приводит к тому же результату; в самом деле, оператор $Q$ является собственным проектором, соответствующим собственному значению $\lambda$ оператора $TA^{-1}$, а $G$ — соответствующая нильпотентная часть.

Резольвента $(A^{-1}T-\zeta)^{-1}$ оператора $A^{-1}T$ имеет разложение

$$(A^{-1}T-\zeta)^{-1}=\\ =-(\zeta-\lambda)^{-1}P-\sum_{n=1}^{\infty}(\zeta-\lambda)^{-n-1}D^n+\sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\lambda)^nS^{n+1} \qquad (6.8)$$

в окрестности точки $\zeta=\lambda$ [см. (III.6.32)]. Здесь $S$ — приведенная резольвента оператора $A^{-1}T$ в точке $\zeta=\lambda$. Умножение справа на $A^{-1}$ дает

$$\begin{aligned}(T-\zeta A)^{-1} &= -(\zeta-\lambda)^{-1}PA^{-1} - \sum_{n=1}^{\infty}(\zeta-\lambda)^{-n-1}D^nA^{-1} + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\lambda)^n S^{n+1}A^{-1} = -(\zeta-\lambda)^{-1}A^{-1}Q - \sum_{n=1}^{\infty}(\zeta-\lambda)^{-n-1}A^{-1}G^n + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty}(\zeta-\lambda)^n A^{-1}U^{n+1}, \qquad (6.9)\end{aligned}$$

где $U = ASA^{-1}$ — приведенная резольвента оператора $TA^{-1}$.

Если числа $\lambda_h$, $h = 1, \ldots, s$, являются изолированными собственными значениями оператора $A^{-1}T$, а $P_h$ и $D_h$ — собственный проектор и нильпотентная часть, соответствующие числу $\lambda_h$, то имеем ($Q_h = AP_hA^{-1}$, $G_h = AD_hA^{-1}$)

$$\begin{gathered}Q_hT \subset TP_h = \lambda_hAP_h + AD_h = \lambda_hQ_hA + G_hA, \\ D_h = D_hP_h = P_hD_h, \quad G_h = G_hQ_h = Q_hG_h, \qquad (6.10) \\ P_hP_k = \delta_{hk}P_h, \quad Q_hQ_k = \delta_{hk}Q_h.\end{gathered}$$

Предположим теперь, что $T$ и $A$ — симметричные операторы в гильбертовом пространстве $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{H}$. Операторы $A^{-1}T$ и $T^{-1}A$ не являются, вообще говоря, симметричными. Однако, $A^{-1}T$ становится симметричным оператором относительно нового скалярного произведения

$$((u, v)) = (Au, v); \qquad (6.11)$$

здесь предполагается, что оператор $A$ положителен. Пространство $\mathbf{H}$ полно по новому скалярному произведению, поскольку $A \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$ и $A^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$. Следовательно, собственные значения $\lambda$ и $\lambda_h$ вещественны, $P$ и $P_h$ суть ортогональные проекторы (и поэтому имеют единичную норму) в новой метрике, а $D$ и $D_h$ обращаются в нуль. Возвращаясь к прежней метрике, мы заключаем, что операторы $P$ и $P_h$ ограничены, причем их нормы не превосходят фиксированной постоянной, зависящей только от $A$. В самом деле, как нетрудно показать,

$$\| P \| \leqslant \| A^{-1} \|^{1/2} \| A \|^{1/2}. \qquad (6.12)$$

Отметим также, что (в симметричном случае)

$$Q = P^*, \quad P = Q^*. \qquad (6.13)$$

Доказательство вытекает из следующего замечания. Если собственный проектор $P$ оператора $A^{-1}T$ принадлежит собственному значению $\lambda$, то $P^*$ — собственный проектор оператора $(A^{-1}T)^* = TA^{-1}$, соответствующий собственному значению $\bar{\lambda} = \lambda$.

Другой подход к задаче (6.1) в симметричном случае состоит в переходе к уравнению (6.4). Оператор $A^{-1/2}TA^{-1/2}$ симметричен, подобен операторам $A^{-1}T$ и $TA^{-1}$ и, следовательно, самосопряжен. Нильпотентная часть оператора $A^{-1/2}TA^{-1/2}$, отвечающая изолированному собственному значению $\lambda$, равна нулю, а соответствующий ортогональный проектор равен $A^{1/2}PA^{-1/2}$.

## 2. Теория возмущений

Здесь нас будет интересовать, в основном, задача на собственные значения в следующей форме:

$$T(\varkappa)\, u = \lambda(\varkappa)\, A(\varkappa)\, u, \tag{6.14}$$

где $T(\varkappa)$ и $A(\varkappa)$ — голоморфные семейства замкнутых операторов из $\mathrm{X}$ в $\mathrm{Y}$, определенные в окрестности точки $\varkappa = 0$. Возникает вопрос, являются ли собственные значения $\lambda(\varkappa)$ задачи (6.14) и соответствующие им собственные векторы голоморфными функциями от $\varkappa$. В соответствии с предположениями, сделанными в предыдущем пункте, мы будем считать, что семейство $A(\varkappa)$ *ограниченно-голоморфно* и, следовательно, может быть представлено сходящимся степенным рядом

$$A(\varkappa) = A + \varkappa A^{(1)} + \varkappa^2 A^{(2)} + \ldots, \quad A,\ A^{(n)} \in \mathscr{B}(\mathrm{X},\ \mathrm{Y}). \tag{6.15}$$

Предположим, кроме того, что оператор $A$ имеет ограниченный обратный; тогда в некоторой окрестности нуля существует ограниченно-голоморфное семейство $A(\varkappa)^{-1}$, причем

$$A(\varkappa)^{-1} = A^{-1} - \varkappa A^{-1}A^{(1)}A^{-1} + \\ + \varkappa^2 (A^{-1}A^{(1)}A^{-1}A^{(1)}A^{-1} - A^{-1}A^{(2)}A^{-1}) + \ldots . \tag{6.16}$$

Задача (6.14) эквивалентна обычной задаче на собственные значения:

$$T_a(\varkappa)\, u \equiv A(\varkappa)^{-1}T(\varkappa)\, u = \lambda(\varkappa)\, u. \tag{6.17}$$

Здесь $T_a(\varkappa)$ — замкнутые операторы в $\mathrm{X}$, образующие, как нетрудно проверить, голоморфное семейство. Таким образом, построенную в этой главе аналитическую теорию возмущений можно применить к семейству $T_a(\varkappa)$. В результате получим, что каждое собственное значение оператора $T_a = T_a(0) = A^{-1}T(0)$ можно продолжить до аналитической функции, представляющей собственные значения операторов $T(\varkappa)$. Аналогичные результаты верны для собственных проекторов $P(\varkappa)$ и нильпотентных частей $D(\varkappa)$ оператора $T_a(\varkappa)$, а также для собственных проекторов $Q(\varkappa) = A(\varkappa)\, P(\varkappa)\, A(\varkappa)^{-1}$ и нильпотентных частей $G(\varkappa) = A(\varkappa)\, D(\varkappa)\, A(\varkappa)^{-1}$ оператора $T_b(\varkappa) = T(\varkappa)\, A(\varkappa)^{-1} = A(\varkappa)\, T_a(\varkappa)\, A(\varkappa)^{-1}$ (см. предыдущий пункт).

Можно указать другое преобразование уравнения (6.14) [которое особенно удобно в том случае, когда операторы $T(\varkappa)$ и $A(\varkappa)$ самосопряжены]. Запишем семейство (6.15) в следующем виде

$$A(\varkappa) = (1 + \varkappa C_2(\varkappa))\, A = (1 + \varkappa C_2(\varkappa))^{1/2} A\, (1 + \varkappa C_1(\varkappa))^{1/2}, \tag{6.18}$$

где семейства

$$C_2(\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n A^{(n+1)} A^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{Y}),\quad C_1(\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n A^{-1} A^{(n+1)} \in \mathscr{B}(\mathbf{X}) \tag{6.19}$$

ограниченно-голоморфны. Первое равенство в (6.18) очевидно. Второе является следствием формулы

$$(1 + BA^{-1})^k A = A\,(1 + A^{-1}B)^k,\quad A,\ B \in \mathscr{B}(\mathbf{X},\ \mathbf{Y}), \tag{6.20}$$

которая верна для любого $k$ и любого оператора $B$ с достаточно малой нормой. Для доказательства этой формулы достаточно воспользоваться биномиальным разложением.

Равенства (6.18) позволяют преобразовать уравнение (6.14) к виду

$$(1 + \varkappa C_2(\varkappa))^{-1/2}\, T(\varkappa)\, (1 + \varkappa C_1(\varkappa))^{-1/2}\, w = \lambda(\varkappa)\, Aw, \tag{6.21}$$

где

$$w = (1 + \varkappa C_1(\varkappa))^{1/2}\, u. \tag{6.22}$$

Отметим, что операторы в правой части (6.21) образуют самосопряженное семейство, если $T(\varkappa)$ и $A(\varkappa)$ — самосопряженные семейства.

Оператор $A$ в правой части (6.21) можно исключить в случае необходимости с помощью преобразования вида (6.4). Однако это делать не обязательно, поскольку оператор $A$ не зависит от $\varkappa$. Если $A$ — положительный оператор, то при введении новой метрики (6.11) оператор в левой части (6.21) становится самосопряженным после умножения слева на $A^{-1}$ и задача (6.14) сводится к обычной задаче на собственные значения. Описанный здесь прием удобен ввиду того, что все требуемые дробные степени операторов вычисляются с помощью биномиального разложения.

**Задача 6.1.** Пусть $T(\varkappa)$ и $A(\varkappa)$ — самосопряженные семейства и $A > 0$. Тогда функция $\lambda(\varkappa)$ — вещественная для вещественных $\varkappa$, **$\lambda(\varkappa)$ и $P(\varkappa)$ голоморфны в окрестности вещественной оси и $D(\varkappa) \equiv 0$.**

### 3. Голоморфные семейства типа (A)

Предположим, что $T(\varkappa)$ из (6.14) является голоморфным семейством типа (A) в окрестности нуля; тогда имеет место разложение (2.1). Семейство $T_a(\varkappa) = A(\varkappa)^{-1}\, T(\varkappa)$ обладает тем же свойством и

$$T_a(\varkappa)\,u = A^{-1}Tu + \varkappa\,(A^{-1}T^{(1)} - A^{-1}A^{(1)}A^{-1}T)\,u + \ldots . \tag{6.23}$$

Ряды для собственных значений $\lambda_j(\varkappa)$, возникающих при расщеплении собственного значения $\lambda$ оператора $T_a(0) = A^{-1}T$, и для соответствующих собственных проекторов $P_j(\varkappa)$, можно вычислить, применяя формулы из § II.2 к семейству $T_a(\varkappa)$. Так, например, ряд для среднего арифметического $\hat{\lambda}(\varkappa)$ собственных значений $\lambda_j(\varkappa)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}(\varkappa) &= \lambda + \varkappa\hat{\lambda}^{(1)} + \ldots,\\ \hat{\lambda}^{(1)} &= \frac{1}{m}\operatorname{tr}(A^{-1}T^{-1} - A^{-1}A^{(1)}A^{-1}T)\,P =\\ &= \frac{1}{m}\operatorname{tr}(A^{-1}T^{(1)} - \lambda A^{-1}A^{(1)})\,P;\end{aligned} \tag{6.24}$$

здесь $P$ — собственный проектор оператора $A^{-1}T$, отвечающий значению $\lambda$, $m = \dim P$, а соответствующая нильпотентная часть предполагается равной нулю.

Если $\{u_k\}$, $k = 1, \ldots, m$,— базис в подпространстве $P\mathbf{X}$ и $\{e_k\}$ — сопряженный базис в $P^*\mathbf{X}^*$ (образующий вместе с $\{u_k\}$ биортогональную систему), то имеем

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}^{(1)} &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(A^{-1}(T^{(1)} - \lambda A^{(1)})\,u_k,\ e_k) =\\ &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}((T^{(1)} - \lambda A^{(1)})\,u_k,\ f_k),\end{aligned} \tag{6.25}$$

где векторы

$$\begin{aligned}f_k &= (A^{-1})^*\,e_k \in (A^*)^{-1}P^*\mathbf{X}^* = (PA^{-1})^*\,\mathbf{X}^* =\\ &= (A^{-1}Q)^*\,\mathbf{X}^* = Q^*A^{*-1}\mathbf{X}^* = Q^*\mathbf{Y}^*\end{aligned} \tag{6.26}$$

характеризуются следующими свойствами:

$$(Au_j,\ f_k) = \delta_{jk}, \quad (Au,\ f_k) = 0, \quad \text{если} \quad Pu = 0. \tag{6.27}$$

В частном случае, когда $\mathbf{X} = \mathbf{Y} = \mathbf{H}$ — гильбертово пространство, семейства $T(\varkappa)$ и $A(\varkappa)$ самосопряжены и $A$ — положителен, удобно выбрать векторы $u_k$ так, чтобы $f_k = u_k$. Последнее эквивалентно условию

$$(Au_j,\ u_k) = \delta_{jk}. \tag{6.28}$$

Если, в частности, $m = 1$, то

$$\lambda^{(1)} = \frac{((T^{(1)} - \lambda A^{(1)})\,u,\ u)}{(Au,\ u)}, \tag{6.29}$$

где $u$ — собственный вектор оператора $A^{-1}T$, соответствующий собственному значению $\lambda$. Коэффициенты $\lambda^{(n)}$, $n \geqslant 2$, вычисляются тем же методом.

Мы придем к тем же самым результатам, если будем рассматривать симметричную форму (6.21) задачи на собственные значения. Однако в этом случае есть одно неудобство, связанное с тем, что операторнозначная функция в левой части (6.21) может не принадлежать типу (A); это не позволяет непосредственно воспользоваться формулами § II.2.

### 4. Голоморфные семейства типа (B)

Предположим, что $T(\varkappa)$ из уравнения (6.14) является голоморфным семейством типа (B) в окрестности точки $\varkappa = 0$. Тогда $T(\varkappa)$ являются $m$-секториальными операторами, которые соответствуют семейству секториальных форм $\mathfrak{t}(\varkappa)$ с постоянной областью определения $\mathrm{D} = \mathrm{D}(\mathfrak{t}(\varkappa))$, имеющему разложение Тейлора вида (4.15).

В этом случае мы также приходим к результатам п. 3, однако вычисление рядов теории возмущений теперь не так просто, как для семейств типа (A). Здесь удобно рассмотреть семейство $T(\varkappa)^{-1}$ вместо $T(\varkappa)$, предполагая временно, что формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ имеют положительную вершину $\gamma$, не зависящую от $\varkappa$. Тогда семейство $T(\varkappa)^{-1}$ ограниченно-голоморфно. Поскольку $\lambda(\varkappa)^{-1}$ является собственным значением задачи

$$T(\varkappa)^{-1}\, v = \lambda(\varkappa)^{-1}\, A(\varkappa)^{-1}\, v, \quad v = A(\varkappa)\, u, \tag{6.30}$$

то его можно вычислить методом предыдущего пункта и затем получить разложение для $\lambda(\varkappa)$. Например, если $\lambda$ — простое собственное значение невозмущенного уравнения $Tu = \lambda A u$, то мы приходим к разложению

$$\lambda(\varkappa) = \lambda + \frac{\mathfrak{t}^{(1)}[u] - \lambda\,(A^{(1)}u,\, u)}{(Au,\, u)}\,\varkappa + \ldots; \tag{6.31}$$

вычисления аналогичны тем, которые были проведены в п. 4.6 и мы их опускаем (см., в частности, замечание 4.18).

Мы предположили выше, что операторы $T(\varkappa)$ имеют положительную вершину, однако это предположение можно отбросить, если ограниченные формы $(A(\varkappa)\,u,\, u)$ имеют положительную вершину. В этом случае нужно рассмотреть семейство $T_1(\varkappa) = T(\varkappa) + \alpha A(\varkappa)$ вместо $T(\varkappa)$. Если $\alpha$ — достаточно большое вещественное число, то операторы $T_1(\varkappa)$ имеют положительную вершину, а собственное значение $\lambda_1(\varkappa)$ уравнения (6.14) с оператором $T_1(\varkappa)$ вместо $T(\varkappa)$ равно $\lambda(\varkappa) + \alpha$.

**Замечание 6.2.** Задача на собственные значения вида $Tu = \lambda A u$ естественным образом возникает при рассмотрении пары квадратичных форм $\mathfrak{t}[u]$ и $\mathfrak{a}[u]$. Рассматривая квадратичные формы $\mathfrak{t}[u]$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, мы интересовались в основном связями между $\mathfrak{t}[u]$ и *единичной* квадратичной формой $\|u\|^2$. В том случае, когда две формы $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{a}$ рассматриваются безотносительно к единичной форме, нет необходимости считать, что $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{a}$ определены в гильбертовом пространстве. Вместо этого можно рассматривать формы $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{a}$ в векторном пространстве $\mathbf{X}$ и, если нужно, можно превратить $\mathbf{X}$ в гильбертово пространство, вводя скалярное произведение, подходящим образом связанное с этими формами. Так, например, если $\mathfrak{a}$ — положительная симметричная форма, то в качестве скалярного произведения полезно взять $\mathfrak{a}[u, v]$. Теорию возмущений для задачи (6.14) также можно изложить на языке форм [1].

Мы не будем углубляться в эту теорию. Заметим только, что задача на собственные значения $Tu = \lambda Au$ переформулируется в терминах форм $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{a}$, соответствующих операторам $T$ и $A$, следующим образом:

$$\mathfrak{t}[u, v] = \lambda\mathfrak{a}[u, v] \quad \text{для всех} \quad v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t}) \cap \mathbf{D}(\mathfrak{a}). \tag{6.32}$$

Отметим также, что в том случае, когда формы $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{a}$ *симметричны* и собственные значения задачи $Tu = \lambda Au$ образуют дискретное множество, ограниченное снизу, эти собственные значения можно охарактеризовать с помощью принципа минимакса, примененного к отношению $\mathfrak{t}[u]/\mathfrak{a}[u]$ [ср. (I.6.72)].

## 5. Возмущения границы

В качестве применения полученных выше результатов рассмотрим так называемые *граничные возмущения* [2] в задаче на собственные значения. В качестве простого примера рассмотрим задачу

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \mathrm{E} \subset \mathrm{R}^n \tag{6.33}$$

с нулевым граничным условием

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\mathrm{E}. \tag{6.34}$$

Возникает вопрос: как изменяются собственные значения этой задачи при *малых деформациях* области E?

---

[1] В связи с общей теорией квадратичных форм см. Аронштайн [2, 4].

[2] См. Реллих [8], Курант и Гильберт ⟦1⟧, стр. 419, Сигел [1]. По поводу формальной теории см. Морс и Фешбах ⟦1⟧, Саито [1]. Об устойчивости существенного спектра при изменении границы см. Вольф [3], Крейт и Вольф [1]; об устойчивости абсолютно непрерывного спектра см. Бирман [6].

Точнее, фиксировав семейство ограниченных областей $\mathrm{E}(\varkappa)$, зависящее от малого вещественного параметра $\varkappa$, выясним характер зависимости от $\varkappa$ собственных значений задачи (6.33) — (6.34) в области $\mathrm{E}(\varkappa)$. Предположим, что $\mathrm{E}(\varkappa)$ получается из $\mathrm{E} = \mathrm{E}(0)$ взаимно однозначным преобразованием

$$x \to y = x + \varkappa\varphi(x), \tag{6.35}$$

где $\varphi(x)$ — достаточно гладкое отображение в себя открытого множества, содержащего замыкание $\overline{\mathrm{E}} = \mathrm{E} \cup \partial\mathrm{E}$ области $\mathrm{E}$. Это отображение можно рассматривать как вектор-функцию с компонентами $\varphi_k(x) = \varphi_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = 1, \ldots, n$.

Задача на собственные значения (6.33) — (6.34) в области $\mathrm{E}(\varkappa)$ связана с квадратичной формой

$$\int\limits_{\mathrm{E}(\varkappa)} |\operatorname{grad} u(y)|^2\, dy, \tag{6.36}$$

определенной в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}(\varkappa) = \mathbf{L}^2(\mathrm{E}(\varkappa))$ с нормой

$$\|u\|^2 = \int\limits_{\mathrm{E}(\varkappa)} |u(y)|^2\, dy. \tag{6.37}$$

Для того чтобы избежать неудобства, связанного с зависимостью от $\varkappa$ гильбертовых пространств $\mathbf{H}(\varkappa)$, мы введем преобразование $\mathbf{H}(\varkappa) \to \mathbf{H} = \mathbf{H}(0)$:

$$\hat{u}(x) = u(y), \quad u \in \mathbf{H}(\varkappa), \quad \hat{u} \in \mathbf{H}, \tag{6.38}$$

где $x$ и $y$ связаны соотношением (6.35). Заметим, что $\hat{u}$ удовлетворяет граничному условию $\hat{u} = 0$ на $\partial\mathrm{E}$ тогда и только тогда, когда $u$ удовлетворяет граничному условию $u = 0$ на $\partial\mathrm{E}(\varkappa)$.

Итак, (6.36) и (6.37) определяют две квадратичные формы в $\mathbf{H}$, зависящие от $\varkappa$:

$$\mathfrak{t}(\varkappa)[\hat{u}] = \int\limits_{\mathrm{E}(\varkappa)} |\operatorname{grad} u(y)|^2\, dy = \int\limits_{\mathrm{E}} \sum_k \left| \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial \hat{u}(x)}{\partial x_j} \right|^2 J(x)\, dx, \tag{6.39}$$

$$\mathfrak{a}(\varkappa)[\hat{u}] = \int\limits_{\mathrm{E}(\varkappa)} |u(y)|^2\, du = \int\limits_{\mathrm{E}} |\hat{u}(x)|^2 J(x)\, dx, \tag{6.40}$$

где $J(x)$ — якобиан преобразования (6.35),

$$J(x) = J(x, \varkappa) = \det\left(\delta_{jk} + \varkappa \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_k}\right). \tag{6.41}$$

Согласно ограничениям, наложенным на $\varphi$, якобиан $J(x)$ является гладкой функцией на $\overline{\mathrm{E}}$ и поэтому $\mathfrak{a}(\varkappa)$ — ограниченная симметричная форма с положительной нижней границей. Соответствующий оператор $A(\varkappa)$ — это оператор умножения на $J(x, \varkappa)$.

Интересующие нас собственные значения $\lambda(\varkappa)$ — это собственные значения пары форм $\mathfrak{t}(\varkappa)$ и $\mathfrak{a}(\varkappa)$ в смысле предыдущего пункта, или, что то же, собственные значения задачи

$$T(\varkappa)\,\hat{u} = \lambda(\varkappa)\,A(\varkappa)\,\hat{u}, \tag{6.42}$$

где $T(\varkappa)$ — оператор, соответствующий форме $\mathfrak{t}(\varkappa)$. Формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$, $\mathfrak{a}(\varkappa)$, а также операторы $T(\varkappa)$, $A(\varkappa)$ определены в фиксированном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ и поэтому к ним можно будет применить полученные выше результаты, если мы покажем, что $T(\varkappa)$ и $A(\varkappa)$ голоморфно зависят от $\varkappa$.

Поскольку функции $\varphi_k(x)$ гладкие, то из (6.41) следует, что $J(x)$ — полином по $\varkappa$ со свободным членом 1. Поэтому семейство $A(\varkappa)$ ограниченно-голоморфно по $\varkappa$ и $A(\varkappa) \geqslant \delta$ для некоторой постоянной $\delta > 0$, если $|\varkappa|$ достаточно мал. Рассмотрим теперь семейства $T(\varkappa)$ и $\mathfrak{t}(\varkappa)$; мы видим, что в правой части (6.39) производные $\partial x_j/\partial y_k$, а также $J(x)$ зависят от $\varkappa$. Так как матрица $(\partial x_j/\partial y_k)$ служит обратной к матрице $(\partial y_j/\partial x_k) = (\delta_{jk} + \varkappa\partial\varphi_j/\partial x_k)$, то семейство $\mathfrak{t}(\varkappa)$ можно представить в виде

$$\mathfrak{t}(\varkappa)[\hat{u}] = \mathfrak{t}[\hat{u}] + \varkappa\,\mathfrak{t}^{(1)}[\hat{u}] + \varkappa^2\mathfrak{t}^2[\hat{u}] + \ldots, \tag{6.43}$$

где

$$\begin{gathered}\mathfrak{t}[\hat{u}] = \int\limits_{E} |\operatorname{grad}\hat{u}(x)|^2\,dx,\\ \mathfrak{t}^{(r)}[\hat{u}] = \int\limits_{E}\sum_{j,\,k} p_{jk}^{(r)}(x)\,\frac{\partial\hat{u}}{\partial x_j}\,\overline{\frac{\partial\hat{u}}{\partial x_k}}\,dx\end{gathered} \tag{6.44}$$

и $p_{jk}^{(r)}(x)$ — гладкие функции, удовлетворяющие неравенствам

$$|p_{jk}^{(r)}(x)| \leqslant bc^{r-1}, \quad x \in E, \tag{6.45}$$

с положительными постоянными $b$ и $c$. Применяя неравенство Шварца, нетрудно показать, что формы $\mathfrak{t}^{(r)}$ удовлетворяют неравенствам вида $|\mathfrak{t}^{(r)}[\hat{u}]| \leqslant bc^{r-1}\mathfrak{t}[\hat{u}]$ с теми же постоянными $b$ и $c$, что в (6.45). Отсюда следует, что формы $\mathfrak{t}(\varkappa)$ имеют голоморфное аналитическое продолжение типа (a) и поэтому $T(\varkappa)$ — голоморфное семейство типа (B) согласно теореме 4.8.

Из результатов пункта 2 вытекает, что *собственные значения* $\lambda(\varkappa)$ *задачи* (6.33), (6.34) *в области* $E(\varkappa)$ *голоморфны в окрестности нуля, если область* $E(\varkappa)$ *получается из* $E = E(0)$ *преобразованием вида* (6.35). Собственные функции $u(\varkappa) = u(y, \varkappa)$ также голоморфно зависят от $\varkappa$, однако это требует уточнения, поскольку область $E(\varkappa)$ изменения $y$ зависит от $\varkappa$. Мы не будем входить в подробности, ограничимся лишь замечанием, что преобразованные собственные функции $\hat{u}(\varkappa) = \hat{u}(x, \varkappa)$ голоморфны как вектор-функции со значениями в $\mathbf{H}$.

Эти результаты можно обобщить в нескольких направлениях. Во-первых, нулевое граничное условие можно заменить другим, например условием Неймана $\partial u/\partial n = 0$. В этом случае нужно заменить введенную выше форму $\mathfrak{t}(\varkappa)$ ее продолжением $\mathfrak{t}_1(\varkappa)$, которое определено на всех гладких функциях, не связанных граничными условиями. Соответствующий оператор $T_1(\varkappa)$ является дифференциальным оператором второго порядка с граничным условием Неймана и действует на функции $\hat{u}(x) \in \mathsf{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{E})$. Аналогично можно рассмотреть случай граничного условия третьего рода

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x) u = 0, \quad x \in \partial\mathrm{E}(\varkappa), \tag{6.46}$$

добавляя к $\mathfrak{t}_1(\varkappa)[\hat{u}]$ член, зависящий от граничных значений функции $u$ и определенный надлежащим образом с помощью преобразования (6.35) (ср. п. VI.4.4).

Во-вторых, полученные выше результаты без существенных изменений переносятся на тот случай, когда оператор Лапласа в (6.33) заменен на произвольный дифференциальный оператор второго порядка эллиптического типа:

$$Lu = -\sum_{j,k} \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk}(x) \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_j b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x) u. \tag{6.47}$$

В этом случае вместо (6.36) нужно рассматривать форму

$$\int\limits_{\mathrm{E}(\varkappa)} \left[ \sum_{j,k} a_{jk}(y) \frac{\partial u}{\partial y_k} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y_j} + \sum_j b_j(y) \frac{\partial u}{\partial y_j} \bar{u} + c(y) |u|^2 \right] dy. \tag{6.48}$$

В-третьих, полученные выше результаты без существенных изменений переносятся на тот случай, когда оператор $L$ и граничные условия (6.46) зависят от $\varkappa$ через коэффициенты $a_{jk}(x)$, $b_j(x)$, $c(x)$ и $\sigma(x)$ (случай одновременного возмущения дифференциального оператора и границы).

# ГЛАВА VIII

# АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

В предыдущих главах мы имели дело почти исключительно с *аналитической*, или *равномерной* теорией возмущений, в которой основную роль играет непрерывность резольвенты по параметру в смысле сходимости по норме. Теперь мы займемся теорией, в которой основным понятием является *сильная* непрерывность резольвенты. В этой теории предположения настолько ослаблены, что резольвента или собственные значения оператора, вообще говоря, не являются аналитическими функциями параметра, но при некоторых условиях возможны *асимптотические разложения* этих величин.

Как и в аналитической теории, в данном случае поведение резольвенты оказывается определяющим. Мы даже введем понятие обобщенной сильной сходимости для неограниченных операторов в терминах сильной сходимости их резольвент.

Специфическая трудность этой обобщенной задачи состоит в том, что изолированное собственное значение $\lambda$ не обязано оставаться изолированным при возмущении. Поэтому необходимо различать устойчивые и неустойчивые относительно данного возмущения собственные значения. Для устойчивых собственных значений мы можем развить теорию асимптотических разложений; возмущенные собственные значения и собственные векторы имеют асимптотическое разложение по параметру до определенного порядка, зависящего от свойств невозмущенного собственного пространства.

Если собственное значение $\lambda$ не является устойчивым, то при «включении» возмущения оно может поглощаться «непрерывным спектром». В этом случае бессмысленно говорить о возмущенном собственном значении. Однако предполагается, что возникающий непрерывный спектр имеет своего рода концентрацию вблизи точки $\lambda$,— это так называемое явление спектральной концентрации.

Асимптотическая теория, которая будет здесь развита, грубо говоря, соответствует тому, что в теории дифференциальных уравнений называют *сингулярной теорией возмущений* [1]. Результаты этой главы носят общий характер и по идее должны были бы быть применимы к дифференциальным уравнениям. В настоящее время, однако, абстрактная теория развита не настолько, чтобы включать в себя сингулярную теорию возмущений для дифференциальных операторов.

## § 1. Сильная сходимость в обобщенном смысле

### 1. Сильная сходимость резольвенты

Пусть $\{T_n\}$ — последовательность замкнутых операторов в банаховом пространстве X. В этом параграфе мы изучим в общем виде вопрос о сильной сходимости резольвент $R_n(\zeta) = (T_n - \zeta)^{-1}$.

---

[1] Общее обсуждение вопроса см. в работе Фридрихса [5].

Напомним основной результат, касающийся сходимости *по норме* последовательности резольвент: если $R_n(\zeta)$ сходится по норме к резольвенте $R(\zeta) = (T - \zeta)^{-1}$ замкнутого оператора $T$ при некотором $\zeta \in \mathrm{P}(T)$, то это же верно для любого $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ (см. теорему IV.2.25, замечание IV.3.13 и задачу IV.3.14).

Соответствующей теоремы для сильной сходимости резольвент не существует. Тем не менее мы можем доказать несколько теорем о множестве точек $\zeta$, в которых последовательность $R_n(\zeta)$ сильно сходится или ограничена.

Определим *область ограниченности* $\Delta_b$ для последовательности $\{R_n(\eta)\}$ как множество всех комплексных чисел $\zeta$ таких, что $\zeta \in \mathrm{P}(T_n)$ при достаточно больших $n$ и последовательность $\{\| R_n(\zeta) \|\}$ ограничена (при столь больших $n$, что $R_n(\zeta)$ определены)[1]. Пусть, далее, $\Delta_s$ — множество всех $\zeta$ таких, что существует $\operatorname{s-lim} R_n(\zeta) = R'(\zeta)$; будем называть это множество *областью сильной сходимости* для $\{R_n(\zeta)\}$. Аналогично определим *область* $\Delta_u$ *сходимости по норме* для $\{R_n(\zeta)\}$. Очевидно, что $\Delta_u \subset \Delta_s \subset \Delta_b$.

**Теорема 1.1.** *$\Delta_b$ является открытым подмножеством комплексной плоскости. Последовательность $\{R_n(\zeta)\}$ равномерно ограничена по $n$ и $\zeta$ на любом компактном подмножестве множества $\Delta_b$.*

Доказательство. Пусть $\zeta_0 \in \Delta_b$; разложим $R_n(\zeta)$ в ряд Неймана (см. п. III.6.1): для $|\zeta - \zeta_0| < \| R_n(\zeta_0) \|^{-1}$

$$R_n(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} (\zeta - \zeta_0)^k R_n(\zeta_0)^{k+1}. \tag{1.1}$$

Если $\| R_n(\zeta_0) \| \leqslant M_0$, то $\| R_n(\zeta) \| \leqslant M_0 (1 - M_0 |\zeta - \zeta_0|)^{-1}$ при $|\zeta - \zeta_0| < M_0^{-1}$. Отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

Из теоремы 1.1 вытекает, что $\Delta_b$ состоит из не более чем счетного числа связных открытых множеств $\Delta_{b1}, \Delta_{b2}, \ldots$ (*компонент* множества $\Delta_b$).

**Теорема 1.2.** *Множество $\Delta_s$ относительно открыто и замкнуто в $\Delta_b$ (так что $\Delta_s$ является объединением некоторых компонент $\Delta_{bk}$ множества $\Delta_b$). Сильная сходимость $R_n(\zeta) \to R'(\zeta)$ равномерна*[2] *на каждом компактном подмножестве множества $\Delta_s$.*

---

[1] Для удобства мы обозначаем через $\Delta_b$ также и область ограниченности последовательности $\{T_n\}$, если это не может привести к недоразумению. Аналогично используются символы $\Delta_s$ и $\Delta_u$.

[2] Сильная сходимость $R_n(\zeta) \to R'(\zeta)$ является *равномерной* по $\zeta$, если $\| R_n(\zeta) u - R'(\zeta) u \| \to 0$ равномерно по $\zeta$ при каждом фиксированном $u \in \mathrm{X}$.

Доказательство. Если существует s-lim $R_n(\zeta_0) = A$, то s-lim $R_n(\zeta_0)^k = A^k$, $k = 1, 2, \ldots$. Поскольку ряд (1.1) мажорируется по норме числовым рядом $\sum M_0^{k+1} |\zeta - \zeta_0|^k$, то существует s-lim $R_n(\zeta)$, равный $A(1 - (\zeta - \zeta_0)A)^{-1}$ при $|\zeta - \zeta_0| < M_0^{-1}$. Этим доказано то, что множество $\Delta_s$ открыто, а также последнее утверждение теоремы.

Докажем относительную замкнутость множества $\Delta_s$. Пусть $\zeta \in \Delta_b$; предположим, что в каждой окрестности точки $\zeta$ содержится точка $\zeta_0 \in \Delta_s$. Поскольку $\zeta \in \Delta_b$, то $\| R_n(\zeta) \| \leqslant M$, где $M = \text{const}$. Выберем $\zeta_0 \in \Delta_s$ так, чтобы выполнялось условие $|\zeta - \zeta_0| < 1/2M$. Тогда $\| R_n(\zeta_0) \| < (1 - 2^{-1})^{-1} M = 2M \equiv M_0$, и s-lim $R_n(\zeta)$ также существует, так как $|\zeta - \zeta_0| < 1/2M = M_0^{-1}$. Следовательно, $\zeta \in \Delta_s$. Сильный предел $R'(\zeta)$ последовательности $R_n(\zeta)$ при $\zeta \in \Delta_s$ не обязательно является резольвентой. Однако $R'(\zeta)$ удовлетворяет резольвентному уравнению

$$R'(\zeta_1) - R'(\zeta_2) = (\zeta_1 - \zeta_2) R'(\zeta_1) R'(\zeta_2), \quad \zeta_1, \zeta_2 \in \Delta_s, \tag{1.2}$$

будучи сильным пределом последовательности операторов $R_n(\zeta)$, удовлетворяющих тому же уравнению. По этой причине $R'(\zeta)$ называется *псевдорезольвентой*. Заметим, что $R'(\zeta_1)$ и $R'(\zeta_2)$ коммутируют.

Из (1.2) следует, что нуль-пространство $\mathbf{N} = \mathbf{N}(R'(\zeta))$ и область значений $\mathbf{R} = \mathbf{R}(R'(\zeta))$ оператора $R'(\zeta)$ не зависят от $\zeta$. Действительно, из (1.2) видно, что $R'(\zeta_2) = 0$ влечет $R'(\zeta_1) u = 0$ и что $u = R'(\zeta_2) v$ влечет $u = R'(\zeta_1) w$, где $w = v - (\zeta_1 - \zeta_2) u$.

Псевдорезольвента $R'(\zeta)$ является резольвентой (некоторого замкнутого оператора $T$) тогда и только тогда, когда $\mathbf{N} = 0$. Необходимость этого условия очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что любой элемент $u \in \mathbf{R}$ представим в виде $u = R'(\zeta) v(\zeta)$, где $v(\zeta)$ определяется однозначно, если $\mathbf{N} = 0$. Применяя (1.2) к $u$, получаем

$$R'(\zeta_1) R'(\zeta_2) (v(\zeta_2) - v(\zeta_1)) = R'(\zeta_1) u - R'(\zeta_2) u = \\ = (\zeta_1 - \zeta_2) R'(\zeta_1) R'(\zeta_2) u,$$

а значит, $v(\zeta_2) - v(\zeta_1) = (\zeta_1 - \zeta_2) u$, поскольку $\mathbf{N} = 0$. Отсюда следует, что вектор $v(\zeta) + \zeta u$ не зависит от $\zeta$; обозначим его через $Tu$. Очевидно, что $T$ — линейный оператор в $\mathbf{X}$ с областью определения $\mathbf{D}(T) = \mathbf{R}$, и $Tu - \zeta u = v(\zeta) = R'(\zeta)^{-1} u$. Следовательно, $R'(\zeta) = (T - \zeta)^{-1}$ является резольвентой оператора $T$; замкнутость оператора $T$ следует из того, что $R'(\zeta) \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$. Заметим, что $\Delta_s$ есть подмножество резольвентного множества $\mathrm{P}(T)$.

**Теорема 1.3.** *Пусть множество* $\Delta_s$ *непусто. Имеет место альтернатива: либо оператор* $R'(\zeta)$ *необратим при любом* $\zeta \in \Delta_s$, *либо* $R'(\zeta)$ *является резольвентой* $R(\zeta) = (T - \zeta)^{-1}$ *однозначно определенного оператора* $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$. *В последнем случае* $\Delta_s = \mathrm{P}(T) \cap \Delta_b$.

Доказательство. Только последнее утверждение теоремы еще не доказано. Выше мы доказали, что $\Delta_s \subset \mathrm{P}(T)$, поэтому $\Delta_s \subset \mathrm{P}(T) \cap \Delta_b$. Для того чтобы доказать обратное включение, воспользуемся тождеством

$$R_n(\zeta) - R(\zeta) = (1 + (\zeta - \zeta_0) R_n(\zeta)) (R_n(\zeta_0) - R(\zeta_0)) \times \\ \times (1 + (\zeta - \zeta_0) R(\zeta)), \qquad (1.3)$$

которое справедливо при $\zeta, \zeta_0 \in \mathrm{P}(T) \cap \Delta_b$ и является простым следствием резольвентных уравнений для $R_n(\zeta)$ и $R(\zeta)$. Если $\zeta_0 \in \Delta_s$, то $\text{s-lim}\, R_n(\zeta_0) = R'(\zeta_0) = R(\zeta_0)$, так что из (1.3) вытекает, что $\text{s-lim}\, R_n(\zeta) = R(\zeta)$ в силу равномерной ограниченности последовательности $\{R_n(\zeta)\}$. Это показывает, что $\zeta \in \Delta_s$. Доказательство завершено.

**Следствие 1.4.** *Пусть* $T_n$ *и* $T$ — *самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве с резольвентами* $R_n(\zeta)$ *и* $R(\zeta)$. *Если* $\text{s-lim}\, R_n(\zeta) = R(\zeta)$ *для некоторого комплексного* $\zeta$, *то это же верно для любого невещественного* $\zeta$.

Доказательство. Поскольку $\| R_n(\zeta) \| \leqslant 1/|\operatorname{Im} \zeta|$, то $\Delta_b$, так же как и $\mathrm{P}(T)$, содержит все невещественные $\zeta$. Поэтому $\mathrm{P}(T) \cap \Delta_b$ также содержит все невещественные $\zeta$, и наше утверждение следует из теоремы 1.3.

Если реализуется вторая альтернатива теоремы 1.3, то будем говорить, что $R_n(\zeta)$ *сильно сходится к* $R(\zeta)$ *на* $\Delta_s$ и что $T_n$ *сильно сходится к* $T$ (и будем писать $T_n \underset{s}{\to} T$) *в обобщенном смысле*[1].

Критерий обобщенной сильной сходимости дает

**Теорема 1.5.** *Пусть* $T_n$, $T \in \mathscr{C}(\mathrm{X})$, *и пусть существует ядро* $\mathrm{D}$ *оператора* $T$ *такое, что каждый вектор* $u \in \mathrm{D}$ *принадлежит* $\mathrm{D}(T_n)$ *при достаточно больших* $n$ *и* $T_n u \to Tu$. *Если множество* $\mathrm{P}(T) \cap \Delta_b$ *непусто, то последовательность* $T_n$ *сильно сходится к* $T$ *в обобщенном смысле и* $\Delta_s = \mathrm{P}(T) \cap \Delta_b$.

Доказательство. Для любого $\zeta \in \mathrm{P}(T) \cap \Delta_b$ имеем $R_n(\zeta) u - R(\zeta) u = R_n(\zeta)(T - T_n) R(\zeta) u \to 0$, если $R(\zeta) u \in \mathrm{D}$ (заметим, что последовательность $\| R_n(\zeta) \|$ ограничена). Но множество таких векторов $u$ плотно в $\mathrm{X}$, так как $\mathrm{D}$ является ядром оператора $T$ (см. задачу III.6.3). Поскольку последователь-

---

[1] Ср. Маслов [2].

ность $\| R_n(\zeta) \|$ ограничена, то $R_n(\zeta) \xrightarrow[s]{} R(\zeta)$ (см. лемму III.3.5). Таким образом, $\Delta_s \supset P(T) \cap \Delta_b$ и реализуется вторая альтернатива теоремы 1.3.

**Следствие 1.6.** *Пусть* $T_n$, $T$ *— самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, и пусть существует ядро* $\mathbf{D}$ *оператора* $\mathbf{D}$ *такое, что* $T_n u \to Tu$ *при* $u \in \mathbf{D}$. *Тогда* $R_n(\zeta) \to R(\zeta)$ *для любого невещественного* $\zeta$, *и* $T_n$ *сильно сходится к* $T$ *в обобщенном смысле.*

**Замечание 1.7.** Вообще говоря, даже в том случае, когда $T_n \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ и s-lim $T_n = T$ существует в обычном смысле, нет простой связи между сильной сходимостью в обобщенном смысле последовательностей $\{T_n\}$ и $\{T_n^*\}$ (в предположении, что $T_n$ плотно определены, так что $T_n^*$ существуют). Однако справедлива следующая

**Теорема 1.8.** *Пусть последовательности* $\{T_n\}$ *и* $\{T_n^*\}$ *сильно сходятся в обобщенном смысле к* $T$ *и* $T^*$ *соответственно, причем операторы* $T_n$ *и* $T$ *плотно определены. Пусть* $\Delta_s$ *и* $\Delta_s^*$ *— области сильной сходимости резольвент операторов* $T_n$ *и* $T_n^*$ *соответственно. Тогда* $\Delta_s^*$ *совпадает с зеркальным отражением* $\bar{\Delta}_s$ *множества* $\Delta_s$ *относительно вещественной оси.*

Доказательство. Эта теорема является прямым следствием формулы $\Delta_s = \Delta_b \cap P(T)$ и аналогичной формулы для $\Delta_s^*$, поскольку $\Delta_b^* = \Delta_b$ и $P(T^*) = P(T)$ (см. теорему III.6.22).

**Замечание 1.9.** Мы рассматривали сильную сходимость *последовательности* резольвент $\{R_n(\zeta)\}$, но точно так же можно было рассматривать семейство резольвент $R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1}$, зависящее от непрерывного параметра. В дальнейшем мы так и будем поступать, без специальных пояснений.

**Пример 1.10.** Пусть $H$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$, и пусть $T_n = n^{-1}H$. Тогда $T_n u \to 0$ при любом $u \in \mathbf{D}(H)$. Поскольку множество $\mathbf{D}(H)$ плотно в $\mathbf{H}$, то оно является ядром ограниченного оператора $T = 0$. Поэтому применимо следствие 1.6, согласно которому $R_n(\zeta)$ сильно сходится к $R(\zeta) = -1/\zeta$ при любом невещественном $\zeta$. Отсюда следует, что при любом невещественном $\alpha$ имеет место сильная сходимость $(1 - n^{-1}\alpha H)^{-1} \to 1$. Этот результат не совсем тривиален. Если спектр $\Sigma(H)$ оператора $H$ совпадает со всей вещественной осью, то $\Delta_b$ является объединением верхней и нижней полуплоскостей ($\operatorname{Im} \zeta \gtrless 0$), и $\Delta_b = \Delta_s = P(T) \cap \Delta_b$ ($P(T)$ есть вся плоскость, за исключением начала координат).

**Пример 1.11.** Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{L}^2(0, \infty)$ и $T_n$, $T$ — операторы, определяемые формулой

$$T_n = -d^2/dx^2 + q_n(x), \quad T = -d^2/dx^2 + q(x), \tag{1.4}$$

с граничным условием $u(0) = 0$; функции $q(x)$ и $q_n(x)$ вещественнозначны. При определенных условиях (см. п. V.3.6) операторы $T_n$ и $T$ являются самосопряженными, а $C_0^\infty(0, \infty)$ является ядром оператора $T$. Предположим теперь, что

$$\int_a^b |q_n(x)-q(x)|^2\,dx \to 0 \tag{1.5}$$

при любых $a$, $b$ таких, что $0 < a < b < \infty$. Тогда $T_n u \to Tu$ при $u \in C_0^\infty$. Из следствия 1.6 вытекает, что $R_n(\zeta) \xrightarrow[s]{} R(\zeta)$ при любом невещественном $\zeta$. Это означает, что решение граничной задачи

$$-u'' + q_n(x)\,u - \zeta u = f(x), \quad u(0) = 0, \quad u \in L^2(0, \infty), \tag{1.6}$$

сходится в $L^2(0, \infty)$ к решению той же задачи, в которой $q_n$ заменено на $q$. См. также примеры п. 4.

**Пример 1.12.** Рассмотрим оператор $T(\varkappa) = T + \varkappa A$, где $T$ и $A$ — операторы сдвига в $l^p(-\infty, \infty)$, рассмотренные в примере IV.3.8. Спектр $\Sigma(T(\varkappa))$ при $\varkappa \neq 0$ является единичной окружностью $|\zeta| = 1$. Пусть $R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1}$. Поскольку $\|R(\zeta, \varkappa)\| \leqslant (|\zeta| - 1)^{-1}$ при $|\zeta| > 1$ и $|\varkappa| \leqslant 1$ (см. задачу IV. 3.10), то внешность единичного круга принадлежит области ограниченности $\Delta_b$ для $R(\zeta, \varkappa)$ при $\varkappa \to 0$. Но внутренность этого круга не принадлежит $\Delta_b$ (см. там же). При этом множества $P(T)$, $\Delta_b$ и $\Delta_s$ совпадают с внешностью единичного круга.

**Пример 1.13.** Пусть $T$ — замкнутый максимальный симметричный несамосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $H$. Мы можем предположить, что верхняя полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ является резольвентным множеством $P(T)$, тогда как нижняя полуплоскость не пересекается с $P(T)$. Пусть $\{P_n\}$ — последовательность ортогональных проекторов, обладающая следующими свойствами: i) последовательность $\{P_n\}$ не убывает ($P_1 \leqslant P_2 \leqslant \ldots$) и $\text{s-lim}\, P_n = 1$; ii) $P_n X \subset D(T)$; iii) $P_n T P_n u \to Tu$, если $u$ принадлежит линейному подпространству $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n X$; iv) $D$ является ядром оператора $T$. Такая последовательность может быть построена следующим образом[1]). Пусть $u_n \in D(T)$ — последовательность, плотная в $H$, а $\{v_n\}$ — ортонормированная система, которая получается в результате применения процесса ортогонализации Шмидта к последовательности $\{u_n, (T - i)^{-1} u_n\}$. Если $P_n$ — проектор на $n$-мерное подпространство, порожденное векторами $v_1, \ldots, v_n$, то последовательность $\{P_n\}$ обладает требуемыми свойствами.

Пусть $T_n = P_n T P_n$. Операторы $T_n$, очевидно, ограничены и симметричны, а значит, самосопряжены. Поэтому область ограниченности $\Delta_b$ для $\{T_n\}$ содержит все невещественные числа. Кроме того, из iii), iv) и теоремы 1.5 следует, что множество $\Delta_s = P(T) \cap \Delta_b$ в точности совпадает с верхней полуплоскостью. Здесь мы имеем пример, когда $\Delta_s$ есть собственное подмножество множества $\Delta_b$.

## 2. Обобщенная сильная сходимость и спектры

Мы видели выше, что спектр $\Sigma(T)$ полунепрерывен сверху по отношению к обобщенной сходимости операторов, т. е. $\Sigma(T)$ не расширяется скачком при непрерывном в смысле обобщенной сходимости изменении оператора $T$. Совсем иная ситуация возникает, если вместо обобщенной сходимости рассматривается обобщенная сильная сходимость, определенная выше, или даже

---

[1] См. Стоун [[1]], стр. 166

просто сильная сходимость. Это является одной из причин, по которой в теоремах, доказанных выше, мы должны были вводить область сильной сходимости $\Delta_s$.

Простой контрпример доставляет последовательность $\{E_n\}$ ортогональных проекторов в гильбертовом пространстве такая, что $E_n \xrightarrow[s]{} 0$. Предельный оператор 0 имеет спектр, состоящий из единственной точки $\zeta = 0$, но $\Sigma (E_n)$, вообще говоря, содержит две точки $\zeta = 0, 1$. Поскольку, с другой стороны, спектр $\Sigma (T)$, вообще говоря, не является полунепрерывным снизу даже в смысле сходимости по норме, мы заключаем, что он не является полунепрерывным ни сверху, ни снизу в смысле сильной сходимости.

Однако полунепрерывность спектра снизу может быть доказана при некоторых ограничениях.

**Теорема 1.14.** *Пусть $H_n$, $H$ — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве* $\mathsf{H}$, *и пусть $H_n$ сильно сходится к $H$ в обобщенном смысле. Тогда всякое открытое множество, содержащее хотя бы одну точку множества $\Sigma (H)$, содержит по крайней мере одну точку множества $\Sigma (H_n)$ при достаточно больших $n$.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in \Sigma (H)$; положим $\zeta = \lambda + i\varepsilon$, $\varepsilon > 0$. В силу самосопряженности оператора $H$ имеем $\| R (\zeta) \| = 1/\varepsilon$, так что существует вектор $u \in \mathsf{H}$ такой, что $\| R (\zeta) u \| \geqslant 1/2\varepsilon$. Но, согласно предположению, $R_n (\zeta) u \to R (\zeta)$ (см. также следствие 1.4). Поэтому $\| R_n (\zeta) u \| \geqslant 1/3\varepsilon$ при достаточно больших $n$. Поскольку операторы $H_n$ являются самосопряженными, то существуют такие $\lambda_n \in \Sigma (H_n)$, что $| \lambda_n - \zeta | \leqslant 3\varepsilon$, или $| \lambda_n - \lambda | \leqslant 4\varepsilon$. Так как $\varepsilon < 0$ произвольно, то теорема доказана.

Следующая теорема в некотором смысле усиливает теорему 1.14.

**Тоерема 1.15.** *Пусть $H_n = \int d\, E_n (\lambda)$ — спектральные представления операторов, фигурирующих в теореме* 1.14. *Тогда*[1]

$$\operatorname*{s-lim}_{n \to \infty} E_n (\lambda) = E (\lambda), \quad \text{\textit{если}} \quad E (\lambda - 0) = E (\lambda). \tag{1.7}$$

---

[1] Обобщением формулы (1.7) является соотношение s-lim $E_n (\lambda_n) = E (\lambda)$ при $\lambda_n \to \lambda$. Для доказательства достаточно воспользоваться равенством $E_n (\lambda_n) = E'_n (\lambda)$, где $E'_n$ — спектральное семейство оператора $H'_n = H_n - (\lambda_n - \lambda)$, и тем фактом, что $H'_n \xrightarrow[s]{} H$, так как $\lambda_n - \lambda \to 0$. Заметим также, что s-lim $E_n (\lambda_n - 0) = E (\lambda)$. Для доказательства следует учесть, что сильные пределы последовательностей $E_n (\lambda_n)$ и $E_n (\lambda_n - n^{-1})$ совпадают и равны $E (\lambda)$, так что $E_n (\lambda_n) - E_n (\lambda_n - 0) \xrightarrow[s]{} 0$.

Можно также поставить вопрос, верно ли, что $\varphi (H_n) \xrightarrow[s]{} \varphi (H)$ для любой заданной функции $\varphi (H)$. Мы не будем рассматривать эту задачу в общем виде. О соответствующей задаче для спектральных операторов см. Фогель [1].

Доказательство. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что $\lambda = 0$. Напомним, что оператор $E_n(0) + E_n(-0)$ описывается леммой VI.5.6, в которой $\lambda = 0$, а $H$ заменяется на $H_n$, так что

$$(1 - E_n(0) - E_n(-0)) H_n (H_n^2 + 1)^{-1} =$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty H_n (H_n^2 + \eta^2)^{-1} H_n (H_n^2 + 1)^{-1} d\eta; \qquad (1.8)$$

при этом нет нужды писать $\lim\limits_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \rho \to \infty}} \int\limits_\varepsilon^\rho$ в правой части, так как интеграл абсолютно сходится в силу неравенства

$$\| H_n (H_n^2 + \eta^2)^{-1} H_n (H_n^2 + 1)^{-1} \| \leqslant \min(1, \eta^{-2}). \qquad (1.9)$$

Заметим далее, что $(E_n(0) - E_n(-0)) H_n (H_n^2 + 1)^{-1} = 0$, так как $E_n(0) - E_n(-0)$ есть проектор на нуль-пространство оператора $H_n$. Следовательно, $E_n(-0)$ в левой части равенства (1.8) можно заменить на $E_n(0)$. В результате мы получим формулу, аналогичную формуле (1.8), для операторов $H$, $E$ вместо $H_n$, $E_n$ соответственно.

Подинтегральная функция в (1.8) сильно сходится при $n \to \infty$ к $H(H^2 + \eta^2)^{-1} H (H^2 + 1)^{-1}$, так как $R_n(\zeta) \xrightarrow[s]{} R(\zeta)$ при любом невещественном $\zeta$. В силу (1.8) из принципа мажорантной сходимости следует, что

$$(1 - 2E_n(0)) H_n (H_n^2 + 1)^{-1} \xrightarrow[s]{} (1 - 2E(0)) H (H^2 + 1)^{-1}. \qquad (1.10)$$

С другой стороны, $H_n (H_n^2 + 1)^{-1} \xrightarrow[s]{} H (H^2 + 1)^{-1}$, так как $R_n(\pm i) \xrightarrow[s]{} R(\pm i)$. Следовательно,

$$(1 - 2E_n(0)) [H_n (H_n^2 + 1)^{-1} - H (H^2 + 1)^{-1}] \xrightarrow[s]{} 0. \qquad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) получаем

$$(E_n(0) - E(0)) H (H^2 + 1)^{-1} \xrightarrow[s]{} 0. \qquad (1.12)$$

Отсюда вытекает, что $E_n(0) u \to E(0) u$, если $u = H(H^2 + 1)^{-1} v$, $v \in \mathrm{H}$, т. е. если $u$ принадлежит области значений оператора $H(H^2 + 1)^{-1}$. Но эта область значений плотна в H, ибо оператор $H(H^2 + 1)^{-1}$ самосопряжен и размерность его ядра равна нулю (см. III.5.10). Так как последовательность $E_n(0)$ ограничена, то $E_n(0) \xrightarrow[s]{} E(0)$ (см. лемму III.3.5).

**Замечание 1.16.** Рассуждение, использованное в приведенном доказательстве, можно обобщить следующим образом. Предположим, что требуется доказать сильную сходимость $A_n \to A$; для этого можно сначала доказать, что $A_n\varphi(H_n) \xrightarrow[s]{} A\varphi(H)$ для некоторой функции $\varphi$, а затем, что $\varphi(H_n) \xrightarrow[s]{} \varphi(H)$. Тогда $A_n\varphi(H_n) - A_n\varphi(H) \xrightarrow[s]{} 0$, если известно, что операторы $A_n$ равномерно ограничены. Следовательно, $(A_n - A)\varphi(H) \xrightarrow[s]{} 0$. Если функция $\varphi$ такова, что область значений оператора $\varphi(H)$ плотна в $\mathbf{H}$, то мы заключаем, что $A_n \xrightarrow[s]{} A$.

## 3. Возмущения собственных значений и собственных векторов

Тот факт, что спектр не является сильно полунепрерывным сверху по отношению к возмущениям, вносит определенные трудности в теорию возмущений спектров и, в частности, *изолированных собственных значений.* В противоположность случаю возмущений, малых в смысле обобщенной сходимости, может оказаться, что изолированное собственное значение оператора $T$ поглощается непрерывным спектром[1], если $T$ подвергается возмущениям, малым в смысле сильной сходимости. Покажем на простых примерах, как может происходить такое на первый взгляд исключительное явление.

**Пример 1.17.** Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{L}^2(-\infty, \infty)$, и пусть $T$ — интегральный оператор с ядром $t(y, x) = -f(y)\overline{f(x)}$, где $f(x)$ — непрерывная функция, такая, что $\|f\| = 1$ и $f(x) \neq 0$ при любом $x$. Пусть $T^{(1)}$ — максимальный оператор умножения на $x$: $T^{(1)}u(x) = xu(x)$. Оператор $T$ ограничен, самосопряжен и имеет собственные значения $-1$, $0$, причем первое из них является простым, а кратность второго равна $\infty$.

Положим $T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}$ при $\varkappa \neq 0$. Оператор $T(\varkappa)$ самосопряжен при вещественных $\varkappa$. При комплексных $\varkappa$ числовой образ $\Theta(T(\varkappa))$ оператора $T(\varkappa)$ является подмножеством полосы $\Pi_\varkappa$, заключенной между прямыми $\eta = \xi \operatorname{tg}\theta$ и $\eta = -1 + \xi \operatorname{tg}\theta$, где $\zeta = \xi + i\eta$ и $\theta = \arg\varkappa$. Далее, оператор $T(\varkappa - \zeta)^{-1} = \varkappa^{-1}(T^{(1)} + \varkappa^{-1}T - \varkappa^{-1}\zeta)^{-1}$ существует и принадлежит $\mathscr{B}(\mathbf{X})$, по крайней мере при $\|\varkappa^{-1}T\| = |\varkappa^{-1}| < \operatorname{Im}(\varkappa^{-1}\zeta)| = \|(T^{(1)} - \varkappa^{-1}\zeta)^{-1}\|^{-1}$, т. е. при $\zeta$, достаточно удаленных от полосы $\Pi_\varkappa$. Таким образом, индекс дефекта оператора $T(\varkappa)$ равен $(0, 0)$ и внешность указанной полосы принадлежит $\mathrm{P}(T(\varkappa))$, причем $\|R(\zeta, \varkappa)\| \leqslant 1/\operatorname{dist}(\zeta, \Pi_\varkappa)$ (см. п. V.3.2).

Предположим теперь, что $u$ принадлежит области $\mathrm{D}_0$: $|\operatorname{Im}\varkappa| < M|\operatorname{Re}\varkappa|$. Из предыдущего результата следует, что если $\zeta$ лежит в одном из двух секторов $\eta > \varphi(\xi) + \varepsilon$, $\eta < \varphi(\xi) - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ и

$$\varphi(\xi) = \max[-M\xi, M(\xi + 1)] > 0, \tag{1.13}$$

то $\|R(\zeta, \varkappa)\| \leqslant \varepsilon^{-1}(M^2 + 1)^{1/2}$.

---

[1] Мы не вводили понятие непрерывного спектра оператора. Здесь мы используем этот термин в довольно расплывчатом смысле, подразумевая множество всех неизолированных точек спектра. Позже будет дано точное определение для самосопряженных операторов (гл. X).

Пусть теперь $\varkappa \to 0$ таким образом, что $\varkappa \in \mathrm{D}_0$. В силу полученного выше результата секторы

$$\Pi_\pm:\quad \eta > \varphi(\xi) \quad \text{и} \quad \eta < -\varphi(\xi) \tag{1.14}$$

принадлежат $\Delta_b$. Кроме того, $T(\varkappa)\,u \to Tu$, если $u \in \mathrm{D}(T^{(1)})$. Так как $\mathrm{D}(T^{(1)})$ является ядром оператора $T$ и $\Pi_\pm \in \mathrm{P}(T)$, то, согласно теореме 1.5, множества $\Pi_\pm$ также принадлежат $\Delta_s$. Таким образом, $T(\varkappa) \xrightarrow[s]{} T$ в обобщенном смысле.

Аналогичные результаты справедливы и в том случае, когда $\varkappa$ принадлежат области $\mathrm{D}_1$: $|\operatorname{Im}\varkappa| > m\,|\operatorname{Re}\varkappa|$, $m > 0$. В этом случае множества $\Delta_b$ и $\Delta_s$ содержат секторы $|\eta| < m\xi$, $|\eta| < -m(\xi + 1)$ и $T(\varkappa) \xrightarrow[s]{} T$ в обобщенном смысле, если $\varkappa \to 0$ таким образом, что $\varkappa \in \mathrm{D}_1$.

Рассмотрим спектр оператора $T(\varkappa)$. Ясно, что $\Sigma(T^{(1)})$ совпадает с вещественной осью, с которой в то же время совпадает существенный спектр $\Sigma_e(T^{(1)})$ оператора $T^{(1)}$ (см. п. IV.5.6). Поскольку оператор $T$ вырожден и ранг его равен 1, то оператор $T^{(1)} + \varkappa^{-1}T$ имеет тот же существенный спектр, что и $T^{(1)}$ (см. теорему IV.5.35). Отсюда следует, что при любом $\varkappa \neq 0$ существенный спектр оператора $T(\varkappa) = \varkappa(T^{(1)} + \varkappa^{-1}T)$ является прямой, проходящей через точки 0 и $\varkappa$, так что остаток спектра $\Sigma(T(\varkappa))$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности (см. там же).

В частности, при вещественных $\varkappa$ оператор $T(\varkappa)$ не имеет изолированных собственных значений (так как он самосопряжен и спектр его расположен на вещественной оси). Более того, он вообще не имеет собственных значений. Действительно, предположим, что $T(\varkappa)\,u = \lambda u$. Тогда

$$-(u, f)\,f(x) + \varkappa x u(x) = \lambda u(x), \tag{1.15}$$

$$u(x) = \frac{c f(x)}{\varkappa x - \lambda}, \qquad c = (u, f). \tag{1.16}$$

Но такой вектор $u$ принадлежит $\mathrm{X}$ только тогда, когда $u = 0$, так как знаменатель $\varkappa x - \lambda$ обращается в нуль в точке $x = \lambda/\varkappa$, если $\lambda$ вещественно. С другой стороны, $T(\varkappa)$ не имеет невещественных собственных значений, как было отмечено выше. Можно показать, что $T(\varkappa)$ имеет чисто непрерывный спектр на всей вещественной оси [1]).

С другой стороны, при невещественных $\varkappa$ формула (1.16) может определять ненулевой вектор $u$, принадлежащий $\mathrm{X}$. Собственное значение $\lambda$ определяется уравнением

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{|f(x)|^2}{\varkappa x - \lambda}\,dx = \frac{(u, f)}{c} = 1. \tag{1.17}$$

Можно показать, что уравнение (1.17) однозначно определяет $\lambda$ как функцию от $\varkappa$, по крайней мере при малых $|\varkappa|$ и $|\lambda + 1|$, и что $\lambda = \lambda(\varkappa)$ стремится к $\lambda(0) = -1$ при $\varkappa \to 0$, $\varkappa \in \mathrm{D}_1$.

Таким образом, собственное значение $-1$ оператора $T$ поглощается непрерывным спектром оператора $T(\varkappa)$ при вещественных $\varkappa$, тогда как при $\varkappa \in \mathrm{D}_1$ оно непрерывно переходит в изолированное собственное значение. Собственное значение 0 оператора $T$ также во всех случаях поглощается существенным спектром; этого можно было ожидать ввиду того факта, что его кратность равна $\infty$.

---

[1]) Это можно доказать с помощью того факта, что $T(\varkappa) = \varkappa(T^{(1)} + \varkappa^{-1}T)$, где оператор $T^{(1)}$ имеет абсолютно непрерывный спектр, а оператор $T$ вырожден (см. теорему X.4.4).

**Пример 1.18.** Пусть $\mathbf{X}$ и $T$ те же, что в примере 1.17, и пусть $T^{(1)} = x^2$. Снова $T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}$ сильно сходится к $T$ в обобщенном смысле, если $\varkappa \to 0$ и $\varkappa \in \mathrm{D}_0$ или $\varkappa \in \mathrm{D}_1$. В этом случае, однако, при $\varkappa > 0$ оператор $T(\varkappa)$ имеет ровно одно собственное значение, так как в формуле, соответствующей формуле (1.16), мы имеем теперь знаменатель $\varkappa x^2 - \lambda$, который не обращается в нуль при $\lambda < 0$. Легко показать, что условие, которое получается из (1.17), если $\varkappa x - \lambda$ заменить на $\varkappa x^2 - \lambda$, определяет $\lambda = \lambda(\varkappa)$ как отрицательную возрастающую функцию от $\varkappa$ при $\varkappa > 0$ и что $\lambda(\varkappa) \to -1$ при $\varkappa \searrow 0$. Кроме того, существенный спектр оператора $T(\varkappa)$ при $\varkappa > 0$ совпадает с неотрицательной вещественной полуосью. Спектр $\Sigma(T(\varkappa))$ при $\varkappa > 0$ состоит из одного отрицательного собственного значения $\lambda(\varkappa)$ и непрерывного спектра, покрывающего положительную вещественную полуось. Возмущение спектра при $\varkappa > 0$ имеет самый обычный вид, если рассматривается изолированное собственное значение $-1$ оператора $T$. Аналогичного поведения спектра оператора $T(\varkappa)$ можно ожидать и для невещественных $\varkappa$ при $|\arg \varkappa| \leqslant \pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Но ситуация оказывается совсем иной, если $\varkappa$ вещественно и отрицательно. В этом случае, как легко видеть, $T(\varkappa)$ не имеет собственных значений; изолированное собственное значение $-1$ оператора $T$ поглощается непрерывным спектром при переходе от $T$ к $T(\varkappa)$.

**Пример 1.19.** Пусть $\mathbf{X}$ — любое из функциональных пространств $\mathbf{L}^p(0, 1)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $\mathbf{C}[0, 1]$, и пусть

$$T(\varkappa) = 2\alpha \frac{d}{dx} - \varkappa \frac{d^2}{dx^2}, \quad \alpha \neq 0, \tag{1.18}$$

с граничными условиями

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{1.19}$$

Оператор $T(\varkappa)$ замкнут при $\varkappa \neq 0$, причем $\mathbf{D} = \mathbf{D}(T(\varkappa))$ не зависит от $\varkappa$. Этот оператор даже самосопряжен, если $\mathbf{X} = \mathbf{L}^2$, $\varkappa$ вещественно, $\varkappa \neq 0$, а $\alpha$ — чисто мнимое число. Простые вычисления показывают, что при $\varkappa \neq 0$ спектр оператора $T(\varkappa)$ состоит из изолированных собственных значений

$$\lambda_n(\varkappa) = n^2\pi^2\varkappa + \frac{\alpha^2}{\varkappa}, \quad n-1, 2, 3, \ldots . \tag{1.20}$$

Чему равен «предел» оператора $T(\varkappa)$ при $\varkappa \to 0$? Формально вроде бы $T(0) = 2\alpha d/dx$. Если сохранить граничное условие (1.19) для этого дифференциального оператора первого порядка, то спектр замыкания $T(0)^{\sim}$ оператора $T(0)$ есть вся комплексная плоскость (пример III.6.8). Но $T(0)^{\sim}$ не является разумным пределом для $T(\varkappa)$, так как для дифференциального оператора первого порядка естественно ставить одно, а не два граничных условия. Существует бесконечно много граничных условий, совместимых с (1.19), а именно

$$u(0) = \theta u(1), \tag{1.21}$$

где $\theta$ — фиксированное комплексное число (допускается $\theta = \infty$). Задача состоит в выборе из всех условий вида (1.21) «корректного» граничного условия. Такая постановка является типичной для *сингулярной теории возмущений* дифференциальных операторов.

Трудность этой задачи состоит в том, что она не покрывается теоремой 1.5. Конечно, $T(\varkappa)u \to T(0)^{\sim}$, $\varkappa \to 0$, при $u \in \mathbf{D}$, но множество $\mathrm{P}(T(0^{\sim}))$ пусто и невозможно найти расширение оператора $T(0)^{\sim}$, которое имело бы непустое резольвентное множество и для которого множество $\mathbf{D}$ являлось бы ядром.

В действительности $T(\varkappa)$ сходится к определенному замкнутому оператору $T$ в смысле *сильной обобщенной сходимости*, и даже *в смысле* (*просто*) *обобщенной сходимости*, при условии, что $\varkappa \to 0$ таким образом, что $\varkappa/\alpha$ не является чисто мнимым. Наиболее прямое доказательство состоит в построении резольвенты $R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1}$ как интегрального оператора с функцией Грина $g_\varkappa(y, x; \zeta)$ в качестве ядра. Непосредственное вычисление дает

$$g_\varkappa(y, x; \zeta) = \frac{e^{\frac{\alpha}{\varkappa}(y-x)}}{(\sqrt{\alpha^2-\varkappa\zeta'})\operatorname{sh}\frac{\sqrt{\alpha^2-\varkappa\zeta}}{\varkappa}} \times$$
$$\times \begin{cases} \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\varkappa\zeta}}{\varkappa} y\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\varkappa\zeta}}{\varkappa}(1-x)\right), & y \leqslant x, \\ \operatorname{ch}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\varkappa\zeta}}{\varkappa}(1-y)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\alpha^2-\varkappa\zeta}}{\varkappa} x\right), & y \geqslant x. \end{cases} \tag{1.22}$$

**Пусть теперь $\varkappa \to 0$. Если при этом $|\arg(\varkappa/\alpha)| \leqslant \delta < \pi/2$, то, как легко показать,**

$$g_\varkappa(y, x; 0) \to g(y, x; 0) = \begin{cases} 0, & y < x, \\ \frac{1}{2\alpha}, & y > x, \end{cases} \tag{1.23}$$

причем функция $g_\varkappa(y, x; 0)$ равномерно ограничена в квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Предельное ядро $g(y, x; 0)$ есть в точности функция Грина для оператора $T = 2\alpha d/dx$ с граничным условием $u(0) = 0$, что соответствует условию (1.21) при $\theta = 0$. Из (1.23) в силу принципа ограниченной сходимости следует, что

$$\int_0^1 \int_0^1 |g_\varkappa(y, x; 0) - g(y, x; 0)|^2 \, dx\, dy \to 0. \tag{1.24}$$

Если $X = L^2$, то $\| R(0, \varkappa) - R(0) \|^2$, где $R(\zeta) = (T - \zeta)^{-1}$, не превышает левой части формулы (1.24) (см. задачу III.2.5). Поэтому $R(\zeta, \varkappa) \to R(\zeta)$ по норме при $\zeta = 0$, откуда следует, что то же справедливо для любого $\zeta \in \mathrm{P}(T)$ (см. замечания IV.3.13 и IV.3.14). Иными словами, $T(\varkappa) \to T$ в обобщенном смысле. Таким образом, мы заключаем, что *корректный выбор граничного условия вида* (1.21) *состоит в том, чтобы положить* $\theta = 0$, *если* $\varkappa \to 0$ *таким образом, что* $|\arg(\varkappa/\alpha)| \leqslant \delta < \pi/2$. Интересно заметить, что спектр оператора $T(\varkappa)$ уходит на бесконечность при $\varkappa \to 0$; если, например, $\alpha$ — положительное число, то $\Sigma(T(\varkappa))$ содержится в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta \geqslant |\varkappa|^{-1} \cos \delta$. Это не противоречит полунепрерывности спектра сверху по отношению к возмущениям, малым в смысле обобщенной сходимости, так как спектр оператора $T$ пуст (см. пример III.6.8).

Аналогично, корректное граничное условие для «предела» $T$ оператора $T(\varkappa)$ дается формулой (1.21) при $\theta = \infty$, если $\varkappa \to 0$ таким образом, что $|\arg(-\varkappa/\alpha)| \leqslant \delta < \pi/2$. И наконец, $T(\varkappa)$ не имеет предела в смысле обобщенной (и даже сильной обобщенной) сходимости, если $\varkappa \to 0$ таким образом, что величина $\varkappa/\alpha$ является чисто мнимой. Доказательство мы опускаем; этого результата можно было ожидать ввиду того, что в данном случае не существует никакого выделенного $\theta$ в (1.21). Поведение спектра оператора $T(\varkappa)$ при $\varkappa \to 0$ весьма сложно. Если, например, $\alpha$ — чисто мнимое число и $\varkappa > 0$, то все собственные значения (1.20) вещественны. Каждое из них стремится к $-\infty$, если $\varkappa \to +0$, тогда как их расположение становится все более плотным. Поэтому всю вещественную ось можно рассматривать как предел спектра $\Sigma$ ($T$ ($\varkappa$)).

**Пример 1.20.** Пусть пространство X то же, что в примере 1.19, и пусть

$$T(\varkappa) = -\alpha \frac{d^2}{dx^2} + \varkappa \frac{d^4}{\partial x^4}, \quad \alpha > 0, \tag{1.25}$$

с граничными условиями

$$u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0. \tag{1.26}$$

Оператор $T$ ($\varkappa$) (при малых $\varkappa > 0$) возникает при описании движения натянутой струны с малой жесткостью, закрепленной на обоих концах. Если $\varkappa \to +0$, то $T$ ($\varkappa$) формально стремится к $T(0) = -\alpha d^2/dx^2$. Но граничное условие (1.26) является слишком сильным для дифференциального оператора второго порядка $d^2/dx^2$; здесь опять мы имеем дело с задачей сингулярной теории возмущений: основная задача состоит в нахождении корректного граничного условия для $T$ (0). Физическая интуиция немедленно подсказывает предположение, что

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{1.27}$$

является искомым граничным условием. Действительно, можно показать, что пределом в смысле обобщенной сходимости оператора $T$ ($\varkappa$) является оператор $T = -\alpha d^2/dx^2$ с граничным условием (1.27), по крайней мере если $\mathrm{X} = \mathrm{L}^2$. В этом факте можно убедиться непосредственно, рассматривая, как и в примере 1.19, функцию Грина, но позже мы выведем его, рассматривая вопрос с более общей точки зрения (см. пример 3.8).

Из обобщенной сходимости $T(\varkappa) \to T$ следует, что каждое изолированное собственное значение $\lambda_n$ оператора $T$ непрерывно переходит в соответствующее собственное значение $\lambda_n$ ($\varkappa$) оператора $T$ ($\varkappa$). Известно[1]), что

$$\lambda_n(\varkappa) = n^2\pi^2\alpha \left[1 + 4\left(\frac{\varkappa}{\alpha}\right)^{1/2} + O(\varkappa)\right], \quad \varkappa > 0. \tag{1.28}$$

Поэтому собственные значения непрерывны в точке $\varkappa = 0$, но не дифференцируемы.

Этих примеров достаточно для того, чтобы показать, что спектр оператора может вести себя очень сложно при «сингулярных» возмущениях. В частности, следует заметить, что его поведение может быть существенно различным для различных направлений, по которым параметр $\varkappa$ стремится к нулю.

Таким образом, возмущения в примерах 1.19 и 1.20 являются «не очень сингулярными», если $\alpha > 0$ и $\varkappa \searrow 0$, так как в этом случае имеет место обобщенная сходимость $T(\varkappa) \to T$.

При сингулярных возмущениях изолированное собственное значение, вообще говоря, не остается изолированным; оно может поглощаться непрерывным спектром. Поэтому если требуется развить сингулярную теорию возмущений изолированных собственных значений, то необходимо явно предположить, что такое поглощение не имеет места. Вопрос о том, когда это предположение выполняется, сложен; в общем случае, по-видимому, удо-

---

[1]) См. **Рэлей** [[1]].

влетворительного ответа не существует. Мы еще вернемся к этому вопросу ниже.

Мы не можем говорить о возмущении собственного значения $\lambda$, если оно поглощается непрерывным спектром. Иногда, однако, непрерывный спектр возмущенного оператора в некотором смысле концентрируется вблизи точки $\lambda$. Это явление *спектральной концентрации* будет обсуждаться в § 5.

## 4. Устойчивые собственные значения

Согласно замечанию предыдущего пункта, рассмотрим возмущение изолированного собственного значения в предположении, что при возмущении оно остается изолированным. Для уточнения этого предположения дадим следующее определение.

Пусть $T_n \xrightarrow[s]{} T$, $n \to \infty$, в обобщенном смысле. Изолированное собственное значение $\lambda$ оператора $T$ называется *устойчивым* относительно этого возмущения, если выполняются следующие условия:

i) Область сходимости $\Delta_s$ для $R_n(\zeta)$ содержит некоторую выколотую окрестность точки $\lambda$. Иными словами, существует $\delta > 0$ такое, что каждое $\zeta$, удовлетворяющее условию $0 < |\zeta - \lambda| < \delta$, принадлежит $\mathrm{P}(T_n)$ при достаточно больших $n$ (зависящих от $\zeta$), и $R_n(\zeta) \xrightarrow[s]{} R(\zeta)$, $n \to \infty$.

Из этого условия следует, что окружность $\Gamma$: $|\zeta - \lambda| = r$, $0 < r < \delta$, является подмножеством множества $\Delta_s$ и что сходимость $R_n(\zeta) \xrightarrow[s]{} R(\zeta)$ равномерна на $\Gamma$ (см. теорему 1.2). Поэтому проектор

$$P_n = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R_n(\zeta)\,d\zeta \tag{1.29}$$

определен, и

$$P_n \xrightarrow[s]{} P = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R(\zeta)\,d\zeta, \tag{1.30}$$

где $P$ — собственный проектор, соответствующий собственному значению $\lambda$ оператора $T$.

ii) $\dim P_n \leqslant \dim P$ при достаточно больших $n$.

В силу формулы (1.30) из условия ii) в действительности следует, что при достаточно больших $n$

$$\| P_n - P \| \to 0, \quad \dim P_n = \dim P. \tag{1.31}$$

Этот факт вытекает из следующей леммы.

**Лемма 1.21.** *Пусть $\{P_n\}$ — последовательность проекторов в банаховом пространстве $\mathsf{X}$. Если $P_n \xrightarrow[s]{} P$, $n \to \infty$, то оператор*

*$P$ также является проектором. Если* $\dim P_n \leqslant \dim P < \infty$ *при всех $n$, то $P_n \to P$ по норме и* $\dim P_n = \dim P$ *при достаточно больших $n$.*

Доказательство. Из $P_n^2 = P_n$ следует, что $P^2 = P$, поэтому $P$ есть проектор. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — базис в пространстве $PX$, и пусть $\{e_1, \ldots, e_m\}$ — сопряженный базис в пространстве $P^*X^*$: $(x_j, e_k) = \delta_{jk}$. По предположению имеем $P_n x_j \to \to P x_j = x_j$ при каждом $j$. Следовательно, $(P_n x_j, e_k) \to (x_j, e_k) = = \delta_{jk}$ и $\det (P_n x_j, e_k) \to 1$. Этот определитель при достаточно больших $n$ отличен от нуля, поэтому $m$ векторов $P_n x_j$, $j = 1, \ldots$ $\ldots, m$, линейно независимы. Поскольку раэмерность пространства $P_n X$ не превосходит $m$, то оно $m$-мерно с базисом $\{P_n x_j\}$.

Так как $\det (P_n x_j, P_n^* e_k) = \det (P_n x_j, e_k) \to 1$, то векторы $\{P_n^* e_k\}$ образуют базис в пространстве $P^*X$, *почти* биортогональный базису $\{P_n x_k\}$ пространства $P_n X$. С помощью небольшого изменения этого базиса $\{P_n^* l_k\}$ мы можем построить базис $\{f_{nk}\}$ пространства $P^*X$, строго биортогональный базису $\{P_n x_k\}$. Поскольку при $n \to \infty$ это небольшое изменение сколь угодно мало, то очевидно, что

$$f_{nk} \to e_k, \quad n \to \infty. \tag{1.32}$$

В силу биортогональности имеем

$$Pu = \sum_{k=1}^{m} (u, e_k)\, x_k, \qquad P_n u = \sum_{k=1}^{m} (u, f_{nk})\, P_n x_k \tag{1.33}$$

и

$$\begin{aligned} Pu - P_n u &= \sum_{k=1}^{m} [(u, e_k - f_{nk})\, x_k + (u, f_{nk})(x_k - P_n x_k)], \\ \|(P_n - P)\, u\| &\leqslant \|u\| \sum_{k=1}^{m} \{\|e_k - f_{nk}\|\, \|x_k\| + \|f_{nk}\|\, \|x_k - P_n x_k\|\}. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Так как выражение в фигурных скобках из последнего неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, то мы получаем требуемый результат $\|P_n - P\| \to 0$.

Из того что $\dim P_n = \dim P = m < \infty$, следует, что часть спектра оператора $T_n$, лежащая внутри окружности $\Gamma$, состоит из изолированных собственных значений с тотальной кратностью $m$. Это верно при любом выборе радиуса $r$ окружности $\Gamma$, если $n$ достаточно велико; следовательно, указанные собственные значения оператора $T_n$ сходятся к $\lambda$ при $n \to \infty$. В то же время из (1.31) следует, что *тотальный проектор*, соответствующий этим собственным значениям (т. е. проектор на $m$-мерное пространство, равное прямой сумме алгебраических собственных подпространств, отвечающих этим собственным значениям), стремится *по норме* к собственному проектору, соответствующему собственному значению $\lambda$ оператора $T$. Таким образом, устойчивость собственного значения $\lambda$ влечет сходимость соответствующих собственных значений и собственных подпространств. Следует заметить, однако, что собственные проекторы, отвечающие каждому *отдельному* собственному значению оператора $T_n$, не обязаны сходиться при $n \to \infty$; они не обязаны даже иметь постоянную размерность.

**Пример 1.22.** Собственное значение $-1$ оператора $T$ из примера 1.17 не является устойчивым относительно рассмотренного возмущения, если $\varkappa$ вещественно и $\varkappa \to 0$. Но оно устойчиво, если $\varkappa \to 0$ по прямой, отличной от вещественной оси. В примере 1.18 собственное значение $-1$ оператора $T$ устойчиво, если $\varkappa \to 0$ по лучу, отличному от отрицательной вещественной полуоси. В примере 1.19 оператор $T$ не имеет собственных значений вообще, так что вопроса об устойчивости не возникает. В примере 1.20 все собственные значения оператора $T$ устойчивы, если $\varkappa \to 0$ вдоль положительной вещественной полуоси.

## § 2. Асимптотические разложения

### 1. Асимптотическое разложение резольвенты

В этом параграфе мы будем иметь дело с довольно частным, но практически важным случаем, когда оператор $T(\varkappa)$ *формально* представим в виде $T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}$. Более точно, предположим, что даны два оператора $T$, $T^{(1)}$ и параметр $\varkappa$ такие, что

i) $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$;

ii) множество $\mathbf{D} = \mathbf{D}(T) \cap \mathbf{D}(T^{(1)})$ является ядром оператора $T$;

iii) $T(\varkappa)$ принадлежит $\mathscr{C}(\mathbf{X})$ и является продолжением[1] оператора $T + \varkappa T^{(1)}$, определенного в области $\mathbf{D}$ при

$$0 < \varkappa \leqslant 1. \tag{2.1}$$

Прокомментируем эти предположения. Условие (2.1) на область изменения $\varkappa$ не является слишком ограничительным. Даже при комплексных $\varkappa$ мы должны ограничиваться случаем, когда $\varkappa$ стремится к 0 вдоль некоторого луча, так как поведение оператора $T(\varkappa)$ различно для различных направлений, по которым $\varkappa$ приближается к 0 (см. примеры предыдущего параграфа). В таком случае область изменения параметра $\varkappa$ можно свести к промежутку (2.1), если представить $\varkappa$ в виде $\varkappa = |\varkappa| e^{i\theta}$ и заменить $|\varkappa|$ на $\varkappa$ и $e^{i\theta}T^{(1)}$ на $T^{(1)}$ соответственно. Если условие ii) не выполняется, мы можем заменить оператор $T$ замыканием его сужения на множество $\mathbf{D}$; это доставляет условие ii), не влияя на определение оператора $T(\varkappa)$.

---

[1] Таким образом, оператор $T(\varkappa)$ может быть разрывным по $\varkappa$ при $\varkappa > 0$, так как он не определяется однозначно операторами $T$, $T^{(1)}$.

Теперь мы можем найти область ограниченности $\Delta_b$ и область сильной сходимости $\Delta_s$ для семейства резольвент $R(\zeta, \varkappa) = (T(\varkappa) - \zeta)^{-1}$, где $\varkappa \to 0$ (см. замечание 1.9). По определению

$$\limsup_{\varkappa\to 0} \|R(\zeta, \varkappa)\| = M(\zeta) < \infty, \quad \zeta \in \Delta_b. \tag{2.2}$$

Так как $T(\varkappa)\, u \to Tu$ при $\varkappa \to 0$, если $u \in \mathbf{D}$ и $\mathbf{D}$ является ядром оператора $T$, то из теоремы 1.5 следует, что $T(\varkappa) \xrightarrow[s]{} T$ в обобщенном смысле, причем

$$\Delta_s = \Delta_b \cap \mathrm{P}(T), \tag{2.3}$$

если выполняется дополнительное предположение

iv) множество $\Delta_b \cap \mathrm{P}(T)$ непусто.

Итак, мы имеем

$$\operatorname*{s-lim}_{\varkappa\to 0} R(\zeta, \varkappa) = R(\zeta), \quad \zeta \in \Delta_s. \tag{2.4}$$

Это означает, что $R(\zeta, \varkappa)\, u \to R(\zeta)\, u$ при любом $u \in \mathbf{X}$. Теперь мы хотим более точно оценить *скорость этой сходимости*. Для этого, однако, нужно сделать некоторые специальные предположения относительно рассматриваемых элементов $u$. Мы докажем ряд теорем, дающих такие оценки; при этом будем предполагать, что выполнены условия i) — iv), если не оговорено противное.

**Теорема 2.1.** *Пусть* $\zeta \in \Delta_s$. *Если* $R(\zeta)\, u \in \mathbf{D}(T^{(1)})$, *то справедливо равенство*

$$R(\zeta, \varkappa)\, u = R(\zeta)\, u - \varkappa R(\zeta)\, T^{(1)} R(\zeta)\, u + o(\varkappa). \tag{2.5}$$

*Здесь через* $o(\varkappa)$ *обозначен элемент пространства* $\mathbf{X}$, *норма которого есть* $o(\varkappa)$ *при* $\varkappa \to 0$.

Доказательство. В силу (2.4) равенство (2.5) следует непосредственно из тождества

$$R(\zeta, \varkappa)\, u - R(\zeta)\, u = -R(\zeta, \varkappa)\,(T(\varkappa) - T)\, R(\zeta)\, u = \\ = -\varkappa R(\zeta, \varkappa)\, T^{(1)} R(\zeta)\, u; \tag{2.6}$$

заметим, что $R(\zeta)\, u \in \mathbf{D} = \mathbf{D}(T) \cap \mathbf{D}(T^{(1)})$ по предположению.

**Теорема 2.2.** *Пусть* $\zeta \in \Delta_s$. *Если* $R(\zeta)\, u \in \mathbf{D}(T^{(1)})$ *и* $R(\zeta)\, T^{(1)} R(\zeta)\, u \in \mathbf{D}(T^{(1)})$, *то*

$$R(\zeta\ \varkappa)\, u = R(\zeta)\, u - \varkappa R(\zeta)\, T^{(1)} R(\zeta)\, u + \\ + \varkappa^2 R(\zeta)\, T^{(1)} R(\zeta)\, T^{(1)} R(\zeta)\, u + o(\varkappa^2). \tag{2.7}$$

Доказательство. В правой части формулы (2.6) заменим $u$ на $T^{(1)} R(\zeta)\, u$ и применим (2.5).

Очевидно, что мы можем продолжать таким же образом, получая разложение функции $R(\zeta, \varkappa)\, u$ по степеням $\varkappa$ при все более сильных предположениях. Возникающий таким образом ряд есть в точности *второй ряд Неймана* для $R(\zeta, \varkappa)$ (см. (II.1.13)). Мы знаем, что второй ряд Неймана сходится, если оператор $T^{(1)}$ $T$-ограничен (см. теорему IV.3.17). Здесь такая относительная ограниченность не предполагалась, но приведенные теоремы показывают, что второй ряд Неймана имеет смысл как *асимптотическое разложение* до определенного порядка по $\varkappa$, если нужное число начальных членов имеет смысл.

Формулы (2.5) и (2.6) приводят к соответствующему разложению скалярной функции $(R(\zeta, \varkappa)u, v)$, где $u \in \mathrm{X}$ удовлетворяет сформулированным выше условиям, а $v \in \mathrm{X}^*$. Так как $(R(\zeta, \varkappa)u, v) = (u, R(\zeta, \varkappa)^* v)$, то аналогичное разложение справедливо, если $v$, $T^*$ и $T^{(1)*}$ удовлетворяют условиям, аналогичным условиям на $u$, $T$ и $T^{(1)}$. Для простоты мы сформулируем эти результаты в случае, когда $\mathrm{X}$ — гильбертово пространство, а $T$ и $T(\varkappa)$ — самосопряженные операторы. Замечательным фактом здесь является то, что если оба вектора $u$ и $v$ удовлетворяют условию теоремы 2.1, то может быть получено разложение функции $(R(\zeta, \varkappa)u, v)$ до порядка $\varkappa^2$, а именно справедлива

**Теорема 2.3.** *Пусть* $\mathrm{X} = \mathrm{H}$ — *гильбертово пространство,* $T(\varkappa)$ *и* $T$ — *самосопряженные операторы,* $T^{(1)}$ — *симметричный оператор. Если* $\zeta$ *и* $\bar{\zeta}$ *принадлежат* $\Delta_s$ *и* $R(\zeta)u \in \mathrm{D}(T^{(1)})$, $R(\bar{\zeta})v = R(\zeta)^* v \in \mathrm{D}(T^{(1)})$, *то*

$$(R(\zeta, \varkappa)u, v) = (R(\zeta)u, v) - \varkappa(R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)u, v) + \\ + \varkappa^2(R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)u, T^{(1)}R(\zeta)v) + o(\varkappa^2). \quad (2.8)$$

Доказательство. Ввиду (2.6) и равенства $R(\zeta, \varkappa)^* = R(\bar{\zeta}, \varkappa)$ имеем

$$(R(\zeta, \varkappa)u, v) - (R(\zeta)u, v) = \\ = -\varkappa(T^{(1)}R(\zeta)u, R(\bar{\zeta}, \varkappa)v). \quad (2.9)$$

Формула (2.8) получается из (2.9) с помощью формулы (2.5), в которой $\zeta$ и $u$ следует заменить на $\bar{\zeta}$ и $v$ соответственно.

Таким же образом мы можем получить разложение функции $(R(\zeta, \varkappa)u, v)$ до порядка $\varkappa^4$, если существуют векторы $T^{(1)}R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)u$ и $T^{(1)}(R(\bar{\zeta})T^{(1)}R(\bar{\zeta})v$.

**Замечание 2.4.** Формулы (2.5) и (2.7) дают асимптотическое разложение решения уравнения $(T(\varkappa) - \zeta)v = u$, которое, например, может представлять собой некоторую краевую задачу в случае, если $T(\varkappa)$ — дифференциальный оператор. Однако эти формулы имеют ограниченное применение, так как они справедливы лишь при довольно сильных предположениях. В § 3, 4 будет развита более удовлетворительная теория асимптотических разложений для $R\ (\zeta,\ \varkappa)$, основанная на теории полуторалинейных форм в гильбертовом пространстве.

**Пример 2.5.** Рассмотрим оператор $T\ (\varkappa)$ из примера 1.17. Если мы представим его в виде $T\ (\varkappa) = T + |\ \varkappa\ |\ e^{i\theta} T^{(1)}$ и заменим $|\ \varkappa\ |$, $e^{i\theta} T^{(1)}$ на $\varkappa$, $T^{(1)}$ соответственно, то $T\ (\varkappa)$ будет удовлетворять основным условиям i) — iv) (относительно условия iv) см. пример 1.17). Применимость теорем 2.1, 2.2 зависит от свойств векторов $u$ и $f$. Так как $T = -(\ ,\ f)\ f$, $\|\ f\ \| = 1$, то легко вычислить $R\ (\zeta)\ u$; имеем

$$R\,(\zeta)\,u = -\frac{1}{\zeta}\,u + \frac{(u,\ f)}{\zeta\,(\zeta+1)}\,f.$$

Если $u,\ f \in \mathbf{D}\ (T^{(1)})$, то $R\ (\zeta)\ u \in \mathbf{D}\ (T^{(1)})$ и применима теорема 2.1. В этом случае $R\ (\zeta)\ T^{(1)}\ R\ (\zeta)\,u$ является линейной комбинацией векторов $T^{(1)}\,u$, $T^{(1)}f$ и $f$. Если существуют $[T^{(1)}]^2\,u$ и $[T^{(1)}]^2\,f$, то $R\ (\zeta)\ T^{(1)}\ R\ (\zeta)\ u \in \mathbf{D}\ (T^{(1)})$ и применима теорема 2.2 и т. д. Можно сформулировать аналогичные результаты, относящиеся к примеру 1.18.

## 2. Замечания об асимптотических разложениях

Вообще говоря, асимптотическое разложение резольвенты, определяемое формулами (2.5) или (2.7), справедливо лишь при специальных ограничениях на $u$, сформулированных в этих теоремах. Более того, это разложение справедливо лишь до определенного порядка по $\varkappa$, зависящего от $u$. Таким образом, это есть разложение более общего вида, чем те, которые обычно называются асимптотическими разложениями, в которых требуется, чтобы формула давала разложение, справедливое до любого порядка по параметру.

Это замечание особенно важно в связи с тем, что в теории сингулярных возмущений обыкновенных дифференциальных операторов разложение для $R\ (\zeta,\ \varkappa)$ обычно дается до *любого* порядка по $\varkappa$ с тем ограничением, что один или оба конца рассматриваемого интервала должны быть исключены. Рассмотрим, например, оператор $T\ (\varkappa)$ из примера 1.19; положим $\zeta = 0$, $u\ (x) = 1$. Простые вычисления дают

$$R\,(0,\ \varkappa)\,u\,(x) = \frac{x}{2\alpha} - \frac{e^{-\frac{2\alpha}{\varkappa}(1-x)} - e^{-\frac{2\alpha}{\varkappa}}}{2\alpha\,\bigl(1 - e^{-\frac{2\alpha}{\varkappa}}\bigr)}, \tag{2.10}$$

где первый член $x/2\alpha$ есть нулевое приближение $R\ (0)\ u\ (x)$. Дополнительный член в правой части формулы (2.10) имеет нулевую асимптотику (до любого порядка по $\varkappa$), если $0 \leqslant x < 1$, и эта асимптотика равномерна при $0 \leqslant x \leqslant b' < 1$.

Таким образом, можно предположить, что в этом примере не нужно никаких ограничений, для того чтобы существовало асимптотическое разложение функции $R\ (\zeta,\ \varkappa)$, и что разложение справедливо до любого порядка, по крайней мере если $u\ (x)$ — гладкая функция. Но это неверно. Хотя остаточный член в правой части формулы (2.10) убывает быстрее любой степени параметра $\varkappa$ при фиксированном $x < 1$, он не обязательно мал на всем интервале (0, 1). Действительно, простые вычисления показывают, что $\mathrm{L}^2$-норма этого остаточного члена равна

$$\left(\frac{\varkappa}{16\alpha^3}\right)^{1/2} + \ldots, \tag{2.11}$$

где опущенные члены убывают быстрее любой степени $\varkappa$. Поэтому мы должны сделать вывод, что *в этом примере разложение функции* $R(0, \varkappa)u$ *как элемента из* $\mathbf{L}^2$ *справедливо лишь до нулевого порядка по* $\varkappa$, причем остаток имеет порядок $\varkappa^{1/2}$.

Более того, следует заметить, что положение нельзя улучшить, рассматривая разложение (2.10), скажем, по полуцелым степеням $\varkappa$. Достаточно беглого взгляда на формулу (2.10), чтобы исключить такую возможность. В этом смысле невозможность асимптотического разложения функции $R(0, \varkappa)u$ существенна, если мы рассматриваем ее как вектор из $\mathbf{L}^2$, а не ограничиваемся рассмотрением фиксированных значений $x$. Аналогичные замечания применимы ко всем асимптотическим разложениям, которые встречаются в сингулярной теории возмущений дифференциальных операторов [1]).

## 3. Асимптотическое разложение изолированных собственных значений и собственных векторов

Рассмотрим теперь скорость сходимости собственных значений и собственных векторов оператора $T(\varkappa)$, соответствующих собственному значению $\lambda$ невозмущенного оператора $T$, считая, что выполнены основные предположения п. 1, а также дополнительное предположение о том, что $\lambda$ есть *устойчивое* собственное значение. Предположим, что $\lambda$ имеет кратность $m < \infty$. Мы будем употреблять обозначения $\Delta_b$, $\Delta_s$, $\delta$, $r$, $\Gamma$ и т. д. из п. 1.4. Заметим, в частности, что область сильной сходимости $\Delta_s$ содержит множество точек $\zeta$ таких, что $0 < |\zeta - \lambda| < \delta$.

Напомним также, что часть спектра $\Sigma(T(\varkappa))$, лежащая внутри окружности $\Gamma$: $|\zeta - \lambda| = r$, состоит из изолированных собственных значений тотальной кратности $m$, которые сходятся к $\lambda$ при $\varkappa \to 0$. Обозначим эти собственные значения (*с учетом кратности*) через $\mu_1(\varkappa), \ldots, \mu_m(\varkappa)$:

$$\mu_j(\varkappa) \to \lambda, \quad \varkappa \to 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2.12}$$

Тотальный проектор

$$P(\varkappa) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} R(\zeta, \varkappa)\, d\zeta \tag{2.13}$$

стремится по норме к собственному проектору $P$, соответствующему $\lambda$ (см. (1.31)):

$$\| P(\varkappa) - P \| \to 0, \quad \dim P(\varkappa) = \dim P = m. \tag{2.14}$$

---

[1]) Второй член в правой части формулы (2.10), имеющий нулевую асимптотику при каждом $x < 1$, называется *вкладом пограничного слоя*. Вообще говоря, асимптотическое разложение функции $R(0, \varkappa)u(x)$ должно дополняться вкладом пограничного слоя, который имеет нулевую асимптотику в фиксированной внутренней точке $x$, но не обязан быть малым глобально. Подробную теорию пограничного слоя и вообще сингулярных возмущений см., например, в работах Харриса [1, 2], Хью [1—7], Кумано-Го [1], Ладыженской [1], Левинсона [1], Моргенштерна [1], Мозера [2], Нагумо [1], Вишика и Люстерника [2].

Если $m = 1$, то $P(\varkappa)$ является собственным проектором на одномерное собственное подпространство оператора $T(\varkappa)$, соответствующее собственному значению $\lambda(\varkappa) = \mu_1(\varkappa)$, которое сходится к $\lambda$. Из (2.14) следует, что собственный вектор $\varphi(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$, соответствующий $\lambda(\varkappa)$, может быть выбран таким образом, что

$$\varphi(\varkappa) \to \varphi, \quad \varkappa \to 0, \tag{2.15}$$

где $\varphi$ — собственный вектор оператора $T$, соответствующий $\lambda$:

$$T\varphi = \lambda\varphi, \quad T(\varkappa)\,\varphi(\varkappa) = \lambda(\varkappa)\,\varphi(\varkappa). \tag{2.16}$$

Для доказательства достаточно положить $\varphi(\varkappa) = P(\varkappa)\,\varphi$.

В общем случае невозможно получить более точные результаты, касающиеся скорости сходимости в (2.12), (2.14) или (2.15). Такое уточнение возможно, однако, если сделать дальнейшие предположения относительно собственного пространства $P\mathrm{X}$ оператора $T$. Именно справедлива следующая [1]

Теорема 2.6. *Пусть $\lambda$ — изолированное полупростое собственное значение оператора $T$, а $P$ с $\dim P = m < \infty$ — соответствующий собственный проектор. Предположим, что $\lambda$ устойчиво и что $P\mathrm{X} \subset \mathrm{D}(T^{(1)})$. Тогда собственные значения $\mu_j(\varkappa)$ допускают асимптотические разложения* [2]

$$\mu_j(\varkappa) = \lambda + \varkappa\mu^{(1)} + o(\varkappa), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{2.17}$$

*где $\mu^{(1)}$ — собственные значения (с учетом кратности) оператора $PT^{(1)}P$, рассматриваемого в $m$-мерном пространстве $P\mathrm{X}$. Тотальный проектор $P(\varkappa)$, соответствующий этим собственным значениям, обладает тем свойством, что*

$$P(\varkappa)\,P = P - \varkappa S T^{(1)} P + o(\varkappa)_{\mathrm{u}}, \tag{2.18}$$

*где $S$ — приведенная резольвента оператора $T$ в точке $\lambda$ (см. п. III.6.5), а через $o(\varkappa)_{\mathrm{u}}$ обозначен такой оператор, что $\varkappa^{-1}\,\|o(\varkappa)_{\mathrm{u}}\| \to 0$ при $\varkappa \to 0$. Если, в частности, $m = 1$, то собственный вектор $\varphi(\varkappa)$, соответствующий собственному значению $\lambda(\varkappa) = \mu_1(\varkappa)$ оператора $T(\varkappa)$, можно выбрать таким образом, что*

$$\varphi(\varkappa) = \varphi - \varkappa S T^{(1)} \varphi + o(\varkappa), \tag{2.19}$$

*где $\varphi$ — собственный вектор оператора $T$, соответствующий $\lambda$.*

---

[1] Результаты этого и следующих пунктов были получены в работах Т. Като [1, 3] для самосопряженных операторов с помощью спектрального представления. Обобщение на случай операторов в банаховом пространстве, которое здесь дается, требует совершенно иного доказательства.

[2] Если $T$, $T(\varkappa)$ — самосопряженные операторы (в гильбертовом пространстве), то разложения для $\mu_j(\varkappa)$ справедливы до порядка $\varkappa^2$; см. теорему 2.9 и подстрочное примечание к ней.

Доказательство. I. Начнем с замечания, что $R(\zeta) Pv = (\lambda-\zeta)^{-1} Pv \in \mathrm{D}(T^{(1)})$ при любом $v \in \mathrm{X}$, так что из (2.6) следует, что

$$R(\zeta, \varkappa) Pv = (\lambda-\zeta)^{-1} Pv - \varkappa(\lambda-\zeta)^{-1} R(\zeta, \varkappa) T^{(1)}Pv = \\ = (\lambda-\zeta)^{-1} Pv - \varkappa(\lambda-\zeta)^{-1} R(\zeta) T^{(1)}Pv + o(\varkappa),$$

где $o(\varkappa)$ мало́ равномерно по $\zeta$ при $\zeta \in \Gamma$. Так как $\dim P\mathrm{X} = m < \infty$, то [1]

$$R(\zeta, \varkappa) P = (\lambda-\zeta)^{-1}P - \varkappa(\lambda-\zeta)^{-1} R(\zeta, \varkappa) T^{(1)}P = \\ = (\lambda-\zeta)^{-1} P - \varkappa(\lambda-\zeta)^{-1} R(\zeta) T^{(1)}P + o(\varkappa)_\mathrm{u}, \quad (2.20)$$

где оценка $o(\varkappa)_\mathrm{u}$ равномерна по $\zeta \in \Gamma$. Подстановка (2.20) в (2.13) и умножение последнего равенства на $P$ справа немедленно приводят к (2.18); напомним, что справедливо разложение $R(\zeta) = (\lambda-\zeta)^{-1} P + S + (\zeta-\lambda) S^2 + \ldots$ (см. (III.6.32), где $D = 0$ по предположению) и что

$$T^{(1)}P \in \mathscr{B}(\mathrm{X}), \quad (2.21)$$

так как по предположению $P\mathrm{X} \subset \mathrm{D}(T^{(1)})$. Соотношение (2.19) следует из (2.18), если положить $\varphi(\varkappa) = P(\varkappa)\varphi = P(\varkappa)P\varphi$, где $\varphi \in \mathrm{M} = P\mathrm{X}$.

II. Для получения асимптотического разложения функций $\mu_j(\varkappa)$ введем оператор (см. только что доказанную формулу (2.18))

$$V(\varkappa) = 1 - P + P(\varkappa) P = 1 - \varkappa S T^{(1)} P + o(\varkappa)_\mathrm{u}. \quad (2.22)$$

Так как $V(\varkappa) P = P(\varkappa) P$ и $V(\varkappa)(1-P) = 1-P$, то $V(\varkappa)$ отображает собственное подпространство $\mathrm{M} = P\mathrm{X}$ *на* $\mathrm{M}(\varkappa) = P(\varkappa)\mathrm{X}$ и оставляет неподвижным каждый элемент из дополнительного подпространства $(1-P)\mathrm{X}$. Отображение $\mathrm{M} \to V(\varkappa)\mathrm{M}$ является отображением *на*, поскольку величина $\| P(\varkappa) - P \|$ мала в силу (2.14) (см. п. I.4.6). Следовательно, обратный оператор

$$V(\varkappa)^{-1} = 1 + \varkappa S T^{(1)} P + o(\varkappa)_\mathrm{u} \quad (2.23)$$

отображает $\mathrm{M}(\varkappa)$ на $\mathrm{M}$, оставляя неподвижным каждый элемент из $(1-P)\mathrm{X}$ (ср. также с задачей I.4.12).

Рассмотрим теперь $R_1(\zeta, \varkappa) = V(\varkappa)^{-1} R(\zeta, \varkappa) V(\varkappa) P$. Согласно сделанному выше замечанию, областью значений оператора $V(\varkappa) P$ является $\mathrm{M}(\varkappa)$; $R(\zeta, \varkappa)$ переводит $\mathrm{M}(\varkappa)$ в себя, поскольку $P(\varkappa)$ коммутирует с $R(\zeta, \varkappa)$, а $V(\varkappa)^{-1}$ отображает $\mathrm{M}(\varkappa)$ на $\mathrm{M}$; значит, область определения оператора $R_1(\zeta, \varkappa)$

---

[1] Заметим, что из $A_nB \underset{s}{\to} 0$ следует $\| A_nB \| \to 0$, если $B$ имеет конечный ранг.

лежит в M. Таким образом,

$$R_1(\zeta, \varkappa) = PR_1(\zeta, \varkappa) = PV^{-1}(\varkappa)\, R(\zeta, \varkappa)\, V(\varkappa)\, P =$$
$$= (P + o(\varkappa)_u)\, R(\zeta, \varkappa)\, (P - \varkappa S T^{(1)} P + o(\varkappa)_u)$$

(заметим, что $PS = 0$). Подставляя сюда $R(\zeta, \varkappa)\, P$ из (2.20) и учитывая, что $R(\zeta, \varkappa)\, ST^{(1)}P \to R(\zeta)\, ST^{(1)}P$ по норме, $PR(\zeta) = (\lambda - \zeta)^{-1}$ и $PS = 0$, получаем

$$V(\varkappa)^{-1} R(\zeta, \varkappa)\, V(\varkappa)\, P =$$
$$= (\lambda - \zeta)^{-1} P - \varkappa (\lambda - \zeta)^{-2} PT^{(1)}P + o(\varkappa)_u, \qquad (2.24)$$

где оценка $o(\varkappa)_u$ равномерна по $\zeta \in \Gamma$.

Умножая (2.24) на $-\zeta/2\pi i$, интегрируя по $\Gamma$ и учитывая, что

$$T(\varkappa)\, P(\varkappa) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \zeta R(\zeta, \varkappa)\, d\zeta \qquad (2.25)$$

(см. (III.6.24)), находим [1])

$$V(\varkappa)^{-1}\, T(\varkappa)\, P(\varkappa)\, V(\varkappa)\, P = \lambda P + \varkappa PT^{(1)}P + o(\varkappa)_u. \qquad (2.26)$$

Далее, функции $\mu_j(\varkappa)$ являются собственными значениями (с учетом кратности) оператора $T(\varkappa)$, рассматриваемого в $m$-мерном подпространстве $M(\varkappa)$; следовательно, они равны собственным значениям оператора $T(\varkappa)\, P(\varkappa)$ в $M(\varkappa)$, а значит, и оператора $V(\varkappa)^{-1}\, T(\varkappa)\, P(\varkappa)\, V(\varkappa) = T_0(\varkappa)$, подобного оператору $T(\varkappa)\, P(\varkappa)$. Согласно сделанному выше замечанию, $V(\varkappa)^{-1} M(\varkappa) = M$, поэтому рассматриваемые собственные значения равны в свою очередь собственным значениям оператора $T_0(\varkappa)\, P$, т. е. оператора (2.26), рассматриваемого в M. В силу (2.26) и теоремы II.5.4, касающейся дифференцируемости собственных значений в конечномерном пространстве, это замечание немедленно приводит к разложению (2.17).

**Замечание 2.7.** Формула (2.18) показывает, что $P(\varkappa)\, P$ допускает асимптотическое разложение до первого порядка по $\varkappa$. Сам оператор $P(\varkappa)$, оказывается, не обладает таким разложением, так как его *формальное* разложение имеет вид $P(\varkappa) = P - \varkappa (ST^{(1)}P + PT^{(1)}S) + \ldots$ (см. (II.2.14)), где член $PT^{(1)}S$ не обязан иметь смысл при сделанных предположениях. (Это одна из причин того, что доказательство теоремы 2.6 довольно сложно.) Таким образом, асимптотика (2.19) собственного вектора (но не собственного проектора) является наилучшей возможной даже при $m = 1$.

---

[1]) В силу неограниченности оператора $T(\varkappa)$ было бы трудно вывести формулу (2.26), просто разлагая левую часть в формальный ряд по степеням $\varkappa$.

В условиях теоремы 2.6, вообще говоря, невозможно сделать какое-либо утверждение о поведении собственных векторов и собственных подпространств оператора $T(\varkappa)$ за исключением случая $m = 1$. Если, однако, предположить, что собственные значения $\mu_j^{(1)}$ различны, то справедлива

**Теорема 2.8.** *Пусть в предположениях теоремы* 2.6 $m$ *собственных значений* $\mu_j^{(1)}$ *оператора* $PT^{(1)}P$ *различны, и пусть* $P_j^{(1)}$ *— соответствующие собственные проекторы. Тогда собственные значения* $\mu_j(\varkappa)$ *также различны при достаточно малых* $|\varkappa|$. *Пусть* $P_j^{(1)}(\varkappa)$ *— одномерный собственный проектор оператора* $T(\varkappa)$, *соответствующий* $\mu_j(\varkappa)$. *Тогда*

$$P_j^{(1)}(\varkappa) \to P_j^{(1)}, \quad \varkappa \to 0. \tag{2.27}$$

Доказательство. Проектор $P_j^{(1)}(\varkappa)$ является собственным проектором оператора $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa) = \varkappa^{-1}(T(\varkappa) - \lambda) P(\varkappa)$, соответствующим собственному значению $\varkappa^{-1}(\mu_j(\varkappa) - \lambda) = \mu_j^{(1)} + o(1)$. Но в силу (2.26) имеем

$$V(\varkappa)^{-1}\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)\, V(\varkappa)\, P = PT^{(1)}P + o(1)_{\mathrm{u}}, \tag{2.28}$$

так как $V(\varkappa)^{-1} P(\varkappa)\, V(\varkappa)\, P = V(\varkappa)^{-1}\, V(\varkappa)\, P = P$. Оператор $PT^{(1)}P$ имеет $m$ различных собственных значений $\mu_j^{(1)}$, а значит, и оператор (2.28) обладает этим же свойством. Поэтому мы можем выбрать $m$ его собственных векторов $\psi_j(\varkappa) \in \mathbf{M}$ таким образом, что $\psi_j(\varkappa) \to \varphi_j$, где $\varphi_j \in \mathbf{M}$ — собственные векторы оператора $PT^{(1)}P$ (непрерывность собственных значений и собственных проекторов; см. п. II.5.1). Далее, $\varphi_j(\varkappa) = V(\varkappa)\, \psi_j(\varkappa)$ есть собственный вектор оператора $\tilde{T}^{(1)}(\varkappa)$, и $\varphi_j(\varkappa) \to \varphi_j$, ибо $V(\varkappa) \to 1$.

Векторы $\varphi_j(\varkappa)$ образуют базис в $\mathbf{M}(\varkappa)$, так что для любого $w \in \mathbf{X}$ имеем

$$P(\varkappa)\, w = \xi_1(\varkappa)\, \varphi_1(\varkappa) + \ldots + \xi_m(\varkappa)\, \varphi_m(\varkappa).$$

Так как $\varphi_j(\varkappa) \to \varphi_j$ и векторы $\varphi_j$ образуют базис в $\mathbf{M}$ и так как $P(\varkappa)\, w \to Pw$, то легко видеть, что $\lim\limits_{\varkappa \to 0} \xi_j(\varkappa) = \xi_j$ существует и $Pw = \xi_1\varphi_1 + \ldots + \xi_m\varphi_m$. С другой стороны, $\xi_j(\varkappa)\, \varphi_j(\varkappa) = P_j^{(1)}(\varkappa)\, w$ и $\xi_j\varphi_1 = P_j^{(1)}w$. Следовательно, $P_j^{(1)}(\varkappa)\, w \to P^{(1)}w$, т. е. $P^{(1)}(\varkappa)$ сильно сходится к $P_j^{(1)}$. Поскольку $\dim P_j^{(1)}(\varkappa) = \dim P_j^{(1)} = 1$, то, согласно лемме 1.21, эта сходимость является сходимостью по норме. Теорема 2.8 доказана.

## 4. Асимптотические разложения до более высокого порядка

Теперь мы покажем, что можно получить более точную аппроксимацию, если в дополнение к предположениям теоремы 2.6 потребовать, чтобы оператор $PT^{(1)}$ был *ограниченным*. Так как образ этого оператора содержится в подпространстве $\mathbf{M} = P\mathbf{X}$, то его можно продолжить до оператора из $\mathscr{B}(\mathbf{X})$ с образом в $\mathbf{M}$. Если оператор $T^{(1)}$ не является плотно определенным, то такое продолжение неединственно; мы выберем какое-нибудь одно и обозначим его через $[PT^{(1)}]$; заметим, что $P[PT^{(1)}] = [PT^{(1)}]$. Если $T^{(1)}$ плотно определен, то $PT^{(1)}$ ограничен тогда и только тогда, когда $T^{(1)*}P^* \in \mathscr{B}(\mathbf{X}^*)$; в этом случае продолжение $[PT^{(1)}]$ единственно.

Для того чтобы сформулировать теорему, которая дает более точную аппроксимацию, удобно несколько изменить обозначения теоремы 2.6 и ввести еще некоторые новые. Пусть $\lambda_j$, $j = 1, \ldots, s$,— *различные* собственные значения оператора $PT^{(1)}P$ (т. е. различные числа из $\{\mu_j\}$) в подпространстве $P\mathbf{X}$, и пусть $P_j^{(1)}$ — соответствующие собственные проекторы. Тогда справедлива

Теорема 2.9 [1]. *Предположим, что множество* $\mathbf{D}$ *является ядром оператора* $T(\varkappa)$ *при* $\varkappa > 0$. *В условиях теоремы* 2.6 *предположим, что оператор* $PT^{(1)}$ *ограничен, и определим* $[PT^{(1)}] \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ *так же, как и выше. Пусть все собственные значения* $\lambda_j^{(1)}$ *оператора* $PT^{(1)}P$ *являются полупростыми* [2]. *Тогда существует такая перенумерация* $\mu_{jk}(\varkappa)$, $j = 1, \ldots, s$, $k = 1, \ldots, m_j^{(1)}$, *собственных значений* $\mu_j(\varkappa)$, *что справедливо асимптотическое разложение*

$$\mu_{jk}(\varkappa) = \lambda + \varkappa\lambda_j^{(1)} + \varkappa^2\mu_{jk}^{(2)} + o(\varkappa^2), \tag{2.29}$$

*где* $\mu_{jk}^{(2)}$, $k = 1, \ldots, m_j^{(1)}$,— *собственные значения (с учетом кратности) оператора* $P_j^{(1)}[PT^{(1)}]\,ST^{(1)}P_j^{(1)}$. *Тотальный проектор* $P_j^{(1)}(\varkappa)$, *соответствующий* $m_j^{(1)}$ *собственным значениям* $\mu_{jk}(\varkappa)$ *при* $k = 1, \ldots, m_j^{(1)}$, *имеет асимптотическое разложение*

$$P_j^{(1)}(\varkappa) = P_j^{(1)} + \varkappa P_j^{(11)} + o(\varkappa)_{\mathrm{s}}, \tag{2.30}$$

*где через* $o(\varkappa)_{\mathrm{s}}$ *обозначен такой оператор, что* $\varkappa^{-1}o(\varkappa)_{\mathrm{s}} \xrightarrow[\mathrm{s}]{} 0$ *и*

$$\begin{gathered} P_j^{(11)} = -P_j^{(1)}[PT^{(1)}]\,S + P_j^{(1)}[PT^{(1)}]\,ST^{(1)}S_j^{(1)} - \\ - ST^{(1)}P_j^{(1)} + S_j^{(1)}[PT^{(1)}]\,ST^{(1)}P_j^{(1)}, \quad (2.31) \\ S_j^{(1)} = -\sum_{i \neq j}(\lambda_j^{(1)} - \lambda_i^{(1)})\,P_i^{(1)}. \end{gathered}$$

---

[1] Эта теорема дает разложение собственных значений до порядка $\varkappa^2$. Без сомнения, можно обобщить ее и получить разложение до порядка $\varkappa^n$ при дополнительных предположениях, но пока это сделано лишь для того частного случая, когда $T$ и $T(\varkappa)$ самосопряжены и выполнены некоторые предположения относительно расщепления собственных значений (см. Т. Като [1, 3]).

[2] Все эти условия выполняются в предположениях теоремы 2.6, если $\mathbf{X}$ — гильбертово пространство, $T$ и $T(\varkappa)$ — самосопряженные операторы, а $T^{(1)}$ — симметричный оператор, так как $PT^{(1)} \subset (T^{(1)}P)^*$. Следует заметить, что в этом случае не нужно предполагать, что $\mathbf{D}$ есть ядро оператора $T(\varkappa)$. Это предположение используется только при доказательстве тождества (2.33), но последнее можно получить, если в (2.20) заменить $\zeta$ на $\bar{\zeta}$ и перейти к сопряженному тождеству.

*Тотальный проектор* $P(\varkappa)$, *соответствующий* $m$ *собственным значениям* $\mu_{jk}(\varkappa)$, *имеет асимптотическое разложение*

$$P(\varkappa) = P - \varkappa\,(ST^{(1)}P + [PT^{(1)}]\,S) + o(\varkappa)_{\mathrm{s}}. \tag{2.32}$$

**Замечание 2.10.** Формулы (2.29) — (2.32) по внешнему виду совпадают с некоторыми формулами из теоремы II.5.11, но по существу сложнее, чем последние, так как здесь мы имеем дело с неограниченными операторами. Следует заметить тем не менее, что операторы $T^{(1)}P$, $T^{(1)}P^{(1)}_{j} = T^{(1)}PP^{(1)}_{j}$, $T^{(1)}S^{(1)}_{j} = T^{(1)}PS^{(1)}_{j}$ принадлежат $\mathscr{B}(\mathbf{X})$.

Доказательство. Доказательство этой теоремы довольно сложно. Мы проведем его в несколько этапов.

I. Сначала докажем тождество

$$PR(\zeta, \varkappa) = (\lambda - \zeta)^{-1}P - \varkappa\,(\lambda - \zeta)^{-1}[PT^{(1)}]\,R(\zeta, \varkappa), \tag{2.33}$$

которое в некотором смысле двойственно тождеству (2.20). Обозначим правую часть через $A$; тогда

$$\begin{aligned} A\,(T(\varkappa) - \zeta)\,u &= (\lambda - \zeta)^{-1}P\,(T - \zeta - \varkappa T^{(1)})\,u - \\ &\qquad - \varkappa\,(\lambda - \zeta)^{-1}[PT^{(1)}]\,u = \\ &= Pu + \varkappa\,(\lambda - \zeta)^{-1}PT^{(1)}u - \varkappa\,(\lambda - \zeta)^{-1}PT^{(1)}u = Pu \end{aligned} \tag{2.34}$$

для любого $u \in \mathbf{D} = \mathbf{D}(T) \cap \mathbf{D}(T^{(1)})$ (заметим, что $PT \subset TP = \lambda P$). Так как по предположению $\mathbf{D}$ есть ядро оператора $T(\varkappa)$, то равенство $A\,(T(\varkappa) - \zeta)\,u = Pu$ можно распространить на все $u \in \mathbf{D}(T(\varkappa))$. Это показывает, что $A = PR(\zeta, \varkappa)$. Тождество (2.33) доказано.

Так как $R(\zeta, \varkappa) \xrightarrow[\mathrm{s}]{} R(\zeta)$ при $\varkappa \to 0$, то из (2.33) следует, что[1]

$$\begin{aligned} PR(\zeta, \varkappa) &= (\lambda - \zeta)^{-1}P - \\ &\qquad - \varkappa\,(\lambda - \zeta)^{-1}[PT^{(1)}]\,R(\zeta) + o(\varkappa)_{\mathrm{s}}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

где оценка $o(\varkappa)_{\mathrm{s}}$ равномерна при $\zeta \in \Gamma$, т. е. $\varkappa^{-1}o(\varkappa)_{\mathrm{s}}\,u \to 0$ равномерно по $\zeta$ при каждом $u$.

Умножим теперь (2.33) справа на $P$ и воспользуемся выражением (2.20) для произведения $R(\zeta, \varkappa)\,P$, которое возникает в правой части; получим

$$\begin{aligned} PR(\zeta, \varkappa)\,P &= (\lambda - \zeta)^{-1}P - \varkappa\,(\lambda - \zeta)^{-2}PT^{(1)}P + \\ &\qquad + \varkappa^2(\lambda - \zeta)^{-2}[PT^{(1)}]\,R(\zeta)\,T^{(1)}P + o(\varkappa^2)_{\mathrm{u}} \end{aligned} \tag{2.36}$$

(заметим, что $[PT^{(1)}]\,P = PT^{(1)}P$, так как $P\mathbf{X} \subset \mathbf{D}(T^{(1)})$).

---

[1] В (2.35) нельзя заменить $o(\varkappa)_{\mathrm{s}}$ на $o(\varkappa)_{\mathrm{u}}$. Даже если $B$ имеет конечный ранг, из $A \xrightarrow[\mathrm{s}]{} 0$ не следует $\|BA_{\mathrm{u}}\| \to 0$; ср. с подстрочным примечанием на стр. 552.

Интегрирование равенств (2.35) и (2.36) по контуру Г дает, как и выше,

$$PP(\varkappa) = P - \varkappa\,[PT^{(1)}]\,S + o(\varkappa)_s; \tag{2.37}$$

$$PP(\varkappa)\,P = P - \varkappa^2\,[PT^{(1)}]\,S^2T^{(1)}P + o(\varkappa^2)_u; \tag{2.38}$$

здесь мы использовали разложение $R(\zeta) = (\lambda - \zeta)^{-1}P + S + (\zeta - \lambda)S^2 + \ldots$.

II. Теперь мы докажем, что справедливо разложение (2.32) для тотального проектора $P(\varkappa)$. Положим $Q(\varkappa) = P(\varkappa) - P$. Используя (2.37) и аналогичное разложение (2.18) для $P(\varkappa)P$, выведенное выше, получим

$$Q(\varkappa)^2 = P(\varkappa) + P - P(\varkappa)P - PP(\varkappa) = Q(\varkappa) - \varkappa P^{(1)} + o(\varkappa)_s,$$
$$P^{(1)} = -ST^{(1)}P - [PT^{(1)}]\,S. \tag{2.39}$$

Следовательно,

$$(1 - Q(\varkappa))\,(Q(\varkappa) - \varkappa P^{(1)}) = \varkappa Q(\varkappa)\,P^{(1)} + o(\varkappa)_s = o(\varkappa)_s, \tag{2.40}$$

так как $Q(\varkappa) = o(1)_u$ в силу (2.14). Используя эту же оценку, получим

$$Q(\varkappa) - \varkappa P^{(1)} = (1 - Q(\varkappa))^{-1}\,o(\varkappa)_s = o(\varkappa)_s, \tag{2.41}$$

чем и доказано (2.32).

III. Введем теперь оператор

$$\begin{aligned} U(\varkappa) &= (1 - Q(\varkappa)^2)^{-1/2}\,[(1 - P(\varkappa))(1 - P) + P(\varkappa)\,P = \\ &= 1 - P - P(\varkappa) + 2P(\varkappa)\,P + O(\varkappa^2)_u; \end{aligned} \tag{2.42}$$

заметим, что $Q(\varkappa) = O(\varkappa)_u$; это следует из (2.41), так как $o(\varkappa)_s = O(\varkappa)_u$ в силу принципа равномерной ограниченности. Из (2.18) и (2.32) получаем

$$U(\varkappa) = 1 + \varkappa\,([PT^{(1)}]\,S - ST^{(1)}P) + o(\varkappa)_s. \tag{2.43}$$

Свойства оператора $U(\varkappa)$ были подробно изучены в п. I.4.6. Из доказанных там результатов вытекает, что

$$\begin{aligned} U(\varkappa)^{-1} &= (1 - Q(\varkappa)^2)^{-1/2}\,[(1 - P)(1 - P(\varkappa)) + PP(\varkappa)] = \\ &= 1 - P - P(\varkappa) + 2PP(\varkappa) + O(\varkappa^2)_u = \\ &= 1 + \varkappa\,(ST^{(1)}P - [PT^{(1)}]\,S) + o(\varkappa)_s, \end{aligned} \tag{2.44}$$

$$P(\varkappa) = U(\varkappa)\,PU(\varkappa)^{-1}. \tag{2.45}$$

Напомним, в частности, что $Q(\varkappa)^2$ *коммутирует с* $P$ *и* $P(\varkappa)$.

Заметим далее, что $PU(\varkappa)\,P$ можно разложить до второго порядка по $\varkappa$:

$$\begin{aligned} PU(\varkappa)\,P &= P\,(1 - Q(\varkappa)^2)^{1/2}\,P(\varkappa)\,P = \\ &= PP(\varkappa)\,P + \frac{1}{2}\,PQ(\varkappa^2)\,P + O(\varkappa^3)_u = \\ &= P - \frac{1}{2}\,\varkappa^2\,[PT^{(1)}]\,S^2T^{(1)}P + o(\varkappa^2)_u; \end{aligned} \tag{2.46}$$

здесь мы использовали (2.38) и равенство $P(P^{(1)})^2 P = [PT^{(1)}] S^2 T^{(1)} P$ (которое справедливо в силу того, что $PS = SP = 0$), а также тот факт, что $o(\varkappa)_s P = o(\varkappa)_u$ (поскольку $\dim P < \infty$). Точно так же можно показать, что

$$PU(\varkappa)^{-1} P = P - \frac{1}{2}\varkappa^2 [PT^{(1)}] S^2 T^{(1)} P + o(\varkappa^2)_u. \qquad (2.47)$$

IV. Заменим теперь оператор $V(\varkappa)$, использованный при доказательстве теоремы 2.6, оператором $U(\varkappa)$. Преимущество последнего состоит в том, что для него выполняется соотношение (2.45), которое не имеет места для $V(\varkappa)$. В связи с этим следует заметить, что оператор $U(\varkappa)$ полезен лишь при сделанных предположениях, в силу которых $[PT^{(1)}] S$ имеет смысл.

Вычислим теперь $PU(\varkappa)^{-1} R(\zeta, \varkappa) U(\varkappa) P$. Этот оператор можно представить в виде

$$PU(\varkappa)^{-1} R(\zeta, \varkappa) U(\varkappa) P = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \qquad (2.48)$$

$$\begin{aligned} A_1 &= PU(\varkappa)^{-1} PR(\zeta, \varkappa) PU(\varkappa) P, \\ A_2 &= PU(\varkappa)^{-1}(1-P) R(\zeta, \varkappa) PU(\varkappa) P, \\ A_3 &= PU(\varkappa)^{-1} PR(\zeta, \varkappa)(1-P) U(\varkappa) P, \\ A_4 &= PU(\varkappa)^{-1}(1-P) R(\zeta, \varkappa)(1-P) U(\varkappa) P. \end{aligned}$$

В $A_1$ подставим (2.36), (2.46) и (2.47), после чего получим (учитывая, что $P = P^2$)

$$\begin{aligned} A_1 = (\lambda - \zeta)^{-1} P - \varkappa(\lambda - \zeta)^{-2} PT^{(1)} P &- \\ - \varkappa^2 (\lambda - \zeta)^{-1} [PT^{(1)}] S^2 T^{(1)} P &+ \\ + \varkappa^2 (\lambda - \zeta)^{-2} [PT^{(1)}] R(\zeta) T^{(1)} P &+ o(\varkappa^2)_u. \end{aligned}$$

Что касается $A_2$, то заметим, что (см. (2.44) и (2.20))

$$PU(\varkappa)^{-1}(1-P) = -\varkappa [PT^{(1)}] S + o(\varkappa)_s, \qquad (2.49)$$

$$(1-P) R(\zeta, \varkappa) P = -\varkappa(\lambda - \zeta)^{-1}(1-P) R(\zeta) T^{(1)} P + o(\varkappa)_u, \qquad (2.50)$$

откуда следует (с учетом равенств $1 - P = (1-P)^2$ и $SP = 0$), что

$$A_2 = \varkappa^2 (\lambda - \zeta)^{-1} [PT^{(1)}] SR(\zeta) T^{(1)} P + o(\varkappa^2)_u,$$

где $o(\varkappa)_s\, o(\varkappa)_u = o(\varkappa^2)_u$, так как $o(\varkappa)_u$ содержит сомножитель $P$ на крайнем месте справа. Аналогично имеем

$$\begin{aligned} A_3 &= \varkappa^2 (\lambda - \zeta)^{-1} [PT^{(1)}] R(\zeta) ST^{(1)} P + o(\varkappa^2) \\ A_4 &= \varkappa^2 [PT^{(1)}] SR(\zeta) ST^{(1)} P + o(\varkappa^2) \end{aligned}$$

Суммируя все эти оценки и учитывая, что $R(\zeta)$ и $S$ коммутируют, приходим к равенству

$$\begin{aligned} PU(\varkappa)^{-1} R(\zeta, \varkappa)\, U(\varkappa)\, P = (\lambda - \zeta)^{-1} P - \varkappa (\lambda - \zeta)^{-2} PT^{(1)}P - \\ - \varkappa^2 (\lambda - \varkappa)^{-1} [PT^{(1)}]\, S^2 T^{(1)} P + \\ + \varkappa^2 (\lambda - \zeta)^{-2} [PT^{(1)}]\, R(\zeta)\, [1 + 2(\lambda - \zeta) S + (\lambda - \zeta)^2 S^2] \times \\ \times T^{(1)} P + o(\varkappa^2)_{\mathrm{u}}. \qquad (2.51) \end{aligned}$$

Умножим, наконец, (2.51) на $\zeta$ и проинтегрируем по $\Gamma$. Так как все оценки $o(\varkappa^2)_{\mathrm{u}}$ равномерны по $\zeta \in \Gamma$, мы получим, таким образом, ввиду формулы (2.25)

$$\begin{aligned} PU(\varkappa)^{-1}\, T(\varkappa)\, P(\varkappa)\, U(\varkappa)\, P = \\ = \lambda P + \varkappa PT^{(1)}P - \varkappa^2 [PT^{(1)}]\, ST^{(1)}P + o(\varkappa^2)_{\mathrm{u}}. \qquad (2.52) \end{aligned}$$

Здесь мы учли, что коэффициент при $\varkappa^2$ в (2.51) приводится к виду $[PT^{(1)}]\, [(\lambda - \zeta)^{-3} P + (\lambda - \zeta)^{-2} S]\, T^{(1)} P$.

V. Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 2.9. Как и выше, рассмотрим оператор $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa) = \varkappa^{-1} (T(\varkappa) - \lambda)\, P(\varkappa)$. Так как $P(\varkappa)$ коммутирует с $T(\varkappa)$ и $U(\varkappa)^{-1} P(\varkappa)\, U(\varkappa) = P$ согласно формуле (2.45), то по формуле (2.52) имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{T}_0^{(1)}(\varkappa) \equiv U(\varkappa)^{-1}\, \widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)\, U(\varkappa) = \\ = PT^{(1)}P - \varkappa [PT^{(1)}]\, ST^{(1)}P + o(\varkappa)_{\mathrm{u}}. \qquad (2.53) \end{aligned}$$

Этот оператор можно рассматривать как оператор в $m$-мерном пространстве $\mathsf{M} = PX$. Оператор $PT^{(1)}P$ имеет собственные значения $\lambda_j^{(1)}$, которым соответствуют собственные проекторы $P_j^{(1)}$. Применение теоремы II.5.4 к (2.53) (с заменой $T$ на $PT^{(1)}P$, $\lambda$ на $\lambda_j^{(1)}$, $P$ на $P_j^{(1)}$, $T'(0)$ на $-[PT^{(1)}]\, ST^{(1)}P$) показывает, что $\lambda_j^{(1)}$-группа собственных значений оператора $\widetilde{T}_0^{(1)}(\varkappa)$ имеет вид

$$\lambda_j^{(1)} + \varkappa \mu_{jk}^{(2)} + o(\varkappa), \quad k = 1, \ldots, m_j^{(1)}, \qquad (2.54)$$

где $\mu_{jk}^{(2)}$ те же, что в формулировке теоремы. Оператор $T^{(1)}(\varkappa)$ имеет точно такие же собственные значения, а собственные значения оператора $T(\varkappa)$ даются формулой (2.29).

Для тотального проектора, соответствующего $\lambda_j^{(1)}$-группе собственных значений оператора $\widetilde{T}_0^{(1)}(\varkappa)$, справедлива формула (II.5.9) с заменой $P$ на $P_j^{(1)}$, $T'(0)$ на $-[PT^{(1)}]\, ST^{(1)}P$ и $S$ на $S_j^{(1)}$. Это дает

$$P_j^{(1)} + \varkappa \{P_j^{(1)} [PT^{(1)}]\, ST^{(1)} S_j^{(1)} + S_j^{(1)} [PT^{(1)}]\, ST^{(1)} P_j^{(1)}\} + o(\varkappa)_{\mathrm{u}}. \qquad (2.55)$$

Соответствующий проектор $P_j^{(1)}(\varkappa)$ для $\widetilde{T}^{(1)}(\varkappa)$, который является тотальным проектором для $\lambda + \varkappa\lambda_j^{(1)}$-группы собственных значений оператора $T(\varkappa)$, получается из (2.55) с помощью умножения слева на $U(\varkappa)$ и справа на $U(\varkappa)^{-1}$. Замечая, что выражение (2.55) не изменяется при умножении на $P$ справа или слева и что

$$U(\varkappa)P = P - \varkappa ST^{(1)}P + o(\varkappa)_{\mathrm{u}}, \qquad (2.56)$$

$$PU(\varkappa)^{-1} = 1 - \varkappa\,[PT^{(1)}]\,S + o(\varkappa)_{\mathrm{s}},$$

получаем требуемый результат (2.30). Этим завершено доказательство теоремы 2.9.

**Пример 2.11.** Предположения теорем 2.6 и 2.9 просты и легки для проверки[1]). Здесь мы рассмотрим оператор $T(\varkappa)$ из примера 1.17. Представим его, как в примере 2.5, в виде $T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}$, где $\varkappa > 0$, $T^{(1)} = e^{i\theta}x$; собственное значение $-1$ оператора $T$ устойчиво, если $e^{i\theta}$ невещественно (см. пример 1.22), что мы и предположим. Так как $f$ есть собственный вектор оператора $T$, соответствующий простому собственному значению $-1$, и так как $T^{(1)}$ отличается от самосопряженного оператора $x$ только числовым множителем $e^{i\theta}$, то теорема 2.9 применима, если $f \in \mathrm{D}(T^{(1)})$, т. е. если $xf(x) \in \mathrm{L}^2$. (Конечно, это можно получить и непосредственно из (1.17).) Аналогичные результаты можно сформулировать для оператора $T(\varkappa)$ из примера 1.18; теорема 2.9 применима к собственному значению $-1$ оператора $T$, если $f \in \mathrm{D}(T^{(1)})$.

## § 3. Обобщенная сильная сходимость секториальных операторов

### 1. Сходимость последовательности ограниченных форм

Пусть $\{\mathfrak{t}_n\}$ — последовательность ограниченных всюду определенных полуторалинейных форм на гильбертовом пространстве $\mathrm{H}$. Будем говорить, что эта последовательность *сходится к форме* $\mathfrak{t}$, и писать $\mathfrak{t}_n \to \mathfrak{t}$, если форма $\mathfrak{t}$ также ограничена и определена всюду на $\mathrm{H}$ и если $\mathfrak{t}_n[u, v] \to \mathfrak{t}[u, v]$ при любых $u, v \in \mathrm{H}$. В силу принципа поляризации (VI.1.1) достаточно предположить, что $\mathfrak{t}_n[u] \to \mathfrak{t}[u]$. Пусть $T_n$, $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ — операторы, ассоциированные с $\mathfrak{t}_n$, $\mathfrak{t}$. Тогда сходимость $\mathfrak{t}_n \to \mathfrak{t}$ эквивалентна сходимости $(T_n u, v) \to (Tu, v)$ при любых $u$, $v$, т. е. сходимости $T_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} T$. В общем случае, однако, трудно извлечь из слабой сходимости $T_n \xrightarrow[\mathrm{w}]{} T$ сколько-нибудь интересные выводы о спектральных свойствах операторов $T_n$ и $T$. Поэтому мы должны сделать некоторые дополнительные предположения относительно сходимости последовательности $\{\mathfrak{t}_n\}$ для того, чтобы получить результаты, интересные с точки зрения теории возмущений.

---

[1]) Они выполняются во многих задачах, связанных с дифференциальными уравнениями, за исключением случая, когда оператор $T^{(1)}$ более высокого порядка, чем $T$, с граничными условиями, которые не удовлетворяются для элементов из $P\mathrm{H}$. Некоторые из примеров, рассматриваемых ниже (§ 4) в связи с теорией форм, можно также считать примерами на применение теорем 2.6, 2.8 и 2.9.

Основной теоремой о сходимости последовательности ограниченных форм $\{\mathfrak{t}_n\}$ является

**Теорема 3.1.** *Пусть $\{\mathfrak{t}_n\}$ — последовательность ограниченных полуторалинейных форм, определенных всюду на* $\mathbf{H}$. *Предположим, что формы $\mathfrak{t}_n$ равномерно секториальны в том смысле, что*

$$|\operatorname{Im}\mathfrak{t}_n[u]| \leqq M \operatorname{Re}\mathfrak{t}_n[u], \quad u \in \mathbf{H}, \tag{3.1}$$

*где число $M > 0$ не зависит от $n$. Если $\mathfrak{t}_n \to 0$, то последовательность операторов $T_n \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$, ассоциированных с формами $\mathfrak{t}_n$, сильно сходится к нулю. То же верно для последовательности $\{T_n^*\}$.*

Доказательство. Из (3.1) следует, что $\mathfrak{h}_n = \operatorname{Re}\mathfrak{t}_n \geqslant 0$. В силу (VI.1.15) имеем

$$|(T_n u, v)| = |\mathfrak{t}_n[u, v]| \leqslant (1+M)\mathfrak{h}_n[u]^{1/2}\,\mathfrak{h}_n[v]^{1/2}. \tag{3.2}$$

Положим $v = T_n u$ в (3.2). Поскольку последовательность $T_n$ слабо сходится и, таким образом, равномерно ограничена ($\|T_n\| \leqslant N$), то последовательность $\mathfrak{h}_n[v] = \mathfrak{h}_n[T_n u] = \operatorname{Re}(T_n^2 u, T_n u)$ ограничена числом $N^3\|u\|^2$. По предположению, $\mathfrak{h}_n[u] = \operatorname{Re}\mathfrak{t}_n[u] \to 0$, поэтому из (3.2) следует, что $\|T_n u\| \to 0$. Так как сопряженные формы $\mathfrak{t}_n^*$ удовлетворяют тем же условиям, что и $\mathfrak{t}_n$, то имеем также $T_n^* \xrightarrow[s]{} 0$.

**Следствие 3.2.** *Если последовательность ограниченных неотрицательных самосопряженных операторов слабо сходится к* **0**, *то она также и сильно сходится к* 0.

К рассматриваемому кругу вопросов относится также

**Теорема 3.3.** *Пусть $\{\mathfrak{h}_n\}$ — невозрастающая последовательность симметричных форм, определенных всюду на* $\mathbf{H}$ *и ограниченных снизу:*

$$\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2 \geqslant \ldots \geqslant -c. \tag{3.3}$$

*Тогда существует ограниченная симметричная форма $\mathfrak{h}$ такая, что $\mathfrak{h}_n \geqq \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_n \to \mathfrak{h}$. Соответствующие ограниченные самосопряженные операторы $H_n$, $H$ обладают тем свойством, что $H_n$ сильно сходится к $H$.*

Доказательство. Из (3.3) следует, что для каждого $u \in \mathbf{H}$ последовательность $\mathfrak{h}_n[u]$ не убывает и ограничена снизу числом $-c\|u\|^2$. Следовательно, существует $\lim \mathfrak{h}_n[u]$, так что, согласно принципу поляризации, для любых $u$, $v$ существует $\lim \mathfrak{h}_n[u, v] = \mathfrak{h}[u, v]$. Форма $\mathfrak{h}$ ограничена в силу принципа равномерной ограниченности. Имеем $\mathfrak{h}_n \geqslant \mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}_n \to \mathfrak{h}$; последнее утверждение теоремы вытекает из следствия 3.2.

**Замечание 3.4.** В следствии 3.2 последовательность не обязана быть монотонной, зато предполагается существование предела. Эта ситуация в некотором смысле обратна той, которая имела место в теореме 3.3. Очевидно, имеют место аналогичные теоремы, в которых знак $\geqslant$ заменен на $\leqslant$.

В следующих пунктах указанные результаты будут обобщены на случай неограниченных секториальных форм. Здесь мы приведем еще одну теорему.

**Теорема 3.5.** *Пусть выполнены условия теоремы* 3.3, *причем операторы* $H_n - H$ *компактны при всех* $n$. *Тогда*

$$\| H_n - H \| \to 0.$$

Доказательство. Положим $H_n - H = K_n$; тогда $K_n \geqslant 0$ и $K_n$ сильно сходится к 0 согласно теореме 3.3. Так как оператор $K_1$ компактен, то для любого $\varepsilon > 0$ существует разложение $\mathbf{H} = \mathbf{M} \oplus \mathbf{N}$ пространства $\mathbf{H}$ в прямую сумму ортогональных подпространств $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, инвариантных относительно $K_1$, таких, что $\dim \mathbf{M} < \infty$, $\| K_1 u \| \leqslant \varepsilon \| u \|$ при $u \in \mathbf{N}$ (см. п. V.2.3). Любой элемент $u \in \mathbf{H}$ можно представить в виде $u = u' + u''$, где $u' \in \mathbf{M}$, $u'' \in \mathbf{N}$. Поскольку $K_n \geqslant 0$, то, согласно неравенству треугольника,

$$0 \leqslant (K_n u,\ u) \leqslant 2\,(K_n u',\ u') + 2\,(K_n u'',\ u''). \tag{3.4}$$

Множество $\mathbf{M}$ конечномерно, поэтому сходимость $K_n \to 0$ локально равномерна на $\mathbf{M}$, так что существует такой номер $N$, что

$$0 \leqslant (K_n u',\ u') \leqslant \varepsilon \| u' \|^2, \quad n > N. \tag{3.5}$$

С другой стороны, в силу определения множества $\mathbf{N}$ имеем

$$0 \leqslant (K_n u'',\ u'') \leqslant (K_1 u'',\ u'') \leqslant \varepsilon \| u'' \|^2 \quad \text{при любом } n. \tag{3.6}$$

Из неравенств (3.4) — (3.6) следует, что

$$0 \leqslant (K_n u,\ u) \leqslant 2\varepsilon\,(\| u' \|^2 + \| u'' \|^2) = 2\varepsilon \| u \|^2, \quad n > N. \tag{3.7}$$

Поэтому $\| K_n \| \leqslant 2\varepsilon$, $n > N$, так что $\| K_n \| \to 0$, $n \to \infty$.

## 2. Сходимость секториальных форм «сверху»

Рассмотрим сходимость последовательности неограниченных полуторалинейных форм в $\mathbf{H}$. Следующая фундаментальная теорема является обобщением теоремы 3.1.

**Теорема 3.6** [1]. *Пусть* $\mathfrak{t}_n$, $n = 1, 2, \ldots$, *и* $\mathfrak{t}$ *— плотно определенные замкнутые секториальные формы на* $\mathbf{H}$, *обладающие следующими свойствами:*

i) $\mathbf{D}(\mathfrak{t}_n) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{t})$, $n = 1, 2, \ldots$ .

ii) *Формы* $\mathfrak{t}'_n = \mathfrak{t}_n - \mathfrak{t}$ *равномерно секториальны в том смысле, что*

$$|\operatorname{Im} \mathfrak{t}'_n[u]| \leqslant M \operatorname{Re} \mathfrak{t}'_n[u], \qquad u \in \mathbf{D}(\mathfrak{t}_n), \quad M > 0. \tag{3.8}$$

iii) *Существует ядро* $\mathbf{D}$ *формы* $\mathfrak{t}$ *такое, что* $\mathbf{D} \subset \liminf \mathbf{D}(\mathfrak{t}_n)$ (*т. е. каждый вектор* $u \in \mathbf{D}$ *принадлежит* $\mathbf{D}(\mathfrak{t}_n)$ *при достаточно больших* $n$) *и*

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{t}_n[u] = \mathfrak{t}[u], \quad u \in \mathbf{D}. \tag{3.9}$$

*Пусть* $T_n$ *и* $T$ *суть m-секториальные операторы, соответствующие формам* $\mathfrak{t}_n$, $\mathfrak{t}$ *согласно первой теореме о представлении (теорема* VI.2.1). *Тогда последовательности* $T_n$, $T_n^*$ *сильно сходятся в обобщенном смысле к* $T$ *и* $T^*$ *соответственно. Более точно, пусть* $\Delta_s$, $\Delta_s^*$ *— области сильной сходимости для* $\{T_n\}$, $\{T_n^*\}$ *соответственно. Тогда* $\Delta_s^*$ *является зеркальным отображением области* $\Delta_s$ *относительно вещественной оси, оба множества* $\Delta_s$, $\Delta_s^*$ *содержат полуплоскость* $\operatorname{Re}\zeta < \gamma$, *где* $\gamma$ *есть вершина формы* $\mathfrak{t}$, *и при* $n \to \infty$

$$\begin{gathered} R_n(\zeta) \xrightarrow[s]{} R(\zeta),\ \mathfrak{t}[R_n(\zeta)u - R(\zeta)u] \to 0,\ \ \mathfrak{t}'_n[R_n(\zeta)u] \to 0, \\ R_n(\zeta)^* \xrightarrow[s]{} R(\zeta)^*, \mathfrak{t}[R_n(\zeta)^* u - R(\zeta)^* u] \to 0, \mathfrak{t}'_n[R_n(\zeta)^* u] \to 0 \end{gathered} \tag{3.10}$$

*для* $\zeta \in \Delta_s$, $u \in \mathbf{H}$, *где* $R_n(\zeta)$, $R(\zeta)$ *— резольвенты операторов* $T_n$, $T$ *соответственно. Сходимость в* (3.10) *равномерна на каждом компактном подмножестве множества* $\Delta_s$.

Доказательство. I. Положим $\mathfrak{h}_n = \operatorname{Re}\mathfrak{t}_n$, $\mathfrak{h} = \operatorname{Re}\mathfrak{t}$, $\mathfrak{h}'_n = \operatorname{Re}\mathfrak{t}'_n$. Мы можем предположить, добавив, если необходимо, подходящий скаляр к $\mathfrak{t}_n$ и $\mathfrak{t}$, что $\mathfrak{t}$ имеет вершину $\gamma = 0$, так что

$$\mathfrak{h}_n[u] \geqslant \mathfrak{h}[u] \geqslant 0, \quad u \in \mathbf{D}(\mathfrak{t}_n) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{t}), \tag{3.11}$$

где $\mathfrak{h}_n \geqslant \mathfrak{h}$ в силу (3.8). Таким образом, полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta < 0$ принадлежит множествам $\mathrm{P}(T_n)$, $\mathrm{P}(T)$, причем (см. (V.3.38))

$$\|R_n(\zeta)\| \leqslant 1/\operatorname{Re}(-\zeta), \quad \|R(\zeta)\| \leqslant 1/\operatorname{Re}(-\zeta), \quad \operatorname{Re}\zeta < 0. \tag{3.12}$$

---

[1] Результаты этого и следующих пунктов были доказаны в работах Т. Като [3, 7, 8] для симметричных форм и соответствующих им самосопряженных операторов. О применении этих теорем см. Киллин [1], а также Бирман [3, 4], Гольдберг [1]. Аналогичные результаты для несимметричных форм впервые были получены Хью [1, 2]; в этих и в следующих его работах [3—7] содержатся приложения к дифференциальным уравнениям с частными производными.

Вспоминая определение операторов $T_n$ и $T$, мы видим, что для любых $u \in \mathbf{H}$ и $\operatorname{Re}\zeta = \xi < 0$

$$\begin{aligned}(\mathfrak{h}-\xi)[R_n(\zeta)u] &\leqslant (\mathfrak{h}_n-\xi)[R_n(\zeta)u] = \operatorname{Re}(\mathfrak{t}_n-\zeta)[R_n(\zeta)u] = \\ &= \operatorname{Re}((T_n-\zeta)R_n(\zeta)u,\ R_n(\zeta)u) = \operatorname{Re}(u,\ R_n(\zeta)u) \leqslant \\ &\leqslant \|u\|\,\|R_n(\zeta)u\| \leqslant \\ &\leqslant (-\xi)^{-1/2}\|u\|\,((\mathfrak{h}-\xi)[R_n(\zeta)u])^{1/2}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Из (3.13) следует, во-первых, что $(\mathfrak{h}-\xi)[R_n(\zeta)u] \leqslant (-\xi)^{-1} \cdot \|u\|^2$, а во-вторых (из рассмотрения второго и последнего членов), что

$$\left.\begin{matrix}(\mathfrak{h}-\xi)[R_n(\zeta)u] \\ \mathfrak{h}_n'[R_n(\zeta)u]\end{matrix}\right\} \leqslant (\mathfrak{h}_n-\xi)[R_n(\zeta)u] \leqslant (-\xi)^{-1}\|u\|^2. \tag{3.14}$$

II. Пусть $v \in \mathbf{D}$ и $u \in \mathbf{H}$. По предположению $v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t})$, $R_n(\zeta)u \in \mathbf{D}(\mathfrak{t}_n) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{t})$ и

$$\begin{aligned}(\mathfrak{t}-\zeta)[R_n(\zeta)u - R(\zeta)u,\ v] &= (\mathfrak{t}_n-\zeta)[R_n(\zeta)u,\ v] - \\ &- \mathfrak{t}_n'[R_n(\zeta)u,\ v] - (\mathfrak{t}-\zeta)[R(\zeta)u,\ v] = \\ &= -\mathfrak{t}_n'[R_n(\zeta)u,\ v], \end{aligned} \tag{3.15}$$

так как первый и третий члены в средней части взаимно уничтожаются (оба равны $(u, v)$). В силу (3.8) и (VI.1.15) имеем

$$\begin{aligned}|(\mathfrak{t}-\zeta)[R_n(\zeta)u - R(\zeta)u,\ v]| &\leqslant \\ &\leqslant (1+M)\,\mathfrak{h}_n'[R_n(\zeta)u]^{1/2}\,\mathfrak{h}_n'[v]^{1/2} \to 0; \end{aligned} \tag{3.16}$$

действительно, последовательность $\mathfrak{h}_n'[R_n(\zeta)u]$ ограничена в силу (3.14) и $\mathfrak{h}_n'[v] = \operatorname{Re}\mathfrak{t}_n'[v] \to 0$ в силу условия iii).

Пусть $\mathbf{H}_\mathfrak{h}$ — гильбертово пространство, в которое превращается $\mathbf{D}(\mathfrak{t})$ при введении скалярного произведения $(u, v)_\mathfrak{h} = \mathfrak{h}[u, v] + (u, v)$ и соответствующей нормы $\|u\|_\mathfrak{h}$ (см. п. VI.1.3). То, что $\mathbf{D}$ является ядром формы $\mathfrak{t}$, означает, что $\mathbf{D}$ плотно в $\mathbf{H}_\mathfrak{h}$ (теорема VI.1.21). С другой стороны, из (3.14) следует, что последовательность $R_n(\zeta)u$ ограничена в $\mathbf{H}_\mathfrak{h}$. В частности,

$$(\mathfrak{t}-\zeta)[R_n(\zeta)u - R(\zeta)u,\ R(\zeta)u] \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.17}$$

III. Итак,

$$\begin{aligned}(\mathfrak{t}-\zeta)[R_n(\zeta)u - R(\zeta)u] &+ \mathfrak{t}_n'[R_n(\zeta)u] = \\ &= (\mathfrak{t}_n-\zeta)[R_n(\zeta)u] + (\mathfrak{t}-\zeta)[R(\zeta)u] - \\ &\quad - (\mathfrak{t}-\zeta)[R_n(\zeta)u,\ R(\zeta)u] - (\mathfrak{t}-\zeta)[R(\zeta)u,\ R_n(\zeta)u] = \\ &= (\mathfrak{t}-\zeta)[R(\zeta)u - R_n(\zeta)u,\ R(\zeta)u] \to 0, \end{aligned} \tag{3.18}$$

поскольку первый и последний члены в средней части взаимно уничтожаются (каждый из них равен $(u,\ R_n(\zeta)u)$). Выделяя в (3.18) вещественные части и учитывая, что $\mathfrak{h}$, $-\xi$, $\mathfrak{h}_n'$ неотрицательны, получаем $R_n(\zeta)u \to R(\zeta)u$, $\mathfrak{h}[R_n(\zeta)u - R(\zeta)u] \to 0$, $\mathfrak{h}_n'[R_n(\zeta)u] \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда в силу секториальности форм $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}_n'$ следуют три первых соотношения из (3.10) для случая $\operatorname{Re}\zeta < 0$.

IV. До сих пор мы предполагали, что $\operatorname{Re}\zeta < 0$. Теперь отбросим это ограничение. Первая формула в (3.10) верна для всех $\zeta \in \Delta_s$ в силу определения множества $\Delta_s$. Для доказательства второй формулы достаточно показать, что $\mathfrak{h}[R_n(\zeta)u - R(\zeta)u] \to 0$. Используя (1.3), находим

$$\mathfrak{h}[R_n(\zeta)u - R(\zeta)u] = \mathfrak{h}[(1 + (\zeta - \zeta_0)R_n(\zeta))v_n] \leqslant$$
$$\leqslant 2\mathfrak{h}[v_n] + 2\,|\,\zeta - \zeta_0\,|^2\mathfrak{h}[R_n(\zeta)v_n\,|, \tag{3.19}$$

где $v_n = (R_n(\zeta_0) - R(\zeta_0))(1 + (\zeta - \zeta_0)R(\zeta))u$, $\zeta_0$ — любое фиксированное число такое, что $\operatorname{Re}\zeta_0 < 0$. Как было доказано выше, $\mathfrak{h}[v_n] \to 0$. Далее, имеем $\mathfrak{h}[R_n(\zeta)v_n] \leqslant \mathfrak{h}_n[R_n(\zeta)v_n] = \operatorname{Re}(\mathfrak{t}_n - \zeta)[R_n(\zeta)v_n] + \operatorname{Re}\zeta\,\|R_n(\zeta)v_n\|^2 = \operatorname{Re}(v_n,\ R_n(\zeta)v_n) + \operatorname{Re}\zeta\,\|R_n(\zeta)v_n\|^2 \to 0$, так как $v_n \to 0$ и последовательность $R_n(\zeta)$ равномерно ограничена при $n \to \infty$, поскольку $\zeta \in \Delta_s$. Таким образом, правая часть в (3.19) стремится к нулю при $n \to \infty$, что мы и хотели показать. Из (3.19) следует также, что рассматриваемая сходимость равномерна на любом компактном подмножестве множества $\Delta_s$ (здесь надо учесть, что $R(\zeta)$ принимает значения из компактного подмножества пространства $\mathrm{H}_{\mathfrak{h}}$ и применить лемму III.3.7).

Поскольку первые две формулы из (3.10) распространяются на любое $\zeta \in \Delta_s$, то это же верно в силу (3.10) и для третьей.

Наконец, заметим, что сопряженные формы $\mathfrak{t}_n^*$, $\mathfrak{t}^*$ также удовлетворяют условиям теоремы. Поэтому доказанные результаты справедливы, если заменить $T_n$, $T$ на $T_n^*$, $T^*$ соответственно. Это доказывает формулу (3.10), а равенство $\Delta_s^* = \overline{\Delta}_s$ следует иэ теоремы 1.8.

Теорема 3.6 дает очень полезный признак обобщенной сильной сходимости $T_n \xrightarrow[s]{} T$. Часто она эффективнее, чем теорема 1.5 (в случае $\mathrm{X} = \mathrm{H}$).

**Пример 3.7.** Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(0, \infty)$ и

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}[u] &= \int_0^\infty (\,|\,u'(x)\,|^2 + q(x)\,|\,u(x)\,|^2)\,dx, \\ \mathfrak{t}_n[u] &= \int_0^\infty (\,|\,u'(x)\,|^2 + q_n(x)\,|\,(x)\,|^2)\,dx, \end{aligned} \tag{3.20}$$

где $q$ и $q_n$ — вещественные функции, обладающие свойствами, сформулированными в п. VI.4.1, так что $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}_n$ — замкнутые симметричные формы, ограниченные снизу (при подходящем выборе их областей определения). Далее, пусть $q_n(x) \geqslant q(x)$ и

$$\int_a^b (q_n(x) - q(x))\, dx \to 0 \tag{3.21}$$

для любых $a$, $b$ таких, что $0 < a < b < \infty$. Легко проверить, что предположения теоремы 3.6 выполнены (при $\mathrm{D} = \mathrm{D}(\mathfrak{t})$). Операторами, соответствующими введенным формам, являются $T = -d^2/dx^2 + q(x)$, $T_n = -d^2/dx^2 + q_n(x)$ (см. теорему VI.4.2) с подходящими областями определения. Из теоремы 3.6 следует, что $T_n \xrightarrow[s]{} T$ в обобщенном смысле. Заметим, что условие (3.21) слабее, чем соответствующее условие (1.5) в примере 1.11. Следует также заметить, что $q$ и $q_n$ не обязаны быть вещественнозначными, существенным условием является здесь равномерная секториальность разности $q_n - q$.

**Пример 3.8.** Рассмотрим оператор $T(\varkappa)$ из примера 1.20. Очевидно, что в этом случае применима теорема 3.6 с заменой $T_n$ на $T(\varkappa)$. Если $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\varkappa > 0$, то $T(\varkappa)$ соответствует форме

$$\mathfrak{t}(\varkappa)[u, v] = \int_0^1 (\alpha u'(x)\overline{v'(x)} + \varkappa u''(x)\overline{v''(x)})dx \tag{3.22}$$

с граничным условием (1.26). Легко показать, что форма $\mathfrak{t}(\varkappa)$ секториальна и замкнута. Имеем $\mathfrak{t}(\varkappa) \to \mathfrak{t}$, $\varkappa \to 0$ (в смысле, требуемом в теореме 3.6), где форма $\mathfrak{t}[u, v]$ задается первым слагаемым в формуле (3.22) с граничным условием $u(0) = u(1) = 0$. Действительно, $\mathfrak{t}(\varkappa)[u] \to \mathfrak{t}[u]$ при $u \in \mathrm{D} = \mathrm{D}(\mathfrak{t}(\varkappa))$ (это множество не зависит от $\varkappa$) и, как легко видеть, $\mathrm{D}$ является ядром формы $\mathfrak{t}$.

Оператор, ассоциированный с этой формой $\mathfrak{t}$, в точности совпадает с оператором $T$ из примера 1.20. Так как, кроме того, форма $\mathfrak{t}(\varkappa) - \mathfrak{t}$ равномерно секториальна в смысле (3.8), если $\varkappa$ принимает значения из сектора $|\arg\varkappa| < \delta < \pi/2$, то из теоремы 3.6 вытекает, что $T(\varkappa) \xrightarrow[s]{} T$ в обобщенном смысле. Если, далее, предположить, что $\alpha$ и $\varkappa$ положительны, то $T(\varkappa)$, $T$ являются самосопряженными и имеют компактные резольвенты (как это всегда имеет место в случае регулярных дифференциальных операторов в ограниченной области), и из монотонности последовательности $\mathfrak{t}(\varkappa)[u]$ по $\varkappa$ следует, что $T(\varkappa)^{-1}$ монотонно не убывает при $\varkappa \to 0$ (см. теорему VI.2.21). В силу теоремы 3.5 $T(\varkappa)^{-1} \to T^{-1}$ *по норме*, так что также $R(\zeta, \varkappa) \to R(\zeta)$ по норме и $T(\varkappa) \to T$ в обобщенном смысле. Этим дано полное доказательство всех утверждений из примера 1.20.

Заметим, что к этому примеру теорема 1.5 неприменима, так как $\mathrm{D}(T(\varkappa))$ не является ядром оператора $T$. В связи с этим стоит заметить, что к примеру 1.19 неприменима даже теорема 3.6, так как предельная форма $\mathfrak{t}[u, v] = 2\alpha \int_0^1 u'(x)\overline{v(x)}\, dx$, которая соответствовала бы предельному оператору $T$, *не является* секториальной.

**Замечание 3.9.** Другое замечание к теореме 3.6 состоит в том, что сходимость (3.9) требуется только при $u \in \mathrm{D}$, где $\mathrm{D}$ — некоторое ядро формы $\mathfrak{t}$ такое, что $\mathbf{D} \subset \liminf D(\mathfrak{t}_n)$. Не обязательно, чтобы условие (3.9) выполнялось при всех $u \in \liminf \mathbf{D}(\mathfrak{t}_n)$. Это иллюстрирует следующий пример.

**Пример 3.10.** Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0, 1)$; определим форму $\mathfrak{t}_n$ равенством

$$\mathfrak{t}_n[u] = n^{-1} \int\limits_0^1 |u'(x)|^2\, dx + |u(0)|^2 + |u(1)|^2 \tag{3.23}$$

без каких-либо граничных условий. Область определения $\mathrm{D}(\mathfrak{t}_n) = \mathrm{D}_0$ есть множество всех $u \in \mathrm{L}^2$ таких, что $u' \in \mathrm{L}^2$; отметим, что $\mathrm{D}_0$ не зависит от $n$. Теорема 3.6 применима, если мы положим $\mathfrak{t} = 0$ (с областью определения $\mathrm{D}(\mathfrak{t}) = \mathbf{H}$). Единственным условием, которое следует рассмотреть, является условие iii); два других условия очевидным образом выполнены. Условие iii) выполняется, если выбрать в качестве $\mathbf{D}$ множество всех таких $u \in \mathrm{D}_0$, что $u(0) = u(1) = 0$. Даже при этих ограничениях $\mathbf{D}$ является ядром формы $\mathfrak{t}$, так как форма $\mathfrak{t}$ ограничена, а множество $\mathbf{D}$ плотно в $\mathbf{H}$. Из теоремы 3.6 следует, что $T_n \xrightarrow[s]{} 0$ в обобщенном смысле. Этот результат никоим образом не является тривиальным. Оператор $T_n$ есть дифференциальный оператор $-n^{-1}d^2/dx^2$ с граничными условиями $u'(0) = nu(0)$, $n'(1) = -nu(1)$.

Следует заметить, что $\lim \mathfrak{t}_n[u]$ существует при всех $u \in \mathrm{D}_0$, но этот предел не обязательно равен $\mathfrak{t}[u] = 0$.

### 3. Неубывающая последовательность симметричных форм

В теореме 3.6 предполагалось, что предельная форма $\mathfrak{t}$ дана. Было бы желательно получить теорему, в которой дана только последовательность $\{\mathfrak{t}_n\}$, а предельная форма $\mathfrak{t}$ или по крайней мере предельный оператор $T$ должны быть построены. Замечание 3.9 и пример 3.10 показывают, однако, что это совсе́м не легкая задача, так как $\lim \mathfrak{t}_n[u]$ в теореме 3.6 не обязан быть равным $\mathfrak{t}[u]$ при всех $u$, для которых этот предел существует. Тем самым попытка построить форму $\mathfrak{t}$ с помощью равенства $\mathfrak{t}[u] = \lim \mathfrak{t}_n[u]$ обречена на неудачу.

В настоящее время, по-видимому, нет теорем такого рода для последовательности несимметричных секториальных форм. Но мы можем все-таки привести теорему о *монотонной последовательности симметричных форм.*

Напомним, что если $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ — симметричные формы, ограниченные снизу, то запись $\mathfrak{h}_1 \geqslant \mathfrak{h}_2$ означает, что $\mathbf{D}(\mathfrak{h}_1) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{h}_2)$, $\mathfrak{h}_1[u] \geqslant \mathfrak{h}_2[u]$ при $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}_1)$ (бо́льшая форма имеет более узкую область определения!) (см. п. VI.2.5). Последовательность $\{\mathfrak{h}_n\}$ симметричных форм, ограниченных снизу, является невозрастающей (неубывающей), если $\mathfrak{h}_n \geqslant \mathfrak{h}_{n+1}$ ($\mathfrak{h}_n \leqslant \mathfrak{h}_{n+1}$) при всех $n$.

**Теорема 3.11.** *Пусть $\{\mathfrak{h}_n\}$ — невозрастающая последовательность плотно определенных замкнутых симметричных форм, равномерно ограниченных снизу: $\mathfrak{h}_n \geqslant \gamma$, где $\gamma$ — константа. Если $H_n$ — самосопряженный оператор, ассоциированный с $\mathfrak{h}_n$, то* *последовательность $\{H_n\}$ сильно сходится в обобщенном смысле к самосопряженному оператору $H \geqslant \gamma$. При $n \to \infty$ имеем (полагая $R_n(\zeta) = (H_n - \zeta)^{-1}$, $R(\zeta) = (H - \zeta)^{-1}$)*

$$R_n(\zeta) \xrightarrow[s]{} R(\zeta), \quad \operatorname{Re}\zeta < \gamma, \tag{3.24}$$

$$(H_n - \xi)^{1/2} u \xrightarrow[w]{} (H - \xi)^{1/2} u \quad \textit{при} \quad u \in \bigcup_n \mathbf{D}(\mathfrak{h}_n), \quad \xi < \gamma. \tag{3.25}$$

*Если, в частности, симметричная форма $\mathfrak{h}$, определяемая равенством $\mathfrak{h}[u] = \lim \mathfrak{h}_n[u]$, с областью определения $\mathbf{D}(\mathfrak{h}) = \bigcup_n \mathbf{D}(\mathfrak{h}_n)$* **замыкаема,** *то $H$ есть самосопряженный оператор, ассоциированный с замыканием $\tilde{\mathfrak{h}}$ формы $\mathfrak{h}$, и сходимость в (3.25) является сильной.*

Доказательство. Без ограничения общности мы можем предположить, что $\gamma = 0$, так что $\mathfrak{h}_n$, $H_n$ неотрицательны. Как известно (см. теорему VI.2.21), из свойства невозрастания последовательности $\{\mathfrak{h}_n\}$ следует, что последовательность ограниченных самосопряженных операторов $R_n(\xi)$ при $\xi < 0$ является неубывающей. Так как операторы $R_n(\xi)$ равномерно ограничены сверху числом $(-\xi)^{-1}$, то из теоремы 3.3 (с обратным отношением порядка) следует, что $\text{s-}\lim R_n(\xi) = R(\xi)$ существует. Из обратимости $R(\xi)$ и того факта, что $0 \leqslant R_n(\xi) \leqslant R(\xi)$, следует, что $R(\xi)u = 0$ влечет $R_n(\xi)u = 0$, а значит, $u = 0$. Согласно теореме 1.3, $R(\xi)$ является резольвентой замкнутого линейного оператора $H$. Этот оператор самосопряжен в силу самосопряженности $R(\xi)$. Из теоремы 1.3 следует также, что $R_n(\xi) \xrightarrow[s]{} R(\xi) = (H - \zeta)^{-1}$ при любом $\zeta$ таком, что $\operatorname{Re}\zeta < 0$, так как такие $\zeta$ принадлежат области ограниченности $\Delta_{\mathfrak{b}}$.

Поскольку $0 \leqslant R_n(\xi) \leqslant R(\xi)$ при $\xi < 0$, то $H_n - \xi \geqslant H - \xi$ (в силу теоремы VI.2.21), откуда следует, что $\mathbf{D}(\mathfrak{h}_n) = \mathbf{D}((H_n - \xi)^{1/2}) \subset \mathbf{D}((H - \xi)^{1/2})$. Аналогично $\mathbf{D}(\mathfrak{h}_m) \subset \mathbf{D}(\mathfrak{h}_n)$ при $m < n$. Поэтому для любых $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}_m)$, $v \in \mathbf{H}$, $n > m$, $\xi < 0$ имеем

$$\begin{aligned} &((H_n - \xi)^{1/2} u - (H - \xi)^{1/2} u, (H_1 - \xi)^{-1/2} v) = \\ &\qquad = (u - (H_n - \xi)^{-1/2} (H - \xi)^{1/2} u, B_n v) \to 0, \quad n \to \infty, \end{aligned} \tag{3.26}$$

где $B_n = (H_n - \xi)^{1/2} (H_1 - \xi)^{-1/2} \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$, так как $\mathbf{D}((H_n - \xi)^{1/2}) = \mathbf{D}(\mathfrak{h}_n) \supset \mathbf{D}(\mathfrak{h}_1)$; заметим, что из $R_n(\xi) \xrightarrow[s]{} R(\xi)$ следует $R_n(\xi)^{1/2} \xrightarrow[s]{} R(\xi)^{1/2}$ (см. задачу V.3.51) и что $\|B_n\| \leqslant 1$, так как $\mathfrak{h}_n \leqslant \mathfrak{h}_1$. Поскольку последовательность $\|(H_n - \xi)^{1/2} u\|$ ограничена при $n \to \infty$ величиной $\|(H_m - \xi)^{1/2} u\|$ и оператор $(H_1 - \xi)^{-1/2} v$ отображает $\mathbf{H}$ на множество $\mathbf{D}(\mathfrak{h}_1)$, плотное в $\mathbf{H}$, то $(H_n - \xi)^{1/2} u \xrightarrow[w]{} (H - \xi)^{1/2} u$ при $u \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}_m)$. Так как $m$ произвольно, то формула (3.25) доказана.

Пусть теперь предельная форма $\mathfrak{t}$, фигурирующая в условиях теоремы, замыкаема. Тогда мы находимся в условиях теоремы 3.6 с $\mathfrak{h}_n$, $\tilde{\mathfrak{h}}$ в качестве $\mathfrak{t}_n$, $\mathfrak{t}$ соответственно. Пусть $H_0$ — самосопряженный оператор, ассоциированный с $\tilde{\mathfrak{h}}$. Имеем $H_0 = H$, так как каждый из операторов $(H - \zeta)^{-1}$, $(H_0 - \zeta)^{-1}$ является сильным пределом последовательности $R_n(\zeta)$. Остается только доказать, что сходимость в (3.25) является сильной. Поскольку слабая сходимость уже была доказана, то достаточно показать (см. лемму V.1.2), что $\| (H_n - \xi)^{1/2} u \|^2 \to \| (H - \xi)^{1/2} u \|^2$ при $u \in \bigcup_n \mathrm{D}(\mathfrak{h}_n)$. Но это просто иное выражение того факта, что $\mathfrak{h}_n[u] \to \mathfrak{h}[u] = \tilde{\mathfrak{h}}[u]$.

**Замечание 3.12.** Вообще говоря, слабую сходимость в (3.25) нельзя заменить сильной. Это показывает пример 3.10, в котором предельное соотношение $\mathfrak{h}_n[u] \to \mathfrak{h}[u]$ имеет место не при всех $u \in \mathrm{D}_0$.

## 4. Сходимость снизу

Теоремы 3.6 и 3.11 относятся к сходимости последовательности форм «сверху». Рассмотрим теперь сходимость в противоположном направлении. Следует заметить, что нельзя ожидать полной симметрии между этими двумя случаями, так как мы имеем дело исключительно с *секториальными* формами, для которых понятия «сверху» и «снизу» неравноправны.

К сожалению, не известно, верна ли теорема, соответствующая теореме 3.6. Мы можем доказать лишь теорему, соответствующую теореме 3.11.

**Теорема 3.13.** *Пусть* $\{\mathfrak{h}_n\}$ *— неубывающая последовательность плотно определенных замкнутых симметричных форм, ограниченных снизу числом* $\gamma_1$ *и не превосходящих формы* $\mathfrak{h}_0$, *обладающей аналогичными свойствами:*

$$\gamma_1 \leqslant \mathfrak{h}_1 \leqslant \mathfrak{h}_2 \leqslant \dots \leqslant \mathfrak{h}_0. \tag{3.27}$$

*Пусть* $H_n$ *— самосопряженный оператор, ассоциированный с* $\mathfrak{h}_n$. *Тогда* $H_n$ *сильно сходится в обобщенном смысле к самосопряженному оператору* $H$, *ограниченному снизу. Если* $\mathfrak{h}$ *— ассоциированная с* $H$ *симметричная форма, то* $\mathfrak{h}_n < \mathfrak{h}$ *и при* $n \to \infty$

$$\mathfrak{h}_n[u, v] \to \mathfrak{h}[u, v], \quad u, v \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}), \tag{3.28}$$

$$R_n(\zeta) \xrightarrow[s]{} R(\zeta), \quad \operatorname{Re}\xi < \gamma_1, \tag{3.29}$$

$$(H_n - \xi)^{1/2} u \xrightarrow[s]{} (H - \xi)^{1/2} u, \quad u \in \mathrm{D}(\mathfrak{h}), \ \xi < \gamma_1. \tag{3.30}$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.11, из (3.27) следует, что $\{R_n(\xi)\}$ при $\xi < \gamma_1$ является невозрастающей последовательностью ограниченных неотрицательных самосопряженных операторов. Таким образом, $\text{s-lim}\, R_n(\xi) = R(\xi)$ существует в силу теоремы 3.3. Поскольку из $\mathfrak{h}_n \leqslant \mathfrak{h}_0$ вытекает, что $R_n(\xi) \geqslant R_0(\xi) \geqslant 0$, то $R(\xi) \geqslant R_0(\xi) \geqslant 0$. Поэтому оператор $R(\xi)$ обратим. Из теоремы 1.3 следует, что $R(\xi)$ является резольвентой замкнутого оператора $H$, который опять оказывается самосопряженным, и (3.29) получается, как и выше.

Пусть $\mathfrak{h}$ — симметричная форма, ассоциированная с $H$, т. е. $\mathbf{D}(\mathfrak{h}) = \mathbf{D}((H-\xi)^{1/2})$, $\mathfrak{h}[u] = \|(H-\xi)^{1/2} u\|^2 + \xi \|u\|^2$ (см. задачу VI.2.25). Из $R_n(\xi) \geqslant R(\xi)$ следует $H_n - \xi \leqslant H - \xi$, поэтому $\mathfrak{h}_n \leqslant \mathfrak{h}$.

Положим

$$B_n = (H_n - \xi)^{1/2} R(\xi)^{1/2}. \tag{3.31}$$

Так как $\mathfrak{h}_n \leqslant \mathfrak{h}$, то $B_n \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$, $\|B_n\| \leqslant 1$ (см. аналогичный результат в доказательстве теоремы 3.11). Покажем теперь, что $B_n \xrightarrow[s]{} 1$. Этим формула (3.30) будет доказана, ибо ее можно записать в виде $B_n (H-\xi)^{1/2} u \to (H-\xi)^{1/2} u$. Тогда (3.28) будет следовать из $(\mathfrak{h}_n - \xi)[u, v] = ((H_n - \xi)^{1/2} u, (H_n - \xi)^{1/2} v)$ и аналогичного выражения для $\mathfrak{h}[u, v]$.

Воспользуемся тождеством

$$R(\xi)^{1/2} (1 - B_n) = B_n^* (R_n(\xi)^{1/2} - R(\xi)^{1/2}), \tag{3.32}$$

которое легко проверить, применив обе части к $u \in \mathbf{H}$ и умножив скалярно на $v \in \mathbf{H}$. Поскольку $R_n(\xi) \to R(\xi)$ влечет $R_n(\xi)^{1/2} \xrightarrow[s]{} R(\xi)^{1/2}$, как отмечалось в доказательстве теоремы 3.11, то из (3.29) и (3.32) следует, что $R(\xi)^{1/2}(1 - B_n) \xrightarrow[s]{} 0$. Переходя к сопряженным, мы видим, что $(1 - B^*) R(\xi)^{1/2} \xrightarrow[s]{} 0$. Но так как $\|B_n^*\| = \|B_n\| \leqslant 1$ и область значений оператора $R(\xi)^{1/2}$ плотна в $\mathbf{H}$, то $B_n^* \xrightarrow[w]{} 1$, а значит, также и $B_n \xrightarrow[w]{} 1$. Наконец, поскольку $\|B_n\| \leqslant 1 = \|1\|$, то на самом деле $B_n \to 1$ сильно, что мы и хотели показать (см. лемму V.1.2).

**Замечание 3.14.** Вообще говоря, неясно, характеризует ли (3.28) форму $\mathfrak{h}$. В силу монотонности последовательности $\{\mathfrak{h}_n[u]\}$ очевидно, что ее предел существует, по крайней мере при $u \in \mathbf{D}(\mathfrak{h}_0)$. Если $\mathfrak{h}'$ — форма, определяемая равенством $\mathfrak{h}'[u, v] = \lim \mathfrak{h}_n[u, v]$, с областью определения $\mathbf{D}(\mathfrak{h}')$, состоящей из всех таких $u \in \bigcap_n \mathbf{D}(\mathfrak{h}_n)$, что $\lim \mathfrak{h}_n[u]$ существует, то (3.28) показывает, что $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}'$. Но неизвестно, совпадают ли $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}'$.

## 5. Спектры сходящихся операторов

Пусть $\{T_n\}$ — последовательность операторов, определенная в одной из теорем 3.6, 3.11 или 3.13. Последовательность $\{T_n\}$ сильно сходится к $T$ в обобщенном смысле. Пусть $\lambda$ — изолированное собственное значение оператора $T$ с конечной кратностью $m$. Если это собственное значение *устойчиво* в смысле п. 1.4, то существует ровно $m$ собственных значений (с учетом кратности) оператора $T_n$ в окрестности точки $\lambda$, и эти собственные значения сходятся к $\lambda$. Это можно показать точно так же, как и в п. 1.4.

В условиях теоремы 3.6 собственное значение $\lambda$ устойчиво (относительно возмущения $T \rightarrow T_n$) тогда и только тогда, когда $\bar{\lambda}$ является устойчивым собственным значением оператора $T^*$ (относительно возмущения $T^* \rightarrow T_n^*$). Это утверждение легко следует из теоремы 3.6.

Здесь опять не существует общего признака устойчивости данного собственного значения $\lambda$. Но в случае, когда операторы $T_n$ являются самосопряженными, такой признак есть. Именно справедлива

**Теорема 3.15.** *Если нижняя часть* $\lambda < \beta$ *спектра оператора* $H$ *из теоремы* 3.11 *состоит из изолированных собственных значений с конечной кратностью, то эти собственные значения устойчивы относительно рассматриваемого возмущения. То же верно и в условиях теоремы* 3.6, *если* $\mathfrak{t}_n$ *и* $\mathfrak{t}$ *симметричны, так что* $T = H$ *и* $T_n = H_n$ *— самосопряженные операторы. При* $n \rightarrow \infty$ *собственные значения* $\mu_k^{(n)}$ *оператора* $H_n$ *стремятся сверху к соответствующим собственным значениям* $\mu_k$ *оператора* $H$.

Доказательство. Поскольку $H_n \geqslant H \geqslant \gamma$, то (см. задачу VI.5.5)

$$\dim E_n(\lambda) \leqslant \dim E(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty, \tag{3.33}$$

где $E_n(\lambda)$ и $E(\lambda)$ — спектральные семейства, соответствующие операторам $H_n$, $H$. Если $\lambda < \beta$, то $\dim E(\lambda) < \infty$, поэтому $\dim E_n(\lambda) < \infty$ при $\lambda < \beta$. Отсюда следует, что часть спектра оператора $H_n$, расположенная на полупрямой $\lambda < \beta$, состоит из изолированных собственных значений. Обозначим собственные значения (с учетом кратности) операторов $H$ и $H_n$, лежащие на этой полупрямой, через

$$\mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots < \beta, \quad \mu_1^{(n)} \leqslant \mu_2^{(n)} \leqslant \ldots < \beta. \tag{3.34}$$

Тогда из (3.33) вытекает, что (ср. с теоремой I.6.44)

$$\mu_k^{(n)} \geqslant \mu_k, \quad n, k = 1, 2, \ldots \tag{3.35}$$

В случае когда выполнены условия теоремы 3.11, так что $\mathfrak{h}_n$ и $H_n$ не возрастают, последовательность $\mu_k^{(n)}$ при фиксированном $k$ является невозрастающей.

Далее,

$$\| E_n (\lambda) - E (\lambda) \| \to 0, \quad n \to \infty, \quad \lambda < \beta, \quad \lambda \neq \mu_k. \tag{3.36}$$

Для того чтобы в этом убедиться, мы прежде всего заметим, что $E_n (\lambda) \underset{s}{\to} E (\lambda)$ при любом $\lambda$ таком, что $E (\lambda - 0) = E (\lambda)$, в частности при любом $\lambda$, отличном от $\mu_k$ и меньшем, чем $\beta$ (см. теорему 1.15). Поскольку $\dim E (\lambda) < \infty$, то (3.36) следует в силу (3.33) из леммы 1.21. Из (3.36) в свою очередь следует, что $\dim E_n (\lambda) = \dim E (\lambda)$ для таких $\lambda$ при достаточно больших $n$. Поэтому, как легко видеть, $m_k^{(n)} \to \mu_k$, $n \to \infty$.

Так как $\| R_n (\zeta) \| \leqslant 1/\text{dist} (\zeta, \Sigma (H_n))$, то любое вещественное $\zeta \neq \mu_k$ принадлежит области ограниченности $\Delta_b$, а следовательно, множеству $\Delta_s$, согласно теореме 1.3. Этим наша теорема доказана.

**Пример 3.16.** Применяя теорему 3.15 к примеру 3.7, мы видим, что собственные значения оператора $T = -d^2/dx^2 + q (x)$ устойчивы относительно рассматриваемого возмущения, если вещественнозначный потенциал $q (x)$ таков, что нижняя часть спектра оператора $T$ состоит из изолированных собственных значений.

**Замечание 3.17.** Полученные выше результаты, по-видимому, несправедливы в случае несамосопряженных операторов. На первый взгляд можно было бы ожидать, что в условиях теоремы 3.6, когда $\mathfrak{t}_n$ стремится к $\mathfrak{t}$ «сверху» (в том смысле, что $\text{Re}\, \mathfrak{t}_n \geqslant \text{Re}\, \mathfrak{t}$), собственные значения оператора $T_n$ должны также стремиться сверху к собственным значениям оператора $T$, по крайней мере в части спектра оператора $T$, состоящей из изолированных собственных значений. Однако это предположение неверно. Действительно, рассмотрим пример 1.19 при $\mathbf{X} = \mathbf{L}^2$ и $\alpha > 0$, $\varkappa > 0$. Оператор $T (\varkappa)$ ассоциирован с квадратичной формой $\mathfrak{t} (\varkappa) [u] = 2\alpha \int\limits_0^1 [u' (x) \overline{u (x)} + \varkappa \mid u' (x) \mid^2] \, dx$, которая при $\varkappa > 0$ является секториальной и замкнутой и которая убывает при убывании $\varkappa$. Но собственные значения оператора $T (\varkappa)$ даются формулой (1.20), из которой следует, что каждое из них *возрастает* при убывании $\varkappa$, если $\varkappa$ достаточно мало.

## § 4. Асимптотические разложения для секториальных операторов

### 1. Постановка задачи. Нулевое приближение для резольвенты

Мы продолжим начатое в § 2 изучение асимптотических разложений [1]) при $\varkappa \to 0$ для резольвенты $R (\zeta, \varkappa)$ и изолированных

---

[1]) Результаты этого параграфа были получены Титчмаршем [1], [2], Т. Като [3, 7, 9], В. Крамером [1, 2] в симметричном случае. Некоторые результаты для несимметричного случая получены Хью [1, 2]. Доказательство приводимых ниже теорем может быть значительно упрощено в симметричном случае; см. цитированные работы.

собственных значений оператора $T(\varkappa)$, зависящего от параметра $\varkappa$. Мы опять будем рассматривать случай, когда $T(\varkappa)$ можно *формально* представить в виде $T+\varkappa T^{(1)}$, но теперь будет дано точное определение оператора $T(\varkappa)$ с помощью секториальных форм в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$.

Рассмотрим семейство секториальных форм $\mathfrak{t}(\varkappa)$ в $\mathbf{H}$, определяемое формулой

$$\mathfrak{t}(\varkappa)=\mathfrak{t}+\varkappa\mathfrak{t}^{(1)},\quad 0<\varkappa\leqslant 1. \tag{4.1}$$

На протяжении этого параграфа мы будем считать, что выполнены следующие основные предположения:

i) $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}^{(1)}$ — плотно определенные замкнутые секториальные формы.

ii) $\mathfrak{t}^{(1)}$ имеет нулевую вершину; $\mathfrak{t}$ имеет вершину $\gamma$.

iii) Множество $\mathrm{D}=\mathrm{D}(\mathfrak{t})\cap\mathrm{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$ является ядром формы $\mathfrak{t}$.

Опять сделаем некоторые замечания относительно этих предположений. Предположение ii) не вносит каких-либо ограничений, так как если $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}^{(1)}$ имеют вершины $\gamma$ и $\gamma^{(1)}$, то мы можем положить $\mathfrak{t}^{(1)}=\gamma^{(1)}+\mathfrak{t}'$, где $\mathfrak{t}'$ — секториальная форма с вершиной 0, и (4.1) примет вид

$$\mathfrak{t}(\varkappa)=\varkappa\gamma^{(1)}+\mathfrak{t}+\varkappa\mathfrak{t}'. \tag{4.2}$$

Малая скалярная добавка $\varkappa\gamma^{(1)}$ не играет существенной роли в большинстве задач, которые будут рассмотрены ниже, и может быть опущена, так что можно переобозначить $\mathfrak{t}'$ через $\mathfrak{t}^{(1)}$. Из (4.1) опять следует, что $\mathrm{D}(\mathfrak{t}(\varkappa))=\mathrm{D}(\mathfrak{t})\cap\mathrm{D}(\mathfrak{t}^{(1)})=\mathrm{D}$.

Если бы множество $\mathrm{D}$ не являлось ядром формы $\mathfrak{t}$, мы могли бы заменить эту форму замыканием ее сужения на $\mathrm{D}$; это не изменяет форму $\mathfrak{t}(\varkappa)$, в то время как $\mathrm{D}$ оказывается ядром новой формы $\mathfrak{t}$. По той же причине мы могли бы предположить, что $\mathrm{D}$ является также ядром формы $\mathfrak{t}^{(1)}$, но нет нужды предполагать это явно.

Поскольку обе формы $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}^{(1)}$ замкнуты и секториальны, то такими же свойствами обладает и $\mathfrak{t}(\varkappa)$ (см. теорему VI.6.1). Множество $\mathrm{D}(\mathfrak{t}(\varkappa))=\mathrm{D}$ плотно, так как оно, согласно предположению iii), является ядром плотно определенной формы $\mathfrak{t}$. Пусть $T(\varkappa)$ есть $m$-секториальный оператор, ассоциированный по первой теореме о представлении с формой $\mathfrak{t}(\varkappa)$. Аналогично обозначим через $T$ $m$-секториальный оператор, ассоциированный с формой $\mathfrak{t}$.

Далее, к рассматриваемой задаче применима теорема 3.6 с заменой $\mathfrak{t}_n$, $\mathfrak{t}$, $T_n$ на $\mathfrak{t}(\varkappa)$, $\mathfrak{t}$, $T(\varkappa)$ соответственно. Следовательно, $T(\varkappa)$ при $\varkappa\to 0$ сильно сходится к $T$ в обобщенном смысле.

Более точно, имеем в силу (3.10)

$$\left.\begin{aligned} &R(\zeta,\varkappa)\xrightarrow[\mathrm{s}]{} R(\zeta),\quad R(\zeta,\varkappa)^*\xrightarrow[\mathrm{s}]{} R(\zeta)^*, \\ &\mathfrak{t}\,[R(\zeta,\varkappa)u-R(\zeta)u]\to 0, \\ &\qquad\qquad\qquad \mathfrak{t}\,[R(\zeta,\varkappa)^*u-R(\zeta)^*u]\to 0, \\ &\varkappa\mathfrak{t}^{(1)}[R(\zeta,\varkappa)u]\to 0,\quad \varkappa\mathfrak{t}^{(1)}[R(\zeta,\varkappa)^*u]\to 0, \end{aligned}\right\}\begin{aligned} &\varkappa\to 0 & &(4.3)\\ & & & \\ &\zeta\in\Delta_{\mathrm{s}} & &(4.4)\\ &u\in\mathbf{H} & &(4.5) \end{aligned}$$

где, как обычно, полагаем $R(\zeta,\varkappa)=(T(\varkappa)-\zeta)^{-1}$, $R(\zeta)=(T-\zeta)^{-1}$. Сходимость в формулах (4.3) — (4.5) равномерна на каждом компактном подмножестве множества $\Delta_{\mathrm{s}}$, и $\Delta_{\mathrm{s}}$ содержит полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta<\gamma$.

В следующих пунктах мы изучим, при каких условиях выражения $R(\zeta,\varkappa)u$, $(R(\zeta,\varkappa)u, v)$ допускают асимптотическое разложение по степеням $\varkappa$.

Положим

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{h}=\operatorname{Re}\mathfrak{t},\qquad \mathfrak{h}^{(1)}=\operatorname{Re}\mathfrak{t}^{(1)}, \\ &\mathfrak{h}(\varkappa)=\operatorname{Re}\mathfrak{t}(\varkappa)=\mathfrak{h}+\varkappa\mathfrak{h}^{(1)},\qquad \xi=\operatorname{Re}\zeta \end{aligned}\right. \tag{4.6}$$

и обозначим через $T^{(1)}$, $H$, $H^{(1)}$, $H(\varkappa)$ операторы, ассоциированные с формами $\mathfrak{t}^{(1)}$, $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{h}^{(1)}$, $\mathfrak{h}(\varkappa)$ соответственно. Имеем

$$|\operatorname{Im}\mathfrak{t}[u]|\leqslant M(\mathfrak{h}-\gamma)[u],\ |\operatorname{Im}\mathfrak{t}^{(1)}[u]|\leqslant M'\mathfrak{h}^{(1)}[u]. \tag{4.7}$$

Здесь $M=\operatorname{tg}\theta$, $M'=\operatorname{tg}\theta'$, где $\theta$, $\theta'$ — полуугли секториальных форм $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}^{(1)}$. Заметим, наконец, что между множествами $\mathbf{D}(T)$ и $\mathbf{D}(T^{(1)})$ не обязательно должна существовать какая-либо простая связь, так что оператор $T(\varkappa)$ не обязательно равен $T+\varkappa T^{(1)}$.

**Замечание 4.1.** Поскольку $\mathbf{D}(\mathfrak{t}^*)=\mathbf{D}(\mathfrak{t})$ и т. д., то из предположений i) — iii) следует, что таким же предположениям удовлетворяют и сопряженные формы.

## 2. Приближение порядка 1/2 для резольвенты

**Теорема 4.2.** *Пусть* $\zeta\in\Delta_{\mathrm{s}}$, $u\in\mathbf{H}$, $R(\zeta)u\in\mathbf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$. *Тогда при* $\varkappa\to 0$ *имеют место оценки*

$$\|R(\zeta,\varkappa)u-R(\zeta)u\|=o(\varkappa^{1/2}), \tag{4.8}$$

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{t}\,[R(\zeta,\varkappa)-R(\zeta)u]=o(\varkappa), \\ &\mathfrak{t}^{(1)}[R(\zeta,\varkappa)u-R(\zeta)u]=o(1). \end{aligned}\right. \tag{4.9}$$

*Если* $R(\zeta)u\in\mathbf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$, $R(\zeta)^*v\in\mathbf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$, *то*

$$(R(\zeta,\varkappa)u, v)=(R(\zeta)u, v)-\varkappa\mathfrak{t}^{(1)}[R(\zeta)u, R(\zeta)^*v]+o(\varkappa). \tag{4.10}$$

Доказательство. I. Положим

$$w = w(\varkappa) = R(\zeta, \varkappa)\, u - R(\zeta)\, u. \tag{4.11}$$

Заметим, что $w \in \mathsf{D}$, так как $R(\zeta)\, u \in \mathsf{D}(T) \subset \mathsf{D}(\mathfrak{t})$, $R(\zeta)\, u \in \mathsf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$ по предположению и так как

$$R(\zeta, \varkappa)\, u \in \mathsf{D}(T(\varkappa)) \subset \mathsf{D}(\mathfrak{t}(\varkappa)) = \mathsf{D}.$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned}(\mathfrak{t}(\varkappa) - \zeta)[w] &= (\mathfrak{t}(\varkappa) - \zeta)[R(\zeta, \varkappa)\, u - R(\zeta)\, u,\ w] = \\ &= (u, w) - (u, w) - \varkappa\mathfrak{t}^{(1)}[R(\zeta)\, u,\ w] = \\ &= -\varkappa\mathfrak{t}^{(1)}[R(\zeta)\, u,\ w].\end{aligned} \tag{4.12}$$

Предположим временно, что $\xi = \operatorname{Re}\zeta < 0$, и положим для простоты $\gamma = 0$ (что не ограничивает общности). Тогда $\operatorname{Re}(\mathfrak{t}(\varkappa) - \zeta) = \mathfrak{h} - \xi + \varkappa\mathfrak{h}^{(1)} \geqslant \varkappa\mathfrak{h}^{(1)} \geqslant 0$, и из (4.12) следует, что

$$\begin{aligned}\varkappa\mathfrak{h}^{(1)}[w] &\leqslant \varkappa\, |\, \mathfrak{t}^{(1)}[R(\zeta)\, u, w]\, | \leqslant \\ &\leqslant (1 + M')\, \varkappa\mathfrak{h}^{(1)}[R(\zeta)\, u]^{1/2}\, \mathfrak{h}^{(1)}[w]^{1/2}\end{aligned} \tag{4.13}$$

(см. (VI.1.15)); поэтому

$$\mathfrak{h}^{(1)}[w] \leqslant (1 + M')^2\mathfrak{h}^{(1)}[R(\zeta)\, u]. \tag{4.14}$$

Это показывает, что элемент $w = w(\varkappa)$ ограничен при $\varkappa \to 0$ по норме $\|w\|_{\mathfrak{h}^{(1)}} = (\mathfrak{h}^{(1)}[w] + \|w\|^2)^{1/2}$, введение которой превращает $\mathsf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$ в гильбертово пространство $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}^{(1)}}$. Но для любого $v \in \mathsf{H}$ имеем $(\mathfrak{h}^{(1)} + 1)[w, (H^{(1)} + 1)^{-1} v] = (w, v) \to 0$, так как $w \to 0$ в силу (4.3). Множество $(H^{(1)} + 1)^{-1}\, \mathsf{H} = \mathsf{D}(H^{(1)})$ является ядром формы $\mathfrak{h}^{(1)}$ и, следовательно, плотно в $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}^{(1)}}$, поэтому $w$ слабо сходится к нулю в $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}^{(1)}}$. Поскольку $\mathfrak{t}^{(1)}$ — ограниченная форма на $\mathsf{H}_{\mathfrak{t}^{(1)}}$, то $\mathfrak{t}^{(1)}[R(\zeta)\, u, v] \to 0$. Таким образом, правая часть в (4.12) есть $o(\varkappa)$.

Опять выделяя вещественную часть в (4.12) и учитывая, что $\operatorname{Re}(\mathfrak{t}(\varkappa) - \zeta)[w] = \mathfrak{h}[w] + (-\xi)\, \|w\|^2 + \varkappa\mathfrak{h}^{(1)}[w]$, причем все три слагаемых в последней сумме неотрицательны, мы видим, что каждая из функций $\mathfrak{h}[w]$, $\|w\|^2$, $\varkappa\mathfrak{h}^{(1)}[w]$ есть $o(\varkappa)$. Это доказывает формулы (4.8) и (4.9).

II. Далее, мы можем распространить (4.8) и (4.9) на общий случай, когда $\zeta \in \Delta_s$ и $R(\zeta)\, u \in \mathsf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$. Для того чтобы это сделать, используем соответствующий вариант формулы (1.3):

$$\begin{aligned}R(\zeta, \varkappa) - R(\zeta) &= (1 + (\zeta - \zeta_0)\, R(\zeta, \varkappa)) \times \\ &\times (R(\zeta_0, \varkappa) - R(\zeta_0))\, (1 + (\zeta - \zeta_0)\, R(\zeta)),\end{aligned} \tag{4.15}$$

где фиксированное число $\zeta_0$ выбрано так, чтобы $\operatorname{Re}\zeta_0 < 0$. Положим $x = (1 + (\zeta - \zeta_0)\, R(\zeta))\, u$. Тогда $R(\zeta_0)\, x = R(\zeta)\, u \in \mathsf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$ в силу резольвентного уравнения. Следовательно,

$y(\varkappa) \equiv (R(\zeta_0, \varkappa) - R(\zeta_0))\, x = o(\varkappa^{1/2})$, согласно доказанным выше результатам. Поскольку резольвента $R(\zeta, \varkappa)$ ограничена при $\varkappa \to 0$, то (4.8) следует из равенства $(R(\zeta, \varkappa) - R(\zeta))\, u = (1 + (\zeta - \zeta_0)\, R(\zeta, \varkappa))\, y(\varkappa)$.

Для доказательства формулы (4.9) учтем, что

$$\mathfrak{h}(\varkappa)\,[(R(\zeta, \varkappa) - R(\zeta))\, u] =$$

$$= \mathfrak{h}(\varkappa)\,[y(\varkappa) + (\zeta - \zeta_0)\, R(\zeta, \varkappa)\, y(\varkappa)] \leqslant$$

$$\leqslant 2\mathfrak{h}(\varkappa)\,[y(\varkappa)] + 2\,|\,\zeta - \zeta_0\,|^2\, \mathfrak{h}(\varkappa)\,[R(\zeta, u)\, y(\varkappa)]. \qquad (4.16)$$

Покажем, что последнее выражение в (4.16) есть $o(\varkappa)$. Для первого члена это верно в силу уже доказанных результатов. Во втором члене мы можем заменить $\mathfrak{h}(\varkappa)$ на $\mathfrak{h}(\varkappa) - \xi$, поскольку $\|\, R(\zeta, \varkappa)\, y(\varkappa)\,\|^2 = o(\varkappa)$, как было доказано выше. Но

$$(\mathfrak{h}(\varkappa) - \xi)\,[R(\zeta, \varkappa)\, y(\varkappa)] = \operatorname{Re}\,(\mathfrak{t}(\varkappa) - \zeta)\,[R(\zeta, \varkappa)\, y(\varkappa)] =$$

$$= \operatorname{Re}\,(y(\varkappa),\ R(\zeta, \varkappa)\, y(\varkappa)) \leqslant \|\, R(\zeta, \varkappa)\,\| \cdot \|\, y(\varkappa)\,\|^2 = o(\varkappa).$$

Таким образом, каждое из выражений в (4.16) есть $o(\varkappa)$; отсюда немедленно следует (4.9).

III. Для доказательства формулы (4.10) используем тождество

$$(w,\ v) = (\mathfrak{t} - \zeta)\,[w,\ R(\zeta)^*\, v] =$$

$$= (\mathfrak{t} - \zeta)\,[R(\zeta, \varkappa)\, u,\ R(\zeta)^*\, v] - (\mathfrak{t} - \zeta)\,[R(\zeta)\, u,\ R(\zeta)^* v] =$$

$$= (u,\ R(\zeta)^*\, v) - \varkappa \mathfrak{t}^{(1)}\,[R(\zeta, \varkappa)\, u,\ R(\zeta)^*\, v] - (u,\ R(\zeta)^* v) =$$

$$= -\varkappa \mathfrak{t}^{(1)}\,[R(\zeta)\, u,\ R(\zeta)^*\, v] - \varkappa \mathfrak{t}^{(1)}\,[w,\ R(\zeta)^*\, v], \qquad (4.17)$$

которое справедливо, поскольку $R(\zeta)^*\, v \in \mathbf{D}$, что, как и выше, следует из условия $R(\zeta)^*\, v \in \mathbf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$. Формула (4.10) вытекает из (4.17) в силу (4.9), откуда следует, что $w \to 0$ в $\mathbf{H}_{\mathfrak{t}^{(1)}}$.

## 3. Приближения первого и более высоких порядков для резольвенты

Как только доказана теорема 4.2 о приближении порядка $^1/_2$, дальнейшие приближения получаются довольно просто. Например, справедлива

**Теорема 4.3.** *Пусть* $\zeta \in \Delta_s$ *и* $u \in \mathbf{H}$. *Если* $R(\zeta)\, u \in \mathbf{D}(T^{(1)})$, *то справедлива формула*

$$R(\zeta, \varkappa)\, u = R(\zeta)\, u - \varkappa R(\zeta)\, T^{(1)} R(\zeta)\, u + o(\varkappa). \qquad (4.18)$$

*Если* $R(\zeta)\, u \in \mathbf{D}(T^{(1)})$ *и* $R(\zeta)^*\, v \in \mathbf{D}(T^{(1)*})$, *то*

$$(R(\zeta, \varkappa)\, u,\ v) = (R(\zeta)\, u,\ v) - \varkappa\,(R(\zeta)\, T^{(1)} R(\zeta)\, u,\ v) +$$

$$+ \varkappa^2\,(R(\zeta)\, T^{(1)} R(\zeta)\, u,\ T^{(1)*} R(\zeta)^*\, v) + o(\varkappa^2). \qquad (4.19)$$

Доказательство. В обозначениях предыдущего пункта, для любого $v \in \mathbf{H}$ имеем

$$\begin{aligned}(w,\ v) &= (\mathfrak{t}(\varkappa) - \zeta)\,[w,\ R\,(\zeta,\ \varkappa)^*\,v] = \\ &= (\mathfrak{t}(\varkappa) - \zeta)\,[R\,(\zeta,\ \varkappa)\,u,\ R\,(\zeta,\ \varkappa)^*\,v] - \\ &\quad - (\mathfrak{t}(\varkappa) - \zeta)\,[R\,(\zeta)\,u,\ R\,(\zeta,\ \varkappa)^*\,v] = \\ &= (u,\ R\,(\zeta,\ \varkappa)^*\,v) - (u,\ R\,(\zeta,\ \varkappa)^*\,v) - \\ &\quad - \varkappa\mathfrak{t}^{(1)}\,[R\,(\zeta)\,u,\ R\,(\zeta,\ \varkappa)^*\,v] = \\ &= -\,\varkappa\,(T^{(1)}R\,(\zeta)\,u,\ R\,(\zeta,\ \varkappa)^*\,v) = \\ &= -\,\varkappa\,(R\,(\zeta,\ \varkappa)\,T^{(1)}R\,(\zeta)\,u,\ v),\end{aligned} \tag{4.20}$$

поскольку $R\,(\zeta)\,u \in \mathbf{D}\,(T^{(1)})$. Следовательно,

$$R\,(\zeta,\ \varkappa)\,u - R\,(\zeta)\,u = w = -\,\varkappa R\,(\zeta,\ \varkappa)\,T^{(1)}R\,(\zeta)\,u. \tag{4.21}$$

Отсюда в силу (4.3) следует (4.18).

Предположим теперь, что $R\,(\zeta)^*\,v \in \mathbf{D}\,(T^{(1)*})$. Так как операторы $T^*$, $T\,(\varkappa)^*$ и $T^{(1)*}$ ассоциированы с сопряженными формами $\mathfrak{t}^*$, $\mathfrak{t}(\varkappa)^*$ и $\mathfrak{t}^{(1)}\,(\varkappa)^*$ соответственно, то применение формул (4.21) (с заменой $\zeta$ на $\bar{\zeta}$) к этим сопряженным формам дает

$$R\,(\zeta,\ \varkappa)^*\,v - R\,(\zeta)^*\,v = -\varkappa R\,(\zeta,\ \varkappa)^*\,T^{(1)*}R\,(\zeta)^*\,v. \tag{4.22}$$

Умножая (4.22) скалярно на $u$ и используя (4.21), получаем

$$\begin{aligned}(R\,(\zeta,\ \varkappa)\,u,\ v) - (R\,(\zeta)\,u,\ v) &= -\varkappa\,(R\,(\zeta,\ \varkappa)\,u,\ T^{(1)*}R\,(\zeta)^*\,v) = \\ &= -\varkappa\,(R\,(\zeta)\,u,\ T^{(1)*}R\,(\zeta)^*\,v) + \\ &\quad + \varkappa^2\,(R\,(\zeta,\ \varkappa)\,T^{(1)}R\,(\zeta)\,u,\ T^{(1)*}R\,(\zeta)^*\,v),\end{aligned} \tag{4.23}$$

откуда в силу (4.3) следует (4.19).

**Теорема 4.4.** *Если $R\,(\zeta)\,T^{(1)}R\,(\zeta)u$ существует и принадлежит $\mathbf{D}\,(\mathfrak{t}^{(1)})$, то*

$$R\,(\zeta,\ \varkappa)\,u = R\,(\zeta)\,u - \varkappa R\,(\zeta)\,T^{(1)}R\,(\zeta)u + o\,(\varkappa^{3/2}). \tag{4.24}$$

*Если, кроме того, $R\,(\xi)^*\,T^{(1)*}R\,(\zeta)\,v$ существует и принадлежит $\mathbf{D}\,(\mathfrak{t}^{(1)})$, то*

$$\begin{aligned}(R\,(\zeta,\ \varkappa)\,u,\ v) &= (R\,(\zeta)\,u,\ v) - \varkappa\,(R\,(\zeta)\,T^{(1)}R\,(\zeta)\,u,\ v) + \\ &\quad + \varkappa^2\,(R\,(\zeta)\,T^{(1)}R\,(\zeta)\,u,\ T^{(1)*}R\,(\zeta)^*\,v) - \\ &\quad - \varkappa^3\,\mathfrak{t}^{(1)}\,[R\,(\zeta)\,T^{(1)}R\,(\zeta)\,u,\ R\,(\zeta)^*T^{(1)*}R\,(\zeta)^*\,v] + \\ &\quad + \mathfrak{t}\,(\varkappa^3).\end{aligned} \tag{4.25}$$

Доказательство. Равенство (4.24) получается, если применить оценку (4.8) к правой части формулы (4.21). Для доказательства равенства (4.25) достаточно применить (4.10) к последнему выражению в (4.23) (с заменой $u$, $v$ на $T^{(1)}R(\zeta)u$, $T^{(1)*}R(\zeta)^*v$ соответственно).

Теперь легко видеть, как можно получить дальнейшие приближения. Нет нужды выписывать их явно.

**Задача 4.5.** Если $R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)u$ существует и принадлежит $\mathbf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$ и если $R(\zeta)^*v\in\mathbf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$, то

$$\begin{aligned}(R(\zeta,\varkappa)u,v)&=(R(\zeta)u,v)-\varkappa(R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)u,v)+\\&+\varkappa^2\mathfrak{t}^{(1)}[R(\zeta)u,R(\zeta)^*v]+o(\varkappa^2).\end{aligned}\qquad(4.26)$$

**Замечание 4.6.** Все вышеприведенные формулы, несмотря на внешние различия, по существу представляют собой *второй ряд Неймана* для резольвенты, который может быть *формально* записан в виде

$$\begin{aligned}R(\zeta,\varkappa)&=R(\zeta)-\varkappa R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)+\\&+\varkappa^3R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)+\ldots;\end{aligned}\qquad(4.27)$$

Например, коэффициент при $\varkappa^3$ в (4.25) формально равен

$$\begin{aligned}-\mathfrak{t}^{(1)}&[R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)u,R(\zeta)^*T^{(1)*}R(\zeta)^*v]=\\&=-(T^{(1)}R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)u,R(\zeta)^*T^{(1)*}R(\zeta)^*v)=\\&=-(R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)u,v),\end{aligned}\qquad(4.28)$$

что совпадает с коэффициентом при $\varkappa^3$ в (4.27). На самом деле формула (4.28) корректна только в том случае, когда выражение $T^{(1)}R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)u$ имеет смысл. Левая часть в (4.28) существует, однако, и не при столь сильных ограничениях на $u$, если для $v$ выполнены сформулированные выше предположения. Формула (4.25) особенно полезна, когда $\mathfrak{t}$ и $\mathfrak{t}^{(1)}$ симметричны, а $\zeta$ вещественно; в этом случае $T^{(1)*}=T^{(1)}$, $R(\zeta)^*=R(\zeta)$, так что она применима при $v=u$, если мы предположим лишь, что $R(\zeta)T^{(1)}R(\zeta)u\in\mathbf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$. Аналогичное замечание применимо и к остальным формулам.

**Пример 4.7.** Рассмотрим дифференциальный оператор

$$T(\varkappa)=-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)+\varkappa q^{(1)}(x),\quad 0\leqslant x<\infty,\qquad(4.29)$$

с граничным условием $u(0)=0$. Этот оператор ассоциирован с квадратичной формой

$$\mathfrak{t}(\varkappa)[u]=\int\limits_0^\infty[|u'(x)|^2+q(x)|u(x)|^2+\varkappa q^{(1)}(x)|u(x)|^2]\,dx.\qquad(4.30)$$

Этот пример является вариантом примера 3.7 с непрерывным параметром $\varkappa$ вместо дискретного параметра $n$. Если $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы VI.4.2 и если функция $q^{(1)}(x)$ неотрицательна и локально интегрируема, то оператор $T(\varkappa)$ самосопряжен и применимы полученные выше результаты. Формула (4.3), дающая нулевое приближение для резольвенты, справедлива при любом $u\in\mathbf{H}=\mathbf{L}^2(0,\infty)$; формула (4.8), дающая приближение порядка 1/2, справедлива, если $R(\zeta)u\in\mathbf{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$, т. е. если

$$\int\limits_0^\infty q^{(1)}(x)\,|R(\zeta)u(x)|^2\,dx<\infty;\qquad(4.31)$$

формулы (4.18) и (4.19), дающие приближение первого порядка при $u = v$, справедливы, если $R(\zeta)\, u \in \mathrm{D}\,(T^{(1)})$, т. е. если

$$\int_0^\infty q^{(1)}(x)^2\, |R(\zeta)\, u(x)|^2\, dx < \infty, \tag{4.32}$$

и т. д.

Предположим, в частности, что $q(x) \to 0$ при $x \to 0$, как это часто бывает в случае оператора Шрёдингера; $w = R(\zeta)\, u$ является решением уравнения $(T - \zeta)\, w = u$, или

$$-w'' + q(x)\, w - \zeta w = u(x), \quad w(0) = 0. \tag{4.33}$$

Можно показать, что если $u(x)$ очень быстро убывает по абсолютной величине при $x \to \infty$, то при $\zeta < 0$ таким же свойством обладает решение $w(x)$ задачи (4.33). В таком случае формулы (4.31) и (4.32) справедливы, даже если функция $q^{(1)}(x)$ велика по модулю при $x \to \infty$.

Эта функция может также иметь довольно сильную особенность при $x = 0$. Если $q(x)$ есть $o(x^{-2})$ при $x \to 0$, то $w(x) = R(\zeta)\, u(x)$ есть $O(x)$. Поэтому для того чтобы выполнялось условие (4.31), достаточно, чтобы функция $q^{(1)}(x)$ имела порядок $O(x^{-3+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$. Аналогично, $q^{(1)}(x)$ может иметь особенность порядка $O(x^{-1,5+\varepsilon})$, если речь идет об условии (4.32). Таким образом, полученные выше результаты вполне удовлетворительны для приложений к задачам такого рода. Аналогичное замечание относится и к возмущению оператора Шрёдингера в многомерном случае.

**Пример 4.8.** Рассмотрим оператор

$$T(\varkappa) = -\alpha \frac{d^2}{dx^2} + \varkappa \frac{d^4}{dx^4}, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.34}$$

из примера 1.20. Этот оператор ассоциирован с формой $\mathfrak{t}(\varkappa)$, определенной в примере 3.8. Снова $R(\zeta)\, u$ является нулевым приближением для $R(\zeta, \varkappa)\, u$ при любом $u \in \mathrm{H} = \mathrm{L}^2(0, 1)$. Условия теоремы 4.2 о приближении порядка 1/2 требуют, чтобы $w = R(\zeta)\, u \in \mathrm{D}\,(\mathfrak{t}^{(1)})$, т. е. чтобы функция $w(x)$ была дважды дифференцируемой и удовлетворяла граничным условиям $w(0) = w'(0) = w(1) = w'(1) = 0$. Дифференцируемость автоматически следует из того факта, что $w(x)$ является решением дифференциального уравнения второго порядка $(T - \zeta)\, w = u$. Также и граничные условия, соответствующие оператору $T$, требуют, чтобы $w(0) = w(1) = 0$, но остальные два условия $w'(0) = w'(1) = 0$ удовлетворяются лишь в исключительных случаях. Необходимым и достаточным условием для этого является равенство

$$\int_0^1 e^{\pm(-\zeta)^{1/2}x}\, u(x)\, dx = 0, \tag{4.35}$$

так как рассматриваемое условие означает, что $u$ принадлежит области значений сужения $T_0 - \zeta$ оператора $T - \zeta$, которое определяется четырьмя указанными граничными условиями, а это выполняется лишь для $u$, принадлежащих нуль-пространству оператора $(T_0 - \zeta)^*$. Но $T_0^*$ есть просто дифференциальный оператор $-d^2/dx^2$ без каких-либо граничных условий, так что нуль-пространство оператора $(T_0 - \zeta)^*$ натянуто на два элемента $e^{\pm(-\zeta)^{1/2}x}$.

Таким образом, мы заключаем, что «вообще говоря» оценки (4.8) — (4.10) неверны. Например, если $u(x) = 1$ и $\zeta = 0$, то

$$f(x) \equiv R(0, \varkappa)\, u(x) =$$

$$= \frac{x(1-x)}{2\alpha} - \frac{\operatorname{sh} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\varkappa}} \left[ \operatorname{ch} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\alpha}{\varkappa}} - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\alpha}{\varkappa}} \left( x - \frac{1}{2} \right) \right]}{\alpha \sqrt{\frac{\alpha}{\varkappa}} \left( \operatorname{ch} \sqrt{\frac{\alpha}{\varkappa}} - 1 \right)}. \tag{4.36}$$

Верно, что эта функция имеет асимптотическое разложение

$$f(x) = \frac{x(1-x)}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\varkappa}{\alpha}} + \ldots, \quad \frac{x(1-x)}{2\alpha} = T^{-1} u(x) \tag{4.37}$$

при любом *фиксированном* $x$, таком, что $0 < x < 1$, причем опущенный остаток «. . .» меньше, чем любая конечная степень $\varkappa$ при $\varkappa \to 0$. Но этот остаток вовсе не так мал на всем интервале $(0, 1)$. В самом деле, простые вычисления показывают, что по норме он имеет в точности порядок $\varkappa^{3/4}$. Итак,

$$R(0, \varkappa)\, u = T^{-1} u - \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\varkappa}{\alpha}} + O(\varkappa^{3/4}), \tag{4.38}$$

причем порядок $\varkappa^{3/4}$ точен. Можно ожидать, что аналогичный результат справедлив для любой другой функции $u(x)$, во всяком случае, если она является гладкой на $[0, 1]$. Таким образом, мы видим, что в этом примере невозможно получить удовлетворительное асимптотическое разложение, по крайней мере если речь идет о *глобальном* поведении функции $R(\zeta, \varkappa)\, u$.

С другой стороны, известно, что скалярная величина вида $(R(\zeta, \varkappa)\, u, v)$ допускает асимптотическое разложение по степеням $\varkappa^{1/2}$ *до любого порядка* при достаточно гладких $u(x)$ и $v(x)$. Конечно, с помощью доказанных выше общих теорем нельзя исследовать вопрос об асимптотическом разложении по *дробным степеням* [1]) параметра $\varkappa$.

## 4. Асимптотическое разложение собственных значений и собственных векторов

Рассмотрим теперь изолированное собственное значение $\lambda$ оператора $T$ с конечной кратностью $m$ и предположим, что это собственное значение *устойчиво* относительно возмущения $T \to T(\varkappa)$ (в смысле п. 1.4). Так как $T(\varkappa)$ сильно сходится к $T$ в обобщенном смысле, то в окрестности точки $\lambda$ существует ровно $m$ собственных значений (с учетом кратности) оператора $T(\varkappa)$ и эти собственные значения стремятся к $\lambda$ при $\varkappa \to 0$ (см. п. 3.5).

Обозначим через $\mu_j(\varkappa)$, $j = 1, \ldots, m$, эти собственные значения (с учетом кратности) оператора $T(\varkappa)$; для других рассматриваемых величин мы будем использовать обозначения п. 2.3—2.4.

---

[1]) Появление дробных степеней параметра $\varkappa$ — вполне обычное явление в сингулярной теории возмущений для дифференциальных операторов; см. ссылки на литературу в подстрочном примечании на стр. 550.

**Теорема 4.9.** *Пусть собственное значение $\lambda$ оператора $T$ является полупростым, и пусть область значений каждого из операторов $P$, $P^*$ содержится в $\mathrm{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$. Тогда собственные значения $\mu_j(\varkappa)$ допускают асимптотическое разложение*

$$\mu_j(\varkappa) = \lambda + \varkappa\mu_j^{(1)} + o(\varkappa), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{4.39}$$

*где $\mu_j^{(1)}$, $j = 1, \ldots, m$,— собственные значения полуторалинейной формы $\mathfrak{t}^{(1)}[Pu, P^*v]$, рассматриваемой в $m$-мерном пространстве $P\mathrm{H}$ (см. ниже замечание 4.11). Тотальный проектор $P(\varkappa)$, соответствующий этим $m$ собственным значениям $\mu_j(\varkappa)$, обладает тем свойством, что*

$$\| P(\varkappa) - P \| = o(\varkappa^{1/2}). \tag{4.40}$$

**Замечание 4.10.** Если форма $\mathfrak{t}$ симметрична (так что оператор $T$ самосопряжен), то $P^* = P$, и достаточно потребовать, чтобы $P\mathrm{H} \subset \mathrm{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$.

**Замечание 4.11.** Пусть $\mathfrak{t}$ — произвольная полуторалинейная форма в $\mathrm{H}$, и пусть проектор $P$ таков, что каждое из множеств $P\mathrm{H}$, $P^*\mathrm{H}$ содержится в $\mathrm{D}(\mathfrak{t})$. Тогда равенство $\mathfrak{t}_P[u, v] = \mathfrak{t}[Pu, P^*v]$ определяет форму $\mathfrak{t}_P$ с областью определения $\mathrm{H}$. Легко показать, что эта форма ограничена и что $\dim P = m < \infty$. Поэтому существует оператор $T_P \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$ такой, что $\mathfrak{t}_P[u, v] = (T_P u, v)$ для всех $u, v \in \mathrm{H}$. Поскольку $\mathfrak{t}_P[Pu, v] = \mathfrak{t}_P[u, v] = \mathfrak{t}_P[u, P^*v]$ при любых $u$, $v$, то $T_P P = T_P = PT_P$. Таким образом, подпространство $\mathrm{M} = P\mathrm{H}$ инвариантно относительно $T_P$. Собственные значения оператора $T_P$, рассматриваемого в $\mathrm{M}$, будем называть собственными значениями формы $\mathfrak{t}_P$ в $\mathrm{M}$.

Если форма $\mathfrak{t}$ замкнута и секториальна и если $P\mathrm{H} \subset \mathrm{D}(T)$, где $T = T_{\mathfrak{t}}$ — оператор, ассоциированный с $\mathfrak{t}$, то, как нетрудно видеть, $T_P = PTP$. В общем случае, однако, оператор $PTP$ может и не иметь достаточно широкой области определения.

Доказательство теоремы 4.9. 1. Заметим прежде всего, что (мы используем обозначение из (2.18))

$$R(\zeta, \varkappa) P - R(\zeta) P = o(\varkappa^{1/2})_{\mathrm{u}}, \quad \zeta \in \Delta_{\mathrm{s}}, \tag{4.41}$$

причем оценка $o(\varkappa^{1/2})_{\mathrm{u}}$ равномерна на любом компактном подмножестве $\Gamma$ области $\Delta_{\mathrm{s}}$. Равенство (4.41) следует из того факта, что $u \in P\mathrm{H}$ влечет $R(\zeta)u = (\lambda - \zeta)^{-1} u \in \mathrm{D}(\mathfrak{t}^{(1)})$, так что $R(\zeta, \varkappa) u - R(\zeta) u = o(\varkappa^{1/2})$ в силу (4.8) (ср. с доказательством формулы (2.20)). Равномерность по $\zeta \in \Gamma$ может быть легко доказана с помощью (4.15). Выбирая в качестве $\Gamma$ окружность $|\zeta - \lambda| = r$ и интегрируя (4.41) по $\Gamma$, мы таким образом получим

$$P(\varkappa) P - P = o(\varkappa^{1/2})_{\mathrm{u}}. \tag{4.42}$$

Поскольку $\bar{\lambda}$ является устойчивым собственным значением оператора $T^*$, согласно замечанию из п. 3.5, то для операторов $P^*$ и $P(\varkappa)^*$ справедлива формула, аналогичная формуле (4.42). Переходя в этой формуле к сопряженным, находим

$$PP(\varkappa) - P = o(\varkappa^{1/2})_{\mathrm{u}}. \tag{4.43}$$

Из (4.42) и (4.43) с помощью рассуждения, аналогичного проведенному при доказательстве формулы (2.41), получаем, что $Q(\varkappa) \equiv P(\varkappa) - P = o(\varkappa^{1/2})_{\mathrm{u}}$. Это доказывает формулу (4.40).

II. Введем теперь оператор $U(\varkappa)$, определяемый формулой (2.42), и рассмотрим оператор $U(\varkappa)^{-1} R(\zeta, \varkappa) U(\varkappa) P$. Вспоминая, что $U(\varkappa) P = P(\varkappa) U(\varkappa)$ (см. (2.45)), что $Q(\varkappa)^2 = (P(\varkappa) - P)^2 = o(\varkappa)_{\mathrm{u}}$ коммутирует с $P$ и $P(\varkappa)$ и что $P(\varkappa)$ коммутирует с $R(\zeta, \varkappa)$, и учитывая (2.42) и (2.44), получаем

$$\begin{aligned}
U(\varkappa)^{-1} R(\zeta, \varkappa) U(\varkappa) P &= U(\varkappa)^{-1} P(\varkappa) R(\zeta, \varkappa) P(\varkappa) U(\varkappa) = \\
&= (1 + o(\varkappa)_{\mathrm{u}}) PP(\varkappa) R(\zeta, \varkappa) P(\varkappa) P (1 + o(\varkappa)_{\mathrm{u}}) = \\
&= PP(\varkappa) R(\zeta, \varkappa) P + o(\varkappa)_{\mathrm{u}} = \\
&= PP(\varkappa) PPR(\zeta, \varkappa) P + \\
&\quad + PP(\varkappa)(1 - P + (1 - P)) R(\zeta, \varkappa) P + o(\varkappa)_{\mathrm{u}}.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Второй член в правой части есть $o(\varkappa)_{\mathrm{u}}$; это следует из того, что $PP(\varkappa)(1 - P) = P(P(\varkappa) - P)(1 - P) = o(\varkappa^{1/2})_{\mathrm{u}}$ в силу (4.40) и $(1 - P) R(\zeta, \varkappa) P = (1 - P)(R(\zeta, \varkappa) - R(\zeta)) P = o(\varkappa^{1/2})_{\mathrm{u}}$ в силу (4.41). Что касается первого слагаемого, то заметим, что $PP(\varkappa) P = P - PQ(\varkappa)^2 = P + o(\varkappa)_{\mathrm{u}}$. Следовательно,

$$U(\varkappa)^{-1} R(\zeta, \varkappa) U(\varkappa) P = PR(\zeta, \varkappa) P + o(\varkappa)_{\mathrm{u}}. \tag{4.45}$$

Первое слагаемое в правой части равенства (4.45) можно вычислить, используя (4.10). Заменяя в (4.10) $u$, $v$ на $Pu$, $P^*v$, получаем

$$\begin{aligned}
(PR(\zeta, \varkappa) Pu, v) &= (R(\zeta, \varkappa) Pu, P^*v) = \\
&= (\lambda - \zeta)^{-1} (Pu, v) - \varkappa (\lambda - \zeta)^{-2}\, \mathfrak{t}^{(1)} [Pu, P^*v] + o(\varkappa).
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Поскольку $\dim P < \infty$, то отсюда следует, что

$$PR(\zeta, \varkappa) P = (\lambda - \zeta)^{-1} P - \varkappa (\lambda - \zeta)^{-2} T_P^{(1)} + o(\varkappa)_{\mathrm{u}}, \tag{4.47}$$

где $T_P^{(1)}$ — ограниченный оператор, ассоциированный с формой $\mathfrak{t}_P^{(1)}[u, v] = \mathfrak{t}^{(1)}[Pu, P^*v]$ (см. замечание 4.11).

Подстановка (4.47) в (4.45) дает разложение, аналогичное разложению (2.24), а разложение (4.39) для $\mu_j(\varkappa)$ получается так же, как и в теореме 2.6.

Перейдем теперь к разложению собственных значений $\mu_j(\varkappa)$ до второго порядка по $\varkappa$.

**Теорема 4.12.** *Предположим, что выполнены условия теоремы 4.9 и что, кроме того,* $P\mathbf{H} \in \mathbf{D}\,(T^{(1)})$ *и* $P^*\mathbf{H} \subset \mathbf{D}\,(T^{(1)*})$. *Если собственные значения (без учета кратности)* $\lambda_j$, $j = 1, \ldots, s$, *оператора* $T_{\mathrm{P}}^{(1)}$ *являются полупростыми, то справедливы все результаты теоремы* 2.9.

**Замечание 4.13.** Оператор $[PT^{(1)}]$ из теоремы 2.9 равен в данном случае $(T^{(1)*}P^*)^*$; заметим, что $T^{(1)*}P^* \in \mathscr{B}\,(\mathbf{H})$, так как $P^*\mathbf{H} \subset \mathbf{D}\,(T^{(1)*})$ по предположению.

Доказательство теоремы 4.12. Если $u \in P\mathbf{H}$, то $R\,(\zeta)\,u = (\lambda - \zeta)^{-1}\,u \in \mathbf{D}\,(T^{(1)})$, так что справедливо разложение (4.18) для $R\,(\zeta, \varkappa)\,u$. Оценка $o\,(\varkappa)$ в правой части формулы (4.18) равномерна по $\zeta$ на любом компактном подмножестве области $\Delta_s$, как ясно из (4.21) и леммы III.3.7. В предположении $\dim P < \infty$ мы опять получаем формулу (2.20) для $R\,(\zeta, \varkappa)\,P$.

Рассматривая сопряженные $R\,(\zeta)^*$ и т. д., мы приходим к формуле, которая получается из (2.20) при замене $P$, $R\,(\zeta), \ldots$ на $P^*$, $R\,(\zeta)^*, \ldots$. Переходя к сопряженным, мы получаем формулу (2.35) для $PR\,(\zeta, \varkappa)$ с $o\,(\varkappa)_{\mathrm{u}}$ вместо $o\,(\varkappa)_{\mathrm{s}}$.

После того как получены эти два выражения, дальнейшее доказательство проводится точно так же, как и в теореме 2.9.

**Замечание 4.14.** Таким же образом можно получить разложения собственных значений и собственных векторов до более высокого порядка по $\varkappa$. Мы не будем останавливаться на этом подробно [1], так как в большинстве приложений достаточно иметь приближение второго порядка для собственных значений. Заметим только, что, поскольку в формальном разложении для $\lambda\,(\varkappa)$ третий коэффициент $\lambda^{(3)}$ содержит выражение $\operatorname{tr} T^{(1)}ST^{(1)}ST^{(1)}P = \mathfrak{t}^{(1)}\,[ST^{(1)}\varphi,\ S^*T^{(1)*}\varphi]$ (при $m = 1$), то мы должны предположить, что

$$ST^{(1)}P\mathbf{X} \subset \mathbf{D}\,(\mathfrak{t}^{(1)}),\ S^*T^{(1)*}P^*\mathbf{X} \subset \mathbf{D}\,(\mathfrak{t}^{(1)}), \tag{4.48}$$

для того чтобы получить разложение собственных значений до порядка $\varkappa^3$. Аналогично, для разложения собственных значений до порядка $\varkappa^4$ нужно потребовать, чтобы существовали

$$T^{(1)}ST^{(1)}P,\ T^{(1)*}S^*T^{(1)*}P^* \in \mathscr{B}\,(\mathbf{H}). \tag{4.49}$$

**Пример 4.15.** Рассмотрим дифференциальный оператор $T\,(\varkappa)$, определяемый формулой (4.29), с граничным условием $u\,(0) = 0$ (см. пример 4.7). Предположим для определенности, что вещественный невозмущенный потенциал $q\,(x)$ стремится к нулю при $x \to \infty$. Тогда, как хорошо известно, невозмущенный оператор $T$ имеет только отрицательные собственные значения,

---

[1] См. В. Крамер [1, 2], где приведены подробные результаты для частного случая, когда $H\,(\varkappa)$ есть самосопряженное семейство Фридрихса (т. е. $\mathfrak{t}\,(\varkappa)$ определяется формулой $\mathfrak{t}\,(\varkappa)\,[u] = (K\,(\varkappa)\,u, u)$, где $K\,(\varkappa)$ — данное семейство симметричных операторов).

причем все они изолированы. Пусть $\lambda$ — одно из этих собственных значений (простое) и пусть $\varphi$ — соответствующая собственная функция. Поскольку соответствующий собственный проектор $P$ является ортогональным проектором на одномерное подпространство, натянутое на $\varphi$, то теорема 4.9 применима к $\lambda$, если

$$\int_0^\infty q^{(1)}(x)\,|\varphi(x)|^2\,dx < \infty. \tag{4.50}$$

Аналогично, теорема 4.12 применима, если (заметим, что $P$ и $T^{(1)}$ являются в данном случае самосопряженными)

$$\int_0^\infty q^{(1)}(x)^2\,|\varphi(x)|^2\,dx < \infty. \tag{4.51}$$

Иными словами, можно получить разложение до порядка $\varkappa$, если выполняется (4.50), и до порядка $\varkappa^2$, если выполняется (4.51).

Хорошо известно, однако, что $\varphi(x)$ ведет себя как $x$ при $x \to 0$ и как $\exp[-(-\lambda)^{1/2}x]$ при $x \to \infty$ (детали поведения зависят от $q(x)$). Поэтому условия (4.50) и (4.51) налагают очень слабые ограничения на $q^{(1)}$. Например, (4.50) выполняется, если $q^{(1)}(x)$ есть $O(x^{-3+\varepsilon})$ при $x \to 0$ и $O(x^n)$ при $x \to \infty$ для любого $n$. Можно также убедиться, что условия (4.48) и (4.49) выполняются при весьма общих условиях на $q^{(1)}$; достаточно заметить, что функция $w = ST^{(1)}\varphi$ является решением дифференциального уравнения $-w'' + q(x)\,w - \lambda w = \psi(x)$ с дополнительным условием $(w, \varphi) = 0$, где $\psi = (1 - P)\,T^{(1)}\varphi$ (т. е. $\psi(x) = q^{(1)}(x)\,\varphi(x) - c\varphi(x)$, где $c$ определяется по формуле (4.50)).

## § 5. Спектральная концентрация

### 1. Неустойчивые собственные значения

Исследуя возмущение изолированного собственного значения $\lambda$, мы предполагали, что это собственное значение устойчиво относительно рассматриваемого возмущения (см. п. 1.4, 2.3, 2.4, 3.5, 4.4). Были даны некоторые достаточные условия устойчивости, но выполняются они не всегда. Очень часто оказывается, что данное собственное значение $\lambda$ неустойчиво; в этом случае спектр возмущенного оператора может вести себя по-разному, и было бы трудно дать общее описание его поведения.

В случае самосопряженных операторов наиболее распространенным явлением, связанным с неустойчивостью собственного значения $\lambda$, является поглощение этого собственного значения непрерывным спектром: возмущенный оператор имеет непрерывный спектр, который покрывает интервал, содержащий точку $\lambda$, и не имеет собственных значений вблизи этой точки[1]. В таком

---

[1] Существует противоположное явление, состоящее в том, что непрерывный спектр превращается при возмущении в дискретный, но мы не будем его рассматривать; см. Маслов [1], [3].

случае не имеет смысла говорить о «возмущении собственного значения $\lambda$».

Тем не менее часто возможно получить формальный степенной ряд для «возмущенного собственного значения $\lambda(\varkappa)$» с помощью формул, данных в гл. VII, по крайней мере до некоторого порядка по $\varkappa$, и тогда возникает вопрос, что же такой ряд означает.

Было предположено, что, хотя спектр возмущенного оператора непрерывен, имеет место некая концентрация спектра в точках, совпадающих с этими *псевдособственными значениями*, вычисленными с помощью формального ряда.

Здесь мы дадим определение «концентрации» и докажем некоторые теоремы, показывающие, что такая концентрация имеет место в точности там, где расположены псевдособственные значения [1]).

## 2. Спектральная концентрация

Пусть $\mathrm{H}$ — гильбертово пространство, $\{H_n\}$ — последовательность самосопряженных операторов в $\mathrm{H}$, $\{E_n(\lambda)\}$ — соответствующая последовательность спектральных семейств. Обозначим через $E_n(\mathrm{S})$, $\mathrm{S} \subset \mathrm{R}$, спектральную меру [2]), построенную с помощью $E_n(\lambda)$. (В дальнейшем все рассматриваемые подмножества вещественной оси предполагаются борелевскими.)

Пусть $\mathrm{S}_n \subset \mathrm{R}$, $n = 1, 2, \ldots$. Будем говорить, что спектр оператора $H_n$ *(асимптотически) концентрируется* на $\mathrm{S}_n$, если

$$E_n(\mathrm{S}_n) \xrightarrow[\mathrm{s}]{} 1, \quad n \to \infty, \tag{5.1}$$

или, что эквивалентно,

$$E_n(\mathrm{R} - \mathrm{S}_n) \xrightarrow[\mathrm{s}]{} 0, \tag{5.2}$$

где $\mathrm{R} - \mathrm{S}_n$ есть дополнение множества $\mathrm{S}_n$ в $\mathrm{R}$. Множество $\mathrm{S}_n = \mathrm{S}$ может не зависеть от $n$; в этом случае будем говорить, что спектр оператора $H_n$ *концентрируется* на $\mathrm{S}$. Очевидно, что если спектр оператора $H_n$ концентрируется на $\mathrm{S}_n$, то он также концентрируется на любом $\mathrm{S}_n'$, таком, что $\mathrm{S}_n \subset \mathrm{S}_n'$.

---

[1]) Спектральная концентрация была рассмотрена Титчмаршем [3] — [5] (в частном случае обыкновенных дифференциальных операторов), который показал, что аналитическое продолжение функции Грина, являющееся ядром резольвенты возмущенного оператора, имеет полюс вблизи вещественной оси (как функция параметра $\zeta$), если невозмущенное ядро имеет полюс на вещественной оси. Более абстрактные результаты были получены Фридрихсом и Рейто [1], Конли и Рейто [1]. В работе Т. Като [3] дается несколько иная постановка задачи. Спектральная концентрация тесно связана с так называемым слабым квантованием в квантовой механике; в этой связи см. также Браунел [4].

[2]) См. п. VI.5.1 и X.1.2. Здесь нам потребуются лишь элементарные свойства спектральной меры; в большинстве случаев достаточно рассматривать множества $\mathrm{S}$, которые являются объединениями интервалов.

Таким образом, спектральная концентрация является *асимптотическим понятием*, связанным с данной последовательностью (или семейством) операторов $\{H_n\}$; не имеет смысла говорить о спектральной концентрации по отношению к одному оператору $H$ (за исключением тривиального частного случая, когда все члены последовательности $\{H_n\}$ совпадают с $H$).

Обобщая, мы будем говорить, что часть спектра оператора $H_n$, содержащаяся в некотором подмножестве $\mathrm{T}$ вещественной оси, (асимптотически) концентрируется на $\mathrm{S}_n$, если

$$E_n(\mathrm{T}-\mathrm{S}_n)\underset{s}{\to}0, \qquad (5.3)$$

где $\mathrm{T}-\mathrm{S}_n=\mathrm{T}\cap(\mathrm{R}-\mathrm{S}_n)$ (множества $\mathrm{S}_n$ не обязаны содержаться в $\mathrm{T}$). Очевидно, что из (5.2) следует (5.3) для любого $\mathrm{T}$, поскольку $E_n(\mathrm{T}-\mathrm{S}_n)\leqslant E_n(\mathrm{R}-\mathrm{S}_n)$. Обратно, если части спектра оператора $H_n$ в $\mathrm{T}$ и $\mathrm{R}-\mathrm{T}$ концентрируются на $\mathrm{S}_n$, то и весь спектр концентрируется на $\mathrm{S}_n$, так как $E_n(\mathrm{R}-\mathrm{S}_n)=E_n(\mathrm{T}-\mathrm{S}_n)+E_n(\mathrm{R}-\mathrm{T}-\mathrm{S}_n)$. По этой причине в большинстве случаев достаточно рассматривать концентрацию по отношению к некоторому данному множеству $\mathrm{T}$.

Основным результатом о спектральной концентрации является

**Теорема 5.1.** *Пусть $H_n$ сильно сходится в обобщенном смысле к самосопряженному оператору $H$, и пусть $\mathrm{S}\subset\mathrm{R}$ — открытое множество, содержащее $\Sigma(H)$. Тогда спектр оператора $H_n$ асимптотически концентрируется на $\mathrm{S}$. Кроме того, $E_n(\mathrm{S}\cap\mathrm{I})\underset{s}{\to}E(\mathrm{I})$ для любого интервала $\mathrm{I}$, концы которого не совпадают с собственными значениями оператора $H$ (через $E$ обозначена спектральная мера для $H$).*

Доказательство. Открытое множество $\mathrm{S}$ является объединением не более чем счетного числа непересекающихся интервалов $\mathrm{I}_k$, каждый из которых, за исключением, возможно, одного или двух, является конечным. Из условия $\Sigma(H)\subset\mathrm{S}$ следует, что $\sum\limits_k E(\mathrm{I}_k)=E(\mathrm{S})=1$, причем ряд сходится сильно. Следовательно, линейная оболочка подпространств $E(\mathrm{I}_k)\,\mathbf{H}$ плотна в $\mathbf{H}$. Поэтому для доказательства формулы (5.1) достаточно показать, что $E_n(\mathrm{S})\,u\to u$, если $u\in E(\mathrm{I}_u)\,\mathbf{H}$ при некотором $k$.

Предположим сначала, что интервал $\mathrm{I}_k=(a_k,\ b_k)$ конечен. Тогда точки $a_k$, $b_k$ принадлежат $\mathrm{P}(H)$, поскольку они не могут принадлежать $\Sigma(H)$. Следовательно, существуют $a'_k$, $b'_k$ такие, что $a_k<a'_k<b'_k<b_k$ и интервалы $[a_k,\ a'_k]$, $[b_k,\ b'_k]$ содержатся в $\mathrm{P}(H)$. Полагая $\mathrm{I}'_k=(a'_k,\ b'_k)$, получаем $E(\mathrm{I}_k)=E(\mathrm{I}'_k)$, поэтому $E_n(\mathrm{I}'_k)u=E_n(b'_k-0)u-E_n(a'_k)u\to E(b'_k)\,u-E(a'_k)u=E(\mathrm{I}'_k)\,u=u$ (см. теорему 1.15 и подстрочное примечание

к ней). Поскольку $\mathrm{I}'_k \subset \mathrm{S}$, то $E_n(\mathrm{I}'_k) \leqslant E_n(\mathrm{S})$, следовательно, $E_n(\mathrm{S})\, u \to u$, что мы и хотели показать.

Если интервал $\mathrm{I}_k$ не является конечным, то нужно немного изменить доказательство. Пусть, например, $b_k = \infty$; положим $b'_k = \infty$; тогда $E_n(\infty)\, u = u = E(\infty)\, u$ и приведенное доказательство проходит.

Последнее утверждение теоремы следует из того, что $E_n(\mathrm{S} \cap \mathrm{I}) = E_n(\mathrm{S})\, E_n(\mathrm{I})$, ибо $E_n(\mathrm{I}) \xrightarrow[\mathrm{s}]{} E(\mathrm{I})$ в силу теоремы 1.15.

### 3. Псевдособственные векторы и спектральная концентрация

Теорема 5.1 показывает, что если $H_n \xrightarrow[\mathrm{s}]{} H$ в обобщенном смысле, то спектр оператора $H_n$ асимптотически концентрируется на любой окрестности множества $\Sigma(H)$. В частности, пусть $\lambda$ является изолированным собственным значением оператора $H$ с расстоянием $d$ от других собственных значений, и пусть $\mathrm{I} = (\lambda - d/2,\ \lambda + d/2)$. Тогда часть спектра оператора $H_n$, лежащая в I, асимптотически концентрируется на произвольно малой окрестности точки $\lambda$ (см. (5.3)).

Теперь мы уточним этот результат, локализуя концентрацию на уменьшающемся интервале (или интервалах), зависящем от $n$, при некоторых дополнительных предположениях.

**Теорема 5.2.** *Пусть* $H_n \xrightarrow[\mathrm{s}]{} H$ *в обобщенном смысле и пусть* $\lambda$ *и* I *те же, что и выше. Пусть* $P$ *— собственный проектор оператора* $H$, *соответствующий* $\lambda$, *и пусть* $\dim P = m < \infty$. *Предположим, что существует* $m$ *последовательностей «псевдособственных значений»* $\{\lambda_{jn}\}$ *и «псевдособственных векторов»* $\{\varphi_{jn}\}$ *оператора* $H_n$, *таких, что*

$$\|(H_n - \lambda_{jn})\,\varphi_{jn}\| = \varepsilon_{jn} \to 0, \quad \varphi_{jn} \to \varphi_j, \quad n \to \infty, \tag{5.4}$$

*где векторы* $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ *образуют ортонормированный базис в* PH. *Тогда часть спектра оператора* $H_n$, *лежащая в* I, *асимптотически концентрируется на объединении интервалов* $\mathrm{I}_{jn} = (\lambda_{jn} - \alpha_n \varepsilon_{jn},\ \lambda_{jn} + \alpha_n \varepsilon_{jn})$, *где* $\{\alpha_n\}$ *— любая последовательность положительных чисел, такая, что* $\alpha_n \to \infty$.

Доказательство. Из (5.4) следует, что

$$\varepsilon_{jn}^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (\mu - \lambda_{jn})^2\, d\,(E_n(\mu)\,\varphi_{jn},\ \varphi_{jn}) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha_n^2 \varepsilon_{jn}^2 \int\limits_{\mu \notin I_{jn}} d\,(E_n(\mu)\,\varphi_{jn},\ \varphi_{jn}) =$$

$$= \alpha_n^2 \varepsilon_{jn}^2 \,\|(1 - E_n(I_{jn}))\,\varphi_{jn}\|^2.$$

Поэтому $\| (1 - E_n(\mathrm{I}_{jn})) \varphi_{jn} \| \leqslant 1/\alpha_n \to 0$, $n \to \infty$. Поскольку $\| (1 - E_n(\mathrm{I}_{jn})) (\varphi_{jn} - \varphi_j) \| \leqslant \| \varphi_{jn} - \varphi_j \| \to 0$, то

$$(1 - E_n(\mathrm{I}_{jn})) \varphi_j \to 0, \quad n \to \infty. \tag{5.5}$$

Обозначим через $\mathrm{I}_n$ объединение интервалов $\mathrm{I}_{1n}, \ldots, \mathrm{I}_{mn}$; тогда $1 - E_n(\mathrm{I}_n) \leqslant 1 - E_n(\mathrm{I}_{jn})$, поэтому из (5.5) следует, что $(1 - E_n(\mathrm{I}_n)) \varphi_j \to 0$. Поскольку $\varphi_j$ порождают РН, то

$$(1 - E_n(\mathrm{I}_n)) P \to 0 \text{ по норме.} \tag{5.6}$$

С другой стороны,

$$E_n(\mathrm{I})(1 - P) \xrightarrow[s]{} 0, \tag{5.7}$$

так как $E_n(\mathrm{I}) \xrightarrow[s]{} E(\mathrm{I}) = P$ по теореме 1.15. Умножая (5.6) на $E_n(\mathrm{I})$, (5.7) на $1 - E_n(\mathrm{I}_n)$ и складывая результаты, получаем $E_n(\mathrm{I} - \mathrm{I}_n) = E_n(\mathrm{I})(1 - E_n(\mathrm{I}_n)) \xrightarrow[s]{} 0$, что мы и хотели показать.

**Замечание 5.3.** Мы можем выбрать $\alpha_n$ так, чтобы $|\mathrm{I}_{jn}| = 2\alpha_n \varepsilon_{jn} \to 0$. Следовательно, часть спектра оператора $H_n$, лежащая в I, асимптотически концентрируется на множестве $\mathrm{I}_n$ с мерой $|\mathrm{I}_n| \to 0$, и теорема 5.2 усиливает теорему 5.1. Следует заметить, что для любой окрестности $\mathrm{I}' \subset \mathrm{I}$ точки $\lambda$ при достаточно больших $n$ справедливо включение $\mathrm{I}_n \subset \mathrm{I}'$. Действительно, пусть интервал $\mathrm{I}''$, содержащий $\lambda$, является собственным подмножеством интервала $\mathrm{I}'$; тогда $E_n(\mathrm{I}'') \varphi_j \to P\varphi_j = \varphi_j$, так что $E_n(\mathrm{I}_{jn} \cap \mathrm{I}'') \varphi_j = E_n(\mathrm{I}_{jn}) E_n(\mathrm{I}'') \varphi_j \to \varphi_j$ в силу (5.5). Поскольку $|\mathrm{I}_{jn}| \to 0$, то $\mathrm{I}_{jn} \subset \mathrm{I}'$; следовательно, $\mathrm{I}_n \subset \mathrm{I}'$ при достаточно больших $n$. В частности, $\lambda_{jn} \to \lambda$ для любого $j$.

## 4. Асимптотические разложения

Рассмотрим теперь семейство $H(\varkappa)$ самосопряженных операторов, формально представимых в виде $H + \varkappa H^{(1)}$, где $H$ — самосопряженный, $H^{(1)}$ — симметричный оператор. Более точно, предположим, что выполнены условия ii), iii) из п. 2.1, а именно, что $\mathrm{D} = \mathrm{D}(H) \cap \mathrm{D}(H^{(1)})$ является ядром оператора $H$ и что оператор $H + \varkappa H^{(1)}$ (с областью определения D) имеет самосопряженное продолжение $H(\varkappa)$ при $0 < \varkappa \leqslant 1$. Тогда условие iv из п. 2.1 выполняется автоматически, так как множество $\Delta_b \cap \mathrm{P}(H)$ содержит все невещественные комплексные числа.

Было показано, что при этих условиях $H(\varkappa) \xrightarrow[s]{} H$, $\varkappa \to 0$, в обобщенном смысле (см. п. 2.1) [1]. Из теоремы 5.1 следует, что

---

[1] Такой же результат справедлив, если вместо вышеприведенных условий выполнены предположения из п. 4.1 и, кроме того, формы $\mathfrak{t} = \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{t}^{(1)} = \mathfrak{h}^{(1)}$ симметричны (так что операторы $T = H$ и $T(\varkappa) = H(\varkappa)$ самосопряжены).

спектр оператора $H(\varkappa)$ асимптотически концентрируется на любой окрестности множества $\Sigma(H)$. Если $\lambda$ — изолированное собственное значение оператора $H$ с расстоянием $d$ от остальных собственных значений и собственным проектором $P$, то часть спектра оператора $H(\varkappa)$, лежащая в $\mathrm{I} = (\lambda - d/2,\ \lambda + d/2)$, асимптотически концентрируется на любой малой окрестности точки $\lambda$, причем

$$E(\mathrm{I},\ \varkappa) \xrightarrow[\mathrm{s}]{} P, \quad \varkappa \to 0. \tag{5.8}$$

Теперь мы уточним этот результат при дополнительных предположениях относительно невозмущенного собственного пространства $P\mathrm{H}$.

**Теорема 5.4.** *Пусть* $\dim P = m < \infty$ *и* $P\mathrm{H} \subset \mathrm{D}(H^{(1)})$. *Пусть, далее,* $\mu_j^{(1)}$, $j = 1, \ldots, m$, *— собственные значения (с учетом кратности) симметричного оператора* $PH^{(1)}P$ *в* $m$*-мерном подпространстве* $P\mathrm{H}$. *Тогда часть спектра оператора* $H(\varkappa)$, *лежащая в* $\mathrm{I}$, *асимптотически концентрируется на объединении* $m$ *интервалов длины* $o(\varkappa)$ *с центрами в* $\lambda + \varkappa\mu_j^{(1)}$.

**Замечание 5.5.** Теорему 5.4 можно интерпретировать так: $H(\varkappa)$ имеет $m$ псевдособственных значений $\lambda + \varkappa\mu_j^{(1)} + o(\varkappa)$ (ср. с соответствующей теоремой 2.6 для случая устойчивого $\lambda$). Конечно, такое утверждение не совсем обосновано до тех пор, пока не построены соответствующие псевдособственные векторы; последнее будет сделано в процессе доказательства.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j\}$ — ортонормированный базис в $P\mathrm{H}$, образованный собственными векторами оператора $PH^{(1)}P$:

$$PH^{(1)}P\varphi_j = \mu_j^{(1)}\varphi_j, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{5.9}$$

Будем искать псевдособственные векторы оператора $H(\varkappa)$ в виде

$$\varphi_j(\varkappa) = \varphi_j + \varkappa\varphi_j^{(1)}(\varkappa), \quad \|\varphi_j^{(1)}(\varkappa)\| \leqslant M, \tag{5.10}$$

так что при $\varkappa \to 0$

$$\varkappa^{-1}\,\|(H(\varkappa) - \lambda - \varkappa\mu_j^{(1)})\,\varphi_j(\varkappa)\| \leqslant \varepsilon(\varkappa) \to 0. \tag{5.11}$$

Тогда применение теоремы 5.2 приведет к требуемому результату (при этом дискретный параметр $n$ заменяется непрерывным параметром $\varkappa$): достаточно выбрать в качестве $\mathrm{I}_{j\varkappa}$ интервал с центром $\lambda + \varkappa\mu_j^{(1)}$ длины $2\varkappa\alpha(\varkappa)\,\varepsilon(\varkappa)$, где $\alpha(\varkappa) \to \infty$ и $\alpha(\varkappa)\,\varepsilon(\varkappa) \to 0$.

Пусть $S$ — приведенная резольвента оператора $H$, соответствующая $\lambda$ (см. п. III.6.5). Тогда $S \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, $(H - \lambda)\,S = 1 - P$. Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $SH^{(1)}\varphi_j \in \mathrm{D}(H)$ и $\mathrm{D}$ есть ядро оператора $H$, то существует вектор $\varphi_j' \in \mathrm{D}$ такой, что $\|\varphi_j'\| \leqslant \|SH^{(1)}\varphi_j\| + 1 \leqslant M$ и $\|(H - \lambda)(\varphi_j' + SH^{(1)}\varphi_j\| < \varepsilon/2$. Так как $(H - \lambda)\, SH^{(1)}\varphi_j = (1 - P)\, H^{(1)}\varphi_j = H^{(1)}\varphi_j - \mu_j^{(1)}\varphi_j$, то (заметим, что $(H - \lambda)\,\varphi_j = 0$)

$$\begin{aligned}\varkappa^{-1}\, \| (H(\varkappa) - \lambda - \varkappa\mu_j^{(1)})\, (\varphi_j + \varkappa\varphi_j') \| &= \\ = \varkappa^{-1}\, \| (H - \lambda)\,\varphi_j &+ \varkappa\,(H - \lambda)\,\varphi_j' + \\ + \varkappa\,(H^{(1)} - \mu_j^{(1)})\,\varphi_j &+ \varkappa^2\,(H^{(1)} - \mu_j^{(1)})\,\varphi_j' \| \leqslant \\ &\leqslant (\varepsilon/2) + \varkappa\, \| (H^{(1)} - \mu_j^{(1)})\,\varphi_j' \|.\end{aligned}$$

Таким образом, существует $\delta > 0$ такое, что

$$\varkappa^{-1}\, \| (H(\varkappa) - \lambda - \varkappa\mu_j^{(1)})\, (\varphi_j + \varkappa\varphi_j') \| < \varepsilon, \quad 0 < \varkappa < \delta; \tag{5.12}$$

заметим, что $\varphi_j'$ также зависит от $\varepsilon$.

Пусть теперь $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots, \varepsilon_n \to 0$. Через $\delta_n$ и $\varphi_{jn}'$ обозначим $\delta$ и $\varphi_j'$ в формуле (5.12), соответствующие $\varepsilon = \varepsilon_n$. Мы можем предположить, что $\delta_1 > \delta_2 > \ldots, \delta_n \to 0$. Положим

$$\varphi_j(\varkappa) = \varphi_j + \varkappa\varphi_{jn}' \quad \text{при} \quad \delta_{n+1} \leqslant \varkappa < \delta_n. \tag{5.13}$$

Тогда (5.11) выполняется, причем

$$\varepsilon(\varkappa) = \varepsilon_n \quad \text{при} \quad \delta_{n+1} \leqslant \varkappa < \delta_n.$$

Этим завершается доказательство.

**Замечание 5.6.** Теорема 5.4 показывает, что псевдособственные значения допускают асимптотическое разложение до первого порядка по $\varkappa$, причем имеется спектральная концентрация на объединении $m$ интервалов длины $o(\varkappa)$. Аналогично можно показать, что псевдособственные значения допускают асимптотическое разложение до порядка $\varkappa^n$, причем имеется спектральная концентрация на объединении $m$ интервалов длины $o(\varkappa^n)$, если выполнено следующее условие: все выражения вида $X_1 \ldots X_k P$, где $k \leqslant n$, а каждое $X_j$ равняется $S$ или $T^{(1)}S$, определены всюду в $\mathbf{H}$[1]). Легко видеть, что в этом случае формальное разложение для тотального проектора $P(\varkappa)$, данное в п. II.2.1, имеет смысл до порядка $\varkappa^n$.

**Пример 5.7.** Для оператора $T(\varkappa) = H(\varkappa)$ из примера 1.17 спектральная концентрация имеет место, если $\varkappa$ вещественно; мы будем теперь писать $H$, $H^{(1)}$ вместо $T$, $T^{(1)}$ (в обозначениях примера 2.5 это соответствует случаю $e^{i\theta} = \pm 1$). Действительно, основные предположения этого пункта выполнены (см. тот же пример). Если $xf(x) \in \mathrm{L}^2$, то выполнены условия теоремы 5.4, так что для $H(\varkappa)$ имеется спектральная концентрация вблизи точки $\lambda = -1$ на интервале длины $o(\varkappa)$ с псевдособственными значениями $\lambda + \varkappa \int x\, |f(x)|^2\, dx$. Можно показать, что если $f(x)$ быстро стремится к 0 при $x \to \pm\infty$, то имеет место концентрация более высокого порядка.

---

[1]) Этот результат доказан Ридделом [1].

**Пример 5.8** (*эффект Штарка*). Типичным примером спектральной концентрации является эффект Штарка. Если мы ограничимся простейшим случаем атома типа водорода, то соответствующий оператор действует в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathrm{R}^3)$ и *формально* записывается так:

$$-\Delta-\frac{2}{r}+\varkappa x_1. \tag{5.14}$$

Невозмущенный оператор $H=-\Delta-\frac{2}{r}$, представляющий собой оператор Шрёдингера для атома водорода, изучен в п. V.5.3. Известно, что этот оператор самосопряжен, и $\mathrm{C}_0^\infty$ является его ядром. Можно показать [1], что при вещественных $\varkappa \neq 0$ оператор (5.14) с областью определения $\mathrm{C}_0^\infty$ существенно самосопряжен; обозначим через $H(\varkappa)$ единственное самосопряженное продолжение этого оператора. Тогда множество $\mathrm{D}=\mathrm{D}(H(\varkappa)) \cap \mathrm{D}(H)$ содержит $\mathrm{C}_0^\infty$, поэтому оно является ядром как для $H$, так и для $H(\varkappa)$. Таким образом, основные предположения выполнены. Далее, можно показать, что для любого собственного значения $\lambda$ оператора $H$ (которое обязательно отрицательно) условия, сформулированные в замечании 5.6, выполнены при любом целом $n$. Следовательно [2], псевдособственные значения имеют асимптотическое разложение до любого порядка по $\varkappa$ (которое, таким образом, в точности совпадает с формальным рядом теории возмущений), причем для любого $n$ имеет место спектральная концентрация на объединении конечного числа интервалов длины $o(\varkappa^n)$.

---

[1] См. Штуммель [1], Като и Икэбэ [1].

[2] Подробности см. в работе Риддела [1].

# ГЛАВА IX

# ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ПОЛУГРУПП ОПЕРАТОРОВ

Предмет изучения данной главы берет начало в так называемой зависящей от времени теории возмущений в квантовой механике; в этой теории основной проблемой является исследование возмущений унитарной группы, порождаемой некоторым гамильтонианом, при малых возмущениях последнего. Эта задача естественным образом приводит к теории возмущений полугрупп, которая сама по себе не менее важна для приложений.

Глава начинается с краткого описания основных результатов общей теории полугрупп операторов. Здесь рассматриваются только квазиограниченные полугруппы, причем подчеркивается важность голоморфных полугрупп, являющихся частным случаем квазиограниченных полугрупп.

В следующих параграфах изучаются различные задачи теории возмущений полугрупп. Показано, что голоморфные полугруппы довольно хорошо ведут себя по отношению к возмущениям, что, вообще говоря, не имеет места для произвольных квазиограниченных полугрупп. В последнем параграфе изложена теория аппроксимации полугрупп с помощью дискретных полугрупп. Эта теория является основой для аппроксимации некоторых дифференциальных уравнений с помощью конечно-разностных уравнений.

## § 1. Однопараметрические полугруппы и группы операторов

### 1. Постановка задачи

В этой главе мы рассмотрим зависящую от времени теорию возмущений. Ее возникновение связано с исследованием решения зависящего от времени уравнения Шрёдингера в квантовой механике

$$\frac{du}{dt} = -iHu, \tag{1.1}$$

где $u = u(t)$ есть элемент гильбертова пространства $\mathbf{H}$, а $H$ — самосопряженный оператор в $\mathbf{H}$. Если $H = H(\varkappa)$ зависит от малого параметра $\varkappa$, то возникает вопрос о зависимости решения уравнения (1.1) от $\varkappa$.

Уравнение (1.1) есть частный случай уравнения вида

$$\frac{du}{dt} = -Tu \tag{1.2}$$

в банаховом пространстве X. Здесь $T$ — линейный оператор в X, $t$ обычно пробегает полубесконечный интервал $0 < t < \infty$, и при $t = 0$ ставится начальное условие. Решение задачи (1.2) формально дается выражением $u = u(t) = e^{-tT}u(0)$. Таким образом, наша первая задача — выяснить, как можно определить экспоненциальную функцию $e^{-tT}$ от оператора $T$; затем мы должны исследовать, как изменяется $e^{-tT}$ при изменении $\varkappa$, в предположении, что $T = T(\varkappa)$ зависит от параметра $\varkappa$.

Функция $e^{-tT}$ есть частный случай функции от оператора $T$. Ранее мы уже рассматривали теорию возмущений для некоторых функций от $T$. Простейшей из них является резольвента $(T - \zeta)^{-1}$, подробно изученная в предыдущих главах. В случае когда $T = H$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, мы рассмотрели также такие функции от $H$, как $|H|$, $|H|^{1/2}$, и $E(\lambda)$ — спектральное разложение оператора $H$. Важность функции $e^{-tT}$ в ее тесной связи с уравнением (1.2), которое имеет широкое поле применений. Ввиду основного тождества $e^{-(s+t)T} = e^{-sT}e^{-tT}$ семейство операторов $\{e^{-tT}\}_{t>0}$ называется *однопараметрической полугруппой операторов*. Если $t$ может изменяться на всей числовой прямой $-\infty < t < \infty$, то $\{e^{-tT}\}$ есть *однопараметрическая группа операторов*.

## 2. Определение экспоненциальной функции

Пусть X — банахово пространство. Если $T \in \mathscr{B}(X)$, то оператор $e^{-tT}$ может быть определен просто с помощью ряда Тейлора:

$$e^{-tT} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^n T^n, \tag{1.3}$$

который абсолютно сходится для любого комплексного числа $t$ (см. пример I.4.4). Поэтому $e^{-tT}$ также принадлежит $\mathscr{B}(X)$ и является голоморфной функцией от $t$ во всей $t$-плоскости (целой функцией). Групповое свойство

$$e^{-(s+t)T} = e^{-sT}e^{-tT} \tag{1.4}$$

непосредственно следует из (1.3). Имеем также

$$\frac{d}{dt} e^{-tT} = -Te^{-tT} = e^{-tT}T, \tag{1.5}$$

где дифференцирование понимается в смысле нормы. Таким образом, $u(t) = e^{-tT}u_0$ является решением дифференциального уравнения (1.2) при любом $u_0 \in X$.

Если $T$ — неограниченный оператор, то определить $e^{-tT}$ по формуле (1.3) нельзя, ибо области определения операторов $T^n$

сужаются с увеличением $n$. Формула $e^{-tT} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}T\right)^n$, написанная по аналогии с числовым случаем, не годится по той же причине. Однако небольшое видоизменение этой формулы, а именно

$$e^{-tT} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t}{n}T\right)^{-n}, \tag{1.6}$$

оказывается полезным. В самом деле, $(1 + \frac{t}{n}T)^{-1}$ есть с точностью до константы резольвента оператора $-T$, и она может быть возведена в степень даже в том случае, когда оператор $T$ неограничен.

Следующие условия являются достаточными для того, чтобы предел (1.6) существовал в интересующем нас смысле:

i) $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ и область определения $\mathbf{D}(T)$ оператора $T$ плотна в $\mathbf{X}$.

ii) Отрицательная вещественная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора $T$, и резольвента $(T + \xi)^{-1}$ удовлетворяет неравенству

$$\|(T+\xi)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\xi}, \quad \xi > 0. \tag{1.7}$$

Для доказательства заметим прежде всего, что из (1.7) следует

$$\|(1 + \alpha T)^{-1}\| \leqslant 1, \quad \alpha \geqslant 0. \tag{1.8}$$

Положим

$$V_n(t) = \left(1 + \frac{t}{n}T\right)^{-n}, \quad t \geqslant 0, \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{1.9}$$

Поскольку из (1.8) следует, что $\| V_n(t) \| \leqslant 1$, то функции $V_n(t)$ равномерно ограничены. Кроме того, каждая функция $V_n(t)$ голоморфна по $t$ при $t > 0$, ибо $(T + \xi)^{-1}$ голоморфна по $\xi$ при $\xi > 0$, в частности

$$V'_n(t) = \frac{d}{dt}V_n(t) = -T\left(1 + \frac{t}{n}T\right)^{-n-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{X}), \quad t > 0. \tag{1.10}$$

Функция $V_n(t)$ не обязательно голоморфна в точке $t = 0$, но она сильно непрерывна в этой точке:

$$V_n(t) \xrightarrow[\mathrm{s}]{} V_n(0) = 1 \quad \text{при} \quad t \searrow 0, \tag{1.11}$$

это следует из того, что

$$(1 + \alpha T)^{-1} \xrightarrow[\mathrm{s}]{} 1, \quad \alpha \searrow 0, \tag{1.12}$$

что в свою очередь может быть доказано, как в задаче V.3.33.

Чтобы установить существование предела $\lim V_n(t)$, оценим разность $V_n(t)u - V_m(t)u$. Имеем в силу (1.11)

$$V_n(t)u - V_m(t)u = \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon}\frac{d}{ds}[V_m(t-s)V_n(s)u]\,ds =$$

$$= \lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon}[-V'_m(t-s)V_n(s)u + V_m(t-s)V'_n(s)u]\,ds. \tag{1.13}$$

Подинтегральную функцию преобразуем с помощью (1.10):

$$V_n(t)u - V_m(t)u =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{t-\varepsilon}\left(\frac{s}{n}-\frac{t-s}{m}\right)T^2\left(1+\frac{t-s}{m}T\right)^{-m-1}\left(1+\frac{s}{n}T\right)^{-n-1}u\,ds. \tag{1.14}$$

Оценить (1.14) для любого $u$ не просто, однако это легко сделать для $u \in \mathbf{D}(T^2)$. Поскольку резольвента оператора $T$ коммутирует с $T$ (в смысле п. III.5.6), из (1.14) вытекает, что

$$V_n(t)u - V_m(t)u =$$

$$= \int_0^t\left(\frac{s}{n}-\frac{t-s}{m}\right)\left(1+\frac{t-s}{m}T\right)^{-m-1}\left(1+\frac{s}{n}T\right)^{-n-1}T^2u\,ds; \tag{1.15}$$

отметим, что подинтегральная функция непрерывна при $0 \leqslant s \leqslant t$ в силу (1.11). Отсюда и из (1.8) следует, что

$$\|V_n(t)u - V_m(t)u\| \leqslant \|T^2u\|\int_0^t\left(\frac{s}{n}+\frac{t-s}{m}\right)ds =$$

$$= \frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)\|T^2u\|. \tag{1.16}$$

Таким образом, $V_n(t)u$ — последовательность Коши и $\lim V_n(t)$ существует равномерно по $t$, принадлежащему любому конечному интервалу, при условии, что $u \in \mathbf{D}(T^2)$. Но $\mathbf{D}(T^2)$ плотно в $\mathbf{X}$, ибо $\mathbf{D}(T^2) = (T+\xi)^{-1}\mathbf{D}(T)$ при $\xi > 0$, а образ оператора $(T+\xi)^{-1}$ совпадает с множеством $\mathbf{D}(T)$, которое плотно в $\mathbf{X}$ (см. задачу III.2.9). Ввиду равномерной ограниченности $V_n(t)$ отсюда вытекает, что существует

$$U(t) = \operatorname{s-lim}_{n\to\infty} V_n(t) = \operatorname{s-lim}_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}T\right)^{-n}, \quad t \geqslant 0 \tag{1.17}$$

(см. лемму III.3.5). В следующем пункте мы покажем, что $U(t)$ обладает свойствами экспоненциальной функции, и мы положим *по определению* $e^{-tT} = U(t)$.

**Задача 1.1.** Доказать, что

$$\| U(t)u - V_n(t)u \| \leqslant \frac{t^2}{2n} \| T^2 u \|, \quad u \in \mathrm{D}(T^2).$$

**Задача 1.2.** Сильная сходимость в (1.17) равномерна по $t$ на каждом конечном интервале (т. е. $V_n(t)u \to U(t)u$ равномерно по $t$ на каждом конечном интервале при любом фиксированном $u \in \mathrm{X}$).

**Задача 1.3.** $\| T(T+\xi)^{-1} \| \leqslant 2$, если выполнено (1.7). Ср. с задачей V.3.32.

## 3. Свойства экспоненциальной функции

Поскольку $V_n(t)u \to U(t)u$ равномерно по $t$ на любом конечном интервале (см. задачу 1.2) и $V_n(t)u$ непрерывно зависит от $t$, то $U(t)u$ также непрерывно зависит от $t$. Другими словами, функция $U(t)$ *сильно непрерывна* при $t \geqslant 0$. Кроме того,

$$\| U(t) \| \leqslant 1, \quad U(0) = 1, \tag{1.18}$$

ибо $\| V_n(t) \| \leqslant 1$ и $V_n(0) = 1$.

Далее, из (1.10) следует, что

$$V_n'(t) = -T\left(1+\frac{t}{n}T\right)^{-1} V_n(t) = -V_n(t)T\left(1+\frac{t}{n}T\right)^{-1} = \\ = -TV_n(t)\left(1+\frac{t}{n}T\right)^{-1}. \tag{1.19}$$

Но в силу (1.11)

$$T\left(1+\frac{t}{n}T\right)^{-1} u = \left(1+\frac{t}{n}T\right)^{-1} Tu \to Tu \quad \text{для} \quad u \in \mathrm{D}(T). \tag{1.20}$$

Следовательно, третий член в (1.19), будучи применен к $u$, стремится[1] к $-U(t)Tu$. Аналогично $V_n(t)(1+\frac{t}{n}T)^{-1}u$ стремится к $U(t)$, поэтому в силу замкнутости $T$ значение $TU(t)u$ определено и равно $U(t)Tu$. Другими словами, $T$ коммутирует с $U(t)$:

$$TU(t) \supset U(t)T. \tag{1.21}$$

Из (1.10) и (1.11) вытекает также, что

$$V_n(t)u - u = -\int_0^t \left(1+\frac{s}{n}T\right)^{-n-1} Tu\, ds, \quad u \in \mathrm{D}(T). \tag{1.22}$$

---

[1] Здесь и в дальнейшем мы часто используем, не оговаривая этого особо, следующее утверждение: если $A_n \xrightarrow[s]{} A$ и $B_n \xrightarrow[s]{} B$, то $A_nB_n \xrightarrow[s]{} AB$ (лемма III.3.8).

Поскольку $(1+\frac{t}{n}T)^{-n-1}=(1+\frac{t}{n}T)^{-1}V_n(t)\xrightarrow[s]{}U(t)$ равномерно по $t$ на любом конечном интервале, то, переходя к пределу при $n\to\infty$ под знаком интеграла в (1.22), получаем

$$U(t)u-u=-\int_0^t U(s)Tu\,ds,\quad u\in\mathbf{D}(T).\tag{1.23}$$

Так как $U(s)Tu$ непрерывно зависит от $s$, то из (1.23) следует дифференцируемость $U(t)u$ по $t$ при $u\in\mathbf{D}(T)$, причем

$$\frac{d}{dt}U(t)u=-U(t)Tu=-TU(t)u,\quad t\geqslant 0,\quad u\in\mathbf{D}(T);\tag{1.24}$$

второе равенство здесь есть следствие (1.21). Итак, $u(t)=U(t)u_0$ является решением дифференциального уравнения (1.2) с начальным условием $u(0)=u_0$ *при условии, что* $u_0$ *принадлежит* $\mathbf{D}(T)$.

Это решение единственно. В самом деле, пусть $u(t)$ — произвольное решение (1.2); под этим мы понимаем, что функция $u(t)$ непрерывна при $t\geqslant 0$, ее *сильная производная* $\frac{du(t)}{dt}$ существует при всех $t>0$[1], $U(t)\in\mathbf{D}(T)$ для всех $t>0$ и выполняется (1.2). Тогда (см. лемму III.3.11) имеем в силу (1.24)

$$\frac{d}{ds}U(t-s)u(s)=-U'(t-s)u(s)+U(t-s)u'(s)=$$
$$=U(t-s)Tu(s)-U(t-s)Tu(s)=0,\quad 0<s\leqslant t.\tag{1.25}$$

Таким образом, $U(t-s)u(s)$ постоянно для $0\leqslant s\leqslant t$ (см. лемму III.1.36). Полагая $s=t$ и $s=0$, получаем

$$u(t)=U(t-s)u(s)=U(t)u(0),\quad 0\leqslant s\leqslant t.\tag{1.26}$$

Применяя (1.26) к решению $u(t)=U(t)u_0$, получаем $U(t)u_0=U(t-s)u(s)=U(t-s)U(s)u_0$. Поскольку это верно для всех $u_0\in\mathbf{D}(T)$, имеем $U(t)=U(t-s)U(s)$, или

$$U(t+s)=U(t)U(s),\quad s,\ t\geqslant 0.\tag{1.27}$$

Итак, $\{U(t)\}_{t\geqslant 0}$ есть однопараметрическая полугруппа. Так как $\|U(t)\|\leqslant 1$, то $\{U(t)\}$ называется *сжимающей полугруппой*. Оператор $-T$ называется *инфинитезимальным*, или *производящим*, оператором (генератором) этой полугруппы. Мы пишем $U(t)=e^{-tT}$.

Наконец, докажем, что *различные инфинитезимальные операторы порождают различные полугруппы*. Для этого достаточно получить формулу, выражающую оператор $T$ через $U(t)$. Таковой

---

[1] В задачах с начальными данными обычно не требуют дифференцируемости решения при $t=0$.

является формула

$$(T+\zeta)^{-1}=\int_0^\infty e^{-\zeta t}U(t)\,dt, \quad \operatorname{Re}\zeta>0, \tag{1.28}$$

показывающая, что резольвента $(T+\zeta)^{-1}$ оператора $T$ есть *преобразование Лапласа* полугруппы $U(t)$. Отметим, что интеграл в (1.28) — это несобственный интеграл Римана, определяемый как предел (в смысле сходимости по норме) при $\tau\to\infty$ *сильного интеграла Римана* $\int_0^\tau$ (понимаемого как оператор $A(\tau)$ такой, что $A(\tau)u=\int_0^\tau e^{-\zeta t}U(t)u\,dt$ для любого $u\in \mathbf{X}$, а этот последний интеграл имеет смысл, ибо подинтегральная функция непрерывна по $t$); (см. п. III.3.1).

Докажем (1.28). Пусть $u\in \mathbf{D}(T)$, тогда

$$\frac{dU(t)u}{dt}=-U(t)Tu \quad \text{и} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)e^{-\zeta t}U(t)u=-e^{-\zeta t}U(t)(T+\zeta)u.$$

Интегрируя это равенство, получаем $u=\int_0^\infty e^{-\zeta t}U(t)(T+\zeta)u\,dt$.

Это дает $(T+\zeta)^{-1}v=\int_0^\infty e^{-\zeta t}U(t)v\,dt$, где $v=(T+\zeta)u$. Если $\zeta$ вещественно и $>0$, то $\zeta\in \mathrm{P}(-T)$ и, таким образом, $v$ пробегает все $\mathbf{X}$, когда $u$ пробегает $\mathbf{D}(T)$. Следовательно, мы доказали (1.28) для $\zeta>0$. Но правая часть в (1.28) голоморфна по $\zeta$ при $\operatorname{Re}\zeta>0$, ибо $\|U(t)\|\leqslant 1$. Поэтому (1.28) справедливо при $\operatorname{Re}\zeta>0$ (см. теорему III.6.7).

В частности, полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta>0$ принадлежит $\mathrm{P}(-T)$ и

$$\|(T+\zeta)^{-1}\|\leqslant\int_0^\infty |e^{-\zeta t}|\,dt=\frac{1}{\operatorname{Re}\zeta}, \quad \operatorname{Re}\zeta>0, \tag{1.29}$$

хотя предположение ii), из которого мы исходим, означает, что (1.29) выполняется лишь для вещественных $\zeta>0$. Конечно, (1.29) можно непосредственно вывести из ii).

**Замечание 1.4.** Мы построили сильно непрерывную сжимающую полугруппу $U(t)$, исходя из данного производящего оператора $-T$. Обратно, если дана сильно непрерывная сжимающая полугруппа операторов $U(t)$, то можно определить инфинитезимальный оператор $-T$ с помощью (1.28) и показать, что $T$ удовлетворяет условиям i), ii) и что полугруппа, порожденная оператором $-T$, совпадает с $U(t)$. Мы не будем приводить доказательства этих утверждений, хотя они несложны [1]. Ограничимся следующим замечанием.

Пусть $T$ удовлетворяет условиям i), ii), и пусть имеется операторнозначная функция $V(t)$ такая, что функция $\| V(t) \|$ ограничена и $\int\limits_0^\infty e^{-\xi t} V(t)\, dt = (T + \xi)^{-1}$ для всех $\xi > 0$. Тогда $V(t) = U(t) = e^{-tT}$.

Для доказательства положим $W(t) = V(t) - U(t)$. Имеем $\int\limits_0^\infty e^{-\xi t} W(t)\, dt = 0$ для всех $\xi > 0$. Полагая $e^{-t} = s$, видим, что $\int\limits_0^1 s^{\xi - 1} (W(\log s^{-1})\, u, f)\, ds = 0$ для всех $\xi > 0$ и всех $u \in \mathbf{X}$, $f \in \mathbf{X}^*$. Итак, непрерывная по $s$ функция $(W(\log s^{-1})\, u, f)$ ортогональна ко всем $s^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, стало быть, она равна нулю тождественно. Этим доказано, что $W(t) = 0$.

**Замечание 1.5.** Как мы видели выше, функция $e^{-tT} u$ сильно дифференцируема по $t$ для $u \in \mathbf{D}(T)$. Обратное утверждение справедливо в более сильной форме: *если функция $e^{-tT} u$ слабо дифференцируема при $t = 0$, причем слабая производная равна $v$, то $u \in \mathbf{D}(T)$ и $-Tu = v$.* Действительно, заметим, что $h^{-1} (U(t + h)\, u - U(t)\, u) = U(t)\, h^{-1} (U(h)\, u - u)$ имеет слабый предел $U(t)\, v$ при $h \searrow 0$. Следовательно, $e^{-\xi t} (U(t)\, u, f)$ имеет *правую* производную $e^{-\xi t} (U(t)(v - \xi u), f)$ для каждого $f \in \mathbf{X}^*$. Так как эта производная непрерывна по $t$, то с помощью интегрирования получаем $(u, f) = -\int\limits_0^\infty e^{-\xi t} (U(t)(v - \xi u), f)\, dt$, так что $u = -\int\limits_0^\infty e^{-\xi t} U(t)(v - \xi u)\, dt = -(T + \xi)^{-1} (v - \xi u)$.

Этим доказано, что $u \in \mathbf{D}(T)$ и что $Tu + \xi u = -v + \xi u$, т. е. $Tu = -v$.

**Пример 1.6.** Если $\mathbf{X} = \mathbf{H}$ — гильбертово пространство и $T = iH$, где $H$ — самосопряженный оператор, то и $T$, и $-T$ удовлетворяют условиям i), ii). Следовательно, функция $U(t) = e^{-tT}$ определена для $-\infty < t < +\infty$ и удовлетворяет уравнению (1.24). Отсюда, как и выше, следует, что (1.27) выполняется для всех вещественных $s, t$, положительных, отрицательных или равных нулю. В частности, $U(t)\, U(-t) = U(0) = 1$, так что $\| U(t)\, u \| = \| u \|$, т. е. $U(t)$ — изометричный оператор. Поскольку $U(t)^{-1} = U(-t) \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$, то оператор $U(t)$ даже унитарен; таким образом, оператор $U(t) = e^{-itH}$ образует *унитарную группу* операторов.

---

[1] Подробное изложение теории полугрупп операторов см. в книгах Хилле и Филлипса [[1]] и Иосиды [[1]].

**Пример 1.7.** Пусть $X = L^p(0, \infty)$, $1 \leqslant p < \infty$, $T = d/dx$ и граничное условие таково: $u(0) = 0$. При $\xi > 0$ тогда $(T + \xi)^{-1}$ — интегральный оператор, задаваемый формулой (см. задачу III.6.9)

$$(T+\xi)^{-1} u(y) = \int_0^y e^{-\xi(y-x)} u(x)\, dx. \tag{1.30}$$

Так как $\int_x^\infty e^{-\xi(y-x)}\, dy = 1/\xi$ и $\int_0^x e^{-\xi(y-x)}\, dx \leqslant 1/\xi$, то $\|(T+\xi)^{-1}\| \leqslant 1/\xi$ (см. пример III.2.11). Таким образом, условия i) и ii) выполнены и оператор $-T$ порождает полугруппу $U(t) = e^{-tT}$. Эта полугруппа задается соотношениями $U(t) u(x) = u(x - t)$ при $x > t$ и $U(t) u(x) = 0$ при $x < t$, ибо

$$\int_0^\infty e^{-\xi t} U(t) u(x)\, dt = \int_0^x e^{-\xi t} u(x-t)\, dt = \int_0^x e^{-\xi(x-s)} u(s)\, ds = (T+\xi)^{-1} u(x).$$

**Пример 1.8.** В предыдущем примере заменим оператор $T$ на оператор $T = -d/dx$ без какого бы то ни было граничного условия. Тогда (см. задачу III.6.9)

$$(T+\xi)^{-1} u(y) = \int_y^\infty e^{-\xi(x-y)} u(x)\, dx, \tag{1.31}$$

и можно, как и выше, показать, что $T$ удовлетворяет условиям i) и ii). Полугруппа $U(t) = e^{-tT}$ задается соотношением $U(t) u(x) = u(x + t)$.

Задача 1.9. Пусть $X = L^p(-\infty, +\infty)$ и $T = d/dx$. Операторы $T$ и $-T$ удовлетворяют условиям i) и ii), так что $T$ порождает группу операторов $U(t) = e^{-tT}$, которая задается равенством $U(t) u(x) = u(x - t)$ (см. задачу III.6.10).

**Задача 1.10.** В приведенных выше примерах и задачах построить $e^{-tT}$ непосредственно по формуле (1.17).

**Задача 1.11.** Если $Tu = \lambda u$, то $e^{-tT} u = e^{-\lambda t} u$, $t \geqslant 0$.

**Задача 1.12.** В примере 1.6 имеем

$$e^{-itH} = \int_{-\infty}^\infty e^{-it\lambda}\, dE(\lambda), \tag{1.32}$$

где $\{E(\lambda)\}$ — спектральное семейство для оператора $H$.

## 4. Ограниченные и квазиограниченные полугруппы

Условия i) и ii) из п. 2 не являются необходимыми для того, чтобы оператор $-T$ порождал полугруппу $U(t)$ ограниченных линейных операторов. Например, неравенство (1.7) может быть заменено более слабым условием

$$\| (T + \xi)^{-k} \| \leqslant M/\xi^k, \quad \xi > 0, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1.33}$$

где $M$ — постоянная, не зависящая от $\xi$ и $k$.

Действительно, из (1.33) следует, что

$$\| (1 + \alpha T)^{-k} \| \leqslant M, \quad \alpha \geqslant 0, \tag{1.34}$$

так что операторы $V_n(t)$, определенные формулой (1.9), равномерно ограничены, $\| V_n(t) \| \leqslant M$. Следовательно, построение $U(t) = \text{s-lim}\, V_n(t)$ можно провести в точности так же, как раньше, только в правую часть (1.16) надо ввести множитель $M^2$. Функция $e^{-tT} = U(t)$ снова сильно непрерывна при $t \geqslant 0$ и удовлетворяет условиям

$$\| U(t) \| \leqslant M, \quad U(0) = 1. \tag{1.35}$$

Полугрупповое свойство $U(t)$ и все остальные результаты предыдущих пунктов могут быть доказаны тем же путем. Мы будем называть $U(t)$ *ограниченной полугруппой.*

Условие ii) на оператор $T$ можно еще более ослабить. Именно, рассмотрим следующее условие:

ii′) Пусть полубесконечный интервал $\xi > \beta$ принадлежит резольвентному множеству оператора $-T$, и пусть

$$\| (T + \xi)^{-k} \| \leqslant M (\xi - \beta)^{-k}, \ \xi > \beta, \ k = 1, 2, 3, \ldots . \tag{1.36}$$

Тогда оператор $T_1 = T + \beta$ удовлетворяет указанным выше предположениям, так что определена ограниченная полугруппа $U_1(t) = e^{-tT_1}$. Если положить $U(t) = e^{\beta t} U_1(t)$, то, как легко проверить, $U(t)$ обладает всеми установленными выше свойствами, только (1.35) надо заменить на

$$\| U(t) \| \leqslant M e^{\beta t}, \quad U(0) = 1. \tag{1.37}$$

Равенство $e^{-tT} = U(t)$ определяет полугруппу, порожденную оператором $-T$. Здесь функция $\| U(t) \|$ не обязательно ограничена при $t \to \infty$. Мы будем называть $U(t)$ *квазиограниченной полугруппой* [1]. Множество всех операторов $T$, удовлетворяющих условиям i) и ii′), обозначим через $\mathcal{G}(M, \beta)$ [2]. Оператор $-T$ является производящим оператором сжимающей полугруппы тогда и только тогда, когда $T \in \mathcal{G}(1, 0)$.

**Задача 1.13.** Доказать, что $M \geqslant 1$, если $\mathcal{G}(M, \beta)$ не пусто [3].

---

[1] Существуют более общие типы полугрупп (см. Хилле и Филлипс [[1]]), но мы будем иметь дело только с квазиограниченными полугруппами.

[2] Точная нижняя грань множества тех $\beta$, для которых $T \in \mathcal{G}(M, \beta)$ называется *типом* полугруппы $\{e^{-tT}\}$.

[3] Предполагается, что $\dim \mathsf{X} > 0$.

**Задача 1.14.** Если $T \in \mathcal{G}(M, \beta)$, то $T - \alpha \in \mathcal{G}(M, \alpha + \beta)$ и $e^{-t(T-\alpha)} = e^{\alpha t} e^{-tT}$.

**Задача 1.15.** Если $T \in \mathcal{G}(M, \beta)$, то

$$\int_0^\infty t^k e^{-\zeta t} e^{-tT}\, dt = k!\,(T + \zeta)^{-k-1}, \quad \operatorname{Re} \zeta > \beta. \tag{1.38}$$

Из (1.38) следует, что полуплоскость $\operatorname{Re} \zeta > \beta$ принадлежит резольвентному множеству $\mathrm{P}(-T)$ и справедливо следующее обобщение неравенства (1.36) (ср. (1.29)):

$$\| (T + \zeta)^{-k} \| \leqslant M (\operatorname{Re} \zeta - \beta)^{-k}, \quad \operatorname{Re} \zeta > \beta, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{1.39}$$

**Задача 1.16.** Если $T \in \mathcal{G}(M, 0)$, то

$$\| (1 + \alpha T)^{-k} (1 + \alpha' T)^{-h} \| \leqslant M, \quad \alpha, \alpha' \geqslant 0, \quad k, h = 1, 2, \ldots . \tag{1.40}$$

Это справедливо и в случае более чем двух сомножителей. [*Указание*: (1.38).]

**Задача 1.17.** Пусть $T \in \mathcal{G}(M, 0)$. Используя предыдущую задачу, доказать, что в правой части формулы (1.16) достаточно ввести множитель $M$ (а не $M^2$, как выше). Кроме того,

$$\| U(t) u - V_n(t) u \| \leqslant \frac{Mt^2}{2n} \| T^2 u \|, \quad u \in \mathrm{D}(T^2). \tag{1.41}$$

**Задача 1.18.** Пусть $\mathrm{X}$ — гильбертово пространство. Оператор $T$ принадлежит $\mathcal{G}(1, 0)$ тогда и только тогда, когда он $m$-аккретивен. Оператор $T$ принадлежит $\mathcal{G}(1, \beta)$ для некоторого $\beta$ тогда и только тогда, когда он квази-$m$-аккретивен.

## 5. Решение неоднородного дифференциального уравнения

Пусть $T \in \mathcal{G}(M, \beta)$. Тогда $U(t) = e^{-tT}$ дает решение дифференциального уравнения $du/dt = -Tu$ в виде $u = u(t) = U(t)\, u(0)$ (см. (1.26)). Полугруппу $U(t)$ можно также использовать для решения неоднородного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt} = -Tu + f(t), \quad t > 0, \tag{1.42}$$

где $f(t)$ — заданная функция со значениями в $\mathrm{X}$, сильно непрерывная при $t \geqslant 0$.

Если $u = u(t)$ — решение уравнения (1.42), то вычисления, аналогичные (1.25), дают $(d/ds)\, U(t - s)\, u(s) = U(t - s)\, f(s)$. Интегрируя по интервалу $(0, t)$, получаем (заметим, что функция $U(t - s)\, f(s)$ сильно непрерывна по $s$)

$$u(t) = U(t)\, u_0 + \int_0^t U(t - s)\, f(s)\, ds, \quad u_0 = u(0). \tag{1.43}$$

В частности, отсюда вытекает, что решение уравнения (1.42) однозначно определяется по $u(0)$.

Обратно, справедлива

**Теорема 1.19**[1]. *Пусть* $T \in \mathcal{G}(M, \beta)$ *и функция* $f(t)$ *непрерывно дифференцируема при* $t \geqslant 0$. *При любом* $u_0 \in \mathrm{D}(T)$, *функция* $u(t)$, *определенная в* (1.43), *непрерывно дифференцируема при* $t \geqslant 0$ *и является решением уравнения* (1.42) *с начальным условием* $u(0) = u_0$.

Доказательство. Мы знаем, что первый член $U(t)\,u_0$ в правой части (1.43) удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению и начальному условию. Поэтому достаточно показать, что второй член удовлетворяет уравнению (1.42) и нулевому начальному условию. Обозначая этот член через $v(t)$, имеем

$$v(t)=\int_0^t U(t-s)\,f(s)\,ds=\int_0^t U(t-s)\left[f(0)+\int_0^s f'(r)\,dr\right]ds=$$

$$=\left[\int_0^t U(t-s)\,ds\right]f(0)+\int_0^t\left[\int_r^t U(t-s)\,ds\right]f'(r)\,dr. \qquad (1.44)$$

Но

$$T\int_r^t U(s)\,ds=U(r)-U(t), \quad 0\leqslant r\leqslant t, \qquad (1.45)$$

поскольку если $u \in \mathrm{D}(T)$, то $TU(s)\,u = -dU(s)\,u/ds$ и, значит, $\int_r^t TU(s)\,u\,ds = U(r)\,u - U(t)\,u_0$. Вспоминая определение интеграла, это можно записать так: $T\int_r^t U(s)\,u\,ds = (U(r) - U(t))\,u$ (ибо оператор $T$ замкнут); неконец, это равенство может быть распространено на любое $u \in \mathrm{X}$, так как выбрав последовательность $u_n \in \mathrm{D}(T)$, такую, что $u_n \to u$, и перейдя к пределу, получим $\int_r^t U(s)\,u_n\,ds \to \int_r^t U(s)\,u\,ds$ и $(U(r) - U(t))\,u_n \to (U(r) - U(t))\,u$ (здесь снова использована замкнутость $T$). Итак, (1.45) доказано.

Из (1.45) следует, что

$$T\int_r^t U(t-s)\,ds=1-U(t-r), \quad 0\leqslant r\leqslant t. \qquad (1.46)$$

---

[1] См. Филлипс [1].

Из (1.44) и (1.46) видно, что $v(t) \in \mathbf{D}(T)$ и что

$$Tv(t) = (1 - U(t)) f(0) + \int_0^t (1 - U(t-r)) f'(r)\, dr =$$

$$= f(t) - U(t) f(0) - \int_0^t U(t-r) f'(r)\, dr. \tag{1.47}$$

С другой стороны, $v(t) = \int_0^t U(s) f(t-s)\, ds$, и потому

$$\frac{dv(t)}{dt} = U(t) f(0) + \int_0^t U(s) f'(t-s)\, ds. \tag{1.48}$$

Сравнивая (1.47) и (1 48), видим, что $dv(t)/dt = -Tv(t) + f(t)$, как и требовалось. Также легко показать, что $v(t) \to 0$, $t \to 0$. Непрерывность $dv/dt$ вытекает из (1.48) ввиду непрерывности $f'(t)$.

Оценим для дальнейшего $\| u'(t) \|$ и $\| Tu(t) \|$. Из (1.43) и (1.48) получаем

$$\| u'(t) \| \leqslant \| U(t) Tu_0 \| + \| v'(t) \| \leqslant$$

$$\leqslant Me^{\beta t} (\| Tu_0 \| + \| f(0) \|) + M \int_0^t e^{\beta s} \| f'(t-s) \| ds, \tag{1.49}$$

$$\| Tu(t) \| = \| u'(t) - f(t) \| \leqslant \| u'(t) \| + \| f(t) \|.$$

## 6. Голоморфные полугруппы

Конструкция полугруппы $U(t) = e^{-tT}$, описанная в предыдущих пунктах, довольно сложна. Возникает вопрос, нельзя ли использовать для этой цели интеграл Данфорда — Тейлора

$$U(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{\zeta t} (T + \zeta)^{-1} d\zeta. \tag{1.50}$$

Очевидно, (1.50) справедливо, если $T \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ и $\Gamma$ — положительно ориентированная замкнутая кривая, содержащая внутри себя спектр оператора $-T$. В более общем случае, когда $T \in \mathscr{G}(M, \beta)$ можно пытаться обосновать (1.50), беря в качестве контура $\Gamma$ прямую, идущую от $c - i\infty$ к $c + i\infty$ с $c > \beta$, по аналогии с обычным обратным преобразованием Лапласа. Однако довольно трудно доказать сходимость этого интеграла.

Тем не менее (1.50) удобно использовать, если предположить несколько больше относительно оператора $T$. Именно пусть $T$

определен на плотном множестве и замкнут, $P(-T)$ содержит не только полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$, но и сектор $|\arg\zeta| < \pi/2 + \omega$, $\omega > 0$, и пусть для любого $\varepsilon > 0$

$$\|(T+\zeta)^{-1}\| \leqslant \frac{M_\varepsilon}{|\zeta|} \quad \text{при} \quad |\arg\zeta| \leqslant \frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon, \tag{1.51}$$

причем $M_\varepsilon$ не зависит от $\zeta$ [1]. Тогда интеграл в (1.50) сходится абсолютно при $t > 0$, если в качестве $\Gamma$ выбрана кривая, лежащая в упомянутом секторе, идущая из бесконечности с $\arg\zeta = -\left(\frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon\right)$ и уходящая на бесконечность с $\arg\zeta = \frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon$, где $\varepsilon < \omega$.

Полугрупповое свойство так определенной полугруппы $U(t)$ может быть легко доказано с помощью стандартных вычислений. Пусть $U(s)$ задается формулой (1.50), в которой контур $\Gamma$ заменен на аналогичный контур $\Gamma'$, сдвинутый немного вправо. Тогда

$$\begin{aligned} U(s)\,U(t) &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int\limits_{\Gamma'}\int\limits_{\Gamma} e^{\zeta' s+\zeta t}(T+\zeta')^{-1}(T+\zeta)^{-1}\,d\zeta\,d\zeta' = \\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \Bigg[\int\limits_{\Gamma'} e^{\zeta' s}(T+\zeta')^{-1}\,d\zeta' \int\limits_{\Gamma} e^{\zeta t}(\zeta-\zeta')^{-1}\,d\zeta - \\ &\qquad - \int\limits_{\Gamma} e^{\zeta t}(T+\zeta)^{-1}\,d\zeta \int\limits_{\Gamma'} e^{\zeta' s}(\zeta-\zeta')^{-1}\,d\zeta'\Bigg] = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\zeta(t+s)}(T+\zeta)^{-1}\,d\zeta = U(t+s). \end{aligned} \tag{1.52}$$

Здесь мы использовали резольвентное уравнение $(T+\zeta')^{-1} \times (T+\zeta)^{-1} = (\zeta-\zeta')^{-1}\,[(T+\zeta')^{-1} - (T+\zeta)^{-1}]$ и соотношения

$$\int\limits_{\Gamma} e^{\zeta t}(\zeta-\zeta')^{-1}\,d\zeta = 0, \qquad \int\limits_{\Gamma'} e^{\zeta' s}(\zeta-\zeta')^{-1}\,d\zeta' = -2\pi i e^{\zeta s}.$$

Формула (1.50) определена даже для комплексных $t$, если $|\arg t| < \omega$, ибо тогда можно деформировать контур $\Gamma$ так, чтобы $|\arg t\zeta| > \pi/2$ для $\zeta \in \Gamma$ и $|\zeta| \to \infty$. Поскольку (1.50) можно дифференцировать по $t$ под знаком интеграла, то функция $U(t)$ *голоморфна по $t$ в открытом секторе* $|\arg t| < \omega$. Действительно, имеем

$$U(t)\,T \subset TU(t) = -\frac{dU(t)}{dt} \in \mathscr{B}(\mathrm{X}), \quad |\arg t| < \omega, \tag{1.53}$$

---

[1] Основное отличие (1.51) от (1.39) для $T \in \mathcal{G}(M, \beta)$ состоит в появлении $|\zeta|$ вместо $\operatorname{Re}\zeta$.

ибо

$$\frac{dU(t)}{dt}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\zeta t}\zeta(T+\zeta)^{-1}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\zeta t}(1-T(T+\zeta)^{-1})\,d\zeta=$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}T\int\limits_{\Gamma} e^{\zeta t}(T+\zeta)^{-1}\,d\zeta=TU(t);$$

здесь при вынесении $T$ из-под интеграла использована замкнутость оператора $T$.

Производя замену переменной интегрирования $\zeta'=\zeta t$, получаем из (1.50)

$$U(t)=\frac{1}{2\pi i t}\int\limits_{\Gamma'} e^{\zeta'}\left(T+\frac{\zeta'}{t}\right)^{-1}d\zeta', \tag{1.54}$$

где $\Gamma'$ можно взять не зависящим от $t$. Так как $\left\|\left(T+\frac{\zeta'}{t}\right)^{-1}\right\|\leqslant$ $\leqslant \mathrm{const}\,|t/\zeta'|$ при $|\arg t|\leqslant\omega-\varepsilon$, то имеем $\|U(t)\|\leqslant$ $\leqslant\mathrm{const}\int\limits_{\Gamma'}|e^{\zeta'}|\,|\zeta'|^{-1}\,|d\zeta'|=\mathrm{const}$. Таким образом, функция $U(t)$ равномерно ограничена:

$$\|U(t)\|\leqslant M'_{\varepsilon} \text{ при } |\arg t|\leqslant\omega-\varepsilon. \tag{1.55}$$

Аналогично имеем оценку

$$\left\|\frac{dU(t)}{dt}\right\|=\|TU(t)\|\leqslant M''_{\varepsilon}|t|^{-1},\quad |\arg t|\leqslant\omega-\varepsilon. \tag{1.56}$$

Кроме того,

$$U(t)-1=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'} e^{\zeta'}((tT+\zeta')^{-1}-\zeta'^{-1})\,d\zeta'=$$

$$=-\frac{t}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'}\frac{e^{\zeta'}}{\zeta'}T(tT+\zeta')^{-1}\,d\zeta', \tag{1.57}$$

так что

$$\|U(t)u-u\|\leqslant\mathrm{const}\,|t|\,\|Tu\|\int\limits_{\Gamma'}|e^{\zeta'}|\,|\zeta'|^{-2}\,|d\zeta'|\to 0 \quad \text{для} \quad u\in\mathrm{D}(T),$$

если $|t|\to 0$ с $|\arg t|\leqslant\omega-\varepsilon$. Поскольку множество $\mathrm{D}(T)$ плотно, а функция $U(t)$ равномерно ограничена, то

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to 0} U(t)=U(0)=1 \qquad (|\arg t|\leqslant\omega-\varepsilon). \tag{1.58}$$

Итак, мы доказали, что *полугруппа* $U(t)$ *голоморфна при* $|\arg t|<\omega$, *равномерно ограничена при* $|\arg t|\leqslant\omega-\varepsilon$ *и сильно непрерывна (внутри этого меньшего сектора) при* $t=0$, *причем* $U(0) = 1$. Будем называть $U(t) = e^{-tT}$ *ограниченной голоморфной полугруппой* [1]).

**Замечание 1.20.** Так как функция $U(t)$ голоморфна, ее можно дифференцировать любое число раз. Вычисления, аналогичные использованным при выводе (1.56), приводят к оценкам (для простоты рассматриваем только вещественные $t > 0$)

$$\left\| \frac{d^n U(t)}{dt^n} \right\| = \| T^n U(t) \| \leqslant M_n t^{-n}, \quad t > 0. \tag{1.59}$$

Отметим также неравенство

$$\| T(U(t) - U(s)) \| \leqslant M_2 (t - s)/ts, \quad 0 < s \leqslant t. \tag{1.60}$$

Для доказательства достаточно заметить, что

$$\| T(U(t) - U(s)) \| \leqslant \left\| T \int_s^t \frac{dU(r)}{dr} dr \right\| =$$
$$= \left\| \int_s^t T^2 U(r)\, dr \right\| \leqslant M_2 \int_s^t r^{-2} dr = M_2 (t - s)/ts.$$

Обозначим через $\mathscr{H}(\omega, 0)$ множество всех определенных на плотном множестве замкнутых операторов $T$, обладающих свойством (1.51). Через $\mathscr{H}(\omega, \beta)$, где $\beta$ вещественно, обозначим множество всех операторов вида $T = T_0 - \beta$ с $T_0 \in \mathscr{H}(\omega, 0)$. Очевидно, $e^{-tT} = e^{\beta t} e^{-tT_0}$ есть голоморфная полугруппа при $|\arg t| < \omega$; функция $e^{-tT}$ не обязательно равномерно ограничена, но она *квазиограничена* в том смысле, что $\| e^{-tT} \| \leqslant \leqslant \text{const}\, | e^{\beta t} |$ в любом секторе вида $|\arg t| \leqslant \omega - \varepsilon$.

**Замечание 1.21.** Вовсе не очевидно, что условие (1.51) сильнее условия (1.33) для производящего оператора ограниченной полугруппы. Но это так, как видно из доказываемой ниже теоремы 1.23.

**Замечание 1.22.** Если $T \in \mathscr{H}(\omega, \beta)$, то функция $u(t) = e^{-tT} u_0$ удовлетворяет уравнению $du(t)/dt = -Tu(t)$ при $t > 0$ для *любого* $u_0 \in X$ (см. (1.53)). В этом существенное отличие от случая $T \in \mathscr{G}(M, \beta)$.

**Теорема 1.23.** *Условие* $T \in \mathscr{H}(\omega, 0)$ *эквивалентно существованию при каждом* $\varepsilon > 0$ *постоянной* $M'_\varepsilon$, *такой, что* $e^{i\theta} T \in \mathscr{G}(M'_\varepsilon, 0)$ *для любого вещественного* $\theta$ *с* $|\theta| \leqslant \omega - \varepsilon$. *В частности,* $T \in \mathscr{G}(M, 0)$ *при некотором* $M$.

---

[1]) Это частный случай голоморфных полугрупп, подробно изученных у Хилле и Филлипса [1] и Иосиды [1].

Доказательство. Пусть $T \in \mathscr{H}(\omega, 0)$. Из (1.53) снова выводим формулу обращения (1.38). Поскольку в силу (1.55) $\| U(t) \| \leqslant \text{const}$ для вещественных $t > 0$, получаем отсюда, что $\| (T + \xi)^{-k-1} \| \leqslant M' \xi^{-k-1}$ при $k = 0, 1, 2, \ldots, \xi > 0$. Этим доказано, что $T \in \mathscr{G}(M', 0)$. Далее, мы можем сдвинуть контур интегрирования в (1.38) с вещественной положительной полуоси на луч $t = re^{i\theta}$, $r > 0$, при условии, что $| \theta | \leqslant \omega - \varepsilon$. Так как $\| U(t) \| \leqslant \text{const}$ для таких $t$ в силу (1.55), мы получаем неравенство $\| (\xi e^{-i\theta} + T)^{-k-1} \| \leqslant M'_\xi \xi^{-k-1}$, $\xi > 0$ $(\zeta = \xi e^{-i\theta})$. Этим доказано, что $e^{i\theta} T \in \mathscr{G}(M'_\xi, 0)$.

Обратно, пусть $e^{i\theta} T \in \mathscr{G}(M'_\xi, 0)$ для $| \theta | \leqslant \omega - \varepsilon$. Это означает, что спектр оператора $e^{i\theta} T$ содержится в полуплоскости $\operatorname{Re} \zeta \geqslant 0$ для каждого $\theta$ с $| \theta | < \omega$. Следовательно, сектор $| \arg \zeta | < \pi/2 + \omega$ принадлежит множеству $P(-T)$. Если $0 \leqslant \arg \zeta \leqslant \pi/2 + \omega - 2\varepsilon$, то $\operatorname{Re} e^{-i(\omega-\varepsilon)} \zeta \geqslant | \zeta | \sin \varepsilon > 0$ и потому $\| (e^{-i(\omega-\varepsilon)} T + e^{-i(\omega-\varepsilon)} \zeta)^{-1} \| \leqslant M'_\xi / \operatorname{Re} e^{-i(\omega-\varepsilon)} \zeta \leqslant$ $\leqslant M'_\varepsilon / | \zeta | \sin \varepsilon$ (см. (1.39)). Поскольку аналогичный результат справедлив при $-(\pi/2 + \omega - 2\varepsilon) \leqslant \arg \zeta \leqslant 0$, то (1.51) доказано.

Другой удобный критерий того, что оператор $-T$ является производящим оператором голоморфной полугруппы, дает

**Теорема 1.24.** *Пусть $T$ — $m$-секториальный оператор в гильбертовом пространстве* $\mathbf{H}$ *с вершиной* 0 *(так что его числовой образ $\Theta(T)$ есть подмножество сектора $| \arg \zeta | \leqslant \pi/2 - \omega$, $0 < \omega \leqslant \pi/2$). Тогда $T \in \mathscr{H}(\omega, 0)$, и функция $e^{-tT}$ голоморфна при $| \arg t | < \omega$ и ограничена: $\| e^{-tT} \| \leqslant 1$.*

Доказательство. В соответствии с теоремой 1.23 достаточно показать, что $e^{i\theta} T \in \mathscr{G}(1, 0)$ при $| \theta | \leqslant \omega$. Но $\Theta(e^{i\theta} T) = e^{i\theta} \Theta(T)$ является подмножеством правой полуплоскости, если $| \theta | \leqslant \omega$. Следовательно, $e^{i\theta} T$ есть $m$-секториальный оператор, и левая полуплоскость содержится в $P(e^{i\theta} T)$. Поэтому, если $\operatorname{Re} \zeta > 0$, то $\| (\zeta + e^{i\theta} T)^{-1} \|$ не превосходит обратной величины расстояния от $\zeta$ до мнимой оси, в частности не превосходит $\zeta^{-1}$ для вещественных $\zeta > 0$. Это показывает, что $e^{i\theta} T \in \mathscr{G}(1, 0)$.

**Пример 1.25.** Если $H$ — неотрицательный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве, то при $\operatorname{Re} t > 0$ функция $e^{-tH}$ голоморфна и $\| e^{-tH} \| \leqslant 1$.

**Пример 1.26.** Рассмотрим дифференциальный оператор $Lu = p_0(x) u'' + p_1(x) u' + p_2(x) u$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, с $p_0(x) < 0$. Известно, что оператор $T_1$ в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(a, b)$, определенный по $L$ и по граничному условию $u(a) = u(b) = 0$, является $m$-секториальным (см. пример V.3.34). Следовательно, в силу теоремы 1.24 $T_1 \in \mathscr{H}(\omega, \beta)$ при некотором $\omega > 0$.

Аналогичный результат имеет место для дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка *эллиптического* типа.

### 7. Неоднородное дифференциальное уравнение для голоморфной полугруппы

В случае когда $-T$ есть производящий оператор голоморфной полугруппы, справедлив более сильный, чем в теореме 1.19, результат относительно решения неоднородного дифференциального уравнения (1.42).

**Теорема 1.27.** *Пусть* $T \in \mathscr{H}(\omega, \beta)$, *и пусть функция* $f(t)$ *непрерывна по Гёльдеру при* $t \geqslant 0$:

$$\| f(t) - f(s) \| \leqslant L(t-s)^k, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \tag{1.61}$$

*где* $L$ *и* $k$ *— некоторые постоянные,* $0 < k \leqslant 1$. *Для любого* $u_0 \in \mathrm{X}$ *функция* $u(t)$, *определенная в* (1.43), *непрерывна при* $t \geqslant 0$, *непрерывно дифференцируема при* $t > 0$ *и является решением уравнения* (1.42) *с* $u_{(0)} = u_0$.

Доказательство. Поскольку $U(t)u_0$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению и начальному условию (см. замечание 1.22), достаточно показать, что второй член $v(t)$ в правой части (1.43) удовлетворяет уравнению (1.42) при $t > 0$. (Снова легко показывается, что $v(t) \to 0$ при $t \to 0$, ибо функция $U(t)$ ограничена при $t \to 0$.)

Имеем

$$v(t) = \int_0^t U(t-s)[f(s)-f(t)]\,ds + \left[\int_0^t U(t-s)\,ds\right] f(t), \tag{1.62}$$

так что $Tv(t)$ существует и равно

$$Tv(t) = T\int_0^t U(t-s)[f(s)-f(t)]\,ds + [1-U(t)]f(t), \tag{1.63}$$

(см. (1.46)); существование первого интеграла в правой части следует из оценки

$$\| TU(t-s) \| \, \| f(s) - f(t) \| \leqslant \mathrm{const}\,(t-s)^{-1} L(t-s)^k = \\ = \mathrm{const}\,(t-s)^{k-1},$$

справедливой в силу (1.56) и (1.61).

С другой стороны, из (1.44) вытекает, что

$$v(t+h) = \left[\int_0^t + \int_t^{t+h}\right] U(t+h-s) f(s)\,ds = \\ = U(h)v(t) + \int_t^{t+h} U(t+h-s)f(s)\,ds, \tag{1.64}$$

где $t > 0$ и $h > 0$. Вычисляя $\lim\limits_{h \searrow 0} h^{-1} [v(t+h) - v(t)]$, получаем ($D^+$ обозначает правую производную)

$$D^+ v(t) = -Tv(t) + f(t), \tag{1.65}$$

ибо известно, что $v(t) \in \mathrm{D}(T)$.

Далее, функция $Tv(t)$ непрерывна при $t > 0$, как будет показано ниже (лемма 1.28). Следовательно, функция $D^+v(t)$ также непрерывна. Отсюда вытекает [1], что производная $dv(t)/dt$ существует при $t > 0$ и равна $-Tv(t) + f(t)$, что и требовалось доказать.

**Лемма 1.28.** *Функция $Tv(t)$ непрерывна при $t \geqslant 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ непрерывна по Гёльдеру при $t \geqslant \varepsilon$ с показателем $k$.*

Доказательство. Второй член в правой части (1.63) удовлетворяет утверждению леммы, ибо функция $f(t)$ непрерывна по Гёльдеру, а функция $U(t)$ голоморфна при $t > 0$.

Обозначим через $w(t)$ первый член в правой части (1.63). Тогда

$$\begin{aligned} w(t+h) - w(t) = T \int_0^t [U(t+h-s) - U(t-s)]\,[f(s) - f(t)]\,ds + \\ + T \int_0^t U(t+h-s)\,[f(t) - f(t+h)]\,ds + \\ + T \int_t^{t+h} U(t+h-s)\,[f(s) - f(t+h)]\,ds \equiv w_1 + w_2 + w_3. \end{aligned} \tag{1.66}$$

Для оценки $w_1$ используем (1.60) и (1.61):

$$\begin{aligned} \| w_1 \| \leqslant \int_0^t \| T[U(t+h-s) - U(t-s)] \|\, \| f(s) - f(t) \|\, ds \leqslant \\ \leqslant M_2 L h \int_0^t (t+h-s)^{-1} (t-s)^{-1+k}\, ds \leqslant \\ \leqslant M_2 L h \int_0^\infty (s+h)^{-1} s^{-1+k}\, ds \leqslant \text{const}\, h^k. \end{aligned}$$

---

[1] Если правая производная $D^+v(t)$ непрерывна, то производная $dv(t)/dt$ существует и равна $D^+v(t)$. Для доказательства положим $w(t) = \int_a^t D^+v(s)\,ds$, где $a > 0$. Тогда $D^+(w(t) - v(t)) = 0$. Поскольку функция $w(t) - v(t)$ непрерывна, она должна быть постоянной (см. лемму III.1.36), так что $dv(t)/dt = dw(t)/dt = D^+v(t)$.

Для оценки $w_2$ используем (1.45) и (1.61):

$$\| w_2 \| = \| [U(h) - U(t+h)] [f(t) - f(t+h)] \| \leqslant 2M_0Lh^k.$$

Наконец, $w_3$ оценим с помощью (1.59) при $n = 1$:

$$\| w_3 \| \leqslant \int_t^{t+h} \| TU(t+h-s) \| \, \| f(s) - f(t+h) \| \, ds =$$

$$= M_1 L \int_t^{t+h} (t+h-s)^{-1+k} \, ds \leqslant \text{const}\, h^k.$$

Сопоставляя полученные оценки, видим, что функция $w(t)$ непрерывна по Гёльдеру с показателем $k$ *равномерно*[1]) по $t \geqslant 0$.

## 8. Приложения к уравнению теплопроводности и уравнению Шрёдингера

Мы уже упоминали выше (пример 1.26), что если $T$ — дифференциальный оператор второго порядка эллиптического типа, то полугруппа $e^{-tT}$ голоморфна. Рассмотрим более подробно полугруппу, порожденную оператором Лапласа в $\mathrm{R}^3$.

Как было показано раньше (п. V.5.2), $-\Delta$ определяет естественным образом самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^3)$. Здесь мы будем рассматривать оператор $T = -\Delta$ в банаховом пространстве $\mathrm{X} = \mathrm{L}^p(\mathrm{R}^3)$, $1 \leqslant p < \infty$, или $\mathrm{X} = \mathrm{C}(\mathrm{R}^3)$. Проще всего определить оператор $T$ с помощью явной формулы для его резольвенты $(T + \zeta)^{-1}$ как интегрального оператора с ядром

$$g(y, x; \zeta) = \frac{e^{-\sqrt{\zeta}\,|y-x|}}{4\pi\,|y-x|}, \quad \operatorname{Re} \sqrt{\zeta} > 0. \tag{1.67}$$

Как легко видеть из примера III.2.11, это ядро определяет интегральный оператор $G(\zeta) \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$ и

$$\| G(\zeta) \| \leqslant \int | g(y, x; \zeta) | \, dy = \int | g(y, x; \zeta) | \, dx \leqslant (\operatorname{Re} \sqrt{\zeta})^{-2} = \frac{1}{|\zeta| \sin^2 \frac{\varepsilon}{2}} \tag{1.68}$$

при $|\arg \zeta| \leqslant \pi - \varepsilon$. Хорошо известен тот факт, что $(\zeta - \Delta) G(\zeta) u = u$ для достаточно гладких функций $u(x)$, скажем для $u \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathrm{R}^3)$. Оператор $T$ определяется как такое продолжение оператора $-\Delta$, определенного на этом множестве гладких функций, для которого $(T + \zeta)^{-1}$ совпадает с $G(\zeta)$.

Из (1.68) следует, что $T \in \mathscr{H}(\frac{\pi}{2}, 0)$ и что $-T$ порождает полугруппу $e^{-tT}$, голоморфную при $\operatorname{Re} t > 0$. Кроме того, $e^{-tT}$ — *сжимающая* полугруппа для вещественных $t > 0$:

$$\| e^{-tT} \| \leqslant 1 \quad \text{для вещественных} \quad t > 0, \tag{1.69}$$

---

[1]) Но $Tv(t)$ не обязательно непрерывна по Гёльдеру сверху при $t = 0$, ибо для $U(t)$ это не всегда так.

ибо из (1.68) при $\varepsilon = \pi$ вытекает, что $\| (T + \xi)^{-1} \| = \| G(\xi) \| \leqslant 1/\xi$ при $\xi > 0$.

Для любого $u_0 \in \mathrm{X}$ функция $u(t) = e^{-tT}u_0$ является решением дифференциального уравнения $du(t)/dt = -Tu(t)$, представляющего собой абстрактный вариант *уравнения теплопроводности*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u. \tag{1.70}$$

Такое решение единственно при любом начальном значении $u_0$, если потребовать, чтобы $u(t) \in \mathrm{X}$. Таким образом, *любое решение уравнения теплопроводности, принадлежащее* X, *голоморфно по* $t$ (как функция со значениями в X). Вообще говоря, это не означает, что функция $u(t, x)$ аналитична по $t$ при каждом фиксированном $x$, но последнее действительно следует из абстрактной аналитичности в случае $\mathrm{X} = \mathrm{C}(\mathrm{R}^3)$, ибо сходимость в этом пространстве — это равномерная сходимость функций.

В силу (1.50) оператор $e^{-tT}$ представим в виде интегрального оператора с ядром

$$h(y, x; t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\zeta t} g(y, x; \zeta)\, d\zeta = (4\pi t)^{-3/2} e^{-\frac{|y-x|^2}{4t}}, \quad \operatorname{Re} t > 0, \tag{1.71}$$

где $\Gamma$ выбрано так же, как в п. 6.

Формула (1.71) наводит на мысль, что $e^{-itT}$ является интегральным оператором с ядром

$$h(y, x; it) = (4\pi i t)^{-3/2} e^{-\frac{|y-x|^2}{4it}}. \tag{1.72}$$

Однако это не очевидно; не ясно даже, в каком смысле (1.72) является интегральным ядром. Мы знаем, что если $\mathrm{X} = \mathrm{L}^2(\mathrm{R}^3)$, то оператор $T$ самосопряжен и, следовательно, $\{e^{-itT}\}$ есть группа, определенная для $-\infty < t < +\infty$. В этом случае $e^{-itT}$ и в самом деле является интегральным оператором с ядром (1.72) в устанавливаемом ниже смысле.

Для простоты рассмотрим вместо (1.72) его одномерный аналог

$$k(y, x; it) = (4\pi i t)^{-1/2} e^{-\frac{|y-x|^2}{4it}}, \tag{1.73}$$

где $x$, $y$, $t$ изменяются на вещественной прямой $(-\infty, +\infty)$. Тогда выражение

$$K(t)\, u(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(y, x; it)\, u(x)\, dx \tag{1.74}$$

определено по крайней мере, когда $u(x)$ достаточно быстро стремится к нулю при $x \to \pm\infty$. Например, простые вычисления показывают, что

$$K(t)\, u(x) = (1 + 4ibt)^{-1/2} e^{-\frac{b(x-a)^2}{1+4ibt}} \quad \text{для} \quad u(x) = e^{-b(x-a)^2}, \quad b > 0. \tag{1.75}$$

Если мы возьмем две функции такого вида $u_j(x) = e^{-b_j(x-a_j)^2}$, $j = 1, 2$, и построим $K(t)\, u_j$ по формуле (1.75), то, как показывают элементарные вычисления,

$$(K(t)\, u_1, K(t)\, u_2) = (u_1, u_2) = \left(\frac{\pi}{b_1 + b_2}\right)^{1/2} e^{-\frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2}(a_1 - a_2)^2}. \tag{1.76}$$

Отсюда видно, что любая линейная комбинация функций вида (1.75) удовлетворяет равенству $\| K(t)\, u \| = \| u \|$. Другими словами, оператор $K(t)$ изометричен, если его рассматривать на множестве D таких функций $u$. Но D плотно в $L^2$. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что множество фурье-образов функций из D плотно в $L^2$ (поскольку преобразование Фурье унитарно отображает $L^2$ в $L^2$). Фурье-образ $\hat{u}$ функции $u$ вида (1.75) равен $\hat{u}(p) = (2b)^{1/2} e^{-(p^2/4b)-iap}$. Предположим, что функция $\hat{v}(p) \in L^2$ ортогональна всем функциям $\hat{u}$ такого вида с фиксированным $b$ и переменным $a$. Это означает, что функция $\hat{w}(p) = e^{-p^2/4b}\, \hat{v}(p)$, принадлежащая $L^1$, имеет нулевой фурье-образ. Таким образом $\hat{w}(p) = 0$ и, значит, $\hat{v}(p) = 0$, т. е. множество $u$, плотно в $L^2$.

Поэтому оператор $K(t)$, определенный на D, можно единственным образом расширить до изометричного оператора из $L^2$ в $L^2$, который мы будем по-прежнему обозначать через $K(t)$. Этот оператор $K(t)$ может и не быть интегральным оператором в собственном смысле слова, но он является интегральным оператором в обобщенном смысле:

$$K(u)\, u(y) = \text{l.i.m.}\,(4\pi it)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-x)^2}{4it}}\, u(x)\, dx, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1.77}$$

так же как в теореме Фурье — Паншереля.

Нам осталось показать, что обобщенный интегральный оператор $K(t)$ совпадает с $e^{-itT}$. Для этого достаточно показать, что $K(t)\, u = e^{-itT}u$ для $u \in$ D. В справедливости этого равенства убеждаемся, устремляя $t$ к вещественной оси из нижней полуплоскости $\operatorname{Im} t < 0$, где это равенство очевидно (см. ниже задачу 1.29).

В трехмерном случае достаточно в проведенных рассуждениях в качестве D взять множество линейных комбинаций функций вида $u(x) = e^{-b\,|x-a|^2}$, $b > 0$, $a \in R^3$. Тогда $e^{-itT}$ будет интегральным оператором, задаваемым формулой

$$e^{-itT}u(y) = \text{l.i.m.}\,(4\pi it)^{-3/2} \int_{R^3} e^{-\frac{|y-x|^2}{4it}}\, u(x)\, dx, \quad -\infty < t < \infty. \tag{1.78}$$

Эти результаты можно распространить и на $m$-мерный случай, надо только заменить 3/2 на $m/2$.

Задача 1.29. Если $X = L^2$, то полугруппа $e^{-tT}$ сильно непрерывна и $\| e^{-tT} \| \leqslant 1$ при $\operatorname{Re} t \geqslant 0$.

## § 2. Возмущение полугрупп

### 1. Аналитическое возмущение квазиограниченных полугрупп [1]

Возникает вопрос: сохраняется ли при малых возмущениях свойство оператора быть производящим оператором полугруппы? И если да, то как изменяется порождаемая им полугруппа?

---

[1] Подробнее см. **Хилле и Филлипс** [1], гл. 13, **Филлипс** [1].

Прежде всего мы покажем, что свойство оператора быть производящим оператором полугруппы устойчиво относительно добавления *ограниченного* оператора.

**Теорема 2.1.** *Пусть* $T \in \mathscr{G}(M, \beta)$ *и* $A \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$. *Тогда* $T + A \in \mathscr{G}(M, \beta + M \| A \|)$ *и* $e^{-t(T+A)}$ *при фиксированном* $t \geqslant 0$ *есть голоморфная функция от* $A$. *В частности,* $e^{-t(A+\varkappa A)}$ — *целая функция комплексной переменной* $\varkappa$.

Доказательство. Если $-(T + A)$ — производящий оператор квазиограниченной полугруппы $V(t) = e^{-t(T+A)}$, то выполняется дифференциальное уравнение

$$\frac{dv(t)}{dt} = -(T+A)\,v(t), \tag{2.1}$$

для $v(t) = V(t)\,u_0$, $u_0 \in \mathrm{D}(T + A) = \mathrm{D}(T)$.

В соответствии с п. 1.5 решение уравнения (2.1) должно удовлетворять интегральному уравнению

$$v(t) = U(t)\,u_0 - \int_0^t U(t-s)\,Av(s)\,ds, \tag{2.2}$$

где $U(t) = e^{-tT}$ — невозмущенная полугруппа. Подставляя $v(t) = V(t)\,u_0$, получаем

$$V(t) = U(t) - \int_0^t U(t-s)\,AV(s)\,ds. \tag{2.3}$$

Хотя мы доказали операторное равенство (2.3) лишь применительно к $u_0 \in \mathrm{D}(T)$, однако на самом деле оно справедливо для всех $u$, так как обе его части принадлежат $\mathscr{B}(\mathrm{X})$, а $\mathrm{D}(T)$ плотно в $\mathrm{X}$. Отметим, далее, что интеграл в (2.3) понимается в сильном смысле; функция $U(t-s)\,AV(s)\,u_0$ непрерывна по $s$ при каждом $u_0 \in \mathrm{X}$ и потому интегрируема.

Будем решать уравнение (2.3) методом последовательных приближений:

$$V(t) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(t), \tag{2.4}$$

$$U_{n+1}(t) = -\int_0^t U(t-s)\,AU_n(s)\,ds, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.5}$$

где $U_0(t) = U(t)$. Поскольку функция $U(t)$ сильно непрерывна, то, как легко доказать по индукции, все функции $U_n(t)$ определены (интеграл в (2.5) — это сильный интеграл от сильно непрерывной функции) и сильно непрерывны по $t$. Кроме того, справедливы оценки

$$\|U_n(t)\| \leqslant M^{n+1} \|A\|^n e^{\beta t} \frac{t^n}{n!}, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \tag{2.6}$$

которые могут быть доказаны по индукции. Действительно, оценка (2.6) верна при $n = 0$; допуская, что она верна для $n$, получаем из (2.5) с учетом того, что $\|U(t-s)\| \leqslant Me^{\beta(t-s)}$,

$$\|U_{n+1}(t)\| \leqslant M^{n+2} \|A\|^{n+1} \frac{1}{n!} \int_0^t e^{\beta(t-s)} e^{\beta s} s^n \, ds =$$
$$= M^{n+2} \|A\|^{n+1} e^{\beta t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В силу (2.6) ряд (2.4) абсолютно сходится, его сумма $V(t)$ есть решение интегрального уравнения (2.3) и

$$\|V(t)\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \|U_n(t)\| \leqslant Me^{(\beta+M\|A\|)t}. \tag{2.7}$$

Чтобы показать, что $V(t)$ действительно является полугруппой, порожденной оператором $-(T+A)$, умножим (2.3) на $e^{-\xi t}$ и проинтегрируем по $0 \leqslant t < \infty$, предполагая, что $\operatorname{Re}\zeta > \beta + M\|A\|$. Тогда

$$R_1(\zeta) = \int_0^\infty e^{-\zeta t} V(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\zeta t} U(t)\, dt -$$
$$- \left[\int_0^\infty e^{-\zeta t} U(t)\, dt\right] A \left[\int_0^\infty e^{-\zeta t} V(t)\, dt\right] =$$
$$= (T+\zeta)^{-1} - (T+\zeta)^{-1} A R_1(\zeta). \tag{2.8}$$

Это показывает, что $(T+\zeta)R_1(\zeta) = 1 - AR_1(\zeta)$, или $(T+A+\zeta)R_1(\zeta) = 1$. Так как $-\zeta \in P(T+A)$, ввиду того, что $\|A\| < M^{-1}\operatorname{Re}(\zeta-\beta) \leqslant \frac{1}{\|(T+\zeta)^{-1}\|}$ (см. (1.39)), то $R_1(\zeta) = (T+A+\zeta)^{-1}$.

Таким образом, имеем при $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

$$\|(T+A+\zeta)^{-k-1}\| = \frac{1}{k!} \left\| \frac{d^k}{d\zeta^k} (T+A+\zeta)^{-1} \right\| = \frac{1}{k!} \left\| \frac{d^k}{d\zeta^k} R_1(\zeta) \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{k!} \int_0^\infty t^k |e^{-\zeta t}| \, \|V(t)\| \, dt = \frac{M}{k!} \int_0^\infty t^k e^{-(\operatorname{Re}\zeta - \beta - M\|A\|)t} \, dt =$$
$$= M(\operatorname{Re}\zeta - \beta - M\|A\|)^{-k-1}, \tag{2.9}$$

а это показывает, что $T + A$ удовлетворяет оценке (1.36) с $\beta$, замененным на $\beta + M\|A\|$, т. е. что $T + A$ принадлежит $\mathcal{G}(M,\ \beta + M\|A\|)$.

Итак, с учетом замечания 1.4 (или, точнее, его обобщения на $T \in \mathcal{G}(M, \beta)$), мы видим, что $V(t) = e^{-t(T+A)}$.

Выражение (2.4) для $V(t) = e^{-t(T+A)}$ представляет собой разложение по степеням оператора $A$; этим доказано, что $V(t)$ — голоморфная функция от $A$ (см. замечание II.5.17).

**Замечание 2.2.** Проведенное выше доказательство того, что $-(T + A)$ — производящий оператор, является косвенным; можно и непосредственно проверить неравенство (2.9). Эта проверка в общем случае довольно сложна [1]. Но при $M = 1$ доказательство тривиально: в этом случае достаточно проверить (2.9) лишь для $k = 1$, а это очевидно, как показывает ряд Неймана для резольвенты $(T + A + \zeta)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (T + \zeta)^{-1} [-A (T + \zeta)^{-1}]^n$ и оценка $\| (T + \zeta)^{-1} \| \leqslant (\mathrm{Re}\, \zeta - \beta)^{-1}$.

**Задача 2.3.** Доказать методом последовательных приближений, что $v_n(t) = U_n(t) u_0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $dv_n/dt = -Tv_n - Av_{n-1}$ (здесь положено $v_{-1} = 0$) и что $v = \sum v_n$ удовлетворяет уравнению $dv/dt = -(T + A) v$, при условии что $u_0 \in \mathrm{D}(T)$. [*Указание*: теорема 1.19.]

## 2. Аналитическое возмущение голоморфных полугрупп

В предыдущем пункте мы рассмотрели возмущение производящего оператора $-T$ квазиограниченной полугруппы *ограниченным* оператором. В общем случае не приходится рассчитывать на то, что оператор $T$ останется производящим при добавлении к нему неограниченного оператора $A$. Например, оператор $-(T + A)$ не обязательно будет производящим оператором квазиограниченной полугруппы, даже если оператор $A$ ограничен относительно $T$.

Однако если $-T$ — производящий оператор *голоморфной* полугруппы, то допустимы возмущения довольно широкого класса.

**Теорема 2.4** [2]. *Для любого $T \in \mathcal{H}(\omega, \beta)$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют положительные постоянные $\gamma$, $\delta$ такие, что если оператор $A$ ограничен относительно $T$, так что*

$$\| Au \| \leqslant a \| u \| + b \| Tu \|, \quad u \in \mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(A), \qquad (2.10)$$

*с $a < \delta$, $b < \delta$, то $T + A \in \mathcal{H}(\omega - \varepsilon, \gamma)$. В частности, если $\beta = 0$ и $a = 0$, то $T + A \in \mathcal{H}(w - \varepsilon, 0)$.*

---

[1] См. Хилле и Филлипс [1].

[2] См. Хилле и Филлипс [1].

Доказательство. Как легко видеть, без ограничения общности можно считать, что $\beta = 0$ [1]. Из (2.10) вытекает, что

$$\| A\,(T+\zeta)^{-1} \| \leqslant a\, \| (T+\zeta)^{-1} \| + b\, \| T\,(T+\zeta)^{-1} \|. \tag{2.11}$$

Если $|\arg \zeta| \leqslant \pi/2 + \omega - \varepsilon$, то $\| (T+\zeta)^{-1} \| \leqslant M_\varepsilon / |\zeta|$ в силу (1.51) и $\| T\,(T+\zeta)^{-1} \| = \| 1 - \zeta\,(T+\zeta)^{-1} \| \leqslant 1 + M_\varepsilon$. Следовательно,

$$\| A\,(T+\zeta)^{-1} \| \leqslant a M_\varepsilon\, |\zeta|^{-1} + b\,(1 + M_\varepsilon), \tag{2.12}$$

и второй ряд Неймана для $(T+\zeta+A)^{-1}$ сходится, если правая часть в (2.12) меньше 1, причем

$$\| (T+\zeta+A)^{-1} \| \leqslant \frac{M_\varepsilon |\zeta|^{-1}}{1 - a M_\varepsilon |\zeta|^{-1} - b\,(1+M_\varepsilon)} = \frac{M_\varepsilon\,[1 - b\,(1+M_\varepsilon)]^{-1}}{|\zeta| - a M_\varepsilon\,[1 - b\,(1+M_\varepsilon)]^{-1}}. \tag{2.13}$$

Если $b < (1+M_\varepsilon)^{-1}$, то, как видно из (2.13), $\| (T+\zeta+A)^{-1} \| \leqslant M' / |\zeta - \gamma|$ при $|\arg(\zeta - \gamma)| \leqslant \frac{\pi}{2} + \omega - \varepsilon$, где $M'$ и $\gamma$ — некоторые положительные постоянные, зависящие от $a$, $b$ и $M_\varepsilon$. Если $a = 0$, то можно взять $\gamma = 0$.

**Следствие 2.5.** *Если $-T$ — производящий оператор квазиограниченной голоморфной полугруппы, а оператор $A$ ограничен относительно $T$ с относительной границей 0, то оператор $T + A$ также является производящим оператором некоторой квазиограниченной голоморфной полугруппы.*

Доказательство. Достаточно заметить, что в доказательстве теоремы 2.4. $b$ может быть выбрано как угодно малым.

**Теорема 2.6.** *Пусть $T\,(\varkappa) \in \mathscr{B}\,(X)$ — голоморфное семейство типа* (A), *определенное в некоторой окрестности точки $\varkappa = 0$. Если $T\,(0)$ — производящий оператор квазиограниченной голоморфной полугруппы, то это же верно и для $T\,(\varkappa)$ при достаточно малых $|\varkappa|$. В этом случае функция $U\,(t, \varkappa) = e^{-tT(\varkappa)}$ голоморфна по $\varkappa$ и $t$, если $t$ лежит в некотором открытом секторе, содержащем полуось $t > 0$. Далее, все производные $\partial^n U\,(t, \varkappa)/\partial\varkappa^n$ сильно непрерывны по $t$, включая и $t = 0$* [2]. *Если, в частности $T\,(\varkappa) = T +$*

---

[1] Если $\beta < 0$, то $T \in \mathscr{H}(\omega, \beta) \subset \mathscr{H}\,(\omega, 0)$. Если $\beta > 0$, то положим $T_0 = T + \beta$; тогда $T_0 \in \mathscr{H}(\omega, 0)$ и $\|Au\| \leqslant (a + b\beta)\,\|u\| + b\,\|T_0 u\|$. Если $\gamma_0$, $\delta_0$ обозначают числа $\gamma$, $\delta$ из теоремы, соответствующие $\beta = 0$, то $T_0 + A \in \mathscr{H}\,(\omega - \varepsilon, \gamma_0)$ при $a + b\beta < \delta_0$, $b < \delta_0$. Следовательно, $T + A \in \mathscr{H}(\omega - \varepsilon, \gamma_0 + \beta)$, если $a < \delta_0/2$, $b < \min\,(\delta_0, (\delta_0/2)\,\beta)$, так что достаточно взять $\gamma = \gamma_0 + \beta$, $\delta = \min\,(\delta_0, (\delta_0/2)\,\beta)$.

[2] Как видно из доказательства, утверждения теоремы справедливы для *любой* голоморфной функции $T\,(\varkappa)$, при условии что $T\,(\varkappa) \in \mathscr{H}\,(\omega, \beta)$ для малых $|\varkappa|$. Предположение насчет типа (A) используется для того,

*$+\varkappa A$, где $T$ и $A$ удовлетворяют условиям следствия 2.5, то $e^{-t\,(T+\varkappa A)}$ есть целая функция от $\varkappa$ при каждом $t$, лежащем в этом секторе.*

Доказательство. Так как разность $T(\varkappa)-T(0)$ ограничена относительно $T(0)$ (см. п. VII.2.1), то $T(\varkappa)$ принадлежит некоторому $\mathscr{H}(\omega, \beta)$ при достаточно малых $|\varkappa|$. Заменяя, если нужно, $T(\varkappa)$ на $T(\varkappa)+\beta$, можем считать, что $T(\varkappa)\in\mathscr{H}(\omega, 0)$. В силу (1.50) имеем

$$\frac{\partial^n}{\partial\varkappa^n}U(t, \varkappa)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} e^{\zeta t}\frac{\partial^n}{\partial\varkappa^n}(T(\varkappa)+\zeta)^{-1}\,d\zeta. \tag{2.14}$$

Но

$$\frac{\partial^n}{\partial\varkappa^n}(T(\varkappa)+\zeta)^{-1}=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{C}(T(\varkappa')+\zeta)^{-1}(\varkappa'-\varkappa)^{-n-1}\,d\varkappa', \tag{2.15}$$

где C — малый круг на $\varkappa$-плоскости и $\varkappa$ лежит внутри C. Поскольку (1.51) выполняется для $T=T(\varkappa)$ равномерно по $\varkappa$ в некоторой окрестности $\varkappa=0$, то при достаточно малых $|\varkappa|$ имеем

$$\left\|\frac{\partial^n}{\partial\varkappa^n}(T(\varkappa)+\zeta)^{-1}\right\|\leqslant\frac{M_\varepsilon N^n n!}{|\zeta|},\quad |\arg\zeta|\leqslant\frac{\pi}{2}+\omega-\varepsilon, \tag{2.16}$$

где $N$ — некоторая постоянная. Поэтому те же самые рассуждения, что и в п. 1.6, показывают, что функция $\partial^n U(t, \varkappa)/\partial\varkappa^n$ голоморфна по $t$ в некотором открытом секторе и сильно непрерывна вплоть до $t=0$. В частности, отсюда следует, что функция $U(t, \varkappa)$ голоморфна по $\varkappa$, причем ее коэффициенты Тейлора голоморфны по $t$.

Наконец, последнее утверждение теоремы выполнено, ибо $T(\varkappa)$ удовлетворяет условиям теоремы при всех $\varkappa$ в силу следствия 2.5.

Эти результаты показывают, что голоморфные полугруппы довольно устойчивы относительно возмущений.

## 3. Возмущение сжимающих полугрупп

Как мы уже отмечали в предыдущем пункте, если $-T$ — производящий оператор ограниченной полугруппы, то оператор $-(T+A)$ не будет, вообще говоря, производящим, даже когда

---

чтобы показать, что если $T(0)\in\mathscr{H}(\omega_0, \beta_0)$, то $T(\varkappa)\in\mathscr{H}(\omega, \beta)$. Легко видеть, что «тип (A)» можно заменить на «тип (B)» (см. п. VII.4); в этом случае форма $\mathfrak{t}(\varkappa)-\mathfrak{t}(0)$ ограничена относительно $\mathfrak{t}(0)$, ($\mathfrak{t}(\varkappa)$ обозначает форму, ассоциированную с $T(\varkappa)$), так что $T(\varkappa)\in\mathscr{H}(\omega, \beta)$ с некоторыми постоянными $\omega$, $\beta$ для всех $\varkappa$ из любого компактного подмножества области изменения $\varkappa$.

оператор $A$ ограничен относительно $T$. Исключение представляет случай, когда оба оператора $-T$ и $-A$ являются производящими операторами сжимающих полугрупп. Именно, имеет место

**Теорема 2.7** [1]. *Пусть операторы $T$ и $A$ принадлежат $\mathscr{G}(1, 0)$ и оператор $A$ ограничен относительно $T$ с относительной $T$-границей, меньшей* 1/2. *Тогда* $(T + A) \in \mathscr{G}(1, 0)$.

Доказательство. Множество $\mathrm{P}(T)$ содержит полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta < 0$ и $\| (T + \xi)^{-1} \| \leqslant \xi^{-1}$ при $\xi > 0$. Оператор $A$ удовлетворяет неравенству вида (2.10) с $b < 1/2$, так что $\| A(T + \xi)^{-1} \| \leqslant a \| (T + \xi)^{-1} \| + b \| T(T + \xi)^{-1} \| \leqslant a\xi^{-1} + 2b < 1$, если $\xi$ достаточно велико. Из второго ряда Неймана для резольвенты следует поэтому, что резольвента $(T + A + \xi)^{-1}$ существует при каждом $\xi$.

Оценим $(T + A + \xi)^{-1}$. Для этого рассмотрим вектор $v(t) = e^{-tA}e^{-t(T+\xi)}u$, где $u \in \mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(A)$. Имеем

$$u - v(t) = (u - e^{-tA}u) + e^{-tA}(u - e^{-t(T+\xi)}u). \qquad (2.17)$$

Поскольку $e^{-tA}u$ и $e^{-t(T+\xi)}u$ дифференцируемы по $t$, то в силу (1.24)

$$\lim_{t\searrow 0} t^{-1}(u - v(t)) = Au + (T + \xi)u. \qquad (2.18)$$

С другой стороны, $\| v(t) \| \leqslant e^{-t\zeta} \| u \|$, ибо $e^{-tA}$ и $e^{-tT}$ — сжимающие полугруппы. Следовательно,

$${}^{-1} \| u - v(t) \| \geqslant t^{-1}(\| u \| - e^{-t\xi} \| u \|) \to \xi \| u \|, \ t \to 0. \qquad (2.19)$$

Из (2.18) и (2.19) следует, что

$$\| (T + A + \xi) u \| \geqslant \xi \| u \|, \qquad (2.20)$$

откуда $\| (T + A + \xi)^{-1} \| \leqslant \xi^{-1}$, так что $(T + A + \xi)^{-1}$ существует по крайней мере для достаточно больших $\xi$. Используя первый ряд Неймана, заключаем, что $(T + A + \xi)^{-1}$ существует и удовлетворяет тому же неравенству для всех $\xi > 0$. Это показывает, что $T + A \in \mathscr{G}(1, 0)$, что и требовалось установить.

**Задача 2.8.** Если $T \in \mathscr{G}(1, \beta)$, $A \in \mathscr{G}(1, \beta')$ и оператор $A$ ограничен относительно $T$ с $T$-границей, меньшей 1/2, то $T + A \in \mathscr{G}(1, \beta + \beta')$.

**Задача 2.9.** В случае когда $\mathbf{X}$ — гильбертово пространство, число 1/2 для $T$-границы оператора $A$ в теореме 2.7 и задаче 2.8 можно заменить на 1.

---

[1] Эта теорема и теорема 2.11 по существу имеются у Троттера [2], где полугруппа $e^{-t(T+A)}$ построена как предел последовательности $(e^{-\frac{t}{n}T} e^{-\frac{t}{n}A})^n$ при $n \to \infty$. Интересные приложения этого метода даны Нельсоном [1]. См. также Бэббит [1].

**Замечание 2.10.** Из теоремы 2.7 не следует, что функция $e^{-t(T+\varkappa A)}$ голоморфна по $\varkappa$. Действительно, значения $\varkappa < 0$, вообще говоря, не допускаются, если оператор $\varkappa A$ должен принадлежать $\mathscr{G}(1, \beta)$. Но можно показать, что функция $e^{-t(T+\varkappa A)}$ сильно непрерывна по $\varkappa$ при $\varkappa \geqslant 0$. Более общо, $e^{-t(T+A_n)} \xrightarrow[s]{} e^{-tT}$, если $A_n$ стремятся к нулю в том смысле, что $A_n$ являются $T$-ограниченными и $\| A_n u \| \leqslant a_n \| u \| + b_n \| Tu \|$, где $a_n$, $b_n \to 0$. Это следствие доказываемой ниже теоремы 2.16.

В теореме 2.7 $T$-ограниченность оператора $A$ использовалась по существу только при доказательстве того, что $-\xi \in \mathrm{P}(T + A)$ при достаточно больших $\xi$. В случае когда $u \in \mathbf{D}(T + A) = \mathbf{D}(T) \cap \mathbf{D}(A)$, доказательство неравенства (2.20) проходит и без такого предположения. Если область значений оператора $T + A + \xi$ плотна в $\mathbf{X}$ и если оператор $T + A$ замыкаем, то $-\xi \in \mathrm{P}(S)$, причем $\| (S + \xi)^{-1} \| \leqslant \xi^{-1}$, где $S$ — замыкание оператора $T + A$. Если оператор $S$ определен на плотном множестве, то, как и выше, $S \in \mathscr{G}(1, 0)$. Таким образом, мы получили следующую теорему, в которую операторы $T$ и $A$ входят симметрично.

**Теорема 2.11.** *Пусть $T$ и $A$ принадлежат $\mathscr{G}(1, 0)$, множество $\mathbf{D}(T) \cap \mathbf{D}(A)$ плотно в $\mathbf{X}$ и оператор $T + A + \xi$ имеет плотную область значений при достаточно больших вещественных $\xi$. Если оператор $T + A$ замыкаем, то его замыкание $S$ принадлежит $\mathscr{G}(1, 0)$.*

## 4. Сходимость квазиограниченных полугрупп в узком смысле

Вернемся к производящим операторам квазиограниченных полугрупп. Если $-T$ — такой оператор, то в общем случае трудно доказать, что оператор $-S = -(T + A)$, где $A$ — неограниченный оператор, является производящим. Однако если мы *предположим*, что $-S$ — также производящий оператор, то можно показать, что оператор $e^{-tS} - e^{-tT}$ мал относительно $T$ при условии, что оператор $A$ мал относительно $T$, даже если $A$ неограничен. Более точно, имеет место

**Теорема 2.12.** *Пусть $T$, $S \in \mathscr{G}(M, \beta)$, $\beta \geqslant 0$, и пусть $S = T + A$, где оператор $A$ ограничен относительно $T$, так что выполнено (2.10). Тогда при $\xi > \beta$*

$$\| (e^{-tS} - e^{-tT}) (T + \xi)^{-1} \| \leqslant$$
$$\leqslant M^2 t e^{\beta t} [b (M + 1) + (a + b\beta) M (\xi - \beta)^{-1}]. \tag{2.21}$$

Доказательство. Пусть $u \in \mathbf{D}(T) = \mathbf{D}(S)$. Тогда, как и в (2.2), имеем

$$(e^{-ts} - e^{-tT}) u = - \int_0^t e^{-(t-s)S} A e^{-sT} u \, ds; \tag{2.22}$$

здесь $Ae^{-st}u = A(T+\xi)^{-1}e^{-sT}(T+\xi)u$ непрерывно зависит от $s$, потому что оператор $A(T+\xi)^{-1}$ ограничен. Поскольку $(T+\xi)^{-1}v \in \mathbf{D}(T)$ для любого $v \in \mathbf{X}$, то, полагая в (2.22) $u = (T+\xi)^{-1}v$, получим

$$(e^{-ts}-e^{-tT})(T+\xi)^{-1} = -\int_0^t e^{-(t-s)S}A(T+\xi)^{-1}e^{-sT}\,ds. \tag{2.23}$$

Так как $\|e^{-(t-s)S}\| \leqslant Me^{\beta(t-s)}$, $\|e^{-sT}\| \leqslant Me^{\beta s}$ и

$$\begin{aligned}\|A(T+\xi)^{-1}\| &\leqslant a\|(T+\xi)^{-1}\| + b\|T(T+\xi)^{-1}\| \leqslant \\ &\leqslant aM(\xi-\beta)^{-1} + b\|1-\xi(T+\xi)^{-1}\| \leqslant \\ &\leqslant b(1+M) + M(a+b\beta)(\xi-\beta)^{-1},\end{aligned} \tag{2.24}$$

то (2.21) следует из (2.23).

**Замечание 2.13.** Теорема 2.12 показывает, что $(e^{-tS}-e^{-tT})u$ стремится к нулю при $a$, $b \to 0$, хотя не равномерно по $\|u\| \leqslant 1$, но равномерно по всем $u \in \mathbf{D}(T)$ таким, что $\|(T+\xi)u\| \leqslant 1$.

В этом направлении мы можем пойти дальше и получить определенного вида оценку для $e^{-tS}-e^{-tT}$ без каких-либо предположений относительно $S-T$

**Теорема 2.14.** *Пусть* $T$, $S \in \mathscr{G}(M, \beta)$. *Тогда*

$$\begin{aligned}&\|(S+\zeta)^{-1}(e^{-tS}-e^{-tT})(T+\zeta)^{-1}\| \leqslant \\ &\qquad \leqslant M^2\cdot te^{\beta t}\|(S+\zeta)^{-1}-(T+\zeta)^{-1}\| \text{ при } \operatorname{Re}\zeta > \beta.\end{aligned} \tag{2.25}$$

Доказательство. Функция $e^{-tT}(T+\zeta)^{-1}$ сильно дифференцируема по $t$:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)e^{-tT}(T+\zeta)^{-1}u = -e^{-tT}T(T+\zeta)^{-1}u = -e^{-tT}[1-\zeta(T+\zeta)^{-1}],$$

и аналогично для $e^{-tS}(S+\zeta)^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{ds}e^{-(t-s)S}(S+\zeta)^{-1}e^{-sT}(T+\zeta)^{-1} = \\ &\qquad = e^{-(t-s)S}e^{-sT}(T+\zeta)^{-1} - e^{-(t-s)S}(S+\zeta)^{-1} = \\ &\qquad = e^{-(t-s)S}[(T+\zeta)^{-1}-(S+\zeta)^{-1}]e^{-sT}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

Интегрируя по $s$ на $(0, t)$, получим

$$\begin{aligned}&(S+\zeta)^{-1}(e^{-tT}-e^{-tS})(T+\zeta)^{-1} = \\ &\qquad = \int_0^t e^{-(t-s)S}[(T+\zeta)^{-1}-(S+\zeta)^{-1}]e^{-sT}\,ds,\end{aligned} \tag{2.27}$$

откуда в силу неравенств $\|e^{-(t-s)S}\| \leqslant Me^{(t-s)\beta}$, $\|e^{-sT}\| \leqslant Me^{\beta s}$ и следует (2.25).

**Пример 2.15.** Пусть $T = iH$, где $H$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Если $K$ — симметричный оператор, $H$-ограниченный с $H$-границей, меньшей 1, то оператор $H + K$ самосопряжен (см. теорему V.4.3). Унитарный оператор $e^{-itH+K}$ стремится к $e^{-itH}$ в смысле замечания 2.13, когда $K$ стремится к нулю в указанном выше смысле.

## 5. Сильная сходимость квазиограниченных полугрупп

Если ограничиться изучением *сильной сходимости* полугрупп, порожденных данной последовательностью производящих операторов, то можно ослабить предположения на рассматриваемые возмущения. Следующая теорема является основополагающей в теории аппроксимаций полугрупп.

**Теорема 2.16.** *Пусть операторы $T$ и $T_n$, $n = 1, 2, \ldots$, принадлежат $\mathcal{G}(M, \beta)$. Если*

$$(T_n + \zeta)^{-1} \xrightarrow[s]{} (T + \zeta)^{-1} \tag{2.28}$$

*для некоторого $\zeta$ с $\operatorname{Re} \zeta > \beta$, то*

$$e^{-tT_n} \xrightarrow[s]{} e^{-tT} \tag{2.29}$$

*равномерно на любом конечном интервале $t \geqslant 0$* [1]. *Обратно, если (2.29) выполняется для всех $t$, таких, что $0 \leqslant t \leqslant b$, $b > 0$, то (2.28) имеет место для каждого $\zeta$ с $\operatorname{Re} \zeta > \beta$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\beta = 0$. Заменим в тождестве (2.27) $S$ на $T_n$; поскольку $\| e^{-(t-s)T_n} \| \leqslant M$, то для любого $u \in X$ имеем

$$\| (T_n + \zeta)^{-1} (e^{-tT_n} - e^{-tT}) (T + \zeta)^{-1} u \| \leqslant$$
$$\leqslant M \int_0^t \| [(T_n + \zeta)^{-1} - (T + \zeta)^{-1}] e^{-sT} u \| \, ds. \tag{2.30}$$

Если $(T_n + \zeta)^{-1} \xrightarrow[s]{} (T + \zeta)^{-1}$, то подинтегральная функция в правой части (2.30) стремится к нулю при $n \to \infty$ для каждого фиксированного $s$. Кроме того, она мажорируется выражением $2M\xi^{-1}M \| u \|$, $\xi = \operatorname{Re} \zeta > 0$, которое не зависит от $n$. Поэтому правая часть в (2.30) стремится к нулю в силу принципа ограниченной сходимости. Очевидно, сходимость равномерна по $t$ на любом конечном интервале.

Итак, мы показали, что

$$(T_n + \zeta)^{-1} (e^{-tT_n} - e^{-tT}) v \to 0, \quad n \to \infty, \tag{2.31}$$

---

[1] Напомним, что условие (2.28) означает, что $T_n \xrightarrow[s]{} T$ в обобщенном смысле (см. § VIII.1). Достаточные условия для справедливости условия (2.28) подробно изучены в § VIII.1 и VIII.3.

равномерно по $t$; здесь $v=(T+\zeta)^{-1}u$. Соотношение (2.31) выполняется для всех $v\in\mathbf{D}(T)$, так как $v$ пробегает все $\mathbf{D}(T)$, когда $u$ пробегает $\mathbf{X}$. Но оператор в левой части (2.31) равномерно ограничен и его норма не превосходит $2M^2\xi^{-1}$. Следовательно, (2.31) выполняется для всех $v\in\mathbf{X}$.

Далее, имеем

$$(T_n+\zeta)^{-1}e^{-tT_n}v-e^{-tT_n}(T+\zeta)^{-1}v=\\ =e^{-tT_n}[(T_n+\zeta)^{-1}v-(T+\zeta)^{-1}v]\to 0, \qquad (2.32)$$

ибо $\|e^{-tT_n}\|\leqslant M$ и $(T_n+\zeta)^{-1}v-(T+\zeta)^{-1}v\to 0$. Аналогично,

$$(T_n+\zeta)^{-1}e^{-tT}v-e^{-tT}(T+\zeta)^{-1}v=\\ =[(T_n+\zeta)^{-1}-(T+\zeta)^{-1}]e^{-tT}v\to 0. \qquad (2.33)$$

Из (2.31) — (2.33) следует, что

$$(e^{-tT_n}-e^{-tT})(T+\zeta)^{-1}v\to 0. \qquad (2.34)$$

Это означает, что $(e^{-tT_n}-e^{-tT})w\to 0$ для всех $w\in\mathbf{D}(T)$. Отсюда, как и выше, следует, что $e^{-tT_n}-e^{-tT}\xrightarrow[s]{}0$. Эта сходимость равномерна по $t$, ибо равномерна по $t$ сходимость в (2.31) — (2.33). В отношении (2.31) это уже отмечалось выше, для (2.32) это очевидно, а равномерность сходимости в (2.33) следует из непрерывности $e^{-tT}v$ по $t$, из которой вытекает, что множество векторов $e^{-tT}v$, где $t$ пробегает любой конечный интервал, компактно, так что применима лемма III.3.7.

Обратно, предположим, что (2.29) выполняется для $0\leqslant t\leqslant b$. Поскольку $e^{-mtT}=(e^{-tT})^m$ и т. д., то (2.29) справедливо при любом $t\geqslant 0$. Поэтому

$$\int\limits_0^\infty e^{-\zeta t}(e^{-tT_n}-e^{-tT})\,dt\xrightarrow[s]{}0, \quad \operatorname{Re}\zeta>0,$$

по теореме о мажорантной сходимости. Этим в виду формулы обращения (1.28) и доказано (2.28) для каждого $\zeta$ с $\operatorname{Re}\zeta>0$.

В теореме 2.16 предел $-T$ производящих операторов $-T_n$ *предполагался* производящим оператором. Естественно возникает вопрос, не является ли это следствием других предположений. Оказывается, что ответ положителен, если потребовать определенную равномерность поведения резольвент операторов $T_n$. Именно, справедлива

**Теорема 2.17** [1]. *Пусть* $T_n\in\mathscr{G}(M,\beta)$, $n=1,2,\ldots$ *и* $\operatorname{s-lim}\limits_{\alpha\searrow 0}(1+\alpha T_n)^{-1}=1$ *равномерно по* $n$. *Пусть* $\operatorname{s-lim}\limits_{n\to\infty}(T_n+\zeta)^{-1}$

---

[1] См. Троттер [[1]].

*существует для некоторого* $\zeta$ *с* $\operatorname{Re}\zeta > \beta$. *Тогда существует такой оператор* $T \in \mathscr{G}(M, \beta)$, *что справедливы утверждения теоремы* 2.16 1)).

Доказательство. Снова мы можем считать, что $\beta = 0$. Поскольку $T_n \in \mathscr{G}(M, 0)$, то операторы $(T_n + \zeta)^{-1}$ равномерно ограничены по $n$ при каждом фиксированном комплексном $\zeta$ с $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Другими словами, правая полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$ принадлежит области ограниченности $\Delta_{\mathrm{b}}$ последовательности резольвент $-T_n$ (см. п. VIII.1.1). По условию теоремы по крайней мере одно значение $\zeta$ с $\operatorname{Re}\zeta > 0$ принадлежит области сильной сходимости $\Delta_{\mathrm{s}}$. Так как по теореме VIII.1.2 множество $\Delta_{\mathrm{s}}$ относительно открыто и замкнуто в $\Delta_{\mathrm{b}}$, то $\Delta_{\mathrm{s}}$ должно содержать полуплоскость $\operatorname{Re}\zeta > 0$.

Таким образом, $\operatorname{s-lim}(T_n + \zeta)^{-1} = -R'(\zeta)$ существует для всех $\zeta$ из этой полуплоскости и $R'(\zeta)$ является псевдорезольвентой (см. п. 8.1). Покажем теперь, что $R'(\zeta)$ есть резольвента некоторого замкнутого определенного на плотном множестве оператора $-T$.

Для любого $u \in \mathrm{X}$ имеем $u = \lim\limits_{\alpha\searrow+0}(1 + \alpha T_n)^{-1} u = \lim\limits_{\xi\to+\infty} \xi (T_n + \xi)^{-1} u$. Поскольку эта сходимость по предположению равномерна по $n$, то

$$u = -\lim_{\xi\to+\infty} \xi R'(\xi) u, \quad u \in \mathrm{X}. \tag{2.35}$$

Далее, $R'(\zeta)$ имеют общее ядро $\mathrm{N}$ и общий образ $\mathrm{D}$ (см. там же). Если $u \in \mathrm{N}$, то $R'(\xi) u = 0$, так что $u = 0$ в силу (2.35). Итак, $\mathrm{N} = 0$. Далее, из (2.35) следует, что $\mathrm{D}$ плотно в $\mathrm{X}$, ибо любая точка $u \in \mathrm{X}$ является пределом точек $-\xi R'(\xi) u \in \mathrm{D}$. Отсюда вытекает (см. там же), что $R'(\zeta)$ есть резольвента определенного на плотном множестве $\mathrm{D}$ оператора $-T$: $R'(\zeta) = -(T + \zeta)^{-1}$.

Неравенства $\|(T_n + \xi)^{-k}\| \leqslant M/\xi^k$ при $n \to \infty$ приводят к таким же неравенствам для $\|(T + \xi)^{-k}\|$. Это показывает, что $T \in \mathscr{G}(M, 0)$, и доказательство теоремы закончено.

## 6. Асимптотическое возмущение полугрупп

Мы смогли построить удовлетворительную *аналитическую* теорию возмущений для квазиограниченных полугрупп только в случае ограниченных возмущений (см. п. 1). В более узком классе голоморфных полугрупп допустимы, как выяснилось,

---

1) Равенство $\operatorname{s-lim}(1 + \alpha T_n)^{-1} = 1$ следует из того, что $T_n \in \mathscr{G}(M, \beta)$, см. (1.12). Существенным является требование *равномерности* по $n$ этой сходимости.

и относительно ограниченные возмущения (см. п. 2). В приложениях, однако, часто встречаются неголоморфные полугруппы, причем наиболее важен случай унитарных групп в гильбертовом пространстве. Поэтому весьма желательно развить теорию возмущений для неголоморфных полугрупп, допуская неограниченные возмущения. Естественно, нам придется тогда довольствоваться более слабыми результатами, чем аналитическая зависимость полугруппы от параметра $\varkappa$. На этом пути мы приходим к рассмотрению *асимптотических рядов* по $\varkappa$, имеющих место при $\varkappa \to 0$. Простой пример асимптотического поведения полугрупп получается, если положить $A = \varkappa T^{(1)}$ и устремить $\varkappa$ к 0 в теореме 2.12 (предполагая, что $T + \varkappa T^{(1)} \in \mathcal{G}(M, \beta)$ для всех $\varkappa$). В последующих пунктах мы распространим этот результат на более высокие степени параметра $\varkappa$ [1]).

Для простоты рассмотрим семейство операторов

$$T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}, \tag{2.36}$$

хотя можно с тем же успехом рассматривать формальный бесконечный ряд по степеням $\varkappa$. Предположим, что $T \in \mathcal{G}(M, \beta)$ и что оператор $T^{(1)}$ ограничен относительно $T$:

$$\| T^{(1)}u \| \leqslant a \| u \| + b \| Tu \|, \quad u \in \mathrm{D}(T) \subset \mathrm{D}(T^{(1)}), \tag{2.37}$$

Как отмечалось выше, это не гарантирует того, что $-T(\varkappa)$ является производящим оператором какой-нибудь полугруппы, хотя в силу теоремы IV.1.1 $T(\varkappa)$ и является при $\| \varkappa \| < 1/b$ замкнутым оператором с областью определения $\mathrm{D} = \mathrm{D}(T)$. Поэтому мы добавим предположение, что $T(\varkappa) \in \mathcal{G}(M, \beta)$ при $\varkappa \in \mathrm{D}_0$, где $\mathrm{D}_0$ — некоторое подмножество круга $| \varkappa | < 1/b$; $\mathrm{D}_0$ может быть открытым множеством, подмножеством вещественной оси или подмножеством положительной вещественной полуоси. Всюду в дальнейшем мы считаем, что $\varkappa \in \mathrm{D}_0$. Также мы примем, что $\beta = 0$, ибо это не ограничивает общности (можно взять $T(\varkappa) + \beta$ вместо $T(\varkappa)$).

При этих предположениях оператор $-T(\varkappa)$ для каждого $\varkappa$ порождает полугруппу $U(t, \varkappa) = e^{-tT(\varkappa)}$. Будем писать $U(t, 0) = U(t)$. Функция $U(t, \varkappa)$ равномерно ограничена:

$$\| U(t, \varkappa) \| \leqslant M, \quad t \geqslant 0. \tag{2.38}$$

**Теорема 2.18.** $U(t, \varkappa) \xrightarrow[s]{} U(t)$, $\varkappa \to 0$, *равномерно по $t$ на любом конечном интервале.*

Доказательство. Это — прямое следствие теоремы 2.12.

---

[1]) Приводимые ниже теоремы получены Т. Като [3] для случая, когда $T(\varkappa)$ — самосопряженный оператор.

**Теорема 2.19.** *Пусть* $u \in \mathbf{D}$. *Тогда*

$$U(t,\ \varkappa)\,u = U(t)\,u + \varkappa u^{(1)}(t) + o(\varkappa), \quad \varkappa \to 0, \tag{2.39}$$

*где*

$$u^{(1)}(t) = -\int_0^t U(t-s)\,T^{(1)}U(s)\,u\,ds, \tag{2.40}$$

*а* $o(\varkappa)$ *обозначает вектор, норма которого есть* $o(\varkappa)$ *равномерно на каждом конечном интервале изменения* $t$. *Подинтегральная функция в правой части* (2.40) *непрерывна по* $s$, *так что интеграл имеет смысл.*

Доказательство. Второй член в правой части (2.39) совпадает с $v_1(t) = U_1(t)\,u$ из п. 1, если положить $A = \varkappa T^{(1)}$ и $u_0 = u$. Хотя оператор $T^{(1)}$ неограничен, подинтегральное выражение в (2.40) непрерывно по $s$, ибо

$$T^{(1)}U(s)\,u = B(\zeta)\,U(s)\,(T+\zeta)\,u, \tag{2.41}$$

где (см. (2.24))

$$B(\zeta) = T^{(1)}(T+\zeta)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{X}), \quad \operatorname{Re}\zeta > 0, \tag{2.42}$$

$$\|\,B(\zeta)\,\| \leqslant aM\xi^{-1} + b\,(1+M), \quad \xi = \operatorname{Re}\zeta. \tag{2.43}$$

Аналогично $T^{(1)}U(s,\ \varkappa)\,u$ непрерывно зависит от $s$. Чтобы доказать это, запишем

$$T^{(1)}U(s,\ \varkappa)\,u = B(\zeta,\ \varkappa)\,U(s,\ \varkappa)\,(T(\varkappa)+\zeta)\,u, \tag{2.44}$$

где

$$B(\zeta,\ \varkappa) = T^{(1)}(T(\varkappa)+\zeta)^{-1} \in \mathscr{B}(\mathbf{X}), \tag{2.45}$$

потому что оператор $T^{(1)}$ является $T(\varkappa)$-ограниченным (см. задачу IV.1.2). Функция $B(\zeta,\ \varkappa)$ даже голоморфна по $\zeta$ и $\varkappa$, ибо из второго ряда Неймана для $(T(\varkappa)+\zeta)^{-1} = (T+\zeta+\varkappa T^{(1)})^{-1}$ следует, что

$$B(\zeta,\ \varkappa) = \sum_{k=1}^{\infty} (-\varkappa)^{k-1}\,B(\zeta)^k. \tag{2.46}$$

Поскольку $u \in \mathbf{D}$, то $U(t,\ \varkappa)\,u \in \mathbf{D}$ и $\dfrac{dU(t,\ \varkappa)\,u}{dt} = -T(\varkappa)\,U(t,\varkappa)\,u = -TU(t,\ \varkappa)\,u - \varkappa T^{(1)}U(t,\ \varkappa)\,u$; поэтому в силу (1.43)

$$U(t,\ \varkappa)\,u = U(t)\,u - \varkappa\int_0^t U(t-s)\,T^{(1)}U(s,\ \varkappa)\,u\,ds. \tag{2.47}$$

Соотношение (2.39) вытекает из (2.47), если доказать, что интеграл в правой части стремится к $-u^{(1)}(t)$ при $\varkappa \to 0$ равномерно по $t$. Чтобы доказать это последнее, достаточно установить, что

$\| T^{(1)}U(t, \varkappa) u - T^{(1)}U(t) u \| \to 0$, причем норма в левой части ограничена по $t$ (теорема об ограниченной сходимости). Но это очевидно ввиду (2.44) и (2.41), ибо функции $B(\zeta, \varkappa)$, $U(t, \varkappa)$, $(T(\varkappa) + \zeta) u = (T + \zeta) u + \varkappa T^{(1)}u$ все равномерно ограничены, $B(\zeta, \varkappa) \xrightarrow[\mathrm{u}]{} B(\zeta)$ и $U(t, \varkappa) \xrightarrow[\mathrm{s}]{} U(t)$ по теореме (2.18) ($\zeta$ фиксировано).

**Теорема 2.20.** *Пусть* $u \in \mathrm{D}(T^2)$. *Тогда*

$$U(t, \varkappa) u = U(t) u + \varkappa u^{(1)}(t) + \varkappa^2 u^{(2)}(t) + o(\varkappa^2) \tag{2.48}$$

*равномерно на каждом конечном интервале изменения* $t$, *где* $u^{(1)}(t)$ *дается формулой* (2.40), *а*

$$u^{(2)}(t) = -\int_0^t U(t-s) T^{(1)}u^{(1)}(s)\, ds; \tag{2.49}$$

*значение* $T^{(1)}u^{(1)}(t)$ *определено и непрерывно зависит от* $t$, *так что подинтегральное выражение в* (2.49) *непрерывно по* $s$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что функция $T^{(1)}U(t) u$, которая определена, ибо $U(t) u \in \mathrm{D}$, непрерывно дифференцируема по $t$, причем

$$\frac{d}{dt} T^{(1)} U(t) u = -T^{(1)}U(t)\, Tu. \tag{2.50}$$

В самом деле, имеем $T^{(1)}U(t) u = B(\zeta) U(t) (T + \zeta) u$ в силу (2.41), и, значит, $(d/dt) T^{(1)}U(t) u = -B(\zeta) U(t) T (T + \zeta) u = -B(\zeta) U(t) (T + \zeta) Tu = -T^{(1)}U(t) Tu$, поскольку $T(T+\zeta) u$ существует по предположению.

В силу теоремы 1.19 функция $u^{(1)}(t)$, определенная формулой (2.40), непрерывно дифференцируема и функция $Tu^{(1)}(t)$ непрерывна. Поэтому функция $T^{(1)}u^{(1)}(t) = B(\zeta) (T + \zeta) u^{(1)}(t)$ также непрерывна. Этим доказано последнее утверждение теоремы.

Ввиду (2.47), (2.41) и (2.49) формула (2.48) будет доказана, если мы покажем, что

$$\int_0^t U(t-s) T^{(1)} \left\{ \frac{1}{\varkappa} [U(s, \varkappa) u - U(s) u] - u^{(1)}(s) \right\} ds \to 0 \tag{2.51}$$

равномерно на каждом конечном интервале изменения $t$. Так как $\|U(t-s)\| \leqslant M$ и оператор $T^{(1)}$ является $T$-ограниченным, то (2.51) выполняется, если

$$(T+\zeta) \left\{ \frac{1}{\varkappa} [U(t, \varkappa) u - U(t) u] - u^{(1)}(t) \right\} \to 0, \tag{2.52}$$

причем левая часть ограничена для каждого фиксированного $\zeta$.

Но

$$\begin{aligned}(T+\zeta)\,[U(t,\varkappa)\,u-U(t)\,u] &=\\ &=(T+\zeta)\,(T(\varkappa)+\zeta)^{-1}\,U(t,\varkappa)\,(T(\varkappa)+\zeta)\,u-\\ &\quad -U(t)\,(T+\zeta)\,u=\\ &=(1+\varkappa B(\zeta))^{-1}\,U(t,\varkappa)\,(T+\zeta+\varkappa T^{(1)})\,u-\\ &\quad -U(t)\,(T+\zeta)\,u=\\ &=-\varkappa B(\zeta)\,(1+\varkappa B(\zeta))^{-1}\,U(t,\varkappa)\,(T+\zeta+\varkappa T^{(1)})\,u+\\ &\quad +[U(t,\varkappa)-U(t)]\,(T+\zeta)\,u+\varkappa U(t,\varkappa)\,T^{(1)}u. \qquad (2.53)\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\varkappa}(T+\zeta)\,[U(t,\varkappa)\,u-U(t)\,u]\to$$
$$\to -B(\zeta)\,U(t)\,(T+\zeta)\,u+v^{(1)}(t)+U(t)\,T^{(1)}u, \qquad (2.54)$$

где $v^{(1)}(t)$ — коэффициент при $\varkappa$ в асимптотическом разложении $U(t,\varkappa)\,(T+\zeta)\,u$, которое имеет место в силу теоремы 2.19, поскольку $(T+\zeta)\,u\in \mathrm{D}(T)$. Другими словами,

$$v^{(1)}(t)=-\int\limits_0^t U(t-s)\,T^{(1)}U(s)\,(T+\zeta)\,u\,ds. \qquad (2.55)$$

Поскольку $B(\zeta)\,U(t)\,(T+\zeta)\,u=T^{(1)}U(t)\,u$, то правая часть в (2.54) равна

$$-T^{(1)}U(t)\,u+U(t)\,T^{(1)}u-\int\limits_0^t U(t-s)\,T^{(1)}U(s)\,(T+\zeta)\,u\,ds=$$
$$=-(T+\zeta)\int\limits_0^t U(t-s)\,T^{(1)}U(s)\,u\,ds; \qquad (2.56)$$

здесь мы воспользовались (1.47) с $f(t)=T^{(1)}U(t)\,u$ и учли (2.50). Этим доказано (2.52) и закончено доказательство теоремы.

**Замечание 2.21.** Доказательство теоремы 2.20 довольно сложно по той причине, что из предположения $u\in\mathrm{D}(T^2)$ не следует, что $u\in\mathrm{D}(T^2(\varkappa))$. Получить на том же пути дальнейшие приближения для $U(t,\varkappa)\,u$ без введения жестких дополнительных ограничений на $u$ не удается. Например, невозможно получить третий член разложения $U(t,\varkappa)\,u$ по степеням $\varkappa$ при одном предположении, что $u\in\mathrm{D}(T^3)$; надо дополнительно потребовать, чтобы $T^{(1)}u\in\mathrm{D}(T)$. Мы не останавливаемся дольше на этой проблеме.

**Пример 2.22.** Пусть $T = iH$, где $H$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathrm{H}$, и $T^{(1)} = iK$, где $K$ — симметричный $H$-ограниченный оператор. Тогда оператор $H + \varkappa K$ самосопряжен для достаточно малых вещественных $\varkappa$ и $T(\varkappa) = T + \varkappa T^{(1)}$ порождает некоторую унитарную группу, как и $T$. Таким образом, основное наше условие будет выполнено, если мы возьмем в качестве $\mathrm{D}_0$ некоторую окрестность точки $\varkappa = 0$ на вещественной оси, и в этом случае к $U(t, \varkappa) = e^{-it(H+\varkappa K)}$ применимы теоремы 2.18 и 2.20.

# § 3 Аппроксимация дискретными полугруппами

## 1. Дискретные полугруппы

Изложенную в предыдущем параграфе теорию возмущений полугрупп можно рассматривать как теорию аппроксимаций полугруппы $U(t)$ семейством полугрупп, зависящих или от дискретного параметра $n$ (теоремы 2.16 и 2.17) или от непрерывного параметра $\varkappa$ (теоремы 2.18—2.20). В этом параграфе мы рассмотрим аппроксимации полугруппы $U(t)$ с помощью последовательности дискретных полугрупп; полученные результаты будут применены к теории аппроксимации дифференциальных уравнений конечно-разностными уравнениями[1].

Дискретная полугруппа—это просто семейство $\{U^k\}_{k=0,1,2,\ldots}$; состоящее из степеней некоторого оператора $U \in \mathscr{B}(\mathrm{X})$; она обладает полугрупповым свойством $U^jU^k = U^{j+k}$. В теории аппроксимаций необходимо связать показатель $k$ с «временем» $t$. Для этого мы каждой дискретной полугруппе $\{U^k\}$ поставим в соответствие некоторую «единицу времени» $\tau > 0$ и напишем $U^k = U(k\tau)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; функция $U(t)$ будет, таким образом, определена только для дискретного множества значений $t = k\tau$. Будем называть $\{U(k\tau)\}$ *дискретной полугруппой с единицей времени* $\tau$. Соответственно полугруппы $\{U(t)\}$, рассматривавшиеся в предыдущих параграфах, будем называть *непрерывными полугруппами.*

Говорят, что дискретная полугруппа $\{U(k\tau)\}$ ограничена, если $\| U(k\tau) \| \leqslant M$, $k = 0, 1, 2, \ldots$; при этом $M \geqslant 1$, ибо $U(0) = 1$.

Для дискретной полугруппы $\{U(k\tau)\}$ с единицей времени $\tau$ положим

$$T = \tau^{-1}(1 - U(\tau)). \tag{3.1}$$

Оператор $-T$ называется *производящим оператором* (*генератором*) полугруппы $\{U(k\tau)\}$. Таким образом,

$$U(k\tau) = (1 - \tau T)^k. \tag{3.2}$$

---

[1] Последующее изложение существенно опирается на результаты Троттера [[1]].

Поскольку $T \in \mathscr{B}(X)$, то оператор $-T$ порождает также непрерывную полугруппу $\{e^{-tT}\}$, которая называется непрерывной полугруппой, соответствующей дискретной полугруппе $\{U(k\tau)\}$. Полугруппа $\{e^{-tT}\}$ является в определенном смысле аппроксимацией для $\{U(k\tau)\}$, как показывает следующая

**Лемма 3.1.** *Если полугруппа $\{U(k\tau)\}$ ограничена, $\|U(k\tau)\| \leqslant M$, то полугруппа $\{e^{-tT}\}$ также ограничена, причем $\|e^{-tT}\| \leqslant M$, и*

$$\|U(k\tau)u - e^{-k\tau T}u\| \leqslant \frac{1}{2} Mk\tau^2 \|T^2 u\|. \tag{3.3}$$

Доказательство. Функцию $e^{-tT}$ можно представить рядом Тейлора. Так как $-tT = -(t/\tau) + (t/\tau)U(\tau)$, то

$$U(k\tau)e^{-tT} = e^{-t/\tau}U(k\tau)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t/\tau)^n}{n!}U(n\tau) =$$

$$= e^{-t/\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t/\tau)^n}{n!}U((n+k)\tau), \tag{3.4}$$

следовательно,

$$\|U(k\tau)e^{-tT}\| \leqslant Me^{-t/\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t/\tau)^n}{n!} = M. \tag{3.5}$$

В частности, $\|e^{-tT}\| \leqslant M$.

Поскольку $U(k\tau)$ и $T$ коммутируют, то

$$U(k\tau) - e^{-k\tau T} = \Big[\sum_{j=0}^{k-1} U((k-j-1)\tau)e^{-j\tau T}\Big](U(\tau) - e^{-\tau T}). \tag{3.6}$$

Но

$$U(\tau) - e^{-\tau T} = 1 - \tau T - e^{-\tau T} = -\int_0^\tau (\tau - s)e^{-sT}T^2\,ds,$$

так что в силу (3.5)

$$\|U((k-j-1)\tau)e^{-j\tau T}(U(\tau) - e^{-\tau T})u\| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\tau (\tau - s)M\|T^2 u\|\,ds = \frac{\tau^2}{2}M\|T^2 u\|.$$

Поэтому (3.3) следует из (3.6).

**Замечание 3.2.** Во избежание неудобств, связанных с тем, что дискретная полугруппа $U(t)$ определена только для $t = k\tau$, положим

$$U(t) = U\left(\left[\frac{t}{\tau}\right]\tau\right) \tag{3.7}$$

для любого $t \geqslant 0$, где $[t/\tau]$ обозначает целую часть числа $t/\tau$. Конечно, $\{U(t)\}$ не становится при этом непрерывной полугруппой, но мы имеем

$$\|U(t)u - e^{-tT}u\| \leqslant \frac{1}{2}M\tau t\|T^2u\| + M\tau\|Tu\|. \tag{3.8}$$

Действительно, пусть $k\tau \leqslant t < (k+1)\tau$; тогда $U(t) = U(k\tau)$ и $\|e^{-tT}u - e^{-k\tau T}u\| \leqslant \left\|\int\limits_{k\tau}^{t} e^{-sT}Tu\,ds\right\| \leqslant M\tau\|Tu\|$, так что (3.8) следует из (3.3).

## 2. Аппроксимация непрерывных полугрупп дискретными полугруппами

Рассмотрим последовательность $\{U_n\}$ дискретных полугрупп с единицами времени $\tau_n$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\tau_n \to 0$, $n \to \infty$. Говорят, что последовательность $\{U_n\}$ *аппроксимирует* непрерывную полугруппу $U = \{U(t)\}$ в точке $t = t_0$, если

$$U_n(k_n\tau_n) \xrightarrow[s]{} U(t_0), \quad n \to \infty, \tag{3.9}$$

для любой последовательности $\{k_n\}$ неотрицательных целых чисел, такой, что $k_n\tau_n \to t_0$. Говорят, что $\{U_n\}$ аппроксимирует $U$ на интервале I, если (3.9) имеет место для каждого $t_0 \in \mathrm{I}$.

**Лемма 3.3.** *Если $\{U_n\}$ аппроксимирует $U$ на каком-нибудь интервале $0 \leqslant t < b$, то $\{U_n\}$ аппроксимирует $U$ на всем интервале $0 \leqslant t < \infty$. (В этом случае говорят просто, что $\{U_n\}$ аппроксимирует $U$ и пишут $U_n \to U$.)*

Доказательство. Пусть $t_0 \geqslant 0$ и $k_n\tau_n \to t_0$. Пусть $m$ — целое число, такое, что $t_0 < mb$, и пусть $k_n = mq_n + r_n$, $0 \leqslant r_n < m$ ($q_n$, $r_n$ — целые числа). Тогда $r_n\tau_n \to 0$ и $q_n\tau_n \to t_0/m < b$. Следовательно, $U_n(r_n\tau_n) \xrightarrow[s]{} U(0) = 1$ и $U_n(q_n\tau_n) \xrightarrow[s]{} U(t_0/m)$, так что $U_n(k_n\tau_n) = U_n(q_n\tau_n)^m U_n(r_n\tau_n) \xrightarrow[s]{} U(t_0/m)^m = U(t_0)$.

**Лемма 3.4.** *Если $U_n \to U$, то $U_n$ равномерно квазиограничены в том смысле, что*

$$\|U_n(t)\| \leqslant Me^{\beta t}, \quad t \geqslant 0, \tag{3.10}$$

*где $M$ и $\beta$ не зависят от $n$ и $t$, а $U_n(t)$ определено для всех $t \geqslant 0$ по формуле (3.7).*

Доказательство. При каждом фиксированном $u \in \mathbf{X}$ значения $\| U_n (k\tau_n) u \|$ ограничены для всех целых $n$ и $k$, таких, что $k\tau_n \leqslant 1$, ибо в противном случае существовала бы последовательность $\{k_n\}$, такая, что $\| U_n (k_n\tau_n) u \| \to \infty$, $k_n\tau_n \to t_0 \leqslant 1$, когда $n \to \infty$ по некоторой подпоследовательности, что противоречит условию леммы. Отсюда в силу принципа равномерной ограниченности следует, что $\| U_k (k\tau_n) \| \leqslant M$ для $k\tau_n \leqslant 1$ (отметим, что $M \geqslant 1$).

Если $k > 1/\tau_n$ и $\tau_n < 1$, то $k = qm_n + r$, где $0 \leqslant r < m_n = [1/\tau_n]$ ($q$, $r$ — целые числа). Имеем

$$\| U_n (k\tau_n) \| = \| U_n (m_n\tau_n)^q \, U_n (r\tau_n) \| \leqslant$$
$$\leqslant \| U_n (m_n\tau_n) \|^q \, \| U_n (r\tau_n) \| \leqslant M^{q+1}.$$

Но так как $m_n + 1 > 1/\tau_n$, то $q \leqslant k/m_n \leqslant k\tau_n/(1 - \tau_n) \leqslant k\tau_n$, если $\tau_n \leqslant 1/2$. Поэтому $\| U_n (k\tau_n) \| \leqslant M \exp (k\tau_n \log M)$, что также имеет место при $k\tau_n \leqslant 1$. Поскольку $U_n (t) = U_n (k\tau_n)$, где $k = [t/\tau_n] \leqslant t/\tau_n$, получаем $\| U_n (t) \| \leqslant M \exp (t \log M)$. Так как имеется лишь конечное число номеров $n$, для которых $\tau_n > 1/2$, то этим и доказана лемма, с $\beta = \log M$ (быть может, значения $M$ и $\beta$ нужно еще очевидным образом подправить, учтя конечное число отброшенных номеров).

**Лемма 3.5.** *Для того чтобы* $U_n \to U$, *необходимо, чтобы* $U_n (t) \xrightarrow[s]{} U (t)$ *равномерно на каждом конечном интервале изменения* $t$, *и достаточно, чтобы это имело место хотя бы для одного интервала* $[0, b]$.

Доказательство. Пусть $U_n \to U$. Предположим, что для некоторого $u \in \mathbf{X}$ и некоторого конечного замкнутого интервала I неверно, что $U_n (t) u \to U (t) u$ равномерно по $t \in$ I. Тогда существует последовательность $t_n \in$ I, такая, что

$$\| U_n (t_n) u - U (t_n) u \| \geqslant \varepsilon > 0 \tag{3.11}$$

(в случае надобности заменяем $\{U_n\}$ на подпоследовательность). Выбирая еще раз подпоследовательность, можно считать, что $t_n \to t_0 \in$ I, $n \to \infty$. Положим $k_n = [t_n/\tau_n]$. Тогда $k_n\tau_n \to t_0$, ибо $\tau_n \to 0$. Поскольку $U_n (t_n) = U_n (k_n\tau_n)$ в силу (3.7) и поскольку $U_n (t_n) u \to U (t_0) u$ в силу сильной непрерывности $U (t)$, то (3.11) дает $\limsup \| U_n (k_n\tau_n) u - U (t_0) u \| \geqslant \varepsilon$ в противоречии с (3.9).

Обратно, предположим, что $U_n (t) u \to U (t) u$ равномерно по $t \in [0, b]$ для каждого $u \in \mathbf{X}$. Тогда $U_n (k_n\tau_n) u - U (k_n\tau_n) u \to 0$ для $k_n\tau_n \in [0, b]$. В частности, это имеет место, если $k_n\tau_n \to t_0 < b$. Так как $U (k_n\tau_n) u \to U (t_0) u$ в силу сильной непрерывности $U (t)$, то (3.9) выполнено при $t_0 < b$. Следовательно, $U_n \to U$ по лемме 3.3.

### 3. Аппроксимационные теоремы

В этом пункте мы рассмотрим последовательность $\{U_n\}$ дискретных полугрупп с единицами времени $\tau_n$ и производящими операторами $-T_n$, причем $\tau_n \to 0$. Для того чтобы последовательность $\{U_n\}$ аппроксимировала некоторую непрерывную полугруппу, необходимо, чтобы $\{U_n\}$ была равномерно квазиограниченной (см. лемму 3.4). Поэтому будем рассматривать только такие последовательности $\{U_n\}$.

**Теорема 3.6.** *Пусть последовательность* $\{U_n\}$ *равномерно квазиограничена в смысле* (3.10) *и* $U$ — *непрерывная полугруппа с производящим оператором* $-T$. *Для того чтобы* $U_n \to U$, *необходимо и достаточно, чтобы* $T_n \xrightarrow[s]{} T$ *в обобщенном смысле*; *другими словами, необходимо, чтобы*

$$(T_n + \zeta)^{-1} \xrightarrow[s]{} (T + \zeta)^{-1} \tag{3.12}$$

*для каждого* $\zeta$ *с* $\operatorname{Re}\zeta > \beta$, *и достаточно, чтобы* (3.12) *выполнялось хотя бы для одного* $\zeta$ *с* $\operatorname{Re}\zeta > \beta$.

Доказательство. Нетрудно видеть, что общий случай можно свести к случаю $\beta = 0$ с помощью преобразования $U_n(t) \to e^{-\beta t} U_n(t)$, $U(t) \to e^{-\beta t} U(t)$. Поэтому мы будем считать, что последовательность $\{U_n\}$ равномерно ограничена: $\| U_n(t) \| \leqslant M$, $t \geqslant 0$, где функция $U_n(t)$ определена при всех $t \geqslant 0$ по формуле (3.7).

Пусть $U_n \to U$. Тогда по лемме 3.5 $U_n(t) \xrightarrow[s]{} U(t)$ равномерно на каждом конечном интервале изменения $t$. Поэтому при $\operatorname{Re}\zeta > 0$

$$(T_n + \zeta)^{-1} = [\zeta + \tau_n^{-1}(1 - U_n(\tau_n))]^{-1} =$$

$$= \tau_n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{U_n(k\tau_n)}{(1+\tau_n\zeta)^{k+1}} = \int_0^\infty \frac{U_n(t)\,dt}{(1+\tau_n\zeta)^{\left[\frac{t}{\tau_n}\right]+1}}.$$

По теореме о мажорантной сходимости

$$(T_n + \zeta)^{-1} \xrightarrow[s]{} \int_0^\infty e^{-\zeta t} U(t)\,dt = (T + \zeta)^{-1},$$

ибо

$$(1 + \tau_n\zeta)^{-[t/\tau_n]-1} \to e^{-\zeta t}$$

и

$$|(1 + \tau_n\zeta)^{-[t/\tau_n]-1}| \leqslant (1 + \tau_n \operatorname{Re}\zeta)^{-[t/\tau_n]-1} \leqslant$$

$$\leqslant (1 + \tau_n \operatorname{Re}\zeta)(1 + t\operatorname{Re}\zeta + \frac{1}{2} t^2 (\operatorname{Re}\zeta)^2)^{-1};$$

последний же член интегрируем на интервале $0 \leqslant t < \infty$.

Обратно, предположим, что (3.12) выполнено для некоторого $\zeta$ с $\operatorname{Re}\zeta > 0$. Поскольку $T_n \in \mathcal{G}(M, 0)$ по лемме 3.1, то из теоремы 2.16 вытекает, что (3.12) имеет место при любом $\zeta$ с $\operatorname{Re}\zeta > 0$ и что $e^{-tT_n} \xrightarrow[s]{} e^{-tT}$ равномерно на каждом конечном интервале изменения $t$. Таким образом, остается показать, что

$$U_n(t) - e^{-tT_n} \xrightarrow[s]{} 0 \tag{3.13}$$

равномерно на каждом конечном интервале.

Для этого мы воспользуемся оценкой (3.8) с $U$, замененным на $U_n$. Беря $(T_n+1)^{-2}u$ вместо $u$, видим, что

$$\|(U_n(t) - e^{-tT_n})(T_n+1)^{-2}\| \leqslant M\tau_n\left(\frac{1}{2}t\,\|T_n^2(T_n+1)^{-2}\| + \right.$$
$$\left. + \|T_n(T_n+1)^{-2}\|\right) \to 0,$$

поскольку $\|T_n^2(T_n+1)^{-2}\| \leqslant (1+M)^2$, $\|T_n(T_n+1)^{-2}\| \leqslant \leqslant M(1+M)$. Так как $(T_n+1)^{-2} \xrightarrow[s]{} (T+1)^{-2}$ и функции $U_n(t)$, $e^{-tT_n}$ равномерно ограничены, то

$$(U_n(t) - e^{-tT_n})(T+1)^{-2} \xrightarrow[s]{} 0.$$

Поскольку множество $\mathbf{R}((T+1)^{-2})$ плотно в $\mathbf{X}$, то (3.13) следует снова из равномерной ограниченности $U_n(t)$ и $e^{-tT_n}$.

**Замечание 3.7.** Соотношение (3.12) выполняется, если существует ядро $\mathbf{D}$ оператора $T$ такое, что $T_n u \to Tu$ для $u \in \mathbf{D}$ (см. теорему VIII.1.5).

**Пример 3.8.** Пусть $T \in \mathcal{G}(M, \beta)$ и $U(t) = e^{-tT}$. Пусть, далее, $U_n(k/n) = (1+n^{-1}T)^{-k}$. Очевидно, $U_n$ — дискретная полугруппа с единицей времени $\tau_n = 1/n$. Производящим оператором полугруппы $U_n$ будет $-T_n$, где $T_n = n[1-(1+n^{-1}T)^{-1}] = T(1+n^{-1}T)^{-1}$. Следовательно, $T_n u = (1+n^{-1}T)^{-1}\,Tu \to Tu$ для $u \in \mathbf{D}(T)$ (см. (1.12)). Таким образом, $U_n \to U$ в силу замечания 3.7; это просто другая формулировка результата п. 1.4, где $U(t)$ было определено в точности тем же образом.

Следующую теорему, в которой явно не предполагается, что предел в (3.12) является резольвентой производящего оператора, можно доказать точно так же, как теорему 2.17.

**Теорема 3.9.** *Пусть последовательность* $\{U_n\}$ *равномерно квазиограничена,* $(1+\alpha T_n)^{-1} \xrightarrow[s]{} 1$, $\alpha \searrow 0$, *равномерно по* $n$ *и* $\operatorname{s-}\lim\limits_{n\to\infty}(T_n+\zeta)^{-1}$ *существует при некотором* $\zeta$ *с* $\operatorname{Re}\zeta > 0$. *Тогда существует непрерывная полугруппа* $U(t) = e^{-tT}$, *такая, что* $U_n \to U$ *и* $T_n \xrightarrow[s]{} T$ *в обобщенном смысле.*

## 4. Вариация пространства

Аппроксимационные теоремы, доказанные в предыдущем пункте, неприменимы непосредственно для аппроксимации дифференциальных уравнений конечноразностными[1]), поскольку конечноразностные операторы действуют в пространствах, отличных от тех, в которых действуют дифференциальные операторы. При изучении таких задач встает, следовательно, проблема аппроксимации непрерывной полугруппы $U$ операторов в банаховом пространстве $\mathbf{X}$ с помощью последовательности $\{U_n\}$ дискретных полугрупп операторов, действующих в банаховых пространствах $\mathbf{X}_n$.

Пусть $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}_n$ — банаховы пространства. Предположим, что при каждом $n$ существуют оператор $P_n \in \mathscr{B}(\mathbf{X}, \mathbf{X}_n)$ такой, что

i) $\| P_n \| \leqslant N$ ($N$ не зависит от $n$);

ii) $\| P_n u \| \to \| u \|$, $n \to \infty$, для каждого $u \in \mathbf{X}$;

iii) существует постоянная $N'$ (не зависящая от $n$), такая, что каждый вектор $v \in \mathbf{X}_n$ можно представить в виде $v = P_n u$, где $\| u \| \leqslant N' \| v \|$.

Говорят, что последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \mathbf{X}_n$, *сходится* к $u \in \mathbf{X}$, и пишут $u_n \to u$, если [2])

$$\| u_n - P_n u \| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{3.14}$$

Говорят, что последовательность $A_n \in \mathscr{B}(\mathbf{X}_n)$ *сильно сходится* к $A \in \mathscr{B}(\mathbf{X})$ и пишут $A_n \underset{s}{\to} A$, если

$$A_n P_n u \to Au, \quad \text{т. е.} \quad \| A_n P_n u - P_n A u \| \to 0. \tag{3.15}$$

Легко показать, что из $A_n \to A$ следует, что $A_n$ равномерно ограничены, а из $A_n \underset{s}{\to} A$ и $B_n{}^s\underset{s}{\to} B$ следует, что $A_n B_n \underset{s}{\to} AB$.

Коль скоро введено понятие сильной сходимости, обладающее указанными свойствами, можно в точности так же, как раньше, определить аппроксимацию $U_n \to U$ непрерывной полугруппы в $\mathbf{X}$ последовательностью $\{U_n\}$ дискретных полугрупп $U_n$, действующих в пространствах $\mathbf{X}_n$. Легко проверить, что леммы и теоремы 3.3—3.9 справедливы по-прежнему. Подробности предоставляем читателю [3]).

**Пример 3.10.** Пусть $\mathbf{X} = \mathbf{C}[0, 1]$, $\mathbf{X}_n = \mathbf{C}^{m_n}$ (множество $m_n$-мерных числовых векторов $v = (\xi_1, \ldots, \xi_{m_n})$ с нормой $\| v \| = \max | \xi_j |$). Для каждого $u \in \mathbf{X}$ положим $P_n u = v = (\zeta_j) \in \mathbf{X}_n$ с $\xi_j = u(jh_n)$, $h_n = 1/(m_n + 1)$; $P_n u$ аппроксимирует непрерывную функцию $u(x)$ множеством ее значений в $m_n$ точках сетки с шагом $h_n$. Если $m_n \to \infty$, то условия i) — iii) выполняются

---

[1]) Исключая тот случай, когда время $t$ дискретно.

[2]) В дальнейшем мы обозначаем одним и тем же символом $\| \; \|$ нормы в различных пространствах $\mathbf{X}$ и $\mathbf{X}_n$; это не должно привести к недоразумениям.

[3]) См. Троттер [[1]].

с $N = N' = 1$. Введенное выше понятие сходимости $u_n \to u$ хорошо приспособлено именно к такой аппроксимации.

Рассмотрим теперь операторы $T$ и $T_n$, определенные следующим образом: $T$ — оператор в X, задаваемый равенством $Tu = -d^2u/dx^2$ с граничным условием $u(0) = u(1) = 0$; $T_n$ — оператор в $X_n$, такой, что для $v = (\xi_j)$ имеем $T_n v = w = (\eta_j)$, где

$$\eta_j = -(\xi_{j+1} - 2\xi_j + \xi_{j-1})/h_n^2$$

(полагаем $\xi_0 = \xi_{m_n+1} = 0$). Легко видеть, что $T_n P_n u \to Tu$ для $u \in \mathrm{D}(T)$ в смысле (3.15). Тем самым выполнено условие замечания 3.7, поэтому дискретные полугруппы $U_n$, порожденные операторами $-T_n$, аппроксимируют $U(t) = e^{-tT}$ *при условии, что* $U_n$ *равномерно квазиограничены* [1]. Будет ли выполнено это условие или нет, зависит от скорости сходимости $\tau_n \to 0$. Известно [2], что это условие выполнено, если $\tau_n/h^2 \leqslant c < 1/2$.

Далее, если мы положим $T'_n = T_n(1+\tau_n T_n)^{-1}$ и рассмотрим дискретные полугруппы $U'_n$, порожденные операторами $-T'_n$ с единицами времени $\tau_n$, то условия теоремы 3.6 будут выполнены и $U'_n \to U_n$ при одном только условии $\tau_n \to 0$ (без всяких ограничений на отношение $\tau_n/h_n^2$). Последовательности $\{U_n\}$ и $\{U'_n\}$ отвечают соответственно выбору конечных разностей по времени вперед или назад при аппроксимации уравнения теплопроводности $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2$ конечноразностными уравнениями.

---

[1] Это условие называется *условием устойчивости*.

[2] См., например, Рихтмайер и Мортон [1].

## ГЛАВА X

# ВОЗМУЩЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ СПЕКТРОВ И УНИТАРНАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Эта глава посвящена теории возмущений непрерывных спектров. Рассматриваемые операторы, как правило, являются самосопряженными. Устойчивость непрерывного спектра относительно малых возмущений изучена довольно широко, хотя результаты никоим образом не являются исчерпывающими. Известно, что непрерывный спектр весьма неустойчив, даже относительно вырожденных возмущений. В этом отношении он ведет себя гораздо хуже, чем существенный спектр (который, вообще говоря, шире, чем непрерывный). С другой стороны, абсолютно непрерывный спектр (который, вообще говоря, уже, чем непрерывный) устойчив относительно некоторых ограниченных возмущений; кроме того, абсолютно непрерывные части возмущенного и невозмущенного операторов унитарно эквивалентны.

Эти результаты тесно связаны с теорией рассеяния в квантовой механике. Они даже доказываются здесь с помощью так называемого нестационарного метода теории рассеяния, поскольку это, по-видимому, самый простой путь для получения общих результатов. В теории рассеяния есть и другие полезные методы (стационарные методы). Невозможно изложить здесь эти методы полностью, отчасти из-за того, что они непрерывно и быстро развиваются. Все-таки в последнем параграфе мы даем краткое изложение одного из таких методов, позволяющего получить результаты, которые нельзя получить с помощью нестационарного метода.

## § 1. Непрерывный спектр самосопряженного оператора

### 1. Точечный и непрерывный спектры

Пусть $H$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. Имеем спектральное представление (см. § VI.5)

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda), \tag{1.1}$$

где $\{E(\lambda)\}$ — непрерывное справа спектральное семейство оператора $H$. Положим

$$P(\lambda) = E(\lambda) - E(\lambda - 0). \tag{1.2}$$

$P(\lambda) \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda$ есть собственное значение оператора $H$; в этом случае $P(\lambda)$ является ортогональным проектором на соответствующее собственное пространство. Операторы

$P(\lambda)$ при различных $\lambda$ взаимно ортогональны: $P(\lambda)P(\mu) = 0$ при $\lambda \neq \mu$.

Множество всех собственных значений оператора $H$ называется его *точечным спектром* и обозначается через $\Sigma_p(H)$. Оно не более чем счетно, если пространство $\mathbf{H}$ сепарабельно.

Пусть $\mathbf{H}_p$ — замкнутое линейное подпространство, порожденное всеми $P(\lambda)\mathbf{H}$. Если $\mathbf{H}_p = \mathbf{H}$ [1]), то говорят, что оператор $H$ имеет *чисто точечный спектр*, или что он является *спектрально разрывным*. Подпространство $\mathbf{H}_p$ приводит $H$, поскольку этим свойством обладает $P(\lambda)$ при любом $\lambda$. Пусть $H_p$ — часть оператора $H$ в $\mathbf{H}_p$. Оператор $H_p$ спектрально разрывен; в самом деле, если пространство $P(\lambda)\mathbf{H}$ содержит не только нулевой вектор, то оно совпадает с собственным подпространством оператора $H_p$ для $\lambda$.

Если $\mathbf{H}_p = 0$, то говорят, что оператор $H$ имеет *чисто непрерывный спектр*, или что он *спектрально непрерывен*; в этом случае спектральное семейство $E(\lambda)$ сильно непрерывно по $\lambda$. Вообще говоря, часть $H_c$ оператора $H$ в $\mathbf{H}_c = \mathbf{H}_p^{\perp}$ спектрально непрерывна. Множество $\Sigma(H_c)$ называется *непрерывным спектром* [2]) оператора $H$ и обозначается через $\Sigma_c(H)$. Будем называть $H_p$ и $H_c$ соответственно *разрывной* и *непрерывной частями* оператора $H$. Подпространства $\mathbf{H}_p$ и $\mathbf{H}_c$ называются соответственно *подпространством разрывности* и *подпространством непрерывности* для $H$.

**Замечание 1.1.** Собственное значение оператора $H$ не обязано быть изолированной точкой множества $\Sigma(H)$, даже если $H$ имеет чисто точечный спектр. Точечный спектр может быть счетным множеством, всюду плотным на вещественной оси.

Задача 1.2. Для того чтобы вектор $u$ принадлежал $\mathbf{H}_c$, необходимо и достаточно, чтобы функция $(E(\lambda)u, u)$ была непрерывна по $\lambda$.

Для отделения точечного спектра от непрерывного удобно пользоваться *эргодической теоремой о среднем*. Эта теорема позволяет выразить $P(\lambda)$ с помощью группы $\{e^{itH}\}$, порождаемой оператором $iH$. (Об операторе $e^{itH}$ см. пример IX.1.6.)

---

[1]) Отсюда не следует, что $\Sigma(H) = \Sigma_p(H)$; в самом деле, множество $\Sigma(H)$ замкнуто, тогда как $\Sigma_p(H)$ замкнутым быть не обязано. Но отсюда следует, что $\Sigma(H)$ является замыканием $\Sigma_p(H)$.

[2]) Здесь мы следуем книге Рисса и Секефальви-Надя [[1]]. Существует другое определение непрерывного спектра, применимое к любому оператору $T \in \mathscr{C}(\mathbf{X})$ в банаховом пространстве $\mathbf{X}$. Согласно этому определению, комплексное число $\lambda$ принадлежит непрерывному спектру оператора $T$ тогда и только тогда, когда оператор $T - \lambda$ обратим и имеет плотную область значений, но оператор $(T - \lambda)^{-1}$ неограничен. Следует признать, что имеется некоторое несоответствие между определениями точечного и непрерывного спектров.

**Теорема 1.3.** *Для любого вещественного $\lambda$ справедлива формула*

$$P(\lambda)=\underset{t_2-t_1\to\infty}{\text{s-lim}}\ (t_2-t_1)^{-1}\int_{t_1}^{t_2} e^{itH}e^{-i\lambda t}\,dt. \tag{1.3}$$

Доказательство. Мы можем предположить, что $\lambda = 0$. Это сводится к рассмотрению $H-\lambda$ вместо $H$. Если $u \in P(0)\,\mathbf{H}$, то $Hu = 0$ и $e^{itH}u = u$, значит,

$$(t_2-t_1)^{-1}\int_{t_1}^{t_2} e^{itH}u\,dt = u \to u = P(0)\,u, \quad t_2-t_1\to\infty. \tag{1.4}$$

Если $u$ принадлежит образу оператора $H$, так что $u = Hv$, $v \in \mathbf{D}(H)$, то $e^{itH}u = e^{itH}Hv = -i\,(d/dt)\,e^{itH}v$ в силу (IX.1.24). Следовательно, левая часть в (1.4) равна $-i\,(t_2-t_1)^{-1}\times(e^{it_2H}-e^{it_1H})\,v\to 0 = P(0)\,u$, так как $P(0)\,u = HP(0)\,v = 0$. Таким образом, равенство (1.3) верно, если его применить к любому $u$, принадлежащему линейной оболочке образов операторов $P(0)$ и $H$. Но эта линейная оболочка плотна в $\mathbf{H}$, так как любой вектор $u \in \mathbf{H}$, ортогональный образу оператора $H$, принадлежит $P(0)\,\mathbf{H}$, ядру оператора $H^* = H$ (см. III.5.10). Отсюда следует, что равенство (1.3) справедливо, поскольку оператор в правой части этого равенства равномерно ограничен (см. лемму III.3.5).

**Замечание 1.4.** Если $\lambda$ — изолированная точка спектра оператора $H$, то $P(\lambda)$ можно представить в виде контурного интеграла от резольвенты оператора $H$ (см. VI.5.34). В общем случае это сделать невозможно, и равенство (1.3) является удобной заменой такого представления.

## 2. Абсолютно непрерывные и сингулярные спектры

Удобно разделить спектрально непрерывную часть $H_c$ самосопряженного оператора $H$ на две части.

Спектральное семейство $\{E(\lambda)\}$ определяет спектральную меру $E(\mathrm{S})$. Если $\mathrm{S}$ есть интервал $(a, b]$, то $E((a, b]) = E(b) - E(a)$. Для интервалов других типов положим $E([a, b]) = E(b) - E(a-0)$, $E([a, b)) = E(b-0) - E(a-0)$, $E((a, b)) = E(b-0) - E(a)$ по определению. Ясно, что это определяет проекторнозначную функцию $E(\mathrm{S})$ на борелевских множествах $\mathrm{S}$

вещественной оси, обладающую следующими свойствами [1]):

$$E(\mathrm{S}\cap\mathrm{S}')=E(\mathrm{S})E(\mathrm{S}'), \tag{1.5}$$

$$E(\mathrm{S}\cup\mathrm{S}')=E(\mathrm{S})+E(\mathrm{S}'), \quad \text{если} \quad \mathrm{S}\cap\mathrm{S}'=\varnothing, \tag{1.6}$$

$$E\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{S}_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}E(\mathrm{S}_n), \quad \text{если} \quad \mathrm{S}_n\cap\mathrm{S}_m=\varnothing \quad \text{при}\, m\neq n. \tag{1.7}$$

Для любого фиксированного $u\in\mathrm{H}$ функция множеств $m_u(\mathrm{S}) = (E(\mathrm{S})u, u) = \|E(\mathrm{S})u\|^2$ является неотрицательной счетно-аддитивной мерой [2]), определенной на борелевских множествах S. Если эта мера абсолютно непрерывна (по отношению к мере Лебега $|\mathrm{S}|$), то мы будем говорить, что вектор *u абсолютно непрерывен по отношению к H*. Иными словами, вектор $u$ абсолютно непрерывен по отношению к $H$ тогда и только тогда, когда из $|\mathrm{S}|=0$ следует $E(\mathrm{S})u=0$. Если же мера $m_u(\mathrm{S})$ сингулярна, то будем говорить, что вектор *u сингулярен по отношению к H*. Таким образом, вектор $u$ сингулярен тогда и только тогда, когда существует борелевское множество $\mathrm{S}_0$ с $|\mathrm{S}_0|=0$, такое, что $m_u(\mathrm{S}) = m_u(\mathrm{S}\cap\mathrm{S}_0)$. Это эквивалентно равенству $(1-E(\mathrm{S}_0))u = 0$.

Множество всех $u\in\mathrm{H}$, абсолютно непрерывных (сингулярных) по отношению к $H$, обозначается через $\mathrm{H}_{\mathrm{ac}}$ ($\mathrm{H}_{\mathrm{s}}$) и называется *подпространством абсолютной непрерывности* (*сингулярности*) по отношению к $H$ (см. следующую ниже теорему).

**Теорема 1.5** [3]). *$\mathrm{H}_{\mathrm{ac}}$ и $\mathrm{H}_{\mathrm{s}}$ суть замкнутые линейные подпространства в* H; *они являются ортогональными дополнениями друг к другу и приводят H.*

Доказательство. Покажем сначала, что $\mathrm{H}_{\mathrm{ac}}\perp\mathrm{H}_{\mathrm{s}}$. Пусть $u\in\mathrm{H}_{\mathrm{ac}}$ и $v\in\mathrm{H}_{\mathrm{s}}$. Существует борелевское множество $\mathrm{S}_0$ с $|\mathrm{S}_0|=0$, такое, что $(1-E(\mathrm{S}_0))v=0$. Поскольку $E(\mathrm{S}_0)u=0$, то отсюда следует, что $(u, v) = (u, E(\mathrm{S}_0)v) = (E(\mathrm{S}_0)u, v) = 0$.

Покажем теперь, что $\mathrm{H}_{\mathrm{ac}}+\mathrm{H}_{\mathrm{s}}=\mathrm{H}$, т. е. что любой вектор $w\in\mathrm{H}$ имеет вид $u+v$, где $u\in\mathrm{H}_{\mathrm{ac}}$ и $v\in\mathrm{H}_{\mathrm{s}}$. Для этого представим неотрицательную меру $m_w(\mathrm{S})$ в виде суммы абсолютно непрерывной меры $m'(\mathrm{S})$ и сингулярной меры $m''(\mathrm{S})$ (разложение Лебега). Мере $m''$ соответствует борелевское множество $\mathrm{S}_0$, такое,

---

[1]) Точное определение спектральной меры см. в стандартных курсах по теории гильбертовых пространств, например, в книгах Халмоша [1], Стоуна [1].

[2]) Элементарные результаты из теории меры, используемые здесь и ниже, изложены, например, в книге Ройдена [1].

[3]) Эта теорема есть частный случай одной теоремы из книги Халмоша [1].

что $|\mathrm{S}_0| = 0$, $m''(\mathrm{S}) = m''(\mathrm{S} \cap \mathrm{S}_0)$. Пусть $v = E(\mathrm{S}_0)\, w$ и $u = w - v$. Тогда $u \in \mathbf{H}_{ac}$ и $v \in \mathbf{H}_s$. Действительно, $m_v(\mathrm{S}) = \| E(\mathrm{S})\, v \|^2 = \| E(\mathrm{S})\, E(\mathrm{S}_0)\, w \|^2 = \| E(\mathrm{S} \cap \mathrm{S}_0)\, w \|^2 = m_w(\mathrm{S} \cap \mathrm{S}_0) = m''(\mathrm{S})$, поскольку $m'(\mathrm{S} \cap \mathrm{S}_0) = 0$, $m''(\mathrm{S} \cap \mathrm{S}_0) = m''(\mathrm{S})$, и $m_u(\mathrm{S}) = \| E(\mathrm{S})\, u \|^2 = \| E(\mathrm{S})\, (1 - E(\mathrm{S}_0))\, w \|^2 = \| E(\mathrm{S})\, w \|^2 - \| E(\mathrm{S} \cap \mathrm{S}_0)\, w \|^2 = m_w(\mathrm{S}) - m''(\mathrm{S}) = m'(\mathrm{S})$. Таким образом, мера $m_u$ абсолютно непрерывна, а мера $m_v$ сингулярна: $u \in \mathbf{H}_{ac}$ и $v \in \mathbf{H}_s$.

Как легко видеть, из ортогональности подпространств $\mathbf{H}_{ac}$ и $\mathbf{H}_s$ и из равенства $\mathbf{H}_{ac} + \mathbf{H}_s = \mathbf{H}$ следует, что $\mathbf{H}_{ac}$ и $\mathbf{H}_s$ суть замкнутые линейные подпространства в $\mathbf{H}$ и что они являются ортогональными дополнениями друг к другу.

Если вектор $u$ абсолютно непрерывен, то этим же свойством обладает $E(\lambda)\, u$ при любом $\lambda$, так как если $|\mathrm{S}| = 0$, то $E(\mathrm{S})\, E(\lambda)\, u = E(\lambda)\, E(\mathrm{S})\, u = 0$. Таким образом, $\mathbf{H}_{ac}$, а поэтому и $\mathbf{H}_s = \mathbf{H}_{ac}^{\perp}$ приводят $H$. Этим завершается доказательство теоремы 1.5.

**Теорема 1.6.** *Пусть подпространство* $\mathbf{M}$ *пространства* $\mathbf{H}$ *приводит оператор* $H$. *Тогда ортогональные проекторы* $E$ *на* $\mathbf{M}$ *и* $P$ *на* $\mathbf{H}_{ac}$ *коммутируют. Иными словами, если* $u \in \mathbf{M}$, *то* $Pu \in \mathbf{M}$, *а если* $u \in \mathbf{H}_{av}$, *то* $Eu \in \mathbf{H}_{ac}$.

Доказательство. Оператор $Q = 1 - P$ является проектором на $\mathbf{H}_s$. Для любого $w \in \mathbf{H}$ существует множество $\mathrm{S}_0$ такое, что $|\mathrm{S}_0| = 0$, $Qw = v = E(\mathrm{S}_0)\, w$; $\mathrm{S}_0$ может зависеть от $w$ (см. доказательство теоремы 1.5). Поскольку $\mathbf{M}$ приводит $H$, то $EE(\mathrm{S}_0) = E(\mathrm{S}_0)\, E$, так что $(1 - E(\mathrm{S}_0))\, EQw = 0$ и вектор $EQw$ сингулярен. Таким образом, $PEQw = 0$ для всех $w \in \mathbf{H}$ и потому $PEQ = 0$, $EQ = QEQ$. Переходя к сопряженным, получим, что $QE = QEQ$, поэтому $QE = EQ$, $PE = EP$.

Очевидно, что $\mathbf{H}_{ac} \subset \mathbf{H}_c$ (см. задачу 1.2). Следовательно, $H_s \supset H_p$. Положим $\mathbf{H}_c\mathbf{H}_{ac} = H_{sc}$. Тогда

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{ac} \oplus \mathbf{H}_{sc} \oplus \mathbf{H}_p = \mathbf{H}_{ac} \oplus \mathbf{H}_s = \mathbf{H}_c \oplus \mathbf{H}_p. \qquad (1.8)$$

Если $\mathbf{H}_{ac} = \mathbf{H}$ (так что $\mathbf{H}_s = 0$), то оператор $H$ называется (*спектрально*) *абсолютно непрерывным*; если $\mathbf{H}_s = \mathbf{H}$, то $H$ (*спектрально*) *сингулярен*, если $\mathbf{H}_{sc} = \mathbf{H}$, *то* $H$ (*спектрально*) *сингулярно непрерывен*. В общем случае часть $H_{ac}$ ($H_s$, $H_{sc}$) оператора $H$ в подпространстве $\mathbf{H}_{ac}$ ($\mathbf{H}_s$, $\mathbf{H}_{sc}$) называется *спектрально абсолютно непрерывной* (*сингулярной*, *сингулярно непрерывной*) *частью* оператора $H$. Множество $\Sigma(H_{ac})$ ($\Sigma(H_s)$, $\Sigma(H_{sc})$) называется *абсолютно непрерывным* (*сингулярным*, *сингулярно непрерывным*) *спектром* оператора $H$ и обозначается через $\Sigma_{ac}(H)$ ($\Sigma_s(H)$, $\Sigma_{sc}(H)$).

**Теорема 1.7.** *Если* $u \in \mathbf{H}_{ac}$ *и* $f \in \mathbf{H}$, *то функция* $(E(\lambda)\, u,\, f)$ *абсолютно непрерывна по* $\lambda$ *и почти всюду выполняется неравенство*

$$\left| \frac{d}{d\lambda} (E(\lambda)\, u,\, f) \right|^2 \leqslant \frac{d}{d\lambda} (E(\lambda)\, u,\, u) \frac{d}{d\lambda} (E(\lambda)\, f_0,\, f_0), \tag{1.9}$$

*где* $f_0$ *— проекция вектора* $f$ *на* $\mathbf{H}_{ac}$.

Доказательство. Заметим, что правая часть в (1.9) неотрицательна и конечна почти всюду, так как функции $(E(\lambda)\, u,\, u)$ и $(E(\lambda)\, f_0,\, f_0)$ являются абсолютно непрерывными и неубывающими по $\lambda$.

Далее, $(E(\lambda)\, u,\, f = (E(\lambda)\, u,\, f_0)$, поскольку $E(\lambda)\, u \in \mathbf{H}_{ac}$ согласно теореме 1.6. Но, как ясно из принципа поляризации (I.6.26), функция $(E(\lambda)\, u,\, f_0)$ абсолютно непрерывна. Неравенство (1.9) следует непосредственно из оценки

$$| (E(\mathrm{I})\, u,\, f_0) |^2 \leqslant \| E(\mathrm{I})\, u \|^2 \, \| E(\mathrm{I})\, f_0 \|^2 =$$
$$= (E(\mathrm{I})\, u,\, u)\, (E(\mathrm{I})\, f_0,\, f_0),$$

где $E(\mathrm{I}) = E(\lambda'') - E(\lambda')$, $\lambda' \leqslant \lambda''$.

**Замечание 1.8.** Для большинства возникающих в приложениях самосопряженных операторов (спектрально) непрерывная часть абсолютно непрерывна, так что сингулярно непрерывной части нет. Однако существуют обыкновенные дифференциальные операторы, которые (спектрально) сингулярно непрерывны [1]).

**Пример 1.9.** Рассмотрим самосопряженный оператор умножения $H$ в гильбертовом пространстве $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathrm{E})$, определяемый формулой $Hu(x) = f(x)\, u(x)$, где $f(x)$ —вещественная измеримая функция, заданная, например, в области $\mathrm{E} \subset \mathrm{R}^n$. Тогда образ оператора $E(\lambda)$ есть множество всех $u \in \mathbf{H}$ таких, что $u(x) = 0$ при $f(x) > \lambda$. Следовательно, $\| E(\mathrm{S})\, u \|^2 = \int\limits_{f^{-1}(\mathrm{S})} | u(x) |^2\, dx$. Предположим, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и $\operatorname{grad} f(x) \neq 0$ почти всюду в E; тогда оператор $H$ спектрально абсолютно непрерывен.

**Пример 1.10.** Пусть $H$ — самосопряженный оператор в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathrm{R}^n)$, соответствующий дифференциальному оператору $-\Delta$ (см. п. V.5.2). Оператор $H$ унитарно эквивалентен оператору умножения на $| x |^2$, следовательно, он спектрально абсолютно непрерывен.

**Замечание 1.11.** Существует третий способ разложения спектра самосопряженного оператора $H$ на две части. Удалим из спектра все изолированные точки, которые являются собственными значениями с конечной кратностью; оставшаяся часть $\Sigma_e(H)$ есть *существенный спектр* оператора $H$ (см. п. IV.5.6) [2]).

---

[1]) См. Аронштайн [3].

[2]) Как мы отмечали в п. IV.5.6, имеется много определений множества $\Sigma_e(T)$. Но все эти определения совпадают, если $T$ — самосопряженный оператор.

Точка $\lambda \in \Sigma_e(H)$ характеризуется тем, что

$$\dim\,[E(\lambda+\varepsilon) - E(\lambda-\varepsilon)] = \infty \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0. \tag{1.10}$$

Другая характеризация такова: $\mathrm{nul}'(H-\lambda) = \mathrm{def}'(H-\lambda) = \infty$ (см. (IV.5.33)). Эквивалентность этого условия и условия (1.10) легко проверить, если вспомнить определение $\mathrm{nul}'$ и $\mathrm{def}'$ (см. теорему IV.5.9). Положим $\mathbf{M}_\varepsilon = [E(\lambda+\varepsilon) - E(\lambda-\varepsilon)]\,\mathbf{H}$. Если (1.10) выполняется, то $\|(H-\lambda)u\| \leqslant \varepsilon\|u\|$ для всех $u \in \mathbf{M}_\varepsilon$, где $\dim \mathbf{M}_\varepsilon = \infty$. Поскольку $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\mathrm{nul}'(H-\lambda) = \infty$; заметим, что $\mathrm{def}'(H-\lambda) = \mathrm{nul}'(H-\lambda)$, так как оператор $H$ самосопряжен. Если же $\dim \mathbf{M}_\varepsilon = m < \infty$ при некотором $\varepsilon > 0$, то $\mathrm{nul}'(H-\lambda) < \infty$. Для того чтобы в этом убедиться, рассмотрим подпространство $\mathbf{N}_\varepsilon$ такое, что $\|(H-\lambda)u\| \leqslant \varepsilon\|u\|/2$ при $u \in \mathbf{N}_\varepsilon$. Если $\dim N_\varepsilon > m$, то должен существовать вектор $u \in \mathbf{N}_\varepsilon$, $u \neq 0$, такой, что $u \perp \mathbf{M}_\varepsilon$. Тогда $\|(H-\lambda)u\| \geqslant \varepsilon\|u\|$, что противоречит приведенному выше неравенству. Таким образом, $\dim \mathbf{N}_\varepsilon \leqslant m$, так что $\mathrm{nul}'(H-\lambda) \leqslant m < \infty$.

**Задача 1.12.** $\Sigma_e(H) \supset \Sigma_c(H)$.

### 3. tr-класс

В дальнейшем мы будем иметь дело с некоторыми классами компактных операторов в сепарабельных гильбертовых пространствах. Мы уже рассмотрели довольно подробно класс Шмидта $\mathscr{B}_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$ (п. V.3.2). Рассмотрим теперь так называемый tr-класс, который мы будем обозначать через $\mathscr{B}_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$ (или через $\mathscr{B}_1(\mathbf{H})$, если $\mathbf{H}' = \mathbf{H}$).

Пусть $T \in \mathscr{B}_0(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$ (класс компактных операторов, определенных на $\mathbf{H}$ и принимающих значения в $\mathbf{H}'$), и пусть $\alpha_n$ — сингулярные значения оператора $T$ (см. п. V.2.3). Определим tr-*норму* оператора $T$ равенством

$$\|T\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k. \tag{1.11}$$

Если ряд в правой части расходится, то положим $\|T\|_1 = \infty$. Множество всех $T$ таких, что $\|T\|_1 < \infty$, образует tr-класс $\mathscr{B}_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$. То, что $\|\ \|_1$ обладает всеми свойствами нормы, может быть легко проверено; исключение составляет лишь неравенство треугольника, которое мы докажем позже.

Поскольку ненулевые сингулярные значения операторов $T$, $T^*$ и $|T|$ совпадают, то (см. (V.2.34))

$$\|T\|_1 = \|T^*\|_1 = \||T|\|_1 = \||T|^{1/2}\|_2^2. \tag{1.12}$$

**Очевидно**, что

$$\|T\|_2 \leqslant \|T_1\|, \quad \mathscr{B}_1(\mathbf{H}, \mathbf{H}') \subset \mathscr{B}_2(\mathbf{H}, \mathbf{H}'). \tag{1.13}$$

Кроме того,

$$\| ST \|_1 \leqslant \| S \|_2 \| T \|_2. \tag{1.14}$$

Это нужно понимать в следующем смысле: если $T \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$, $S \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H}', \mathrm{H}'')$, то $ST \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H}, \mathrm{H}'')$ и справедливо неравенство (1.14). Для доказательства рассмотрим каноническое разложение

$$ST = \sum \beta_k (\quad, \psi_k)\, \psi_k'', \quad \beta_k > 0, \tag{1.15}$$

**оператора** $ST \in \mathscr{B}_0(\mathrm{H}, \mathrm{H}'')$ (см. V.2.23). По определению, имеем

$$\begin{aligned} \| ST \|_1 &= \sum \beta_k = \sum (ST\psi_k, \psi_k'') = \\ &= \sum (T\psi_k, S^*\psi_k'') \leqslant \sum \| T\psi_k \| \, \| S^*\psi_k'' \| \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum \| T\psi_k \|^2\right)^{1/2} \left(\sum \| S^*\psi_k'' \|^2\right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \| T \|_2 \| S^* \|_2 = \| T \|_2 \| S \|_2. \end{aligned} \tag{1.16}$$

Обратно, любой оператор $T \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ можно представить в виде произведения двух операторов класса Шмидта, причем оба эти оператора принадлежат $\mathscr{B}_2(\mathrm{H})$, если $T \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$. Например, мы можем согласно (VI.2.26) положить $T = U \mid T \mid = U \mid T \mid^{1/2} \mid T \mid^{1/2}$, где $\mid T \mid^{1/2}$ принадлежит $\mathscr{B}_2(\mathrm{H})$ в силу (1.12), а $U \mid T \mid^{1/2}$ принадлежит $\mathscr{B}_2(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$, так как $U \in \mathscr{B}(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$.

Далее, справедливы неравенства

$$\| ST \|_1 \leqslant \| S \| \, \| T \|_1, \quad \| TS \|_1 \leqslant \| T \|_1 \| S \|, \tag{1.17}$$

которые следует понимать в том же смысле, что и неравенство (1.14). Докажем (1.17); пусть, как и выше, $T = U \mid T \mid$. Тогда $ST = SU \mid T \mid = SU \mid T \mid^{1/2} \mid T \mid^{1/2}$, так что

$$\begin{aligned} \| ST \|_1 &\leqslant \| SU \mid T \mid^{1/2} \|_2 \, \| \mid T \mid^{1/2} \|_2 \leqslant \\ &\leqslant \| SU \| \, \| \mid T \mid^{1/2} \|_2^2 \leqslant \| S \| \, \| T \|_1 \end{aligned} \tag{1.18}$$

в силу (1.14), (V.2.30) и (1.12). Второе неравенство в (1.17) может быть доказано точно так же или выведено из первого с помощью равенства $\| TS \|_1 = \| S^*T^* \|_1$.

Наконец, докажем неравенство треугольника

$$\| T + S \|_1 \leqslant \| T \|_1 + \| S \|_1. \tag{1.19}$$

Пусть $T = U \mid T \mid$, $S = V \mid S \mid$, $T + S = W \mid T + S \mid$ — полярные разложения операторов $T$, $S$, $T + S$ соответственно. Обозначая через $\chi_k$ собственные векторы оператора $\mid T + S \mid$ и полагая $\chi_k' = W\chi_k$, получим, как и в (1.16)

$$\begin{aligned} \| T+S \|_1 &= \sum_k ((T+S)\chi_k,\ \chi_k') = \sum_k [(T\chi_k,\ \chi_k') + (S\chi_k,\ \chi_k')] = \\ &= \sum_k [(U\,|T|\,\chi_k,\ \chi_k') + (V\,|\mathrm{S}|\,\chi_k,\ \chi_k')] = \\ &= \sum_k [(|T|^{1/2}\chi_k,\ |T|^{1/2}U^*\chi_k') + (|S|^{1/2}\chi_k,\ |S|^{1/2}V^*\chi_k')] \leqslant \\ &\leqslant \| |T|^{1/2} \|_2 \| |T|^{1/2} U^* \|_2 + \| |S|^{1/2} \|_2 \| |S|^{1/2} V^* \|_2 \leqslant \\ &\leqslant \| |T|^{1/2} \|_2^2 + \| |S|^{1/2} \|_2^2 = \| T \|_1 + \| S \|_1. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Пространство $\mathscr{B}_1$ (H, H′) является нормированным векторным пространством с нормой $\| \ \|_1$. Это пространство полно, однако доказательство полноты мы опустим [1]).

**Задача 1.13.** Если $T \in \mathscr{B}_1$ (H, H′), то каноническое разложение (V.2.23) для оператора $T$ сходится в норме $\| \ \|_1$.

**Задача 1.14.** Если оператор $T \in \mathscr{B}_1$ (H) симметричен, то $\| T_1 \|$ равняется сумме (с учетом кратности) собственных значений оператора $T$, взятых по абсолютной величине.

**Замечание 1.15.** Кроме класса Шмидта и tr-класса, существуют и другие классы компактных операторов с аналогичными свойствами. Каждый из этих классов может быть определен с помощью некоторой нормы. Примером такой нормы является *p-норма*

$$\| T \|_p = \Big(\sum_k \alpha_k^p\Big)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{1.21}$$

Множество всех компактных операторов $T$ таких, что $\| T \|_p < \infty$, образует нормированное векторное пространство с нормой $\| \ \|_p$. Это пространство полно и является двусторонним идеалом в $\mathscr{B}$ (H), если $\mathrm{H}' = \mathrm{H}$.

Более общо, можно определить аналогичную норму $|||\, T \,|||$ как некоторую функцию сингулярных значений $\alpha_k$ оператора $T$, симметричную по $\alpha_k$ и неубывающую по каждому $\alpha_k$. Мы не будем формулировать точное условие, при котором эта функция определяет норму. Во всяком случае норма $|||\, T \,|||$ *унитарно инвариантна* в том смысле, что

$$|||\, UTV \,||| = |||\, T \,||| \tag{1.22}$$

для любых унитарных операторов $U$, $V$; это является простым следствием задачи V.2.13. Множество всех $T$ таких, что $|||\, T \,||| < < \infty$, образует банахово пространство. Норму $|||\ \ |||$ обычно

---

[1]) См. Шаттен [[1]] [или Гельфанд и Виленкин [[14*]].— *Ред*].

выбирают так, чтобы $|||\,T\,||| = 1$, если $|\,T\,|$ — одномерный ортогональный проектор. Такие нормы называются *кросс-нормами* [1].

При $p = \infty$ $p$-норма совпадает с обычной нормой: $\|\ \|_\infty = \|\ \|$; это ясно из того факта, что $\alpha_1 = |||\,T\,||| = \|\,T\,\|$. Обычная норма и tr-норма являются наименьшей и наибольшей среди кросс-норм; именно,

$$\|\,T\,\| \leqslant |||\,T\,||| \leqslant \|\,T\,\|_1 \tag{1.23}$$

для любого $T \in \mathscr{B}_0\,(\mathrm{H},\ \mathrm{H}')$.

**Задача 1.16.** Если оператор $T \in \mathscr{B}\,(\mathrm{H},\ \mathrm{H}')$ имеет конечный ранг $m$, то $\|\,T\,\|_p \leqslant m^{1/p}\,\|\,T\,\|$.

**Задача 1.17.** Если $\|\,T_n - T\,\| \to 0$ и $\|\,T_n\,\|_p \leqslant M$, то $\|\,T\,\|_p \leqslant M$. [*Указание.* Из $\|\,T_n - T\,\| \to 0$ следует $\|\,|\,T_n\,|^2 - |\,T\,|^2\,\| \to 0$, так что $\alpha_{kn} \to \alpha_k$ при каждом $k$, где $\alpha_{kn}$, $k = 1, 2, \ldots$,— сингулярные значения оператора $T_n$ (непрерывность спектра для самосопряженных операторов). Таким образом, $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k^p \leqslant \limsup \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_{kn}^p \leqslant M^p$ при любом $m$.]

## 4. След и детерминант

В предыдущих главах (см. п. III.4.3 и § IV.6) мы рассмотрели след $\operatorname{tr} T$ оператора, однако это понятие было определено лишь для вырожденных операторов $T$. Теперь мы покажем, что $\operatorname{tr} T$ можно определить для операторов $T$ из tr-класса $\mathscr{B}_1\,(\mathrm{H})$. Как мы видели выше, оператор $T \in \mathscr{B}_1\,(\mathrm{H})$ можно представить в виде произведения $T = AB$ двух операторов $A$, $B$ из класса Шмидта $\mathscr{B}_2\,(\mathrm{H})$. Определим $\operatorname{tr} T$ формулой

$$\operatorname{tr} T = (A,\ B^*) = (B,\ A^*) \tag{1.24}$$

(мы используем обозначения из (V.2.31) (см. также (V.2.35)). Так определенный след не зависит от выбора разложения $T = AB$, поскольку

$$\operatorname{tr} T = (B,\ A^*) = \sum_k (B\varphi_k,\ A^*\varphi_k) = \sum_k (AB\varphi_k,\ \varphi_k) = \sum_k (T\varphi_k,\ \varphi_k). \tag{1.25}$$

Таким образом, $\operatorname{tr} T$ представляет собой *сумму диагональных элементов* матрицы оператора $T$ в любом матричном представлении этого оператора, отвечающем полной ортонормированной системе. В силу (1.25) ряд, составленный из диагональных элементов, всегда абсолютно сходится.

Из (1.24) следует, что

$$\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA \tag{1.26}$$

---

[1] Подробности см. в книге Шаттена [1].

при $A$, $B \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H})$. Это равенство верно и в более общем случае $A \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$, $B \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H}', \mathrm{H})$, так как тогда $AB \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H}')$, $BA \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$, и доказательство следует из (V.2.35). Равенство (1.26) верно также для $A \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$ и $B \in \mathscr{B}(\mathrm{H}', \mathrm{H})$; в этом случае снова $AB \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H}')$, $BA \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$. Для доказательства положим $A = CD$, где $C \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H}, \mathrm{H}')$, $D \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H})$. Тогда $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} CDB = \operatorname{tr} DBC = \operatorname{tr} BCD = \operatorname{tr} BA$; здесь мы применили (1.26) сначала к паре операторов $C$, $DB$ (каждый из них принадлежит классу Шмидта), а затем к паре $D$, $BC$.

До сих пор детерминант был определен лишь для операторов вида $1 + T$, где $T$ — вырожденный оператор. Теперь мы можем распространить это определение на случай $T \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$. Именно, положим

$$\det(1 + T) = e^{\operatorname{tr} \log (1+T)}. \tag{1.27}$$

Это определение не совсем корректно ввиду того, что $\log(1 + T)$ не определен однозначно для всех $T \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$. Однако если $\| T \| < 1$ (или в более общем случае, если $\operatorname{spr} T < 1$), то $\log(1 + T)$ может быть определен с помощью ряда Тейлора $\log(1 + T) = T(1 - T/2 + T^3/3 - \ldots)$ и принадлежит $\mathscr{B}_1(\mathrm{H})$, так же как и $T$. Следовательно, (1.27) определяет $\det(1 + T)$ при $\| T \| < 1$. Даже в общем случае формула (1.27) полезна, если более аккуратно определить $\log(1 + T)$. Другой способ определения $\det(1 + T)$ — рассмотреть аналитическое продолжение функции $\det(1 + zT)$, которая определяется, как и выше, рядом Тейлора, по крайней мере для $| z | < \| T \|^{-1}$. Мы не будем вдаваться в подробности, поскольку нам не придется использовать $\det(1 + T)$ для произвольного $T \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$ [1].

**Пример 1.18.** Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(a, b)$ и $T \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$. Оператор $T$ может быть представлен в виде $T = RS$, где $R$, $S \in \mathscr{B}_2(\mathrm{H})$; $R$ и $S$ можно рассматривать как интегральные операторы Гильберта — Шмидта (пример V.2.19). Таким образом, $T$ является интегральным оператором с ядром

$$t(y, x) = \int_a^b r(y, z)\, s(z, x)\, dz. \tag{1.28}$$

Поэтому

$$\operatorname{tr} T = (R, S^*) = \int \int r(x, z)\, \overline{s^*(x, z)}\, dx\, dz = \int \int r(x, z)\, s(z, x)\, dz\, dx,$$

или

$$\operatorname{tr} T = \int_a^b t(x, x)\, dx. \tag{1.29}$$

---

[1] Подробнее относительно следа и детерминанта см., например, в книге Данфорда и Шварца ⟦1⟧.

Следует, однако, заметить, что равенство (1.29) верно только тогда, когда используется ядро, определяемое формулой (1.28). Отметим, что при этом функция $t(x, x)$ определена почти для всех $x$. Если же дано просто ядро $t(y, x)$ оператора $T$ как интегрального оператора в том или ином смысле, то правая часть в (1.29) не обязана иметь смысл, так как можно произвольно изменять значения функции $t(x, x)$, не меняя $T$.

Можно показать, что если оператор $T \in \mathscr{B}_1(\mathbf{H})$ представлен в виде интегрального оператора с ядром $t(y, x)$, *непрерывным* по $x$ и $y$, то формула (1.29) верна. (Однако следует заметить, что не все интегральные операторы с непрерывным ядром принадлежат $_{\mathrm{tr}}$-классу.) В этом случае можно определить след $\mathrm{tr}\, T$ формулой (1.29), но он может и не обладать свойствами следа, выведенными выше.

## § 2. Возмущение непрерывных спектров

### 1. Теорема Вейля — фон Неймана

Один из важных результатов теории возмущений непрерывных спектров был получен Вейлем и позже обобщен фон Нейманом. Соответствующая теорема утверждает, что любой самосопряженный оператор $H$ в *сепарабельном* гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ можно превратить в самосопряженный оператор $H + A$ с чисто точечным спектром, добавив к нему подходящий «малый» оператор[1] $A$. Малость оператора $A$ может быть выражена тем условием, что $A$ принадлежит классу Шмидта и его норма Шмидта $\|A\|_2$ достаточно мала. Более точно, справедлива

**Теорема 2.1**[2]. *Пусть $H$ — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует самосопряженный оператор $A \in \mathscr{B}_2(\mathbf{H})$ с $\|A\|_2 < \varepsilon$, такой, что оператор $H+A$ имеет чисто точечный спектр.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.2. *Для любых $f \in \mathbf{H}$, $\eta > 0$ существуют конечномерный ортогональный проектор $P$ и самосопряженный оператор $Y \in \mathscr{B}_2(\mathbf{H})$ такие, что $\|(1 - P) f\| < \eta$, $\|Y\|_2 < \eta$ и $P\mathbf{H}$ приводит $H + Y$.*

Доказательство. Пусть $H = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$ — спектральное представление оператора $H$. Выберем $a > 0$ таким образом, чтобы

$$\|[1 - (E(a) - E(-a))] f\| < \eta; \tag{2.1}$$

---

[1] С точки зрения теории возмущений непрерывных спектров это довольно негативный результат.

[2] Доказательство, данное ниже, принадлежит фон Нейману. Теорема будет обобщена в следующем пункте; см. теорему 2.3.

это возможно, поскольку левая часть стремится к нулю при $a \to \infty$. Пусть $n$ — положительное целое число; положим

$$E_k = E\left(\frac{2k-n}{n} a\right) - E\left(\frac{2k-n-2}{n} a\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Операторы $E_k$ образуют ортогональную систему ортогональных проекторов: $E_j E_k = \delta_{jk} E_k$. Положим

$$f_k = E_k f, \quad g_k = \| f_k \|^{-1} f_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.3}$$

причем если $f_k = 0$, то условимся считать, что $g_k = 0$. Поскольку $f_k$, $g_k \in E_k \mathrm{H}$, то векторы $g_k$ образуют ортонормированную систему (если исключить те $g_k$, которые равны 0). Имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \| f_k \| g_k = \sum_{k=1}^{n} f_k = ((E(a) - E(-a)) f. \tag{2.4}$$

Векторы $g_k$ являются приближенными собственными векторами оператора $H$ в том смысле, что

$$\| (H - \lambda_k) g_k \| \leqslant \frac{1}{n} a, \quad \lambda_k = \frac{2k-n-1}{n} a, \tag{2.5}$$

как ясно из (VI.5.21). Пусть $P$ — ортогональный проектор на подпространство, порожденное векторами $g_1, \ldots, g_n$, так что $\dim P \leqslant n$. Поскольку $(1 - P) g_k = 0$, то

$$\| (1 - P) H g_k \| = \| (1 - P)(H - \lambda_k) g_k \| \leqslant \\ \leqslant \| (H - \lambda_k) g_k \| \leqslant a/n. \tag{2.6}$$

Кроме того, имеем

$$((1 - P) H g_j, (1 - P) H g_k) = 0, \quad j \neq k. \tag{2.7}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что $(1 - P) H g_k \in E_k \mathrm{H}$. Но $H g_k \in E_k \mathrm{H}$, поскольку $g_k \in E_k \mathrm{H}$ и $E_k \mathrm{H}$ приводит $H$. Следовательно, $H g_k \perp g_j$, $j \neq k$, поэтому $P H g_k = \sum_j (H g_k, g_j) g_j = (H g_k, g_k) g_k \in E_k \mathrm{H}$ и, таким образом, $(1 - P) H g_k \in E_k \mathrm{H}$.

Далее, для любого $u \in \mathrm{H}$ в силу (2.7), (2.6) и неравенства Бесселя имеем

$$\| (1-P) H P u \|^2 = \Big\| \sum_k (u, g_k)(1-P) H g_k \Big\|^2 = \\ = \sum_k |(u, g_k)|^2 \, \| (1-P) H g_k \|^2 \leqslant a^2 n^{-2} \| u \|^2, \tag{2.8}$$

т. е.

$$\| (1 - P) H P \| \leqslant a/n. \tag{2.9}$$

Оператор $(1 - P) H P$ вырожден, причем его ранг не превосходит $n$. Следовательно (см. задачу 1.16),

$$\| (1 - P) H P \|_2 \leqslant n^{1/2} \| (1 - P) H P \| \leqslant a/n^{1/2}. \tag{2.10}$$

Далее имеем

$$H = PHP + (1 - P)\,H\,(1 - P) + (1 - P)\,HP + [(1 - P)\,HP]^*. \qquad (2.11)$$

Первые два слагаемых в правой части приводятся подпространством $P\mathbf{H}$. Норма Шмидта каждого из двух последних слагаемых не превосходит $a/n^{1/2}$, согласно (2.10), а значит, может быть сделана меньшей, чем $\eta/2$, если $n$ выбрать достаточно большим. С другой стороны, из (2.4) следует, что $(1 - P)\,(E\,(a) - E\,(-a))\,f = 0$, так что

$$\|(1 - P)\,f\,\| = \|(1 - P)\,[f - (E\,(a) - E\,(-a))\,f]\,\| < \eta \qquad (2.12)$$

в силу (2.1). Таким образом, достаточно положить $-Y = (1 - P)\,HP + [(1 - P)\,HP]^*$.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть $\{u_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$,— плотное подмножество в $\mathbf{H}$. Применим лемму 2.2 при $f = u_1$ и $\eta = \varepsilon/2$; соответствующие $P$ и $Y$ обозначим через $P_1$ и $Y_1$. Применим, далее, ту же лемму к части оператора $H + Y_1$ в подпространстве $(1 - P_1)\,\mathbf{H}$ при $f = (1 - P_1)\,u_2$, $\eta = \varepsilon/2^2$; соответствующие $P$ и $Y$ обозначим через $P_2$ и $Y_2$. Продолжим $P_2$ и $Y_2$ на все пространство $\mathbf{H}$, положив $P_2v = 0$, $Y_2v = 0$ при $v \in P_1\mathbf{H}$; тогда оператор $H + Y_1 + Y_2$ приводится подпространствами $P_1\mathbf{H}$ и $P_2\mathbf{H}$. Применим теперь лемму к части оператора $H + Y_1 + Y_2$ в $(1 - P_1 - P_2)\,\mathbf{H}$ при $f = (1 - P_1 - P_2)\,u_3$, $\eta = \varepsilon/2^3$, обозначим через $P_3$, $Y_3$ соответствующие $P$ и $Y$ и продолжим эти операторы на все $\mathbf{H}$, положив их равными нулю в $(P_1 + P_2)\,\mathbf{H}$. Продолжая этот процесс, получим ряд проекторов $P_1, P_2, \ldots$ и ряд самосопряженных операторов $Y_1, Y_2, \ldots$, таких, что $\|(1 - P_1 - \ldots - P_k)\,u_k\,\| \leqslant \varepsilon/2^k$ и $\|\,Y_k\,\|_2 \leqslant \varepsilon/2^k$.

Положим $A = Y_1 + Y_2 + \ldots$; поскольку $\|\,Y_k\,\|_2 \leqslant \varepsilon/2^k$, то этот ряд сходится по норме Шмидта и, таким образом, определяет самосопряженный оператор $A \in \mathscr{B}_2\,(\mathbf{H})$ с $\|\,A\,\|_2 \leqslant \varepsilon$. Покажем, что этот оператор обладает и другими свойствами, требуемыми в теореме 2.1.

Операторы $P_k$ образуют по построению ортогональную систему проекторов. Эта система полна: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k = 1$. Действительно, для любых фиксированных $u \in \mathbf{H}$ и $\eta > 0$ существует $n$ такое, что $\|\,u_n - u\,\| < \eta$ и $\varepsilon/2^n < \eta$. Поскольку $\|(1 - P_1 - \ldots - P_n)\,u_n\,\| \leqslant \varepsilon/2^n < \eta$, то $\|(1 - P_1 - \ldots - P_n)\,u\,\| \leqslant 2\eta$. Следовательно, $\sum P_k u = u$, что и требуется показать (использована лемма V.2.3).

Покажем теперь, что каждое подпространство $P_k\mathbf{H}$ приводит $H + A$. По построению $P_n\mathbf{H}$ является подпространством в $(1 - P_1 - \ldots - P_{n-1})$ **H** и приводит $H + Y_1 + \ldots + Y_n$. Следовательно, $P_n$ коммутирует с $H + Y_1 + \ldots + Y_n$. Поскольку $P_n Y_k = Y_k P_n = 0$ при $k > n$, то $P_n$ коммутирует с $H + A$, т. е. $P_n$**H** приводит $H + A$.

Из того факта, что $P_n$**H** приводит $H$, следует, что существует конечное число собственных векторов оператора $H + A$, которые образуют базис в пространстве $P_n$**H**, конечномерном по построению. В силу полноты системы $\{P_n\}$, совокупность этих собственных векторов для различных $n$ образует полную ортонормированную систему в **H**. Это показывает, что $H + A$ имеет чисто точечный спектр; теорема 2.1 доказана.

## 2. Обобщение

То, что в теореме 2.1 фигурирует норма Шмидта $\| A \|_2$, не очень существенно. Справедливо следующее обобщение, принадлежащее Куроде [1].

**Теорема 2.3.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Оператор $A$ можно выбрать таким образом, что $||| A ||| < \varepsilon$. Здесь $||| \; |||$ — любая (унитарно инвариантная) кросс-норма, за исключением* tr-*нормы или ей эквивалентной.*

Доказательство. Достаточно показать, что $\| Y \|_2$ в лемме 2.2 можно заменить на $||| Y |||$; тогда проходит доказательство теоремы 2.1 с заменой $\| \; \|_2$ на $||| \; |||$. Вспомним, что в неравенстве (2.10), использованном при доказательстве леммы, главный момент состоял в том, что правая часть стремилась к нулю при $n \to \infty$; поэтому достаточно показать, что

$$||| X_n ||| \leqslant n c_n \| X_n \| \tag{2.13}$$

для любого вырожденного оператора $X_n$ ранга $n$, где $c_n$ — числовая последовательность с $\lim\limits_{n \to \infty} c_n = 0$.

Поскольку обе нормы $||| \; |||$ и $\| \; \|$ унитарно инвариантны, мы можем предположить, что операторы $X_n$ неотрицательны и симметричны. Пусть $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n$ — положительные собственные значения (с учетом кратности) оператора $X_n$, так что $\| X_n \| = \alpha_1$. Поскольку $||| X_n |||$ не убывает по каждому из $\alpha_k$ (см. замечание 1.15), то достаточно доказать утверждение при $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 1$, т. е. доказать, что

$$n^{-1} ||| E_n ||| \equiv c_n \to 0 \tag{2.14}$$

для любого ортогонального проектора $E_n$ такого, что $\dim E_n = n$. Заметим, что в силу унитарной инвариантности $||| E_n |||$ зависит только от $n$.

Оператор $E_n$ можно представить в виде суммы $P_1 + \ldots + P_n$, где $P_k$ образуют ортогональную систему одномерных ортогональных проекторов. Следовательно,

$$\begin{aligned} n\,|||E_{n+1}||| &= n\,|||P_1 + \ldots + P_{n+1}||| = |||nP_1 + \ldots + nP_{n+1}||| \leqslant \\ &\leqslant |||P_1 + \ldots + P_n||| + |||P_1 + \ldots + P_{n-1} + P_{n+1}||| + \ldots \\ &\ldots + |||P_2 + \ldots + P_{n+1}||| = \\ &= (n+1)\,|||P_1 + \ldots + P_n||| = (n+1)\,|||E_n|||, \end{aligned} \tag{2.15}$$

поскольку $|||P_1 + \ldots + P_n||| = |||P_2 + \ldots + P_{n+1}|||$ и т. д. в силу унитарной инвариантности нормы $|||\ \ |||$. Из (2.15) следует, что последовательность $c_n$ является невозрастающей.

Предположим, что формула (2.14) неверна, т. е. что $c_n \geqslant c > 0$. Тогда $|||E_n||| \geqslant nc$ и при $\alpha_k \geqslant 0$

$$\begin{aligned} nc\,(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) &\leqslant (\alpha_1 + \ldots \alpha_n)\,|||E_n||| = \\ &= |||(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)(P_1 + \ldots + P_n)||| \leqslant \\ &\leqslant |||\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n||| + |||\alpha_2 P_1 + \ldots + \alpha_1 P_n||| + \ldots \\ &\ldots + |||\alpha_n P_1 + \ldots + \alpha_{n-1} P_n||| = \\ &= n\,|||\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n|||, \end{aligned} \tag{2.16}$$

снова в силу унитарности нормы $|||\ \ |||$. Учитывая, что $\alpha_1 P_1 + \ldots + \alpha_n P_n = X_n$, получаем из (2.16)

$$c\,\|X_n\|_1 \leqslant |||X_n|||; \tag{2.17}$$

это неравенство справедливо для любого вырожденного оператора $X_n$ произвольного ранга. Теперь (2.17) можно распространить на все $X$ такие, что $|||X||| < \infty$, аппроксимируя $X$ последовательностью вырожденных операторов $X_n$ и переходя к пределу при $n \to \infty$. Полученное неравенство $|||X||| \geqslant c\,\|X\|_1$ означает, что норма $|||\ \ |||$ эквивалентна tr-норме $\|\ \ \|_1$, так как противоположное неравенство всегда верно (см. (1.23)). Этим доказано требуемое обобщение леммы 2.2 и завершено доказательство теоремы 2.3.

**Замечание 2.4.** Остался невыясненным вопрос о том, справедлива ли теорема 2.1 с заменой $\|A\|_2$ на $\|A\|_1$. Ответ оказывается отрицательным; позже мы увидим, что самосопряженный оператор $H$ с ненулевой абсолютно непрерывной частью $H_{ac}$ никогда не может быть превращен в оператор с чисто точечным спектром с помощью добавления оператора из tr-класса (теорема 4.3)[1].

---

[1] О возмущении непрерывного спектра обыкновенных дифференциальных операторов (задача Штурма — Лиувилля) см. Аронштайн [3], Путнам [1], [2], Батлер [2], [3], Мозер [1].

**Замечание 2.5.** Теоремы 2.1 и 2.3 утверждают, что чисто непрерывный спектр может быть превращен в чисто точечный с помощью возмущения оператора «малой» добавкой. Не следует думать, что этот точечный спектр состоит из *изолированных* собственных значений. Напротив, собственные значения будут распределены всюду плотно на интервале I, если непрерывный спектр невозмущенного оператора покрывал I. Этот факт является следствием устойчивости существенного спектра при добавлении вполне непрерывного оператора (см. теорему IV.5.35), поскольку $\Sigma_c(H)$ есть подмножество в $\Sigma_e(H)$, так что $I \subset \Sigma_e(H) = \Sigma_e(H+A)$. (Отсюда следует, что множество собственных значений оператора $H+A$ должно быть плотным в I, если $H+A$ имеет чисто точечный спектр.)

# § 3. Волновые операторы и устойчивость спектра

## 1. Введение

В дальнейшем мы будем иметь дело исключительно с *сепарабельным* гильбертовым пространством H. Пусть $H_j$, $H_1$ — два самосопряженных оператора в H. Рассмотрим однопараметрические группы $e^{-itH_1}$, $e^{-itH_2}$, порожденные операторами $-iH_1$, $-iH_2$ соответственно, и однопараметрическое семейство унитарных операторов

$$W(t) = e^{itH_2}e^{-itH_1}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{3.1}$$

Вообще говоря, $W(t)$ не образуют группы. Нас интересует асимптотическое поведение семейства $\{W(t)\}$ при $t \to \pm\infty$, которое важно для физических приложений, поскольку $W(t)$ используется для описания движения квантово-механической системы в так называемом *представлении взаимодействия*. В частности, пределы $W_\pm$ семейства $\{W(t)\}$ при $t \to \pm\infty$, если они существуют, называются *волновыми операторами*, а $S = W_+^*W_-$ — *оператором рассеяния*; это — основные величины в *теории рассеяния* [1]. С другой стороны, вопрос имеет самостоятельный математический интерес, так как он тесно связан с проблемой *унитарной эквивалентности* операторов $H_1$ и $H_2$, как будет ясно из доказываемых ниже теорем.

---

[1] Математическая формулировка теории рассеяния содержится в работах Фридрихса [4], Яуха [1], [2], Куроды [2]. То, о чем рассказывается в этой главе, соответствует весьма частному случаю явления рассеяния (простой рассеивающей системе, согласно Яуху). Математические результаты, относящиеся к более общему случаю многоканального рассеяния, немногочисленны; см. Яух [2], Хэк [2], Фаддеев [1], [2].

В этих исследованиях одной из главных проблем является проблема существования волновых операторов. Естественно, волновые операторы существуют лишь при довольно сильных ограничениях. Необходимо, чтобы оператор $H_2$ отличался от оператора $H_1$ лишь ненамного в том или ином смысле; таким образом, задача по сути дела относится к теории возмущений. Другой важный вопрос состоит в том, является ли оператор $S$ унитарным. Можно было бы ожидать, что операторы $W_\pm$, будучи пределами семейства $\{W(t)\}$, должны быть унитарны. Однако это не всегда так. Если мы предположим, что $W_\pm$ являются *сильными* пределами семейства $\{W(t)\}$, то они изометричны, но не обязаны быть унитарными. Оператор $S = W_+^* W_-$ унитарен тогда и только тогда, когда образы операторов $W_\pm$ совпадают [1]). В физических приложениях существенно, чтобы оператор $S$ был унитарным [2]). Таким образом, другой основной математической задачей является исследование того, при каких условиях совпадают образы операторов $W_\pm$.

Теория волновых операторов специфична для бесконечномерного гильбертова пространства и не имеет никаких аналогов в конечномерном пространстве. Действительно, разумно ожидать, что волновые операторы существуют только тогда, когда $H_1$ имеет чисто непрерывный спектр. Предположим, что $H_1$ имеет собственное значение $\lambda$: $H_1 u = \lambda u$, $u \neq 0$. Тогда $W(t)u = e^{it(H_2-\lambda)}u$. Если $W_+ = \operatorname*{s-lim}_{t\to\infty} W(t)$ существует, то

$$\| W(t+a)u - W(t)u \| = \|e^{ia(H_2-\lambda)}u - u\| \to 0, \quad t\to\infty,$$

при любом вещественном $a$. Отсюда следует, что $e^{ia(H_2-\lambda)}u = u$, так что $H_2 u = \lambda u$. Таким образом, любой собственный вектор оператора $H_1$ должен также быть собственным вектором оператора $H_2$ с тем же собственным значением. За исключением этого частного случая, волновые операторы существуют только тогда, когда $H_1$ имеет чисто непрерывный спектр.

**Пример 3.1.** Пусть $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(-\infty, \infty)$, $H_1 = -id/dx$, $H_2 = -id/dx + q(x)$, где $q(x)$ — вещественная функция. Оператор $H_1$ самосопряжен. Оператор $H_2$ также самосопряжен, по крайней мере если функция $q(x)$ ограничена (и, значит, определяет ограниченный оператор). Мы знаем, что оператор $-iH_1 = -d/dx$ порождает группу $e^{-itH_1}$, причем $e^{-itH_1}u(x) = u(x-t)$ (см. задачу IX.1.9). Посмотрим, что собой представляет группа

---

[1]) Иногда сами операторы $W_\pm$ унитарны, так что $S$ унитарен автоматически. В таком случае $W_\pm$ имеют свои собственные спектральные представления. Здесь мы не интересуемся спектральными свойствами этих операторов. По этим и смежным вопросам см. Путнам [4], [6], [8] — [10].

[2]) Как легко видеть, $S$ коммутирует с $H_1$. Поэтому $S$ можно представить в виде *прямого интеграла* от унитарного оператора $S(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, где $S(\lambda)$ действует в гильбертовом пространстве $\mathrm{H}_1(\lambda)$, а $H_1$ — в виде прямого интеграла от скалярного оператора $\lambda$ в $\mathrm{H}_1(\lambda)$ (о прямом интеграле см. Диксмье [[1]]. Оператор $S(\lambda)$ называется *$S$-матрицей*.

$e^{-itH_2}$. Как легко проверить, $H_2$ можно представить в виде $H_2=W_0^{-1}H_1W_0$, где $W_0$— унитарный оператор, определяемый формулой $W_0u\,(x)=e^{ip(x)}\,u\,(x)$, где $p\,(x)=\int\limits_0^x q\,(y)\,dy$. Таким образом, $(H_2-\zeta)^{-1}=W_0^{-1}\,(H_1-\zeta)^{-1}\,w_0$ при любом невещественном $\zeta$, откуда следует, что $e^{itH_2}=W_0^{-1}e^{itH_1}\,w_0$. Поэтому $e^{itH_2}\,u\,(x)=e^{-ip(x)}\,e^{itH_1}\,W_0\,u\,(x)=e^{-ip(x)}\,e^{ip(x+t)}\,u\,(x+t)$. Следовательно. $W(t)$ является оператором умножения на $e^{i(p(x+t)-p(x))}$. Переходя к пределу при $t\to\infty$, получаем

$$W_+=\exp\left(i\int\limits_x^\infty q\,(y)\,dy\right), \tag{3.2}$$

при условии, что существует несобственный интеграл $\int\limits_0^\infty q\,(y)\,dy$. Легко проверить, что предел (3.2) существует как сильный предел. Очевидно, что оператор $W_+$ унитарен. Аналогично, $w_-$ существует и определяется формулой $W_-=\exp\,(-i\int\limits_{-\infty}^x q\,(y)\,dy)$, при условии что соответствующий несобственный интеграл существует. Если существуют оба этих интеграла, то $S=W_+^*W_-=$ $=\exp\,(-i\int\limits_{-\infty}^\infty q\,(y)\,dy)$, т. е. $S$ является оператором умножения на скаляр, равный 1 по абсолютной величине.

## 2. Обобщенные волновые операторы

Обозначим через $H_{k,\mathrm{ac}}$, $k=1, 2$, спектрально абсолютно непрерывную часть оператора $H_k$, т. е. часть оператора $H_k$ в пространстве $\mathrm{H}_{k,\mathrm{ac}}$ абсолютной непрерывности для $H_k$. Ортогональный проектор на $\mathrm{H}_{k,\mathrm{ac}}$ будем обозначать через $P_k$, $k=1, 2$. Выше было отмечено, что волновые операторы, вообще говоря, существуют только тогда, когда $H_1$ имеет чисто непрерывный спектр. Как мы увидим, часто оказывается, что

$$W_\pm=W_\pm\,(H_2,\,H_1)=\text{s-}\lim_{t\to\pm\infty} W\,(t)\,P_1 \tag{3.3}$$

существует даже тогда, когда собственно волновые операторы не существуют[1]). По этой и другим причинам мы предпочитаем рассматривать пределы (3.3), а не собственно волновые операторы. Если оператор $W_+$ ($W_-$) существует, то мы будем называть его *обобщенным волновым оператором*, соответствующим паре $H_1$, $H_2$.

---

[1]) Выбор сильного предела существен для того, чтобы операторы $W_\pm$ были частично изометричными. Иногда, однако, определяют $W_\pm$ как слабые пределы, или как пределы в каком-либо ином, более слабом смысле. См. Кук [2]. Пределы при $t\to\pm\infty$ операторов вида $W(t)\,AW(t)^{-1}$ рассмотрены Като и Мугибаяси [1].

Если, в частности, оператор $H_1$ спектрально абсолютно непрерывен, так что $P_1 = 1$, то $W_\pm$ совпадают с собственно волновыми операторами.

Основные свойства обобщенных волновых операторов даются следующими теоремами[1])

**Теорема 3.2.** *Если оператор* $W_+ = W_+(H_2, H_1)$ *существует, то он частично изометричен, причем его исходным множеством является* $H_{1,\,\mathrm{ac}}$, *а финальное множество* $\mathbf{M}_+$ *содержится в* $\mathbf{H}_{2,\,\mathrm{ac}}$. *Подпространство* $\mathbf{M}_+$ *приводит* $H_2$. *Таким образом,*

$$W_+^* W_+ = P_1, \quad W_+W_+^* = E_+ \leqslant P_2, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} W_+ &= W_+P_1 = E_+W_+ = P_2W_+, \\ W_+^* &= P_1W_+^* = W_+^*E_+ = W_+^*P_2, \end{aligned} \tag{3.5}$$

*где* $E_+$ *является ортогональным проектором на* $\mathbf{M}_+$ *и коммутирует с* $H_2$. *Кроме того, имеем*

$$H_2W_+ = H_2P_2W_+ = W_+H_1P_1 \supset W_+H_1, \quad H_1W_+^* \supset W_+^*H_2. \tag{3.6}$$

*В частности, из* (3.6) *следует, что оператор* $H_{1,\mathrm{ac}}$ *унитарно эквивалентен части оператора* $H_{2,\,\mathrm{ac}}$ *в* $\mathbf{M}_+$ *и* $\Sigma_{\mathrm{ac}}(H_1) \subset \Sigma_{\mathrm{ac}}(H_2)$. *Аналогичный результат справедлив для оператора* $W_-$, *если он существует.*

Доказательство. Так как $W_+ = \text{s-lim}\, W(t)\, P_1$, то $\| W_+u \| = \lim \| W(t)\, P_1u \| = \| P_1u \|$ при любом $u \in \mathbf{H}$, что эквивалентно равенству $W_+^*W = P_1$. Следовательно, оператор $W_+$ частично изометричен, с исходным множеством $P_1\mathbf{H} = \mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$ (см. п. V.2.2). Оператор $E_+^* = W_+W_+^*$ является проектором на финальное множество оператора $W_+$, которое мы обозначим через $\mathbf{M}_+$. Этим доказаны (3.4) и (3.5), за исключением формул, в которые входит $P_2$.

Далее[2]), для любого вещественного $s$ имеем

$$e^{isH_2}W_+ = \underset{t\to\infty}{\text{s-lim}}\, W(s+t)\, e^{isH_1} = W_+e^{isH_1}. \tag{3.7}$$

Умножим обе части на $e^{-i\zeta s}$, $\operatorname{Im}\zeta < 0$, и проинтегрируем по $s$ от 0 до $\infty$ (преобразование Лапласа); получим (см. (IX.1.28))

$$(H_2 - \zeta)^{-1}\, W_+ = W_+\,(H_1 - \zeta)^{-1}. \tag{3.8}$$

---

[1]) См. Т. Като [10], [11], [17], Курода [2].

[2]) Формулы (3.7) —(3.9) и (3.12) верны, даже если $W_+$ является не сильным, а слабым пределом семейства $\{W(t)\}$. Но в этом случае оператор $W_+$ не обязан быть частично изометричным и даже может быть нулевым; тогда соответствующие результаты бессодержательны.

То же верно и при $\operatorname{Im} \zeta > 0$; надо лишь интегрировать по $s$ от $-\infty$ до 0. Равенство (3.8) эквивалентно тому, что[1])

$$H_2 W_+ \supset W_+ H_1. \tag{3.9}$$

Как легко видеть, из (3.9) следует двойственное соотношение

$$H_1 W_+^* \supset W_+^* H_2.$$

Следовательно,

$$E_+ H_2 = W_+ W_+^* H_2 \subset W_+ H_1 W_+^* \subset H_2 W_+ W_+^* = H_2 E_+. \tag{3.10}$$

Это показывает, что $E_+$ коммутирует с $H_2$, и поэтому $\mathbf{M}_+$ приводит $H_2$. Имеем также $E_+ H_2 E_+ \subset H_2 E_+ E_+ = H_2 E_+$. Здесь, однако, мы можем заменить включение равенством, поскольку операторы $E_+ H_2 E_+$ и $H_2 E_+$ имеют одинаковые области определения. Итак, $H_2 E_+ = E_+ H_2 E_+$, и потому (после умножения (3.10) справа на $E_+$) мы можем все знаки включения заменить знаками равенства. В частности, $E_+ H_2 E_+ = W_+ H_1 W_+^* E_+ = W_+ H_1 W_+^*$, следовательно,

$$\begin{aligned} H_2 W_+ = H_2 E_+ W_+ = E_+ H_2 E_+ W_+ = W_+ H_1 W_+^* W_+ = \\ = W_+ H_1 P_1. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Пусть $E_k(\lambda)$, $k = 1, 2,$ — спектральное семейство для $H_k$. Для любой точки $\lambda$, в которой семейство $E_k(\lambda)$ непрерывно, $E_k(\lambda)$ можно представить в виде интеграла от $(H_k - \zeta)^{-1}$ по некоторой кривой (см. лемму VI.5.6). Поскольку $E_k(\lambda)$ имеет не более чем счетное множество точек разрыва, то из (3.8) получаем, что

$$E_2(\lambda) W_+ = W_+ E_1(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty, \tag{3.12}$$

сначала для тех $\lambda$, в которых оба семейства $\{E_k(\lambda)\}$ непрерывны, а затем для всех $\lambda$ в силу непрерывности справа этих семейств. Поскольку $P_1 u \in \mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$, то из (3.12) следует, что функция $\| E_2(\lambda) W_+ u \|^2 = \| W_+ E_1(\lambda) u \|^2 = \| P_1 E_1(\lambda) u \|^2 = \| E_1(\lambda) P_1 u \|^2$ абсолютно непрерывна по $\lambda$. Поэтому $W_+ u \in \mathbf{H}_{2,\mathrm{ac}} = P_2 \mathbf{H}$ при любом $u \in \mathbf{H}$. Этим доказано, что $\mathbf{M}_+ \subset \mathbf{H}_{2,\mathrm{ac}}$, или $E_+ \leqslant P_2$, поскольку образом оператора $W_+$ является $\mathbf{M}_+ = E_+ \mathbf{H}$. В частности, $W_+ = P_2 W_+$, $W_+^* = W_+^* P_2$, и это вместе с (3.11) завершает доказательство формулы (3.6) и оставшихся равенств в (3.4) и (3.5).

В теореме 3.2 $\mathbf{M}_+$ является подмножеством в $\mathbf{H}_{2,\mathrm{ac}}$, причем, вообще говоря, собственным подмножеством. Если $\mathbf{M}_+ = \mathbf{H}_{2,\mathrm{ac}}$, или, что эквивалентно, $E_+ = P_2$, то будем называть волновой

---

[1]) Доказательство эквивалентности формул (3.8) и (3.9) аналогично доказательству того, что ограниченный оператор $W$ коммутирует с $H$ тогда и только тогда, когда $W$ коммутирует с резольвентой $(H - \zeta)^{-1}$; см. теорему III.6.5.

оператор $W_+$ *полным* 1). Аналогично вводится понятие полноты для $W_-$. *Если один из операторов $W_+$ или $W_-$ существует и является полным, то $H_{1,\mathrm{ac}}$ и $H_{2,\mathrm{ac}}$ унитарно эквивалентны.*

**Теорема 3.3.** Если $W_+ + W_+(H_2, H_1)$ существует, то при $t \to \infty$

$$e^{itH_2}e^{-itH_1}P_1 \xrightarrow[s]{} W_+, \qquad e^{itH_1}e^{-itH_2}E_+ \xrightarrow[s]{} W_+^*, \tag{3.13}$$

$$e^{-itH_2}W_+ - e^{-itH_1}P_1 \xrightarrow[s]{} 0, \qquad e^{itH_1}e^{-itH_2}W_+ \xrightarrow[s]{} P_1, \tag{3.14}$$

$$(W_+ - 1)\,e^{-itH_1}P_1 \xrightarrow[s]{} 0, \quad (W_+^* - 1)\,e^{-itH_1}P_1 \xrightarrow[s]{} 0, \tag{3.15}$$

$$e^{itH_1}W_+e^{-itH_1} \xrightarrow[s]{} P_1, \qquad e^{itH_1}W_+^*e^{-itH_1} \xrightarrow[s]{} P_1, \tag{3.16}$$

$$(1 - E_+)\,e^{-itH_1}\,P_1 \xrightarrow[s]{} 0, \quad (1 - P_2)\,e^{-itH_2}\,P_1 \xrightarrow[s]{} 0. \tag{3.17}$$

*Аналогичные соотношения справедливы при $t \to -\infty$ с заменой $W_+$ на $W_-$, при условии, что последний существует.*

Доказательство. Первая формула в (3.13) является определением оператора $W_+$; из нее после умножения слева 2) на $e^{-itH_2}$ следует первая формула из (3.14); вторая получается с помощью дальнейшего умножения на $e^{itH_1}$. Вторая формула в (3.13) следует из второй формулы в (3.14) после умножения справа на $W_+^*$. Первые формулы в (3.15) и (3.14) совпадают в силу (3.7) и равенства $W_+ = W_+P_1$; вторая формула в (3.15) получается из первой с помощью умножения слева на $-W_+^*$ (заметим, что $W_+^*W_+ = P_1$ коммутирует с $e^{-itH_1}$). Каждое из соотношений (3.16) получается из соответствующих соотношений (3.15) с помощью умножения слева на $e^{itH_1}$. И наконец, первая из формул (3.17) следует из

$$\|(1 - E_+)\,e^{-itH_1}\,P_1u\| = \|e^{itH_2}(1 - E_+)\,e^{-itH_1}\,P_1u\| =$$
$$= \|(1 - E_+)\,e^{itH_2}\,e^{-itH_1}\,P_1u\| \to \|(1 - E_+)\,W_+u\| = 0,$$

а вторая — из первой, поскольку $1 - P_2 \leqslant 1 - E_+$.

**Теорема 3.4** (цепное правило). *Если $W_+(H_2, H_1)$ и $W_+(H_3, H_2)$ существуют, то $W_+(H_3, H_1)$ также существует и*

$$W_+(H_3, H_1) = W_+(H_3, H_2)\,W_+(H_2, H_1). \tag{3.18}$$

*Аналогичный результат справедлив для $W_-$.*

---

1) Пример неполного оператора $W_+$ дан Като и Куродой [1].

2) Заметим, что любое соотношение вида $A_t \xrightarrow[s]{} 0$ можно умножать *слева* на равномерно ограниченный оператор $B_t$, тогда как умножать на $B_t$ *справа*, вообще говоря, можно только тогда, когда $B_t$ не зависит от $t$.

Доказательство. $W_+ (H_2, H_1) = \text{s-lim}\, e^{itH_2} e^{-itH_1} P_1$ и $W_+ (H_3, H_2) = \text{s-lim}\, e^{itH_2} e^{-itH_1} P_2$, откуда

$$W_+ (H_3, H_2)\, W_+ (H_2, H_1) = \text{s-lim}\, e^{itH_3} P_2 e^{-itH_1} P_1, \tag{3.19}$$

поскольку $P_2$ и $e^{itH_2}$ коммутируют. Доказательство будет завершено, если мы покажем, что $\text{s-lim}\, e^{itH_3} (1 - P_2)\, e^{-itH_1} P_1 = 0$. Но это очевидно в силу второго из соотношений (3.17).

**Теорема 3.5.** *Пусть* $W_+ (H_2, H_1)$ *и* $W_+ (H_1, H_2)$ *существуют. Тогда*

$$W_+ (H_1, H_2) = W_+ (H_2, H_1)^*; \tag{3.20}$$

*оператор* $W_+ (H_2, H_1)$ *частично изометричен, с исходным множеством* $\mathbf{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$ *и финальным* $\mathbf{H}_{2,\,\mathrm{ac}}$; *оператор* $W_+ (H_1, H_2)$ *частично изометричен, с исходным множеством* $\mathbf{H}_{2,\,\mathrm{ac}}$ *и финальным* $\mathbf{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$. *Каждый из двух обобщенных волновых операторов является полным, а* $H_{1,\,\mathrm{ac}}$ *и* $H_{1,\,\mathrm{ac}}$ *унитарно эквивалентны. Такие же результаты справедливы для* $W_-$.

Доказательство. Положим $H_3 = H_1$ в теореме 3.4; получим $W_+ (H_1, H_2)\, W_+ (H_2, H_1) = P_1$, поскольку очевидно, что $W_+ (H_1, H_1) = P_1$. Далее, обозначая для простоты $W_{21} = W_+ (H_2, H_1)$ и т. д., имеем $W_{12}W_{21} = P_1$, поэтому $W_{21}W_{12} = P_2$ в силу симметрии. Отсюда, учитывая (3.5) и (3.6), получаем $W_{12} = P_1W_{12} = (W_{21}^*W_{21})\, W_{12} = W_{21}^* (W_{21}W_{12}) = W_{21}^*P_2 = W_{21}^*$. Это доказывает формулу (3.20); остальные утверждения получаются автоматически.

**Замечание 3.6.** В доказанных выше теоремах несущественно, что оператор $P_1$, фигурирующий в определении (3.3) операторов $W_\pm$, является проектором на $\mathbf{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$. Мы могли бы с тем же успехом выбрать в качестве $P_1$ проектор на $\mathbf{H}_{1,\mathrm{c}}$, пространство непрерывности для $H_1$. Выбор пространства $\mathbf{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$ важен тогда, когда мы рассматриваем условия *существования* для $W_\pm$.

### 3. Достаточное условие существования волнового оператора

Следующая теорема дает достаточное условие существования обобщенного волнового оператора, довольно грубое, но удобное для приложений.

**Теорема 3.7** [1]. *Предположим, что существует фундаментальное подмножество* $\mathbf{D}$ *пространства* $\mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$, *обладающее следующими свойствами: если* $u \in \mathbf{D}$, *то существует вещественное* $s$ *такое,*

---

[1] См. Кук [1], Яух [1], Курода [2].

*что* $e^{-itH_1}u \in \mathbf{D}(H_1) \cap \mathbf{D}(H_2)$ *при* $s \leqslant t < \infty$, $(H_2 - H_1)e^{-itH_1}u$ *непрерывно зависит от* $t$ *и функция* $\|(H_2 - H_1)e^{-itH_1}u\|$ *интегрируема на* $(s, \infty)$. *Тогда* $W_+(H_2, H_1)$ *существует.* (*С очевидными изменениями эта теорема справедлива для* $W_-(H_2, H_1)$.)

Доказательство. Если $u \in \mathbf{D}$, то $(d/dt)W(t)u = (d/dt)e^{itH_2}e^{-itH_1}u = ie^{itH_2}(H_2 - H_1)e^{-itH_1}u$ (см. п. IX.1.3), и эта производная непрерывна по предположению. Интегрируя, получим

$$W(t'')u - W(t')u = i\int_{t'}^{t''} e^{itH_2}(H_2 - H_1)e^{-itH_1}u\,dt. \tag{3.21}$$

Поскольку $\|e^{itH_2}\| = 1$, то

$$\|W(t'')u - W(t')u\| \leqslant \int_{t'}^{t''} \|(H_2 - H_1)e^{-itH_1}u\|\,dt. \tag{3.22}$$

Так как подинтегральная функция в правой части интегрируема на $(s, \infty)$, то правая часть стремится к нулю при $t', t'' \to \infty$ и $\operatorname{s-lim}_{t\to\infty} W(t)u$ существует.

Поскольку это верно для всех $u$ из множества $\mathbf{D}$, фундаментального в $\mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$, и поскольку семейство $W(t)$ равномерно ограничено, то (см. лемму III.3.5) рассматриваемый предел существует для любого $u \in \mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}} = P_1\mathbf{H}$, что эквивалентно существованию оператора $W_+(H_2, H_1)$.

В связи с тождеством (3.21) приведем следующую лемму, которая будет полезна в дальнейшем.

**Лемма 3.8.** *Пусть* $H_2 = H_1 + A$, *где* $A \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$. *Если* $W_+ = W_+(H_2, H_1)$ *существует, то для любого* $u \in \mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$ *справедливо равенство*

$$\|W_+u - W(t)u\|^2 = -2\operatorname{Im}\int_t^\infty (e^{isH_1}W_+^*Ae^{-isH_1}u, u)\,ds. \tag{3.23}$$

Доказательство. Если $u \in \mathbf{D}(H_1)$, то справедливо тождество (3.21). Это тождество верно даже для любого $u \in \mathbf{H}$, если заменить $H_2 - H_1$ на $A$, ибо в этом случае обе части тождества являются элементами из $\mathscr{B}(\mathbf{H})$. Если, в частности, $u \in \mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$, то $\lim_{t''\to\infty} W(t'')u = W_+u$ существует, так что

$$W_+u - W(t)u = i\int_t^\infty e^{isH_2}Ae^{-isH_1}u\,ds, \quad u \in \mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}. \tag{3.24}$$

Так как $\|W_+u\| = \|u\|$, поскольку $u \in \mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$, и так как оператор $W(t)$ унитарен, то $\|W_+u - W(t)u\|^2 = 2\|u\|^2 -$

$-2\mathrm{Re}\,(W(t)\,u,\ W_+u) = 2\mathrm{Re}\,(W_+u - W(t)\,u,\ W_+\,u)$. Подставляя сюда (3.24) и учитывая, что $W_+^* e^{isH_2} = e^{isH_1}\,W_+^*$ (соотношение, сопряженное к (3.7)), получим (3.23).

### 4. Применение к потенциальному рассеянию

Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2\,(\mathrm{R}^3)$, и пусть

$$H_1 = -\Delta, \quad H_2 = -\Delta + q\,(x), \tag{3.25}$$

где $\Delta$ — оператор Лапласа, $q\,(x)$ — некоторая вещественная функция. Мы знаем, что оператор $H_1$ самосопряжен, если $\Delta$ понимается в обобщенном смысле, и что оператор $H_2$ с областью определения $\mathbf{D}\,(H_2) = \mathbf{D}\,(H_1)$ также самосопряжен, по крайней мере если $q\,(x)$ является суммой функции из $\mathbf{L}^2\,(\mathrm{R}^3)$ и ограниченной функции (см. теорему V.5.4). Заметим далее, что оператор $H_1$ спектрально абсолютно непрерывен (см. пример 1.10), так что $P_1 = 1$.

Покажем, что теорема 3.7 применима к паре $H_1$, $H_2$ при некоторых дополнительных ограничениях на $q\,(x)$. Положим

$$u\,(x) = e^{-|x-a|^2/2}, \quad a \in \mathrm{R}^3, \tag{3.26}$$

тогда

$$e^{-itH_1}\,u\,(x) = (1 + 2it)^{-3/2}\,e^{|x-a|^2/2(1+2it)}, \tag{3.27}$$

как это ясно из результатов п. IX.1.8 (соответствующей одномерной формулой будет (IX.1.75)). Функция (3.27) ограничена по $x$: она не превосходит по модулю числа

$$(1 + 4t^2)^{-3/4}.$$

Следовательно,

$$\|\,(H_2 - H_1)\,e^{-itH_1}\,u\,\| \leqslant (1 + 4t^2)^{-3/4}\,\|\,q\,\|, \tag{3.28}$$

если $q \in \mathbf{L}^2\,(\mathrm{R}^3)$; через $\|\,q\,\|$ обозначена $\mathbf{L}^2$-норма функции $q$. Очевидно, что функция (3.28) интегрируема на $-\infty < t < \infty$. Поскольку множество всех функций вида (3.26) с различными $a$ фундаментально в $\mathbf{H}$ (см. § IX.1), то из теоремы 3.7 следует, что операторы $W_\pm\,(H_2,\ H_1)$ существуют и что они являются настоящими волновыми операторами, поскольку $P_1 = 1$. В частности, оператор $H_1$ унитарно эквивалентен некоторой части $H_2$. Отсюда, между прочим, следует, что $\Sigma\,(H_2)$ содержит всю положительную вещественную полуось. Это нетривиальный результат, и получить его прямое доказательство было бы нелегко.

Сделанное выше предположение о том, что $q \in \mathbf{L}^2$, можно слегка ослабить, если учесть, что правая часть в (3.28) убывает как $|\,t\,|^{-3/2}$, т. е. быстрее, чем необходимо для интегрируемости.

Для того чтобы получить лучшую оценку, заметим, что

$$v_t(x) \equiv (H_2 - H_1)\, e^{-itH_1} u(x) =$$

$$= (1+2it)^{-1-\varepsilon/2} \frac{q(x)}{|x-a|^{(1-\varepsilon)/2}} \cdot \frac{|x-a|^{(1-\varepsilon)/2}}{(1+2it)^{(1-\varepsilon)/2}} \cdot e^{-|x-a|^2/2(1+2it)} \quad (3.29)$$

при любом $\varepsilon$ таком, что $0 < \varepsilon < 1$. Произведение двух последних сомножителей в правой части ограничено по $x$ числом, не зависящим от $t$ (заметим, что $|\exp(-|x-a|^2/2(1+2it))| = \exp(-|x-a|^2/2(1+4t^2)))$. Второй сомножитель в области $|x-a| \geqslant 1$ мажорируется функцией $|q(x)| / (1+|x|)^{(1-\varepsilon)/2}$, умноженной на некоторый коэффициент. Следовательно, интеграл от $|v_t(x)|^2$ по этой области не превосходит некоторого кратного $(1+4t^2)^{-1-\varepsilon/2}$, если

$$\int\limits_{\mathrm{R}^3} (1+|x|)^{-1+\varepsilon} |q(x)|^2 dx < \infty \quad \text{для некоторого} \quad \varepsilon > 0. \qquad (3.30)$$

С другой стороны, интеграл по области $|x-a| \leqslant 1$ от $|v_t(x)|^2$ мажорируется интегралом от $|q(x)|^2$ по этой ограниченной области с коэффициентом $(1+4t^2)^{-3/2}$ (по той же причине, что и в (3.28)). Следовательно, $\|v_t\| \leqslant \mathrm{const}\,(1+4t^2)^{-1/2-\varepsilon/4}$ и $\|v_t\|$ интегрируема на $(-\infty, \infty)$.

Таким образом, доказана

**Теорема 3.9**[1]. *Пусть $H_1$, $H_2$ — введенные выше операторы, причем $q(x)$ является суммой функции из $\mathrm{L}^2(\mathrm{R}^3)$ и ограниченной функции. Если $q(x)$ удовлетворяет дополнительному условию* (3.30), *то $W_\pm(H_2, H_1)$ существуют и являются настоящими волновыми операторами. В частности, оператор $H_1$ унитарно эквивалентен некоторой части $H_2$ и $\Sigma_{\mathrm{ac}}(H_2)$ содержит положительную вещественную полуось.*

**Замечание 3.10.** Условие (3.30) выполняется, если $q(x) = O(|x|^{-1-\varepsilon})$ при $|x| \to \infty$.

**Замечание 3.11.** Согласно теореме V.5.7, $H_2$ имеет только изолированные собственные значения на отрицательной вещественной полуоси, если выполнено условие, аналогичное условию теоремы 3.9; но это показывает лишь, что положительная вещественная полуось есть $\Sigma_{\mathrm{e}}(H_2)$. Таким образом, теорема 3.9 и теорема V.5.7 дополняют друг друга.

---

[1] См. Курода [2]. См. также Кук [1], Хэк [1], Яух и Цинкес [1], Браунел [3]. О волновых операторах в случае системы многих частиц см. Хэк [2].

## § 4. Существование и полнота волновых операторов

### 1. Возмущения ранга 1 (частный случай)

Теперь мы перейдем к доказательству ряда теорем существования и полноты волновых операторов $W_\pm(H_2, H_1)$. Доказательство будет проведено в несколько этапов. Мы начнем с рассмотрения весьма частного случая.

Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(-\infty, \infty)$, и пусть $H_1$ — максимальный оператор умножения, определяемый формулой $H_1u(x) = xu(x)$. Оператор $H_1$ с областью определения $\mathbf{D}(H_1)$, состоящей из всех $u \in \mathbf{H}$ таких, что $xu(x) \in \mathbf{H}$, самосопряжен и спектрально непрерывен. Пусть $A$ — оператор ранга 1, определяемый формулой

$$Au = c(u, f)f, \tag{4.1}$$

где $c$ — вещественная постоянная, $f$ — заданный элемент пространства $\mathbf{H}$, $\|f\| = 1$. Предположим, далее, что $f = f(x)$ — гладкая функция, быстро убывающая при $x \to \pm\infty$.

Положим $H_2 = H_1 + A$; оператор $H_2$ с областью определения $\mathbf{D}(H_2) = \mathbf{D}(H_1)$ самосопряжен. Покажем, что операторы $W_\pm(H_2, H_1)$ существуют. Для этого достаточно показать, что выполнены условия теоремы 3.7. При любом $u \in \mathbf{H}$ имеем

$$Ae^{-itH_1}u = c(e^{-itH_1}u, f) \tag{4.2}$$

и

$$\|Ae^{-itH_1}u\| = |c|\,|(e^{-itH_1}u, f)| = |c|\left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}u(x)\overline{f(x)}\,dx\right|. \tag{4.3}$$

Если $u(x)$ — гладкая быстро убывающая функция, то преобразование Фурье от $u\overline{f}$ есть снова гладкая быстро убывающая функция, так что функция (4.3) интегрируема по $t$ на $(-\infty, \infty)$. Таким образом, предположения теоремы 3.7 выполнены, поскольку множество таких функций $u$ плотно в $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$.

Оценим скорость сходимости $W(t) \to W_+$, $t \to \infty$. Подстановка (4.2) в (3.23) дает

$$\|W_+u - W(t)u\|^2 = -2c\,\mathrm{Im}\int_t^\infty (e^{-isH_1}u, f)(e^{isH_1}W_+^*f, u)\,ds \leqslant$$

$$\leqslant 2|c|\left[\int_t^\infty |(e^{-isH_1}u, f)|^2\,ds\right]^{1/2}\left[\int_t^\infty |(e^{isH_1}W_+^*f, u)|^2\,ds\right]^{1/2}. \tag{4.4}$$

Интегралы в правой части этой формулы сходятся. Действительно, $(e^{-isH_1}u, f)$ есть преобразование Фурье от $u\overline{f}$, как отмечено выше, так что (равенство Парсеваля)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-isH_1}u,\ f)|^2\,ds = 2\pi\,\|u\bar{f}\|^2 \leqslant 2\pi\,\|f\|^2\,\|u\|_\infty^2 = 2\pi\,\|u\|_\infty^2, \qquad (4.5)$$

и такие же неравенства справедливы для других интегралов в (4.4). Через $\|u\|_\infty$ обозначена супремум-норма функции $u(x)$, гладкой по предположению. Заметим, что $\|W_+^*f\| \leqslant \|f\| = 1$, так как оператор $W_+^*$ частично изометричен.

Поскольку мы не знаем, что собой представляет функция $W_+^*f(x)$, то заменим второй интеграл в правой части формулы (4.4) его мажорантой $2\pi\,\|u\|_\infty^2$; получим

$$\|W_+u - W(t)\,u\|^2 \leqslant 2\,|c|\,(2\pi)^{1/2}\,\|u\|_\infty \left[\int_t^\infty |(e^{-isH_1}u,\ f)|^2\,ds\right]^{1/2}. \qquad (4.6)$$

Эта формула дает оценку скорости сходимости $W(t)\,u \to W_+u$. Извлекая квадратный корень из (4.6) и вычитая одно из другого два неравенства для различных значений $t$, получаем

$$\|W(t'')\,u - W(t')\,u\| \leqslant (8\pi)^{1/4}\,|c|^{1/2}\,\|u\|_\infty^{1/2} \times$$
$$\times \left\{\left[\int_{t'}^\infty |(e^{-isH_1}u,\ f)|^2\,ds\right]^{1/4} + \left[\int_{t''}^\infty |(e^{-isH_1}u,\ f)|^2\,ds\right]^{1/4}\right\}. \qquad (4.7)$$

Следует заметить, что эта формула не содержит ни $W_+$, ни $W_+^*$. Более того, тот факт, что $f(x)$ — гладкая функция, не отражен явно в этом неравенстве (входящие в него интегралы конечны, если выполнено лишь условие $f \in \mathbf{H}$, см. (4.5)). Это наводит на мысль, что формула (4.7) *верна для любого* $f \in \mathbf{H}$ *и любого* $u \in \mathbf{H} \cap \mathbf{L}^\infty$. Докажем это с помощью предельного перехода[1]), отправляясь от гладких $f$ и $u$.

Пусть сначала $f(x)$ — гладкая быстро убывающая функция, а $u \in \mathbf{H} \cap \mathbf{L}^\infty$. Существует последовательность $\{u_n\}$ гладких быстро убывающих функций, такая, что $\|u_n - u\| \to 0$ и $\|u_n\|_\infty \to \|u\|_\infty$. Поскольку неравенство (4.7) верно для каждого $u_n$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$ и используя неравенство

$$\left|\left[\int_t^\infty |(e^{-isH_1}u_n,\ f)|^2\,ds\right]^{1/2} - \left[\int_t^\infty |(e^{-isH_1}u,\ f)|^2\,ds\right]^{1/2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left[\int_t^\infty |(e^{-isH_1}(u_n - u),\ f)|^2\,ds\right]^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (2\pi)^{1/2}\,\|u_n - u\|\,\|f\|_\infty \to 0, \qquad (4.8)$$

---

[1]) Довольно странно, но до сих пор неизвестно ни одного прямого доказательства формулы (4.7).

заключаем, что оно верно для $u$. Первое неравенство в (4.8) является неравенством треугольника в $\mathbf{L}^2(t, \infty)$, а второе получается из (4.5), если $u$ и $f$ поменять ролями.

Рассмотрим теперь общий случай: $f \in \mathbf{H}$, $\|f\| = 1$, $u \in \mathbf{H} \cap \mathbf{L}^\infty$. Пусть $f_n$ — последовательность гладких быстро убывающих функций, такая, что $\|f_n\| = 1$ и $\|f_n - f\| \to 0$. Положим $H_{2n} = H_1 + c(\ , f_n) f_n$; тогда неравенство (4.7) верно, если в нем заменить $f$ на $f_n$ и $W(t)$ на $W_n(t) = e^{itH_{2n}}e^{-itH_1}$. Отсюда получаем (4.7) с помощью предельного перехода при $n \to \infty$; при этом используем следующие факты. Поскольку $\|H_{2n} - H_1\| \leqslant 2|c| \|f_n - f\| \to 0$, то в силу теоремы IX.2.1 $\|W_n(t) - W(t)\| = \|e^{itH_{2n}} - e^{itH_2}\| \to 0$. Снова интегралы в правой части неравенства (4.7) для $f_n$ вместо $f$ сходятся при $n \to \infty$ к таким же интегралам для $f$; доказательство аналогично доказательству неравенства (4.8), при этом $u$ и $f$ меняются ролями.

Поскольку интегралы в правой части неравенства (4.7) существуют, то из (4.7) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} W(t)u$ существует при любом $u \in \mathbf{H} \cap \mathbf{L}^\infty$. Отсюда, как и выше, заключаем, что $\operatorname{s-lim}\limits_{t\to\infty} W(t) = W_+(H_2, H_1)$ существует. Такая же ситуация имеет место при $t \to -\infty$; таким образом, доказана

**Теорема 4.1.** *Пусть* $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(-\infty, \infty)$, *и пусть* $H_1$ *— оператор умножения:* $H_1 u(x) = xu(x)$. *Тогда оператор* $H_1$ *спектрально абсолютно непрерывен и волновые операторы* $W_\pm(H_2, H_1)$ *существуют для любого самосопряженного оператора* $H_2$, *который получается при возмущении оператора* $H_1$ *оператором ранга* 1: $H_2 = H_1 + c(\ , f)f$, $f \in \mathbf{H}$.

**Замечание 4.2.** Приведем одно обобщение теоремы 4.1, которое будет полезно в дальнейшем. Предположим, что $H_1$ — самосопряженный оператор в абстрактном гильбертовом пространстве $\mathbf{H}$ и что оператор $H_{1,\mathrm{ac}}$ унитарно эквивалентен оператору $H_1$ из теоремы 4.1. Тогда мы утверждаем, что операторы $W_\pm(H_2, H_1)$ существуют для любого $H_2 = H_1 + c(\ , f)f$, $f \in \mathbf{H}$.

Это утверждение можно доказать с помощью таких же рассуждений, какие были проведены при доказательстве теоремы 4.1. Заметим прежде всего, что $\mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$ можно отождествить с $\mathbf{L}^2(-\infty, \infty)$, а $H_{1,\mathrm{ac}}$ с $H_1$ из теоремы 4.1. Положим $f = g + h$, $g = P_1 f$, $h = (1 - P_1)f$. Вектор $g$ принадлежит $\mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}} = \mathbf{L}^2$, так что его можно представить в виде функции $g(x)$. Рассмотрим сначала случай, когда $g(x)$ — гладкая быстро убывающая функция. Тогда существование операторов $W_\pm$ может быть доказано так же, как и выше. Единственное изменение, которое нужно внести,— это потребовать, чтобы вектор $u$ принадлежал $\mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$ (так что $u = u(x) \in \mathbf{L}^2$); тогда $u = P_1 u$ и $(e^{-itH_1}u, f) = (e^{-itH_1}u, P_1 f) = (e^{-itH_1}u, g)$ можно представить в виде такого же интеграла, как в (4.3), с заменой $f$ на $g$. Также и оценка (4.4) верна, если $f$ заменить на $g$ ($W_+^* f$ заменять не нужно, но этот вектор принадлежит $\mathbf{H}_{1,\text{ac}}$, а значит, может быть представлен функцией из $\mathbf{L}^2$). Следовательно, формулы (4.6) и (4.7) верны, если $f$ заменить на $g$.

Теперь неравенство (4.7) можно распространить на любые $u(x) \in \mathbf{L}^2 \cap \mathbf{L}^\infty$ так же, как и выше (всюду $f$ заменяется на $g$). Дальнейшее распространение на произвольные $f$ может быть также проведено, как выше; мы полагаем $f_n = g_n + h$, где $g_n = g_n(x) \in \mathbf{H}_{1,\text{ac}}$ — гладкие функции, такие, что $\| g_n \| = \| g \|$ и $\| g_n - g \| \to 0$ (так что $\| f_n \| = 1$, $\| f_n - f \| \to 0$), и доказательство проходит без изменений.

Следовательно, $\lim W(t)\, u$ существует при любом $u \in \mathbf{L}^2 \cap \mathbf{L}^\infty$. Поскольку такие $u$ образуют плотное множество в $\mathbf{L}^2 = \mathbf{H}_{1,\text{ac}}$, то существование $\text{s-lim}\, W(t)$ доказано.

## 2. Возмущения ранга 1 (общий случай)

В теореме 4.1, доказанной выше, невозмущенный оператор $H_1$ имел весьма специальный вид: это был оператор умножения на $x$ в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(-\infty, \infty)$. Избавимся теперь от этого ограничения.

Сначала рассмотрим случай, когда $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(\mathrm{S})$, где $\mathrm{S}$ — произвольное борелевское подмножество вещественной оси $(-\infty, \infty)$, а $H_1$ — максимальный оператор умножения: $H_1 u(x) = xu(x)$, с областью определения $\mathbf{D}(H_1)$, состоящей из всех $u(x) \in \mathbf{H}$ таких, что $xu(x) \in \mathbf{H}$; как и выше, оператор $H_1$ спектрально абсолютно непрерывен. Покажем, что волновые операторы $W_\pm(H_2, H_1)$ существуют для любого оператора $H_2 = H_1 + c(\ , f) f$, который получается из $H_1$ с помощью возмущения ранга 1.

Мы можем рассматривать $\mathbf{H}$ как подпространство более широкого гильбертова пространства $\mathbf{H}' = \mathbf{L}^2(-\infty, \infty)$, образуемое всеми $u \in \mathbf{H}'$ такими, что $u(x) = 0$ при $x \notin \mathrm{S}$. Пусть $H'_1$ — максимальный оператор умножения на $x$ в $\mathbf{H}'$. Тогда подпространство $\mathbf{H}$ пространства $\mathbf{H}'$ приводит $H'_1$, и часть $H'_1$ в $\mathbf{H}$ совпадает с $H_1$. Пусть $H'_2 = H'_1 + c(\ , f) f$, где $f$ мы рассматриваем как элемент из $\mathbf{H}'$, полагая $f(x) = 0$ при $x \notin \mathrm{S}'$. Тогда $H'_2$ также приводится пространством $\mathbf{H}$, и его часть в $\mathbf{H}$ есть $H_2$. Таким образом, $e^{-itH'_1}$ и $e^{-itH'_2}$ также приводятся подпространством $\mathbf{H}$, и их частями в $\mathbf{H}$ являются $e^{-itH_1}$ и $e^{-itH_2}$ соответственно.

Но мы знаем из теоремы 4.1, что $W'(t) = e^{itH'_2} e^{-itH'_1}$ имеет сильные пределы при $t \to \pm\infty$. Поскольку оператор $W'(t)$ также приводится подпространством $\mathbf{H}$ и его часть в $\mathbf{H}$ есть $W(t) = e^{itH_2} e^{-itH_1}$, то $W_\pm = \underset{t\to\pm\infty}{\text{s-lim}}\, W(t)$ существует.

Снова мы можем распространить полученный результат на более общий случай, когда оператор $H_1$ не обязательно абсолютно непрерывен, с помощью способа, описанного в замечании 4.2. Предположим, что оператор $H_{1,\mathrm{ac}}$ унитарно эквивалентен рассмотренному выше оператору $H_1$ умножения на $x$ в $\mathsf{L}^2(\mathrm{S})$. Мы утверждаем, что для любого $H_2 = H_1 + c(\ ,f)f$, $f \in \mathsf{H}$, существуют обобщенные волновые операторы $W_\pm(H_2, H_1)$. Для доказательства достаточно провести такое же рассуждение, как в замечании 4.2. Мы можем отождествить $\mathsf{H}_{1,\mathrm{ac}}$ с $\mathsf{L}^2(\mathrm{S})$ и $H_{1,\mathrm{ac}}$ — с оператором умножения на $x$ и рассматривать $\mathsf{H}_{1,\mathrm{ac}} = \mathsf{L}^2(\mathrm{S})$ как подпространство более широкого гильбертова пространства $\mathsf{H}_0' = \mathsf{L}^2(-\infty, \infty)$, а $\mathsf{H}$ — соответственно как подпространство пространства $\mathsf{H}' = \mathsf{H}_0' \oplus \mathsf{H}_{1,s}$ ($\mathsf{H}_{1,s}$ является подпространством сингулярности для $H_1$). Тогда $H_1$ можно рассматривать как часть в $\mathsf{H}$ оператора $H_1' = H_{1,\mathrm{ac}}' \oplus H_{1,s}$, где $H_{1,\mathrm{ac}}'$ — оператор умножения на $x$ в $\mathsf{H}_0' = \mathsf{L}^2(-\infty, \infty)$. Положим $H_2' = H_1' + c(\ ,f)f$, где $f$ мы рассматриваем как элемент из $\mathsf{H}'$, полагая $f = g + h$, $g \in \mathsf{H}_0'$, $h \in \mathsf{H}_{1,s}$, где $g(x) = 0$ при $x \notin \mathrm{S}$ (первоначально функция $g(x)$ была определена при $x \in \mathrm{S}$). Далее проходит то же рассуждение, что и выше, с использованием замечания 4.2 вместо теоремы 4.1.

Рассмотрим теперь возмущение ранга 1 без каких-либо предположений относительно $H_1$. Пусть $H_1$ — произвольный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathsf{H}$; положим $H_2 = H_1 + c(\ ,f)f$, где $f \in \mathsf{H}$, $\|f\| = 1$, $c$ вещественно. Пусть $\mathsf{H}_0$ — наименьшее содержащее $f$ подпространство, которое приводит $H_1$, и пусть $P_0$ — проектор на $\mathsf{H}_0$. Подпространство $\mathsf{H}_0$ можно охарактеризовать как замкнутую линейную оболочку множества векторов $\{E_1(\lambda)f\}$ для всех вещественных $\lambda$. Оператор $H_2$ также приводится подпространством $\mathsf{H}_0$, поскольку $P_0u \in \mathsf{D}(H_1) = \mathsf{D}(H_2)$, если $u \in \mathsf{D}(H_2) = \mathsf{D}(H_1)$ и $H_2P_0u = H_1P_0u + c(P_0u, f)f \in \mathsf{H}_0$.

Пусть $\mathsf{H}_0^\perp$ — ортогональное дополнение к $\mathsf{H}_0$ в $\mathsf{H}$. Подпространство $\mathsf{H}_0^\perp$ приводит как $H_1$, так и $H_2$, и $H_1u = H_2u$ при $u \in \mathsf{H}_0^\perp$. Следовательно, $W(t)u = e^{itH_2}e^{-itH_1}u = u$ при $u \in \mathsf{H}_0^\perp$. Поскольку $u \in \mathsf{H}_0^\perp$ влечет $P_1u \in \mathsf{H}_0^\perp$ в силу теоремы 1.6, то $W(t)P_1u = P_1u$, а значит, и s-lim $W(t)P_1u = P_1u$ при $u \in \mathsf{H}_0^\perp$. Поэтому для доказательства существования операторов $W_\pm(H_2, H_1) =$ s-lim $W(t)P_1$ достаточно доказать, что существует s-lim $W(t)P_1u$ при $u \in \mathsf{H}_0$. Так как каждый из операторов $P_1$, $H_1$, $H_2$ приводится подпространством $\mathsf{H}_0$ и так как $\mathsf{H}_{k,\mathrm{ac}} \cap \mathsf{H}_0$, $k = 1, 2$, совпадает с подпространством абсолютной непрерывности для части оператора $H_k$ в $\mathsf{H}_0$ согласно теореме 1.6, то мы можем с самого начала предположить, что $\mathsf{H}_0 = \mathsf{H}$ (это означает просто изменение обозначений).

Таким образом, мы предполагаем, что наименьшее содержащее $f$ подпространство, которое приводит $H_1$, есть все $\mathrm{H}$ [1]). Пусть

$$f = g + h, \quad g = P_1 f, \quad h = (1 - P_1) f. \tag{4.9}$$

Поскольку подпространство, порождаемое множеством $\{E(\lambda) f\}$, есть $\mathrm{H}_0 = \mathrm{H}$, то линейная оболочка подпространств, порожденных множествами $\{E(\lambda) g\}$ и $\{E(\lambda) h\}$, есть все $\mathbf{H}$. Но эти два подпространства состоят соответственно из абсолютно непрерывных векторов и сингулярных векторов относительно $H_1$. Следовательно, они должны совпадать с подпространствами абсолютной непрерывности и сингулярности для $H_1$. Иными словами, $\mathrm{H}_{1,\mathrm{ac}}$ порождается множеством $\{E(\lambda) g\}$, а $\mathrm{H}_{1,\mathrm{s}}$ — множеством $\{E(\lambda) h\}$. Таким образом, $\mathrm{H}_{1,\mathrm{ac}}$ есть замыкание множества всех векторов вида $\phi(H_1) g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(\lambda)\, dE(\lambda) g$, где $\phi(\lambda)$ — любая ограниченная (измеримая по Борелю) функция (можно ограничиться гладкими функциями $\phi(\lambda)$).

Далее, имеем

$$(\phi_1(H_1) g, \ \phi_2(H_1) g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_1(\lambda) \overline{\phi_2(\lambda)}\, d(E_1(\lambda) g, g) = \int\limits_{S} \psi_1(\lambda) \psi_2(\lambda)\, d\lambda, \tag{4.10}$$

где

$$\psi_k(\lambda) = \phi_k(\lambda) \rho(\lambda)^{1/2}, \quad k = 1, 2, \quad \rho(\lambda) = d(E_1(\lambda) g, g)/d\lambda, \tag{4.11}$$

а $\mathrm{S}$ есть множество всех $\lambda$ таких, что производная $d(E_1(\lambda) g, g)/d\lambda$ существует и положительна; заметим, что эта производная существует почти всюду, поскольку $g \in \mathrm{H}_{1,\mathrm{ac}}$. Мы можем также считать, что $\mathrm{S}$ — борелевское множество.

Если $\phi(\lambda)$ пробегает множество всех ограниченных функций, то $\psi(\lambda) = \phi(\lambda) \rho(\lambda)^{1/2}$ пробегает плотное подмножество пространства $\mathrm{L}^2(\mathrm{S})$. Следовательно, мы можем отождествить $\mathrm{H}_{1,\mathrm{ac}}$ с $\mathrm{L}^2(\mathrm{S})$ с помощью отображения $\phi(H_1) g \to \psi$. В этой реализации пространства $\mathrm{H}_{1,\mathrm{ac}}$ оператор $H_1$ представляется оператором умножения на $\lambda$ [2]). Поэтому абсолютно непрерывная часть $H_{1,\mathrm{ac}}$ оператора $H_1$ есть оператор рассмотренного выше типа; отсюда следует существование волновых операторов. Таким образом (с учетом теоремы 3.5), доказана следующая теорема.

---

[1]) Иными словами, $H_1$ имеет простой спектр, а $f$ является порождающим вектором.

[2]) Это, в сущности, теорема о том, что любой спектрально абсолютно непрерывный оператор с простым спектром унитарно эквивалентен оператору умножения на $\lambda$ в некотором пространстве $\mathrm{L}^2(\mathrm{S})$; см., например, Стоун [1].

**Теорема 4.3** [1]). *Пусть* $H_1$, $H_2$ — *самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве* H, *такие, что* $H_2 = H_1 + c(\ ,f)f$, $f \in H$, *с вещественно. Тогда обобщенные волновые операторы* $W_\pm(H_2, H_1)$ *и* $W_\pm(H_1, H_2)$ *существуют и являются полными. В частности, абсолютно непрерывные части* $H_{1,\mathrm{ac}}$, $H_{1,\mathrm{ac}}$ *этих операторов унитарно эквивалентны.*

### 3. Возмущения tr-класса

Теорему 4.3 можно обобщить следующим образом.

**Теорема 4.4** [2]). *Пусть* $H_1$, $H_2$ — *самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве* H, *такие, что* $H_2 = H_1 + A$, *где* $A$ *принадлежит* tr-*классу* $\mathscr{B}_1(\mathrm{H})$. *Тогда обобщенные волновые операторы* $W_\pm(H_2, H_1)$ *и* $W_\pm(H_1, H_2)$ *существуют и являются полными* [3]). *Абсолютно непрерывные части операторов* $H_1$, $H_2$ *унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть разложение оператора $A$ (см. (V.2.20)) дается формулой

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\ ,f_k)f_k, \tag{4.12}$$

где $f_k$ образуют ортонормированную систему собственных векторов, а (вещественные) числа $c_k$ являются соответствующими (с учетом кратности) собственными значениями. Если $A \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \|A\|_1 < \infty \tag{4.13}$$

(см. задачу 1.14).

Пусть $A_n$ — частичная сумма ряда (4.12). Обозначим $H^{(n)} = H_1 + A_n$, $H^{(0)} = H_1$. Каждый из операторов $H^{(n)} - H^{(n-1)}$ имеет ранг 1 и $W_\pm(H^{(n)}, H^{(n-1)})$ существует в силу теоремы 4.3. Последовательное применение цепного правила (теоремы 3.4) показывает тогда, что $W_{n\pm} = W_\pm(H^{(n)}, H_1)$ существует при $n = 1, 2, \ldots$.

---

[1]) Ср. с работой Т. Като [10], в которой эта теорема доказана «стационарным» методом.

[2]) Эта теорема была доказана Розенблюмом [1] в случае, когда оба оператора $H_1$, $H_2$ спектрально абсолютно непрерывны, и Т. Като [11] в общем случае.

[3]) Оператор рассеяния $S = W_+^* W_-$ унитарно отображает $P_1\mathrm{H}$ на себя и коммутирует с $H_1$. Соответствующая $S$-матрица $S(\lambda)$ (см. подстрочное примечание 2 на стр. 654) изучена Бирманом и Крейном [1], которые использовали *формулу для следа*, принадлежащую Лифшицу [4] и Крейну [3], [6].

Лемма 3.8 показывает, что для каждого $u \in \mathbf{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$

$$\| W_{n+}u - W_n(t)\,u \|_2 = -2\,\mathrm{Im} \int_t^\infty (e^{isH_1} W_{n+}^* A_n e^{-isH_1} u,\ u)\,ds, \tag{4.14}$$

где $W_n(t) = e^{itH^{(n)}} e^{-itH_1}$. Оценим правую часть в (4.14). Поскольку

$$(e^{isH_1} W_{n+}^* A_n e^{-isH_1} u,\ u) = \sum_{k=1}^{n} c_k (e^{-isH_1} u,\ f_k)(e^{isH_1} W_{n+}^* f_k,\ u), \tag{4.15}$$

то, согласно неравенству Шварца,

$$\| W_{n+}u - W_n(t)\,u \|^2 \leqslant 2 \left[ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \int_t^\infty | e^{-isH_1} u,\ f_k)|^2\, ds \right]^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times \left[ \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \int_t^\infty |(e^{isH_1} g_{kn},\ u)|^2\, ds \right]^{\frac{1}{2}}, \tag{4.16}$$

где $g_{kn} = W_{n+}^* f_k$, $\| g_{kn} \| \leqslant 1$.

Правая часть в (4.16) конечна, не обязательно для всех $u \in P_1 \mathbf{H}$, но во всяком случае для $u$, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию. Это ясно из следующей леммы, доказательство которой будет дано ниже.

**Лемма 4.5.** *Пусть* $H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$ — *самосопряженный оператор в* $\mathbf{H}$. *Пусть вектор* $u \in \mathbf{H}$ *абсолютно непрерывен относительно* $H$, *и пусть*

$$|||\, u \,|||^2 = \operatorname*{ess\,sup}_{\lambda}\, d\,(E(\lambda)\, u,\ u)/d\lambda. \tag{4.17}$$

*Тогда*[1]) *для любого* $f \in \mathbf{H}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |(e^{-itH} u,\ f)|^2\, dt \leqslant 2\pi\, |||\, u \,|||^2\, \| f \|^2. \tag{4.18}$$

Из этой леммы следует, что первый из двух сомножителей (не считая коэффициента 2) в правой части неравенства (4.16) не превосходит $\sqrt{2\pi}\, |||\, u \,|||\, (\Sigma\ |c_k|)^{1/2} = |||\, u \,|||\, (2\pi\, \| A \|_1)^{1/2}$, поскольку $\| f_k \| = 1$. То же верно и для второго сомножителя. Мы используем эту оценку только для второго сомножителя; получим

$$\| W_{n+}u - W_n(t)\, u \| \leqslant |||\, u \,|||^{1/2}\, (8\pi\, \| A \|_1)^{1/4}\, \eta\,(t;\ u)^{1/4}, \tag{4.19}$$

где

$$\eta\,(t;\ u) = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \int_t^\infty |(e^{-isH_1} u,\ f_k)|^2\, ds \leqslant 2\pi\, |||\, u \,|||^2\, \| A \|_1. \tag{4.20}$$

---

[1]) Это является обобщением формулы (4.5).

Далее, из (4.19) вытекает, что

$$\| W_n(t'')\, u - W_n(t')\, u \| \leqslant$$
$$\leqslant |||\, u\, |||^{1/2} (8\pi \, \| A \|_1)^{1/4} [\eta(t';\, u)^{1/4} + \eta(t'';\, u)^{1/4}] \qquad (4.21)$$

для любого $u \in \mathrm{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$.

Теперь мы можем перейти к пределу при $n \to \infty$ в (4.21). Поскольку $H_2 = H^{(n)} + A - A_n$ и $\| A - A_n \| \to 0$, то $e^{itH^{(n)}} \to e^{itH_2}$ по норме (см. теорему IX.2.1), и поэтому $W_n(t) \to W(t)$ по норме при любом фиксированном $t$. Таким образом, (4.21) дает

$$\| W(t'')\, u - W(t')\, u \| \leqslant$$
$$\leqslant |||\, u\, |||^{1/2} (8\pi \, \| A \|_1)^{1/4} [\eta(t';\, u)^{1/4} + \eta(t'';\, u)^{1/4}]; \qquad (4.22)$$

эта оценка показывает, что $\lim\limits_{t \to \infty} W(t)\, u$ существует, если $|||\, u\, ||| < \infty$, так как в этом случае $\eta(t;\, u) \to 0$, как ясно из (4.20).

Множество всех $u \in \mathrm{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$ таких, что $|||\, u\, ||| < \infty$, плотно в $\mathrm{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$. Действительно, пусть $v \in \mathrm{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$; мы должны показать, что существует последовательность векторов $u_n \in \mathrm{H}_{1,\,\mathrm{ac}}$, такая, что $|||\, u_n\, ||| < \infty$ и $u_n \to v$. Функция $(E_1(\lambda)\, v,\, v)$ абсолютно непрерывна, а ее производная $\rho(\lambda) = d\,(E_1(\lambda)\, v,\, v)/d\lambda$ существует почти всюду и является неотрицательной. Пусть $\mathrm{S}_n$ — множество значений $\lambda$, при которых $\rho(\lambda) > h$; тогда $\{\mathrm{S}_n\}$ — невозрастающая последовательность, $\lim \mathrm{S}_n = 0$. Обозначим $u_n = (1 - E_1(\mathrm{S}_n))\, v$. Тогда $(E_1(\lambda)\, u_n,\, u_n) = ((1 - E_1(\mathrm{S}_n))\, E_1(\lambda)\, v,\, v) =$

$$= \int_{-\infty}^{\lambda} (1 - \chi_n(\lambda'))\, d\,(E_1(\lambda')\, v,\, v) = \int_{-\infty}^{\lambda} (1 - \chi_n(\lambda'))\, \rho(\lambda')\, d\lambda',$$

где $\chi_n(\lambda') = 1$ при $\lambda' \in \mathrm{S}_n$ и $\chi_n(\lambda') = 0$ при $\lambda' \notin \mathrm{S}_n$. Следовательно, $d\,(E_1(\lambda)\, u_n,\, u_n)/d\lambda = (1 - \chi_n(\lambda))\, \rho(\lambda) \leqslant n$ почти всюду и $|||\, u_n\, |||^2 \leqslant n$. Поскольку $E_1(\mathrm{S}_n)\, v \to 0$ в силу абсолютной непрерывности вектора $v$, то $u_n \to v$.

Так как семейство $W(t)$ равномерно ограничено, то $\lim W(t)\, u$ существует при любом $u \in \mathrm{H}_{1,\,\mathrm{ac}} = P_1 \mathrm{H}$. Иными словами, существует $\text{s-lim}\, W(t)\, P_1 = W_+$. Поскольку то же верно и для $\text{s-lim}_{t \to -\infty} W(t)\, P$ и поскольку $H_1 = H_2 - A$, где $-A \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$, то доказательство теоремы 4.4 завершено.

Заметим между прочим, что, полагая $t'' \to \infty$ в (4.22), получим

$$\| W_+ u - W(t)\, u \| \leqslant |||\, u\, |||^{1/2} (8\pi \, \| A \|_1)^{1/4} \eta(t;\, u)^{1/4} \leqslant$$
$$\leqslant |||\, u\, |||\, (4\pi \, \| A \|_1)^{1/2}. \qquad (4.23)$$

Доказательство леммы 4.5. Обозначим через $P$ проектор на подпространство $\mathrm{H}_{\mathrm{ac}}$ абсолютной непрерывности для $H$. Поскольку $u = Pu$, то функция $(E(\lambda)\, u,\, f)$ абсолютно непрерывна, и ее производная мажорируется функцией

$$\left[\frac{d}{d\lambda}(E(\lambda)u, u)\frac{d}{d\lambda}(E(\lambda)f_0, f_0)\right]^{1/2} \leqslant |||u||| \left[\frac{d}{d\lambda}(E(\lambda)f_0, f_0)\right]^{1/2},$$

где $f_0 = Pf$ (см. теорему 1.7). Следовательно, $\frac{d}{d\lambda}(E(\lambda)u, f)$ принадлежит $\mathbf{L}^2(-\infty, \infty)$ с $\mathbf{L}^2$-нормой, не превышающей $|||u||| [\int d(E(\lambda)f_0, f_0)]^{1/2} = |||u|||\, \|f_0\| \leqslant |||u|||\, \|f\|$. Но $(e^{-itH}u, f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\, d(E(\lambda)u, f)$ есть преобразование Фурье функции $\frac{d}{d\lambda}(E(\lambda)u, f)$. Поэтому лемма 4.5 следует из теоремы Парсеваля.

## 4. Волновые операторы для функций от операторов

Покажем теперь, что существуют не только (обобщенные) волновые операторы $W_\pm = W_\pm(H_2, H_1)$, но также и волновые операторы $W_\pm(\phi(H_2), \phi(H_1))$ для некоторых функций $\phi(\lambda)$ при условии, что $H_2 - H_1$ принадлежит классу $\mathscr{B}_1(\mathbf{H})$. Это намного расширит возможность применения теоремы 4.4. Более того, справедлив замечательный результат, состоящий в том, что $W_\pm(\phi(H_2), \phi(H_1))$ не зависит от $\phi$ для широкого класса функций $\phi$. Это так называемая *инвариантность волновых операторов*.

Сначала будет доказана

**Лемма 4.6.** *Пусть $\phi(\lambda)$ — вещественная функция на $(-\infty, \infty)$, обладающая следующими свойствами: интервал $(-\infty, \infty)$ можно разделить на конечное число подинтервалов таким образом, что на каждом открытом подинтервале $\phi(\lambda)$ дифференцируема, причем $\phi'(\lambda)$ непрерывна, локально является функцией ограниченной вариации и положительна. Тогда для любого $w(\lambda) \in \mathbf{L}^2(-\infty, \infty)$*

$$2\pi \|w\|^2 \geqslant \int\limits_0^\infty dt \left| \text{l.i.m.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda - is\phi(\lambda)} w(\lambda)\, d\lambda \right|^2 \to 0 \quad \textit{при}\ s \to +\infty. \tag{4.24}$$

Доказательство. Пусть $H$ — самосопряженный оператор $Hw(\lambda) = \lambda w(\lambda)$, действующий в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(-\infty, \infty)$, и пусть $U$ — унитарный оператор, задаваемый преобразованием Фурье. Тогда внутренний интеграл в (4.24) представляет собой функцию $(2\pi)^{1/2}(Ue^{-is(\phi)H}w)(t)$, и средний член в (4.24) равен $2\pi \| EUe^{-is\phi(H)} w\|^2 \leqslant 2\pi \|w\|^2$, где $E$ — проектор в $\mathbf{H}$ на подпространство, состоящее из всех $f(t)$ таких, что $f(t) = 0$ при $t < 0$. Следовательно, формула (4.24) эквивалентна тому, что $\underset{s\to+\infty}{\text{s-lim}}\, EUe^{-is\phi(H)} = 0$. Поскольку оператор $EUe^{-is(H)\phi}$ равномерно ограничен единицей, то достаточно доказать (4.24) для всех $w$, принадлежащих фундаментальному подмножеству пространства **H**. Таким образом, мы можем ограничиться рассмотрением характеристических функций $w(\lambda)$ конечных интервалов $[a, b]$: $w(\lambda)=1$ при $\lambda \in [a, b]$ и $w(\lambda)=0$ при $\lambda \notin [a, b]$. Кроме того, мы можем предположить, что $[a, b]$ содержится в открытом интервале, в котором функция $\phi(\lambda)$ непрерывно дифференцируема и обладает свойствами, указанными в формулировке леммы.

Тогда

$$v(t, s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda-is\phi(\lambda)} w(\lambda)\, d\lambda = \int_a^b e^{-it\lambda-is\phi(\lambda)}\, d\lambda =$$

$$= i \int_a^b (t+s\phi'(\lambda))^{-1} \frac{d}{d\lambda} e^{-it\lambda-is\phi(\lambda)}\, d\lambda. \qquad (4.25)$$

Если $t, s > 0$, то $\psi(\lambda) = (t+s\phi'(\lambda))^{-1}$ — положительная функция с ограниченной вариацией. Элементарный подсчет показывает, что полная вариация функции $\psi(\lambda)$ на $[a, b]$ оценивается следующим образом:

$$\int_a^b |d\psi(\lambda)| \leqslant Ms/(t+cs)^2 \leqslant M/c\,(t+cs),$$

где $c > 0$ — минимум функции $\phi'(\lambda)$ на $[a, b]$, а $M$ — ее полная вариация на $[a, b]$. Интегрируя (4.25) по частям, получим

$$v(t, s) = i\,[\psi(\lambda)\, e^{-it\lambda-is\phi(\lambda)}]_a^b - i \int e^{-it\lambda-is\phi(\lambda)}\, d\psi(\lambda),$$

$$|v(t, s)| \leqslant \psi(a)+\psi(b)+\int_a^b |d\psi(\lambda)| \leqslant (2c+M)/c\,(t+cs).$$

Следовательно, средняя часть в (4.24) равна

$$\int_0^{\infty} |v(t, s)|^2\, dt \leqslant (2c+M)^2/c^3 s \to 0, \quad s \to +\infty.$$

Теперь мы можем доказать инвариантность волновых операторов в следующей форме.

**Теорема 4.7** [1]. *Пусть $H_1$, $H_2$ — самосопряженные операторы такие, что $H_2 = H_1 + A$, где $A \in \mathscr{B}_1(\mathbf{H})$. Если функция $\phi(\lambda)$*

---

[1] Эта теорема может быть обобщена дальше на функции $\phi$, возрастающие на некоторых подинтервалах и убывающие на других. Тогда операторы $W_{\pm,\,\phi} = W(\phi(H_2), \phi(H_1))$ по-прежнему существуют, однако уже не равны операторам $W_{\pm}$. Вместо этого мы имеем $W_{\pm,\,\phi}u = W_{\pm}u$ или $W_{\pm,\,\phi}u = W_{\mp}u$ при $u \in E_1(\mathrm{I})\,\mathbf{H}$, где I — один из подинтервалов, на котором $\phi$ возрастает или убывает. Доказательство в сущности такое же, как и доказательство теоремы 4.17. См. Т. Като [17], Бирман [9] — [11].

*обладает свойствами, описанными в лемме* 4.6, *то обобщенные волновые операторы* $W_\pm(\phi\,(H_2),\ \phi\,(H_1))$ *существуют, полны и не зависят от* $\phi$; *в частности, они равны соответственно* $W_\pm\,(H_2,\ H_1)$.

Доказательство. Начнем с оценки (4.23), заменив в ней $u$ на $v = e^{-is\phi(H_1)}\,u$. Поскольку $(E_1\,(\lambda)\,v,\ v) = (E_1\,(\lambda)\,u,\ u)$, то $|||\,v\,||| = |||\,u\,|||$ в силу (4.17). Полагая $t = 0$, получаем

$$\|\,(W_+ - 1)\,e^{-is\phi(H_1)}u\,\| \leqslant$$

$$\leqslant |||\,u\,|||^{1/2}\,(8\pi\,\|\,A\,\|_1)^{1/4}\,\eta\,(0;\ e^{-is\phi(H_1)}u)^{1/4}, \tag{4.26}$$

где

$$\eta\,(0;\ e^{-is\phi(H_1)}u) = \sum_{k=1}^{\infty}|\,c_k\,|\int_0^{\infty}|\,(e^{-itH_1-is\phi(H_1)}u,\ f_k)\,|^2\,dt, \tag{4.27}$$

согласно (4.20)

Интегралы в правой части формулы (4.27) имеют вид (4.24), где $w\,(\lambda)$ нужно заменить на производную $d\,(E_1\,(\lambda)\,u,\ f_k)/d\lambda$, которая принадлежит $\mathrm{L}^2\,(-\infty,\ \infty)$ с $\mathrm{L}^2$-нормой $\leqslant |||\,u\,|||$, как отмечено в конце п. 3. Согласно лемме 4.6, каждый член в правой части (4.27) стремится к 0 при $s \to +\infty$. Поскольку ряд равномерно (по $s$) мажорируется сходящимся рядом $\sum\,|\,c_k\,|\,2\pi\,|||\,u\,|||^2 = 2\pi\,|||\,u\,|||^2\,\|\,A\,\|_1$, то его сумма стремится к 0 при $s \to +\infty$. Поскольку множество всех $u$ таких, что $|||\,u\,||| < \infty$, плотно в $P_1\mathbf{H}$, как отмечалось в п. 3, то

$$(W_+ - 1)\,e^{-is\phi\,(H_1)}P_1 \xrightarrow[s]{} 0,\quad s \to +\infty. \tag{4.28}$$

Но $W_+e^{-is\phi\,(H_1)} = e^{-is\phi\,(H_2)}W_+$ в силу (3.12) (заметим, что $e^{-is\phi\,(H_1)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-is\phi\,(\lambda)}\,dE_1\,(\lambda)$). Умножая (4.28) слева на $e^{is\phi\,(H_2)}$, получаем, таким образом,

$$\operatorname*{s-lim}_{s\to+\infty} e^{is\phi\,(H_2)}e^{-is\phi\,(H_1)}P_1 = W_+P_1 = W_+. \tag{4.29}$$

Этим доказано, что оператор $W_+\,(\phi\,(H_2),\ \phi\,(H_1))$ существует и совпадает с $W_+ = W_+\,(H_2,\ H_1)$, если показать, что $P_1$ также является проектором на подпространство абсолютной непрерывности для $\phi\,(H_1)$, т. е. что указанное подпространство совпадает с $\mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$.

Убедимся в этом; пусть $\{E_1\,(\lambda)\}$ — спектральное семейство оператора $\phi\,(H_1)$. Тогда [1]

$$F_1\,(\mathrm{S}) = E_1\,(\phi^{-1}\,(\mathrm{S})) \tag{4.30}$$

для любого борелевского подмножества S вещественной оси; через $\phi^{-1}\,(\mathrm{S})$ обозначен прообраз множества S при отображении $\phi$.

---

[1] См. Стоун [1].

Если $|\mathrm{S}| = 0$, то $|\phi^{-1}(\mathrm{S})| = 0$ в силу свойств функции $\phi$, так что $F_1(\mathrm{S})\,u = 0$ для $u \in \mathbf{H}_{1,\mathrm{ac}}$. С другой стороны, $F_1(\phi(\mathrm{S})) = E_1(\phi^{-1}[\phi(\mathrm{S})]) \geqslant E_1(\mathrm{S})$. Если $|\mathrm{S}| = 0$, то $|\phi(\mathrm{S})| = 0$, так что $\|E_1(\mathrm{S})\,u\| \leqslant \|F_1(\phi(\mathrm{S}))\,u\| = 0$ для векторов $u$, абсолютно непрерывных относительно $\phi(H_1)$. Этим требуемый результат доказан.

Рассматривая различные конкретные функции $\phi$, мы можем получить много полезных следствий 1) из теоремы 4.7. Например, справедлива

**Теорема 4.8** 2). *Пусть $H_1$, $H_2$ — самосопряженные операторы с положительными нижними гранями (так что обратные к ним принадлежат $\mathscr{B}(\mathrm{H})$). Если $H_2^{-\alpha} - H_1^{-\alpha}$ принадлежит* tr-*классу при некотором $\alpha > 0$, то операторы $W_\pm(H_2, H_1)$ существуют, равны $W_\mp(H_2^{-\alpha}, H_1^{-\alpha})$ и полны.*

Доказательство. Функция $\phi(\lambda)$, равная $-\lambda^{-1/\alpha}$ при $\lambda \geqslant \gamma$ и $\lambda$ при $\lambda < \gamma$, удовлетворяет условиям леммы 4.6 ($\gamma > 0$ — меньшая из нижних граней операторов $H_1$ и $H_2$). Теорема 4.8 следует из теоремы 4.7, примененной к $H_1^{-\alpha}$, $H_2^{-\alpha}$ вместо $H_1$, $H_2$ соответственно и к функции $\phi(\lambda)$, введенной выше; значения функции $\phi(\lambda)$ при $\lambda < \gamma$ в данном случае роли не играют. Заметим, что $W_\pm(H_2, H_1) = W_\mp(-H_2, -H_1)$.

**Теорема 4.9** 3). *Пусть оператор $H_1$ самосопряжен и ограничен снизу, а оператор $V$ симметричен и $H_1$-ограничен с $H_1$-гранью, меньшей, чем 1. Кроме того, пусть $V = V''V'$, где $V'(H_1 - \gamma)^{-1}$ и $V''^*(H_1 - \gamma)^{-1}$ — операторы Гильберта — Шмидта при некотором $\gamma$, меньшем, чем нижняя грань оператора $H_1$. Тогда оператор $H_2 = H_1 + V$ самосопряжен и ограничен снизу, и операторы $W_\pm(H_2, H_1)$, $W_\pm(H_1, H_2)$ существуют и являются полными.*

Доказательство. Оператор $H_2$ самосопряжен и ограничен снизу в силу теоремы V.4.11. Поскольку $W_\pm(H_2 - \gamma, H_1 - \gamma) = W_\pm(H_2, H_1)$, то мы можем считать, что оба оператора

---

1) Если мы положим $\phi(\lambda) = 2\,\mathrm{arcctg}\,\lambda$, то оператор $e^{-i\phi(H_k)} = (H_k - i)(H_k + i)^{-1}$ представляет собой так называемое *преобразование Кэли* оператора $H_k$. Поскольку $\phi$ удовлетворяет условиям теоремы 4.7, то $\lim\limits_{n\to\infty} U_2^{-n}U_1^n P_1 = W_\pm(\phi(H_2), \phi(H_1)) = W_\pm(H_2, H_1)$. Этот предел является дискретным аналогом предела (3.3). Ср. с работой Бирмана и Крейна [1].

2) См. Бирман [8]. Идея рассматривать $H_1^{-1}$, $H_2^{-1}$ для доказательства унитарной эквивалентности операторов $H_1$, $H_2$ принадлежит Путнаму [2]. См. также Бирман и Крейн [1].

3) **См.** Курода [2], [3]. Имеется аналогичная теорема, в которой $H_1$, $H_2$ ассоциированы соответственно с ограниченными снизу симметричными формами $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$, такими, что $\mathfrak{h}_2 = \mathfrak{h}_1 + \mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ принадлежит «tr-классу относительно $\mathfrak{h}_1$». Мы не приводим точную формулировку теоремы, отсылая читателя к работам Куроды [2], [4]. См. также задачу 4.14.

$H_1$, $H_2$ имеют положительные нижние грани, и предположения теоремы выполнены при $\gamma = 0$. (Заметим, что если $V' (H_1 - \zeta)^{-1} \in \mathscr{B}_2 (\mathrm{H})$ при $\zeta = \gamma$, то это же верно и при любом $\zeta \in \mathrm{P} (H_1)$, так как $V' (H_1 - \zeta)^{-1} = V' (H_1 - \gamma)^{-1} (H_1 - \gamma) (H_1 - \zeta)^{-1}$, где $(H_1 - \gamma) (H_1 - \zeta)^{-1} \in \mathscr{B} (\mathrm{H})$.)

Таким образом, теорема следует из теоремы 4.8 при $\alpha = 1$, если мы покажем, что $H_1^{-1} - H_1^{-1} \in \mathscr{B} (\mathrm{H})$. Но $H_2^{-1} - H_1^{-1} = -H_2^{-1} V H_1^{-1} = - (V''^* H_2^{-1})^* (V' H_1^{-1})$ принадлежит $\mathscr{B}_1 (\mathrm{H})$, поскольку $V''^* H_2^{1}$ и $V' H_1^{-1}$ принадлежат $\mathscr{B}_2 (\mathrm{H})$, $V' H_2^{-1}$ — по предположению, а $V''^* H_2^{-1} = (V''^* H_1^{-1}) (H_1 H_2^{-1})$ — в силу предположения и того факта, что $H_1 H_2^{-1} \in \mathscr{B} (\mathrm{H})$.

**Пример 4.10** [1]. Рассмотрим опять операторы $H_1 = -\Delta$, $H_2 = -\Delta + q (x)$ в $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2 (\mathrm{R}^3)$, см. п. 3.4. Мы показали (теорема 3.9), что операторы $W_\pm (H_2, H_1)$ существуют при некоторых общих условиях на $q (x)$, но не делали никаких утверждений относительно их полноты.

Покажем теперь, что операторы $W_\pm (H_2, H_1)$ *являются полными, если* [2]

$$q \in \mathrm{L}^1 (\mathrm{R}^3) \cap \mathrm{L}^2 (\mathrm{R}^3). \tag{4.31}$$

Поскольку мы знаем, что при $q \in \mathrm{L}^2$ оператор $V = q (x)$ $H_1$-ограничен с $H_1$-гранью 0, то достаточно показать, что $| V |^{1/2} (H_1 + c^2)^{-1}$, $c > 0$, где $|V|^{1/2}$ — оператор умножения на $| q (x) |^{1/2}$, является оператором Гильберта — Шмидта. (Применена теорема 4.9 при $V = V'' V'$, $V' = | V |^{1/2}$, $V'' = U | V |^{1/2}$, где $U$ — (ограниченный) оператор умножения на $\operatorname{sign} q (x)$.) Оператор $(H_1 + c^2)^{-1}$ является интегральным оператором с ядром $e^{-c|y-x|}/4\pi | y - x |$ (см. (IX.1.67)). Следовательно, $| V |^{1/2} (H_1 + c^2)^{-1}$ есть интегральный оператор с ядром $| q (y) |^{1/2} e^{-c | y - x |}/4\pi | y - x |$. Это ядро является ядром типа Шмидта, так как

$$\iint\limits_{\mathrm{R}^3 \times \mathrm{R}^3} \frac{| q (y) | \, e^{-2c \, | y - x |}}{| y - x |^2} \, dx \, dy \leqslant \int\limits_{\mathrm{R}^3} | q (y) | \, dy \int\limits_{\mathrm{R}^3} \frac{e^{-2c \, | x |}}{| x |^2} \, dx < \infty,$$

если $q \in \mathrm{L}^1$. То же верно для $U | V |^{1/2} (H_1 + c^2)^{-1}$.

В частности, получаем, что оператор $H_{2,\mathrm{ac}}$ унитарно эквивалентен $H_1$ (оператор $H_1$ абсолютно непрерывен). Вообще говоря, $H_2$ имеет сингулярную часть $H_{2,\mathrm{s}}$, включающую в себя разрывную часть. Неизвестно, может ли $H_2$ иметь непрерывную сингулярную часть [3].

---

[1] В качестве других примеров применения приведенных теорем отметим: абсолютную непрерывность матриц Тёплица (Путнам [3], [5], Розенблюм [2]); инвариантность абсолютно непрерывного спектра дифференциальных операторов с частными производными относительно изменения границы и граничного условия (Бирман [6], [7]); некоторые задачи теории нейтронного рассеяния Сидзута [2]).

[2] Аналогичные результаты справедливы для одномерной задачи $H_1 = -d^2/dx^2$, $H_2 = -d^2/dx^2 + q (x)$ в $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2 (0, \infty)$ (с граничным условием $u (0) = 0$), если $q \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$. Более тонкое исследование (см. подстрочное примечание к теореме 4.9) показывает, что достаточно, чтобы функция $q$ принадлежала $\mathrm{L}^1$ (в этом случае $H_2$ следует определить так же, как в теореме VI.4.2).

[3] Известно, что при несколько иных предположениях относительно $q (x)$ оператор $H_2$ не имеет непрерывной сингулярной части. Это было доказано с помощью стационарного метода в работе Икэбэ [1], где $W_\pm$ строятся

### 5. Усиление теорем существования

Теперь мы ослабим предположение теорем 4.4 и 4.7 о том, что оператор $H_2 - H_1$ принадлежит tr-классу. Сначала будет доказана

**Лемма 4.11.** *Пусть* $R_k(\zeta) = (H_k - \zeta)^{-1}$ — *резольвента оператора* $H_k$, $k = 1, 2$. *Если* $R_2(\zeta) - R_1(\zeta) \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$ *при некотором невещественном* $\zeta$, *то это же верно для любого невещественного* $\zeta$.

Доказательство. Предположим, что $R_2(\zeta_0) - R_1(\zeta_0) \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$. Разлагая $R_k(\zeta)$ в ряд Неймана по формуле (I.5.6), получим

$$R_2(\zeta)-R_1(\zeta)=\sum_{n=1}^{\infty}(\zeta-\zeta_0)^n\,[R_2(\zeta_0)^{n+1}-R_1(\zeta_0)^{n+1}]$$

при $|\zeta-\zeta_0|<|\operatorname{Im}\zeta_0|$ (заметим, что $\| R_k(\zeta_0)\leqslant|\operatorname{Im}\zeta_0|^{-1}$). Но

$$\|R_2(\zeta_0)^{n+1}-R_1(\zeta_0)^{n+1}\|_1=\Big\|\sum_{k=0}^{n}R_2(\zeta_0)^{n-k}(R_2(\zeta_0)-R_1(\zeta_0))R_1(\zeta_0)^k\Big\|_1\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n}\|R_2(\zeta_0)\|^{n-k}\,\|R_2(\zeta_0)\|_1\,\|R_1(\zeta_0)\|^k\leqslant$$

$$\leqslant(n+1)\,|\operatorname{Im}\zeta_0|^{-n}\,\|R_2(\zeta_0)-R_1(\zeta_0)\|_1.$$

Следовательно (см. задачу 1.17),

$$\|R_2(\zeta)-R_1(\zeta)\|_1\leqslant\|R_2(\zeta_0)-R_1(\zeta_0)\|_1\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\,|\operatorname{Im}\zeta_0|^{-n}\,|\zeta-\zeta_0|^n=$$

$$=\|R_2(\zeta_0)-R_1(\zeta_0)\|_1\,(1-|\operatorname{Im}\zeta_0|^{-1}\,|\zeta-\zeta_0|)^{-2}.$$

Эта оценка показывает, что $R_2(\zeta) - R_1(\zeta) \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$ при всех $\zeta$, лежащих внутри окружности с центром $\zeta_0$, касающейся вещественной оси. Последовательное применение этого рассуждения показывает, что все невещественные $\zeta$ в полуплоскости, содержащей $\zeta_0$, обладают этим свойством. То же верно и для всех $\zeta$ из другой полуплоскости, поскольку $R_2(\zeta) - R_1(\zeta) = (R_2(\bar{\zeta}) - R_1(\bar{\zeta}))^*$.

---

явно как сингулярные интегральные операторы, ядра которых являются обобщенными собственными функциями (не из $\mathrm{L}^2$) оператора $H_2$. Об этих собственных функциях см. также Буслаев [1], Хунцикер [1], Икэбэ [2]. Аналогичные результаты, относящиеся к оператору $-\Delta$ в области, являющейся дополнением ограниченного множества в $\mathrm{R}^3$, см. в работах Сидзуты [1], Икэбэ [3]. По поводу формулы фазового сдвига см. Грин и Лэнфорд [1], Курода [6]. Имеются задачи рассеяния, связанные не с уравнением Шрёдингера, а с волновым уравнением (даже нелинейным): см. Браудер и Штраус [1], Лакс и Филлипс [1], Нижник [1], Штраус [1], [2].

**Теорема 4.12** [1]. *Пусть* $R_2(\zeta) - R_1(\zeta) \in \mathscr{B}_1(\mathbf{H})$ *при некотором невещественном* $\zeta$. *Если функция* $\phi$ *обладает свойствами, сформулированными в лемме* 4.6, *то операторы* $W_\pm(\phi(H_2), \phi(H_1))$ *существуют, полны и не зависят от* $\phi$. *В частности, операторы* $W_\pm(H_2, H_1)$ *существуют и полны, и абсолютно непрерывные части операторов* $H_1$ *и* $H_2$ *унитарно эквивалентны.*

Доказательство. I. Пусть $r > 0$; положим

$$\psi_r(\lambda) = \lambda/(1 + r^{-2}\lambda^2), \quad -\infty < \lambda < \infty, \tag{4.32}$$

$$\varphi_r(\mu) = 2\mu/[1 + (1 - 4r^{-2}\mu^2)^{1/2}], \quad -r/2 \leqslant \mu \leqslant r/2. \tag{4.33}$$

Функция $\varphi_r(\mu)$ является обратной к сужению функции $\psi_r(\lambda)$ на отрезок $-r \leqslant \lambda \leqslant r$ (на котором функция $\psi_r$ обратима). Для удобства продолжим $\varphi_r(\mu)$ на все вещественные $\mu$, положив $\varphi_r(\mu) = 2\mu$ при $|\mu| > r/2$, так что $\varphi_r$ удовлетворяет условиям леммы 4.6.

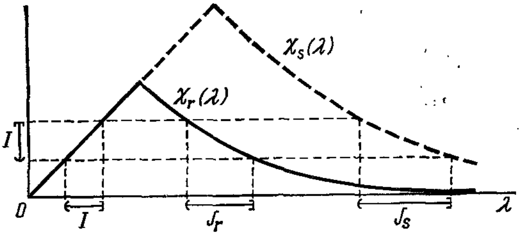

Рис. 3. Функции $\chi_r(\lambda)$, $\chi_s(\lambda)$ и интервалы I, $\mathrm{J}_r$, $\mathrm{J}_s$.

Обозначим $\chi_r(\lambda) = \varphi_r(\psi_r(\lambda))$; функция $\chi_r$ непрерывна, нечетна и

$$\chi_r(\lambda) = \lambda \quad \text{при} \quad -r \leqslant \lambda \leqslant r. \tag{4.34}$$

Функция $\chi_r(\lambda)$ монотонно убывает до 0 при $\lambda \to \infty$ (см. рис. 3). Положим теперь

$$H_{k,r} = \psi_r(H_k), \quad K_{k,r} = \chi_r(H_k), \quad k = 1, 2. \tag{4.35}$$

Согласно правилам операционного исчисления для самосопряженных операторов [2] имеем

$$K_{k,r} = \varphi_r(\psi_r(H_k)) = \varphi_r(H_{k,r}), \quad k = 1, 2. \tag{4.36}$$

В силу (4.34), однако, $K_{k,r}$ и $H_k$ совпадают на подпространстве $\mathbf{H}_{k,r} \equiv (E_k(r) - E_k(-r))\,\mathbf{H}$, которое приводит $H_k$ и $K_{k,r}$. Сле-

---

[1] См. Бирман [9], [10], Т. Като [17].

[2] См. Стоун [[1]], гл. 6.

довательно,

$$e^{-it\phi(K_{k,r})}u = e^{-it\phi(H_k)}u \quad \text{при} \quad u \in \mathrm{H}_{k,r}. \tag{4.37}$$

II. Поскольку $H_{k,r} = H_k(1 + r^{-2}H_k^2)^{-1} = (r^2/2)[(H_k + ir)^{-1} + (H_k - ir)^{-1}]$, то из леммы 4.11 следует, что $H_{2,r} - H_{1,r} \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$. Поэтому операторы

$$\begin{aligned} W_\pm(\phi(\varphi_r(H_{2,r})), \phi(\varphi_r(H_{1,r}))) &= W_\pm(\varphi_r(H_{2,r}), \varphi_r(H_{1,r})) = \\ &= W_\pm(H_{2,r}, H_{1,r}) \equiv W_{\pm,r} \end{aligned} \tag{4.38}$$

существуют в силу теоремы 4.7, так как для любой функции $\phi$, удовлетворяющей условиям леммы 4.6, сложная функция $\phi(\varphi_r(\lambda))$ также удовлетворяет тем же условиям. В силу (4.36) это означает, что

$$\operatorname*{s-lim}_{t\to+\infty} e^{it\phi(K_{2,r})} e^{-it\phi(K_{1,r})} P_1 = W_{+,r};$$

здесь $P_1$ является проектором на $\mathrm{H}_{1,\mathrm{ac}}$, но подпространство абсолютной непрерывности для $\phi(K_{1,r})$ совпадает с $\mathrm{H}_{1,\mathrm{ac}}$ (это доказывается так же, как и теорема 4.7). Поэтому, используя (4.37) при $k = 1$, получаем

$$e^{-it\phi(K_{2,r})} e^{-it\phi(H_1)} P_1 u \to W_{+,r}u \quad \text{при} \quad u \in \mathrm{H}_{1,r}. \tag{4.39}$$

III. Пусть $\mathrm{I} = (a, b]$, где $0 < a < b < r$. Прообраз интервала $\mathrm{I}$ при отображении $\chi_r$ является объединением самого интервала $\mathrm{I}$ и другого конечного интервала $\mathrm{J}_r$, лежащего справа от $r$ (см. рис. 3). Если мы обозначим через $F_{k,r}$ спектральную меру оператора $K_{k,r} = \chi_r(H_k)$, $k = 1, 2$, то (см. (4.30))

$$F_{k,r}(\mathrm{I}) = E_k(\chi_r^{-1}(\mathrm{I})) = E_k(\mathrm{I}) + E_k(\mathrm{J}_r) \geqslant E_k(\mathrm{I}). \tag{4.40}$$

Пусть $u \in E_1(\mathrm{I})\,\mathrm{H}$. Тогда $u \in \mathrm{H}_{1,r}$ и формула (4.39) выполняется. Поскольку $W_{+,r} = W_+(K_{2,r}, K_{1,r})$ в силу (4.38) и $u \in F_{1,r}(\mathrm{I})\,\mathrm{H}$ в силу (4.40), то

$$v = W_{+,r}u \in F_{2,r}(\mathrm{I})\,\mathrm{H} \tag{4.41}$$

в силу формулы (3.12) при $H_2 = K_{2,r}$, $H_1 = K_{1,r}$.

Далее, все эти результаты справедливы, если заменить $r$ на большее число $s$. Если, однако, $s > r$ достаточно велико, то $\mathrm{J}_s$ лежит справа от $\mathrm{J}_r$ и не пересекается с $\mathrm{J}_r$ (см. рис. 3). Таким образом,

$$\begin{aligned} v = F_{2,r}(\mathrm{I})\,v = F_{2,s}(\mathrm{I})\,v = F_{2,r}(\mathrm{I})\,F_{2,s}(\mathrm{I})\,v = \\ = (E_2(\mathrm{I}) + E_2(\mathrm{J}_r))(E_2(\mathrm{I}) + E_2(\mathrm{J}_s))\,v = E_2(\mathrm{I})\,v. \end{aligned}$$

Следовательно, правая часть в (4.39) не изменяется при умножении на $E_2(\mathrm{I})$ слева. Поскольку $E_2(\mathrm{I})\,e^{it\phi(K_{2,r})} = E_2(\mathrm{I})\,e^{it\phi(H_2)}$

в силу (4.37), то получаем

$$E_2(\mathrm{I})\, e^{it\phi(H_2)}e^{-it\phi(H_1)}P_1u \to W_{+,r}u, \quad t\to+\infty. \tag{4.42}$$

Сомножитель $E_2(\mathrm{I})$ в этой формуле может быть опущен. Действительно, обозначая $W_\phi(t) = e^{it\phi(H_2)}e^{-it\phi(H_1)}$, имеем

$$\|E_2(\mathrm{I})\,W_\phi(t)\,P_1u\|^2 + \|(1-E_2(\mathrm{I}))\,W_\phi(t)\,P_1u\|^2 =$$
$$= \|W_\phi(t)\,P_1u\|^2 = \|P_1u\|^2 = \|W_{+,r}u\|^2,$$

так что $(1-E_2(\mathrm{I}))\,W_\phi(t)\,P_1u\to 0$ в силу (4.42).

IV. Мы доказали, что

$$W_\phi(t)\,P_1u \to W_{+,r}u, \quad t\to+\infty, \tag{4.43}$$

при условии, что $u\in E_1(\mathrm{I})\,\mathbf{H}$, где $\mathrm{I}=(a,\ b]$ и $0<a<b<r$. Этот результат справедлив, если $\mathrm{I}$ заменить на $(-b,\ -a]$. Допустимые $u$ и их линейные комбинации плотны в $\mathbf{H}_{1,r}=(E_1(r)-E_1(-r))\,\mathbf{H}$ всюду, за исключением собственных подпространств оператора $H_1$, соответствующих собственным значениям 0 и $r$, если таковые имеются. Но эти собственные подпространства не важны, так как они аннулируются оператором $P_1$.

Поскольку операторы, образующие семейство $\{W_\phi(t)\}$, унитарны и равномерно ограничены, то формула (4.43), таким образом, справедлива для всех $u\in\mathbf{H}_{1,r}$.

Поскольку s-lim $W_\phi(t)\,P_1u$ существует для всех $u\in\mathbf{H}_{1,r}$ и поскольку объединение всех $\mathbf{H}_{1,r}$ при $r>0$ плотно в $\mathbf{H}$, то получаем окончательно, что s-lim $W_\phi(t)\,P_1 = W_+(\phi(H_2),\ \phi(H_1))$ существует. Этот предел не зависит от $\phi$, как ясно из (4.43). Очевидно, что то же верно для $W_-$. Поскольку предположения теоремы симметричны относительно операторов $H_1$ и $H_2$, то это же верно, если операторы $H_1$, $H_2$ поменять местами, так что эти волновые операторы полны.

**Замечание 4.13.** Предположение $R_2(\zeta)-R_1(\zeta)\in\mathscr{B}_1(\mathbf{H})$ теоремы 4.12 не является существенным. Основной момент состоит в том, что при $r>0$ существует функция $\psi_r(\lambda)$, обладающая следующими свойствами:

1) $\psi_r(\lambda)$ кусочно монотонна, так же как и $\psi(\lambda)$, но может возрастать на одних подинтервалах и убывать на других;

2) $\psi_r(\lambda)$ обратима при $-r<\lambda<r$;

3) $\psi_r(H_2)=\psi_r(H_1)+A_r$, где $A_r\in\mathscr{B}_1(\mathbf{H})$.

Доказательство теоремы 4.12 с небольшими модификациями проходит и в этом общем случае[1]).

Согласно этому обобщению, результаты теоремы 4.12 верны, если $R_2(\zeta)^m-R_1(\zeta)^m\in\mathscr{B}_1(\mathbf{H})$ при любых чисто мнимых $\zeta$

---

[1]) Это дает весьма общее достаточное условие существования и полноты обобщенных волновых операторов. Имеются и некоторые другие условия; см. Бирман [11], Бирман и Энтина [1], Станкевич [1].

(или по крайней мере для последовательности $\zeta_n = \pm i r_n$ при $r_n \to \infty$). В этом случае мы должны только положить $\psi_r(\lambda) = i[(r + i\lambda)^{-m} - (r - i\lambda)^{-m}]$, где $r = r_n$. Функция $\psi_r(\lambda)$ обратима в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$, размеры которой пропорциональны $r$.

Задача 4.14. В теореме 4.9 *отбросим* предположение о том, что оператор $H_1$ ограничен снизу и $\gamma$ вещественно. Тогда верны все утверждения теоремы, за исключением того, что оператор $H_2$ ограничен снизу.

### 6. Зависимость операторов $W_\pm(H_2, H_1)$ от $H_1$ и $H_2$

**Теорема 4.15.** *Пусть $H_1$, $H_2$ — такие самосопряженные операторы, что существует $W_+(H_2, H_1)$. Тогда $W_+(H_2 + A, H_1)$ и $W_+(H_2, H_1 + A)$ существуют при любом $A \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$ и*

$$W_+(H_2 + A, H_1) \xrightarrow[\mathrm{s}]{} W_+(H_2, H_1),$$

$$W_+(H_2, H_1 + A) \xrightarrow[\mathrm{w}]{} W_+(H_2, H_1) \qquad (4.44)$$

*при $\| A \|_1 \to 0$. Справедливы аналогичные результаты, если заменить $W_+$ на $W_-$.*

Доказательство. Согласно теореме 4.4, существует оператор $W_+(H_2 + A, H_2)$; поэтому $W_+(H_2 + A, H_1)$ существует и равен $W_+(H_2 + A, H_2)\, W_+(H_2, H_1)$ в силу теоремы 3.4. Аналогично, существует оператор $W_+(H_2, H_1 + A) = W_+(H_2, H_1)\, W_+(H_1, H_1 + A)$. Таким образом, достаточно доказать формулы (4.44) в частном случае $H_2 = H_1$.

Полагая $t = 0$ в (4.23), видим, что $\| W_+(H_1 + A, H_1)\, u - u \| \leqslant ||| u ||| \, (4\pi \| A \|_1)^{1/2} \to 0$ при $\| A \|_1 \to 0$. Так как множество всех $u$, $||| u ||| < \infty$, плотно в $P_1\mathrm{H}$, то $W_+(H_1 + A, H_1) = W_+(H_1 + A, H_1)\, P_1 \xrightarrow[\mathrm{s}]{} P_1 = W_+(H_1, H_1)$ при $\| A \|_1 \to 0$. Так как $W_+(H_1, H_1 + A) = W_+(H_1 + A, H_1)^*$ в силу теоремы 3.5, то $W_+(H_1, H_1 + A) \xrightarrow[\mathrm{w}]{} P_1^* = P_1 = W_+(H_1, H_1)$.

**Следствие 4.16.** *Если $W_+(H_2, H_1)$ существует, то оператор $W_+(H_2 + B, H_1 + A)$ существует и слабо сходится к $W_+(H_2, H_1)$ при $\| A \|_1 \to 0$, $\| B \|_1 \to 0$.*

**Замечание 4.17.** Полученные выше результаты относительно непрерывности операторов $W_\pm(H_2, H_1)$ как функций от $H_1$, $H_2$ являются весьма слабыми, поскольку $H_1$, $H_2$ рассматривались в очень сильной топологии. Более сильные результаты получаются при использовании теоремы 4.12 вместо теоремы 4.4. Так, например, $W_+(H_2 + A, H_1) \xrightarrow[\mathrm{s}]{} W_+(H_2, H_1)$, если $A$ сходится к нулю в том смысле, что $\| (H_2 + A - \zeta)^{-1} - (H_2 - \zeta)^{-1} \|_1 \to 0$ при некотором невещественном $\zeta$; здесь оператор $A$ не обязан быть даже ограниченным [1]).

**Задача 4.18.** В примере 4.10 исследовать непрерывность операторов $W_\pm (H_2, H_1)$ при изменении функции $q(x)$.

## § 5 Стационарный метод

### 1. Введение

Имеются и другие способы построения обобщенных волновых операторов $W_\pm (H_2, H_1)$. В противоположность нестационарному методу, развитому в предыдущих параграфах, эти схемы не используют явно «временную переменную» $t$ и поэтому известны как *стационарные методы* [2]). В этом параграфе мы дадим описание одного из таких методов, который, по-видимому, наиболее эффективно дополняет нестационарную теорию.

В рамках этого метода операторы $W_\pm$ строятся как решения некоторых операторных уравнений. Чтобы вывести эти уравнения, удобно начать с нестационарных формул (поскольку мы определили $W_\pm$ в нестационарной схеме). Для простоты предположим, что $H_2 = H_1 + A$, где $A \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$. Тогда справедлива формула (3.21), из которой следует тождество

$$W(t'') - W(t') = i \int\limits_{t'}^{t''} e^{itH_2} A e^{-itH}\, dt \tag{5.1}$$

(см. доказательство леммы 3.8). Аналогично, меняя местами $H_1$ и $H_2$, получим

$$W(t'')^{-1} - W(t')^{-1} = -i \int\limits_{t'}^{t''} e^{itH_1} A e^{-itH_2}\, dt. \tag{5.2}$$

Предположим теперь, что существует $W_+ = \operatorname*{s-lim}_{t \to \infty} W(t) P_1$. Тогда $W(t)^{-1} W_+ \xrightarrow[s]{} P_1$ при $t \to \infty$. Таким образом, форму-

---

[1]) С помощью использованного выше метода трудно доказать еще более сильную непрерывность операторов $W_\pm (H_2, H_1)$. Но существует другая топология для $H_1$, $H_2$, для которой получается более сильная непрерывность $W_\pm (H_2, H_1)$, например непрерывность по норме. Один частный случай будет рассмотрен в следующем параграфе. Разрывность операторов $W_\pm$ по норме изучалась Путнамом [7].

[2]) О стационарных методах см. Бирман и Энтина [1], де Бранж [1], Т. Като [10], Курода [7], [8], а также работы, связанные с уравнением Фридрихса (см. примечание на 2 стр. 683).

да (5.2), умноженная справа на $-W_+$, дает при $t'=0$ и $t''\to\infty$

$$W_+-P_1=i\int_0^\infty e^{itH_1}AW_+e^{-itH_1}\,dt; \tag{5.3}$$

здесь мы использовали также равенство $e^{-itH_2}W_+=W_+e^{-itH_2}$ (см. (3.7)). Интеграл в правой части формулы (5.3) существует как сильный предел при $t''\to\infty$ интеграла $\int_0^{t''}$.

В этом месте удобно ввести обозначения

$$\Gamma_1^\pm T=\Gamma_{H_1}^\pm T=i\int_0^{\pm\infty} e^{itH_1}Te^{-itH_1}\,dt, \tag{5.4}$$

в случае, когда один или оба интеграла в правой части существуют как сильные пределы [1]) при $t''\to\pm\infty$ интеграла $\int_0^{t''}$. Тогда (5.3) принимает вид

$$W_+=P_1+\Gamma_1^+(AW_+). \qquad (5.5)_+$$

Аналогично, если существует оператор $W_-=W_-(H_2, H_1)$, то он должен удовлетворять уравнению

$$W_-=P_1+\Gamma_1^-(AW_-). \qquad (5.5)_-$$

Забудем теперь все предположения о существовании операторов $W_\pm(H_2, H_1)$. Вместо этого начнем с «интегральных уравнений» $(5.5)_\pm$ и попытаемся построить $W_\pm$ как их решения. Эти уравнения «стационарны», так как время $t$ не участвует в них явно.

Операции $\Gamma_1^\pm$ и уравнения $(5.5)_\pm$ были введены Фридрихсом, хотя его первоначальное определение формально отличается от приведенного нами [2]). Следует отметить, что они являются линейными операторами в пространстве $\mathscr{B}$ (H) ограниченных линейных операторов в H; они определены не всюду в $\mathscr{B}$ (H), ибо интегралы (5.4) не обязаны существовать при всех $T\in\mathscr{B}$ (H).

---

[1]) Иногда удобно определение $\Gamma_1^\pm$, использующее *слабую* сходимость вместо сильной. Однако это определение мы не будем рассматривать.

[2]) Фридрихс определил $\Gamma_1^\pm$ для интегральных операторов $T$ специального вида; см. Фридрихс [2], [3], [7]. Уравнения $(5.5)_\pm$ называются *уравнениями Фридрихса*. Об этих уравнениях см. также Фаддеев [3], Ладыженская и Фаддеев [1], Рейто [1], [2], Шварц [2] — [4]. Дискретный аналог уравнения Фридрихса был рассмотрен недавно Фримэном [1], который определяет Γ с помощью некоторой дискретной полугруппы вместо группы $e^{-itH}$.

В следующих пунктах мы изучим основные свойства $\Gamma_1^\pm$ и, используя полученные результаты, докажем, что решения уравнений $(5.5)_\pm$ действительно являются обобщенными волновыми операторами $W_\pm(H_2, H_1)$. После этого мы приступим к решению уравнений $(5.5)_\pm$.

## 2. Г-операции

Операции $\Gamma_1^\pm = \Gamma_{H_1}^\pm$, определяемые формулой (5.4), зависят от самосопряженного оператора $H_1$. В этом пункте мы будем писать $H$ вместо $H_1$ и $\Gamma^\pm$ вместо $\Gamma_1^\pm$; $H$ может быть любым самосопряженным оператором. Области определения и образы операторов $\Gamma^\pm$ обозначаются через $\mathscr{D}(\Gamma^\pm)$, $\mathscr{R}(\Gamma^\pm)$ соответственно; они являются линейными подпространствами в $\mathscr{B}(\mathbf{H})$.

**Лемма 5.1** [1]. *Пусть* $B \in \mathscr{B}(\mathbf{H})$ *коммутирует с* $H$. *Тогда если* $T \in \mathscr{D}(\Gamma^+)$, *то* $BT$ *и* $TB$ *также принадлежат* $\mathscr{D}(\Gamma^+)$ *и* $\Gamma^+(BT) = B(\Gamma^+T)$, $\Gamma^+(TB) = (\Gamma^+T)B$. *Аналогичное утверждение справедливо для* $\Gamma^-$.

Доказательство. Это очевидно, поскольку $B$ коммутирует с $e^{\pm itH}$.

**Лемма 5.2.** *Пусть* $T \in \mathscr{D}(\Gamma^+)$ *и* $S = \Gamma^+ T$. *Тогда* $S\mathrm{D}(H) \subset \mathrm{D}(H)$, $Tu = SHu - HSu$ *при любом* $u \in \mathrm{D}(H)$ *и* $Se^{-itH} \underset{s}{\longrightarrow} 0$ *при* $t \to +\infty$. *Аналогичное утверждение с заменой* $+\infty$ *на* $-\infty$ *справедливо для* $\Gamma^-$.

Доказательство. Имеем

$$e^{itH}Se^{-itH} = i\int_t^{+\infty} e^{isH}Te^{-isH}\,ds \tag{5.6}$$

(сходимость сильная); это ясно, если умножить (5.4) на $e^{itH}$ слева и на $e^{-itH}$ справа. Обозначая через $S(t)$ правую часть формулы (5.6), получаем $e^{itH}S = S(t)e^{itH}$. Поскольку $dS(t)/dt = -ie^{itH}Te^{-itH}$ (в смысле сильной сходимости), то

$$\frac{d}{dt}e^{itH}Su = \frac{d}{dt}S(t)e^{itH}u = -ie^{itH}Tu + iS(t)e^{itH}Hu$$

при $u \in \mathrm{D}(H)$. Таким образом, функция $e^{itH}S$ сильно дифференцируема по $t$, откуда следует, что $Su \in \mathrm{D}(H)$ (см. замечание IX.1.5), так что $(d/dt)e^{itH}Su = ie^{itH}HSu$. Полагая $t = 0$, получаем, таким образом, $HSu = -Tu + SHu$, что доказывает первую часть леммы.

---

[1] Свойства операторов $\Gamma^\pm$, сформулированные в следующих леммах, доказаны Фридрихсом [2], [3]. Нам приходится доказывать их по-другому, поскольку мы применяем формально иное определение $\Gamma^\pm$.

Последняя часть следует из равенства (5.6), из которого вытекает, что $e^{itH}Se^{-itH}\xrightarrow[s]{}0$ при $t\to+\infty$; умножение слева на унитарный оператор $e^{-itH}$ дает $Se^{-itH}\xrightarrow[s]{}0$.

**Лемма 5.3.** *Для того чтобы оператор $S\in\mathscr{B}$ (H) принадлежал $\mathscr{R}(\Gamma^+)$, необходимо и достаточно, чтобы $S\mathbf{D}(H)\subset\mathbf{D}(H)$, оператор $SH-HS$ (определенный на $\mathbf{D}(H)$) был ограничен и $Se^{-itH}\xrightarrow[s]{}0$ при $t\to+\infty$. В этом случае $S=\Gamma^+T$, где $T$ является замыканием оператора $SH-HS$. Аналогичное утверждение, с заменой $+\infty$ на $-\infty$, справедливо для $\Gamma^-$.*

Доказательство. Необходимость была доказана в лемме 5.2. Для доказательства достаточности заметим, что

$$\frac{d}{ds}e^{isH}Se^{-isH}u=ie^{isH}(HS-SH)e^{-isH}u,\qquad(5.7)$$

если $u\in\mathbf{D}(H)$, ибо в этом случае $e^{-isH}u\in\mathbf{D}(H)$, а значит, $Se^{-isH}u\in\mathbf{D}(H)$ по предположению. Поскольку оператор $HS-SH$ можно заменить его замыканием, то, интегрируя (5.7) по $s$ от 0 до $t$, получим

$$(e^{itH}Se^{-itH}-S)u=-\left(i\int\limits_0^t e^{isH}Te^{-isH}\,ds\right)u.\qquad(5.8)$$

Здесь ограничение $u\in\mathbf{D}(H)$ можно отбросить, поскольку входящие в (5.8) операторы ограничены и множество $\mathbf{D}(H)$ плотно в H. Переходя к пределу при $t\to+\infty$ и используя предположение $Se^{-itH}\xrightarrow[s]{}0$, мы видим, что правая часть в (5.8) имеет предел $-Su$. Это означает, что оператор $\Gamma^+T$ существует и равен $S$.

**Лемма 5.4.** *Пусть $T', T''\in\mathscr{D}(\Gamma^+)$. Тогда $(\Gamma^+T')T''+T'(\Gamma^+T'')$ принадлежит $\mathscr{D}(\Gamma^+)$ и*

$$\Gamma^+[(\Gamma^+T')T''+T'(\Gamma^+T'')]=(\Gamma^+T')(\Gamma^+T'').\qquad(5.9)$$

*Аналогичное утверждение справедливо для $\Gamma^-$.*

Доказательство[1]. Обозначим $\Gamma^+T'=S'$, $\Gamma^+T''=S''$. Мы утверждаем, что $S'S''\in\mathscr{R}(\Gamma^+)$. Поскольку согласно лемме 5.2 каждый из операторов $S'$, $S''$ отображает $\mathbf{D}(H)$ в себя, то этим же свойством обладает $S'S''$. Если $u\in\mathbf{D}(H)$, то

$$S'S''Hu-HS'S''u=S'(S''Hu-HS''u)+(S'H-HS')S''u=$$
$$=S'T''u+T'S''u\qquad(5.10)$$

---

[1] Аналогично мы можем вывести равенство $\Gamma^\pm[T'(\Gamma^-T'')+(\Gamma^+T')T'']=(\Gamma^+T')(\Gamma^-T'')$ в предположении, что $T', T''\in\mathscr{D}(\Gamma^+)\cap\mathscr{D}(\Gamma^-)$, и много других формул подобного рода.

в силу леммы 5.2. Таким образом, $S'S''H - HS'S''$ имеет ограниченное расширение

$$T = S'T'' + T'S'' \in \mathscr{B}(\mathrm{H}). \tag{5.11}$$

Наконец,

$$S'S''e^{-itH} = S'(S''e^{-itH}) \xrightarrow[s]{} 0 \text{ при } t \to +\infty \tag{5.12}$$

в силу леммы 5.2. Из леммы 5.3 следует, что $T \in \mathscr{D}(\Gamma^+)$ и $\Gamma^+T = S'S''$, что в точности совпадает с (5.9).

**Замечание 5.5.** Лемма 5.3 показывает, что оператор $\Gamma^+$ в некотором смысле является обратным к *оператору коммутирования* $S \to [S, H] = SH - HS$. Соотношение (5.9) является обратным к соотношению

$$[S'S'', H] = S'[S'', H] + [S', H]S''. \tag{5.13}$$

**Лемма 5.6.** *Если $T$ и $T^*$ принадлежат $\mathscr{D}(\Gamma^+)$, то $(\Gamma^+T)^* = -\Gamma^+(T^*)$. Аналогичное утверждение справедливо для $\Gamma^-$.*

Доказательство. Это сразу вытекает из определения (5.4). Заметим, однако, что из $T \in \mathscr{D}(\Gamma^+)$ не следует $T^* \in \mathscr{D}(\Gamma^+)$.

**Замечание 5.7.** Мы рассмотрели выше операции $\Gamma^+T$ только для $T \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$. Это ограничение не является ни необходимым, ни естественным, и мы можем до некоторой степени его ослабить. Обозначим

$$(\Gamma_s^+T)u = \int_0^s e^{itH}Te^{-itH}u\,dt. \tag{5.14}$$

Эта формула имеет смысл при $u \in \mathscr{D}(\mathrm{H})$ по крайней мере тогда, когда оператор $T$ $H$-ограничен. Если $(\Gamma_s^+T)u$ имеет предел $v$ при $s \to +\infty$, то мы можем писать $v = S'u$. Если оператор $S'$ ограничен, то его замыкание определяет оператор $S \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, который мы и возьмем по определению в качестве $\Gamma^+T$. Большинство сформулированных выше результатов справедливо для этого обобщенного определения $\Gamma^+$, но мы не будем на этом останавливаться.

## 3. Эквивалентность стационарной и нестационарной теорий

Теперь может быть доказана

**Теорема 5.8.** *Пусть $H_1$ и $A$ — самосопряженные операторы, и пусть $A \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$. Предположим, что существует оператор $W_+ \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, удовлетворяющий уравнению $(5.5)_+$. Тогда обобщен-*

*ный волновой оператор* $W_+(H_2, H_1)$, *где* $H_2 = H_1 + A$, *существует и совпадает с* $W_+$. *Аналогичное утверждение справедливо для уравнения* $(5.5)_-$.

Доказательство. Так как $W_+ - P_1 = \Gamma_1^+(AW_+)$, то в силу леммы 5.2 $(W_+ - P_1)H_1u - H_1(W_+ - P_1)u = AW_+u$ при $u \in \mathbf{D}(H_1)$. Поскольку $P_1H_1u = H_1P_1u$, отсюда следует, что $H_2W_+u = W_+H_1u$, или

$$H_2W_+ \supset W_+H_1. \tag{5.15}$$

Из (5.15) в свою очередь вытекает, что $(H_2 - \zeta)^{-1}W_+ = W_+(H_1 - \zeta)^{-1}$ при любом невещественном $\zeta$, а значит (вспомним конструкцию операторов $e^{itH_k}$ из п. IX.1.2),

$$e^{itH_2}W_+ = W_+e^{itH_1}, \quad -\infty < t < +\infty. \tag{5.16}$$

Из леммы 5.2 следует также, что $(W_+ - P_1)e^{-itH_1} \xrightarrow[s]{} 0$ при $t \to +\infty$. В силу (5.16) отсюда вытекает, что $e^{-itH_2}W_+ - e^{-itH_1}P_1 \to 0$. Умножая слева на $e^{itH_2}$, получаем $W_+ - e^{itH_2}e^{-itH_1}P_1 \xrightarrow[s]{} 0$. Это показывает, что $W_+(H_2, H_1)$ существует и совпадает с $W_+$.

**Замечание 5.9.** Уравнения $(5.5)_\pm$ имеют смысл и могут иметь решения, даже если оператор $A$ несимметричен. Приведенное доказательство проходит в этом общем случае всюду, за исключением последней части, в которой использовано умножение на $e^{itH_2}$; заметим, что оператор $iH_2 = i(H_1 + A)$ порождает квазиограниченную группу (см. теорему IX.2.1), однако эта группа может не быть ограниченной. В частности, отметим, что формулы (5.15), (5.16) справедливы для несимметричного оператора $A$.

### 4. Применение Г-операций к вырожденным операторам

В этом пункте мы рассмотрим самосопряженный оператор $H$ со спектральным семейством $\{E(\lambda)\}$ и операторы $\Gamma^\pm = \Gamma_H^\pm$. Сначала зададимся вопросом, при каких условиях оператор

$$T = (\ , g)f \tag{5.17}$$

ранга 1, где $f$ и $g$ предполагаются абсолютно непрерывными относительно $H$, принадлежит $\mathscr{D}(\Gamma^\pm)$.

Для любого $u \in \mathbf{H}$ имеем (обозначение $\Gamma_a^+$ введено в (5.14))

$$(\Gamma_a^+T)u = i(2\pi)^{1/2}\int_0^a \phi_{u,g}(t)\, e^{itH}f\,dt, \tag{5.18}$$

где

$$\phi_{u,g}(t) = (2\pi)^{-1/2}(e^{-itH}u, g) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\rho_{u,g}(\lambda)\,d\lambda, \tag{5.19}$$

$$\rho_{u,g}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(E(\lambda)u, g) \in \mathbf{L}^1(-\infty, \infty); \tag{5.20}$$

заметим, что функция $(E(\lambda)u, g)$ абсолютно непрерывна, если вектор $g$ абсолютно непрерывен (см. теорему 1.7).

Используя спектральную формулу $e^{itH} = \int e^{it\lambda}\,dE(\lambda)$, получаем из (5.18)

$$(\Gamma_a^+ T)u = i(2\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^a \phi_{u,g}(t)\,e^{it\lambda}\,dt\right)dE(\lambda)f = i\sigma^+_{a,u,g}(H)f, \tag{5.21}$$

где

$$\sigma^+_{a,u,g}(\lambda) = (2\pi)^{1/2}\int_0^a \phi_{u,g}(t)\,e^{it\lambda}\,dt. \tag{5.22}$$

Функцию $(2\pi)^{-1}\sigma^+_{a,u,g}$ можно рассматривать как обратное преобразование Фурье функции $\chi_a^+(t)\,\phi_{u,g}(t)$, где $\chi_a^+(t)$ — характеристическая функция интервала $(0, a)$.

Предположим теперь, что (через $\rho_g$ мы обозначаем $\rho_{g,g}$)

$$|||g|||^2 = \|\rho_g\|_\infty = \sup d(E(\lambda)g, g)/d\lambda < \infty \text{ 1)}). \tag{5.23}$$

Тогда $\phi_{u,g} \in \mathbf{L}^2(-\infty, \infty)$, причем $\|\phi_{u,g}\| \leqslant |||g|||\,\|u\|$ (см. лемму 4.5). Таким образом, $\chi_a^+\phi_{u,g} \to \chi^+\phi_{a,g}$ в $\mathbf{L}^2$ при $a \to \infty$, где $\chi^+$ — характеристическая функция интервала $(0, \infty)$. Производя преобразование Фурье, мы видим, что $\sigma^+_{a,u,g} \to \sigma^+_{u,g}$ в $\mathbf{L}^2$, где $\sigma^+_{u,g}/2\pi$ — обратное преобразование Фурье функции $\chi^+\phi_{u,g}$:

$$\sigma^+_{u,g}(\lambda) = (2\pi)^{1/2}\,\mathrm{l.i.m.}\int_0^\infty \phi_{u,g}(t)\,e^{it\lambda}\,dt, \tag{5.24}$$

так что

$$\|\sigma^+_{u,g}\| \leqq 2\pi\,\|\phi_{u,g}\| \leqq 2\pi\,\|u\|\,|||g|||. \tag{5.25}$$

Далее, из (5.21) следует, что $(\Gamma_a^+ T)\,u$ стремится при $a \to \infty$ к

$$(\Gamma^+ T)\,u = i\sigma^+_{u,g}(H)\,f \tag{5.26}$$

при условии, что $|||f||| < \infty$. Действительно, $\|\sigma^+_{a,u,g}(H)f - \sigma^+_{u,g}(H)f\|^2 = \int |\sigma^+_{a,u,g}(\lambda) - \sigma^+_{u,g}(\lambda)|^2\,(d/d\lambda)\,(E(\lambda)f, f)\,d\lambda \leqslant$

---

1) Здесь и в дальнейшем мы пишем просто sup там, где должны были бы писать ess sup.

$\leqslant \| \sigma^+_{a,u,g} - \sigma^+_{u,g} \|^2 \, ||| f ||| \to 0$. Это показывает, что $\Gamma^+ T$ существует, и оправдывает обозначение $(\Gamma^+ T)u$, использованное в (5.26). В то же время имеем

$$\| (\Gamma^+ T)\, u \| \leqslant \| \sigma^+_{u,g} \| \, ||| f ||| \leqslant 2\pi \, \| u \| \, ||| f ||| \, ||| g |||.$$

Следовательно,

$$\| \Gamma^+ T \| \leqslant 2\pi \, ||| f ||| \, ||| g |||. \tag{5.27}$$

Как мы видели выше, фурье-образ функции $\sigma^+_{u,g}/2\pi$ совпадает с фурье-образом функции $\rho_{u,g}$, умноженным на $\chi^+$. Обозначим

$$\sigma^+_{u,g} = 2\pi G^+ \rho_{u,g}; \tag{5.28}$$

оператор $G^+$ является ортогональным проектором в $\mathbf{L}^2$, будучи преобразованием Фурье оператора умножения на $\chi^+(t)$. С оператором $G^+$ связано так называемое *преобразование Гильберта*.

Удобное выражение для $G^+$ дается формулой

$$G^+ = \underset{\varepsilon \searrow 0}{\text{s-lim}}\, G^+_\varepsilon, \quad G^+_\varepsilon \rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\lambda)}{\mu - \lambda - i\varepsilon}\, d\mu. \tag{5.29}$$

Для ее доказательства заметим, что оператор умножения на $\chi^+(t)$ является сильным пределом при $\varepsilon \searrow 0$ оператора умножения на $e^{-\varepsilon t}\chi^+(t)$. При переходе к фурье-образам последний оператор превращается в оператор

$$G^+_\varepsilon \rho(\lambda) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^\infty e^{i\lambda t} e^{-\varepsilon t}\, dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-it\mu} \rho(\mu)\, d\mu,$$

равный оператору из (5.29).

С оператором $\Gamma^- T$ можно поступить точно так же. В окончательном результате нужно только заменить оператор $G^+$ на оператор $G^-$, определяемый с помощью замены $\varepsilon$ на $-\varepsilon$ в (5.29). Таким образом, доказана

**Лемма 5.10.** *Пусть оператор* $T = (\ \ , g) f$, *где* $f$, $g$ *абсолютно непрерывны относительно самосопряженного оператора* $H$, *есть оператор ранга* 1. *Если* $||| f |||$ *и* $||| g |||$ *конечны, то* $\Gamma^\pm T$ *существует и* $(\Gamma^\pm T)\, u = i\sigma^\pm_{u,g}(H) f$ *при любом* $u \in \mathbf{H}$. *Здесь*

$$\sigma^+_{u,g} = 2\pi G^\pm \rho^+_{u,g}, \quad \rho_{u,g}(\lambda) = d\,(E(\lambda)\, u,\ g)/d\lambda \in \mathbf{L}^1 \cap \mathbf{L}^2.$$

*Справедлива оценка* $\| \Gamma^\pm T \| \leqslant 2\pi \, ||| f ||| \, ||| g |||$.

Рассмотрим теперь оператор конечного ранга

$$T = \sum_{k=1}^{m} (\ \ , g_k) f_k, \tag{5.30}$$

где все $f_k$, $g_k$ абсолютно непрерывны относительно $H$. Так как $T$ является суммой операторов ранга 1, то применение леммы 5.10 показывает, что $\Gamma^\pm A$ существует, если $|||\,f_k\,|||$, $|||\,g_k\,|||$ конечны, и $\|\,\Gamma^\pm A\,\| \leqslant 2\pi \sum |||\,f_k\,|||\;|||\,g_k\,|||$. Но мы выведем несколько более точные оценки

**Лемма 5.11.** *Пусть оператор $T$ тот же, что и выше. Тогда $\Gamma^\pm T$ существуют и $\|\Gamma^\pm T\| \leqslant 2\pi\alpha\beta$, где $\alpha^2=\sup\sum_{k=1}^{m}\rho_{f_k}(\lambda)$ и $\beta^2=\sup\sum_{k=1}^{m}\rho_{g_k}(\lambda)$. Здесь $\rho_f(\lambda)=\rho_{f,f}(\lambda)=d(E(\lambda)f,\,f)/d\lambda$.*

Доказательство. В силу леммы (5.10) $(\Gamma^\pm T)u=i\sum_{k=1}^{m}\sigma^\pm_{u,\,g_k}(H)\,f_k$. Следовательно,

$$(\Gamma^\pm T)\,u\,\|^2=\sum_{j,\,k=1}^{m}(\sigma^\pm_{u,\,g_j}(H)\,f_j,\ \sigma^\pm_{u,\,g_k}(H)\,f_k)=$$

$$=\sum_{j,\,k}\int\sigma^\pm_{u,\,g_j}(\lambda)\,\overline{\sigma^\pm_{u,\,g_k}(\lambda)}\,d\,(E(\lambda)\,f_j,\ f_k)\leqslant$$

$$\leqslant\int\sum_{f,\,k}|\,\sigma^\pm_{u,\,g_j}(\lambda)\,|\,|\,\sigma^\pm_{u,\,g_k}(\lambda)\,|\,\rho_{f_j}(\lambda)^{1/2}\rho_{f_k}(\lambda)^{1/2}\,d\lambda\leqslant$$

$$[\text{в силу (1.9)}]\leqslant\int\Big[\sum_{k}|\,\sigma^\pm_{u,\,g_k}(\lambda)\,|\,\rho_{f_k}(\lambda)^{1/2}\Big]^2 d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant\int\Big(\sum_{k}|\,\sigma^\pm_{u,\,g_k}(\lambda)\,|^2\Big)\Big(\sum_{k}\rho_{f_k}(\lambda)\Big)\,d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant\alpha^2\sum_{k}\|\,\sigma^\pm_{u,\,g_k}\,\|^2\leqslant(2\pi\alpha)^2\sum_{k}\|\,\rho_{u,\,g_k}\,\|^2=$$

$$=(2\pi\alpha)^2\sum_{k}\int\Big|\,\frac{d}{d\lambda}(E(\lambda)\,u,\ g_k)\Big|^2 d\lambda\leqslant$$

$$\leqslant(2\pi\alpha)^2\int\rho_u(\lambda)\Big(\sum_{k}\rho_{g_k}(\lambda)\Big)\,d\lambda\leqslant$$

$$[\text{в силу (1.9)}]\leqslant(2\pi\alpha\beta)^2\int\rho_u(\lambda)\,d\lambda=(2\pi\alpha\beta)^2\,\|\,u\,\|^2.$$

### 5. Решение интегральных уравнений в случае, когда rank $A = 1$

Решим теперь «интегральные уравнения» (5.5). Для простоты будем предполагать в оставшейся части этого параграфа, что оператор $H_1$ спектрально абсолютно непрерывен, так что $P_1 = 1$, и вместо $H_1$ будем писать $H$. Вводя для удобства числовой параметр $\varkappa$, рассмотрим уравнение

$$W = 1 + \varkappa\Gamma(AW); \tag{5.31}$$

здесь через $\Gamma$, $W$ обозначены $\Gamma^+$, $W_+$ или $\Gamma^-$, $W_-$ соответственно.

Для решения уравнения (5.31) естественно воспользоваться методом последовательных приближений:

$$\begin{gathered} W = W(\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n W^{(n)}, \quad W^{(0)} = 1, \\ W^{(n+1)} = \Gamma(AW^{(n)}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{5.32}$$

Но совсем неясно, можно ли построить операторы $W^{(n)}$, так как операция $\Gamma$ не определена всюду в $\mathscr{B}(\mathbf{H})$.

Мы покажем, однако, что этот метод применим, если $A$ имеет ранг 1:

$$A = (\ ,\ g)\, f, \tag{5.33}$$

и если $f$, $g$ выбраны должны образом. Позже мы распространим наши результаты на более общие случаи. *Мы не предполагаем, что оператор $A$ симметричен*; то, что уравнение (5.31) можно решить для несимметричных $A$, представляет собой весьма интересный факт.

Предположим, что $|||f|||$, $|||g|||$ конечны (см. (5.23)). Тогда лемма 5.10 показывает, что $W^{(1)} = \Gamma A$ существует и $\| W^{(1)} \| \leqslant 2\pi\, |||f|||\, |||g|||$. Для построения $W^{(2)}$ мы применим лемму 5.10 при $T = AW^{(1)} = (\ ,\ g^{(1)})\, f$, где

$$g^{(1)} = W^{(1)*}g = (\Gamma A)^*\, g = -(\Gamma A^*)\, g = -i\sigma_{g,f}(H)\, g \tag{5.34}$$

в силу лемм 5.6 и 5.10 (заметим, что $A^* = (\ ,\ f)\, g$ также удовлетворяет предположениям леммы 5.10). Следовательно,

$$(d/d\lambda)\,(E(\lambda)\, g^{(1)},\ g^{(1)}) = |\sigma_{g,f}(\lambda)|^2 \cdot (d/d\lambda)\,(E(\lambda)\, g,\ g),$$

так что $|||g^{(1)}||| \leqslant M\, |||g||| < \infty$, если мы предположим, что¹)

$$\| \sigma_{g,f} \| = \sup |\sigma_{g,f}(\lambda)| = M < \infty. \tag{5.35}$$

---

¹) Функция $\rho_{g,f}$ ограничена, поскольку $|\rho_{g,f}(\lambda)|^2 \leqslant \rho_g(\lambda)\, \rho_g(\lambda)$, но отсюда еще не следует ограниченность функции $\sigma_{g,f} = 2\pi G\rho_{g,f}$ ($G = G^{\pm}$). Известно, что $\sigma_{g,f}(\lambda)$ ограничена (и удовлетворяет условию Гёльдера), если $\rho_{g,f}(\lambda)$ удовлетворяет условию Гёльдера и достаточно быстро стремится к нулю при $|\lambda| \to \infty$. В рассматриваемой задаче удобно *предположить*, что условие (5.35) выполнено.

Оказывается, что можно построить $W^{(n)}$ при $n = 3, 4, \ldots$, не делая каких-либо дальнейших предположений. Действительно, мы можем применить лемму 5.10 для построения $W^{(n+1)}$ по $W^{(n)}$; оператор $AW^{(n)} = (\ \ , g^{(n)})\, f$ имеет ранг 1, причем

$$g^{(n)} = W^{(n)*}g = (-i)^n\, \sigma_{g,f}(H)\, g, \tag{5.36}$$

откуда следует, как и выше, что

$$|||\, g^{(n)} \,||| \leqslant M^n\, |||\, g \,||| < \infty. \tag{5.37}$$

Формула (5.36) может быть доказана по индукции; имеем

$$g^{(n+1)} = W^{(n+1)*}g = (\Gamma A W^{(n)})^*\, g = -[\Gamma\,(AW^{(n)})^*]\, g = \\ = -i\sigma_{g,g}(H)\, g^{(n)},$$

поскольку $(A,\ W^{(n)})^* = (\ \ , f)\, g^{(n)}$.

Из предыдущего следует, что

$$\|\, W^{(n+1)} \,\| = \|\, \Gamma\,(AW^{(n)}) \,\| \leqslant 2\pi\, |||\, g^{(n)} \,|||\ |||\, f \,||| \leqslant \\ \leqslant 2\pi M^n\, |||\, f \,|||\ |||\, g \,|||. \tag{5.38}$$

Таким образом, ряд (5.32) сходится по норме, если $|\,\varkappa\,| < 1/M$. Легко видеть, что его сумма удовлетворяет уравнению (5.31): достаточно показать, что $\Gamma\,(AW)$ можно вычислять почленно, подставляя вместо $W$ ряд (5.32). Это можно делать, так как $\|\,\Gamma_a\,(AW^{(n)})\,\| \leqslant 2\pi M^n\, |||\, f \,|||$ и так как $\Gamma_a\,(AW^{(n)}) \xrightarrow[s]{} \Gamma\,(AW^{(n)})$ при $a \to \infty$ для каждого $n$.

Таким образом доказана

**Лемма 5.12.** *Если* $A = (\ \ , g)\, f$, *где* $|||\, f \,|||$ *и* $|||\, g \,|||$ *конечны и* $\|\,\sigma_{g,f}\,\|_\infty = M < \infty$, *то уравнение* (5.31) *имеет решение* $W = W(\varkappa)$, *голоморфное по* $\varkappa$ *при* $|\,\varkappa\,| < 1/M$.

Для дальнейшего изучения функции $W(\varkappa)$ удобно рассмотреть уравнение

$$Z = 1 - \varkappa\Gamma\,(ZA), \tag{5.39}$$

которое в некотором смысле двойственно уравнению (5.31). Уравнение (5.39) может быть решено точно так же, как и выше, если выполнены некоторые условия. А именно, имеем

$$\begin{gathered} Z = Z(\varkappa) = \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa^n Z^{(n)}, \quad Z^{(0)} = 1, \quad Z^{(n+1)} = -\Gamma\,(Z^{(n)}A), \\ Z^{(n)}A = (\ \ \ , g)\, f^{(n)}, \quad f^{(n)} = Z^{(n)}f = (-i)^n\, \sigma_{f,g}(H)^n f. \end{gathered} \tag{5.40}$$

Поскольку $\sigma_{f,g}(\lambda) = \overline{\sigma_{g,f}(\lambda)}$, то заключаем, что справедлива

**Лемма 5.13.** *При тех же условиях, что и в лемме* 5.12, *уравнение* (5.39) *имеет решение* $Z = Z(\varkappa)$, *голоморфное при* $|\,\varkappa\,| < 1/M$.

Существует простая связь между решениями уравнений (5.31) и (5.39). Именно, справедлива

**Лемма 5.14.** *При любом фиксированном* $\varkappa$, *таком, что* $|\varkappa| < 1/M$, *решение каждого из уравнений* (5.31), (5.39) *единственно. Эти решения связаны соотношениями*

$$Z(\varkappa) = W(\varkappa)^{-1}, \quad W(\varkappa) = Z(\varkappa)^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $W$ и $Z$ — любые решения рассматриваемых уравнений. Перемножая эти уравнения, получаем

$$ZW = 1 + \varkappa\Gamma(AW) - \varkappa\Gamma(ZA) - \varkappa^2\Gamma(ZA)\,\Gamma(AW).$$

Используя (5.9), а также еще раз уравнения (5.31) и (5.39), находим

$$\begin{aligned} ZW &= 1 + \varkappa\Gamma\,[AW - ZA - \varkappa\Gamma(ZA)\,AW - \varkappa ZA\Gamma(AW)] = \\ &= 1 + \varkappa\Gamma\,[ZAW - ZAW] = 1. \end{aligned} \tag{5.41}$$

Отсюда следует, что область значений оператора $Z$ есть $\mathbf{H}$; иными словами, $Z$ является полуфредгольмовым оператором, причем $\operatorname{def} Z = 0$ (см. п. IV.5.1). В частности, это относится к оператору $Z(\varkappa)$ из леммы 5.13 при всех $\varkappa$. Но поскольку функция $Z(\varkappa)$ голоморфна по $\varkappa$, то из теоремы устойчивости для индекса (см. теорему IV.5.17) следует, что $\operatorname{nul} Z(\varkappa)$ есть постоянная. Так как $Z(0) = 1$, то эта постоянная равна нулю. Таким образом, $Z(\varkappa)$ взаимно однозначно отображает $\mathbf{H}$ на себя, и $Z(\varkappa)^{-1}$ обладает тем же свойством.

Далее, (5.41) показывает, что $Z(\varkappa)\,W = 1$, следовательно, $W = Z(\varkappa)^{-1}$. Поскольку это верно для *любого* решения $W$ уравнения (5.31), то решение этого уравнения единственно. Аналогично, подставляя $W = Z(\varkappa)^{-1}$ в (5.41), получим $ZZ(\varkappa)^{-1} = 1$, или $Z = Z(\varkappa)$. Поскольку это верно для любого решения $Z$ уравнения (5.39), то решение этого уравнения единственно ¹).

Суммируя приведенные леммы, заключаем, что справедлива

**Теорема 5.15.** *Пусть оператор* $H$ *самосопряжен и спектрально абсолютно непрерывен, и пусть* $A = (\ ,g)\,f$, *где* $|||f||| < \infty$, $|||g||| < \infty$ *и* $\|\sigma^{\dagger}_{f,\,q}\|_\infty = M < \infty$. *Тогда уравнения* (5.31) *и*

---

¹) Это можно обосновать, и не используя теорему об индексе. В силу (5.41) имеем $Z(\varkappa)\,W(\varkappa) = 1$. Поскольку $W(\varkappa)$ и $Z(\varkappa)$ голоморфны по $\varkappa$, причем $W(0) = Z(0) = 1$, то $W(\varkappa)^{-1}$ существует при достаточно малых $|\varkappa|$, и $Z(\varkappa) = W(\varkappa)^{-1}$; следовательно, $W(\varkappa)\,Z(\varkappa) = 1$. Но так как функция $W(\varkappa)\,Z(\varkappa)$ голоморфна при $|\varkappa| < 1/M$, то $W(\varkappa)\,Z(\varkappa) = 1$ при $|\varkappa| < 1/M$. Таким образом, $Z(\varkappa) = W(\varkappa)^{-1}$ при $|\varkappa| < 1/M$, и единственность следует из (5.41). Например, любой оператор $W$ должен удовлетворять соотношению $Z(\varkappa)\,W = 1$, значит, $W = Z(\varkappa)^{-1} = W(\varkappa)$.

(5.39) *имеют единственные решения* $W_+(\varkappa)$ *и* $Z_+(\varkappa)$ *соответственно при* $\Gamma = \Gamma_H^{\pm}$ *и* $|\varkappa| < 1/M$. *Эти решения голоморфны по* $\varkappa$ *и взаимно обратны. Аналогичные результаты справедливы для* $\Gamma = \Gamma_H^-$. *Оператор* $H(\varkappa) = H + \varkappa A$ *подобен оператору* $H$: $H(\varkappa) = W_+(\varkappa) H W_+(\varkappa)^{-1}$. *Если* $f = g$ *и* $\varkappa$ *вещественно, то оператор* $H(\varkappa)$ *самосопряжен и унитарно эквивалентен* $H$, *а операторы* $W_\pm(\varkappa)$ *унитарны и совпадают с волновыми операторами* $W_\pm(H(\varkappa), H)$. *Спектральное семейство* $E(\lambda, \varkappa)$ *оператора* $H(\varkappa)$ *голоморфно по* $\varkappa$ *(для вещественных* $\varkappa$*) при каждом фиксированном* $\lambda$ [1]).

Подобие операторов $H(\varkappa)$ и $H$ следует из замечания 5.9, а совпадение $W_\pm(\varkappa)$ с волновыми операторами — из теоремы 5.8. Заметим, что $\| \sigma_{f,f}^{\dagger} \|_\infty = \| \sigma_{f,f}^{-} \|_\infty$, так что оба оператора $W_\pm(\varkappa)$ существуют, если $g = f$. Утверждение, относящееся к $E(\lambda, \varkappa)$, вытекает из равенства

$$E(\lambda, \varkappa) = W_+(\varkappa) E(\lambda) W_+(\varkappa)^{-1}.$$

## 6. Решение интегрального уравнения в случае вырожденного $A$

Результаты предыдущего пункта можно обобщить непосредственно на случай, когда оператор $A$ вырожден (с конечным рангом $m$):

$$A = \sum_{k=1}^{m} (\ \ , g_k) f_k, \quad f_k \in \mathbf{H}$$

(мы по-прежнему предполагаем, что оператор $H$ спектрально абсолютно непрерывен). Для решения уравнения (5.31) можно использовать последовательные приближения (5.32). Действительно, легко видеть, как и выше, что

$$AW^{(n)} = \sum_{k=1}^{m} (\ \ , g_k^{(n)}) f_k, \tag{5.43}$$

$$g_k^{(n)} = W^{(n)*} g_k = -i \sum_{j=1}^{m} \sigma_{k,j}(H) g_j^{(n-1)}, \tag{5.44}$$

по крайней мере формально (мы положили для краткости $\sigma_{k,j} = \sigma_{g_k, f_j}$). Как и выше, нетрудно убедиться, что эти результаты справедливы, если $|||f_k|||$, $|||g_k|||$ и $|||\sigma_{k,j}|||$ конечны.

Чтобы оценить $\| W^{(n)} \|$, заметим прежде всего, что функция $\rho_f(\lambda)^{1/2} = [d(E(\lambda) f, f)/d\lambda]^{1/2}$ при любом фиксированном $\lambda$ удовлетворяет неравенству треугольника по $f$: $\rho_{f+g}(\lambda)^{1/2} \leqslant \rho_f(\lambda)^{1/2} +$

---

[1]) В нестационарной теории мы не доказывали никаких теорем о непрерывности по норме операторов $W_\pm(H + \varkappa A\ , H)$ как функций от $\varkappa$ (не говоря уже об аналитичности). Таким образом, теорема 5.15 дополняет ранее полученные результаты.

$+ \rho_g(\lambda)^{1/2}$, как ясно из (1.9). Применим это неравенство к сумме (5.44); обозначая через $\rho_k^{(n)}(\lambda)$ функцию $\rho_g(\lambda)$ при $g = g_k^{(n)}$, получаем

$$\rho_k^{(n)}(\lambda)^{1/2} \leqslant \sum_{j=1}^{m} |\sigma_{k,j}(\lambda)|\, \rho^{(n-1)}(\lambda)^{1/2} \tag{5.45}$$

(заметим, что если $f = \sigma(H)\, g$, то $\rho_f(\lambda) = |\sigma(\lambda)|^2 \rho_g(\lambda)$).

Обозначим через $M(\lambda)$ норму линейного оператора, определяемого матрицей $(|\sigma_{k,j}(\lambda)|)$ и действующего в $m$-мерном гильбертовом пространстве $C^m$. Тогда из (5.45) следует, что

$$\left(\sum \rho_k^{(n)}(\lambda)\right)^{1/2} \leqslant M(\lambda) \left(\sum \rho_k^{(n-1)}(\lambda)\right)^{1/2}.$$

Последовательное применение этой формулы дает

$$\left(\sum \rho_k^{(n)}(\lambda)\right)^{1/2} \leqslant M(\lambda)^n \left(\sum \rho_k(\lambda)\right)^{1/2}. \tag{5.46}$$

Положим $M = \sup\limits_{\lambda} M(\lambda)$; число $M$ конечно, так как мы предположили, что $\|\sigma_{j,k}\|_\infty$ конечны. Применяя лемму 5.11 к $T = AW$ (см. (5.43)), получаем, таким образом:

$$\begin{aligned} \| W^{(n+1)} \| &= \| \Gamma(AW^{(n)}) \| \leqslant \\ &\leqslant 2\pi \left(\sup \sum \rho_k^{(n)}(\lambda)\right)^{1/2} \left(\sup \sum \rho_{f_k}(\lambda)\right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant 2\pi M^n \left\| \sum \rho_{g_k} \right\|_\infty^{1/2} \left\| \sum \rho_{j_k} \right\|_\infty^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.47}$$

Отсюда следует, как и в предыдущем пункте, что ряд для $W(\varkappa)$ сходится при $|\varkappa| < 1/M$ и дает решение уравнения (5.31). Остальные утверждения теоремы 5.15 можно вывести теперь так же, как и выше. Таким образом, доказана

**Теорема 5.16.** *В теореме* 5.15 *заменим* $A$ *на* $A = \sum\limits_{k=1}^{m} (\cdot, g_k) f_k$, *где* $||| f_k ||| < \infty$, $||| g_k ||| < \infty$ *и* $\| \sigma_{g_k, f_i} \| < \infty$, $j, k = 1, \ldots, m$. *Тогда все утверждения по-прежнему справедливы, если* $M = \sup M(\lambda)$, *где* $M(\lambda)$ — *норма* $m \times m$*-матрицы* $(|\sigma_{g_k, f_j}(\lambda)|)_{-\infty<\lambda<\infty}$ *как оператора в* $m$*-мерном гильбертовом пространстве. (В последнем утверждении теоремы* 5.15 *условие* $f = g$ *нужно заменить условием* $f_k = \pm g_k$, *где знак выбирается произвольно для каждого* $k$.)

**Замечание 5.17.** Пусть $M'$ — норма $m \times m$-матрицы $(\| \sigma_{g_k, f_j} \|_\infty)$; тогда $M \leqslant M'$. Это следует из того простого факта, что норма матрицы с неотрицательными элементами не убывает, если некоторые из ее элементов увеличиваются.

**Замечание 5.18.** Эти результаты могут быть обобщены далее на случай, когда оператор $A$ уже не является вырожденным и ряд (5.42) бесконечен. Учитывая (5.47), мы можем ожидать, что последовательные приближения сходятся, если

$$\|\sum_k \rho_{f_k}\|_\infty < \infty, \quad \|\sum_k \rho_{g_k}\|_\infty < \infty \quad \text{и} \quad |\varkappa| < 1/M, \tag{5.48}$$

где $M = \sup M(\lambda)$, а $M(\lambda)$ представляет собой норму оператора, действующего в $C^\infty = \mathrm{l}^2$ и определяемого бесконечной матрицей $(|\sigma_{g_k, f_j}(\lambda)|)$. Следует, однако, заметить, что надо бы сделать какое-нибудь дополнительное предположение, скажем

$$\sum \|f_k\|\,\|g_k\| < \infty, \tag{5.49}$$

для того чтобы $A \in \mathscr{B}(\mathrm{H})$, так как мы определили $\Gamma X$ только для ограниченных $X$. Условие (5.49) не является необходимым и может быть заменено более слабым. Между прочим, из (5.49) следует, что $A \in \mathscr{B}_1(\mathrm{H})$.

**Замечание 5.19.** Можно распространить полученные результаты на случай непрерывного аналога формулы (5.42). Предположим, что

$$A = \int (\ , g_k) f_k \, dk, \tag{5.50}$$

где $f_k$ и $g_k$ зависят от непрерывного параметра $k$. Естественно ожидать, что метод последовательных приближений может быть применен точно так же, как и выше, если

$$\|\int \rho_{f_k} dk\|_\infty < \infty, \quad \|\int \rho_{g_k} dk\|_\infty < \infty \quad \text{и} \quad |\varkappa| < 1/M, \tag{5.51}$$

где $M = \sup M(\lambda)$, а $M(\lambda)$ есть норма интегрального оператора $T_\lambda$, действующего в $\mathrm{L}^2$, с ядром

$$t(k, j; \lambda) = |\sigma_{g_k, f_j}(\lambda)|. \tag{5.52}$$

Условия (5.51) являются аналогами условий (5.48).

Мы молчаливо предполагали, что $f_k, g_k \in \mathrm{H}$. Но даже это предположение может быть опущено. Конечно, некоторые величины, использованные выше, потеряли бы в этом случае точный смысл, но они допускают естественные интерпретации в конкретных задачах. Предположим, например, что $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(0, \infty)$ и $H$ — оператор умножения на координату $\lambda$. Предположим, далее, что $f_k = f_k(\lambda)$ являются функциями, не обязательно принадлежащими $\mathrm{L}^2$. Тогда оператор (5.50) можно интерпретировать как интегральный оператор с ядром $a(\lambda, \mu) = \int f_k(\lambda) \overline{g_k(\mu)} \, dk$; этот оператор вполне может быть ограниченным, даже если $f_k$, $g_k$ и не принадлежат $\mathrm{L}^2$. Так как $d(E(\lambda) f, g)/d\lambda = f(\lambda) \overline{g(\lambda)}$, если $f, g \in \mathrm{H}$, то мы должны положить $\rho_{f_j, g_k}(\lambda) = f_j(\lambda) \overline{g_k(\lambda)}$, даже если $f_j$, $g_k$ не принадлежат $\mathrm{L}^2$.

Как и прежде, нужно некоторое дополнительное условие, подобное (5.49), для того чтобы обеспечить ограниченность оператора $A$, если строго придерживаться данного выше определения $\Gamma$.

Мы не будем подробно доказывать эти результаты. Следует заметить, что доказательство здесь не вполне аналогично доказательству в «дискретном» случае (5.42), так как $\rho_{f_j,\, g_k}(\lambda)$ может не иметь преобразования Фурье [1].

## 7. Применение к дифференциальным операторам

В качестве простого приложения предыдущих результатов рассмотрим дифференциальный оператор [2]

$$H = -d^2/dx^2, \quad 0 < x < \infty, \tag{5.53}$$

с граничным условием $u(0) = 0$ и возмущенный оператор $H(\varkappa) = H + \varkappa A$, где $A$ — оператор умножения на функцию $q(x)$. Предположим для простоты, что функция $q(x)$ ограничена.

Оператор $H$ самосопряжен в $\mathbf{H} = \mathbf{L}^2(0, \infty)$ (см. п. V.3.6). Он может быть «диагонализован» с помощью преобразования

$$u(x) \to \hat{u}(k) = (2/\pi)^{1/2} \int\limits_0^\infty \sin kx\, u(x)\, dx \tag{5.54}$$

в том смысле, что $\| \hat{u} \| = \| u \|$ и

$$(Hu)^\wedge(k) = k^2 \hat{u}(k), \quad 0 < k < \infty. \tag{5.55}$$

Для того чтобы привести оператор умножения на $k^2$ к стандартному виду, произведем замену переменной $\lambda = k^2$. Учитывая, что

$$\| \hat{u} \|^2 = \int\limits_0^\infty | \hat{u}(k) |^2 dk - \frac{1}{2} \int\limits_0^\infty | \hat{u}(\lambda^{1/2}) |^2 \lambda^{-1/2}\, d\lambda, \tag{5.56}$$

положим

$$u(\lambda) = 2^{-1/2}\lambda^{-1/2}\hat{u}(\lambda^{1/2}) = \pi^{-1/2}\lambda^{-1/4} \int\limits_0^\infty \sin(\lambda^{1/2}x)\, u(x)\, dx; \tag{5.57}$$

$u(x) \to \hat{\hat{u}}(\lambda)$ является унитарным преобразованием пространства $\mathbf{L}^2(0, \infty)$ в себя, и $H$ переходит поэтому в оператор умножения на $\lambda$:

$$(Hu)^{\hat{}}(\lambda) = \lambda \hat{\hat{u}}(\lambda). \tag{5.58}$$

Как легко видеть, оператор умножения на $q(x)$ в $x$-представлении переходит в интегральный оператор с ядром

$$\alpha(\mu, \lambda) = \pi^{-1}(\mu\lambda)^{-1/4} \int\limits_0^\infty \sin(\mu^{1/2}x) \sin(\lambda^{1/2}x)\, q(x)\, dx. \tag{5.59}$$

Далее, (5.59) совпадает с формулой (5.50), если в ней заменить $k$ на $x$ и положить

$$\begin{aligned} f_x(\lambda) &= \pi^{-1/2}\lambda^{-1/4} \sin(\lambda^{1/2}x)\, q_1(x), \\ g_x(\lambda) &= \pi^{-1/2}\lambda^{-1/4} \sin(\lambda^{1/2}x)\, q_2(x), \end{aligned} \tag{5.60}$$

где $q_1$ и $q_2$ таковы, что $q(x) = q_1(x)\, \overline{q_2(x)}$ и $| q_1(x) | = \| q_2(x) \| = | q(x) |^{1/2}$.

---

[1] Эти обобщения доказаны в работе Т. Като [18], где использован несколько иной метод.

[2] Более подробное обсуждение этого примера и его обобщение на случай более высоких размерностей см. в работе Т. Като [18].

Функции $f_x$ и $g_x$ не принадлежат $\mathbf{L}^2(0, \infty)$, но это не является серьезной трудностью[1], поскольку оператор $A$ ограничен. Для того чтобы применить замечание 5.19, мы должны вычислить $\rho_{f_x}$, $\rho_{g_x}$ и $M$.

Поскольку в $\lambda$-представлении $H$ есть оператор умножения на $\lambda$, то $\rho_{f_x}(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$ и (формально)

$$\rho_{f_x}(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}(E(\lambda) f_x, f_x) = | f_x(\lambda) |^2 =$$

$$= \pi^{-1} \lambda^{-1/2} \sin^2(\lambda^{1/2} x) \, | q(x) | \leqslant \pi^{-1} x \, | q(x) |$$

при $\lambda \geqslant 0$ (заметим, что $\sin^2(\lambda^{1/2} x) \leqslant \sin(\lambda^{1/2} x) \,|\, \leqslant \lambda^{1/2} x$). Следовательно, первое неравенство в (5.51) выполняется, если

$$\int_0^\infty x \, | q(x) | \, dx < \infty. \tag{5.61}$$

То же верно и для второго неравенства.

Для вычисления $M$ заметим, что

$$\rho_{g_x, f_y}(\lambda) = g_x(\lambda) \overline{f_y(\lambda)} = \pi^{-1} \lambda^{-1/2} \sin(\lambda^{1/2} x) \sin(\lambda^{1/2} y) \overline{g\ (y)} \, g_2(x)$$

при $\lambda \geqslant 0$ и $= 0$ при $\lambda < 0$. Следовательно, $\sigma^+_{g_x, f_y} = 2\pi G^+ \rho_{g_x, f_y}$ задается формулой (см. (5.28))

$$\sigma_{g_x, f_y}(\lambda) = \frac{1}{i\pi} \overline{g_1(y)} \, g_2(x) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_0^\infty \frac{\mu^{-1/2} \sin(\mu^{1/2} x) \sin(\mu^{1/2} y)}{\mu - \lambda - i\varepsilon} \, d\mu. \tag{5.62}$$

В предположении $0 < x \leqslant y$ элементарный подсчет показывает, что предел в правой части равен

$$-\pi i \lambda^{-1/2} e^{-iy\lambda^{1/2}} \sin(\lambda^{1/2} x) \qquad \text{для} \quad \lambda > 0,$$

$$-\pi i \, | \lambda |^{-1/2} e^{-y \, | \lambda |^{1/2}} \sin(| \lambda^{1/2} x) \qquad \text{для} \quad \lambda < 0.$$

Как легко видеть, оба эти выражения ограничены по абсолютной величине функцией $\pi x = \pi \min(x, y)$. Следовательно, получаем из (5.62)

$$| \sigma_{g_x, f_y}(\lambda) | \leqslant \min(x, y) \, | g(x) |^{1/2} \, | g(y) |^{1/2}. \tag{5.63}$$

Далее, норма $M(\lambda)$ интегрального оператора в $\mathbf{L}^2(0, \infty)$ с ядром $| \sigma_{g_x, f_y}(\lambda) |$ не превышает его гильберто-шмидтовой нормы $N(\lambda)$. Но (5.63) показывает, что

$$N(\lambda)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty | \sigma_{g_x, f_y}(\lambda) |^2 \, dx \, dy \leqslant \int_0^\infty \int_0^\infty [\min(x, y)]^2 \, | g(x) |^2 \, | g(y) | \, dx \, dy \equiv N^2. \tag{5.64}$$

---

[1] Эта кажущаяся трудность может быть легко преодолена с помощью замены $f_x(\lambda)$, $g_x(\lambda)$ на $f_x(\lambda)(1 + \varepsilon\lambda)^{-1}$, $g_x(\lambda)(1 + \varepsilon\lambda)^{-1}$ и перехода к пределу при $\varepsilon \searrow 0$.

Поэтому $M(\lambda) \leqslant N$ при всех $\lambda$, а значит, $M = \sup\limits_{\lambda} M(\lambda) \leqslant N$. Таким образом, из замечания 5.19 следует, что заключение теоремы 5.16 справедливо, если выполнено условие (5.61)[1] и если

$$|\varkappa| < 1/M.$$

**Замечание 5.20.** Так как $[(\min(x, y)]^2 \leqslant xy$, то

$$N \leqslant N' \equiv \int\limits_0^\infty x\,|g(x)|\,dx. \tag{5.66}$$

Следовательно, (5.65) выполняется при $|\varkappa| < 1/N'$. Иными словами, операторы $-d^2/dx^2$ и $-d^2/dx^2 + g(x)$ подобны (и унитарно эквивалентны, если функция $g(x)$ вещественна), если $N' < 1$[2]. Интересно отметить, что *это условие является «наилучшим»*. Действительно, известно (и легко проверяется), что для любого $N' > 1$ существует вещественная функция $g(x)$ такая, что $\int\limits_0^\infty x\,|g(x)|\,dx = N'$, причем оператор $-d^2/dx^2 + g(x)$ имеет отрицательные собственные значения, так что он не может быть подобен оператору $-d^2/dx^2$ (например, достаточно положить $g(x) = -1/\varepsilon$ при $1 \leqslant x \leqslant 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon$ достаточно мало, и $g(x) = 0$ в остальных точках).

---

[1] На самом деле условие (5.61) не является необходимым, если $N < \infty$; см. Т. Като [18].

[2] Ср. с работой Мозера [1], в которой аналогичные результаты выводятся при более сильных условиях. См. также Шварц [2].

# БИБЛИОГРАФИЯ

## СТАТЬИ

Аронштайн (Aronszajn N.)

[1] The Rayleigh-Ritz and the Weinstein methods for approximation of eigenvalues. I. Operators in a Hilbert space. II. Differential operators, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 34 (1948), 474—480, 594—601.

[2] Approximation methods for eigenvalues of completely continuous symmetric operators, Proceedings of the Symposium on Spectral Theory and Differential Problems, Oklahoma A. M. College, 1955, 179—202.

[3] On a problem of Wey in the theory of singular Sturm-Liouville equations, *Am. J. Math.*, 79 (1957), 597—610.

[4] Quadratic forms on vector spaces, Proceedings of International Symposium on Linear Spaces, Hebrew Univ., Jerusalem, 1960, 29—87.

Аронштайн и Вайнштейн (Aronszajn N., Weinstein A.)

[1] Existence, convergence and equivalence in the unified theory of plates and membrans, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 64 (1941), 181—191.

[2] On a unified theory of eigenvalues of plates and membranes, *Am. J. Math.*, 64 (1942), 623—645.

Аткинсон (Atkinson F. V.)

[1] Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, *Матем сб.*, 28 (70) (1951), 3—14.

[2] A spectral problem for completely continuous operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 3 (1952), 53—60.

[3] On relatively regular operators, *Acta Sci. Math. Szeged.*, 15 (1953), 38—56.

Базли (Bazley N. W.)

[1] Lower bounds for eigenvalues, *J. Math. Mech.*, 10 (1961), 289—308.

Базли и Фокс (Bazley N. W., D. W. Fox)

[1] Lower bounds to eigenvalues using operator decompositions of the form $B^*B$, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 10 (1962), 352—360.

Бальслев (Balslev E.)

[1] Perturbation of ordinary differential operators, *Math. Scand.*, 11 (1962), 131—148.

Бальслев и Гамелин (Balslev E., Gamelin T. W.)

[1] The essential spectrum of a class of ordinary differential operators, *Pacific. J. Math.*, 14 (1964), 755—776.

Бари Н. К.

[1] Sur les systèmes complets de fonctions orthogonales, *Матем. сб.*, 14 (56) (1944), 51—108.

Батлер (Butler J. B., jr.)

[1] Perturbation series for eigenvalues of analytic non-symmetric operators, *Arch. Math.*, 10 (1959), 21—27.

Баумгертель (Baumgärtel H.)

[1] Zur Störungstheorie beschränkter linearer Operatoren eines Banachschen Raumes, *Math. Nachr.*, 26 (1964), 361—379.

Баукэмп (Bouwkamp C. J.)

[1] A note on Mathieu functions, *Indag. Math.*, **10** (1948), 319—321.

Берксон (Berkson E.)

[1] Some metrics on the subspaces of a Banach space, *Pacific J. Math.*, 13 (1963), 7—22.

Биркгоф (Birkhoff G.)

[1] Three observations on linear algebra, *Univ. Nac. Tucumán Rev.*, ser. A., 5 (1946), 147—151.

Бирман М. Ш.

[1] К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов, *Матем. сб.*, 38 (1956), № 4, 431—450.

[2] О методе Фридрихса — расширения положительно определенного оператора до самосопряженного, *Зап. Ленингр. горн. ин-та*, 33 (1956), № 3, 132—136.

[3] Метод квадратичных форм в задачах о малом параметре при старших производных, *Вестн. Ленингр. ун-та*, № 13 (1957), 9—12.

[4] О многомерных краевых задачах с малым параметром при старших производных, *УМН*, **12** (1957), вып. 6, 212—213.

[5] Возмущения квадратичных форм и спектр сингулярных задач, *ДАН*, 125 (1959), № 3, 471—474.

[6] О возмущении спектра сингулярного оператора при изменении границы и граничных условий, *ДАН*, 137 (1961), 761—763.

[7] Возмущения непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий, *Вестн. Ленингр ун-та*, № 1 (1962), 22—55.

[8] Об условиях существования волновых операторов, *ДАН*, **143** (1962), 506—509.

[9] Об одном признаке существования волновых операторов, ДАН, 147 (1962), 1008—1009.

[10] Об условиях существования волновых операторов, *ИАН*, сер. матем., **27** (1963), 883—906.

[11] Локальный признак существования волновых операторов, *ДАН*, **159**, (1964), 485—488.

Бирман М. Ш. и Энтина С. Б.

[1] О стационарном подходе в абстрактной теории рассеяния, *ДАН*, **155** (1964), 506—508.

Бирман М. Ш. и Крейн М. Г.

[1] К теории волновых операторов и операторов рассеяния, *ДАН*, **144** (1962), 475—478.

Блох (Bloch C.)

[1] Sur la théorie des perturbations des états liés, *Nuclear Phys.*, 6 (1958), 329—347.

Бранж (de L. Branges)

[1] Perturbations of self-adjoint transformations, *Am. J. Math.*, 84 (1962), 543—560.

Браудер (Browder F. E.)

[1] Functional analysis and partial differential equations. I, *Math. Ann.*, **138** (1959), 55—79.

[2] On the spectral theory of elliptic differential operators. I, *Math. Ann.*, **142** (1961), 22—130.

[3] Functional analysis and partial differential equations. II, *Math. Ann.*, **145** (1962), 81—226.

Браудер и Штраус (Browder F. E., Strauss W. A.)

[1] Scattering for non-linear wave equations, *Pacific J. Math.*, 13 (1963), 23—43.

Браун (Brown A.)

[1] On the adjoint of a closed transformation, *Proc. Am. Math. Soc.*, 15 (1964), 239—240.

Браунел (Brownell F. H.)

[1] A note on Kato's uniqueness criterion for Schrödinger operator self-adjoint extensions, *Pacific J. Math.*, 9 (1959), 953—973.

[2] Finite dimensionality of the Schrödinger operator bottom, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 8 (1961), 59—67.

[3] A note on Cook's wave-matrix theorem, *Pacific J. Math.*, 12 (1962), 47—52.

[4] Perturbation theory and an atomic transition model, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 10 (1962), 149—170.

Бродский М. С. и Лившиц М. С.

[1] Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, *УМН*, 13 (1958), вып. 1, 1—85.

Буслаев В. С.

[1] Формулы следов для оператора Шредингера в трехмерном пространстве, *ДАН*, 143 (1962), 1067—107.

Бэббит (Babbitt D.)

[1] The Wiener integral and perturbation theory of the Schrödinger operator, *Bull. Am. Math. Soc.*, 70 (1964), 254—259.

Вайнштейн (Weinstein A.)

[1] Étude des spectres des équations aux dérivées partielles de la théorie des plaques élastique, *Memor. Sci. Math.*, 88, 1937.

[2] The intermediate problems and the maximum-minimum theory of eigenvalues, *J. Math. Mech.*, 12 (1963), 235—246.

[3] Bounds for eigenvalues and the method of intermediate problems, Proceedings of International Conference on Partial Differential Equations and Continuum Mechanics, 39—53, Univ. of Wisconsin Press, 1961.

Вейль (Weyl H.)

[1] Über beschrankte quadratische Formen, deren Differenz vollstetig ist, *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 27 (1909), 373—392.

Вишик М. И.

[1] Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Труды Моск. матем. об-ва, 1, 1952, 187—246.

Вишик М. И. и Люстерник Л. А.

[1] Возмущение собственных значений и собственных элементов для некоторых несамосопряженных операторов, *ДАН*, 130 (1960), 251—253.

[2] Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *УМН*, 12 (1957), вып. 5, 3—122.

Вольф (Wolf F.)

[1] Analytic perturbation of operators in Banach spaces, *Math. Ann.*, 124 (1952), 317—333.

[2] Perturbation by changes one-dimensional boundary conditions, *Indag. Math.*, 18 (1956), 360—366.

[3] On the invariance of the essential spectrum under a change of boundary conditions of partial differential boundary operators, *Indag. Math.*, 21 (1959), 142—147.

[4] On the essential spectrum of partial differential boundary problems, *Comm. Pure. Appl. Math.*, 12 (1959), 211—228.

Вьенхольц (Wienholtz E.)

[1] Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, *Math. Ann.*, 135 (1958), 50—80.

Гамелин (Gamelin T. W.)

[1] Decomposition theorems for Fredholm operators, *Pacific J. Math.*, 15 (1965), 97—106.

Гарридо (Garrido L. M.)

[1] Generalized adiabatic invariance, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 355—362.

Гарридо и Санчо (Garrido L. M., Sancho F. J.)

[1] Degree of approximate validity of the adiabatic invariance in quantum mechanics, *Physica*, 28 (1962), 553—560.

Гёльдер (Hölder F.)

[1] Über die Vielfachheiten gestörter Eigenwerte, *Math. Ann.*, 113 (1937), 620—628.

Гиндлер и Тейлор (Gindler H. A., Taylor A. E.)

[1] The minimum modulus of a linear operator and its use in spectral theory, *Studia Math.*, 22 (1962), 15—41.

Гольдберг В. Н.

[1] О возмущении линейных операторов с чисто дискретным спектром, *ДАН*, 115 (1957), 643—645.

Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г.

[1] Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, *УМН*, 12 (1957), вып. 2, 43—118.

Гохберг И. Ц. и Маркус А. С.

[1] Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства, *УМН*, 14 (1959), вып. 5, 135—140.

Гохберг И. Ц., Маркус А. С. и Фельдман И. А.

[1] О нормально разрешимых операторах и связанных с ними идеалах, *Изв. Молд. фил. АН СССР*, 10 (76) (1960), 51—70.

Гофман и Виландт (Hoffman A. J., Wielandt H. W.)

[1] The variation of the spectrum of a normal matrix, *Duke Math. J.*, 20 (1953), 37—39.

Грайнер (Greiner P. C.)

[1] Eigenfunction expansions and scattering theory for perturbed elliptic partial differential operators, *Bull. Am. Math. Soc.*, 70 (1964), 517—521.

Грин и Лэнфорд (Green T. A., Lanford O. E. III)

[1] Rigorous derivation of the phase shift formula for the Hilbert space scattering operator of a single particle, J. *Math. Phys.*, 1 (1960), 139—148.

Данфорд (Dunford N.)

[1] A survey of the theory of spectral operators, *Bull. Am. Math. Soc.*, 64 (1958), 217—274.

Джойчи (Joichi J. T.)

[1] On operators with closed range, *Proc. Am. Math. Soc.*, 11 (1960), 80—83.

Дольф (Dolph C. L.)

[1] Recent developments in some nonself -adjoint problems of mathematical physics, *Bull. Am. Math. Soc.*, 67 (1961), 1—69.

[2] Positive real resolvents and linear passive Hilbert systems, *Ann. Acad. Sci. Fenn., ser. A. I.*, Do. 336/9 (1963).

Дольф и Пенцлин (Dolph C. L., Penzlin F.)

[1] On the theory of a class of nonself-adjoint operators and its applications to quantum scattering theory, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, ser. A. I., No. 263 (1959).

Дьёдонне (Dieudonné J.)

[1] Sur les homomorphismes d'espaces normés, *Bull. Sci. Math.*, 67 (1943), 72—84.

Дэвис (Davis C.)
[1] The rotation of eigenvectors by a perturbation, *J. Math. Anal. Appl.*, 6 (1963), 159—173.

Жислин Г. М.
[1] Исследование спектра оператора Шрёдингера для системы многих частиц, Труды Моск. матем. об-ва, 9, 1960, 81—120.

Икэбэ (Ikebe T.)
[1] Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory, *Arch. Rat Mech. Anal.*, 5 (1960), 1—34.
[2] On the phase-shift formula for the scattering operator, *Pacific J. Math.*, 15 (1965), 511—523.
[3] Orthogonality of the eigenfunctions for the exterior problem connected with $-\Delta$. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 19 (1965), 71—73.

Икэбэ и Като (Ikebe T., Kato T.)
[1] Uniqueness of the self-adjoint extension of singular elliptic differential operators, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 9 (1962), 77—92.

Исэки (Iseki K.)
[1] On complete orthonormal sets in Hilbert space, *Proc. Japan Acad.*, 33 (1957), 450—452.

Йоргенс (Jörgens K.)
[1] Wesentliche Selbstadjungiertheit singulärer elliptischer Differentialoperatoren zweiter Ordung in $C_0^\infty(G)$, *Math. Scand.*, 15 (1964), 5—17.

Каашук (Kaashoek M. A.)
[1] Closed linear operators on Banach spaces, Thesis, University of Leiden, 1964.

Като И. (Kato Y.)
[1] Some converging examples of the perturbation series in the quantum field theory, *Progr. Theor. Phys.*, 26 (1961), 99—122.

Като и Мугибаяси (Kato Y., Mugibayashi N.)
[1] Regular perturbation and asymptotic limits of operators in quantum field theory, *Progr. Theor. Phys.*, 30, (1963), 103—133.

Като Т. (Kato T.)
[1] On the convergence of the perturbation method. I, II, *Progr. Theor. Phys.*, 4 (1949), 514—523; 5 (1950), 95—101, 207—212.
[2] On the adiabatic theorem of quantum mechanics, *J. Phys. Soc. Japan*, 5 (1950), 435—439.
[3] On the convergence of the perturbation method, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, sect. 1, 6 (1951), 145—226.
[4] Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type, *Trans. Am. Math. Soc.*, 70 (1951), 195—211.
[4a] On the existence of solutions of the helium wave equation, *Trans. Am. Math. Soc.*, 70 (1951), 212—218.
[5] Notes on some inequalities for linear operators, *Math. Ann.*, 125 (1952), 208—212.
[6] On the perturbation theory of closed linear operators, *J. Math. Soc. Japan*, 4 (1952), 323—337.
[7] Perturbation theory of semi-bounded operators, *Math. Ann.*, 125 (1953), 435—447.
[8] Quadratic forms in Hilbert spaces and asymptotic perturbation series, Technical Report No. 7, Univ. Calif., 1955.
[9] Notes on projections and perturbation theory, Technical Report No. 9, Univ. Calif., 1955.
[10] On finite-dimensional perturbation of selfadjoint operators, *J. Math. Soc. Japan*, 9 (1957), 239—249.

[11] Perturbation of continuous spectra by trace class operators, *Proc. Japan Acad.*, 33 (1957), 260—264.
[12] Perturbation theory for nullity, deficiency and other quantities of linear operators, *J. Analyse Math.*, 6 (1958), 261—322.
[13] Estimation of iterated matrices, with application to the von Neumann condition, *Numer. Math.*, 2, (1960), 22—29.
[14] A generalization of the Heinz Inequality, *Proc. Japan Acad.*, 6 (1961), 305—308.
[15] Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. Japan*, 13 (1961), 246—274.
[16] Fractional powers of dissipative operators. II, *J. Math. Soc. Japan.*, 14 (1962), 242—248.
[17] Wave operators and unitary equivalence, *Pacific J. Math.* 15 (1956), 171—180.
[18] Wave operators and similarity for non-selfadjoint operators, *Math. Ann.* 162 (1966), 258—279.

Като и Курода (Kato T., Kuroda S. T.)
[1] A remark on the unitarity property of the scattering operator, *Nuovo Cimento*, 14 (1959), 1102—1107.

Кёстер (Coester R.)
[1] Scattering theory for relativistic particles, *Helv. Phys. Acta*, 38 (1965), 7—23.

Киллин (Killeen J.)
[1] Asymptotic perturbation of differential equations, Technical Report UCRL-3056, Radiation Lab., Univ. Calif., 1955.

Клейнеке (Kleinecke D. C.)
[1] Degenerate perturbations, Technical Report No. 1, Univ. Calif., 1953.
[2] Finite perturbations and the essential spectrum, Technical Report No. 4, Univ. Calif., 1954.

Клуазо (des Cloizeaux J.)
[1] Extension d'une formule de Lagrange à des problèmes de valeurs propres, *Nuclear Phys.*, 20 (1960), 321—346.

Конли и Рейто (Conley C. C., Rejto P. A.)
[1] On spectral concentration. Technical Report IMM-NYU 293, New York Univ., 1962.

Кордес (Cordes H. O.)
[1] A matrix inequality, *Proc. Am. Math. Soc.*, 11 (1960), 206—210.

Кордес и Лабрус (Cordes H. O., Labrousse J. P.)
[1] The invariance of the index in the metric space of closed operators, *J. Math. Mech.*, 12 (1963), 693—720.

Крамер В. (Kramer V. A.)
[1] Asymptotic inverse series, *Proc. Am. Math. Soc.*, 7 (1956), 429—437.
[2] Asymptotic perturbation series, *Trans. Am. Math. Soc.*, 85 (1957), 88—105.

Крамер Г. (Kramer H. P.)
[1] Perturbation of differential operators, *Pacific J. Math.*, 7 (1957), 1405—1435.

Крейн М. Г.
[1] О самосопряженных расширениях ограниченных и полуограниченных эрмитовых операторов, *ДАН*, 48 (1945), 323—386.
[2] Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. II, *Матем. сб.*, 29 (62) (1947), 431—498.
[3] О формуле следов в теории возмущений, *Матем. сб.*, 33 (75) (1953), 597—626.

[4] О базисах Бари пространства Гильберта, *УМН*, **12** (1957), вып. 3, 333—341.

[5] К теории линейных несамосопряженных операторов, *ДАН*, **120** (1960), 254—256.

[6] Об определителях возмущения и формуле следов для унитарных и самосопряженных операторов, *ДАН*, 144 (1962), 268—271.

Крейн М. Г. и Красносельский М. А.

[1] Устойчивость индекса неограниченного оператора, *Матем. сб.*, 30 (72) (1952), 219—224.

Крейн М. Г., Красносельский М. А. и Мильман Д. П.

[1] О дефектных числах линейных операторов в банаховом пространстве и о некоторых геометрических вопросах, Сб. трудов Ин—та математики АН УССР, 11, 1948, 97—112.

Крейт и Вольф (Kreith K., Wolf F.)

[1] On the effect on the essential spectrum of the change of the basic region, *Indag. Math.*, 22 (1960), 321—315.

Кук (Cook J. M.)

[1] Convergence to the Moller wavematrix, *J. Math. Phys.*, 36 (1957), 82—87.

[2] Asymptotic properties of a boson field with given source, *J. Math. Phys.*, 2 (1961), 33—45.

Кумано-Го (Kumano-go H.)

[1] On singular perturbation of linear partial differential equations with constant coefficients. II, *Proc. Japan Acad.*, 35 (1959), 541—546.

Курода (Kuroda S. T.)

[1] On a theorem of Weyl — von Neumann, *Proc. Japan Acad.*, 34 (1958), 11—15.

[2] On the existence and the unitary property of the scattering operator, *Nuovo Cimento*, 12 (1959), 431—454.

[3] Perturbation of continuous spectra by unbounded operators. I, *J. Math. Soc. Japan.*. 11 (1959), 247—262.

[4] Perturbation of continuous spectra by unbounded operators. II, *J. Math., Soc. Japan.*, 12 (1960), 243—257.

[5] On a generalization of the Weinstein-Aronszajn formula and the infinite determinant, *Sci. Papers Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo*, 11 (1961), 1—12.

[6] On a paper of Green and Lanford, *J. Math. Phys.*. 3 (1962), 933—935.

[7] Finite-dimensional perturbation and a representation of scattering operator, *Pacific J. Math.*, **13** (1963), 3305—1318.

[8] On a stationary approach to scattering problem, *Bull. Am. Math. Soc.*, **70** (1964), 556—560.

Кэньел и Шехтер (Kaniel S., Schechter M.)

[1] Spectral theory for Fredholm operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1963), 423—448.

Ладыженская О. А.

[1] Об уравнениях с малым параметром при старших производных в линейных дифференциальных уравнениях с частными производными, *Вестн. Ленингр. ун-та*, № 7 (1957), 104—120.

Ладыженская О. А. и Фаддеев Л. Д.

[1] К теории возмущений непрерывного спектра, *ДАН*, 120 (1958), 1187—1190.

Лакс и Мильграм (Lax P. D., Milgram A. N.)

[1] Parabolic equations. Contributions to the theory of partial differential equations, Annals of Mathematics Studies, No. 33, 167—190, Princeton, 1954.

Лакс и Филлипс (Lax P. D., Phillips R. S.)

[1] Scattering theory, *Bull. Am. Math. Soc.*, **70** (1964), 130—142.

Лангер (Langer H.)

[1] Über die Üurzeln eines maximalen dissipativen Operators, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 13 (1962), 415—424.

Левинсон (Levinson N.)

[1] The first boundary value problem for $\varepsilon \Delta u + Au_x + By_y + Cu = D$ for small $\varepsilon$, *Ann. Math.*, 51 (1960), 429—445.

Лёвнер (Löwner K.)

[1] Über monotone Matrixfunctionen, *Math. Z.*, 38 (1934), 177—216.

Лившиц Б. Л.

[1] Метод возмущений для оператора простой структуры, *ДАН*, **133** (1960), 800—803.

Лившиц М. С.

[1] О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, *Матем. сб.*, 34 (1945), № 1, 145—199.

Лидский В. Б.

[1] О собственных значениях суммы и произведения симметрических матриц, *ДАН*, 75 (1950), 679—772.

Лионс (Lions J. L.)

[1] Espaces d'interpolation et domaines de puissances fractionnaires d'opérateurs. *J. Math. Soc. Japan*, **14** (1962), 233—241.

Лифшиц И. М.

[1] К теории регулярных возмущений, *ДАН*, 48 (1945), 83—86.

[2] О вырожденных регулярных возмущениях. I. Дискретный спектр, *Ж. экспер. и теор. физ.*, (1947), № 11, 1017—1025.

[3] О вырожденных регулярных возмущениях. II. Квазинепрерывный и непрерывный спектры, *Ж. экспер. и теор. физ.* (1947), № 12, 1076—1089.

[4] Об одной задаче теории возмущений, связанной с квантовой статистикой, *УМН*, 7 (1962), вып. 1, 171—180.

Люмер и Филлипс (Lumer G., Phillips R. S.)

[1] Dissipative operators in a Banach space, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 679—698.

Маслов В. П.

[1] Теория возмущений при переходе от дискретного спектра к непрерывному, *ДАН*, **109** (1956), № 2, 267—270.

[2] Теория возмущений линейных операторных уравнений и проблема малого параметра в дифференциальных уравнениях, *ДАН*, **111** (1956), 531—534.

[3] Метод теории возмущений для отыскания спектра обыкновенных дифференциальных операторов с малым параметром при старшей производной, *ДАН*, 111 (1956), 977—980.

Мозер (Moser J.)

[1] Störungstheorie des kontinuerlichen Spektrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, *Math. Ann.*, 125 (1953), 366—393.

[2] Singular perturbation of eigenvalue problems for linear differential equations of even order, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), 251—278.

Моргенштерн (Morgenstern D.)

[1] Singuläre Störungstheorie partieller Differentialglecihungen, *J. Rational Mech. Anal.*, 5 (1956), 204—216.

Моцкин и Тауская (Motzkin T. S., Taussky O.)

[1] Parirs of matrices with property *L*, *Trans. Am. Math. Soc.*, **73** (1952), 108—114.

[2] Pairs of matrices with property *L*. II, *Trans. Am. Math. Soc.*, 80 (1955), 387—401.

Нагумо (Nagumo M.) On singular perturbation of linear partial differentia equ ations with constant coefficients. I, *Proc. Japan Acad.*, 35 (1959), 449—454.

Нейман (von Neumann J.)

[1] Charakterisierung des Spectrums eines Integraloperators, Actualités Sci. Ind., No. 229, 1935, 38—55.

Нельсон (Nelson E.) Feynman inetgrals and the Schrödinger equation, *J. Math. Phys.*, 5 (1964), 332—343.

Нижник Л. П.

[1] Задача рассеяния при нестационарном возмущении, *ДАН*, 132 (1960), 40—43.

Нойбауэр (Neubauer G.)

[1] Über den Index abgeschlossener Operatoren in Banachräumen, *Math. Ann.*, 160 (1965), 93—130.

[2] Über den Index abgeschlossener Operatoren in Banachräumen. II, *Math. Ann.*, 162 (1965), 92—119 .

Ньюбар (Newburgh J. D.)

[1] The variation of spectra, *Duke Math., U.*, 18 (1951), 165—176.

[2] A topology for closed operators, *Ann. Math.*, 53 (1951), 250—255.

Повзнер А. Я.

[1] О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора $-\Delta u + cu$, *Матем. сб.*, 32, (1953), № 1, 109—156.

Порат (Porath G.)

[1] Störungstheorie der isolierten Eigenwerte für abgeschlossene lineare Transformationen im Banachschen Raum, *Math. Nachr.*, 20 (1959), 175—230.

Проссер (Prosser R. T.)

[1] Relativistic potential scattering, *J. Math. Phys.*, 4 (1963), 1048—1054.

[2] Convergent perturbation expansions for certain wave operators, *J. J. Math. Phys.*, 5 (1964), 708—713.

Путнам (Putnam C. R.)

[1] On the continuous spectra of singular boundary value problems, *Canad. J. Math.*, 6 (1954), 420—426.

[2] Continuous spectra and unitary equivalence, *Pacific J. Math.*, 7 (1957), 993—995.

[3] Commutators and absolutely continuous operators, *Trans. Am. Math. Soc.*, 87 (1958), 513—525.

[4] On differences of unitarily equivalent self-adjoint operators, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 4 (1960), 103—107.

[5] A note on Toeplitz matrices and unitary equivalence, *Boll. Un. Mat. Ital.*, 15 (1960), 6—9.

[6] Commutators, perturbations and unitary spectra, *Acta Math.*, 106 (1961), 215—232.

[7] On the spectra of unitary halfscattering operators, *Quart. Appl. Math.*, 20 (1962/63), 85—88.

[8] Absolute continuity of certain unitary and half-scattering operators, *Proc. Am. Math. Soc.*, 13 (1962), 844—846.

[9] Absolutely continuous Hamiltonian operators, *J. Math. Anal. Appl.*, 7 (1963), 163—165.

[10] Commutators, absolutely continuous spectra and singular integral operators, *Am. J. Math.*, 86 (1964), 310—316.

Растон (Ruston A. F.)

[1] On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space, *Proc. London Math. Soc.*, 33 (1951), 109—124.

Рейто (Rejto P. A.)

[1] On gentle perturbations. I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 16 (1963), 279—303.

[2] On gentle perturbations. II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 17 (1964), 257—292.

Реллих (Rellich F.)

[1] Störungstheorie der Spektralzerlegung. I, *Math. Ann.*, 113 (1937), 600—619.

[2] Störungstheorie der Spektralzerlegung. II, *Math. Ann.*, 113 (1937), 677—685.

[3] Störungstheorie der Spektralzerlegung. III, *Math. Ann.*, 116 (1939), 555—570.

[4] Störungstheorie der Spektralzerlegung. IV, *Math. Ann.*, 117 (1940), 356—382.

[5] Störungstheorie der Spektralzerlegung. V, *Math. Ann.*, 118 (1942), 462—484.

[6] Strörungstheorie der Spektralzerlegung, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1950, V. 1, 606—613.

[7] New results in the perturbation theory of eigenvalue problems, Nat. Bur. Standards Appl. Math. Ser., 29 (1953), 95—99.

[8] Perturbation theory of eigenvalue problems, Lecture Notes, New York Univ., 1953.

Риддел (Riddell R. C.)

[1] Spectral concentration for selfadjoint operators, Thesis, Univ. Calif., 1965.

Роде (Rohde H.-W.)

[1] Über die Symmetrie elliptischer Differentialoperatoren, *Math. Z.* 86 (1964), 21—33.

Розенблум (Rosenbloom P.)

[1] Perturbation of linear operators in Banach spaces, *Arch. Math.*, 6 (1955), 89—101.

Розенблюм (Rosenblum M.)

[1] Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence, *Pacific J. Math.*, 7 (1957), 997—1010.

[2] The absolute continuity of Toeplitz's matrices, *Pacific J. Math.*, 10 (1960), 987—996.

Рота (Rota G. C.)

[1] Extension theory of differential operators. I, *Comm. Pure Appl. Math.*, 11 (1958), 23—65.

Саито (Saito I.)

[1] The perturbation method due to the small change in the shape of the boundary, *J. Phys. Soc. Japan.*, 15 (1960), 2069-2080.

Секефальви-Надь (Sz.-Nagy B.)

[1] Perturbations des transformations autoadjaointes dans l'espace de Hilbert, *Comment. Math. Helv.*, 19 (1946/47), 347—366.

[2] Perturbations des transformations linéaires fermées, *Acta Sci. Math. Szeged.*, 14 (1951), 125—137.

[3] On the stability of the index of unbounded linear transformations, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 3 (1952), 49—51.

[4] On a spectral problem of Atkinson, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 3 (1952), 61—66.

Сигел (Segel L. A.)
[1] Application of conformal mapping to boundary perturbation problems for the membrane equation, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 8 (1961), 228—262.

Сидзута (Shizuta Y.)
[1] Eigenfunction expansion associated with the operator $-\Delta$ in the exterior domain, *Proc. Japan Acad.*, 39 (1963), 656—660.
[2] On fundamental equations of spatially independent problems in neutron thermalization theory, *Progr. Theor. Phys.*, 32 (1964), 489—511.

Станкевич И. В.
[1] К теории возмущения непрерывного спектра, *ДАН* (1962), 279—282.

Титчмарш (Titchmarsh E. C.)
[1] Some theorems on perturbation theory, *Proc. Roy. Soc. London*, ser. A, **200** (1949), 34—46.
[2] Some theorems on perturbation theory. II, *Proc. Roy. Soc., London*, ser. A, **201** (1950), 473—479.
[3] Some theorems on perturbation theory. III, *Proc. Roy. Soc. London*, ser. A, 207 (1951), 321—328.
[4] Some theorems on perturbation theory. IV, *Proc. Roy. Soc. London*, ser. A., 210 (1951), 30—47.
[5] Some theorems on perturbation theory. V, *J. Analyse Math.*, 4 (1954/56), 187—208.

Троттер (Trotter E. F.)
[1] Approximation of semi-groups of operators, *Pacific J. Math.*, 8 (1958), 887—919.
[2] On the product of semi-groups of operators, *Proc. Am. Math. Soc.*, 10 (1959), 545—551.

Уилсон (Wilson A. H.)
[1] Perturbation theory in quantum mechanics. I, *Proc. Roy. Soc. London*, ser. A, 122 (1929), 589—598.

Уотсон (Watson G. N.)
[1] The convergence of the series in Mathieu's functions, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 33 (1915), 25—30.

Фаддеев Л. Д.
[1] Строение резольвенты оператора Шрёдингера системы трех частиц и задача рассеяния, *ДАН*, 145 (1962), 301—304.
[2] Математические вопросы квантовой теории рассеяния для системы трех частиц. *Труды Матем. ин-та АН СССР*, 69, 1963, 1—122.
[3] О модели Фридрихса в теории возмущений непрерывного спектра, *Труды Матем. ин-та АН СССР*, 73, 1964, 292—313.

Филлипс (Phillips R. S.)
[1] Perturbation theory for semigroups of linear operators, *Trans. Am. Math. Soc.*, 74 (1954), 199—221.
[2] Dissipative hyperbolic systems, *Trans. Am. Math. Soc.*, 86 (1957), 109—173.
[3] Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, 90 (1959), 193—254.
[4] Dissipative operators and parabolic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, 12 (1959), 249—276.

Фогель (Foguel S. R.)
[1] A perturbation theorem for scalar operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, 11 (1958), 293—295.
[2] Finite dimensional perturbations in Banach spaces, *Am. J. Math.*, 82 (1960), 260—270.

Фрейденталь (Freudenthal H.)

[1] Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschrankter Hermiteschre Operatoren, *Proc. Acad. Amsterdam*, 39 (1936), 832—833.

Фридман (Friedman B.)

[1] Operators with a closed range, *Comm. Pure Appl. Math.*, 8 (1955), 539—550.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)

[1] Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Specktralzerlegung von Differentialoperatoren. I, *Math. Ann.*, **109** (1934), 465—487.

[2] Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators eines Integraloperators, *Math. Ann.*, **115** (1938), 249—272.

[3] On the perturbation of continuous spectra, *Comm. Pure Appl. Math.*, **1** (1948), 361—406.

[4] Zur asymptotischen Beschreibung von Streuprozessen, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl., IIb, 1952, 43—50.

[5] Asymptotic phenomena in mathematical physics, *Bull. Am. Math. Soc.*, **61** (1955), 485—504.

[6] Symmetric positive linear differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333—418.

Фридрихс и Рейто (Friedrichs K. O., Rejto P. A.)

[1] On a perturbation through which a discrete spectrum becomes continuous, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15** (1962), 219—235.

Фримэн (Freeman J. M.)

[1] Perturbations of the shift operator, *Trans. Am. Math. Soc.*, **114** (1965), 251—260.

Хайнц (Heinz E.)

[1] Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Ann.*, **123** (1951), 415—438.

Хартман (Hartman P.)

[1] On the essential spectra of symmetric operators in Hilbert space, *Am. J. Math.*, 75, 229—240 (1953).

Харрис (Harries W. A., jr.)

[1] Singular perturbations of twopoint bundary problems for systems of ordinary differential equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 5 (1960), 212—225.

[2] Singular perturbations of eigenvalue problems, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 7 (1961), 224—241.

Хельвиг (Hellwig B.)

[1] Ein Kriterium für die Selbstadjungiertheit elliptischer Differentialoperatoren im $R_n$, *Math. Z.*, 86 (1964), 255—262.

Хилдинг (Hilding S. H.)

[1] On the closure of disturbed complete orthonormal sets in Hilbert space, Ark. Mat. Astr. Fys., 32 B, No. 7 (1946).

Хукухара (Hukuhara M.)

[1] Théorie des endomorphismes de l'espace vectoriel, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, sect. I, **7** (1954), 129—192; 305—332.

Хунцикер (Hunziker W.)

[1] Regularitätseigenschaften der Streuamplitude im Fall der Potentialstreuung, *Helv. Phys. Acta*, **34** (1961), 593—620.

Хью (Huet D.)

[1] Phénomènes de perturbation singulière, *C. R. Acad., Sci. Paris.*, **244** (1957), 1438—1440; **246** (1958), 2096—2098; **247** (1958), 2273—2276; **248** (1959) 58—60.

[2] Phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes aux limites, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **10** (1960), 1—96.

[3] Perturbations singulières, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **257** (1963), 3264—3266.

[4] Perturbations singulières, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **258** (1964), 6320—6322.

[5] Perturbations singulières relatives au problème de Dirichlet dans un demi-espace, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **18** (1964), 425—448.

[6] Sur quelques problèmes de perturbation singulière, *Portugal. Math.* (в печати).

[7] Perturbations singulières, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **259** (1964), 4213—4215.

Хэк (Hack M. N.)

[1] On convergence to the Møller wave operators, *Nuovo Cimento*, **9** (1958), 731—733.

[2] Wave operators in multichannel scattering, *Nuovo Cimento*, **13** (1969), (1959), 231—236.

Шварц (Schwartz J.)

[1] Perturbations of spectral operators and applications. I. Bounded perturbations, *Pacific J. Math.*, **4** (1954), 415—458.

[2] Some non-selfadjoint operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 609—639.

[3] Some non-selfadjoint operators. II. A family of operators yielding to Friedrichs'method, *Comm. Pure Appl. Math.*, **14** (1961), 619—626.

[4] Some results on the spectra and spectral resolutions of a class of singular integral operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **15** (1962), 75—90.

Шефке (Schafke R. W.)

[1] Zur Parameterabhängigkeit beim Anfangswertproblem für gewohnliche lineare Differentialgleichungen, *Math. Nachr.*, **3** (1949), 20—39.

[2] Zur Parameterabhängigkeit bei gewohnlichen linearen Differentialgleichungen mit singulären Stellen der Bestimmtheit, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 45—50.

[3] Über Eigenwertprobleme mit zwei Parametern, *Math. Nachr.*, **6** (1951), 109—124.

[4] Verbesserte Konvergenz- und Fehlerabschätzungen für die Störungsrechung, *Z. angew. Math. Mech.*, **33** (1953), 255—259.

[5] Zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Ann.*, **133** (1957), 219—234.

Шехтер (Schechter M.)

[1] Invariance of the essential spectrum, *Bull. Am. Math. Soc.*, **71** (1965), 365—367.

[2] On the essential spectrum of an arbitrary operator. I, *J. Math. Anal. Appl.*, **13** (1966), 205—215.

[3] On the essential spectrum of an arbitrary operator. II (в печати).

Штуммель (Stummel F.)

[1] Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen, *Math. Ann.*, **132** (1956), 150—176.

Шмульян Ю. Л.

[1] Вполне непрерывные возмущения операторов, *ДАН*, **101** (1955), 35—38.

Шрёдер (Schröder J.)

[1] Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung bei linearen Eigenwertproblemen mit Operatoren eines Hilbertschen Raumes, *Math. Nachr.*, **10** (1953), 113—128.

[2] Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung fur lineare Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, *Z. angew. Math. Mech.*, **34** (1954), 140—149.

[3] Störungsrechnung bei Eigenwert- und Verzweigungsaufgaben, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **1** (1958), 436—468.

Шрёдингер (Schrödinger E.)
[1] Quantisierung als Eigenwertproblem (Dritte Mitteilung: Strörungstheorie, mit Anwendung auf den Starkeffekt der Balmerlinien), *Ann. Physik*, 80 (1926), 437—490.

Штраус (Strauss W. A.)
[1] Scattering for hyperbolic equations, *Trans. Am. Math. Soc.*, 108 (1963), 13—37.
[2] Les opérateurs d'onde pour des équations d'onde non linéaires indépendants du temps, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 256 (1963), 5045—5046.

Юд (Yood B.)
[1] Properties of linear transformations preserved under addition of a completely continuous transformation, *Duke Math. J.* 18 (1951), 599—612.

Яух (Jauch J. M.)
[1] Theory of the scattering operator, *Helv. Phys. Acta*. 31 (1958), 127—158.
[2] Theory of the scattering operator. II. Multichannel scattering, *Helv. Phys. Acta*, 31 (1958), 661—684.

Яух и Циннес (Jauch J. M.. Zinnes I. I.)
[1] The asymptotic condition for simple scattering systems, *Nuovo Cimento*, 11 (1959), 553—567.

## УЧЕБНИКИ И МОНОГРАФИИ

Александров и Хопф и т. д. (Alexandroff P., Hopf H.)
⟦1⟧ Topologie. I, Berlin, Springer, 1935.

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М.
⟦1⟧ Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2-е изд., «Наука», М., 1966.

Банах (Banach S.)
⟦1⟧ Théorie des opérations linéairez, Warsaw, 1932.

Гельфанд И. М.
⟦1⟧ Лекции по линейной алгебре, «Наука», М., 1966.

Голдберг (Golbberg S.)
⟦1⟧ Unbounded linear operators with applications, N. Y., McFraw-Hill, 1966.

Гофман и Кунце (Hoffman K., Kunze R.)
⟦1⟧ Linear algebra, Englewood Gliffs, Trentice-Hall, 1961.

Гротендик (Grothendieck A.)
⟦1⟧ Produits tenzoriels topologiques et espaces nucleaires, Mem. Am. Math. Soc., No. 16, 1955.

Гулд (Gould S. H.)
⟦1⟧ Вариационные методы в задачах о собственных значениях, «Мир», М., М., 1970.

Данфорд и Шварц (Dunford N., Schwartz J. T.)
⟦1⟧ Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, М., 1962.
⟦2⟧ Линейные операторы. Спектральная теория, «Мир», М., 1966.

Диксмье (Dixmier J.)
⟦1⟧ Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertein, Paris, Gauthiers-Villars, 1957.

Дьёдонне (Dieudonne F.)
⟦1⟧ Основы современного анализа, «Мир», М., 1964.

Заанен (Zaanen A. C.)
⟦1⟧ Linear analysiz, N. Y., Interseience, 1953.

Иосида (Yosida K.)
[1] Функциональный анализ, «Мир», М., 1967.

Кембл (Kemble E. C.)
[1] The fundemental princeiples of quantum mechanics, N. Y., Dover, 1958.

Кнопп (Knopp K.)
[1], [2] Theory of functions (English translation), Parts I, II, N. Y., Dover, 1945, 1947.

Коддингтон и Левинсон (Coddington E. A., Levinson N.)
[1] Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.

Курант и Гильберт (Courant R., Hilbert D.)
[1] Методы математической функции, т. I, Гостехиздат, М., 1951.

Лионс (Lions J. L.)
[1] Equations differentielles operationnelles et problemes aux limited, Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer, 1961.

Лорх (Lorch E. R.)
[1] Spectral theory, N. Y., Oxford University Press, 1962.

Люстерник Л. А. и Соболев В. И.
[1] Элементы функционального анализа, 2-е изд., «Наука», М., 1965.

Морс и Фешбах (Morse P. M.. Feshbach H.)
[1] Методы теоретической физики, т. 2, ИЛ, М., 1958.

Наймарк М. А.
[1] Линейные дифференциальные операторы, 2-е изд., «Наука», М., 1969.

Пойа и Сегё (Pólya G., Szegö G.)
[1] Задачи и теоремы анализа, ОНТИ, 1937.

Рихтмайер и Мортон (Richtmyer R. D.; Morton K. W.)
[1] Разностные методы решения краевых задач, «Мир», М., 1972.

Риккарт (Rickart C. E.)
[1] General theory of Banach algebras, Princeton D. van Nostrand, 1960.

Рисс и Секефальви-Надь (Riesz F., Sz.-Nagy B.)
[1] Лекции по функциональному анализу, ИЛ., М., 1954.

Ройден (Royden H. L.)
[1] Real analysis, N. Y. Macmillan, 1963.

Рэлей (Lord Rayleigh)
[1] The theory of Sound. v. 1, London, 1927.

Рекефальви-Надь (Sz.-Nagy)
[1] Spektraldarstellung linearer transformationen des Hilbertschen Raumes. Engelnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin, Springer, 1942.

Соболев С. Л.
[1] Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.

Стоун (Stone M. H.)
[1] Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Providence, Am. Math. Soc. Colloq. Publ., v. 15, 1932.

Тейлор (Taylor A. E.)
[1] Introduction to finctional analysis, N. Y., Wiley, 1961.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)
[1] Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, «Мир», М., 1969.

Халмош (Halmos P. R.)

[1] Introduction to Hilbert space and the theory of Spectral multiplicity, N. Y., Chelsea, 1951.

[2] Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.

Харди, Литлвуд и Пойа

[1] Неравенства, ИЛ, М., 1948.

Хаусдорф (Hausdorff F.)

[1] Mengenlehre. 3. Aufl. Berlin-Leipzig, W. de Gruyter, 1935.

Хельвиг (Hellyig G.)

[1] Differentialoperatoren der mathematischen Physik, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1964.

Хилле и Филлипс (Hille E., Phillips R. S.)

[1] Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ., М., 1962.

Шаттен (Schatten R.)

[1] Norm ideals of completely continuous operators, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin-Gottingen-Heidelberg, Springer, 1942.

Шифф (Schiff H. I.)

[1] Квантовая механика, ИЛ, М., 1957.

Шрёдингер (Schrödinger E.)

[1] Collected papers on wave mechanics, N. Y.-Toronto-London, McGraw-Hill., 1955.

Эглстон (Eggleston E. G.)

[1] Convexity, Cambridge University Press, 1963.

## ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

[1*] Базь А. И.. Зельдович Я. Б. и Переломов А. М., Рассеяние и распады в нерелятивистской квантовой механике, «Наука», М., 1971.

[2*] Белопольский А. Л. и Бирман М. Ш., Существование волновых операторов в теории рассеяния для пары пространств, *ИАН*, 32 (1968), 1162—1175.

[3*] Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Наукова думка, Киев, 1965.

[4*] Бирман М. Ш., О спектре сингулярных граничных задач, *Матем. сб.*, 55 (1961), № 2, 125—174.

[5*] Бирман М. Ш., Задачи рассеяния для дифференциальных операторов, *Функ. анализ*, 3 (1969), § 3, 1—16.

[6*] Бирман М. Ш., Задачи рассеяния для дифференциальных операторов при возмущении пространства, *ИАН*, сер. матем., 35 (1971) № 2, 440—455.

[7*] Бирман М. Ш. и Соломяк М. З., Двойные операторные интегралы Стильтьеса. I, II, сб. «Проблемы математической физики», ЛГУ, вып. 1, 1966, 33—66; вып. 2, 1967, 26—60.

[8*] Буслаев В. С., Рассеянные плоские волны, спектральные асимптотики и формулы следа во внешних задачах, *ДАН*, 197 (1971), 999—1002.

[9*] Буслаев В. С., О формулах следа в многоканальных задачах, Записки научн. семинаров ЛОМИ, т. 27, 1972, 47—70.

[10*] Буслаев В. С. и Матвеев В. Б., Волновые операторы для уравнения Шрёдингера с медленно убывающим потенциалом, *ТМФ*, 2 (1970), № 3, 367—376.

[11*] Буслаев В. С. и Фаддеев Л. Д., О формулах следов для дифференциального сингулярного оператора Штурма — Лиувилля, *ДАН*, 132 (1960), 13—16.

[12*] Владимиров В. С., Уравнения математической физики, «Наука», 1971.

[13*] Гатауллин Т. М. и Карасев М. В., О возмущении квазиуровней оператора Шрёдингера с комплексным потенциалом, *Теор. и мат. физ.*, 9 (1971), № 2, 252—263.

[14*] Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1959.

[15*] Глазман И. М., Прямые методы качественного анализа сингулярных дифференциальных операторов, М., 1965.

[16*] Дейч В. Т., Приложения метода ядерных возмущений в теории рассеяния для пары пространства, *Изв. ВУЗ-ов.*, Математика, № 6, (1971), 33—42.

[17*] Като (Kato T.), Scattering theory with two Hilbert spaces, *J. Funct. Anal.*, 1 (1967), 342—369.

[18*] Като (Kato T.), Wave operators similarity for some nonselfadjoint operators, *Math. Ann.*, 162 (1966), 258—279.

[19*] Като (Kato T.), Scattering theory and perturbation of continuous spectra, Actes du Congres Int. de Math., Gauthier-Villars, Paris, 1970, 135—140.

[20*] Като и Курода (Kato T., Kuroda S. T.), Theory of simple scattering and eigenfunction expansions, Functional Analysis and Related fields, Springer, 1970, 99—131.

[21*] Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», 1972.

[22*] Комб (Combes J. M.), Time-dependent approach to nonrelativistic multichannel scattering, *Nuovo Cimento*, 64 A (1969), № 1, 111—144.

[23*] Крейн М. Г., О некоторых новых исследованиях по теории возмущений самосопряженных операторов, сб. «Первая летняя математическая школа», т. 1, Киев, 1964.

[24*] Курода (Kuroda S. T.), Some remarks on scattering for Schrödinger operators, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, *sect.* I A, **17** (1970), 313—329.

[25*] Курода (Kuroda S. T.), Spectral representations and the scattering theory for Schrödinger operators, Actes du Congres Int. Math., v. 2, Gauthier-Villars, Paris, 1970, 441—445.

[26*] Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М., Квантовая механика. Нерелятивистская теория, Физматгиз, 1963.

[27*] Лакс и Филлипс (Lax P. D., Phillips R. S.), Теория рассеяния, «Мир», М., 1971.

[28*] Лакс и Филлипс (Lax P. D., Phillips F. S.), Scattering theory, *Rocky Mountain J. Math.* (в печати).

[29*] Лакс и Филлипс (Lax P. D., Phillips R. S.), Decaying Modes for Wave Equations in exterior of an obstacle, *Comm. Pure Appl. Math.*, 22 (1969), 737—787.

[30*] Лин (Lin S. C.), Wave operators and similarity for generators of semigroups Banach spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 139 (1969), 469—494.

[31*] Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, Изд. МГУ, М., 1965.

[32*] Маслов В. П., Операционные методы, «Наука», М. (в печати).

[33*] Матвеев В. Б. и Скриганов М. М., Волновые операторы для уравнения Шрёдингера с быстро осциллирующим потенциалом, *ДАН*, **202** (1972), 755—758.

[34*] Мотидзуку (Mochizuku K.), On the large perturbations by a class of non-selfadjoint operators, *J. Math. Soc. Japan.*, **19** (1967), 123—158.

[35*] Путнам (Putnam C. R.), Commytation properties of Hilbert space operators and related tepics, Berlin, Springer, 1967.

[36*] Реллих (Rellich F.), Störumgstheory der Spektalzerlegung. I, *Math. Ann.*, **113** (1936), 600—619.

[37*] Реллих (Rellich F.), Störumgstheory der Spektralzerlegung. II, *Math. Ann.*, **113** (1936), 677—685.

[38*] Реллих (Rellich F.), Störumgstheory der Spektralzerlegung. III, *Math. Ann.*, **116** (1949), 555—570.

[39*] Сахнович Л. А., Диссипативные операторы с абсолютно непрерывным спектром, Труды ММО, т. 19, 1968, 211—270.

[40*] Сахнович Л. А., Принцип инвариантности для обобщенных волновых операторов, *Функц. анализ*, 5 (1971), № 1.

[41*] Сигалов М. Г., Интегральные возмущения, *Сибирский мат. ж.*, **7** (1966), № 2, 375—408.

[42*] Соколов А. А., Лоскутов Ю. М. и Тернов И. М., Квантовая механика и атомная физика, «Просвещение», 1970.

[43*] Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, ГИТТЛ, 1953.

[44*] Уилкокс (Wilcox C. H.), Wave operators and asymptotic solutions of wave propagation problem of classical physics, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **22** (1966), 37—78.

[45*] Фаддеев Л. Д., Разложение по собственным функциям оператора Лапласа на фундаментальной области дискретной группы на плоскости Лобачевского, Труды ММО, т. 17, 1967, 323—350.

[46*] Фейнман (Feynman R.), An operators calculus having applications in quantum electrodynamics, *Phys. Rev.*, 84 (2) (1951), 108—128. [Русский перевод: Фейнман Р. П., Об операторном исчислении, имеющем приложения в квантовой электродинамике, Сб. «Проблемы современной физики», № 3, ИЛ, М., 1955, 37—59.]

[47*] Филлипс (Phillips R. S.), Scattering theory for hyperbolic systems, Actes du Congres Int. Math., v. 2, Cauthier-Villars, Paris, 1970, 778—784.

[48*] Фридрихс (Friedrichs K. O.), Über die Spectralzerlegung eines Integral-operators, *Math. Ann.*, 115 (1938), 259—272.

[49*] Хепп (Hepp K.), On the quantum mechanical $N$-order problem, *Helv. Phys. Acta*, **42** (1969), 425—459.

[50*] Шабат Б. В., Введение в комплексный анализ, «Наука», 1969.

[51*] Шилов Г. Е., Математический анализ. Специальный курс, Физматгиз, 1961.

[52*] Шмидт (Schmidt G.), Spectral and scattering theory for Maxwell's equatins, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **28** (1968), 289—322.

[53*] Шуленберг и Уилкокс (Schulenberg J. R., Wilcox C. H.), Completeness of the wase operators for perturbations of uniformly propagative systems, *J. Functional Analysis*, **7** (1971), 447—474.

[54*] Якубовский О. А., Строение резольвенты $R$ $(\zeta)$ оператора Шрёдингера системы четырех частиц при комплексных $\zeta$, *Вест. Ленингр. ун-та*, № 19 (1968), 98—101.

# ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## *Глава III. Введение в теорию операторов в банаховых пространствах* . . . . . 162

## *Глава VI. Полуторалинейные формы в гильбертовых пространствах и ассоциированные операторы* . . . . . . . . . . . . . 386

## *Глава VII. Аналитическая теория возмущений* 458

## *Глава IX. Теория возмущений полугрупп операторов* . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 592

## *Глава X. Возмущение непрерывных спектров и унитарная эквивалентность* . . . . 637

Т. КАТО

**ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ**
**ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ**

Редакторы *В. И. Авербух, Д. Ф. Борисова* и *И. А. Маховая*
Художник *Б. П. Кузнецов*. Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Н. А. Иовлева*

Сдано в набор 29/IV 1972 г. Подписано к печати 9/X 1972 г.
Бумага № 1 $60\times90^1/_{16}$=23,13 бум. л., 46,25 печ. л. Уч.-изд. л. 47,78.
Изд. № 1/6135. Цена 3 р. 65 к. Зак. 0292

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Московская типография № 7 «Искра революции»
Государственного Комитета Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Москва, Трехпрудный пер., 9