

Оглавление

CONTINUOUS
MODEL
THEORY

by

Chen Chung Chang
and
H. Jerome Keisler

PRINCETON, NEW JERSEY
PRINCETON UNIVERSITY PRESS

1966

Г. Дж. Кейслер
Чэн Чень-чунь

ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ МОДЕЛЕЙ

Перевод с английского
Г. А. Бурле

Под редакцией
А. Г. Драгалина

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1971

Небольшая монография, посвященная теории классов моделей—области математической логики, интенсивно развивавшейся в течение последних 10—15 лет. Содержание монографии—обобщение теории моделей на случай произвольного пространства истинности. Такого рода модели сейчас широко используются в математике. Для чтения книги требуются лишь знание основ топологии и теории множеств и элементарные сведения по математической логике. Изложение сопровождается упражнениями и задачами.

Книга будет полезна не только специалистам, но и тем, кто хочет начать работать в этом плодотворно развивающемся направлении математической логики или хотя бы получить первоначальное представление о нем.

Редакция литературы по математическим наукам

Предисловие редактора перевода

Предлагаемая вниманию советского читателя небольшая монография, написанная двумя видными специалистами по теории моделей, несомненно, привлечет внимание как специалистов-логиков, так и лиц, интересующихся приложениями логики. В книге систематически развивается один из интересных разделов общей теории многозначных логик — логики со значениями в топологическом пространстве. В советской математической литературе многозначные логики, главным образом логики с конечным числом значений, исследовались лишь с точки зрения их приложения в теории автоматов, технической кибернетике, реже как средство для изучения неклассических логик высказываний. Эта монография знакомит с новой областью исследования многозначных логик — теорией прикладных аксиоматических теорий в многозначных логиках, общей теорией моделей многозначных логик. Большинство результатов, изложенных в книге, принадлежит авторам. С большим искусством и изобретательностью переносят они классические результаты и методы теории моделей (например, теорема Лёвенгейма — Скolemа или техника ультрапроизведений) на случай логик со значениями в топологическом пространстве.

В книге широко используется достаточно нетривиальный современный аппарат теоретико-множественной топологии. Можно надеяться, что в дальнейшем большие и содержательные разделы математики, такие, как функциональный анализ, теория вероятностей и др., также найдут свое применение в этой области. С другой стороны, и общая теория многозначных логик, возможно, будет в состоянии точно

описать такие мало разработанные нестандартные логики, как вероятностная, индуктивная, логики с различного рода модальностями и т. п. Дальнейшие исследования в этой области тем более необходимы, что некоторые весьма естественные логики (например, интуиционистская) не укладываются в схему, предложенную авторами. Кроме того, в последнее время интенсивно исследуются модели, принимающие значения в булевых алгебрах. Такие модели нашли интересные приложения для установления независимости математических проблем.

Формально чтение книги не предполагает от читателя никаких знаний, кроме некоторых начальных сведений по общей теории множеств, но практически необходима довольно высокая математическая культура и очень желательно знакомство с началами классической теории моделей. Более того, сухой стиль изложения, отсутствие развернутых сравнений, аналогий и разъяснений делает книгу в некоторых местах несколько трудной для чтения.

Тем не менее книга представляет несомненный интерес как первый и серьезный шаг в новой области исследования.

A. Драгалин

Предисловие

Эта монография содержит изложение теории моделей для случая, когда множеством значений истинности служит компактное хаусдорфово пространство.

Совокупность результатов такого рода может быть названа теорией теорий моделей.

Тем, кто интересуется двузначной теорией моделей, хорошо известно, какое огромное развитие получила эта область за последние пятнадцать лет. При этом из множества результатов, приведших к такому развитию, хотя они весьма разнообразны, можно выделить центральную тему. Эта тема касается нахождения связей между алгебраическими свойствами некоторого класса K моделей и чисто синтаксическим описанием множества Δ предложений языка первой ступени, характеризующего этот класс K . Таким образом, многие результаты имеют следующий вид: для того чтобы класс K был замкнут относительно тех или иных алгебраических операций, необходимо и достаточно, чтобы предложения из Δ были представимы в определенной форме. Во всех этих результатах важную роль играет теорема о компактности. Сравнительно недавно был найден один общий метод получения такого рода результатов, использующий понятие специальной модели.

В настоящем исследовании получены некоторые результаты указанного рода для случая, когда рассматривается класс \mathcal{M} моделей с пространством X в качестве множества значений истинности. В случае когда $X = \{0, 1\}$, модели из \mathcal{M} становятся обычными (двузначными) моделями. В общем случае, когда X есть произвольное множество, под моделью A из \mathcal{M}

понимается произвольное непустое множество R и совокупность \mathcal{A} функций, отображающих наборы по n элементов множества R в множество X . Если множество X не имеет дополнительно какой-либо структуры, то, как и следует ожидать, не так уж и много можно получить. Если же предположить, что в X определена структура компактного хаусдорфова топологического пространства, то появляется возможность определить множество Σ предложений, используя определенные на множестве X непрерывные функции в качестве логических связок, а непрерывные функции, определенные для подмножеств множества X , в качестве қванторов. Коль скоро мы имеем понятия модели A из класса \mathcal{M} и предложения ϕ из множества Σ , мы можем пойти дальше и ввести в рассмотрение функцию, сопоставляющую каждой паре ϕ, A значение истинности $\phi[A]$ в X . Рассмотрение значения истинности $\phi[A]$ естественно приводит к определению функции $[A]$ из X^Σ посредством равенства $[A](\phi) = \phi[A]$. Мы можем затем рассматривать символ $[]$ сам по себе для обозначения функции, отображающей класс \mathcal{M} в множество X^Σ . Пусть в X^Σ определена обычным образом топология произведения, определяемая топологией пространства X . Тогда функция $[]$ естественным образом индуцирует топологию в классе \mathcal{M} , которую мы называем элементарной топологией. Используя общую конструкцию ультрапроизведения совокупности моделей, которая всегда возможна, если X компактно и хаусдорфово, мы доказываем, что множество \mathcal{M} , наделенное элементарной топологией, компактно. Эта теорема есть обобщение теоремы о компактности для двузначной теории моделей и является основным инструментом для остальной части нашей работы. Другое важное орудие дается предлагаемой нами конструкцией специальных моделей в рассматриваемой теории. Эти результаты дают нам возможность развить плодотворную и далеко идущую теорию моделей с множеством X значений истинности.

Оказывается, что изучение моделей из класса \mathcal{M} , использующее понятие предложения из Σ , представ-

ляет собой почти точный аналог исследования обычных (двузначных) моделей, использующего предложения обычной логики предикатов первой ступени. До тех пор пока рассматриваются лишь утверждения теорем, аналогия будет полной, однако, что касается доказательств, то они далеко не аналогичны соответствующим доказательствам для двузначного случая. Часто новые доказательства значительно более тонки; кроме того, они способствуют дальнейшему пониманию сущности обычных доказательств для двузначного случая, пониманию того, почему они строятся так или иначе. Мы подчеркиваем, что теоретико-модельные теоремы в этой монографии не только внешне выглядят как их аналоги в двузначной теории, но в действительности являются настоящими обобщениями этих последних, так как соответствующий двузначный результат немедленно получается как частный случай при $X = \{0, 1\}$.

Мы считаем нужным отметить, что, в то время как двузначная логика имеет развитую теорию средств выражения (т. е. синтаксис) со своими понятиями выводимости, доказуемости и аксиоматизируемости, для множества предложений Σ в случае произвольного пространства X значений истинности такой теории, вообще говоря, нет. Следовательно, имеется совершенно особая проблема построения синтаксиса для Σ , которая до настоящего времени совсем не исследовалась в общем случае.

Эта монография написана в расчете на любого читателя, имеющего достаточную подготовку в общей топологии и наивной теории множеств. В частности, она может читаться даже без знания классической (двузначной) теории моделей. Однако, как и в любой области математики, здесь желательно знать сначала классическую теорию как источник примеров и основных идей.

Как правило, заголовки глав и параграфов дают представление об их содержании. Первые три главы являются по существу вводными. Главы IV и V содержат основные теоретико-модельные результаты, ведущие к более глубоким теоремам глав VI и VII.

В некоторых доказательствах в главах V, VI и VII используется обобщенная континуум-гипотеза. Упражнения разбросаны в разных местах текста; одни из них — стандартного типа, другие, отмеченные звездочкой, требуют в известной мере оригинального подхода. Некоторые из стандартных упражнений используются далее в доказательствах в основном тексте книги. Исторические замечания собраны в конце книги после главы VII.

Модели классической бесконечнозначной логики с множеством $X = [0, 1]$ значений истинности впервые изучались Чэном [1961]. При этом Чэн в своих первоначальных работах на эту тему существенно использовал некоторые идеи Кейслера [1961], [1964] и [1964a], относящиеся к двузначной теории моделей. Позже авторы совместно получили результаты, представляемые в настоящей работе. Авторы начали свои совместные занятия в Беркли весной 1961 г. Основной результат, полученный ими в то время, был опубликован в работе Чэна и Кейслера [1962]. С тех пор их первоначальные результаты были существенно улучшены и развиты. Чэн на международном симпозиуме по теории моделей в Беркли (Калифорния) (2 июня — 12 июля 1963 г.) выразил пожелание собрать эти работы в одной монографии. В Труды симпозиума включена совместная работа Чэна и Кейслера. Авторы снова работали вместе летом 1962 г. в Принстоне и летом 1963 г. — в Мэдисоне.

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТОПОЛОГИИ

1.1. Обозначения

Используемые нами обозначения нигде в монографии существенно не отличаются от общепринятых. Поэтому нет достаточных оснований приводить в первой главе книги исчерпывающий перечень обозначений. Мы, однако, укажем основные моменты построения нашей системы обозначений. Все имеющиеся особенности в обозначениях, не согласующиеся с принятой системой, как мы полагаем, будут отмечены в последующих разделах.

Символы \in , U , \cap , \setminus , \cup , \bigcap и $\{x: \dots x \dots\}$ будут иметь свое обычное теоретико-множественное значение. Мы употребляем знак \subset для обозначения отношения включения (не обязательно строгого). Мы используем наивную теорию множеств с аксиомой выбора. Каждое ординальное число мы отождествляем с множеством всех меньших ординалов, кардинальное число мы определяем как ординал, имеющий мощность большую, чем предыдущие. 0 используется для обозначения как пустого множества, так и наименьшего ординального числа. Наименьший бесконечный ординал обозначается через ω ; члены ω в естественном порядке суть $0, 1, 2, \dots$. Буквы m, n будут использоваться для обозначения ординальных и кардинальных чисел. Строчные греческие буквы $\alpha, \beta, \mu, \nu, \xi, \zeta$, как правило, используются для обозначения ординальных чисел, а буквы α, β, γ (иногда с индексами) предназначаются для обозначения кардиналов. Если даны ординальные числа μ, ν и кардинальные числа α, β , то выражение $\mu < \nu$ будет обозначать, что μ меньше ν , $\mu + \nu$ обозначает ординальную сумму μ и ν , α^+ — кардинальное число,

следующее за α , α^β — кардинал α в степени β ¹⁾, $cf(\alpha)$ — конфинальную часть α ²⁾ и $\sum_{\beta < \alpha} 2^\beta$ — кардинальную сумму кардиналов 2^β по всем $\beta < \alpha$. Поскольку кардинал $\sum_{\beta < \alpha} 2^\beta$ зависит только от α , он обозначается также через α^* . Кардинальная сумма или максимум двух бесконечных кардинальных чисел α и β задается их объединением $\alpha \cup \beta$.

Пусть X — множество, α — кардинальное число. Мощность X будет обозначаться $|X|$. Мы полагаем

$$S(X) = \{Y: Y \subset X\},$$

$$X^* = S(X) \setminus \{0\},$$

$$S_\alpha(X) = \{Y: Y \subset X \text{ и } |Y| < \alpha\},$$

$$S^\alpha(X) = \{Y: Y \subset X \text{ и } |X \setminus Y| < \alpha\}.$$

Бинарные отношения на множестве X определяются как множества упорядоченных пар $\langle x, y \rangle$ элементов из X . Множество определения и множество значений некоторого (бинарного) отношения H будут обозначаться через $\mathcal{D}H$ и $\mathcal{R}H$ соответственно. Обратное к H отношение обозначается \check{H} , произведение или композиция отношений G и H — символом $G \circ H$ ³⁾ (см., например, Келли [1955]). Если Y — множество, H — отношение, мы полагаем

$$H[Y] = \{y: \langle x, y \rangle \in H \text{ при некотором } x \in Y\}.$$

Условимся писать $H[x]$ вместо $H[\{x\}]$ для $x \in \mathcal{D}H$, если это не может привести к недоразумению. Иногда мы пишем xHy вместо $\langle x, y \rangle \in H$.

Функции определяются обычным образом как особого рода бинарные отношения, так что обозначе-

1) α^β есть мощность множества всех функций, определенных на множестве B мощности β и со значениями в множестве A мощности α . — Прим. ред.

2) $cf(\alpha)$ есть наименьший кардинал β , такой, что существует множество Z мощности β , элементы которого суть кардиналы $< \alpha$, и для всякого $\gamma < \alpha$ найдется $\gamma_1 \in Z$, $\gamma \leqslant \gamma_1$. Например, $cf(2) = 1$, $cf(\aleph_\omega) = \omega$. — Прим. ред.

3) $G \circ H = \{\langle x, z \rangle: \text{существует } y, \text{ для которого } \langle x, y \rangle \in H \text{ и } \langle y, z \rangle \in G\}$. — Прим. ред.

ния $\mathcal{D}f$, $\mathcal{R}f$, f , $f \circ g$ и $f[X]$ можно использовать применительно к функциям f , g . Иногда, указывая функцию с областью определения X и областью значений, включенной в Y , пишут так: $f: X \rightarrow Y$. Выражение $(\lambda x \in X) (\dots x \dots)^1$ будет обозначать функцию с областью определения X , которая каждому $x \in X$ ставит в соответствие $(\dots x \dots)$. Если f — функция с областью определения X , а Y — произвольное множество, то мы определим $f \uparrow Y = (\lambda y \in Y) f(y)$. Декартово произведение множеств Y_i с индексами $i \in I$ обозначается через $\prod_{i \in I} Y_i$, и декартона степень „ X в степени Y “ — через X^Y . Поэтому выражения $f \in X^Y$ и $f: Y \rightarrow X$ имеют один и тот же смысл и могут использоваться в равной мере. Мы отождествляем X^n с произведением $X \times X \times \dots \times X$, где X повторяется n раз, так что элементы X^n могут рассматриваться как упорядоченные n -ки. В случае $n=1$ мы отождествляем X^1 с X и $\langle x \rangle$ с x .

Специальный символ X^∞ используется для обозначения множества таких функций $f \in X^\omega$, которые постоянны, начиная с некоторого значения аргумента:

$$X^\infty = \{f \in X^\omega : \text{существует такое } n, \text{ что } f(n) = f(m) \text{ для всех } m \geq n\}.$$

Перечисление множества X есть функция, определенная на некотором ординале и имеющая X своим множеством значений.

1.2. D-произведения

D называется *фильтром* над множеством I , если:

- (i) $D \subset S(I)$ и $0 \neq D \neq S(I)$;
- (ii) $X \in D$ и $X \subset Y$ влечет $Y \in D$;
- (iii) $X, Y \in D$ влечет $X \cap Y \in D$.

Условие $D \neq S(I)$ часто принято опускать в определении фильтра, а фильтр в указанном выше

¹⁾ $(\dots x \dots)$ обозначает здесь некоторый объект, зависящий от x . — Прим. перев.

смысле называют собственным фильтром. Фильтр D над I называется *максимальным*, если для всякого $X \subset I$ либо $X \in D$, либо $I \setminus X \in D$. Максимальные фильтры называют также *ультрафильтрами*. Фильтр D есть *главный* фильтр, если $\bigcap D \in D$. Мы предполагаем, что читатель знаком с элементарными свойствами ультрафильтров. Например, он должен знать, что ультрафильтры существуют над всяkim непустым множеством I . На самом деле каждое подмножество E множества $S(I)$, для которого пересечение любого конечного числа элементов не пусто, может быть расширено до ультрафильтра. Фильтр D над $S_\omega(I)$ называется *регулярным*, если для всякого $j \in I$ имеем

$$\{i \in S_\omega(I): j \in i\} \in D.$$

Выражение „регулярный фильтр над J “ имеет смысл только тогда, когда J есть множество вида $S_\omega(I)$. Вполне очевидно, что регулярные фильтры существуют над любым множеством $S_\omega(I)$, так как семейство множеств

$$\{\{i \in S_\omega(I): j \in i\}: j \in J\}$$

обладает указанным выше свойством: пересечение любого конечного числа элементов этого семейства не пусто.

В следующей серии упражнений мы упоминаем также некоторые специального рода ультрафильтры, которые рассматриваются в литературе и которые, как и регулярные ультрафильтры, представляют интерес при изучении D -произведений.

Упражнение 1A. Если I конечно, то единственный регулярный ультрафильтр над $S_\omega(I)$ есть главный фильтр, порожденный множеством $\{I\}$.

Упражнение 1B.* Назовем ультрафильтр D над I *слабо регулярным*, если существует функция $f: I \rightarrow \rightarrow S_\omega(I)$, такая, что для всякого $j \in I$

$$\check{f}[\{i \in S_\omega(I): j \in i\}] \in D.$$

(а) Каждый регулярный ультрафильтр над множеством $S_\omega(J)$ слабо регулярен.

- (b) Ультрафильтр D над множеством I слабо регулярен тогда и только тогда, когда существует $E \subset D$, такое, что $|E| = |I|$, и пересечение любого бесконечного числа элементов E пусто.

Упражнение 1C. (a) Любой ультрафильтр над конечным множеством слабо регулярен.

- (b) Ультрафильтр D над счетным множеством I слабо регулярен тогда и только тогда, когда он не является главным.

Упражнение 1D. Ультрафильтр D над множеством I называется *однородным*, если $|X| = |I|$ для всех $X \in D$. Ультрафильтр D однороден тогда и только тогда, когда $S^{(1)}(I) \subset D$. Не существует однородных ультрафильтров над конечными множествами, содержащими более одного элемента. Однако каждый слабо регулярный ультрафильтр над бесконечным множеством I является однородным.

Упражнение 1E. Пусть $I = \bigcup_{j \in J} I_j$, пусть также E — ультрафильтр над J и D_j — ультрафильтр над I_j для каждого $j \in J$. Тогда множество

$$D = \{X \subset I: \{j \in J: X \cap I_j \in D_j\} \in E\}$$

есть ультрафильтр над I .

Дадим теперь определение *D-произведения*. Пусть I — непустое множество, D — фильтр над I и R_i — некоторое непустое множество для каждого $i \in I$. Пусть $R' = \prod_{i \in I} R_i$. Если $f, g \in R'$, то мы говорим, что $f \sim g$ (f эквивалентно g), если $\{i: f(i) = g(i)\} \in D$. Заметим при этом, что символ \sim всегда используется в смысле эквивалентности относительно некоторого фильтра (какого именно — ясно из контекста). Легко проверить, что отношение \sim есть отношение эквивалентности на R' . Для $f \in R'$ положим $\tilde{f} = \{g \in R': f \sim g\}$. Определим теперь *D-произведение* функций ($\lambda i \in I) R_i$ следующим образом:

$$D\text{-prod } \lambda i R_i = \{\tilde{f}: f \in R'\}.$$

Поскольку I определено фильтром D , не возникает путаницы, если мы пишем $\lambda i \in I$ вместо $\lambda i \in I$, как в вышеуказанных обозначениях. Если каждое R_i совпадает с одним и тем же множеством R , то D -произведение функции $(\lambda i \in I)R$ называется D -степенью R и обозначается через $D\text{-prod } R$.

В литературе D -произведения называются также приведенными прямыми произведениями или приведенными произведениями, а D -степени — приведенными (прямыми) степенями. В случае, когда D -ультрафильтр, D -произведения называются ультрапроизведениями или простыми (приведенными прямыми) произведениями, а D -степени называются ультрастепенями или простыми (приведенными прямыми) степенями. Существует много теорем и даже некоторые открытые проблемы относительно мощности D -произведений. Мы приведем доказательства лишь двух весьма слабых результатов, которые нам позже понадобятся. Несколько других результатов в этом направлении будут указаны в серии упражнений в конце этого параграфа.

Лемма 1.2.1. Для любого фильтра D над множеством I и любого непустого множества R имеет место $|R| \leq |D\text{-prod } R|$.

Доказательство. Функция $f = (\lambda r \in R)((\lambda i \in I)r)$, которая каждому $r \in R$ ставит в соответствие класс эквивалентности, содержащий функцию, принимающую постоянное значение r , есть взаимно однозначное вложение R в $D\text{-prod } R$.

Лемма 1.2.2. Предположим, что R — бесконечное множество, $S_\omega(J) = I$ и D — регулярный ультрафильтр над I . Тогда $|D\text{-prod } R| \geq |I|$.

Доказательство. Мы можем считать, что $|I| \geq \omega$, так что $|I| = |J|$. Мы можем также считать, что R содержит бесконечную последовательность

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_m, \dots$$

различных элементов и что J как-либо линейно упорядочено.

Для каждого $j \in J$ и $i \in I$ мы определяем

$$f_j(i) = \begin{cases} a_0, & \text{если } j \notin i, \\ a_m, & \text{если } j \text{ есть } m\text{-й элемент в порядке,} \\ & \text{индуцированном на } i. \end{cases}$$

Таким образом, для каждого $j \in J$ $f_j \in R^I$. Пусть $b_j = (f_j)^\sim$. Предположим, что $j_1 \neq j_2$. Поскольку D регулярен, то

$$I' = \{i \in I : j_1, j_2 \in i\} \in D,$$

так что если $i \in I'$, то $f_{j_1}(i) \neq f_{j_2}(i)$. Следовательно,

$$\{i : f_{j_1}(i) \neq f_{j_2}(i)\} \in D$$

и $b_{j_1} \neq b_{j_2}$, что доказывает лемму.

Упражнение 1F. Пусть D – ультрафильтр над I . Тогда если хотя бы одно из множеств R или I конечно, то $|D\text{-prod } R| = |R|$. Также если D – главный ультрафильтр, то $|D\text{-prod } R| = |R|$. Если D – произвольный ультрафильтр над I , то $|D\text{-prod } R| \leq |R'|$.

Упражнение 1G.* Если D – однородный ультрафильтр над бесконечным множеством I , то

$$|D\text{-prod } I| > |I|.$$

Указание. Для любой данной совокупности мощности $|I|$ функций $f: I \rightarrow I$ постройте новую функцию $g: I \rightarrow I$, не эквивалентную ни одной из них.

Упражнение 1H.* При тех же условиях, что даны в 1.2.2, докажите, что $|D\text{-prod } R| > |I|$. На самом деле можно доказать следующий более сильный результат: если R – бесконечное множество и D – слабо регулярный ультрафильтр над множеством J , то $|D\text{-prod } R| = |R'|$.

Указание. Пусть $f: J \rightarrow S_\omega(J)$, определена как в упр. 1B; поставьте в соответствие каждой $g \in R^J$ функцию $g' \in R'$ так, чтобы, как только $g(j) \neq h(j)$ и $j \in f(i)$, выполнялось $g'(i) \neq h'(i)$.

Упражнение 1I.* Если $|R| = |R|^\alpha$, то $|D\text{-prod } R| = |D\text{-prod } R|^\alpha$.

Указание. Всякая функция f , отображающая R на R^α , индуцирует естественным образом функцию f' .

отображающую R^I на $(R^I)^\alpha$, а f' в свою очередь индуцирует функцию f'' , отображающую $D\text{-prod } R$ на $(D\text{-prod } R)^\alpha$.

Упражнение 1J. Ультрафильтр D называется *счетно неполным*, если существует счетное подмножество $E \subset D$, такое, что $\bigcap E \notin D$. Любой слабо регулярный фильтр над бесконечным множеством I счетно неполон. Не существует счетно неполных главных ультрафильтров.

Упражнение 1K*. Если D — счетно неполный ультрафильтр над множеством I и R — бесконечное множество, то $|D\text{-prod } R| = |D\text{-prod } R|^\omega$. Если E — счетно полный ультрафильтр и S счетно, то $E\text{-prod } S$ счетно.

Указание. Покажите, что существует счетная убывающая последовательность элементов D , пересечение которых пусто, далее — рассуждения, как в упр. II.

1.3. Компактные хаусдорфовы пространства

Мы предполагаем, что читатель знаком со всеми элементарными разделами книги Келли [1955], в частности с главами 1—5. Будем пользоваться обозначениями из этой книги; случаи, когда мы применяем другие обозначения или вводим новые понятия, будут отмечены в соответствующих местах.

Пусть X — компактное хаусдорфово топологическое пространство с топологией \mathcal{P} ; \mathcal{P}_0 — базис открытых множеств топологии \mathcal{P} ; примем для удобства $X \in \mathcal{P}_0$. Мы отождествляем X с парой (X, \mathcal{P}) и считаем X и \mathcal{P}_0 фиксированными на протяжении всей книги. (Здесь \mathcal{P} есть совокупность всех открытых множеств пространства X^1 .) Буквы U, V, W , иногда

¹⁾ В русском переводе книги Келли компактные пространства названы бикомпактными. Последний термин распространен в отечественной литературе. Определение бикомпактности предложено П. С. Александровым, теория бикомпактных пространств впервые построена в работе Александрова П. С. и Урысона П. С., *Mémoire sur les espaces topologiques compacts, Verh. kon. Acad. Wet. Amsterdam*, 14 (1929), 1—96. — Прим. ред.

с индексами, будут обозначать открытые множества. Элементы \mathcal{C}_0 будем называть *базисными открытыми множествами*, их дополнения — *базисными замкнутыми множествами*. Замыкание подмножества Y из X обозначается \bar{Y} . При любом n X^n обозначает n -ю степень пространства X с обычной топологией произведения. Каждое X^n — компактно и хаусдорфово¹⁾.

Для произвольных топологических пространств Y и Z пусть $\mathcal{C}(Y, Z)$ есть множество всех непрерывных функций $f: Y \rightarrow Z$. Если Y компактно, а Z хаусдорфово, то любой элемент $\mathcal{C}(Y, Z)$ замкнут в том смысле, что образ каждого замкнутого множества из Y есть замкнутое множество в Z . Для любого n пусть $\mathcal{C}_n = \mathcal{C}(X^n, X)$ и $\mathcal{C} = \bigcup_{n < \omega} \mathcal{C}_n$, т. е. \mathcal{C} есть множество всех непрерывных функций, принимающих значения в X , от конечного числа переменных, каждое из которых пробегает множество X .

Всякое компактное хаусдорфово пространство Y нормально, т. е. любые два дизъюнктные замкнутые множества могут быть расширены до двух дизъюнктных открытых множеств.

Лемма Урысона утверждает, что если Y — нормальное пространство и U, V — дизъюнктные замкнутые множества в Y , то существует непрерывное отображение $f: Y \rightarrow [0, 1]$, такое, что $f[U] = \{0\}$ и $f[V] = \{1\}$. (См. Келли [1955], стр. 115 и 141²⁾; $[0, 1]$ обозначает здесь единичный отрезок на вещественной прямой.)

Для данного подмножества $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$ замыкание \mathcal{F} относительно композиции определяется как наименьшее множество $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$, такое, что:

1) m -я функция проектирования $(\lambda \langle x_1, \dots, x_n \rangle \in \in X^n)(x_m)$ множества X^n на X принадлежит \mathcal{G} при $m \leq n$;

¹⁾ Базис открытых множеств в X^n составляют произведения открытых подмножеств X , такие, что (за исключением конечного числа координатных мест) на координатных местах каждого произведения стоят экземпляры X . Теорему А. Н. Тихонова о компактности X^n см. на стр. 194 русского перевода книги Келли. — Прим. ред.

²⁾ Стр. 157 и 191 русского перевода. — Прим. ред.

2) если $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{G} \cap \mathcal{C}_m$ и $g \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_n$, то функция $(\lambda z \in X^m) g(f_1(z), \dots, f_n(z))$ принадлежит \mathcal{G} .

Имеем всегда $\mathcal{G} \subset \mathcal{C}$, так как композиция непрерывных функций непрерывна. Кроме того, замыкание множества \mathcal{G} относительно композиции есть само \mathcal{G} .

Мы определяем \mathcal{S}^* как слабейшую топологию¹⁾ на множестве X^* , для которой

1) всегда если множество V открыто в X , то множество $\{Y \in X^*: \bar{Y} \subset V\}$ открыто в \mathcal{S}^* ;

2) если множество U открыто в X , то множество $\{Y \in X^*: Y \cap U \neq \emptyset\}$ открыто в \mathcal{S}^* .

Когда мы говорим о топологическом пространстве X^* , мы имеем в виду пространство (X^*, \mathcal{S}^*) . Базисом открытых множеств пространства X^* является семейство \mathcal{S}_0 всех множеств вида

$$\{Y \in X^*: \bar{Y} \subset V_1 \cup \dots \cup V_n \text{ и } Y \cap V_m \neq \emptyset \text{ при всяком } m \leq n\},$$

где $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{S}_0$. Пространство X^* , вообще говоря, не хаусдорфово. Например, если $Y \in X^*$, то Y и \bar{Y} не отделимы открытыми окрестностями; действительно, Y принадлежит открытому множеству пространства X^* тогда и только тогда, когда ему принадлежит \bar{Y} . С другой стороны, если Y и Z — различные замкнутые непустые подмножества X , то для них всегда имеются дизъюнктные открытые окрестности. Таким образом, если мы сосредоточим свое внимание на замкнутых множествах $Y \in X^*$, мы получим хаусдорфово пространство. Как будет показано в разд. I.5, пространство X^* компактно. Поскольку X хаусдорфово, каждый элемент f из $\mathcal{C}(X^*, X)$ замкнут и, кроме того, $f(Y) = f(\bar{Y})$ для всех $Y \in X^*$. Мы положим $\mathcal{Q} = \mathcal{C}(X^*, X)$.

Сейчас мы докажем одну простую теорему для пространства X^* .

¹⁾ То есть с минимальным семейством открытых множеств. — Прим. ред.

Теорема 1.3.1. Пусть $Y \subseteq X^{**}$ таково, что для любых $Z_1, Z_2 \subseteq Y$ существует множество $Z_3 \subseteq Y$, такое, что $Z_1 \cup Z_2 \subseteq Z_3$. Тогда $\bigcup Y \subseteq \bar{Y}$, где \bar{Y} — замыкание Y в пространстве X^* .

Доказательство. Пусть $\bigcup Y \subseteq U \in \mathcal{P}_0^*$. Нам нужно показать, что $U \cap Y \neq 0$. Возьмем базисные открытые множества $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{P}_0$, такие, что

$$U = \{Z \in X^* : \bar{Z} \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n \text{ и } Z \cap V_m \neq 0 \text{ при } m \leq n\}.$$

Пусть, далее, $y_m \in \bigcup Y \cap V_m$ при $m \leq n$. Выберем множества $Z_1, \dots, Z_n \subseteq Y$ так, чтобы $y_m \in Z_m$ при всех $m \leq n$. Из условия теоремы следует, что существует $Z \subseteq Y$, для которого $Z_1 \cup \dots \cup Z_n \subseteq Z$. Тогда имеем $Z \cap V_m \neq 0$ при $m \leq n$ и

$$\bar{Z} \subseteq \overline{\bigcup Y} \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n.$$

Следовательно, $Z \in U \cap Y$, и доказательство закончено.

Рассмотрим теперь для произвольного непустого множества I пространство X^I с обычной топологией произведения, которую мы будем обозначать \mathcal{P}^I . Согласно теореме Тихонова, пространство (X^I, \mathcal{P}^I) компактно и хаусдорфово. Будем называть открытое множество V из X^I *сингулярным*, если при некоторых $i \in I$ и $U \in \mathcal{P}_0$

$$V = \{h \in X^I : h(i) \in U\}.$$

Назовем открытое множество V из X^I *базисным*¹⁾, если оно представимо как пересечение конечного числа сингулярных открытых множеств. Совокупность базисных открытых множеств в X^I образует обычный базис открытых множеств пространства X^I , а совокупность сингулярных открытых множеств — обычный предбазис открытых множеств пространства X^I . Замкнутое множество $Y \subseteq X^I$ называется

¹⁾ См. примечание к стр. 19. — Прим. ред.

сингулярным (или *базисным*), если его дополнение — сингулярное (или базисное) открытое множество соответственно. Всякое замкнутое множество в X' есть пересечение базисных замкнутых множеств. Легко видеть, что мощность базиса открытых множеств (или базиса замкнутых множеств) в пространстве X' не больше, чем $\omega \cup \mathcal{P}_0 \cup I$.

1.4. Упорядоченные пространства

Пусть H — бинарное отношение на множестве X и $0, 1 \in X$. Будем говорить, что тройка $(X, 0, 1)$ *упорядочена* отношением H , если выполнены следующие условия:

- 1) отношение H рефлексивно и транзитивно на X ;
- 2) H открыто, т. е. $H[V] \in \mathcal{P}$, если $V \in \mathcal{P}$;
- 2') отношение \check{H} открыто;
- 3) 1 есть *неподвижная точка непрерывности* отношения H , т. е. всегда, как только $1 \in V \in \mathcal{P}$, найдется открытое множество $U \in \mathcal{P}$, такое, что $1 \in H[U] \subset V$;

3') 0 есть неподвижная точка непрерывности отношения \check{H} , т. е. всегда, как только $0 \in V \in \mathcal{P}$, найдется множество $U \in \mathcal{P}$, такое, что $0 \in \check{H}[U] \subset V$.

Заметим, что тройка $(X, 0, 1)$ всегда упорядочена отношением тождества на X .

Упражнение 1L. Предположим, что выполнены условия 1) и 2) приведенного выше определения. 1 — неподвижная точка непрерывности отношения H тогда и только тогда, когда $H[1] = \{1\}$ и каждая функция $F \subset H$, $F: X \rightarrow X$, непрерывна в точке 1 . Это оправдывает введенную в 3) и 3') терминологию.

Функция $f \in \mathcal{C}_n$ называется *сохраняющей отношение* H , если упорядоченная пара $\langle f(x_1, \dots, x_n), f(y_1, \dots, y_n) \rangle$ принадлежит H всегда, когда $\langle x_1, y_1 \rangle, \dots, \langle x_n, y_n \rangle \in H$. Мы обозначим через \mathcal{C}_H множество всех функций из \mathcal{C} , сохраняющих H . Функция $f \in Q$ называется *сохраняющей* H , если для всех $Y, Z \in X^*$ условие $Z \subset H[Y]$ влечет $f(Y) \subset f(Z)$. Множество всех

функций из \mathcal{Q} , сохраняющих отношение H , обозначим через \mathcal{Q}_H .

Мы можем продолжить любое отношение H , определенное на множестве X , до отношения H^* на множестве X^* следующим образом:

$$H^* = \{\langle Y, Z \rangle : Y, Z \in X^*, Z \subset H[Y] \text{ и } Y \subset \check{H}[Z]\}.$$

Непосредственно получаются следующие свойства операции $*$ для отношений. xHy имеет место тогда и только тогда, когда имеет место $\{x\} H^* \{y\}$; если H рефлексивно, то и H^* рефлексивно; из симметричности H вытекает симметричность H^* , транзитивность H влечет транзитивность H^* . В общем случае $(\check{H})^* = (H^*)^\vee$. Функция $f \in \mathcal{Q}$ называется сохраняющей H^* , если $f(Y) H f(Z)$ истинно всегда, как только $Y H^* Z$. Обозначим через \mathcal{Q}_{H^*} множество всех функций из \mathcal{Q} , сохраняющих отношение H^* . Ясно, что всякая сохраняющая отношение H функция из \mathcal{Q} является сохраняющей H^* , т. е. $\mathcal{Q}_H \subset \mathcal{Q}_{H^*}$. Кроме того, легко видеть, что $\mathcal{Q}_{H^*} = \mathcal{Q}_{H^{**}}$, так что $\mathcal{Q}_{H^*} \subset \mathcal{Q}_{H^{**}}$.

Упражнение 1M. Если некоторое отношение H является функцией, то H^* есть функция $(\lambda Y \in X^*) H[Y]$.

Мы закончим этот раздел леммой, которая будет нужна нам в гл. VII, и упражнением.

Лемма 1.4.1. Пусть $0, 1 \in X$. Предположим также, что

- (i) $(X, 0, 1)$ упорядочено отношением H ;
- (ii) для всякой пары $\langle x, y \rangle \in X^2 \setminus H$ существует сохраняющая H функция $f \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_H$, такая, что $f(x) = 1$ и $f(y) \neq 1$.

Тогда отношения H и \check{H} замкнуты, т. е. для замкнутого $Y \subset X$ множества $H[Y]$ и $\check{H}[Y]$ замкнуты в X .

Доказательство. Пусть Y — замкнутое множество. Докажем сначала, что $H[Y]$ замкнуто. Пусть $z \notin H[Y]$. Достаточно найти $U \in \mathcal{C}$, такое, что $z \in U$ и $U \cap H[Y] = \emptyset$. Пусть $y \in Y$. Так как $z \notin H[Y]$, то $\langle y, z \rangle \notin H$. Тогда по условию найдется функция

$f \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_H$, такая, что $f(y) = 1$ и $f(z) \neq 1$. Выберем V_y и U_y из \mathcal{P} , такие, что $1 \in V_y$, $f(z) \in U_y$ и $V_y \cap U_y = \emptyset$. При этом мы можем также считать, что $H[V_y] \cap U_y = \emptyset$. Следовательно, $\check{f}[H[V_y]] \cap \check{f}[U_y] = \emptyset$. Поскольку функция \check{f} сохраняет отношение H , имеем $H[\check{f}[V_y]] \subset \check{f}[H[V_y]]$. Пусть теперь $V'_y = \check{f}[V_y]$ и $U'_y = \check{f}[U_y]$. Мы видим тогда, что $y \in V'_y$, $z \in U'_y$, V'_y и U'_y — открытые дизъюнктные множества и $H[V'_y] \cap U'_y = \emptyset$. Далее, $\{V'_y : y \in Y\}$ есть открытое покрытие множества Y . Следовательно, существуют $y_1, \dots, y_n \in Y$, такие, что

$$Y \subset V'_{y_1} \cup \dots \cup V'_{y_n}.$$

Следовательно,

$$H[Y] \subset H[V'_{y_1}] \cup \dots \cup H[V'_{y_n}].$$

Пусть, наконец, $U = U'_{y_1} \cap \dots \cap U'_{y_n}$. Ясно, что $z \in U \in \mathcal{P}$ и $U \cap H[Y] = \emptyset$. Для доказательства замкнутости $\check{H}[Y]$ рассуждаем аналогичным образом. При этом используем следующий простой факт: для любых двух множеств U и V , $H[U] \cap V = \emptyset$ в том и только том случае, когда $U \cap \check{H}[V] = \emptyset$. Лемма доказана.

Заметим, что в приведенной лемме достаточно предположить, что 1 является неподвижной точкой непрерывности отношения H и что выполнено условие (ii).

Упражнение 1N. Пусть тройка $(X, 0, 1)$ упорядочена отношением H и 1 — непустое множество. Определим отношение H „поточечно“ на пространстве X' , через $0', 1'$ обозначим постоянные функции из X' со значениями 0 и 1. Тогда

- тройка $(X', 0', 1')$ упорядочена отношением H ;
- если $(X, 0, 1)$ удовлетворяет условиям (ii) леммы 1.4.1, то этим условиям удовлетворяет также тройка $(X', 0', 1')$ и, следовательно, H и \check{H} замкнуты в X' .

1.5. D-пределы

Пусть I – произвольное непустое множество индексов и D – ультрафильтр над I . Каждой функции $f \in X^I$ мы сопоставим определенную точку пространства X в качестве D -предела функции f .

Затем мы продолжим операцию взятия D -предела на множество функций $F \in X^{I'}$. Полученную операцию будем называть D^* -пределом.

В настоящем разделе излагаются некоторые элементарные свойства D -пределов и D^* -пределов. Символы I и D всюду ниже обозначают фиксированное множество и ультрафильтр над этим множеством соответственно.

Теорема 1.5.1. Для всякой функции $f \in X^I$ существует единственная точка $x \in X$, обладающая свойством:

(i) для любой окрестности V точки x $\{i: f(i) \in V\} \in D$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что существует не более одной точки из X , имеющей свойство (i). Предположим, что x и y – две различные точки из X , обладающие свойством (i). Тогда можно указать дизъюнктные окрестности этих точек V_x и V_y . Имеем

$$\{i: f(i) \in V_x\} \in D \quad \text{и} \quad \{i: f(i) \in V_y\} \in D.$$

Следовательно,

$$\{i: f(i) \in V_x\} \cap \{i: f(i) \in V_y\} = \{i: f(i) \in V_x \cap V_y\} = \emptyset \in D,$$

что невозможно.

Для доказательства существования предположим, что напротив:

(1) каждый элемент $x \in X$ обладает окрестностью V_x , такой, что

$$\{i: f(i) \in V_x\} \notin D.$$

Семейство $\{V_x: x \in X\}$, очевидно, образует открытое покрытие X . Следовательно, для некоторого конечного множества элементов $x_1, \dots, x_n \in X$ имеем

$$(2) V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_n} = X.$$

Поскольку $\mathcal{R}f \subset X$, условие (2) влечет

$$\{i: f(i) \in V_{x_1}\} \cup \dots \cup \{i: f(i) \in V_{x_n}\} = I,$$

и поскольку D — ультрафильтр, существует $m \leq n$, такое, что $\{i: f(i) \in V_{x_m}\} \in D$. Таким образом, (1) не может выполняться, и теорема доказана.

Мы определим теперь для каждой функции $f \in X^I$ D -предел f (пишем $D\text{-lim } f$) как единственную точку $x \in X$, удовлетворяющую свойству (i) теоремы 1.5.1. Поскольку D однозначно определяет I , мы иногда пишем $D\text{-lim } \lambda i f(i)$ вместо $D\text{-lim } f$. Определим также для множества функций $Y \subset X^I$ $D\text{-lim } Y = \{D\text{-lim } f: f \in Y\}$.

Лемма 1.5.2. Для всякого $f \in X^I$ выполняется $D\text{-lim } f \in \overline{\mathcal{R}f}$. В частности, D -предел постоянной функции есть значение этой функции.

Доказательство. Из определения D -предела очевидно следует, что $D\text{-lim } f$ либо принадлежит $\mathcal{R}f$, либо является предельной точкой $\mathcal{R}f$.

Теорема 1.5.3. Пусть $g \in \mathcal{C}_n$ и $f_1, \dots, f_n \in X^I$. Тогда

$$D\text{-lim } \lambda i g(f_1(i), \dots, f_n(i)) = g(D\text{-lim } f_1, \dots, D\text{-lim } f_n).$$

Доказательство. Докажем, что для всякой окрестности V точки $g(D\text{-lim } f_1, \dots, D\text{-lim } f_n)$ имеем

$$(1) \quad \{i: g(f_1(i), \dots, f_n(i)) \in V\} \in D.$$

Поскольку $g \in \mathcal{C}_n$, существуют окрестности U_m точек $D\text{-lim } f_m$, $m = 1, \dots, n$, такие, что $g(y) \in V$ при любом $y \in U_1 \times \dots \times U_n$. Для окрестностей U_1, \dots, U_n имеем также

$$I_m = \{i: f_m(i) \in U_m\} \in D \quad \text{при любом } m \leq n,$$

следовательно, $I_1 \cap \dots \cap I_n \in D$. Но если $i \in I_1 \cap \dots \cap I_n$, то $g(f_1(i), \dots, f_n(i)) \in V$. Таким образом, (1) выполнено, и теорема доказана.

Обратимся теперь к операции $D\text{-lim } Y$.

Лемма 1.5.4. Пусть $F \in X^{*I}$ и $Y = D\text{-lim } \prod_{i \in I} F(i)$.

Тогда $D\text{-lim } \prod_{i \in I} \overline{F(i)} \subset \bar{Y}$.

Доказательство. Предположим, что $f \in \prod_{i \in I} \overline{F(i)}$ и V — окрестность точки $D\text{-}\lim f$. Нам нужно показать, что $Y \cap V \neq \emptyset$. Так как X — нормальное пространство и множества $\{D\text{-}\lim f\}$ и $X \setminus V$ замкнуты, существует открытая окрестность U точки $D\text{-}\lim f$, такая, что $\bar{U} \subset V$. Мы имеем $\{i: f(i) \in U\} \in D$ и, следовательно, можем выбрать функцию $g \in \prod_{i \in I} F(i)$, такую, что $\{i: g(i) \in U\} \in D$. Тогда $D\text{-}\lim g \in Y$, а также $D\text{-}\lim g \in \bar{U}$. Следовательно, $D\text{-}\lim g \in Y \cap V$.

Теорема 1.5.5. Пусть $F \in X^{*I}$ и $Y = D\text{-}\lim \prod_{i \in I} F(i)$. Тогда множество Y обладает следующим свойством:

(i) если $Y \in V \in \mathcal{P}_0^*$, то $\{i: F(i) \in V\} \in D$.

Доказательство. Согласно определению множества \mathcal{P}_0^* , достаточно доказать следующее:

- (1) если $U \in \mathcal{P}_0$ и $Y \cap U \neq \emptyset$, то $\{i: F(i) \cap U \neq \emptyset\} \in D$;
- (2) если $\bar{Y} \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$ и $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{P}_0$, то

$$\{i: \overline{F(i)} \subset V_1 \cup \dots \cup V_n\} \in D.$$

Если $x \in Y \cap U$, то $x = D\text{-}\lim g$ для некоторого $g \in \prod_{i \in I} F(i)$ и $\{i: g(i) \in U\} \in D$. Следовательно, $\{i: F(i) \cap U \neq \emptyset\} \in D$, и условие (1) выполняется.

Для доказательства (2) предположим, что

$$J = \{i: \overline{F(i)} \subset V_1 \cup \dots \cup V_n\} \notin D,$$

и приедем к противоречию. Возьмем $f \in \prod_{i \in I} \overline{F(i)}$, такую, что для всякого $j \in I \setminus J$ имеем $f(j) \notin V_1 \cup \dots \cup V_n$. Тогда $D\text{-}\lim f \notin V_1 \cup \dots \cup V_n$. Но согласно лемме 1.5.4 $D\text{-}\lim f \in \bar{Y}$, вопреки условию, согласно которому $\bar{Y} \subset V_1 \cup \dots \cup V_n$. Это доказывает утверждение (2) и завершает доказательство теоремы.

Заметим, что теорема 1.5.5 не может быть сформулирована в точности аналогично теореме 1.5.1,

поскольку пространство X^* не хаусдорфово. Однако, используя свойства пространства X^* , о которых в свое время говорилось, можно было бы доказать следующее утверждение, являющееся точным аналогом теоремы 1.5.1.

Для всякой функции $F \in X^{*I}$ существует единственное замкнутое множество Y , $Y \subset X$, обладающее свойством:

если $Y \in V \in \mathcal{P}_0^*$, то $\{i: F(i) \in V\} \in D$.

Для всякой функции $F \in X^{*I}$ мы определим D^* -предел F (обозначим его $D^*\text{-lim } F$) как множество $D\text{-lim } \prod_{i \in I} F(i)$.

Теорема 1.5.6. Пусть $q \in Q$ и $F \in X^{*I}$. Тогда $D\text{-lim } \lambda i q(F(i)) = q(D^*\text{-lim } F)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для всякой окрестности V точки $q(D^*\text{-lim } F)$ имеем $\{i: q(F(i)) \in V\} \in D$. Поскольку $q \in Q$, существует $U \in \mathcal{P}_0^*$, такая, что $D^*\text{-lim } F \in U$ и $q[U] \subset V$. Согласно теореме 1.5.5, $\{i: F(i) \in U\} \in D$. Следовательно, $\{i: q(F(i)) \in V\} \in D$. Это завершает доказательство теоремы.

Все полученные до сих пор результаты имеют место для любого непустого множества индексов I и произвольного ультрафильтра D над I . Для получения некоторых других результатов нам придется выбрать множество I и ультрафильтр D некоторым специальным образом.

Особый интерес представляет случай, когда $I = S_\omega(J)$, где J — некоторое непустое множество, и D — регулярный ультрафильтр над I .

Лемма 1.5.7. Предположим, что

- (i) $I = S_\omega(J)$, где J не пусто;
- (ii) D — регулярный ультрафильтр над I ;
- (iii) функция $F \in X^{*I}$ такова, что $F(i \cup i') \subset F(i) \cap F(i')$ при всех $i, i' \in I$.

Тогда $D^*\text{-lim } F \subset \overline{\bigcap_{j \in J} F(\{j\})}$.

Доказательство. Пусть $f \in \prod_{i \in I} F(i)$, V — произвольная окрестность $D\text{-}\lim f$ и $j \in J$. Достаточно доказать, что $F(\{j\}) \cap V \neq 0$. Прежде всего имеем

$$(1) \quad \{i: f(i) \in V\} \in D.$$

Затем для любого $i \in I$, если $j \in i$, то $F(i) \subset F(\{j\})$ и $f(i) \in F(\{j\})$. Следовательно,

$$(2) \quad \{i: j \in i \text{ и } i \in I\} \subset \{i: f(i) \in F(\{j\})\}.$$

Поскольку D регулярен, имеем $\{i: j \in i \text{ и } i \in I\} \in D$ и, следовательно, принимая во внимание (2), получаем

$$(3) \quad \{i: f(i) \in F(\{j\})\} \in D.$$

(1) и (3) влечут $\{i: f(i) \in F(\{j\}) \cap V\} \in D$, так что $F(\{j\}) \cap V \neq 0$. Лемма доказана.

Анализируя доказательство леммы 1.5.7, видим, что она применима не только для пространства X , но также и для пространства X^* . Сформулируем соответствующую лемму, не приводя доказательства.

Лемма 1.5.7*. *Предположим, что*

- (i) $I = S_\omega(J)$, где J непусто;
- (ii) D — регулярный ультрафильтр над I ;
- (iii) функция $F \in (X^*)^{*I}$ такова, что $F(i \cup i') \subset F(i) \cap F(i')$ при всех $i, i' \in I$.

Тогда $\{D^*\text{-}\lim f: f \in \prod_{i \in I} F(i)\} \subset \bigcap_{j \in J} \overline{F(\{j\})}$.

Теорема 1.5.8. *Пространство X^* компактно.*

Доказательство. Пусть G — непустое семейство замкнутых множеств из X^* , пересечение любого конечного числа которых непусто, $I = S_\omega(G)$, D — регулярный ультрафильтр над I . Пусть также функция $F \in (X^*)^{*I}$ определяется равенством $F(i) = X^* \cap \bigcap_{j \in J_i} F(j)$ для всех $i \in I$ и $f \in \prod_{i \in I} F(i)$. Ясно, что все условия леммы 1.5.7* выполнены. Следовательно, согласно

1.5.7*, имеем

$$D^*\text{-}\lim f \in \bigcap_{z \in G} \overline{F(\{z\})} = \bigcap G.$$

Таким образом, $\bigcap G \neq 0$ и X^* компактно.

Теорема 1.5.9. Пусть $I = S_\omega(J)$, $|J| \geq |\mathcal{P}_0|$ и D — регулярный ультрафильтр над I . Пусть, далее, $Y \subset X$ и x — предельная точка множества Y . Тогда существует функция $f \in Y^I$, такая, что $D\text{-}\lim f = x$, и, следовательно, множество $D^*\text{-}\lim Y^I$ замкнуто в X .

Доказательство. Можно считать, не уменьшая общности, что $\mathcal{P}_0 \subset J$. Пусть функция $F \in X^{*I}$ определяется равенством $F(i) = Y \cap \bigcap \{V \in \mathcal{P}_0 : x \in V \in i\}$ для всякого $i \in I$ (причем условимся считать, что $\bigcap 0 = X$), и пусть $f \in \prod_{i \in I} F(i)$.

Согласно лемме 1.5.7, для любых окрестностей U точки x и V точки $D\text{-}\lim f$ имеем $F(\{U\}) \cap V \neq 0$. Таким образом, $Y \cap U \cap V \neq 0$. Поскольку X хаусдорфово, это влечет $D\text{-}\lim f = x$.

Будем говорить, что множество $Y \subset X$ замкнуто относительно D -пределов, если для всякого множества I и любого ультрафильтра D над I имеет место $D\text{-}\lim Y^I = Y$.

Теорема 1.5.10. Пусть $Y \subset X$, $I_0 = S_\omega(\mathcal{P}_0)$ и D_0 — регулярный ультрафильтр над I_0 . Тогда следующие три условия равносильны:

- (i) Y — замкнутое подмножество X ;
- (ii) Y замкнуто относительно D -пределов;
- (iii) $D_0\text{-}\lim Y^{I_0} = Y$.

Доказательство. (i) влечет (ii) в силу леммы 1.5.2. Переход от (ii) к (iii) тривиален. (iii) влечет (i), согласно теореме 1.5.9.

НЕПРЕРЫВНАЯ ЛОГИКА

2.1. Определение непрерывной логики

В этой главе мы начнем изучение непрерывной логики (предикатов первой ступени). Рассмотрим сначала синтаксические понятия, в особенности понятие формулы. В дальнейшем строчные греческие буквы ϕ, ψ, θ будут использоваться для обозначения формул, а прописные греческие буквы — для обозначения множеств формул.

Начнем с введения понятия типа подобия. Под *типовом (подобия)* мы будем понимать упорядоченную пару $\langle \tau, \kappa \rangle$, где κ — ординал и τ — последовательность натуральных чисел, т. е. функция $\tau \in \omega^\kappa$, где κ — ординал¹⁾.

Под *непрерывной логикой (предикатов первой ступени)* мы будем понимать шестерку

$$\mathcal{L} = \langle \langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{F}, 0, 1, H \rangle,$$

где $\langle \tau, \kappa \rangle$ — тип подобия, X — компактное хаусдорфово пространство, $F \subset \mathcal{C} \cup Q$ и $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ замкнуто относительно подстановки, $0, 1$ — две различные точки X и $(X, 0, 1)$ упорядочено отношением H (см. разд. 1.4). Пару $\langle \tau, \kappa \rangle$ мы будем называть *типовом логики \mathcal{L}* , множество X — *пространством значений \mathcal{L}* , $0, 1$ — *выделенными значениями \mathcal{L}* и H — *упорядочением \mathcal{L}* . В интуитивном представлении 0 представляет ложь, 1 — истину. Элементы $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ и $\mathcal{F} \cap Q$ будут называться *связками* и *кванторами* логики \mathcal{L} соответственно. Мы обозначим через $\|\mathcal{L}\|$ мощность логики \mathcal{L} , которую определим как

$$\|\mathcal{L}\| = \omega^{\kappa} |\pi| |U| \kappa |U| \mathcal{P}_0 |U| |\mathcal{F}|.$$

¹⁾ При $\kappa = \omega$ это соответствует обычному употреблению термина „последовательность натуральных чисел“; по поводу определения множества ω^κ см. стр. 13.—Прим. ред.

Данной непрерывной логике \mathcal{L} всегда будет сопоставлен следующий перечень символов:

счетное множество *переменных* v_n , $n < \omega$;
 последовательность *символов предикатов* P_ξ ,
 $\xi < \pi$;
 последовательность *символов констант* c_ζ , $\zeta < \kappa$;
 символ *тождественного равенства* \equiv ;
 скобки и запятая.

Отныне будем считать, что

$$\mathcal{L} = (\langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{F}, 0, 1, H)$$

— произвольная, но фиксированная непрерывная логика и, кроме того, $\pi = D\tau$. Иногда мы будем изменять некоторые (но не все) члены шестерки \mathcal{L} . Получаемая при этом непрерывная логика будет обозначаться символом \mathcal{L}' , за которым в скобках указываются изменяемые члены. Например, будем писать

$$\mathcal{L}'(\mathcal{G}) = (\langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{G}, 0, 1, H).$$

Для обозначения логики, двойственной к \mathcal{L} , будем писать

$$\mathcal{L}'(1, 0, \check{H}) = (\langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{F}, 1, 0, \check{H}).$$

Ясно, что логика, двойственная к непрерывной, всегда также является непрерывной логикой. Заметим, что если H' есть отношение тождества на X , то $\mathcal{L}(H')$ — также непрерывная логика. Часто встречается случай, когда тип подобия изменяется путем увеличения κ до $\kappa + \mu$. В этом случае мы используем сокращенное обозначение

$$\mathcal{L}(\mu) = \mathcal{L}(\langle \tau, \kappa + \mu \rangle) = (\langle \tau, \kappa + \mu \rangle, X, \mathcal{F}, 0, 1, H).$$

Хотя \mathcal{L} остается фиксированной (для упрощения обозначений), мы часто будем пользоваться тем, что результаты, полученные для \mathcal{L} , имеют место и для любой другой непрерывной логики \mathcal{L}' , в частности для $\mathcal{L}(\mu)$.

Теперь давайте остановимся, чтобы обсудить, какую роль в этой книге играет отношение порядка H . Возможно, более естественно сначала вместо приве-

денного выше понятия непрерывной логики рассмотреть более простое понятие „неупорядоченной непрерывной логики“

$$(\langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{F}, 0, 1),$$

где $\langle \tau, \kappa \rangle$ — тип подобия, X — компактное хаусдорфово пространство, $\mathcal{F} \subset \mathcal{C} \cup Q$, \mathcal{F} замкнуто относительно подстановки, $0, 1$ — две различные точки X . В значительной части монографии, включающей гл. IV, V и VI, вовсе нет упоминания об отношении H , и мы могли бы здесь пользоваться понятием неупорядоченной непрерывной логики вместо понятия непрерывной логики. С другой стороны, отношение H играет важную роль в гл. VII. Для единства изложения мы берем всюду в качестве объекта рассмотрения непрерывную логику \mathcal{L} даже тогда, когда достаточно было бы рассматривать неупорядоченную непрерывную логику. Согласно следующей лемме, в случае, когда отношение H исключается из рассмотрения, математическое содержание остается одним и тем же независимо от того, рассматривается ли непрерывная логика или неупорядоченная непрерывная логика.

Лемма 2.1.1. Пятерка

$$(\langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{F}, 0, 1)$$

есть неупорядоченная непрерывная логика тогда и только тогда, когда существует H , такое, что шестерка

$$(\langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{F}, 0, 1, H)$$

является непрерывной логикой.

Доказательство. Это утверждение следует из замечания разд. 1.4, утверждающего, что тройка $(X, 0, 1)$ упорядочена отношением тождества H на множестве X .

2.2. Формулы

Определим формулы в \mathcal{L} как некоторые конечные последовательности символов, связок и кванторов. Произвольная формула будет строиться из более

простых формул согласно некоторому рекурсивному правилу.

Равенством (в логике \mathcal{L}) мы будем называть трехчленную последовательность

$$x_1 \equiv x_2,$$

где x_1 и x_2 — или переменные, или символы констант. Под *атомарной формулой* (логики \mathcal{L}) мы будем понимать либо равенство, либо последовательность

$$P_\xi(x_1, \dots, x_{\tau(\xi)}),$$

где $\xi < \pi$ и $x_1, \dots, x_{\tau(\xi)}$ — либо переменные, либо символы констант. Множество всех атомарных формул (в \mathcal{L}) мы обозначим через Λ .

Множество Φ всех формул (логики \mathcal{L}) определяется как наименьшее из множеств Γ , таких, что

2.2.1. $\Lambda \subset \Gamma$.

2.2.2. Если $f \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{F}$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Gamma$, то

$$f(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \Gamma^1.$$

2.2.3. Если $q \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{F}$, $\varphi \in \Gamma$ и $m < \omega$, то $(qv_m)\varphi \in \Gamma$.

В случаях когда одновременно рассматриваются более одной непрерывной логики, мы иногда будем писать Φ_φ для обозначения множества Φ формул логики \mathcal{L} и Λ_φ для обозначения множества атомарных формул логики \mathcal{L} . Если $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ и $\Delta \subset \Lambda$, мы будем обозначать $\mathcal{G}(\Delta)$ (или $\mathcal{G}_\varphi(\Delta)$, если хотим указать \mathcal{L}) наименьшее из множеств Γ формул логики \mathcal{L} , удовлетворяющих условиям, получаемым из 2.2.1, 2.2.2 и 2.2.3 заменой \mathcal{F} и Λ на \mathcal{G} и Δ . Например, $\Phi = \mathcal{F}(\Lambda)$. Заметим, что для любых \mathcal{G} и Δ

$$\Delta \subset \mathcal{G}(\Delta) = \mathcal{G}(\mathcal{G}(\Delta)) \subset \Phi.$$

Лемма 2.2.4. Для всех $\Delta \subset \Phi$ и $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ имеем

$$1) |\mathcal{G}(\Delta)| \leq \omega \cup |\mathcal{G}| \cup |\Delta|.$$

Кроме того,

$$2) |\Phi| = \omega \cup |\mathcal{F}| \cup |\pi| \cup |x|.$$

¹⁾ Здесь $f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ следует рассматривать как формальную строку (конечную последовательность) объектов $f, (, \varphi_i)$, а не как результат применения f к φ_i ; объекты φ_i не входят в область определения f . — Прим. ред.

Доказательство. 1) имеет место, поскольку каждая формула $\phi \in \mathcal{G}(\Delta)$ есть конечная цепочка элементов \mathcal{G} , Δ , переменных, скобок и запятых. Легко видеть также, что

$$|\Lambda| = \omega \cup |\pi| \cup |x|$$

и что $|\Phi|$ не меньше, чем $|\mathcal{F}|$ и $|\Lambda|$. Следовательно, $|\Phi| = |\mathcal{F}| \cup |\Lambda|$ и 2) выполнено.

В связи с 2.2.4 заметим, что $|\mathcal{G}(\Delta)|$ конечно тогда и только тогда, когда либо $\Delta = 0$, либо $\Delta \in S_\omega(\Phi)$ и $\mathcal{G} \in S_\omega(\mathcal{C}_0)$. В случае когда $|\mathcal{G}(\Delta)|$ бесконечно, неравенство 1) может быть заменено на равенство. Из 2) следует, что

$$\|\mathcal{L}\| = |\Phi| \cup |\mathcal{F}_0|.$$

Мы будем говорить, что какой-либо символ или элемент \mathcal{F} входит в формулу ϕ , если он является элементом конечной последовательности ϕ . Таким образом, лишь конечное число символов и элементов из \mathcal{F} входит в данную формулу ϕ .

Множество $v(\phi)$ свободных переменных формулы $\phi \in \Phi$ может быть определено рекурсивно следующим образом.

2.2.5. Если $\phi \in \Lambda$, то $v(\phi)$ есть множество всех переменных, входящих в ϕ .

2.2.6. Если $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_n$ и $\phi = f(\psi_1, \dots, \psi_n)$, то $v(\phi) = v(\psi_1) \cup \dots \cup v(\psi_n)$.

2.2.7. Если $q \in Q \cap \mathcal{F}$ и $\phi = (qv_m)\psi$, то $v(\phi) = v(\psi) \setminus \{v_m\}$.

Формула называется *высказыванием*, если $v(\phi) = 0$. Мы обозначим множество всех высказываний логики \mathcal{L} через Σ или, если нужно, через $\Sigma_{\mathcal{L}}$.

Упражнение 2A. Пусть $\langle \tau', x' \rangle$ — тип подобия, причем $\tau \subset \tau'$ и $x \leqslant x'$. Пусть также $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}' \subset \mathcal{C} \cup Q$ и $\mathcal{L}' = (\langle \tau', x' \rangle, X, \mathcal{F}', 0, 1, H)$. Тогда $\Lambda_{\mathcal{L}} \subset \Lambda_{\mathcal{L}'}$, $\Phi_{\mathcal{L}} \subset \Phi_{\mathcal{L}'}$ и $\Sigma_{\mathcal{L}} \subset \Sigma_{\mathcal{L}'}$. В частности, для всякого ординала μ имеем $\Lambda_{\mathcal{L}} \subset \Lambda_{\mathcal{L}(\mu)}$, $\Phi_{\mathcal{L}} \subset \Phi_{\mathcal{L}(\mu)}$ и $\Sigma_{\mathcal{L}} \subset \Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}$. Если η — ненулевой предельный ординал, то $\Lambda_{\mathcal{L}(\eta)} = \bigcup_{\mu < \eta} \Lambda_{\mathcal{L}(\mu)}$, $\Phi_{\mathcal{L}(\eta)} = \bigcup_{\mu < \eta} \Phi_{\mathcal{L}(\mu)}$ и $\Sigma_{\mathcal{L}(\eta)} = \bigcup_{\mu < \eta} \Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}$.

2.3. Двузначная логика

В случае, когда X – двуточечное пространство $\{0, 1\}$ с дискретной топологией, непрерывные логики с пространством значений X представляют собой обычные двузначные логики.

Из числа известных связок и кванторов двузначной логики отметим следующие:

тождественная функция $\text{id}(x) = x$;

отрицание \neg , определяемое равенством $\neg(x) = = 1 - x$;

конъюнкция $\&$, определяемая равенством $\&(x, y) = \min(x, y)$;

дизъюнкция \wp , определяемая равенством $\wp(x, y) = \max(x, y)$;

квантор существования \exists , определяемый равенством $\exists(Y) = \sup(Y)$;

квантор всеобщности \forall , определяемый равенством $\forall(Y) = \inf(Y)$.

Имеются различные способы выбора связок и кванторов, каждый из которых ведет к логике, которая может быть названа классической двузначной логикой. Получаемые при этом логики эквивалентны друг другу в том смысле, что существует естественное отображение множества формул одной из них на множество формул другой, причем такое, что сохраняется смысл формул при известной обычно принятой интерпретации.

Для определенности мы согласимся понимать под *классической двузначной логикой* типа $\langle \tau, \kappa \rangle$ логику

$$\mathcal{l} = \langle \langle \tau, \kappa \rangle, \{0, 1\}, \mathcal{F}_l, 0, 1, H_l \rangle,$$

где $X = \{0, 1\}$, $0 = 0$, $1 = 1$, $\mathcal{F}_l \cap \mathcal{C}$ есть замыкание множества $\{\text{id}, \&, \wp, \neg\}$ относительно операции подстановки, $\mathcal{F}_l \cap \mathcal{Q} = \{\exists, \forall\}$ и H_l – естественный порядок на множестве $\{0, 1\}$.

Мы видим, что $\&$, \wp и id являются связками, сохраняющими отношение H_l , а \forall – сохраняющий H_l квантор. С другой стороны, \neg и \exists не сохраняют H_l .

Аналогично, $\&$, \wp , id и \exists сохраняют отношение H_l ,

а \exists и \forall не сохраняют \check{H}_l . Каждый из кванторов \exists и \forall сохраняет отношение H_l^* и \check{H}_l^* . Двойственная к логике l логика

$$l(1, 0, \check{H}_l) = (\langle \tau, \times \rangle, \{0, 1\}, \mathcal{F}_l, 1, 0, \check{H}_l)$$

во многих отношениях антиизоморфна l . А именно, многие истинные высказывания о логике l превращаются в истинные высказывания о логике $l(1, 0, \check{H}_l)$, если всюду заменить $\&$ на \wp , \exists на \forall , 0 на 1 , H_l на \check{H}_l , и наоборот.

2.4. Множества связок и кванторов

В этом разделе мы рассмотрим некоторые свойства связок и кванторов. Множества, отвечающие этим свойствам, будут соответствовать в теории моделей для произвольной непрерывной логики множествам $\{\text{id}, \top\}$, $\{\text{id}\}$, $\{\&\}$ и $\{\exists\}$ логики l .

2.4.1. Множество \mathcal{T} назовем *t-множеством* или *смещающим множеством* (логики \mathcal{L}), если $\mathcal{T} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_1$ и для всех $x, y \in X$ при условии $x \neq y$ существует $t \in \mathcal{T}$, такое, что $t(x) = 1$ и $t(y) \neq 1$.

Легко видеть, что множество $\{\text{id}, \top\}$ есть *t-множество* логики l , а также логики $l(1, 0, \check{H}_l)$.

2.4.2. Множество \mathcal{K} назовем *H-множеством* или *смещающим множеством* для H (логики \mathcal{L}), если $\mathcal{K} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_H$ и для всех $\langle x, y \rangle \in X^2 \setminus H$ существует $t \in \mathcal{K}$, такое, что $t(x) = 1$ и $t(y) \neq 1$.

Заметим, что $\{\text{id}\}$ есть H_l -множество логики l и \check{H}_l -множество логики $l(1, 0, \check{H}_l)$. Если H – тождественное отношение на X , то \mathcal{T} есть *t-множество* тогда и только тогда, когда оно является *H-множеством*.

2.4.3. Множество \mathcal{K} назовем *k-множеством* или *конъюнктивным множеством* (логики \mathcal{L}), если $\mathcal{K} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_2$, $k(1, 1) = 1$ для всех $k \in \mathcal{K}$ и всегда, как только $1 \in V \in \mathcal{P}_0$, существует $k \in \mathcal{K}$, такой, что $k[1] \subset V^2$.

Так, $\{\&\}$ есть k -множество логики l и $\{\exists\}$ есть k -множество $l(1, 0, \check{H}_l)$.

2.4.4. Множество \mathcal{E} назовем *e-множеством* или *экзистенциальным множеством* (логики \mathcal{L}), если $\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{Q}$ и для всех $Y \in X^*$ имеем

$$\{e(Y): e \in \mathcal{E}\} = \{1\} \text{ тогда и только тогда, когда } Y \in \bar{Y}.$$

Например, $\{\exists\}$ есть *e-множество* логики l и $\{\forall\}$ есть *e-множество* логики $l(1, 0, \check{H}_l)$. Заметим, что t -множество, k -множество и *e-множество* всегда не-пусты. Поскольку $H \neq X^2$ (см. упр. 1L), всякое H -множество логики \mathcal{L} также непусто. Если $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \subset \subset \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$, то, очевидно, всякое t -множество, H -множество, k -множество или *e-множество* логики \mathcal{L} есть одновременно t -множество, H -множество, k -множество или *e-множество* (соответственно) логики $\mathcal{L}(\mathcal{G})$.

Теорема 2.4.5. 1) Пусть \mathcal{T} есть *t-множество*. Тогда всегда, как только $x \in V \in \mathcal{S}$, существует множество $\mathcal{T}_0 \in S_{\omega}(\mathcal{T})$, такое, что

$$\{t(x): t \in \mathcal{T}_0\} = \{1\},$$

и при любых $y \in X$

$$\{t(y): t \in \mathcal{T}_0\} = \{1\} \text{ влечет } y \in V.$$

2) Пусть \mathcal{H} есть *H-множество*. Тогда, как только $x \in V \in \mathcal{S}$, существует множество $\mathcal{H}_0 \in S_{\omega}(\mathcal{H})$, такое, что

$$\{t(x): t \in \mathcal{H}_0\} = \{1\},$$

и при любых $y \in X$

$$\{t(y): t \in \mathcal{H}_0\} = \{1\} \text{ влечет } y \in H[V].$$

3) Пусть \mathcal{E} есть *e-множество*. Тогда, как только $1 \in V \in \mathcal{S}$, существует множество $\mathcal{E}_0 \in S_{\omega}(\mathcal{E})$, такое, что при любом $Y \in X^*$

$$\{e(Y): e \in \mathcal{E}_0\} = \{1\} \text{ влечет } Y \cap V \neq \emptyset.$$

Доказательство. 1) Пусть $x \in V \in \mathcal{S}$ и $\mathcal{T}_1 = \{t \in \mathcal{T}: t(x) = 1\}$. Тогда совокупность

$$\{\check{t}[X \setminus \{1\}]: t \in \mathcal{T}_1\}$$

образует открытое покрытие компактного множества $X \setminus V$. Это покрытие содержит конечное подпокрытие

$$\{\check{t}[x \setminus \{I\}]: t \in \mathcal{T}_0\},$$

где $\mathcal{T}_0 \subseteq S_\omega(\mathcal{T}_1)$. Тогда $t(x) = 1$ при всех $t \in \mathcal{T}_0$ и для любого $y \in X \setminus V$ существует $t \in \mathcal{T}_0$, для которого $t(y) \neq 1$. Следовательно, \mathcal{T}_0 обладает требуемыми свойствами.

Доказательство пункта 2) представляет собой очевидное видоизменение доказательства пункта 1). Заметим лишь, что $H[V] \subseteq \mathcal{S}$ при любом $V \in \mathcal{S}$.

3) Пусть $I \in V \in \mathcal{S}$. Совокупность

$$\{\check{e}[X \setminus \{I\}]: e \in \mathcal{E}\}$$

образует открытое покрытие замкнутого множества $(X \setminus V)^*$ в пространстве X^* . Поскольку X^* компактно (теорема 1.5.8), это покрытие содержит конечное подпокрытие

$$\{\check{e}[X \setminus \{I\}]: e \in \mathcal{E}_0\},$$

где $\mathcal{E}_0 \subseteq S_\omega(\mathcal{E})$. Поэтому, если $Y \subseteq X^*$ и $e(Y) = 1$ при всех $e \in \mathcal{E}_0$, то $Y \cap V \neq \emptyset$. Это завершает доказательство теоремы.

В доказанной теореме свойства, формулируемые в 1), 2) и 3), являются „локальными“, в них каждой открытой окрестности сопоставляется некоторое конечное множество функций. С другой стороны, соответствующие определения 2.4.1, 2.4.2 и 2.4.4 (t -множества, H -множества и e -множества) представляются как „поточечные“ условия. Можно было бы сформулировать эти определения как „локальные“, однако при этом они не были бы такими простыми. Определение k -множества 2.4.3 можно назвать „сильно локальным“ — в нем каждой окрестности сопоставляется единственная функция; соответствующие очевидным образом „поточечное“ или „локальное“ условия для определения k -множества оказываются недостаточными.

Мы закончим этот раздел двумя леммами.

Лемма 2.4.6. Пусть \mathcal{E} есть e -множество и $e \in \mathcal{E}$. Тогда, как только $1 \in V \in \mathcal{S}$, найдется U , $1 \in U \in \mathcal{S}$, такое, что при всех $Y \in X^*$ условие $Y \cap U \neq 0$ влечет $e(Y) \in V$.

Доказательство. Пусть $1 \in V \in \mathcal{S}$. Предположим, напротив, что для всякого U , $1 \in U \in \mathcal{S}$, существует $Y \in X^*$, такое, что $Y \cap U \neq 0$ и $e(Y) \notin V$. Пусть $\mathcal{S}' = \{U : 1 \in U \in \mathcal{S}\}$ и $I = S_\omega(\mathcal{S}')$. Для всякого $i \in I$ определим

$$F(i) = \{Y : Y \cap U \neq 0 \text{ при всех } U \in i \text{ и } e(Y) \notin V\}.$$

Ясно, что $F: I \rightarrow (X^*)^*$ и для всех $i_1, i_2 \in I$

$$F(i_1 \cup i_2) \subset F(i_1) \cap F(i_2).$$

Пусть, далее, $f \in \prod_{i \in I} F(i)$ и D – регулярный ультрафильтр над I . Согласно 1.5.7*, имеем

$$F(\{U\}) \cap W' \neq 0$$

при всех $U \in \mathcal{S}'$ и $W' \in \mathcal{S}^*$, удовлетворяющих условию $D^*\text{-lim } f \in W'$. Поскольку функция e непрерывна и всегда $e(f(i)) \notin V$, имеем, согласно 1.5.6 и 1.5.2, $e(D^*\text{-lim } f) \notin V$. А так как $e \in \mathcal{E}$ и \mathcal{E} есть e -множество, это означает, что $1 \notin \overline{D^*\text{-lim } f}$. Пользуясь нормальностью X , введем в рассмотрение множества $U, W \in \mathcal{S}$, такие, что $1 \in U, \overline{D^*\text{-lim } f} \subset W$ и $U \cap W = 0$. Пусть множество $W' \in \mathcal{S}^*$ определяется равенством $W' = \{Y \in X^* : \bar{Y} \subset W\}$. Заметим, что тогда $D^*\text{-lim } f \in W'$. Следовательно, существует множество $Y \in X^*$, такое, что $Y \cap U \neq 0$ и $\bar{Y} \subset W$. Ясно, что это невозможно. Лемма доказана.

Лемма 2.4.7. Пусть \mathcal{K} есть k -множество и $1 \in \mathcal{V} \in \mathcal{S}$. Тогда для любого целого $n \geq 2$ существует функция $k_n \in \mathcal{C}_n$, являющаяся композицией элементов из \mathcal{K} и такая, что

$$k_n(1, \dots, 1) = 1 \text{ и } k_n[1] \subset V^n.$$

Доказательство. Пусть функция $k \in \mathcal{K}$ такова, что $k[1] \subset V^2$. Мы определим k_n для всякого

$n \geq 2$ по индукции следующим образом:

$$k_2 = k,$$

$$k_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = k'(k_n(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}),$$

где

$$k' \in \mathcal{K} \text{ и } \check{k}'[I] \subset (V \setminus k_n[X^n \setminus V^n])^2.$$

Мы можем теперь показать, что при всяком $n \geq 2$

$$k_n \in \mathcal{C}_n, \quad k_n(I, \dots, I) = 1 \quad \text{и} \quad \check{k}_n[I] \subset V^n.$$

Лемма доказана.

Отметим, что в случае $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_H$ имеем $k_n \in \mathcal{C}_H$.

Упражнение 2B. Провести подробное доказательство леммы 2.4.7.

2.5. Примеры

Пример 2.5.1. Классическая двузначная логика \mathcal{L} обладает t -множеством $\{\text{id}, \top\}$, H -множеством $\{\text{id}\}$ и k -множеством $\{\&\}$, содержащими лишь связки, сохраняющие отношение H_1 , и e -множеством $\{\exists\}$, содержащим лишь сохраняющие H_1 кванторы.

Пример 2.5.2. Пусть X — замкнутый единичный отрезок $[0, 1]$ с обычной топологией. Положим $0 = 0$ и $1 = 1$. Определим теперь \mathcal{F} следующим образом:

$\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ есть замыкание $\{(1 - x), \min(1, x + y)\}$
относительно операции подстановки;

$$\mathcal{F} \cap Q = \{\sup\}.$$

Пусть, наконец, H — естественный порядок на $[0, 1]$. Получающаяся при этом непрерывная логика $\mathcal{L} = (\langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{F}, 0, 1, H)$ есть классическая вещественнозначная логика. Мы покажем сейчас, что \mathcal{L} обладает t -множеством, H -множеством, k -множеством и e -множеством.

Очевидно, что $\{\sup\}$ есть e -множество \mathcal{L} . Кроме того, $\sup \in Q_H$.

Из функций $(1 - x)$ и $\min(1, x + y)$ можно получить функцию $\min(x, y)$ следующим образом:

$$\min(x, y) = 1 - \min(1, (1 - y) + (1 - \min(1, x + (1 - y)))).$$

Имеем $\min(x, y) \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ и $\{\min(x, y)\}$ есть, очевидно, k -множество логики \mathcal{L} . Заметим также, что $\min(x, y) \in \mathcal{C}_H$.

Чтобы получить t -множество и H -множество логики \mathcal{L} , сначала покажем, что для всякого рационального $x \in X$ существуют две функции $f_x, g_x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_H$, такие, что $f_x[1] = [x, 1]$ и $g_x[0] = [0, x]$. Для упрощения записей введем временно следующие обозначения:

$$\bar{x} = 1 - x;$$

$$x \dotplus y = \min(1, x + y);$$

$$x \cdot y = (\bar{x} \dotplus \bar{y})^-;$$

$$n(x) = x \dotplus x \dotplus \dots \dotplus x \text{ (} n \text{ раз);}$$

$$(x)^n = x \cdot x \cdot \dots \cdot x \text{ (} n \text{ раз).}$$

Легко видеть, что $x \dotplus y, x \cdot y \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_H$. Определим сначала $f_0(x) = x \dotplus \bar{x}$ и $f_1(x) = (\bar{x})^-$. Пусть теперь x — рациональное число вида p/q , где $1 \leq p \leq (q-1)$ и $2 \leq q$. Если $q = 2$, мы определим

$$f_{1/2}(y) = 2(y).$$

Предположим, что $f_{p'/q'}$ определены для всех $q' < q$ и всех p' , удовлетворяющих условию $1 \leq p' \leq (q'-1)$. Определим $f_{p/q}$ при помощи индукции по параметру p . Если $p = 1$, то

$$f_{1/q}(y) = q(y).$$

Предположим теперь, что $f_{p'/q}$ определены для всех p' , таких, что $1 \leq p' < p$. Если p и q не взаимно просты, то $f_{p/q}$ уже определена. Если p и q — взаимно просты, то существуют числа m и n , такие, что

$$[m(p/q)]^n = p'/q \text{ при некотором } p', \text{ удовлетворяющем } 1 \leq p' < p.$$

Используя эти значения m , n и p' , определим

$$f_{p/q}(y) = f_{p'/q}([m(y)]^n).$$

Упражнение 2С. Найти функции $g_x \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_H$.

Продолжая рассмотрение нашего примера, заметим, что множество $\{f_x: x \text{ рационально}\}$ есть H -множество, а множество

$\{f_x: x \text{ рационально}\} \cup \{1 - g_x: x \text{ рационально}\}$
есть t -множество логики \mathcal{L} .

Пример 2.5.3. Пусть X — замкнутый параллелограмм на комплексной плоскости, вершины которого — точки $0, 1 + 2i, 2 + i$ и $3 + 3i$; \mathcal{S} — обычная топология на множестве X ; $0 = 0; 1 = 3 + 3i$ и, кроме того,

$$H = \{(a + bi, c + di) \in X^2: a \leq c \text{ и } b \leq d\}.$$

Далее, пусть для каждого $x \in X$ t_x обозначает единственную функцию из \mathcal{C}_1 , для которой $t_x[1] = H[x]$ и ограничение t_x на любую прямую, проходящую через 1 , есть перенос вдоль этой прямой. Аналогично, пусть u_x — единственная функция из \mathcal{C}_1 , для которой $u_x[0] = H[x]$ и ограничение u_x на любую прямую, проходящую через 0 , есть перенос вдоль этой прямой. Определим t'_x равенством $t'_x(y) = 1 - u_x(y)$. Пусть, далее, $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ есть замыкание относительно композиции множества, состоящего из следующих функций:

$$\min(x, y) \text{ (относительно } H),$$

t_x , где $x = a + bi \in X$ и a, b рациональны,

t'_x , где $x = a + bi \in X$ и a, b рациональны,

и пусть $\mathcal{F} \cap \mathcal{Q} = \{\sup(Y)\}$, где \sup берется в смысле порядка H . Легко проверить, что

$$\mathcal{L} = (\langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{F}, 0, 1, H)$$

есть непрерывная логика, что

$$\mathcal{H} = \{t_x: x = a + bi \in X \text{ и } a, b \text{ рациональны}\}$$

есть H -множество \mathcal{L} , что

$$\mathcal{H} \cup \{t'_x: x = a + bi \in X \text{ и } a, b \text{ рациональны}\}$$

есть t -множество \mathcal{L} , что множество $\{\min\}$ есть k -множество \mathcal{L} , причем $\min \in \mathcal{C}_H$, и что множество $\{\sup\}$ есть e -множество \mathcal{L} , причем $\sup \in Q_H^v$.

Логики, описанные в предыдущих трех примерах, обладают определенными „хорошими“ свойствами, выполнения которых мы не будем требовать в общем случае; в частности, для них \mathcal{F} счетно, а k -множество и e -множество состоят каждое из одного элемента.

В следующих упражнениях указываются некоторые примеры логик, не являющихся непрерывными логиками.

Упражнение 2D*. Рассмотрите классическую двузначную логику высказываний \mathcal{P} с переменными (нульместными предикатами) p_0, p_1, \dots и связками $\neg, \&, \vee$. Если ϕ — формула логики \mathcal{P} , обозначим через (ϕ) множество формул, логически эквивалентных ϕ . Пусть

$$X = \{(\phi) : \phi \text{ — формула логики } \mathcal{P}\}.$$

Алгебра Линденбаума на X есть алгебра $\langle X, \neg, \&, \vee \rangle$, где $\neg, \&$ и \vee — операции на X , определяемые равенствами:

$$\neg(\phi) = (\neg\phi), (\phi) \& (\psi) = (\phi\&\psi), (\phi) \vee (\psi) = (\phi\vee\psi).$$

Таким образом, это свободная булева алгебра с образующими $(p_0), (p_1), \dots$. Докажите, что не существует компактной хаусдорфовой топологии на X , при которой функции $\neg, \&$ и \vee были бы непрерывны. Это означает, что алгебра Линденбаума не представима в виде непрерывной логики.

Упражнение 2E*. Если мы рассмотрим интуиционистскую логику (в том виде, например, как она изложена у Клини [1952, стр. 82]¹), то получим алгебру Брауэра $\langle X, \neg, \&, \vee, \subset \rangle$ на множестве X классов эквивалентных формул. Докажите, что алгебра Брауэра не может быть представлена в виде непрерывной логики (в смысле упр. 2D).

¹) Стр. 77 русского перевода. — Прим. ред.

Указание к упражнениям 2D и 2E: для всякой формулы ϕ множества $\{(\psi): (\psi) \leqslant (\phi)\}$ и $\{(\psi): (\phi) \leqslant (\psi)\}$ должны быть замкнуты во всякой хаусдорфовой топологии, в которой операции, входящие в определение соответствующей алгебры, непрерывны.

Упражнение 2F*. Интуиционистскую логику выскаживаний можно интерпретировать как многозначную логику с множеством значений истинности в пространстве X всех открытых подмножеств евклидовой плоскости E^2 . Функции $\&$, \wp , \neg и \supset на X определяются при этом равенствами

$$\begin{aligned} x \& y &= x \cap y; \\ x \wp y &= x \cup y; \end{aligned}$$

$(\neg y)$ = внутренность множества $(E^2 \setminus y)$;

$(x \subset y)$ = внутренность множества $((E^2 \setminus x) \cup y)$.

Докажите, что не существует компактной хаусдорфовой топологии на X , при которой функции \neg и \supset были бы непрерывны. Следовательно, нет непрерывной логики \mathcal{L} с множеством X в качестве пространства значений, такой, что указанные функции \neg и \supset входят в множество $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$.

Указание. Покажите, что для всякого $a \in E^2$ множества $\{x \in X: a \in x\}$ и $\{x \in X: a \in \neg x\}$ открыты.

2.6. Некоторые теоремы существования

В последующих главах мы часто будем использовать в качестве посылок теорем следующие требования: (1) \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством; (2) \mathcal{L} обладает H -множеством, k -множеством связок, сохраняющих отношение H , и e -множеством кванторов, сохраняющих H . В каждом из вышеприведенных трех примеров (разд. 2.5) условия (1) и (2) были выполнены. В настоящем разделе мы укажем некоторые достаточные условия, при которых логика \mathcal{L} обладает свойствами (1) или (2). Хотя мы и не будем стремиться при этом получить характеристические свойства всех таких логик \mathcal{L} , постараемся установить по крайней мере, что результаты, которые

будут получены в последующих главах, не являются бессодержательными. Для удобства на протяжение настоящего раздела будем рассматривать только непрерывную логику

$$\mathcal{L} = (\langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{F}, 0, 1, H), \text{ где } \mathcal{F} = \mathcal{C} \cup Q.$$

Теорема 2.6.1. 1) Предположим, что X – компактное булево пространство, т. е. компактное хаусдорфово пространство, для которого множества, одновременно открытые и замкнутые, образуют базис. Тогда \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством.

2) Предположим, что $0H1$ и, кроме того, для всякой пары $\langle x, y \rangle \in X^2 \setminus H$ существует множество W , замкнутое и открытое одновременно, такое, что $x \in W$, $y \notin W$ и $H[W] = W$. Тогда \mathcal{L} обладает H -множеством \mathcal{K} , k -множеством $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_H$ и e -множеством $\mathcal{E} \subset Q_H^v$.

Доказательство. 1) Докажем сначала, что \mathcal{L} обладает t -множеством. Пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Тогда найдется замкнутое и открытое одновременно множество W , такое, что $x \in W$ и $y \notin W$. Пусть

$$t_{xy} = (W \times \{1\}) \cup ((X \setminus W) \times \{0\}).$$

Тогда множество t_{xy} является непрерывной функцией, отображающей x в 1 и y в 0. Следовательно, множество

$$\{t_{xy}: x, y \in X \text{ и } x \neq y\} \subset \mathcal{C}_1$$

есть t -множество логики \mathcal{L} .

Чтобы построить k -множество, рассмотрим множество V , $1 \in V \in \mathcal{P}_0$. Компактное множество $X \setminus V$ обладает покрытием, состоящим из одновременно замкнутых и открытых множеств, не содержащих 1; это покрытие содержит конечное подпокрытие $\{U_1, \dots, U_n\}$. Тогда множество

$$W = X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)$$

замкнуто и открыто, причем $1 \in W \subset V$. Кроме того, W^2 есть замкнутое открытое подмножество X^2 . Поэтому функция

$$k_V = (W^2 \times \{1\}) \cup ((X^2 \setminus W^2) \times \{0\})$$

непрерывна и удовлетворяет условиям $k_V(I, I) = I$ и $\check{k}_V[I] \in V^2$. Следовательно, множество

$$\{k_V: I \in V \in \mathcal{S}_0\} \subset \mathcal{C}_2$$

есть k -множество логики \mathcal{L} .

Предположим теперь, что $Y \in X^*$ и $I \notin \bar{Y}$. Как и в предыдущем случае убеждаемся, что существует одновременно замкнутое и открытое множество W , такое, что $I \in W \subset X \setminus \bar{Y}$. Поскольку имеет место

$$(X \setminus W)^* = \{Z \in X^*: \bar{Z} \subset X \setminus W\},$$

множество $(X \setminus W)^*$ открыто в X^* ; далее, поскольку

$$X^* \setminus (X \setminus W)^* = \{Z \in X^*: Z \cap W \neq \emptyset\},$$

$(X \setminus W)^*$ также замкнуто в X^* . Отсюда следует, что функция

$$e_Y = ((X^* \setminus (X \setminus W)^*) \times \{I\}) \cup ((X \setminus W)^* \times \{0\})$$

принадлежит \mathcal{Q} и удовлетворяет условиям $e_Y(Y) = 0$ и $e_Y(Z) = 1$, если $I \in \bar{Z}$. Таким образом,

$$\{e_Y: Y \in X^* \text{ и } I \notin \bar{Y}\} \subset \mathcal{Q}$$

есть e -множество логики \mathcal{L} .

Доказательство пункта 2) аналогично, нужно лишь множество W выбирать так, чтобы выполнялось условие $H[W] = W$. Заметим, что это всегда может быть сделано, так как $H[I] = \{I\}$ и

$$H[W_1 \cap \dots \cap W_n] = W_1 \cap \dots \cap W_n$$

верно, если

$$H[W_1] = W_1, \dots, H[W_n] = W_n.$$

Упоминаемые в 2.6.1,1) компактные булевы пространства суть в точности пространства Стоуна булевых алгебр (или булевых колец с единицей, см. Келли [1955, стр. 108—109])¹⁾. В частности, любое конечное хаусдорфово пространство является компактным булевым пространством. В качестве примеров

¹⁾ Стр. 116 русского перевода.—Прим. ред.

компактных хаусдорфовых пространств X и отношений H , удовлетворяющих условиям утверждения 2.6.1,2), упомянем следующие: произвольное конечное подмножество X замкнутого отрезка вещественных чисел $[0, 1]$, причем $0 = 0, 1 = 1$ и H – естественный порядок; канторовский дисконтинуум (см. Келли [1955, стр. 165]¹⁾ с топологией, индуцируемой обычной топологией вещественной прямой, $0 = 0, 1 = 1$ и H – естественный порядок.

Из условий пункта 2.6.1, 2) не следует, что X – булево пространство. Например, эти условия выполняются для любой непрерывной логики \mathcal{L} , такой, что 0 и 1 – изолированные точки X и

$$H = (\{0\} \times X) \cup (X \times \{1\}) \cup (X \setminus \{0, 1\})^2.$$

Ввиду особой важности логик с конечным пространством значений мы сформулируем

Следствие 2.6.2. 1) *Если X конечно, то \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством.*

2) если X конечно и $0 \neq 1$, то \mathcal{L} обладает H -множеством, k -множеством $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_H$ и e -множеством $\mathcal{E} \subset Q_H$.

Доказательство. 1) следует из 2.6.1, 1) и того факта, что любое конечное хаусдорфово пространство является компактным булевым пространством.

2) следует из 2.6.1, 2), так как (в силу принятого нами условия) если $\langle x, y \rangle \in X^2 \setminus H$, то множество $Y = H[x]$ есть замкнутое и открытое одновременно множество в X , такое, что $x \in Y, y \notin Y$ и $H[Y] = Y$.

Под (нетривиальной) дугой a в пространстве X мы понимаем непрерывную функцию $a: [0, 1] \rightarrow X$ (здесь $[0, 1]$ – замкнутый отрезок вещественной прямой), удовлетворяющую условиям $a(1) = 1$ и $a(0) \neq 1$.

Теорема 2.6.3. *Если в пространстве X есть какая-либо дуга a , то логика \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством.*

¹⁾ Стр. 223 русского перевода. – Прим. ред.

Доказательство. Пусть $x, y \in X$ и $x \neq y$. Согласно лемме Урысона, существует непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, такая, что $f(x) = 1$ и $f(y) = 0$. Если мы определим $t_{xy} = a \circ f$, то $t_{xy} \in \mathcal{C}_1$, $t_{xy}(x) = 1$ и $t_{xy}(y) \neq 1$. Следовательно, множество

$$\{t_{xy}: x, y \in X \text{ и } x \neq y\}$$

есть t -множество логики \mathcal{L} .

Пусть $I \in V \in \mathcal{P}_0$. По лемме Урысона существует непрерывная функция $g: X^2 \rightarrow [0, 1]$, такая, что $g(1, 1) = 1$ и $g[X^2 \setminus V^2] = \{0\}$. Положим $k_V = a \circ g$; тогда $k_V \in \mathcal{C}_2$, $k_V(1, 1) = 1$ и $k_V[1] \subset V^2$. Следовательно, множество

$$\{k_V: I \in V \in \mathcal{P}_0\}$$

есть k -множество логики \mathcal{L} .

Как и в предыдущем рассуждении, снова предположим, что $I \in V \in \mathcal{P}_0$. Тогда множества

$$U = \{Z \in X^*: I \in \bar{Z}\}$$

и

$$W = \{Y \in X^*: Y \cap V = 0\}$$

суть дизъюнктные замкнутые множества в пространстве X^* . Поскольку подпространство пространства X^* , состоящее из замкнутых подмножеств X^* , есть компактное хаусдорфово пространство (см. теорему 1.5.8, а также разд. 1.3), мы можем применить лемму Урысона и получить непрерывную функцию h_0 , отображающую это хаусдорфово пространство в интервал $[0, 1]$ и такую, что $h_0[U] = \{1\}$ и $h_0[W] = \{0\}$. Функцию h_0 можно продолжить до непрерывной функции $h: X^* \rightarrow [0, 1]$, если положить $h(Y) = h_0(\bar{Y})$ для всех $Y \in X^*$. При этом будем иметь $h[U] = \{1\}$ и $h[W] = \{0\}$. Пусть $e_V = a \circ h$ и

$$\mathcal{E} = \{e_V: I \in V \in \mathcal{P}_0\}.$$

Поскольку $a(1) = 1$ и $a(0) \neq 1$ и всегда, как только $I \notin \bar{Y}$, существует $V \in \mathcal{P}_0$, такая, что $I \in V$ и $Y \cap V = 0$, заключаем, что \mathcal{E} есть e -множество логики \mathcal{L} .

В каждой из теорем 2.6.1 и 2.6.3 условие $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$ не является действительно необходимым. На самом

деле нужно только, чтобы связки и кванторы, используемые при построении t -множеств, k -множеств, и e -множеств, принадлежали \mathcal{F} .

Следуя доказательству теоремы 2.6.3, можно получить значительное число разнообразных примеров непрерывных логик \mathcal{L}^1), обладающих t -множеством, k -множеством и e -множеством. Допустим, например, что пространство X обладает семейством a_i , $i \in I$, нетривиальных дуг. Тогда, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют непрерывная функция $f: X \rightarrow [0, 1]$, удовлетворяющая условиям $f(x) = 1$ и $f(y) = 0$, и индекс $i \in I$, такие, что $a_i \circ f \in \mathcal{F}$, то логика \mathcal{L} обладает t -множеством. Аналогично могут быть получены k -множества и e -множества, если использовать подходящую совокупность дуг a_i .

Можно сформулировать также вторую часть теоремы 2.6.3 по подобию части 2) теоремы 2.6.1, где говорилось бы об отношении H . Посылка такого утверждения была бы весьма громоздкой, так как лемма Урысона здесь уже непосредственно не применима. Вместо этого мы докажем значительно более общую теорему существования, включающую все предыдущие результаты как частные случаи. Грубо говоря, приводимый ниже результат гласит, что если непрерывная логика

$$\mathcal{L}' = (\langle \tau, \kappa \rangle, X', \mathcal{F}', 0', 1', H')$$

обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством, то это же можно утверждать и о непрерывной логике \mathcal{L} , некоторым образом „топологически“ связанной с \mathcal{L}' . Нам не требуется предположение, что $\mathcal{F}' = \mathcal{C}' \cup \mathcal{Q}'$, однако мы предполагаем, что $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$.

Теорема 2.6.4. Допустим, что \mathcal{L} и \mathcal{L}' – непрерывные логики, такие, что:

- (а) \mathcal{L}' обладает H' -множеством \mathcal{H}' , k -множеством $\mathcal{K}' \subset \mathcal{C}_{H'}$ и e -множеством $\mathcal{E}' \subset \mathcal{Q}_{H'}$;

¹⁾ Здесь временно под логикой \mathcal{L} понимается непрерывная логика в смысле общего определения без ограничения $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$, принятого в этом разделе. – Прим. перев.

- (b) если $\langle x, y \rangle \in X^2 \setminus H$, то существует функция $a_{xy} \in \mathcal{C}(X, X')$, такая, что $\langle a_{xy}(x), a_{xy}(y) \rangle \notin H'$ и, кроме того, $a_{xy}(u) H' a_{xy}(v)$ выполняется, как только uHv ;
- (c) как только $I' \in V' \subset \mathcal{P}'$, всегда существует функция $b_{V'} \in \mathcal{C}(X', X)$, такая, что $b_{V'}(I') = 1$, $b_{V'}[I] \subset V'$ и, если $u'H'v'$, то $b_{V'}(u') H b_{V'}(v')$.

Тогда \mathcal{L} обладает H -множеством \mathcal{H} , k -множеством $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_H$ и e -множеством $\mathcal{E} \subset Q_H$.

Доказательство. Предположим, что $\langle x, y \rangle \in X^2 \setminus H$. Тогда $\langle a_{xy}(x), a_{xy}(y) \rangle \notin H'$ и, следовательно, существует $t \in \mathcal{H}'$, такой, что $t(a_{xy}(x)) = I'$ и $t(a_{xy}(y)) \neq I'$. Пусть затем $V' = X' \setminus \{t(a_{xy}(y))\}$. Определим функцию $t_{xy}: X \rightarrow X$ посредством равенства

$$t_{xy} = b_{V'} \circ t \circ a_{xy}.$$

Ясно, что $t_{xy} \in \mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_H$, $t_{xy}(x) = 1$ и $t_{xy}(y) \neq 1$. Следовательно, множество

$$\mathcal{H} = \{t_{xy}: \langle x, y \rangle \in X^2 \setminus H\}$$

является H -множеством логики \mathcal{L} .

Теперь, прежде чем продолжать доказательство теоремы, мы докажем утверждение, двойственное утверждению пункта (c):

(c') если $I \in V \in \mathcal{P}$, то существует функция $a_V \in \mathcal{C}(X, X')$, такая, что $a_V(I) = I'$, $a_V[I'] \subset V$ и из uHv следует $a_V(u) H' a_V(v)$.

Пусть $I \in V \in \mathcal{P}$. Поскольку $H[I] = \{I\}$, имеем $\langle I, y \rangle \in X^2 \setminus H$ при всех $y \in X \setminus V$. Как в предыдущем рассуждении для всякого $y \in X \setminus V$ получим функцию $t_y \in \mathcal{H}'$, такую, что

$$(t_y \circ a_{Iy})(I) = I' \quad \text{и} \quad (t_y \circ a_{Iy})(y) \neq I'.$$

Пусть $f_y = t_y \circ a_{Iy}$. Тогда $f_y \in \mathcal{C}(X, X')$ и uHv влечет $f_y(u) H' f_y(v)$. Пусть, далее,

$$U_y = \check{f}_y[X' \setminus \{I'\}]$$

и $W_y \in \mathcal{S}$ выбрано так, что

$$y \in W_y, \quad \bar{W}_y \subset U_y \quad \text{и} \quad 1 \notin \bar{W}_y.$$

Совокупность $\{W_y : y \in X \setminus V\}$ открытых множеств образует покрытие компактного множества $X \setminus V$. Это покрытие содержит конечное подпокрытие W_{y_1}, \dots, W_{y_n} . Для $m = 1, \dots, n$ положим

$$W'_m = f_{y_m}[\bar{W}_{y_m}],$$

а затем определим

$$W' = X' \setminus (W'_1 \cup \dots \cup W'_n).$$

Поскольку каждое W'_m замкнуто и не содержит $1'$, имеем $1' \in W' \in \mathcal{S}'$. Согласно лемме 2.4.7, существует $k' \in \mathcal{F}' \cap \mathcal{C}_n \cap \mathcal{C}_{H'}$, такой, что

$$k'(1', \dots, 1') = 1' \quad \text{и} \quad k'[1'] \subset (W')^n.$$

Определим теперь для каждого $z \in X$ значение $a_V(z)$:

$$a_V(z) = k'(f_{y_1}(z), \dots, f_{y_n}(z)).$$

Ясно, что $a_V \in \mathcal{C}(X, X')$, $a_V(1) = 1'$ и из uHv следует $a_V(u) H' a_V(v)$. Далее, если $a_V(z) = 1'$, то для всех m $f_{y_m}(z) \in W'$ и $z \notin \bar{W}_{y_m}$. Следовательно, $z \notin X \setminus V$.

Продолжим теперь доказательство теоремы. Предположим, что $1 \in V \in \mathcal{S}$. Тогда множество $V' = X' \setminus a_V[X \setminus V]$ есть открытая окрестность точки $1'$ в пространстве X' . Пусть $k' \in \mathcal{K}'$ таков, что

$$k'(1', 1') = 1' \quad \text{и} \quad k'[1'] \subset (V')^2.$$

Пусть $V'' = X' \setminus k'[(X')^2 \setminus (V')^2]$. Определим $k_V \in \mathcal{C}_2$ посредством равенства

$$k_V(x, y) = b_{V''}(k'(a_V(x), a_V(y))).$$

Легко проверить, что $k_V(1, 1) = 1$, $k_V \in \mathcal{C}_H$ и $k_V[1] \subset V^2$. Следовательно, множество

$$\mathcal{K} = \{k_V : 1 \in V \in \mathcal{S}\}$$

есть k -множество логики \mathcal{L} и $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_H$.

Предположим теперь, что $Y \in X^*$ и $1 \notin \bar{Y}$. Пусть $V = X \setminus \bar{Y}$, так что $1 \in V \in \mathcal{S}$. Положим $Y' = a_V[Y]$. Поскольку a_V непрерывна, $\bar{Y}' = a_V[\bar{Y}]$ и, следовательно, $1' \notin \bar{Y}'$. Пусть функция $e' \in \mathcal{E}'$ такова, что $e'(Y') \neq 1'$, и, наконец, $V' = X' \setminus \{e'(Y')\}$. Определим $e_Y: X^* \rightarrow X$ посредством равенства

$$e_Y(Z) = b_{V'}(e'(a_V[Z])) \quad \text{при всех } Z \in X^*.$$

Легко проверить, что $e_Y(Y) \neq 1$, $1 \in \bar{Z}$ влечет $e_Y(Z) = 1$ и e_Y сохраняет отношение \dot{H} . Для доказательства включения $e \in Q_{\dot{H}}$ нам нужно показать, что отображение $a^*: X^* \rightarrow X'^*$, определяемое равенством

$$a^*(Z) = a_V[Z] \quad \text{при всех } Z \in X^*,$$

непрерывно. Пусть U^* — элемент предбазиса топологии $(\mathcal{S}')^*$ на $(X')^*$. Тогда существует $U' \in \mathcal{S}'$, такой, что либо

$$(1) \quad U^* = \{Z' \in X'^*: \bar{Z}' \subset U'\},$$

либо

$$(2) \quad U^* = \{Z' \in X'^*: Z' \cap U' \neq \emptyset\}.$$

Если имеет место (1), то

$$(a^*)^\vee[U^*] = \{Z \in X^*: \bar{Z} \subset a_V[U']\} \in \mathcal{S}^*.$$

Если выполняется (2), то

$$(a^*)^\vee[U^*] = \{Z \in X^*: Z \cap a_V[U'] \neq \emptyset\} \in \mathcal{S}^*.$$

Поскольку всякое открытное множество из $(X')^*$ представимо как объединение конечных пересечений множеств U^* вида (1) или (2), заключаем, что $(a^*)^\vee[W]$ открыто в X^* всегда, как только $W \in \mathcal{S}'^*$. Таким образом, функция a^* непрерывна. Следовательно, множество

$$\mathcal{E} = \{e_Y: Y \in X^* \text{ и } 1 \notin \bar{Y}\}$$

есть e -множество логики \mathcal{L} , удовлетворяющее условию $\mathcal{E} \subset Q_{\dot{H}}$. Доказательство закончено.

Если мы внимательно проанализируем доказательство 2.6.4, то увидим, что нигде не пользовались в полной мере тем, что H упорядочивает $(X, 0, 1)$ и H' упорядочивает $(X', 0', 1')$. Это приводит к следующему следствию.

Следствие 2.6.5. *Пусть \mathcal{L} и \mathcal{L}' – непрерывные логики, такие, что*

(а) \mathcal{L}' обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством;

(б) если $x, y \in X$ и $x \neq y$, то существует функция $a \in \mathcal{C}(X, X')$, такая, что $a(x) \neq a(y)$;

(с) если $I' \in V' \in \mathcal{P}'$, то существует функция $b \in \mathcal{C}(X', X)$, такая, что $b(I') = 1$ и $b[1] \subset V'$.

Тогда \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством.

В случае, когда \mathcal{L}' есть классическая двузначная логика l , теорема 2.6.4 и следствие 2.6.5 сводятся соответственно к частям 2) и 1) теоремы 2.6.1. С другой стороны, если \mathcal{L}' – классическая $[0, 1]$ -значная логика, обсуждавшаяся в примере 2.5.2, теорема 2.6.3 вытекает, очевидно, непосредственно из следствия 2.6.5. В самом деле, условие (а) выполняется благодаря самому выбору \mathcal{L}' , (б) следует из леммы Урысона и (с) имеет место потому, что в X есть нетривиальные дуги.

Простые примеры показывают, что существуют непрерывные логики \mathcal{L} (даже такие, для которых $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$), не обладающие t -множеством. Например, в случае, когда точка 1 – изолированная точка в X , и даже в случае, когда точка 1 обладает базисом окрестностей, состоящим из замкнутых открытых множеств, но X содержит некоторое бесконечное связное подмножество, логика \mathcal{L} не обладает t -множеством. С другой стороны, из доказательства теоремы 2.6.1 видно, что если $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$ и точка 1 изолирована или обладает базисом окрестностей, состоящим из одновременно замкнутых и открытых множеств, то логика \mathcal{L} обладает как k -множеством, так и e -множеством. Легко также видеть, что если X – ком-

пактная непрерывная группа и $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$, то \mathcal{L} непременно обладает t -множеством, которое можно очевидным образом определить при помощи переносов группы.

Вот некоторые открытые проблемы чисто топологического характера:

1. Обладает ли каждая логика \mathcal{L} , для которой $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$ и X — компактная непрерывная группа, наряду с k -множеством также e -множеством и t -множеством?

2. Существует ли логика \mathcal{L} , для которой $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$, не обладающая ни k -множеством, ни e -множеством?

3. Существует ли логика \mathcal{L} , для которой $\mathcal{F} = \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$, такая, что ни одна из логик $\mathcal{L}(0', 1')$, $0', 1' \in X$, не обладает t -множеством?

4. Какие еще есть удобные характеристические свойства непрерывных логик, обладающих t -множеством, k -множеством и e -множеством?

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ

3.1. Модели

В настоящей главе дается семантическое толкование понятий, изложенных в гл. II. Мы введем математические объекты, называемые *моделями*, которые и будут предметом нашего изучения при помощи формальных языков.

Под *моделью* A для непрерывной логики \mathcal{L} мы понимаем пару (R, \mathcal{A}) , где

3.1.1. R — непустое множество.

3.1.2. \mathcal{A} — функция, область определения которой есть множество всех символов предикатов и констант логики \mathcal{L} .

3.1.3. $\mathcal{A}(P_\eta): R^{\tau(\eta)} \rightarrow X$ при любом $\eta < \pi$.

3.1.4. $\mathcal{A}(c_\zeta) \in R$ при любом $\zeta < x$.

Мы говорим, что R — множество элементов модели A , а элементы вида $\mathcal{A}(c_\zeta)$, где $\zeta < x$, суть *выделенные элементы* модели A . Всякую функцию $\mathcal{A}(P_\eta)$, где $\eta < \pi$, можно рассматривать как разбиение множества $R^{\tau(\eta)}$ на (не более чем) $|X|$ непересекающихся подмножеств, которым сопоставляются различные точки пространства X . Пару $\langle \tau, x \rangle$ мы будем называть *типом подобия* модели A , а пространство X — *пространством значений* модели A . Таким образом, тип подобия $\langle \tau, x \rangle$ модели A логики \mathcal{L} совпадает с типом подобия \mathcal{L} и однозначно определяется заданием модели A . С другой стороны, пространство значений модели A не определяется однозначно этой моделью, а задается логикой \mathcal{L} . Поэтому модель A логики \mathcal{L} может быть также моделью логики \mathcal{L}' , отличной от \mathcal{L} ; вообще всякая модель логики \mathcal{L} является моделью для любой логики \mathcal{L}' , пространство значений которой X' включает X и которая имеет тот же тип, что и \mathcal{L} . Поскольку логика \mathcal{L} считается фикси-

рованной, всегда, говоря о моделях, мы будем подразумевать модели логики \mathcal{L} . Класс всех моделей логики \mathcal{L} будем обозначать \mathcal{M} (иногда $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$), мы будем пользоваться прописными латинскими буквами A , B и C , возможно с индексами, для обозначения переменных, пробегающих значения из \mathcal{M} . При этом мы всегда будем считать, что $A = (R, \mathcal{A})$ и $B = (S, \mathcal{B})$, рукописная буква \mathcal{C} остается для обозначения множества непрерывных функций, поэтому мы будем избегать записи $C = (T, \mathcal{C})$. Будем говорить, что модель A конечна, если множество R конечно, и что A бесконечна, если R бесконечно. Вообще, *мощностью модели A* (обозначаем ее через $\|A\|$) мы считаем кардинальное число $|R|$.

Если $X = \{0, 1\}$, то каждое значение $\mathcal{A}(P_\eta)$, $\eta < \pi$, определяет $\tau(\eta)$ -арное отношение $(\mathcal{A}(P_\eta))^\vee[1]$ на множестве R , в свою очередь однозначно определяющее $\mathcal{A}(P_\eta)$. Поэтому в случае классической двузначной логики \mathcal{L} всякая модель A логики \mathcal{L} оказывается моделью в обычном смысле.

Модель A есть *подмодель* модели B (пишем $A \subset B$), если

3.1.5. $R \subset S$.

3.1.6. $\mathcal{A}(P_\eta) = \mathcal{B}(P_\eta) \upharpoonright R^{\tau(\eta)}$ при $\eta < \pi$.

3.1.7. $\mathcal{A}(c_\zeta) = \mathcal{B}(c_\zeta)$ при всех $\zeta < \kappa$.

(Благодаря установленному нами использованию букв A и B исключительно для моделей, из контекста всегда будет ясно, что $A \subset B$ не есть теоретико-множественное отношение включения.) Если A — подмодель B , мы говорим, что B — *расширение* A . Ясно, что отношение „быть подмоделью“ рефлексивно, транзитивно и антисимметрично. Далее, любое непустое подмножество R множества S , содержащее выделенные элементы $\mathcal{B}(c_\zeta)$, $\zeta < \kappa$, однозначно определяет подмодель A модели B , удовлетворяющую вышеприведенным условиям 3.1.5–3.1.7. Такая подмодель называется *порожденной* подмножеством R . Если $A \subset B$, то $\|A\| \leq \|B\|$.

Пусть ν — ординал. Предположим, что $A_\xi = (R_\xi, \mathcal{A}_\xi)$ есть некоторая модель при всяком $\xi < \nu$, причем, как только $\eta \leq \xi < \nu$, имеет место $A_\eta \subset A_\xi$. В этом

случае *объединением* цепи моделей A_ξ , $\xi < \nu$, называем модель $A = \bigcup_{\xi < \nu} A_\xi$, для которой:

$$3.1.8. R = \bigcup_{\xi < \nu} R_\xi.$$

$$3.1.9. \mathcal{A}(P_\eta) = \bigcup_{\xi < \nu} \mathcal{A}_\xi(P_\eta) \text{ при всех } \eta < \pi.$$

$$3.1.10. \mathcal{A}(c_\zeta) = A_\xi(c_\zeta) \text{ при всех } \zeta < \kappa \text{ и } \xi < \nu.$$

Заметим, что определение $\mathcal{A}(c_\zeta)$, $\zeta < \kappa$, корректно и $\mathcal{A}(P_\eta)$: $R^{\tau(\eta)} \rightarrow X$. Таким образом, $A \in \mathcal{M}$ и $A_\xi \subseteq A$ при всех $\xi < \nu$.

Две модели A и B *изоморфны* ($A \cong B$), если существует взаимно однозначное отображение h , такое, что

$$3.1.11. \mathcal{D}h = R \text{ и } \mathcal{R}h = S.$$

$$3.1.12. \mathcal{A}(P_\eta)(a_1, \dots, a_{\tau(\eta)}) = \mathcal{B}(P_\eta)(ha_1, \dots, ha_{\tau(\eta)})$$

при всех $\eta < \pi$ и $a_1, \dots, a_{\tau(\eta)} \in R$.

$$3.1.13. h(\mathcal{A}(c_\zeta)) = \mathcal{B}(c_\zeta) \text{ при всех } \zeta < \kappa.$$

Такая функция h называется *изоморфизмом* A на B , а B – *изоморфным образом* при отображении h . Отношение \cong есть отношение эквивалентности на \mathcal{M} ; мы называем классы эквивалентности множества \mathcal{M} *типами* (относительно изоморфизма). Необходимым условием для $A \cong B$ является $\|A\| = \|B\|$.

Модель A *изоморфно вложима* в B , если A изоморфна некоторой подмодели модели B (или, что равносильно, B изоморфна некоторому расширению модели A). Отношение изоморфной вложимости рефлексивно, транзитивно, но не антисимметрично; оно содержит как часть отношение „быть подмоделью“.

Более общим, чем понятие изоморфизма, является понятие *гомоморфизма* модели A на B , определяемое следующим образом. Две модели A и B называются *гомоморфными* относительно \mathcal{L} (обозначение AHB), если существует отображение h , такое, что

$$3.1.14. (\mathcal{A}(P_\eta)(a_1, \dots, a_{\tau(\eta)})) H (\mathcal{B}(P_\eta)(ha_1, \dots, ha_{\tau(\eta)}))$$

при всех $\eta < \pi$ и $a_1, \dots, a_{\tau(\eta)} \in R$ ¹.

$$3.1.15. h(\mathcal{A}(c_\zeta)) = \mathcal{B}(c_\zeta) \text{ при всех } \zeta < \kappa.$$

Будем говорить, что h – *гомоморфизм* A на B и что B

¹) h – функция, такая, что $\mathcal{D}h = R$, $\mathcal{R}h = S$ и в написанном соотношении H – порядок в пространстве X . – Прим. ред.

— гомоморфный образ A при отображении h . Если $A \cong B$, то AHB . Если AHB , то $\|B\| \leq \|A\|$. Если, кроме того, BHC , то AHC . В случае, когда отношение порядка H на пространстве X есть отношение тождества на X , любой взаимно однозначный гомоморфизм A на B есть изоморфизм A на B .

Мы не будем до определенного момента вводить другие алгебраические операции для моделей.

В отношении логики l уже отмечалось, что понятие модели для l (т. е. класс \mathcal{M}_l) совпадает с обычным понятием модели. Легко также видеть, что все введенные нами понятия в случае логики l сводятся к соответствующим „двузначным“.

Пусть μ — ординал. Условимся, что $\mathcal{M}_{\varphi(\mu)}$ будет означать класс всех моделей для $\varphi(\mu)$. Нам часто будет нужно расширять модель A из \mathcal{M} до модели из $\mathcal{M}_{\varphi(\mu)}$ следующим образом. Предположим, что $a \in R^{\mu}$. Обозначим через (A, a) (или иногда через $(A, a_{\zeta})_{\zeta < \mu}$) такую модель (R, \mathcal{A}') из $\mathcal{M}_{\varphi(\mu)}$, для которой

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{A}'$$

и

$$\mathcal{A}'(c_{\kappa+\zeta}) = a_{\zeta} \text{ при } \zeta < \mu.$$

Очевидно, всякая модель A' из $\mathcal{M}_{\varphi(\mu)}$ может быть записана единственным образом как (A, a) , где A из \mathcal{M} . Эта модель A из \mathcal{M} называется *сечением* A' .

Упомянем здесь, между прочим, что введенные нами простые алгебраические понятия, определенные для класса \mathcal{M} , могут быть очевидным образом распространены на модели (A, a) из $\mathcal{M}_{\varphi(\mu)}$. Из получаемых при этом обобщений определений следует, например, что если $(A, a) \subset (B, b)$, то $A \subset B$. Аналогичные утверждения верны для \cong и H .

Мы закончим вводный раздел о моделях простой леммой.

Лемма 3.1.16. Пусть μ — ординал, α — кардинал и β — мощность множества типов моделей¹⁾ $(A, a) \in \mathcal{M}_{\varphi(\mu)}$, для которых $\|A\| \leq \alpha$. Тогда

$$\beta \leq \omega \cup |X|^{\alpha} \cup |X|^{\|\pi\|} \cup \alpha^{|\kappa+\mu|}.$$

¹⁾ Тип модели A есть класс моделей, изоморфных A . — Прим. ред.

Доказательство. Пусть R — множество мощности α , причем α бесконечно. Ясно, что всякая модель $B' \in \mathcal{M}_{\omega(\mu)}$, для которой $\|B'\| \leq \alpha$, изоморфно вложима в некоторую модель $A' \in \mathcal{M}_{\omega(\mu)}$, имеющую R своим множеством элементов. Следовательно, верхняя граница для β дается числом моделей A'' из $\mathcal{M}_{\omega(\mu)}$, имеющих в качестве множества своих элементов некоторое подмножество множества R . Имеется 2^α способов выбора множества R'' элементов для A'' ; поскольку $|X| \geq 2$, мы имеем $2^\alpha \leq |X|^\alpha$. Для всякого $\eta < \pi$ число отображений $(R'')^{\tau(\eta)}$ в X не более чем $|X|^\alpha$ (вспомним, что каждое $\tau(\eta)$ конечно). Следовательно, способов выбора всевозможных функций $A''(P_\eta)$, $\eta < \pi$, не более чем $(|X|^\alpha)^{|\pi|} = |X|^\alpha \cup |X|^{\pi!}$. Число способов выбора различных элементов $A''(c_\zeta)$, $\zeta < \kappa + \mu$, из A'' не более $\alpha^{|\kappa + \mu|}$. Следовательно,

$$\beta \leq |X|^\alpha \cup |X|^{\pi!} \cup \alpha^{|\kappa + \mu|}.$$

Если α конечно и одно из множеств X , π , $\kappa + \mu$ бесконечно, то граница для β остается прежней. Если же каждое из α , X , π , $\kappa + \mu$ конечно, то β есть верхняя граница для β . Лемма доказана.

3.2. Значения истинности

Напомним, что R^∞ есть множество всех стабилизирующихся функций из R^ω . Если $|R| \geq 2$, то $|R^\infty| = \omega \cup |R|$. Элементы множеств R^∞ , S^∞ обозначаются строчными латинскими буквами r и s соответственно.

Пусть $\phi \in \Phi$, $A \in \mathcal{M}$ и $r \in R^\infty$. Определим некоторый элемент пространства X , обозначаемый $\phi[A, r]$, рекурсией по конструкции формулы $\phi \in \Phi$. Элемент $\phi[A, r]$ пространства X мы будем называть *значением истинности формулы* ϕ на паре A, r . Определим сначала *значение термина* (т. е. переменной или константы из \mathcal{L}) для пары A, r следующим образом.

3.2.1. $v_n[A, r] = r_n$ при всех $n < \omega$.

3.2.2. $c_\zeta[A, r] = \mathcal{A}(c_\zeta)$ при всех $\zeta < \kappa$.

В двух следующих пунктах мы определяем значение истинности для атомарных формул.

3.2.3. Если x_1, x_2 — термы, то

$(x_1 \equiv x_2)[A, r] = 1$ тогда и только тогда, когда

$$x_1[A, r] = x_2[A, r];$$

$(x_1 \equiv x_2)[A, r] = 0$ тогда и только тогда, когда

$$x_1[A, r] \neq x_2[A, r].$$

3.2.4. Если $\eta < \pi$ и $x_1, \dots, x_{\tau(\eta)}$ — термы, то

$P_\eta(x_1, \dots, x_{\tau(\eta)})[A, r] = \mathcal{A}(P_\eta)(x_1[A, r], \dots, x_{\tau(\eta)}[A, r]).$

Распространим теперь наше определение на произвольные формулы.

3.2.5. Если $f \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{F}$ и $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi$, то

$$f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)[A, r] = f(\varphi_1[A, r], \dots, \varphi_n[A, r]).$$

3.2.6. Если $q \in \mathcal{Q} \cap \mathcal{F}$, $\varphi \in \Phi$ и $m < \omega$, то
 $(qv_m)\varphi[A, r] = q(\{\varphi[A, r'] : r' \in R^\infty \text{ и } r'_n = r_n \text{ при всех } n \neq m\}).$

Когда необходимо, мы будем писать $\varphi[A, r]$ вместо $\varphi[A, r]$. Должно быть ясно, что посредством правил 3.2.1 — 3.2.6 каждой формуле $\varphi \in \Phi$, модели $A \in \mathcal{M}$ и последовательности $r \in R^\infty$ мы сопоставили единственную точку $\varphi[A, r]$ из X .

Лемма 3.2.7. Пусть $\varphi \in \Phi$ и $r, r' \in R^\infty$. Если $v_n[A, r] = v_n[A, r']$ для всех свободных переменных v_n формулы φ , то $\varphi[A, r] = \varphi[A, r']$.

Доказательство легко получается индукцией по построению формулы $\varphi \in \Phi$.

Из приведенной леммы следует, что если $\varphi \in \Sigma$, т. е. если φ — высказывание, то значение истинности $\varphi[A, r]$ не зависит от r . Для $\varphi \in \Sigma$ значение истинности $\varphi[A, r]$ обозначается символами $\varphi[A]$ или $\varphi[A]$.

Обратимся теперь к случаю двузначной логики \mathcal{L} с соответствующими множествами $\Phi_{\mathcal{L}}$, $\Sigma_{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{M}_{\mathcal{L}}$. Мы говорим, что формула $\varphi \in \Phi_{\mathcal{L}}$ выполняется в модели $A \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ на последовательности $r \in R^\infty$, если $\varphi[A, r] = 1$. Высказывание $\varphi \in \Sigma_{\mathcal{L}}$ истинно в A , если $\varphi[A] = 1$; в этом случае A называется моделью φ . Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \Sigma_{\mathcal{L}}$ и $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$, то

$\text{id}(\phi_1)$ истинно в A тогда и только тогда, когда ϕ_1 истинно в A ;

$\neg(\phi_1)$ истинно в A тогда и только тогда, когда ϕ_1 не истинно в A ;

$\&(\phi_1, \phi_2)$ истинно в A тогда и только тогда, когда обе формулы ϕ_1 и ϕ_2 истинны в A ;

$\exists(\phi_1, \phi_2)$ истинно в A тогда и только тогда, когда хотя бы одна из формул ϕ_1 и ϕ_2 истинна в A ;

$(\exists v_m)\phi$ истинно в A тогда и только тогда, когда существует $a \in R$, $r \in R^\infty$, такой, что $r_m = a$ и ϕ выполняется в A на последовательности r .

Таким образом, согласно 3.2.1 – 3.2.6, мы получаем в точности классические понятия выполнимости и общезначимости для логики l .

Упражнение 3А. Предположим, что логика \mathcal{L} обладает t -множеством \mathcal{T} . Тогда следующие утверждения равносильны.

(i) При всех $\phi \in \Sigma$ выполняются $\phi[A] = \phi[B]$.

(ii) При всех $\phi \in \Sigma$, если $\phi[A] = 1$, то $\phi[B] = 1$.

Упражнение 3В. Предположим, что логика \mathcal{L} обладает H -множеством \mathcal{H} . Тогда следующие утверждения равносильны.

(i) При всех $\phi \in \Sigma$ выполняется $\phi[A] H \phi[B]$.

(ii) При всех $\phi \in \Sigma$, если $\phi[A] = 1$, то $\phi[B] = 1$.

В следующих упражнениях рассматривается, как ведут себя значения истинности в ситуациях, связанных с понятиями подмодели, расширения модели, изоморфизма и гомоморфизма.

Упражнение 3С. Предположим, что $A \subset B$ и $r \in R^\infty$. Тогда для всякой формулы¹⁾

$$\phi \in ((Q_H^w \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F}) (\mathcal{C} \cap \mathcal{F}) \Lambda$$

имеем $\phi[A, r] H \phi[B, r]$. В частности, для любого высказывания

$$\phi \in \Sigma \cap ((Q_H^w \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F}) (\mathcal{C} \cap \mathcal{F}) \Lambda$$

имеем $\phi[A] H \phi[B]$.

¹⁾ Здесь используется очевидное обобщение определения § (1), данного на стр. 34. — Прим. перев.

Упражнение 3D. Предположим, что $A \subset B$ и $r \in R^\infty$. Тогда для всякой формулы

$$\varphi \in ((Q_H \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F}) (\mathcal{C} \cap \mathcal{F}) \Lambda$$

имеем $\varphi[B, r] H \varphi[A, r]$. В частности, для любого высказывания

$$\varphi \in \Sigma \cap ((Q_H \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F}) (\mathcal{C} \cap \mathcal{F}) \Lambda$$

имеем $\varphi[B] H \varphi[A]$.

Упражнение 3E. Предположим, что $A \cong B$ при изоморфизме h , $r \in R^\infty$, $s \in S^\infty$ и $s = h \circ r$. Тогда для всякой формулы $\varphi \in \Phi$ имеем $\varphi[A, r] = \varphi[B, s]$. В частности, для любого высказывания $\varphi \in \Sigma$, $\varphi[A] = \varphi[B]$.

Упражнение 3F. Предположим, что $0H1$. Пусть

$$\mathcal{G} = \mathcal{F} \cap (\mathcal{C}_H \cup Q_{H^*}).$$

Предположим также, что AHB при гомоморфизме h и $r \in R^\infty$, $s \in S^\infty$, причем $s = h \circ r$. Тогда для любой формулы $\varphi \in \mathcal{G}(\Lambda) \subset \Phi$ имеем $\varphi[A, r] H \varphi[B, s]$. В частности, для любого высказывания $\varphi \in \Sigma \cap \mathcal{G}(\Lambda)$ имеет место $\varphi[A] H \varphi[B]$.

В следующих упражнениях рассматривается, как изменяется значение истинности формулы φ при изменении логики \mathcal{L} .

Упражнение 3G. Предположим, что $\mathcal{F}' \subset \mathcal{C} \cup Q$, $\varphi \in \Phi_\mathcal{L} \cap \Phi_{\mathcal{L}(\mathcal{F}')}$, $A \in \mathcal{M}$ и $r \in R^\infty$. Тогда

$$\varphi[A, r]_{\mathcal{L}} = \varphi[A, r]_{\mathcal{L}(\mathcal{F}')}$$

Заметим, однако, что изменение 0 или 1 влечет за собой изменение значений истинности формул таких, как $v_0 = v_1$.

Упражнение 3H. Пусть μ — ординал, $\varphi \in \Phi$, $a \in R^\mu$ и $r \in R^\infty$. Тогда имеем

$$\varphi[(A, a), r]_{\mathcal{L}(\mu)} = \varphi[A, r]_{\mathcal{L}}$$

Отныне мы можем писать $\varphi[A, r]$ вместо $\varphi[A, r]_{\mathcal{L}}$ или $\varphi[A, r]_{\mathcal{L}(\mathcal{F}')}$, и $\varphi[(A, a), r]$ — вместо $\varphi[(A, a), r]_{\mathcal{L}(\mu)}$.

Упражнение 3I. Пусть μ — ординал, a_ζ , $\zeta < \mu$, и b_ζ , $\zeta < \mu$, — последовательности элементов моделей A

и B соответственно. Тогда, если $\phi[(A, a)] = \phi[(B, b)]$ для всех атомарных формул ϕ логики $\mathcal{L}(\mu)$, то $A \cong B$. Кроме того, если $\phi[(A, a)] \neq \phi[(B, b)]$ для всех атомарных формул ϕ логики $\mathcal{L}(\mu)$, то $A \neq B$.

Пусть $\phi \in \Phi$ и $c_{\zeta_0}, \dots, c_{\zeta_n}$ — символы констант из \mathcal{L} . Мы будем обозначать через $\phi(c_{\zeta_0}, \dots, c_{\zeta_n})$ формулу, получаемую замещением всех свободных входящих переменных v_0, \dots, v_n в формулу ϕ символами $c_{\zeta_0}, \dots, c_{\zeta_n}$ соответственно. В следующих трех упражнениях содержится все, что нам нужно будет знать о таком понятии подстановки. Формулируемые в них результаты будут позже использоваться в некоторых доказательствах.

Упражнение 3J. Дайте точное рекурсивное определение $\phi(c_{\zeta_0}, \dots, c_{\zeta_n})$.

Упражнение 3K. Если $\phi \in \Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}$, то существует $n < \omega$, $\psi \in \Phi$ и $\xi_0, \dots, \xi_n < \kappa + \mu$, такие, что $\phi = \psi(c_{\zeta_0}, \dots, c_{\zeta_n})$.

Упражнение 3L. Покажите, что если все свободные переменные формулы ϕ находятся среди v_0, \dots, v_n , то $\phi(c_{\zeta_0}, \dots, c_{\zeta_n})$ есть высказывание.

Упражнение 3M. Предположим, что $r \in R^\infty$ и для всех i , $0 \leq i \leq n$, $r_i = \mathcal{A}(c_{\zeta_i})$. Тогда

$$\phi[A, r] = \phi(c_{\zeta_0}, \dots, c_{\zeta_n})[A, r].$$

Упражнение 3N. Предположим, что $A \subset B$ и $a \in R$. Тогда следующие два утверждения равносильны.

(i) Для всех $r \in R^\infty$ и всех $\phi \in \Phi$

$$\phi[A, r] = \phi[B, r].$$

(ii) Для всех $r \in R^\infty$ и всех $\psi \in \Phi_{\mathcal{L}(I)}$

$$\psi[(A, a), r] = \psi[(B, a), r].$$

Упражнение 3O. Предположим, что $A \subset B$. Тогда следующие утверждения равносильны.

(i) Для всех $r \in R^\infty$ и $\phi \in \Phi$

$$\phi[A, r] = \phi[B, r].$$

(ii) Для всех ординалов μ , всех $a \in R^\mu$, всех $\psi \in \Phi_{\mathcal{L}(\mu)}$ и всех $r \in R^\infty$

$$\psi[(A, a), r] = \psi[(B, a), r].$$

(iii) Существует перечисление $a \in R^\nu$ элементов R , такое, что для всех $\psi \in \Sigma_{\mathcal{L}(\nu)}$

$$\psi[(A, a)] = \psi[(B, a)].$$

(При переходе от (i) к (ii) используйте упр. З N для первого шага трансфинитной индукции. При переходе от (iii) к (i) воспользуйтесь упр. З М.)

3.3. Элементарная топология

Мы переходим к рассмотрению некоторых важных понятий, связанных с функцией значений истинности $\phi[A, r]$. Оказывается, что во многих случаях, с которыми нам придется иметь дело в этом разделе, все зависит только от существования такой функции $\phi[A, r]$, а не от того, каким именно способом она определена. Как правило, однако, целесообразно иметь в виду смысл $\phi[A, r]$, особенно ее смысл в логике \mathcal{L} .

Рассмотрим пространство X^Σ с обычной топологией произведения \mathcal{P}^Σ . Согласно теореме Тихонова, пространство $(X^\Sigma, \mathcal{P}^\Sigma)$ компактно и хаусдорфово. Напомним, что (см. гл. I) замкнутое множество Y из X^Σ мы назвали сингулярным, если для некоторого $\phi \in \Sigma$ и некоторого замкнутого множества Z из X , такого, что $X \setminus Z \in \mathcal{P}_0$, имеет место

$$Y = \{h \in X^\Sigma : h(\phi) \in Z\},$$

и замкнутое множество из X^Σ мы назвали базисным, если оно является объединением конечного числа сингулярных замкнутых множеств из X^Σ .

(Элементарная) теория Θ есть произвольный элемент множества $S(X^\Sigma)$, т. е. подмножество X^Σ . Теория называется открытой (замкнутой), если Θ есть *открытое* (*замкнутое*) подмножество X^Σ . Замыкание теории Θ есть множество $\bar{\Theta} \subset X^\Sigma$. Ясно, что непустые пересечения замкнутых теорий есть замкнутые теории и непустые объединения открытых теорий есть открытые

теории. Вводя пространство $(X^\Sigma)^*$, а также открытые множества $(\mathcal{P}^\Sigma)^*$, мы можем говорить о непустых теориях как о точках топологического пространства $(X^\Sigma)^*$.

Для каждой модели $A \in \mathcal{M}$ мы определяем $[A]$ (или, точнее, $[A]_\varphi$) как элемент пространства X^Σ , такой, что

$$[A](\varphi) = \varphi[A] \text{ для всех } \varphi \in \Sigma.$$

Будем называть $[A]$ функцией значений истинности модели A . Таким образом, функция $[]$, которая соотносит модели A ее функцию значений истинности, есть отображение \mathcal{M} в X^Σ . Мы определяем теорию подмножества $K \subset \mathcal{M}$ следующим образом:

$$\text{Th}(K) = \{[A]: A \in K\}.$$

Заметим, что $\text{Th}(\{A\}) = \{[A]\}$. Отныне будем писать $\text{Th}(A)$ вместо $\text{Th}(\{A\})$.

Для произвольной теории Θ класс всех моделей теории Θ определяется как

$$\text{Mod}(\Theta) = \{A \in \mathcal{M}: [A] \in \Theta\}.$$

Таким образом, мы ввели в рассмотрение три функции:

$$\begin{aligned} []: \mathcal{M} &\rightarrow X^\Sigma, \\ \text{Th}: \mathcal{S}(\mathcal{M}) &\rightarrow \mathcal{S}(X^\Sigma), \\ \text{Mod}: \mathcal{S}(X^\Sigma) &\rightarrow \mathcal{S}(\mathcal{M}). \end{aligned}$$

Вполне может быть, что $\text{Th}(\mathcal{M})$ есть собственное подмножество X^Σ . Например, в двузначной логике I постоянная функция $\Sigma_I \times 1$ принадлежит множеству $2^{\Sigma_I} \setminus \text{Th}(\mathcal{M}_I)$. Заметим, что для теории $\Theta = \{\Sigma_I \times 1\}$ имеет место $\text{Th}(\text{Mod}(\Theta)) = 0$.

Упражнение 3Р. Пусть $K, K_1, K_2 \subset \mathcal{M}$ и $\Theta, \Theta_1, \Theta_2$ — теории. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\text{Th}(K_1 \cup K_2) = \text{Th}(K_1) \cup \text{Th}(K_2);$$

$$\text{Th}(K_1 \cap K_2) \subset \text{Th}(K_1) \cap \text{Th}(K_2);$$

$$\text{Mod}(\Theta_1 \cup \Theta_2) = \text{Mod}(\Theta_1) \cup \text{Mod}(\Theta_2);$$

$$\text{Mod}(\Theta_1 \cap \Theta_2) = \text{Mod}(\Theta_1) \cap \text{Mod}(\Theta_2);$$

$$K \subset \text{Mod}(\text{Th}(K)); \quad \Theta \supset \text{Th}(\text{Mod}(\Theta));$$

$\text{Th}(K) = \text{Th}(\text{Mod}(\text{Th}(K)))$; $\text{Mod}(\Theta) = \text{Mod}(\text{Th}(\text{Mod}(\Theta)))$;
 $\Theta \cap \text{Th}(K) \neq 0$ тогда и только тогда, когда

$$\text{Mod}(\Theta) \cap K \neq 0.$$

Функция Mod индуцирует естественную топологию на множестве \mathcal{M} , которую мы будем называть *элементарной топологией* на \mathcal{M} . Открытые (замкнутые) множества в \mathcal{M} есть образы $\text{Mod}(\Theta)$ открытых (замкнутых) множеств Θ из X^Σ . Мы классифицируем замкнутые множества K класса \mathcal{M} следующим образом.

3.3.1. K есть *сингулярный элементарный класс*, в наших обозначениях $K \in EC_s$, если K есть образ $\text{Mod}(\Theta)$ сингулярного замкнутого множества Θ из X^Σ ; иначе говоря, если $K = \{A \in \mathcal{M}: \varphi[A] \subseteq Y\}$ для некоторого $\varphi \in \Sigma$ и замкнутого множества $Y \subset X$.

3.3.2. K есть *базисный элементарный класс*, в наших обозначениях $K \in EC$, если K представим как объединение конечного числа сингулярных элементарных классов.

3.3.3. K есть *элементарный класс* (пишем $K \in EC_\Delta$), если K есть пересечение некоторого множества базисных элементарных классов.

Ясно, что сингулярные элементарные классы образуют (замкнутый) предбазис относительно элементарной топологии, базисные элементарные классы образуют (замкнутый) базис относительно элементарной топологии и элементарные классы есть совокупность замкнутых множеств в элементарной топологии.

Две модели $A, B \in \mathcal{M}$ элементарно эквивалентны, если $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$, или, что то же самое, $[A] = [B]$. Класс $K \subset \mathcal{M}$ элементарно замкнут, если условия $A \in K$ и $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$ влечут $B \in K$. Элементарная топология на \mathcal{M} не хаусдорфова. Она становится хаусдорфовой, если отождествить элементарно эквивалентные модели. При этом можно указать гомеоморфизм между пространством классов элементарной эквивалентности \mathcal{M} и подпространством $\text{Th}(\mathcal{M})$ пространства X^Σ .

Упражнение 3Q.

1) $K \in EC_\Delta$ тогда и только тогда, когда $K = \overline{\text{Mod}(\text{Th}(K))}$.

2) Класс K элементарно замкнут тогда и только тогда, когда $K = \overline{\text{Mod}(\text{Th}(K))}$.

3) Класс $\text{Mod}(\Theta)$ элементарно замкнут для любой теории Θ .

4) Любой элементарный класс элементарно замкнут.

5) Если класс K элементарно замкнут, то $K \in EC_\Delta$ тогда и только тогда, когда $\text{Th}(K)$ замкнута в X^Σ .

6) Элементарная топология компактна тогда и только тогда, когда теория $\text{Th}(\mathcal{M})$ замкнута в X^Σ .

Пусть $K \subset \mathcal{M}$. Теория Θ является *K-непротиворечивой*, если $\Theta \cap \text{Th}(K) \neq 0$; если $\Theta \cap \text{Th}(K) = 0$, то мы говорим, что Θ является *K-противоречивой*. Если Θ есть *K-непротиворечивая теория*, то любая теория, включающая Θ , также *K-непротиворечива*, в частности, $\bar{\Theta}$ является *K-непротиворечивой*. Теория Θ *K-полна*, если $\Theta = \text{Th}(A)$ при некотором $A \in K$. В случае, когда $K = \mathcal{M}$, мы говорим, что некоторая теория непротиворечива, противоречива или полна без упоминания класса \mathcal{M} .

Теорема 3.3.4. Следующие утверждения эквивалентны.

(i) Для всякой теории Θ если Θ есть предельная точка в пространстве $(X^\Sigma)^*$ множества *K-непротиворечивых теорий*, то $\bar{\Theta}$ является *K-непротиворечивой теорией*.

(ii) Множество теорий Θ , для которых $\bar{\Theta}$ является *K-непротиворечивой теорией*, есть замкнутое множество в $(X^\Sigma)^*$.

(iii) $\text{Th}(K)$ замкнута в X^Σ .

Доказательство. Очевидно, что (i) и (ii) эквивалентны. Покажем, что утверждения (ii) и (iii) эквивалентны. Допустим, что имеет место (ii). Пусть $h \in \overline{\text{Th}(K)}$ и $\Theta = \{h\}$. Покажем, что

(1) Θ есть предельная точка замкнутых *K-непротиворечивых теорий*.

Предположим, что $\Theta \in U \in (\mathcal{P}^\Sigma)^*$. Мы можем считать, что существуют $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{P}^\Sigma$, такие, что

$U = \{Y: \bar{Y} \subset V_1 \cup \dots \cup V_n \text{ и } Y \cap V_m \neq \emptyset \text{ при всех } m \leq n\}$,

и при этом

$$\bar{\Theta} \subset V_1 \cup \dots \cup V_n \text{ и } \Theta \cap V_m \neq \emptyset \text{ для } m \leq n.$$

Поскольку множество Θ одноточечно, это означает, что $h \in V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{P}^\Sigma$. Следовательно, существует модель $A \in K$, такая, что $[A] \in V_1 \cap \dots \cap V_n$. Пусть $\Theta' = \text{Th}(A)$. Тогда Θ' — замкнутая K -непротиворечивая теория и $\Theta' \in U$. Таким образом, (1) доказано. Используя (1), видим, что теория $\Theta = \bar{\Theta}$ является K -непротиворечивой и, следовательно, $h \in \text{Th}(K)$. Условие (iii) выполнено.

Допустим теперь, что выполняется условие (iii). Тогда множество $X^\Sigma \setminus \text{Th}(K)$ открыто, множество

$$\{\Theta: \bar{\Theta} \subset (X^\Sigma \setminus \text{Th}(K))\}$$

открыто, а множество

$$\{\Theta: \bar{\Theta} \cap \text{Th}(K) \neq \emptyset\}$$

замкнуто. Таким образом, (ii) выполняется.

Если мы рассмотрим, во что обращается определение элементарного класса в случае логики \mathcal{L} и класса \mathcal{M}_l , то увидим, что снова получается обычное понятие элементарного класса. Благодаря наличию связки \sqsupset каждый сингулярный элементарный класс K может быть представлен следующим образом:

$K = \{A: \varphi[A] = 1 \text{ и } A \in \mathcal{M}_l\}$ при некотором

высказывании $\varphi \in \Sigma_l$;

благодаря наличию связки \wp каждый базисный элементарный класс K является также сингулярным элементарным классом. Поэтому понятие элементарного класса $K \in EC_\Delta$ имеет свое обычное значение. Оказывается, что всегда, когда логика \mathcal{L} обладает t -множеством \mathcal{T} и k -множеством \mathcal{K} , наши рассуждения для класса \mathcal{M}_l могут быть перенесены на элементарные классы из \mathcal{M} . В частности, теорема 3.3.5, приводимая ниже, утверждает, что если логика \mathcal{L} обладает t -множеством \mathcal{T} и k -множеством \mathcal{K} , то

предбазис относительно топологии, заданной в \mathcal{M} , является базисом.

Теорема 3.3.5. Предположим, что логика \mathcal{L} обладает t -множеством \mathcal{T} и k -множеством \mathcal{K} . Тогда любой элементарный класс K есть пересечение некоторых сингулярных элементарных классов.

Доказательство. Требуется доказать, что каждый класс $K \in EC$ есть пересечение сингулярных элементарных классов. Для этого рассмотрим $\Phi_1, \dots, \Phi_n \subseteq \Sigma$ и $X \setminus Y_1, \dots, X \setminus Y_n \in \mathcal{P}_0$ и предположим, что

$$K = \{A \in \mathcal{M} : \Phi_m[A] \subseteq Y_m \text{ при некотором } m \leq n\}.$$

Пусть

$$L = \bigcap \{K' : K \subset K' \text{ и } K' \in EC_s\}.$$

Ясно, что $K \subset L$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что для всякой модели $A \notin K$ существует класс $K' \in EC_s$, такой, что $K \subset K'$ и $A \notin K'$, так как тогда имело бы место $K = L$. Пусть $A \notin K$. Это означает, что

$$\Phi_m[A] \not\subseteq Y_m \text{ при всех } m \leq n.$$

Поскольку Y_m замкнуто при любом $m \leq n$, мы можем выбрать $V_m \in \mathcal{P}_0$ так, что

$$\Phi_m[A] \subseteq V_m \subset X \setminus Y_m.$$

Согласно теореме 2.4.5, существует конечное подмножество

$$\mathcal{T}_m = \{t_{m1}, \dots, t_{ml_m}\} \subset \mathcal{T},$$

обладающее свойством

$$\text{для всех } t \in \mathcal{T}_m \quad t(\Phi_m[A]) = 1$$

и

если $t(x) = 1$ при всех $t \in \mathcal{T}_m$, то $x \in V_m$.

Поскольку $Y_m \cap V_m = \emptyset$, это означает, что при всех $m \leq n$ множество

$$Z_m = \{\langle t_{m1}(x), \dots, t_{ml_m}(x) \rangle : x \in Y_m\}$$

замкнуто в X^{l_m} и

$$Z_m \subset X^{l_m} \setminus \{\langle 1, \dots, 1 \rangle\}.$$

Далее, для всякого $m \leq n$ пусть U_m , $1 \in U_m \in \mathcal{P}_0$, таково, что

$$Z_m \cap U_m^{l_m} = 0.$$

Положим $U = U_1 \cap \dots \cap U_n$. Тогда $1 \in U$ и

$$Z_m \cap U = 0 \text{ при всех } m \leq n.$$

Пусть $p = \sum_{m \leq n} i_m$. Согласно лемме 2.4.7, существует функция k , являющаяся композицией элементов из \mathcal{K} , такая, что

$$k \in \mathcal{C}_p, k(1, \dots, 1) = 1 \text{ и } k[1] \subset U^p.$$

Ясно, что $k[X^p \setminus U^p]$ есть замкнутое множество в $X \setminus \{1\}$. Пусть Z – базисное замкнутое множество в пространстве X , такое, что

$$1 \notin Z \text{ и } k[X^p \setminus U^p] \subset Z.$$

Пусть теперь $\varphi \in \Sigma$ определяется равенством

$$\varphi = k(t_{11}(\varphi_1), \dots, t_{1l_1}(\varphi_1), \dots, t_{n1}(\varphi_n), \dots, t_{nl_n}(\varphi_n)),$$

а класс $K' \in EC_s$ – равенством

$$K' = \{A \in \mathcal{M}: \varphi[A] \in Z\}.$$

Ясно, что $A \notin K'$, так как $\varphi[A] = 1 \notin Z$. Покажем, что $K \subset K'$. Предположим, что $B \in K$. Тогда при некотором $m \leq n$ имеем $\varphi_m[B] \in Y_m$. Поэтому

$$\langle t_{m1}(\varphi_m[B]), \dots, t_{ml_m}(\varphi_m[B]) \rangle \in Z_m,$$

$$\langle t_{11}(\varphi_1[B]), \dots, t_{nl_n}(\varphi_n[B]) \rangle \in X^p \setminus U^p$$

и

$$k(t_{11}(\varphi_1[B]), \dots, t_{nl_n}(\varphi_n[B])) \in Z.$$

Это означает, что $\varphi[B] \in Z$, откуда $B \in K'$. Теорема доказана.

ЭЛЕМЕНТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МОДЕЛИ

4.1. Обобщенная теория моделей

Пусть Σ^+ обозначает множество всех формул $\phi(v_0)$ логики \mathcal{L} , имеющих не более одной свободной переменной v_0 , так что имеем $\Sigma \subset \Sigma^+ \subset \Phi$. Очевидно, что если η — ненулевой предельный ординал, то $\Sigma_{\mathcal{L}(\eta)}^+ = \bigcup_{\mu < \eta} \Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}^+$.

Рассмотрим пространство X^{Σ^+} с обычной топологией произведения \mathcal{S}^{Σ^+} . Пространство $(X^{\Sigma^+}, \mathcal{S}^{\Sigma^+})$ компактно и хаусдорфово. Если $\phi \in \Sigma^+$, $A \in \mathcal{M}$ и $r \in R^\infty$, то значение истинности $\phi[A, r]$ зависит только от числа r_0 , и мы можем писать $\phi[A, r_0]$ вместо $\phi[A, r]$. При любых $A \in \mathcal{M}$ и $r_0 \in R$ положим $[A, r_0]$ равным такому элементу X^{Σ^+} , для которого

$$[A, r_0](\phi) = \phi[A, r_0] \text{ при всех } \phi \in \Sigma^+.$$

Для модели $A \in \mathcal{M}$ мы определяем *обобщенную* (или *расширенную*) теорию A как множество

$$\text{Th}^+(A) = \{[A, r_0]: r_0 \in R_0\}.$$

Нас интересует связь между $\text{Th}(A)$ и $\text{Th}^+(A)$. Легко видеть, что если $A \cong B$, то $\text{Th}^+(A) = \text{Th}^+(B)$. С другой стороны, что мы можем сказать о $\text{Th}^+(A)$ и $\text{Th}^+(B)$ в случае, когда A и B элементарно эквивалентны, т. е. если $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$? Ниже мы дадим ответ на этот вопрос в теореме 4.1.5 для случая, когда логика \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством.

Для всякого множества $\Psi \subset \Sigma^+$ пространство X^Ψ с обычной топологией \mathcal{S}^Ψ компактно и хаусдорфово.

Естественное ограничение отображения $\uparrow \Psi$ превращает всякую функцию $h \in X^{\Sigma^+}$ в функцию $h \uparrow \Psi \in X^\Psi$. Для удобства мы положим

$$\text{Th}^+(A) \uparrow \Psi = \{[A, r_0] \uparrow \Psi : r_0 \in R\}.$$

Отсюда для $A \in \mathcal{M}$, согласно введенным нами обозначениям, имеет место

$$\text{Th}^+(A) \uparrow \Sigma = \text{Th}(A).$$

Следовательно, если $\text{Th}^+(A) = \text{Th}^+(B)$, то $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$.

В остальной части этого раздела мы предполагаем, что \mathcal{L} обладает t -множеством \mathcal{T} , k -множеством \mathcal{K} и e -множеством \mathcal{E} . Пусть Ψ обозначает произвольное подмножество Σ^+ . Для всякого $h \in X^\Psi$ мы определяем множество $\Psi_h \subset \Sigma^+$ следующим образом:

$$\Psi_h = \{t(\varphi) : \varphi \in \Psi, t \in \mathcal{T} \text{ и } t(h(\varphi)) = 1\}.$$

Символы 0 и 1 используются также для обозначения постоянных функций с множествами значений $\{0\}$ и $\{1\}$ соответственно, область определения которых каждый раз задается контекстом.

Лемма 4.1.1. *Если $h \in \overline{\text{Th}^+(A) \uparrow \Psi}$, то*

$$1 \in \overline{\text{Th}^+(A) \uparrow \Psi_h}.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Psi_h$ и $V, 1 \in V \in \mathcal{P}_0$, существует $r_0 \in R$, такой, что

$$(1) \quad \varphi_m [A, r_0] \in V \text{ при всех } m \leq n.$$

Заметим, что для всякого $m \leq n$, $\varphi_m = t_m(\psi_m)$, где $t_m \in \mathcal{T}$, $\psi_m \in \Psi$ и $t_m(h(\varphi_m)) = 1$. Поскольку каждая функция t_m непрерывна, имеем

$$\check{t}_m[V] \in \mathcal{P} \text{ и } h(\varphi_m) \in \check{t}_m[V] \text{ при всех } m \leq n.$$

Согласно условию, существуют $g \in \text{Th}^+(A) \uparrow \Psi$ и $r_0 \in R$, такие, что $g(\psi_m) \in \check{t}_m[V]$ и $g(\psi_m) = \varphi_m [A, r_0]$.

при всех $m \leq n$. Отсюда $\psi_m[A, r_0] \in \check{t}_m[V]$ и легко получается (1).

Лемма 4.1.2. Предположим, что $\Phi_1 \subset \Sigma^+$ и $1 \in \overline{\text{Th}^+(A) \upharpoonright \Phi_1}$. Пусть, далее, $k \in \mathcal{K}$ и

$$\Phi_2 = \Phi_1 \cup \{k(\psi, \psi') : \psi, \psi' \in \Phi_1\}.$$

Тогда $1 \in \overline{\text{Th}^+(A) \upharpoonright \Phi_2}$.

Доказательство. Достаточно доказать, что для любых $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Phi_2$ и $V, 1 \in V \in \mathcal{P}_0$, существует $r_0 \in R$, такое, что

$$(1) \quad \varphi_m[A, r_0] \in V \text{ при всех } m \leq n.$$

Заметим, что для всякого $m \leq n$ либо $\varphi_m \in \Phi_1$, либо существуют ψ_m и ψ'_m из Φ_1 , удовлетворяющие условию $\varphi_m = k(\psi_m, \psi'_m)$. Поскольку функция k непрерывна и $k(1, 1) = 1$, существует $U, 1 \in U \in \mathcal{P}_0$, такое, что $k[U^2] \subset V$. Далее, пусть $W = U \cap V$. Согласно предположению, существует $r_0 \in R$, такое, что для всех $m \leq n$

$$\varphi_m[A, r_0] \in W, \text{ если } \varphi_m \in \Phi_1,$$

и

$$\psi_m[A, r_0], \psi'_m[A, r_0] \in W, \text{ если } \varphi_m = k(\psi_m, \psi'_m),$$

откуда и следует (1).

Лемма 4.1.3. Предположим, что $1 \in \overline{\text{Th}^+(A) \upharpoonright \Psi}$. Тогда для всех $e \in \mathcal{E}$ и $\varphi \in \Psi$ имеем

$$(ev_0)\varphi[A] = 1.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Psi$ и $e \in \mathcal{E}$. По условию для всякого $U, 1 \in U \in \mathcal{P}_0$, существует $r_0 \in R$, такое, что $\varphi[A, r_0] \in U$. Пусть

$$Y = \{\varphi[A, r_0] : r_0 \in R\}.$$

Тогда $1 \in \bar{Y}$ и, следовательно, $e(Y) = 1$, откуда следует, что

$$(ev_0)\varphi[A] = e(Y) = 1.$$

Теорема 4.1.4. Пусть $h \in X^\Psi$. Тогда следующие два условия равносильны:

- (i) $h \in \overline{\text{Th}^+(A)} \upharpoonright \Psi$;
- (ii) $\Phi[A] = 1$ для всех $\Phi \in \Sigma \cap \mathcal{E}(\mathcal{K}(\Psi_h))$.

Доказательство. Допустим, что выполнено условие (i). Пусть $\Phi \in \Sigma \cap \mathcal{E}(\mathcal{K}(\Psi_h))$. Тогда $\Phi = (ev_0)\psi$ при некоторых $e \in \mathcal{E}$ и $\psi \in \mathcal{K}(\Psi_h)$. Вспомним, что для выполнения $\psi \in \mathcal{K}(\Psi_h)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная последовательность $\Phi_1 \subset \Phi_2 \subset \dots \subset \Phi_n \subset \Sigma^+$, такая, что $\Phi_1 = \Psi_h$, $\psi \in \Phi_n$, причем каждое множество Φ_{m+1} получается из Φ_m при помощи способа, указанного в лемме 4.1.2. Согласно леммам 4.1.1 и 4.1.2, $1 \in \overline{\text{Th}^+(A)} \upharpoonright \Phi_n$. Тогда по лемме 4.1.3 имеем $\Phi[A] = 1$.

Теперь, предполагая, что (i) не имеет места, покажем, что (ii) также нарушается. Итак, допустим, что $h \notin \overline{\text{Th}^+(A)} \upharpoonright \Psi$. Это означает, что существуют $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in \Psi$ и U_1, \dots, U_n , удовлетворяющие $h(\Phi_1) \in U_1 \in \mathcal{P}_0, \dots, h(\Phi_n) \in U_n \in \mathcal{P}_0$ и такие, что (1) $\langle \langle \Phi_1[A, r_0], \dots, \Phi_n[A, r_0] \rangle \rangle: r_0 \in R \subset X^n \setminus (U_1 \times \dots \times U_n)$.

Согласно теореме 2.4.5, для всякого $m \leq n$ существует конечное подмножество

$$\mathcal{T}_m = \{t_{m1}, \dots, t_{m t_m}\} \subset \mathcal{T},$$

такое, что

$$t(h(\Phi_m)) = 1 \quad \text{при всех } t \in \mathcal{T}_m,$$

и

(2) если $t(x) = 1$ при всех $t \in \mathcal{T}_m$, то $x \in U_m$.

Пусть $p = \sum_{m \leq n} i_m$. Определим функцию $g: X^n \rightarrow X^p$ посредством равенства

$$g(x_1, \dots, x_n) = \langle t_{11}(x_1), \dots, t_{1 t_1}(x_1), t_{21}(x_2), \dots, t_{n t_n}(x_n) \rangle.$$

Пусть, далее,

$$Z = X^n \setminus (U_1 \times \dots \times U_n).$$

Согласно (2), имеем

$$g[Z] \subset X^p \setminus \{I\}^p.$$

Поскольку каждая функция t_{mj} , $1 \leq m \leq n$, $1 \leq j \leq l_m$, непрерывна, g также непрерывна. Тогда, так как Z компактно, $g[Z]$ замкнуто в X^p . Следовательно, существует $V \in \mathcal{S}$, такое, что $I \in V$ и

$$g[Z] \subset X^p \setminus V^p.$$

Согласно лемме 2.4.7, существует функция $k \in \mathcal{C}_p$, получаемая из элементов \mathcal{K} путем композиции, такая, что

$$k(I, \dots, I) = I \text{ и } \check{k}[I] \subset V^p.$$

Тогда

$$k[g[Z]] \subset X \setminus \{I\}.$$

Поскольку функция k непрерывна и $g[Z]$ замкнуто, множество $k[g[Z]]$ также замкнуто. Вспоминая, что \mathcal{F} замкнуто относительно композиции и что $\mathcal{K} \subset \mathcal{F}$, получаем $k \in \mathcal{F}$. Пусть теперь

$$\psi = k(t_{11}(\varphi_1), \dots, t_{1l_1}(\varphi_1), t_{21}(\varphi_2), \dots, t_{nl_n}(\varphi_n)).$$

Тогда $\psi \in \mathcal{K}(\Psi_h)$ и для всех $r_0 \in R$ имеем

$$\psi[A, r_0] = k(g(\varphi_1[A, r_0], \dots, \varphi_n[A, r_0])).$$

Следовательно, согласно (1),

$$Y = \{\psi[A, r_0] : r_0 \in R\} \subset k[g[Z]].$$

Отсюда следует, что $\bar{Y} \subset k[g[Z]]$, так что $I \notin \bar{Y}$. Так как \mathcal{E} есть e -множество и $I \notin \bar{Y}$, то существует $e \in \mathcal{E}$, такой, что $e(Y) \neq 1$. Следовательно,

$$(ev_0)\psi[A] \neq 1.$$

Ясно, что $(ev_0)\psi \in \Sigma \cap \mathcal{E}(\mathcal{K}(\Psi_h))$ и (ii) не выполняется. Теорема доказана.

Теорема 4.1.5. *Следующие утверждения равносильны:*

(i)

$$\text{Th}(A) = \text{Th}(B),$$

(ii)

$$\overline{\text{Th}^+(A)} = \overline{\text{Th}^+(B)}.$$

Доказательство. Вывод (i) из (ii) тривиален, поэтому мы остановимся на переходе от (i) к (ii). В силу имеющейся симметрии достаточно показать, что $\text{Th}^+(A) \subset \overline{\text{Th}^+(B)}$. Пусть $h \in \text{Th}^+(A)$. Тогда $h \in \overline{\text{Th}^+(A)}$, так что по теореме 4.1.4 при $\Psi = \Sigma^+$

$$\varphi[A] = 1 \text{ для каждого } \varphi \in \Sigma \cap \mathcal{E}(\mathcal{K}(\Psi_h)).$$

Согласно (i), это означает, что

$$\varphi[B] = 1 \text{ для каждого } \varphi \in \Sigma \cap \mathcal{E}(\mathcal{K}(\Psi_h)).$$

Используя еще раз 4.1.4, получаем $h \in \overline{\text{Th}^+(B)}$. Теорема доказана.

Упражнение 4А. Докажите следующие усиления теоремы 4.1.5.

1) Определим в пространстве X^Φ

$$\text{Th}^\infty(A) = \{(\lambda\varphi \in \Phi) \varphi[A, r]: r \in R^\infty\} \subset X^\Phi.$$

Докажите, что если $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$, то $\overline{\text{Th}^\infty(A)} = \overline{\text{Th}^\infty(B)}$.

2) В пространстве $X^{\Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}}$ определим

$$\text{Th}^\mu(A) = \{(\lambda\varphi \in \Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}) \varphi[(A, a)]: a \in R^\mu\}.$$

Докажите, что если $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$, то

$$\overline{\text{Th}^\mu(A)} = \overline{\text{Th}^\mu(B)}.$$

Поскольку двузначная логика \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством, теорема 4.1.5 верна для моделей $A, B \in \mathcal{M}_t$. Содержание ее совершенно ясно. Чтобы доказать, что $\overline{\text{Th}^+(A)} = \overline{\text{Th}^+(B)}$, предположим, что $r_0 \in R$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Sigma_t^+$, и найдем $s_0 \in S$, такой, что $\varphi_m[A, r_0] = \varphi_m[B, s_0]$ при всех $m \leq n$. Используя символ \neg в соответствующих местах, мы можем преобразовать последовательность $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ в последовательность ψ_1, \dots, ψ_n , удовлетворяющую $\psi_m[A, r_0] = 1$ при всех $m \leq n$. Пусть ψ — конъюнкция формул ψ_1, \dots, ψ_n ; тогда мы имеем $\psi[A, r_0] = 1$. Далее, применяем квантор $(\exists v_0)$ к формуле ψ , чтобы получить высказывание φ , для которого $\varphi[A] = 1$. Следовательно, $\varphi[B] = 1$. Затем, производя преобразо-

вания в обратном порядке, мы находим $s_0 \in S$, такой, что

$$\varphi_m [A, r_0] = \varphi_m [B, s_0] \text{ при всех } m \leq n.$$

4.2. Элементарные расширения

В предыдущем разделе мы изучали некоторое отношение между моделями, а именно отношение $\text{Th}^+(A) = \text{Th}^+(B)$, из которого следует, что A и B элементарно эквивалентны. В этом разделе мы будем рассматривать другое отношение между моделями, которое также влечет элементарную эквивалентность A и B , — „отношение B есть элементарное расширение A “.

Модель A называется элементарной подмоделью модели B , а B — элементарным расширением A (обозначается $A \triangleleft B$), если

4.2.1. $A \subset B$ и, кроме того,

4.2.2. $\varphi [A, r] = \varphi [B, r]$ для всех $\varphi \in \Phi$ и всех $r \in R^\omega$.

В качестве непосредственных следствий определения мы получаем

4.2.3. $A \triangleleft A$.

4.2.4. Если $A \triangleleft B$ и $B \triangleleft C$, то $A \triangleleft C$.

4.2.5. Если $A \triangleleft C$, $B \triangleleft C$ и $A \subset B$, то $A \triangleleft B$.

4.2.6. Если $A \triangleleft B$, то $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$ и $\text{Th}^+(A) \subset \subset \text{Th}^+(B)$.

Заметим, что даже при таком сильном предположении, как $A \triangleleft B$, мы не можем в общем случае заключить, что $\text{Th}^+(A) = \text{Th}^+(B)$, не предполагая, что логика \mathcal{L} обладает t -множеством \mathcal{T} , k -множеством \mathcal{K} и e -множеством \mathcal{E} .

Следующая теорема представляет собой лишь другую формулировку утверждения упр. 3О, использующую введенное сейчас новое понятие, и не требует специального доказательства.

Теорема 4.2.7. *Если $A \subset B$, то следующие утверждения равносильны:*

(i) $A \triangleleft B$;

(ii) для любого ординала μ и любого $a \in R^\mu$ имеет место $(A, a) \triangleleft (B, a)$;

(iii) для некоторой последовательности $a \in R^\mu$ имеет место $[(A, a)] = [(B, a)]$.

Модель A называется *элементарно вложимой* в B , если A изоморфна некоторой элементарной подмодели B (или, эквивалентно, B изоморфна элементарному расширению A). Отношение „*элементарно вкладывающаяся*“ рефлексивно и транзитивно, но не антисимметрично. Оно является сужением отношения изоморфной вложимости.

Теорема 4.2.8. Если $a \in R^\mu$ перечисляет множество R , $b \in S^\mu$ и $[(A, a)] = [(B, b)]$, то A элементарно вложимо в B .

Доказательство. Утверждение теоремы легко следует из некоторой модификации упражнения 3I и теоремы 4.2.7.

Мы говорим, что цепь моделей A_ξ , $\xi < \nu$, есть *элементарная цепь*, если $A_\eta \prec A_\xi$ при всех $\eta \leq \xi < \nu$.

Теорема 4.2.9. Пусть ν — ненулевой ординал и A_ξ , $\xi < \nu$, — элементарная цепь. Тогда $A_\eta \prec \bigcup_{\xi < \nu} A_\xi$ при всех $\eta < \nu$.

Доказательство. Пусть $A = \bigcup_{\xi < \nu} A_\xi$. Мы уже выяснили в разделе 3.1, что $A_\eta \subset A$ при всех $\mu < \nu$. Согласно теореме 4.2.7, достаточно показать, что для всех формул $\phi \in \Phi$ имеет место

$$(1) \quad \text{для всех } \eta < \nu \text{ и всех } r \in R_\eta^\infty \\ \phi[A_\eta, r] = \phi[A, r].$$

Докажем (1) индукцией по построению формул из Φ . Пусть Ψ — множество формул из Φ , удовлетворяющих условию (1). Требуется доказать, что $\Phi \subset \Psi$. Из определений следует, что $\Lambda \subset \Psi$. Предположим, что $\eta < \nu$, $r \in R_\eta^\infty$ и $\phi = f(\phi_1, \dots, \phi_n)$, где $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_n$ и $\phi_1, \dots, \phi_n \in \Psi$. Тогда, согласно 3.2.5 и индуктивному предположению, значения $\phi[A_\eta, r]$ и $\phi[A, r]$ равны $f(\phi_1[A, r], \dots, \phi_n[A, r])$ и, следовательно, $\phi[A_\eta, r] = \phi[A, r]$.

Предположим теперь, что $\eta < \nu$, $r \in R_\eta^\infty$ и $\phi = (qv_n)\psi$, где $q \in \mathcal{F} \cap Q$ и $\psi \in \Psi$. Для ординалов $\eta \leq \xi < \nu$ положим

$$Y_\xi = \{\psi[A_\xi, r'] : r' \in R_\xi^\infty \text{ и } r'_m = r_m \text{ для } m \neq n\},$$

и пусть

$$Y = \{\psi[A, r'] : r' \in R^\infty \text{ и } r'_m = r_m \text{ для } m \neq n\}.$$

Вспоминая 3.2.6, мы видим, что

$$\phi[A, r] = (qv_n)\psi[A, r] = q(Y),$$

и

$$\phi[A_\xi, r] = (qv_n)\psi[A_\xi, r] = q(Y_\xi)$$

при $\eta \leq \xi < \nu$. Следовательно, нам нужно лишь показать, что $q(Y_\eta) = q(Y)$.

Легко видеть, что $Y_\xi \subset Y$ при $\eta \leq \xi < \nu$, так как $\psi \in \Psi$. Согласно предположению, мы имеем также $A_\xi < A_\zeta$ и, следовательно, $Y_\xi \subset Y_\zeta$, когда $\eta \leq \xi \leq \zeta < \nu$. Наконец, $Y_\eta \neq 0$, так как $R_\eta^\infty \neq 0$. Следовательно, Y_ξ , $\eta \leq \xi < \nu$, есть возрастающая цепь элементов X^* и

$$\bigcup_{\eta \leq \xi < \nu} Y_\xi \subset Y.$$

Покажем теперь, что

$$(2) \quad \bigcup_{\eta \leq \xi < \nu} Y_\xi = Y.$$

Предположим, что $y \in Y$. Тогда при некотором $r' \in R^\infty$, для которого $r'_m = r_m$ при $m \neq n$, мы имеем $\psi[A, r'] = y$.

Поскольку здесь $R = \bigcup_{\eta \leq \xi < \nu} R_\xi$, то $r'_n \in R_\xi$ при некотором ξ , $\eta \leq \xi < \nu$, и, следовательно, $r' \in R_\xi^\infty$. Используя опять принятное нами предположение $\psi \in \Psi$, видим, что $\psi[A_\xi, r'] = y$ и, следовательно, $y \in Y_\xi$. Таким образом, условие (2) выполнено. Затем, пользуясь теоремой 1.3.1, мы заключаем, что в пространстве X^*

$$Y \in \overline{\{Y_\xi : \eta \leq \xi < \nu\}}.$$

Поскольку $A_\eta < A_\xi$ при $\eta \leq \xi < \nu$, то

$$q(Y_\eta) = q(Y_\xi) \text{ при } \eta \leq \xi < \nu.$$

Следовательно,

$$\{Y_\xi : \eta \leq \xi < \nu\} \subset \check{q}[q(Y_\eta)].$$

Множество $\{q(Y_\eta)\}$ замкнуто в X , а функция q непрерывна, поэтому и множество $\check{q}[q(Y_\eta)]$ замкнуто в X^* . Отсюда следует, что $Y \in \check{q}[q(Y_\eta)]$. Это означает, что $q(Y) = q(Y_\eta)$, и на этом индукция завершается.

Упражнение 4B. Пусть A_η , $\eta < \nu$, и B_η , $\eta < \nu$, — две элементарные цепи моделей, такие, что $A_\eta \prec B_\eta$ при всех $\eta < \nu$. Тогда $\bigcup_{\eta < \nu} A_\eta \prec \bigcup_{\eta < \nu} B_\eta$. В частности, если $A_\eta \prec B$ при всех $\eta < \nu$, то $\bigcup_{\eta < \nu} A_\eta \prec B$.

Упражнение 4C. Покажите, что даже для логики l теорема 4.2.9 становится неверной, если мы заменим всюду отношение \prec на отношение „быть элементарной эквивалентной подмоделью“.

Упражнение 4D. Предположим, что всякая модель некоторой непротиворечивой теории Θ обладает существенным элементарным расширением. Покажите, что Θ имеет модели сколь угодно большой мощности в следующем смысле:

для всякого α существует $A \in \text{Mod}(\Theta)$, такой, что $\alpha \leq \|A\|$.

Следствие 4.2.10. Пусть A_η , $\eta < \nu$, — элементарная цепь и $A = \bigcup_{\eta < \nu} A_\eta$. Тогда

$$\text{Th}^+(A) = \bigcup_{\eta < \nu} \text{Th}^+(A_\eta).$$

Если, кроме того, $\overline{\text{Th}^+(A_\eta)} = \text{Th}^+(A_\xi)$, когда $\eta \leq \xi < \nu$, то при любом $\eta < \nu$

$$\text{Th}^+(A) = \overline{\text{Th}^+(A)} = \text{Th}^+(A_\eta).$$

Доказательство. По теореме 4.2.9 всегда $A_\eta \subset A$. Следовательно, согласно 4.2.6, $\text{Th}^+(A_\eta) \subset \text{Th}^+(A)$ и

$$\bigcup_{\eta < v} \text{Th}^+(A_\eta) \subset \text{Th}^+(A).$$

С другой стороны, если $g \in \text{Th}^+(A)$, то при некотором $r_0 \in R$ имеет место $g[A, r_0]$. Поскольку $R = \bigcup_{\eta < v} R_\eta$, то $r_0 \in R_\eta$ при некотором $\eta < v$, так что из теоремы 4.2.7 следует

$$[A, r_0] = [A_\eta, r_0]$$

и $g \in \text{Th}^+(A_\eta)$. Доказательство оставшейся части теоремы получается непосредственно.

4.3. Теорема Лёвеигейма – Сколема о понижении мощности

В предыдущем разделе речь шла о элементарных расширениях моделей. Мы видели, в частности, что если выполнены условия, указанные в упражнении 4 D, то можно построить модели теории Θ сколь угодно большой мощности. Рассмотрим теперь проблему понижения мощности.

Теорема 4.3.1. Пусть модель A бесконечна, $T \subset R$ и β – кардинальное число, такое, что

$$\|\mathcal{L}\| \leq |T| \leq \beta \leq \|A\|.$$

Тогда существует модель B , такая, что

$$T \subset S, \|B\| = \beta \text{ и } B \subset A.$$

Доказательство. Мы сначала построим модель B , а затем покажем, что она обладает требуемыми свойствами. Предположим, что $\|A\| = a$. Пусть R вполне упорядочено посредством функции $a \in R^a$. Определим функцию

$$h: R^\omega \times \omega \times \Phi \times \mathcal{P}_0 \rightarrow R$$

следующим образом,

Пусть $r \in R^\infty$, $n \in \omega$, $\varphi \in \Phi$ и $U \in \mathcal{P}_0$. Тогда положим значение $h(r, n, \varphi, U)$ равным первому из элементов $a_\xi \in R$, таких, что существует $r' \in R^\infty$, удовлетворяющий условиям $r'_m = r_m$ при $m \neq n$, $r'_n = a_\xi$ и $\varphi[A, r'] \in U$, если такие a_ξ существуют; положим $h(r, n, \varphi, U) = a_0$, если таких a_ξ нет.

Ясно, что h — корректно определенная функция. Заметим, что, поскольку $\|\mathcal{L}\| \leq \beta$, мы имеем

$$\omega \cup |\mathcal{P}_0| \cup |\Phi| \leq \beta.$$

Пусть T_0 — произвольное подмножество R , такое, что

$$T \cup \{\mathcal{A}(c_\zeta) : \zeta < \kappa\} \subset T_0 \text{ и } |T_0| = \beta.$$

Определим возрастающую последовательность подмножеств

$$T_0 \subset T_1 \subset \dots \subset T_p \subset \dots \quad (p < \omega)$$

следующим образом. Допустим, что T_p определено. Тогда мы определяем

$$T_{p+1} = T_p \cup h[T_p^\infty \times \omega \times \Phi \times \mathcal{P}_0].$$

При помощи индукции легко получаем, что $|T_p| = \beta$ для всех $p < \omega$. Пусть $S = \bigcup_{p < \omega} T_p$ и B — подмодель модели A , порожденная множеством S . Ясно, что $|S| = \beta$ и $\|B\| = \beta$. Для завершения доказательства теоремы мы покажем, что для любого $\varphi \in \Phi$ выполняется равенство

$$(1) \quad \varphi[B, s] = \varphi[A, s] \text{ при всех } s \in S^\infty.$$

Пусть Ψ — множество формул из Φ , обладающих свойством (1). Очевидно, $\Lambda \subset \Psi$. Предположим, что $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Psi$, $f \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_n$ и $\varphi = f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Можно проверить, что $\varphi \in \Psi$. Предположим затем, что $\psi \in \Psi$, $q \in \mathcal{F} \cap \mathcal{Q}$ и $\varphi = (qv_n)\psi$. Пусть $s \in S^\infty$,

$$Y_A = \{\psi[A, r'] : r' \in R^\infty \text{ и } r'_m = s_m \text{ при } m \neq n\}.$$

Пусть также

$$Y_B = \{\psi[B, s'] : s' \in S^\infty \text{ и } s'_m = s_m \text{ при } m \neq n\}.$$

Поскольку $\psi \in \Psi$ и $S \subset R$, мы имеем

$$Y_B \subset Y_A.$$

Так как $\varphi[A, s] = q(Y_A)$ и $\varphi[B, s] = q(Y_B)$, то для завершения индукции нам остается доказать, что $q(Y_A) = q(Y_B)$. Поскольку функция q непрерывна и $Y_B \subset Y_A$, достаточно показать, что

$$Y_A \subset \bar{Y}_B.$$

Пусть $y \in Y_A$ и $y \in U \in \mathcal{P}_0$. Это означает, что существует $r' \in R^\infty$, удовлетворяющий условиям

$$r'_m = s_m \text{ при } m \neq n \text{ и } \psi[A, r'] \in U.$$

Поскольку функция $s \in S^\infty$ и множество ее значений конечно, то при некотором $p < \omega$, $s \in T_p^\infty$. Следовательно, по определению множества T_{p+1}

$$h(s, n, \psi, U) \in T_{p+1}.$$

Пусть $s'_m = s_m$ при $m \neq n$ и $s'_n = h(s, n, \psi, U)$. Ясно, что $s' \in T_{p+1}^\infty \subset S^\infty$, $\psi[A, s'] \in U$ и $\psi[A, s'] \in Y_B$. Поэтому

$$Y_B \cap U \neq 0.$$

Таким образом, для любого $U \in \mathcal{P}_0$, такого, что $y \in U$, имеем $Y_B \cap U \neq 0$. Отсюда следует, что $Y_A \subset \bar{Y}_B$, что и требовалось доказать. Равенство (1) доказано и $B \prec A$.

Следствие 4.3.2. Предположим, что теория Θ имеет модель A мощности α и $\|\mathcal{L}\| \leq \beta \leq \alpha$. Тогда Θ имеет модель мощности β .

Упражнение 4Е. Модель B , построенную при доказательстве теоремы 4.3.1, можно видоизменить так, чтобы дополнительно выполнялись следующие условия:

$$\overline{\text{Th}^+(A)} = \overline{\text{Th}^+(B)},$$

$$\overline{\text{Th}^+((A, b))} = \overline{\text{Th}^+((B, b))} \text{ для всех ординалов } \mu \text{ и } \forall b \in S^\mu.$$

Указание. Определите функцию

$$g: R^\infty \times \omega \times \mathcal{P}_0^\Phi \rightarrow R$$

следующим образом. Для $r \in R^\infty$, $n < \omega$, базисного открытого множества $V \in \mathcal{P}_0^\Phi$, задаваемого формулами $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \Phi$ и соответствующими открытыми множествами $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{P}_0$, положите

$g(r, n, V)$ равным наименьшему из элементов $a_\xi \in R$, для которых существует $r' \in R^\infty$, удовлетворяющий условиям $r'_m = r_m$ при $m \neq n$, $r'_n = a_\xi$ и, кроме того, такой, что

$$\varphi_i[A, r'] \in U_i \text{ при всех } i, 1 \leq i \leq k,$$

и положите

$$g(r, n, V) = a_0, \text{ если таких } a_\xi \text{ не существует.}$$

Теперь образуйте множества T_p , используя функцию g вместо h .

Упражнение 4F. Можно показать даже, что модель B из теоремы 4.3.1 может быть построена так, что

$$\overline{\text{Th}^\infty((A, b))} = \overline{\text{Th}^\infty((B, b))}$$

для всех ординалов μ и $b \in S^\mu$. (Определение Th^∞ см. в упр. 4A.)

Упражнение 4G. Теорема 4.3.1 остается верной даже в случае, когда пространство X не компактно. Аналогичное замечание применимо и к упр. 4E и 4F. Является ли требование компактности X необходимым в доказательстве теоремы 4.2.9?

Упражнение 4H. Если всякая модель непротиворечивой теории Θ имеет собственное элементарное расширение, то для любого кардинала α , такого, что $\|\mathcal{L}\| \leq \alpha$, существует модель теории Θ мощности α .

Упражнение 4I. Предположим, что $\|\mathcal{L}\| \leq \alpha$. Тогда любая модель A мощности α есть объединение некоторой элементарной цепи A_ξ , $\xi < \nu$, такой, что $\|A_\xi\| < \alpha$, при всех $\xi < \nu$.

УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯ МОДЕЛЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

5.1. Основная лемма

На протяжении этого раздела мы будем считать, что I есть некоторое непустое множество, D – ультрафильтр над I и $F = \lambda i A_i$ – функция, отображающая I в \mathcal{M} . В разделе 1.2 мы определили D -произведение $D\text{-prod } \lambda i R_i$ множеств R_i , $i \in I$. Перенесем это определение на модели и определим D -произведение $D\text{-prod } \lambda i A_i$ моделей A_i , $i \in I$. При этом мы установим фундаментальное соотношение

$$\Phi [D\text{-prod } \lambda i A_i] = D\text{-lim } \lambda i \Phi [A_i] \text{ при всех } \Phi \in \Sigma.$$

Вспомним некоторые определения разд. 1.2. Пусть f , g принимают значения из $\prod_{i \in I} R_i$.

$f \sim g$ тогда и только тогда,

$$\text{когда } \{i \in I: f(i) = g(i)\} \in D.$$

$$f^\sim = \{g: g \sim f\}.$$

$$D\text{-prod } \lambda i R_i = \{f^\sim: f \in \prod_{i \in I} R_i\}.$$

D -произведение, или ультрапроизведение моделей A_i , $i \in I$, обозначаемое $D\text{-prod } \lambda i A_i$, есть модель $A = (R, \mathcal{A}) \in \mathcal{M}$, такая, что:

5.1.1. $R = D\text{-prod } \lambda i R_i$.

5.1.2. $\mathcal{A}(c_\zeta) = (\lambda i \mathcal{A}_i(c_\zeta))^\sim$ при всех $\zeta < \kappa$.

5.1.3. Для всех $\eta < \pi$ и $f_1^\sim, \dots, f_{\tau(\eta)}^\sim \in R$

$$\mathcal{A}(P_\eta)(f_1^\sim, \dots, f_{\tau(\eta)}^\sim) =$$

$$= D\text{-lim } \lambda i \mathcal{A}_i(P_\eta)(f_1(i), \dots, f_{\tau(\eta)}(i)).$$

Легко видеть, что каждое $\mathcal{A}(c_\zeta) \in R$. Более того, поскольку каждое значение $\tau(\eta)$ конечно, $\mathcal{A}(P_\eta)$ есть

всегда функция корректно определенная, независимо от выбора представителей в классе эквивалентности, отображающая $R^{\tau(n)}$ в X . Таким образом, A принадлежит \mathcal{M} . Заметим, что конструкция $D\text{-prod } F$ не зависит от множества \mathcal{F} и языка \mathcal{L} , а зависит только от выбора пространства X и типа логики \mathcal{L} .

Лемма 5.1.4. (Основная лемма.) *Пусть $A = D\text{-prod } F$, $T = \prod_{i \in I} R_i$, $s \in T^\infty$ и $\varphi \in \Phi$. Определим $r \in R^\infty$ равенством $r = (\lambda n < \omega) (s_n)^\sim$ и для всякого $i \in I$ определим $s_i = (\lambda n < \omega) s_n(i)$, так что $s_i \in (R_i)^\infty$. Тогда*

$$(1) \quad \varphi[A, r] = D\text{-lim } \lambda i \varphi[A_i, s_i].$$

Доказательство. Пусть Ψ — множество формул, для которых условие (1) выполняется при всех $s \in T^\infty$. Легко видеть, что $\Lambda \subset \Psi$. Допустим, что $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Psi$, $f \in \mathcal{C}_n \cap \mathcal{F}$ и $\varphi = f(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Тогда, согласно 3.2.5, индуктивным предположениям и теореме 1.5.3,

$$\begin{aligned} \varphi[A, r] &= f(\varphi_1[A, r], \dots, \varphi_n[A, r]) = \\ &= f(D\text{-lim } \lambda i \varphi_1[A_i, s_i], \dots, D\text{-lim } \lambda i \varphi_n[A_i, s_i]) = \\ &= D\text{-lim } \lambda i f(\varphi_1[A_i, s_i], \dots, \varphi_n[A_i, s_i]) = \\ &= D\text{-lim } \lambda i \varphi[A_i, s_i], \end{aligned}$$

так что мы имеем $\varphi \in \Psi$.

Допустим теперь, что $\psi \in \Psi$, $q \in \mathcal{F} \cap \mathcal{Q}$ и $\varphi = (qv_n)\psi$. Согласно 3.2.6 и индуктивному предположению, имеем

$$\begin{aligned} \varphi[A, r] &= q(\{\psi[A, r'] : r' \in R^\infty \text{ и } r'_m = r_m \text{ при } m \neq n\}) = \\ &= q(\{D\text{-lim } \lambda i \psi[A_i, s'_i] : s' \in T^\infty \text{ и } s'_m = s_m \text{ при } m \neq n\}). \end{aligned}$$

Пусть

$$Y = \{\lambda i \psi[A_i, s'_i] : s' \in T^\infty \text{ и } s'_m = s_m \text{ при } m \neq n\},$$

пусть также

$$Y_\zeta = \{\psi[A_i, s'_i] : s' \in T^\infty \text{ и } s'_m = s_m \text{ при } m \neq n\}.$$

И, следовательно, при всех $i \in I$

$$Y_i = \{\Psi[A_i, r']: r' \in (R_i)^\infty \text{ и } r'_m = s_m(i) \text{ при } m \neq n\}.$$

Отсюда $Y = \prod_{i \in I} Y_i$ и по теореме 1.5.6

$$q(D\text{-}\lim Y) = q(D^*\text{-}\lim \lambda i Y_i) = D\text{-}\lim \lambda i q(Y_i).$$

Теперь видим, что всегда

$$q(Y_i) = (qv_n)\Psi[A_i, s_i] = \varphi[A_i, s_i],$$

откуда имеем

$$\varphi[A, r] = D\text{-}\lim \lambda i \varphi[A_i, s_i].$$

Следовательно, $\varphi \in \Psi$. Поэтому $\Phi \subset \Psi$; лемма доказана.

Мы видим, что лемма 5.1.4 остается верной, если расширить множество всех формул до $(\mathcal{C} \cup \mathcal{Q})\Lambda$. В этой главе несколько раз имеет место ситуация, в которой мы доказываем теорему для всех $\varphi \in \Phi$, тогда как она могла бы в равной мере быть доказана для всех $\varphi \in (\mathcal{C} \cup \mathcal{Q})\Lambda$.

Следствие 5.1.5. Для всякого высказывания $\varphi \in \Sigma$

$$\varphi[D\text{-}\prod F] = D\text{-}\lim \lambda i \varphi[A_i].$$

Из следствия 5.1.5 тривиально следует, что если $[A_i] = [B_i]$ при всяком $i \in I$, то

$$[D\text{-}\prod \lambda_i A_i] = [D\text{-}\prod \lambda_i B_i].$$

Поскольку X^Σ есть компактное хаусдорфово пространство, любая функция $h: I \rightarrow X^\Sigma$ имеет D -предел в X^Σ . В терминах пространства X^Σ мы можем сформулировать такое следствие.

Следствие 5.1.6. $[D\text{-}\prod F] = D\text{-}\lim \lambda i [A_i]$.

В случае, когда $A_i = B$, т. е. когда F – постоянная функция, принимающая значение B , мы пишем просто $D\text{-}\prod B$ вместо $D\text{-}\prod F$ и называем $D\text{-}\prod B$ *ультрастепенью B по модулю D*.

Следствие 5.1.7. $[D\text{-}\prod B] = [B]$, и, следовательно, модель B элементарно эквивалентна своей ультрастепени.

Доказательство. Утверждение вытекает из следствия 5.1.6 и леммы 1.5.2, согласно которой D -предел постоянной функции есть значение этой функции.

Обращаясь к обобщенной теории моделей, мы получаем следующее важное следствие из основной леммы.

Следствие 5.1.8. Для любой функции $f \in \prod_{i \in I} R_i$ в пространстве X^{Σ^+} имеем

$$[D\text{-prod } F, f^\sim] = D\text{-lim } \lambda i [A_i, f(i)].$$

Следствие 5.1.9.

$$\text{Th}^+(D\text{-prod } F) = D^*\text{-lim } \lambda i \text{Th}^+(A_i).$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что следующие утверждения равносильны:

$$h \in \text{Th}^+(D\text{-prod } F);$$

$$h = [D\text{-prod } F, r_0] \text{ для некоторого } r_0 \in R;$$

$$h = D\text{-lim } \lambda i [A_i, f(i)] \text{ для некоторого } f \in \prod_{i \in I} R_i;$$

$$h = D\text{-lim } g \text{ для некоторого } g \in \prod_{i \in I} \text{Th}^+(A_i);$$

$$h \in D^*\text{-lim } \lambda i \text{Th}^+(A_i).$$

Теорема 5.1.10. Предположим, что $\|\mathcal{L}\| \leq |J|$, $I = S_\omega(J)$ и D -регулярный ультрафильтр над I . Тогда для всякого $B \in \mathcal{M}$

$$\overline{\text{Th}^+(D\text{-prod } B)} = \overline{\text{Th}^+(D\text{-prod } B)} = \overline{\text{Th}^+(B)}.$$

Доказательство. Пространство X^{Σ^+} имеет базис открытых множеств мощности $\|\mathcal{L}\|$, компактно и хаусдорфово. Следовательно, мы можем применить теорему 1.5.9, согласно которой для случая пространства X^{Σ^+} имеем

$$\overline{\text{Th}^+(B)} = D\text{-lim } \text{Th}^+(B)' = D^*\text{-lim } \lambda i \text{Th}^+(B).$$

Согласно следствию 5.1.9,

$$D^*\text{-}\lim \lambda i \text{Th}^+(B) = \text{Th}^+(D\text{-prod } B),$$

откуда следует требуемый результат.

Упражнение 5A. Докажите, что для всякого ультрафильтра D и всякой модели B в пространстве X^{2^+} имеем

$$\text{Th}^+(D\text{-prod } B) \subset \overline{\text{Th}^+(B)}.$$

Упражнение 5B. Получите результаты, аналогичные указанным в следствии 5.1.9 и теореме 5.1.10, для Th^∞ и Th^μ (определенных в упр. 4A).

Упражнение 5C*. Предположим, что логика \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством. Покажите, что если $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$, то модель A элементарно вложима в некоторую ультрастепень B . (Используйте упр. 4A и 5B.)

Упражнение 5D*. Покажите путем построения соответствующего контрпримера, что теорема 5.1.10 становится неверной, если предположение $\|\mathcal{L}\| \leq |J|$ заменить на более слабое требование $\omega \cup |\mathcal{P}_0| \leq |J|$.

5.2. Теорема о компактности

Пусть $K \subset \mathcal{M}$. Мы говорим, что класс K замкнут относительно ультрапроизведений, если $D\text{-prod } F \in K$ для любых непустого множества I , функции $F \in K^I$ и ультрафильтра D над I .

Лемма 5.2.1. 1) Если класс K замкнут относительно ультрапроизведений, то теория $\text{Th}(K)$ замкнута в пространстве X^Σ .

2) Если Θ — замкнутая теория, то класс $\text{Mod}(\Theta)$ замкнут относительно ультрапроизведений.

Доказательство. Для доказательства 1) предположим, что класс K замкнут относительно ультрапроизведений. Согласно теореме 1.5.10, достаточно доказать, что теория $\text{Th}(K)$ замкнута относительно D -пределов. Пусть $G \in \text{Th}(K)'$ и D — ультрафильтр

над I . Поскольку $G \subseteq \text{Th}(K)^I$, существует функция $F \in K^I$, такая, что $G(i) = [F(i)]$ при всех $i \in I$. Тогда $D\text{-prod } F \in K$, а, согласно следствию 5.1.6, $[D\text{-prod } F] = D\text{-lim } G$, так что $D\text{-lim } G \in \text{Th}(K)$.

Чтобы доказать 2), допустим, что Θ — замкнутое множество в пространстве X^Σ , $F \in \text{Mod}(\Theta)^I$ и D — ультрафильтр над I . Поскольку любое $F(i) \in \text{Mod}\Theta$, то $[F(i)] \in \Theta$. И так как Θ замкнуто, мы имеем $D\text{-lim } \lambda i [F(i)] \in \Theta$. Используя еще раз следствие 5.1.6, получаем $[D\text{-prod } F] \in \Theta$, откуда $D\text{-prod } F \in \text{Mod}(\Theta)$. Лемма доказана.

Применяя совместно 5.2.1, 1) и теорему 3.3.4, мы видим, что любой класс моделей K , замкнутый относительно ультрапроизведений, обладает свойствами 3.3.4(i) и 3.3.4(ii).

Следующая теорема есть теорема о компактности для теории непрерывных моделей.

Теорема 5.2.2. *Пространство \mathcal{M} , определяемое элементарной топологией на \mathcal{M} , компактно.*

Доказательство. Утверждение теоремы непосредственно следует из леммы 5.2.1 и упр. 3Q, 6).

Следствие 5.2.3. *Пусть $\varphi \in \Sigma$. Тогда множество $\{\varphi[A] : A \in \mathcal{M}\}$ замкнуто в X .*

Следующая теорема представляет обобщение хорошо известной характеристики элементарных классов, данной в работе Фрейна, Мореля и Скотта [1962].

Теорема 5.2.4. *$K \in \text{EC}_\Delta$ тогда и только тогда, когда класс K замкнут относительно ультрапроизведений и элементарно замкнут.*

Доказательство. Допустим, что $K \in \text{EC}_\Delta$. Согласно упр. 3Q, 4), класс K элементарно замкнут. Из упр. 3Q, 1) вытекает $K = \text{Mod}(\overline{\text{Th}(K)})$. Следовательно, по лемме 5.2.1, 2) K замкнут относительно ультрапроизведений.

Обратно, если класс K элементарно замкнут и замкнут относительно ультрапроизведений, то (согласно лемме 5.2.1, 1)) множество $\text{Th}(K)$ замкнуто

в пространстве X^Σ и из упр. 3Q, 5) следует $K \in EC_\Delta$.
Теорема доказана.

Упражнение 5Е. Пусть $K \subset \mathcal{M}$. Тогда класс
 $\{A \in \mathcal{M}: Th(A) = Th(D\text{-prod } F) \text{ для некоторого } F \in K'\$
 и ультрафильтра D над $I\}$

есть элементарный класс. Следовательно, если K замкнут относительно ультрапроизведений, то класс

$\{A \in \mathcal{M}: Th(A) = Th(B) \text{ для некоторого } B \in K\}$
 есть элементарный класс.

Упражнение 5F. Пусть $K \subset \mathcal{M}$. Тогда каждый из классов K и $\mathcal{M} \setminus K$ представим как пересечение конечного числа базисных элементарных классов тогда и только тогда, когда

(*) оба класса K и $\mathcal{M} \setminus K$ замкнуты относительно ультрапроизведений и один из них элементарно замкнут.

Далее, если логика \mathcal{L} обладает t -множеством и k -множеством, то каждый из классов K и $\mathcal{M} \setminus K$ есть пересечение конечного числа сингулярных элементарных классов тогда и только тогда, когда выполняется условие (*). В случае логики l каждый из классов K и $\mathcal{M} \setminus K$ есть сингулярный элементарный класс тогда и только тогда, когда выполняется условие (*).

5.3. Теорема Лёвенгейма — Сколема о повышении мощности

В этом разделе мы продолжаем считать, что I — непустое множество и D — ультрафильтр над I . Естественным вложением B в $D\text{-prod } B$ мы называем функцию, ставящую в соответствие каждому элементу $b \in S$ элемент $(\lambda i b)^\sim \in D\text{-prod } S$.

Теорема 5.3.1. Естественное вложение есть изоморфизм модели B на некоторую элементарную подмодель $D\text{-prod } B$.

Доказательство. Пусть B' — подмодель $D\text{-prod } B$, порожденная множеством значений естественного вложения (которое мы обозначим через d). Доказательство того, что d — изоморфизм B на B' , тривиально.

Далее, пусть $\|B\| = \beta$ и пусть $b \in S^\beta$ — перечисление множества S . Применяя следствие 5.1.7 для случая логики $\mathcal{L}(\beta)$, получаем

$$\text{Th}((B, b)) = \text{Th}(D\text{-prod}(B, b)).$$

Из определения $D\text{-prod}(B, b)$ следует, что

$$D\text{-prod}(B, b) = (D\text{-prod } B, d \circ b).$$

Область значений $d \circ b$ есть множество S' элементов модели B' . Тогда поскольку $(B', d \circ b) \cong (B, b)$, то

$$\text{Th}((B', d \circ b)) = \text{Th}((D\text{-prod } B, d \circ b)).$$

Из теоремы 4.2.7 следует, что B' — элементарная подмодель $D\text{-prod } B$. Теорема доказана.

Упражнение 5G. Если B или I конечно, то $D\text{-prod } B \cong B$.

Упражнение 5H. Покажите, что если модель B бесконечна и ультрафильтр D счетно неполон, то естественное вложение отображает B на собственную подмодель $D\text{-prod } B$.

Упражнение 5I*. 1) Покажите, что всякая модель B изоморфно вложима в некоторое ультрапроизведение $D\text{-prod } \lambda i A_i$, где каждое A_i есть конечная модель. Кроме того, если κ конечно, то в качестве каждого A_i может быть взята некоторая конечная подмодель модели B . Верно ли, что B элементарно вложима в такое ультрапроизведение?

2) Пусть Θ — непротиворечивая теория и $\|\mathcal{L}\| \leq \alpha$. Предположим также, что любые две модели теории Θ изоморфно вложимы в некоторую третью модель Θ . Покажите тогда, что для любой совокупности A_η , $\eta < \alpha$, моделей Θ , имеющих мощность α , существует модель A теории Θ мощности α , такая, что все A_η , $\eta < \alpha$, изоморфно вложимы в A .

Упражнение 5J. 1) Предположим, что $B \prec A$. Тогда существует элементарное вложение*

$$h: D\text{-prod } B \rightarrow D\text{-prod } A$$

и два естественных вложения

$$d_1: B \rightarrow D\text{-prod } B,$$

$$d_2: A \rightarrow D\text{-prod } A,$$

такие, что $h \circ d_1 = d_2 \uparrow S$. Следовательно, существуют модели A' и B' , такие, что

$$A' \cong D\text{-prod } A, \quad B' \cong D\text{-prod } B,$$

$$B \prec B' \prec A', \quad B \prec A \prec A'.$$

2) Предположим, что $B = \bigcup_{\eta > a} A_\eta$, где A_η , $\eta > a$ — некоторая цепь моделей. Тогда для некоторого ультрафильтра D над a существуют изоморфные вложения

$$h_1: B \rightarrow D\text{-prod } \lambda\eta A_\eta, \quad h_2: D\text{-prod } \lambda\eta A_\eta \rightarrow D\text{-prod } B,$$

такие, что $h_2 \circ h_1$ есть естественное вложение B в $D\text{-prod } B$. Выведите отсюда, что если

- (i) K замкнут относительно ультрапроизведений и изоморфизма и, кроме того,
- (ii) условия $A \in K$, $B \subset A \subset C$ и $B \prec C$ влекут $B \in K$, то
- (iii) K замкнут относительно объединения цепей моделей из K .

Сейчас мы докажем теорему Лёвенгейма — Скolem'a о повышении мощности для непрерывных логик.

Теорема 5.3.2. *Пусть A — бесконечная модель и β — кардинал, для которого $\|\mathcal{Z}\| \leq \beta$ и $\|A\| \leq \beta$. Тогда A обладает элементарным расширением мощности β .*

Доказательство. Согласно лемме 1.2.2, для модели A существует некоторая ее ультрастепень мощности $\geq \beta$. По теореме 5.3.1 всякая ультрастепень A изоморфна некоторому элементарному расширению A , так что A обладает элементарным расширением мощности $\geq \beta$. Согласно 4.3.1, мы можем найти элементарное расширение A мощности β .

Следствие 5.3.3. Предположим, что Θ имеет бесконечную модель. Тогда для любого кардинала $\beta \geq \|\mathcal{L}\|$ теория Θ имеет модель мощности β .

Доказательство. Это утверждение следует из 4.2.6 и теоремы 5.3.2.

Упражнение 5K. Предположим, что $\beta \geq \|\mathcal{L}\|$ и что Θ — теория, имеющая только бесконечные модели. Если любые две модели теории Θ , имеющие мощность β , элементарно эквивалентны, то Θ полна. Кроме того, если любые две модели A и B теории Θ , имеющие мощность β , удовлетворяют условию

$$(*) \quad \overline{\text{Th}^+(A)} = \overline{\text{Th}^+(B)},$$

то этому же условию (*) удовлетворяют две произвольные модели A и B теории Θ .

Упражнение 5L*. Докажите, что в противоположность сказанному в упр. 4G следствие 5.3.3, вообще говоря, неверно, если не предполагается, что X компактно. Предположим, что $|\Phi| = \omega$ и X — счетное дискретное пространство. Существует наименьший кардинал β , такой, что как только теория Θ имеет модель мощности β , она имеет модель мощности γ для всякого $\gamma \geq \beta$. (Как велико такое β ?)

5.4. Правильные ультрафильтры

В этом разделе мы введем понятие α -правильного ультрафильтра и докажем несколько чисто теоретико-множественных результатов, связанных с этим понятием. Это понятие можно было бы ввести в гл. I, однако нам представляется более удобным ввести его здесь, так как мы сразу сможем установить его значение в теории моделей (разд. 5.5).

Пусть I — непустое множество и α — бесконечный кардинал. Если f и g — произвольные функции, то мы пишем $f \leq g$ в случае $\mathcal{D}f = \mathcal{D}g$ и $f(u) \subset g(u)$ для всех $u \in \mathcal{D}f$. Рассмотрим функцию f , отображающую множество $S^\alpha(\alpha)$ в $S(I)$. Мы будем говорить, что f монотонна, если

$f(u) \subset f(w)$ как только $u, w \in \mathcal{D}f$ и $u \subset w$.

Мы говорим, что функция f мультипликативна, если $f(u \cap w) = f(u) \cap f(w)$ при всех $u, w \in \mathcal{D}f$.

Очевидно, что любая мультипликативная функция монотонна.

Ультрафильтр D над множеством I называется α -правильным, если он обладает следующим свойством:

для всякого ординала $\beta < \alpha$ и всякой монотонной функции $f: S^\omega(\beta) \rightarrow D$ существует мультипликативная функция $g: S^\omega(\beta) \rightarrow D$, такая, что $g \leq f$.

Упражнение 5M. Каждый главный ультрафильтр есть α -правильный ультрафильтр при всех α .

Заметим, что если ультрафильтр D является α -правильным, то он является и β -правильным при всех $\beta < \alpha$.

Напомним (определение из упр. 1J), что ультрафильтр D называется счетно неполным, если существует счетное подмножество $E \subset D$, такое, что $\bigcap E \notin D$. Известно (за исключением случаев, когда мощность I очень велика), что всякий ультрафильтр D над I либо главный, либо счетно неполный.

Лемма 5.4.1. *Если ультрафильтр D – счетно неполный, то существует счетная убывающая последовательность $y_0 \supset y_1 \supset y_2 \supset \dots$ элементов из D , такая, что $I = y_0$ и $\bigcap_{n < \omega} y_n = 0$.*

Доказательство. Пусть E – счетное подмножество D , для которого $\bigcap E \notin D$. Мы можем считать

$$E = \{e_n : n < \omega\}.$$

Пусть $y_0 = I$ и для любого n положим

$$y_{n+1} = y_n \cap e_n \cap (I \setminus \bigcap E).$$

Последовательность y_0, y_1, y_2, \dots , очевидно обладает требуемыми свойствами.

Теорема 5.4.2. *Всякий ультрафильтр D есть ω^+ -правильный ультрафильтр.*

Доказательство. Пусть $\beta < \omega^+$ и $f: S^\omega(\beta) \rightarrow D$ монотонна. Если β конечен, то $0 \in S^\omega(\beta)$, постоянная функция

$$g = (\lambda u \in S^\omega(\beta)) f(0)$$

мультипликативна, принимает значения в D и $g \leq f$.

Остается случай $\beta = \omega$. Пусть $m(u)$ — наименьшее натуральное число m , такое, что $\omega \setminus m \subset u$ для всякого $u \in S^\omega(\omega)$. Определим

$$g = \lambda u f(\omega \setminus m(u)).$$

Тогда $g: S^\omega(\omega) \rightarrow D$, $g \leq f$, и, поскольку $m(u \cap w) = m(u) \cap m(w)$, g мультипликативна. Доказательство закончено.

Чтобы доказать существование а-правильных ультрафильтров для $a > \omega^+$, нам придется проделать довольно большую работу, первым этапом которой является доказательство следующей теоремы.

Теорема 5.4.3. *Примем обобщенную континуум-гипотезу. Пусть $|I| = a$. Тогда существует a^+ -правильный счетно неполный ультрафильтр D над I .*

Мы докажем сначала серию лемм, не зависящих от обобщенной континуум-гипотезы.

Лемма 5.4.4. *Для того чтобы ультрафильтр D был a^+ -правильным, необходимо и достаточно, чтобы для всякой монотонной функции $f: S^\omega(a) \rightarrow D$ существовала мультипликативная функция $g: S^\omega(a) \rightarrow D$, такая, что $g \leq f$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Для доказательства достаточности предположим, что $\beta \leq a$ и функция $f: S^\omega(\beta) \rightarrow D$ монотонна. Определим

$$f' = (\lambda u \in S^\omega(a)) f(u \cap \beta).$$

Такая функция f' монотонна. По предложению существует мультипликативная функция $g': S^\omega(a) \rightarrow D$, удовлетворяющая условию $g' \leq f'$. Определим функцию

$$g = (\lambda u \in S^\omega(\beta)) g'(u \cup (\alpha \setminus \beta)).$$

Функция g мультипликативна, $g \leq f$ и значения g лежат в D . Следовательно, D есть α^+ -правильный ультрафильтр.

Назовем функцию k дизъюнктной, если

$$k(i) \cap k(j) = 0 \text{ при } i, j \in \mathcal{D}k, \text{ и } i \neq j.$$

Лемма 5.4.5. Пусть h — такая функция, что $|\mathcal{D}h| = \alpha$ и $|h(j)| = \alpha$ для всех $j \in \mathcal{D}h$. Тогда существует дизъюнктная функция k , такая, что $k \leq h$ и $|k(j)| = \alpha$ при всех $j \in \mathcal{D}h$.

Доказательство. Можно считать, не уменьшая общности, что $\mathcal{D}h = \alpha$. Для всякого $\zeta \leq \alpha$ положим

$$x_\zeta = \{\langle \eta, \xi \rangle : \eta \leq \xi \text{ и } \xi < \zeta\}.$$

Нам нужно найти взаимно однозначную функцию e , такую, что $\mathcal{D}e = x_\alpha$ и $e(\eta, \xi) \in h(\eta)$ при всех $\eta \leq \xi < \alpha$. Такую функцию можно построить при помощи трансфинитной индукции следующим образом. Пусть $\zeta < \alpha$; предположим, что мы уже построили взаимно однозначную функцию e_0 с областью определения x_ζ , такую, что $e_0(\eta, \xi) \in h(\eta)$ при $\eta \leq \xi < \zeta$. Мы имеем $|x_\zeta| < \alpha$. Следовательно, поскольку $|h(\eta)| = \alpha$ при всех $\eta < \alpha$, мы можем продолжить e_0 до взаимно однозначной функции e_1 с областью определения $x_{\zeta+1}$, такой, что $e_1(\eta, \xi) \in h(\eta)$ при всех $\eta \leq \xi \leq \zeta$. Отсюда следует существование требуемой функции e .

Определим теперь k посредством равенства

$$k = (\lambda \eta < \alpha) \{e(\eta, \xi) : \langle \eta, \xi \rangle \in x_\alpha\}.$$

Очевидно, k дизъюнктна и $k \leq h$. Кроме того, для всякого $\eta < \alpha$ имеем

$$|k(\eta)| = |\alpha \setminus \eta| = \alpha.$$

Множество $E \subset S(I)$ называется **мультипликативным**, если пересечение любых двух элементов E принадлежит E .

Лемма 5.4.6. Предположим, что E — мультипликативное подмножество $S(I)$, такое, что $|E| \leq \alpha$ и

$|e| = \alpha$ для всех $e \in E$. Кроме того, пусть $f: S^\omega(\alpha) \rightarrow S(I)$ — монотонная функция, такая, что

$$|f(u) \cap e| = \alpha \text{ при всех } u \in \mathcal{D}f \text{ и } e \in E.$$

Тогда существует мультипликативная функция $g: S^\omega(\alpha) \rightarrow S(I)$, такая, что $g \leq f$ и

$$|g(u) \cap e| = \alpha \text{ при всех } u, e.$$

Доказательство. Пусть h — функция, отображающая $S^\omega(\alpha) \times E$ в $S(I)$, такая, что для всякого $u \in S^\omega(\alpha)$ и $e \in E$

$$h(u, e) = f(u) \cap e.$$

Тогда, согласно предположению, мы имеем всегда

$$|h(u, e)| = \alpha.$$

Поскольку ординал α бесконечен, область определения функции h также имеет мощность α . Следовательно, согласно лемме 5.4.5, существует дизъюнктная функция $k \leq h$, такая, что как только $\langle u, e \rangle \in \mathcal{D}k$, имеет место $|k(u, e)| = \alpha$. Определим функцию $g: S^\omega(\alpha) \rightarrow S(I)$ следующим образом: для всякого $u \in S^\omega(\alpha)$ положим

$$(1) \quad g(u) = \bigcup \{k(w, e): w \in S^\omega(\alpha), w \subset u \text{ и } e \in E\}.$$

Покажем, что функция g обладает требуемыми свойствами.

Предположим, что $u \in S^\omega(\alpha)$ и $i \in g(u)$. Тогда для некоторого $w \subset u$ и $e \in E$ имеем

$$i \in k(w, e) \subset h(w, e) = f(w) \cap e.$$

Поскольку функция f монотонна, $f(w) \subset f(u)$ и, следовательно, $i \in f(u)$. Отсюда видно, что $g \leq f$.

Чтобы показать, что g мультипликативна, заметим, что для всех $u_1, u_2 \in S^\omega(\alpha)$ и $i \in I$ равносильны следующие утверждения:

- (a) $i \in g(u_1 \cap u_2)$;
- (b) $i \in k(w, e)$ при некоторых $w \subset u_1 \cap u_2$ и $e \in E$;
- (c) $i \in k(w_1, e_1) \cap k(w_2, e_2)$ при некоторых $w_1 \subset u_1$, $w_2 \subset u_2$ и $e_1, e_2 \in E$;
- (d) $i \in g(u_1) \cap g(u_2)$.

Импликация „(c) влечет (b)“ следует из того факта, что условие $i \in k(w_1, e_1) \cap k(w_2, e_2)$ влечет $w_1 = w_2$ и $e_1 = e_2$.

Пусть $u \in S^\omega(a)$ и $e \in E$. Покажем, что $|g(u) \cap e| = a$. Согласно (1), имеем $k(u, e) \subset g(u)$. Поскольку $k \leq h$, то

$$k(u, e) \subset h(u, e) = f(u) \cap e.$$

И, следовательно,

$$k(u, e) \subset g(u) \cap e.$$

Так как $|k(u, e)| = a$, получаем $|g(u) \cap e| = a$.

Доказательство теоремы 5.4.3. Позаботимся сначала о том, чтобы ультрафильтр D , который мы построим, был счетно неполон. В соответствии с этим пусть $y_0 \supset y_1 \supset y_2 \supset \dots$ — счетная убывающая последовательность множеств такая, что $y_0 = I$, $\bigcap_{n < \omega} y_n = 0$, и каждое y_n имеет мощность a .

Пусть

$$D_0 = \{y_n : n < \omega\}.$$

Очевидно, что D_0 мультипликативно и имеет мощность $\omega \leq a$.

Поскольку $|S^\omega(a)| = a$, то существует не более $(2^a)^a = 2^a$ монотонных функций, отображающих $S^\omega(a)$ в $S(I)$. По предположению $2^a = a^+$, так что имеется не более a^+ таких функций. Пусть $(\lambda \eta < a^+) f_\eta$ — перечисление всех монотонных функций $f: S^\omega(a) \rightarrow S(I)$. Согласно лемме 5.4.6, мы можем выбрать для каждого $\eta < a^+$ и каждого мультипликативного множества $E \subset S(I)$ мощности $\leq a$, удовлетворяющего условию

(1) $|f_\eta(u) \cap e| = a$ для всех $u \in S^\omega(a)$ и $e \in E$,

некоторую мультипликативную функцию $g_{\eta, E}$, такую, что $g_{\eta, E} \leq f_\eta$ и

(2) $|g_{\eta, E}(u) \cap e| = a$ для всех $u \in S^\omega(a)$ и $e \in E$.

Определим последовательность $(\lambda \eta < \alpha^+) E_\eta$ при помощи трансфинитной рекурсии следующим образом:

- (3) $E_0 = D_0$;
- (4) если ζ – предельный ординал, $\zeta < \alpha^+$, то $E_\zeta = \bigcup_{\eta < \zeta} E_\eta$;
- (5) если $\eta < \alpha^+$ и условие (1) неверно при $E = E_\eta$, то $E_{\eta+1} = E_\eta$;
- (6) если $\eta < \alpha^+$ и (1) выполняется при $E = E_\eta$, то $E_{\eta+1} = E_\eta \cup \{g_{\eta, E_\eta}(u) \cap e : u \in S^\omega(a), e \in E_\eta\}$.

При помощи индукции легко показать, что всякое множество E_η имеет мощность $\leqslant a$, что каждый $e \in E_\eta$ имеет мощность a и что последовательность $(\lambda \eta < \alpha^+) E_\eta$ существует. Пусть

$$E' = \bigcup_{\eta < \alpha^+} E_\eta.$$

Тогда каждый $e \in E'$ имеет мощность a и множество E' мультипликативно. Следовательно, существует ультрафильтр D над множеством I , такой, что $E' \cup S^a(I) \subset D$. Ультрафильтр D счетно неполон, так как $D_0 \subset E' \subset D$.

Пусть f – произвольная монотонная функция, отображающая $S^\omega(a)$ в D . Тогда $f = f_\eta$ при некотором $\eta < \alpha^+$. Поскольку $S^a(E) \subset D$, всякий элемент D имеет мощность a и, следовательно, так как $E_\eta \subset D$, условие (1) выполняется при $E = E_\eta$. Тогда, согласно (2) и (6), мультипликативная функция $g_{\eta, E_\eta} \leqslant f_\eta$ отображает $S^\omega(a)$ в $E_{\eta+1}$. Следовательно, g_{η, E_η} отображает $S^\omega(a)$ в D . Поэтому, согласно лемме 5.4.4, D есть α^+ -правильный ультрафильтр. Доказательство закончено.

*Упражнение 5N**. Предположим, что $|I| = a$ и D есть α^+ -правильный счетно неполный ультрафильтр над I . Тогда

- (i) $S^a(I) \subset D$;
- (ii) D слабо регулярен,

Упражнение 5О. Предположим, что $|I| = \alpha$ и $2^\alpha = \alpha^+$. Путем анализа доказательства теоремы 5.4.3 покажите, что любое множество E , удовлетворяющее требованиям леммы 5.4.6, может быть дополнено до α^+ -правильного счетно неполного ультрафильтра над I . Выведите отсюда, что если $I = S_\omega(J)$, то

(i) существует регулярный α^+ -правильный ультрафильтр D над I ;

(ii) существует α^+ -правильный ультрафильтр D' над I , не являющийся регулярным.

5.5. Правильные ультрапроизведения

В этом разделе мы укажем приложения правильных ультрафильтров к теории непрерывных моделей, используя способ, аналогичный способу приложения регулярных ультрафильтров, который мы уже рассматривали. Наша первая теорема представляет собой чисто топологический результат, являющийся аналогом теоремы 1.5.9.

Теорема 5.5.1. Предположим, что $|\mathcal{P}_0| < \alpha$ и D есть α -правильный счетно неполный ультрафильтр над I . Тогда для всякой функции $F \in (X^*)'$ множество $D^*\text{-}\lim F$ замкнуто в пространстве X .

Доказательство. Пусть $x \in \overline{D^*\text{-}\lim F}$. Нужно показать, что существует функция $h \in \prod_{i \in I} F(i)$, такая, что $x = D\text{-}\lim h$. Пусть

$$T = \{U \in \mathcal{P}_0 : x \in U\}.$$

Определим функцию $f: \mathcal{S}^\omega(T) \rightarrow S(I)$ следующим образом:

$$f(T \setminus Z) = \{i \in I : F(i) \cap \bigcap Z \neq \emptyset\},$$

где Z – любое конечное подмножество T . Очевидно, что f монотонна. Далее, $\bigcap Z$ для всякого $Z \in \mathcal{S}_\omega(T)$ есть окрестность точки x и, следовательно, $\bigcap Z$ пересекается с множеством $D^*\text{-}\lim F$. Значит, существует

$h_Z \in \prod_{i \in I} F(i)$, такой, что $D\text{-}\lim h_Z \in \bigcap Z$ и, следовательно,

$$\{i \in I : h_Z(i) \in \bigcap Z\} \in D.$$

Отсюда $f(T \setminus Z) \in D$ при всяком $T \setminus Z \subset S^\omega(T)$, т. е. $f: S^\omega(T) \rightarrow D$.

Поскольку ультрафильтр D счетно неполон, существует, согласно лемме 5.4.1, счетная убывающая последовательность $y_0 \supset y_1 \supset y_2 \supset \dots$ элементов D , такая, что $y_0 = I$ и $\bigcap_{n < \omega} y_n = 0$. Пусть f' — функция, определяемая равенством

$$f'(T \setminus Z) = f(T \setminus Z) \cap y_{|Z|}$$

для всех $Z \in S_\omega(T)$. Ясно, что $f' \leq f$, f' монотонна и f' отображает $S^\omega(T)$ в D .

Теперь, используя предположение, что D есть a -правильный ультрафильтр и $|T| \leq |\mathcal{P}_0| < a$, мы можем выбрать мультипликативную функцию $g: S^\omega(T) \rightarrow D$, такую, что $g \leq f'$. Ясно также, что g может быть выбрана так, что $g(T) = I$, так как наше предположение $x \in \overline{D^*\text{-}\lim} F$ влечет $F(i) \neq 0$ для всякого значения $F(i)$ и, следовательно, $f(T) = f'(T) = I$. Пусть теперь $n(i)$, $i \in I$, есть наибольший $n < \omega$, такой, что $i \in y_n$, и пусть

$$Z(i) = \{U \in T : i \in g(T \setminus \{U\})\}.$$

Мощность $Z(i)$ не более чем $n(i)$, так как в противном случае существовало бы подмножество $Z_0 \subset Z(i)$ мощности $n(i) + 1$ и вследствие мультипликативности функции g мы имели бы

$$i \in \bigcap_{U \in Z_0} g(T \setminus \{U\}) = g(T \setminus Z_0) \subset f'(T \setminus Z_0) \subset y_{n(i)+1},$$

что противоречит условию $i \notin y_{n(i)+1}$. Следовательно, для всех $i \in I$ имеем

$$T \setminus Z(i) \in S^\omega(T) \text{ и } i \in g(T \setminus Z(i)).$$

Поскольку $g \leq f$, имеем $i \in f(T \setminus Z(i))$ и, следовательно,

$$F(i) \cap \bigcap Z(i) \neq 0 \text{ для всех } i \in I,$$

если считать, что $\bigcap 0 = X$. Выберем теперь $h \in X^I$, такую, что

$$h(i) \in F(i) \cap \bigcap Z(i) \text{ для всех } i \in I.$$

Тогда $h \in \prod_{i \in I} F(i)$. Кроме того, для всех $U, x \in U \in \mathcal{P}_0$, имеем

$$g(T \setminus \{U\}) = \{i \in I : U \in Z(i)\} \subset \{i \in I : h(i) \in U\}$$

и, следовательно,

$$\{i \in I : h(i) \in U\} \in D.$$

Отсюда получаем, что $x = D\text{-}\lim h$, и доказательство закончено.

Докажем теперь аналог теоремы 5.1.10.

Теорема 5.5.2. Предположим, что $\|\mathcal{L}\| < a$ и D есть a -правильный счетно неполный ультрафильтр над I . Тогда для всякой функции $\lambda i A_i \in \mathcal{M}^I$ обобщенная теория $\text{Th}^+(D\text{-prod } \lambda i A_i)$ указанного ультрапроизведения моделей замкнута в пространстве X^{Σ^+} .

Доказательство. Пространство X^{Σ^+} имеет базис открытых множеств мощности $\|\mathcal{L}\| < a$, кроме того, оно компактно и хаусдорфово. Следовательно, мы можем применить теорему 5.5.1, откуда видим, что множество $D^*\text{-}\lim \lambda i \text{Th}^+(A_i)$ замкнуто в X^{Σ^+} . Согласно следствию 5.1.9, имеем

$$D^*\text{-}\lim \lambda i \text{Th}^+(A_i) = \text{Th}^+(D\text{-prod } \lambda i A_i),$$

что и доказывает теорему.

Важность теоремы 5.5.2, а также теоремы 5.1.10 станет очевидной, когда мы введем понятие a -насыщенной модели, исследованию которой посвящена следующая глава. Забегая вперед, дадим нужное определение сейчас.

Мы говорим, что модель $A \in \mathcal{M}$ является *α-насыщенной*, если для всякого $v < \alpha$ и всякой последовательности $a \in R^v$ множество $\text{Th}^+((A, a))$ замкнуто в пространстве $X^{\Sigma_{\mathcal{L}}^+(v)}$.

Лемма 5.5.3. *Пусть $A = D\text{-prod } \lambda i A_i$ – некоторое ультрапроизведение, v – ординал и $a \in R^v$. Тогда существует функция $b \in \prod_{i \in I} (R_i^v)$, такая, что*

$$(A, a) = D\text{-prod } \lambda i (A_i, b_i).$$

Доказательство. Для всякого ординала $\eta < v$ выберем функцию $f_\eta \in a_\eta$, т. е. $f_\eta \in \prod_{i \in I} R_i$ и $\tilde{f}_\eta = a_\eta$. Определим теперь функцию b так, чтобы для всякого $i \in I$ выполнялось условие

$$b_i = (\lambda \eta < v) f_\eta(i).$$

Тогда для всякого $\eta < v$ имеем

$$a_\eta = \tilde{f}_\eta = (\lambda i b_{i\eta})^\sim,$$

следовательно, b обладает требуемым свойством.

Теорема 5.5.4. *Предположим, что $\|\mathcal{L}\| < \alpha$ и D есть α -правильный счетно неполный ультрафильтр над I . Тогда всякое D -произведение $A = D\text{-prod } \lambda i A_i$ является α -насыщенным.*

Доказательство. Пусть $v < \alpha$. Тогда $\|\mathcal{L}(v)\| < \alpha$. Пусть, далее, $A = D\text{-prod } \lambda i A_i$ и $a \in R^v$. Согласно лемме 5.5.3, для каждого $i \in I$ существует $b_i \in R_i^v$, такой, что

$$(A, a) = D\text{-prod } \lambda i (A_i, b_i).$$

Поэтому, согласно теореме 5.5.2, применяемой здесь к логике $\mathcal{L}(v)$, множество $\text{Th}^+((A, a))$ замкнуто в пространстве $X^{\Sigma_{\mathcal{L}}^+(v)}$. Отсюда следует, что модель A является α -насыщенной.

Следствие 5.5.5. Если $\|\mathcal{L}\| = \omega$ и D – счетно неполный ультрафильтр над I , то всякое D -произведение $A = D\text{-prod } \lambda i A_i$ является ω^+ -насыщенным.

Доказательство следует из теорем 5.4.2 и 5.5.4.

Следствие 5.5.6. Примем обобщенную континуум-гипотезу. Предположим, что $\|\mathcal{L}\| \leq a$ и $\|A\| \leq a^+$. Тогда существует a^+ -насыщенная модель B мощности $\leq a^+$, такая, что $A \prec B$.

Доказательство. Согласно теореме 5.4.3, существует a^+ -правильный счетно неполный ультрафильтр D над a . По теореме 5.5.4 модель $D\text{-prod } A$ является a^+ -насыщенной. Согласно упр. 1F, имеем $\|D\text{-prod } A\| \leq \|A\|^a = a^+$. Наконец, по теореме 5.3.1 существует модель $B \cong D\text{-prod } A$, такая, что $A \prec B$.

В следующей главе мы покажем, что некоторое видоизменение следствия 5.5.6 верно и без допущения обобщенной континуум-гипотезы. В этом доказательстве вместо однократного использования теоремы 5.5.4 и понятия a^+ -правильного ультрафильтра мы многократно используем теорему 5.1.10 и понятие регулярного ультрафильтра и благодаря этому обходимся без использования обобщенной континуум-гипотезы. С другой стороны, в последнем разделе гл. VI мы получим некоторые результаты, в которых понятие a^+ -правильного ультрафильтра и обобщенная континуум-гипотеза используются существенным образом.

Упражнение 5Р. Найдите ошибку в следующем неверном рассуждении.

1) Предположим, что $\|\mathcal{L}\| < |J| = a$, $I = S_\omega(J)$ и D – регулярный ультрафильтр над I . Тогда для всякой модели B ее ультрастепень $A = D\text{-prod } B$ является a -насыщенной.

Доказательство. Пусть $v < a$ и $a \in R^v$. Согласно 5.5.3, существует $b \in S^v$, такой, что $(A, a) =$

$=D\text{-prod}(B, b)$. Следовательно, согласно теореме 5.1.10, поскольку $\|\mathcal{L}(\nu)\| < \alpha$, имеем

$$\text{Th}^+((A, a)) = \overline{\text{Th}^+((A, a))} = \overline{\text{Th}^+((B, b))}.$$

Таким образом, модель A является α -насыщенной.

На самом деле известно (см. Кейслер [1964а]), что утверждение 1) этого упражнения ложно, контрпример известен для всякого $\alpha > \omega^+$ в классической двузначной логике l .

СПЕЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Мы уже показали в разд. 5.5, каким образом результаты, использующие понятие ультрапроизведения (разд. 5.1—5.3), наряду с результатами относительно правильных ультрафильтров (разд. 5.4) приводят к доказательству существования α^+ -насыщенных моделей мощности α^+ (следствие 5.5.6, использующее обобщенную континuum-гипотезу). Предметом настоящей главы является изучение моделей, которые, грубо говоря, представляются как объединение элементарных цепей, таких, что каждый элемент цепи имеет „достаточно высокую степень насыщенности“. Мы доказываем, например, существование α^+ -насыщенных моделей мощности 2^α (не используя при этом обобщенную континuum-гипотезу). Пользуясь этим результатом, мы доказываем затем существование специальных моделей (см. разд. 6.2), имеющих определенные бесконечные мощности. Понятие специальной модели благодаря своим многочисленным применениям оказывается очень важным уже в случае двузначной логики l и соответствующей теории моделей. Как мы увидим, это понятие играет не менее важную роль и в теории непрерывных моделей. В действительности же, в то время как многие результаты гл. VII могут быть получены для двузначной теории моделей и без использования специальных моделей, единственно известные доказательства для теории непрерывных моделей используют это понятие.

Результаты, излагаемые в разд. 6.1—6.2, верны для произвольных непрерывных логик, в то время как в разд. 6.3—6.5 мы будем вынуждены предполагать, что логика \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством.

6.1. Насыщенные модели

Напомним, что мы назвали модель A (разд. 5.5) α -насыщенной (относительно логики \mathcal{L}), если для любых $v < \alpha$ и $a \in R^v$ множество $\text{Th}^+((A, a))$ замкнуто в пространстве $X^{\Sigma_{\mathcal{L}}^+(v)}$. В случаях, когда ясно, о каких \mathcal{L} и v идет речь, мы будем просто говорить, что модель A является α -насыщенной и множество $\text{Th}^+((A, a))$ замкнуто.

Перечислим некоторые простые свойства насыщенных моделей; доказательства их предоставляем читателю.

6.1.1. A является α -насыщенной тогда и только тогда, когда она β -насыщена при всех $\beta \leq \alpha$.

6.1.2. Если α – предельный ординал, то A является α -насыщенной тогда и только тогда, когда она β -насыщена при всех $\beta < \alpha$.

6.1.3. A является α^+ -насыщенной тогда и только тогда, когда $\text{Th}^+((A, a))$ замкнуто при всех $a \in R^\alpha$.

6.1.4. Следующие утверждения равносильны при всяком $\alpha \geq \omega$.

(i) A является α -насыщенной моделью.

(ii) Для всех $v < \alpha$ и $a \in R^v$ модель (A, a) является α -насыщенной относительно логики $\mathcal{L}(v)$.

(iii) Для всех $v < \alpha$ и $a \in R^v$ модель (A, a) является 1-насыщенной относительно $\mathcal{L}(v)$.

6.1.5. Если модель A является α -насыщенной относительно логики \mathcal{L} и $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, то A также α -насыщена относительно $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$.

Упражнение 6А. Покажите, что в случае логики \mathcal{L} модель $A \in \mathcal{M}_1$ тогда и только тогда α -насыщена, когда для любого $v < \alpha$, любого $a \in R^v$ и любого множества формул $\Psi \subset \Sigma_{\mathcal{L}}^+(v)$ Ψ выполнимо в модели (A, a) (на некотором элементе из A), если всякое конечное подмножество Ψ выполнимо в (A, a) .

Упражнение 6В. Допустим, что логика \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством. Тогда

(i) Если $A \prec B$ и A является 1-насыщенной, то и B также 1-насыщена. Следовательно, объединение элементарной цепи 1-насыщенных моделей есть 1-насыщенная модель.

(ii) Объединение элементарной цепи ω -насыщенных моделей есть ω -насыщенная модель.

(iii) Объединение элементарной цепи A_η , $\eta < \alpha^+$, α^+ -насыщенных моделей есть α^+ -насыщенная модель.

Упражнение 6С*. Приведите следующие примеры в логике l .

(i) Модели A , являющейся 1-насыщенной, но не 2-насыщенной.

(ii) Моделей A, B , $A \prec B$, таких, что A является ω -насыщенной, а B не является 2-насыщенной.

(iii) Счетной элементарной цепи ω^+ -насыщенных моделей, объединение которой не является ω^+ -насыщенным.

Упражнение 6D*. Предположим, что A есть β^+ -насыщенная модель. Тогда для любого ординала α , такого, что $\|\mathcal{L}\| \leq \beta \leq \alpha^\beta \leq \|A\|$ и любого множества $T \subset R$, такого, что $|T| \leq \alpha^\beta$, существует β^+ -насыщенная элементарная подмодель модели A мощности α^β , содержащая T в качестве подмножества. (Заметьте, что поскольку $|\mathcal{P}_0| \leq \beta$, замыкание всякого множества $Y \subset X$ мощности α^β имеет ту же мощность.)

Лемма 6.1.6. Если модель A бесконечна и α -насыщена, то $\|A\| \geq \alpha$.

Доказательство. Предположим, что $\|A\| = \beta < \alpha$. Пусть $a \in R^\beta$ — некоторое перечисление множества R , и пусть

$$\Psi = \{v_0 = c_{\kappa+\xi} : \xi < \beta\}.$$

Тогда, поскольку R бесконечно, постоянная функция 0 принадлежит множеству

$$\overline{\text{Th}^+((A, a)) \upharpoonright \Psi},$$

но не принадлежит множеству $\text{Th}^+((A, a)) \upharpoonright \Psi$. Следовательно, последнее не замкнуто и не совпадает с $\text{Th}^+((A, a))$.

Теорема 6.1.7. *Модель A конечна тогда и только тогда, когда она a -насыщена для всех a .*

Доказательство. Из леммы 6.1.6 следует, что если модель A бесконечна, то она не является $\|A\|^+$ -насыщенной. Обратно, предположим, что A конечна. Пусть β – кардинал и $a \in R^\beta$. Теория $\text{Th}^+((A, a))$ замкнута, так как она конечна.

Лемма 6.1.8. *Предположим, что $\|\mathcal{L}\| \leq a$ и $\omega \leq \|A\| \leq 2^a$. Тогда существует элементарное расширение B модели A , имеющее мощность 2^a , такое, что для всех $a \in R^a$*

$$\text{Th}^+((B, a)) = \overline{\text{Th}^+((B, a))} = \overline{\text{Th}^+((A, a))}.$$

Доказательство. Пусть D – регулярный ультрафильтр над a . Положим $B' = D\text{-prod } A$, и пусть A' – образ модели A при естественном вложении d модели A в B' . По теореме 5.3.1 имеет место $A' \prec B'$ и, согласно упр. 1Н, $\|B'\| = 2^a$. Пусть, далее, $a' \in (R')^a$. Тогда для некоторого $a \in R^a$ имеем $a' = d \circ a$. По теореме 5.1.10, применяемой здесь к логике $\mathcal{L}(a)$ (заметим, что $\|\mathcal{L}(a)\| \leq a$), имеем

$$\text{Th}^+(D\text{-prod}(A, a)) = \overline{\text{Th}^+(D\text{-prod}(A, a))} = \overline{\text{Th}^+((A, a))}.$$

Поскольку $D\text{-prod}(A, a) = (D\text{-prod } A, d \circ a) = (B', a')$ и $(A, a) \cong (A', a')$, то

$$\text{Th}^+((B', a')) = \overline{\text{Th}^+((B', a'))} = \overline{\text{Th}^+((A', a'))}.$$

Теперь, используя простое теоретико-множественное рассуждение, мы можем найти модель B , для которой выполняются указанные в лемме требования.

Следующая теорема представляет видоизменение следствия 5.5.6.

Теорема 6.1.9. Предположим, что $\|\mathcal{L}\| \leq a$ и $\omega \leq \|A\| \leq 2^a$. Тогда модель A имеет a^+ -насыщенное расширение мощности 2^a .

Доказательство. Определим трансфинитную последовательность моделей A_η , $\eta \leq a^+$, следующим образом:

$$A_0 = A;$$

$A_{\eta+1}$ есть модель мощности 2^a , такая, что $A_\eta < A_{\eta+1}$ и для любого $a \in R_\eta^a$ имеет место

$$\text{Th}^+((A_{\eta+1}, a)) = \overline{\text{Th}^+((A_{\eta+1}, a))} = \overline{\text{Th}^+((A_\eta, a))};$$

$A_\eta = \bigcup_{\xi < \eta} A_\xi$, если η — предельный ординал, не равный 0.

Согласно лемме 6.1.8 такая последовательность моделей существует и образует элементарную цепь. При помощи индукции легко получаем

$$\|A_\eta\| = 2^a \text{ для } 0 < \eta \leq a^+.$$

Пусть $B = A_{a^+}$. Согласно теореме 4.2.9, $A < B$. Пусть затем $b \in S^a$. Тогда для некоторого $\eta < a^+$ имеет место $b \in (S_\eta)^a$. По индукции, используя следствие 4.2.10, получаем, что для всякого ординала v , удовлетворяющего $\eta < v \leq a^+$, выполняются равенства

$$\text{Th}^+((A_v, b)) = \overline{\text{Th}^+((A_v, b))} = \overline{\text{Th}^+((A_\eta, b))}.$$

Взяв $v = a^+$, убеждаемся, что множество $\text{Th}^+((B, b))$ замкнуто. Теорема доказана.

Заметим для читателей, которые по той или иной причине не смогли выполнить упр. 1Н, что теорема 6.1.9 может быть доказана с использованием (вместо 1Н) упр. 5Н, теоремы 1.5.10 и цепи моделей длины 2^a .

Упражнение 6Е. Предположим, что $\|\mathcal{L}\| \leq a$, $A' < B'$ и $\omega \leq \|A'\| \leq 2^a \leq \|B'\|$. Тогда существуют

две модели A и B , такие, что $A' \subset A \subset B$, $A' \subset B' \subset B$, $\|A\| = 2^\alpha$, $\|B\| = \|B'\|$ и для любого $a \in R^{\alpha}$

$$\text{Th}^+((A, a)) = \overline{\text{Th}^+((A, a))} = \overline{\text{Th}^+((A', a))}.$$

(Воспользуйтесь упр. 5J.)

Упражнение 6F. Предположим, что $\|\mathcal{L}\| \leq \alpha$, $A' \subset B'$ и $\omega \leq \|A'\| \leq 2^\alpha \leq \|B'\|$. Тогда существуют две модели A и B , такие, что $A' \subset A \subset B$, $A' \subset B' \subset B$, $\|A\| = 2^\alpha$, $\|B\| = \|B'\|$ и A является α^+ -насыщенной.

Упражнение 6G. Модель A назовем *слабо α -насыщенной*, если для всех $v < \alpha$, $a \in R^v$ и множеств $\Psi \subset \Sigma_{\mathcal{L}}^+(v)$, таких, что $|\Psi| < \alpha$, множество $\text{Th}^+((A, a)) \upharpoonright \Psi$ замкнуто в пространстве X^Ψ . Используя это понятие, можно уточнить перечисленные ниже результаты путем замены всюду кардинала $\|\mathcal{L}\|$ на $|\mathcal{P}_0| \cup \omega$ и требования α -насыщенности на требование слабой α -насыщенности (теорема 5.5.4, следствие 5.5.5, следствие 5.5.6, теорема 6.1.9 и упр. 6F).

6.2. Существование специальных моделей

Модель A называется *специальной* (относительно логики \mathcal{L}), если A есть объединение элементарной цепи A_β , $\beta < \|A\|$, где каждая модель A_β является β -насыщенной. Такая цепь A_β , $\beta < \|A\|$, называется *определяющей цепью* для A . Обратим внимание на то, что индексами для элементов определяющей цепи служат кардиналы $\beta \leq \|A\|$.

Лемма 6.2.1. Всякая α -насыщенная модель мощности α есть специальная модель.

Доказательство. Цепь $A_\beta = A$, $\beta < \alpha$ есть определяющая цепь для A .

Следствие 6.2.2. Всякая конечная модель — специальная.

Следствие 6.2.3. Модель мощности α^+ является специальной моделью тогда и только тогда, когда она α^+ -насыщена.

Доказательство. Пусть A — модель мощности α^+ . Если A — специальная модель, то A есть объединение определяющей цепи A_β , $\beta < \alpha^+$. Следовательно, $A = A_\alpha$ и A является α^+ -насыщенной. Обратное утверждение следует из леммы 6.2.1.

Следствие 6.2.4. Примем обобщенную континуум-гипотезу. Тогда существуют специальные модели любой мощности α^+ .

Доказательство. Этот факт следует из теоремы 6.1.9 (или следствия 5.5.6) и следствия 6.2.3.

Упражнение 6Н*. (i) Используя подходящую логику \mathcal{L} , укажите модель мощности ω , которая была бы специальной, но не ω -насыщенной. (ii) Предполагая, что логика \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством и что $\text{cf}(\alpha) = \alpha$, покажите, что любая специальная модель мощности α является α -насыщенной. Результат применим, например, к случаю $\alpha = \omega$.

Напомним, что мы определили (см. гл. 1) α^* как кардинальную сумму $\sum_{\beta < \alpha} 2^\beta$. Для нас представляют особый интерес кардиналы α , такие, что $\alpha = \alpha^*$.

6.2.5. $\alpha = \alpha^*$ тогда и только тогда, когда $2^\beta \leq \alpha$ для всех $\beta < \alpha$.

6.2.6. Существуют сколь угодно большие кардиналы α , для которых $\alpha = \alpha^*$.

Чтобы убедиться в этом, возьмем произвольный кардинал β , определим $\beta_0 = \beta$ и для всякого $n < \omega$ положим $\beta_{n+1} = 2^{\beta_n}$. Пусть $\alpha = \sum_{n < \omega} \beta_n$.

6.2.7. $\alpha^+ = (\alpha^+)^*$ тогда и только тогда, когда $\alpha^+ = 2^\alpha$.

6.2.8. Обобщенная континуум-гипотеза эквивалентна утверждению, что $\alpha = \alpha^*$ для всех бесконечных кардиналов α .

Докажем теперь основную теорему существования для специальных моделей.

Теорема 6.2.9. Предположим, что $\alpha = \alpha^*$, $\|\mathcal{L}\| < \alpha$ и $\omega \leq \|A\| < \alpha$. Тогда существует специальная модель B мощности α , такая, что $A \subsetneq B$.

Доказательство. Если $\alpha = \gamma^+$, то, согласно 6.2.7, $\gamma^+ = 2^\gamma$; требуемый результат следует теперь из теоремы 6.1.9 и следствия 6.2.3. Поэтому предположим, что α — предельный кардинал. Заметим, что если $\beta < \alpha$, то $\beta^+ < \alpha$ и $2^\beta \leq \alpha$. Пусть $\|\mathcal{L}\| \cup \|A\| = \gamma$. Построим элементарную цепь моделей B_β , $\gamma \leq \beta < \alpha$, следующим образом (при этом мы используем теоремы 6.1.9 и 4.2.9). Пусть B_γ — произвольное γ^+ -насыщенное элементарное расширение модели A мощности 2^γ ; B_{β^+} есть β^{++} -насыщенное элементарное расширение B_β мощности 2^{β^+} и если β — предельный кардинал, меньший чем α , то в качестве B_β возьмем некоторое β^+ -насыщенное элементарное расширение $\bigcup_{\delta < \beta} B_\delta$ мощности 2^β .

Отметим, что мощность каждой из построенных моделей B_β есть в точности 2^β . Пусть $B = \bigcup_{\gamma \leq \beta < \alpha} B_\beta$. Ясно, что $A \subset B$ и $\|B\| = \alpha$. Положим теперь для $\beta \leq \gamma$ $B_\beta = B_\gamma$. Тогда элементарная цепь B_β , $\beta < \alpha$, является определяющей цепью для модели B . Теорема доказана.

В следующем упражнении предлагается некоторое усиление теоремы 6.2.9.

Упражнение 6I. Предположим, что $\alpha = \alpha^*$, $\|\mathcal{L}\| < \alpha$ и $\omega \leq \|A\| \leq \alpha$. Тогда существует специальная модель B мощности α , такая, что $A \subset B$. (Воспользуйтесь упр. 6F.)

В конструкции модели B , указанной в теореме 6.2.9, определяющая цепь B_β , $\beta < \alpha$, обладает тем свойством, что для любого $\beta \geq \|\mathcal{L}\| \cup \|A\|$ B_β имеет мощность 2^β . В связи с этим сформулируем следующие два упражнения.

Упражнение 6J. Предположим, что A — специальная модель мощности α . Тогда A обладает определяющей цепью A_β , $\beta < \alpha$, такой, что, как только $\|\mathcal{L}\| \leq \beta < \alpha$, выполняется неравенство $\|A_\beta\| \leq 2^\beta$. (Используйте упр. 6D.)

Упражнение 6К. Предположим, что $\|\mathcal{L}\| < \alpha$, $\alpha = \alpha^* = \|A\| = \|B\|$, $A \prec B$ и A есть специальная модель. Тогда существует элементарное расширение B' модели B мощности α , являющееся специальной моделью, и две определяющие цепи A_β , $\beta < \alpha$, и B'_β , $\beta < \alpha$, для моделей A и B' соответственно, такие, что $A_\beta \prec B'_\beta$ для всех $\beta < \alpha$.

Упражнение 6L. Назовем модель A *слабо специальной*, если A есть объединение элементарной цепи моделей A_β , $\beta < \|A\|$, где каждая модель A_β слабо β^+ -насыщена (определение см. в упр. 6G). Покажите, что теорему 6.2.9 и упр. 6I можно уточнить путем замены кардинала $\|\mathcal{L}\|$ на $|\mathcal{P}_o| \cup \omega$ и слов „специальная модель“ на „слабо специальная модель“.

6.3. Универсальные модели

В оставшейся части гл. VI, т. е. в разд. 6.3, 6.4 и 6.5 мы будем считать, что логика \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством. Оказывается, что в то время как для установления существования специальных моделей мощностей $\alpha = \alpha^*$ (существование специальных моделей любой мощности $\alpha > \|\mathcal{L}\|$ доказывалось с использованием обобщенной континуум-гипотезы) не потребовалось использовать никаких специальных свойств логики \mathcal{L} , мы не сможем установить, что специальные модели обладают определенными свойствами, ради которых они собственно и были построены, если логика \mathcal{L} не обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством. Это кажется очень странным, в частности, в отношении теоремы единственности для специальных моделей (теорема 6.4.1). Причина заключается в том, что равенство $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$ в случае произвольной логики \mathcal{L} дает слишком мало информации о связи между структурами A и B . Обратите внимание, что до сих пор почти все наши результаты в отношении произвольной логики \mathcal{L} ограничивались рассмотрением либо элементарных подмоделей, либо элементарных расширений данной модели A . Следующее упражнение является хорошей иллюстрацией сказанного.

Упражнение 6М. Для случая логики, не обладающей t -множеством, k -множеством и e -множеством, укажите две конечные модели A и B , такие, что $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$, $\|A\| = \|B\|$, но не верно, что $A \cong B$.

Пусть Θ – некоторая теория. Модель B называется *а-универсальной относительно* Θ , если любая модель $A \in \text{Mod}(\Theta)$ мощности не более a изоморфно вложима в B . Нас интересует задача нахождения *а-универсальной* модели B , такой, что $\|B\| = a$ и $B \in \text{Mod}(\Theta)$. Мы говорим, что модель B является *а-универсальной*, если она *а-универсальна* относительно $\text{Th}(B)$, и говорим, что модель B *элементарно а-универсальна*, если любая модель A , удовлетворяющая $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$ и $\|A\| \leq a$, элементарно вложима в B .

Лемма 6.3.1. Предположим, что $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$, B является 1-насыщенной и $a_0 \in R$. Тогда существует $b_0 \in S$, такой, что

$$[A, a_0] = [B, b_0].$$

Доказательство. Пусть $h = [A, a_0]$. Следовательно, $h \in \overline{\text{Th}^+(A)}$. Согласно условию, используя теорему 4.1.5, получаем

$$\overline{\text{Th}^+(A)} = \overline{\text{Th}^+(B)} = \text{Th}^+(B),$$

так что $h \in \text{Th}^+(B)$. Это означает, что существует элемент $b_0 \in S$, такой, что $h \in [B, b_0]$.

Следствие 6.3.2. Предположим, что $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$, B является 1-насыщенной и $a_0 \in R$. Тогда существует $b_0 \in S$, такой, что

$$\text{Th}((A, a_0)) = \text{Th}((B, b_0)).$$

Доказательство. Указанное следствие непосредственно вытекает из леммы 6.3.1, если воспользоваться простыми результатами о подстановке констант из упр. 3J – 3M.

Лемма 6.3.3. Предположим, что $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$, модель B является *а-насыщенной* и $a \in R^a$. Тогда существует последовательность $b \in S^a$, такая, что

$$\text{Th}((A, a)) = \text{Th}((B, b)).$$

Доказательство. Построим при помощи трансфинитной индукции последовательность $b \in S^a$, такую, что для всех $v \leq a$

$$(1) \quad \text{Th}((A, a \upharpoonright v)) = \text{Th}((B, b \upharpoonright v)).$$

Предположим, что $v < a$ и уже выбраны элементы b_μ , $\mu < v$, такие, что (1) выполняется. Модель $(B, b \upharpoonright v)$, согласно 6.1.4, 1-насыщена относительно логики $\mathcal{L}(v)$, которая по-прежнему обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством. Поэтому, согласно следствию 6.3.2, применяемому здесь для случая логики $\mathcal{L}(v)$, можно найти элемент $b_v \in S$, такой, что выполняется равенство

$$\text{Th}(((A, a \upharpoonright v), a_v)) = \text{Th}(((B, b \upharpoonright v), b_v)),$$

которое немедленно влечет, согласно упр. ЗМ, равенство

$$\text{Th}((A, a \upharpoonright (v+1))) = \text{Th}((B, b \upharpoonright (v+1))),$$

так что условие (1) выполняется для $v+1$. Предположим теперь, что η — предельный ординал, такой, что $0 \leq \eta \leq a$ и (1) выполнено для всех $v < \eta$. Тогда, используя упр. ЗМ и тот факт, что (см. упр. 2А)

$$\Sigma_{\mathcal{L}(\eta)} = \bigcup_{v < \eta} \Sigma_{\mathcal{L}(v)},$$

легко получаем, что условие (1) выполняется при $v = \eta$; это завершает индукцию. При $v = a$ получаем утверждение леммы.

Теорема 6.3.4. *Если модель B является a -насыщенной, то B элементарно a -универсальна.*

Доказательство. Предположим, что $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$ и $\|A\| \leq a$. Пусть $a \in R^a$ — перечисление множества R . По лемме 6.3.3 существует $b \in S^a$, такой, что

$$\text{Th}((A, a)) = \text{Th}((B, b)).$$

Откуда, согласно теореме 4.2.8, получаем, что A элементарно вложима в B .

Следствие 6.3.5. *Если B — конечная модель и $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$, то $A \cong B$.*

Доказательство. Согласно теоремам 6.1.7 и 6.3.4, модель B является α -универсальной при любом α . Следовательно, модель A изоморфна некоторой подмодели $B' \subset B$, так что $\|A\| \leq \|B\|$ и модель A также конечна. По той же причине B изоморфна вложима в A и, следовательно, $\|B\| \leq \|A\|$. Это означает, что $\|B'\| = \|B\|$ и $B' = B$. Таким образом, $A \cong B$.

Следствие 6.3.6. *Всякая полная теория, не имеющая бесконечных моделей, имеет с точностью до изоморфизма единственную модель.*

Упражнение 6N. Предположим, что $\|\mathcal{L}\| \leq \alpha$. Тогда модель A α -насыщена в том и только том случае, когда для всех $\nu < \alpha$ и всех $a \in R^\nu$ выполняется равенство

$$\text{Th}^\mu((A, a)) = \overline{\text{Th}^\mu((A, a))} \text{ при любом } \mu \leq \alpha.$$

Относительно определения Th^μ см. упр. 4A. (Используйте теорему о компактности для логики $\mathcal{L}(\nu)(\mu)$, теорему Лёвенгейма — Скolemа о понижении мощности и теорему 6.3.4.)

Теорема 6.3.7. *Если B — специальная модель мощности α , то B — элементарно α -универсальна.*

Доказательство. Предположим, что $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$ и $\|A\| \leq \alpha$. Пусть B_β , $\beta < \alpha$ — определяющая цепь модели B и $a \in R^\alpha$ — перечисление множества R . Построим при помощи трансфинитной индукции последовательность $b \in S^\alpha$, такую, что для всякого $\beta < \alpha$ выполняются условия

$$(1) \quad b \upharpoonright \beta^+ \in (S_\beta)^{\beta^+} \text{ и } \text{Th}((A, a \upharpoonright \beta^+)) = \text{Th}((B, b \upharpoonright \beta^+)).$$

Пусть $\gamma < \alpha$ и предположим, что (1) выполнено для всех $\beta < \gamma$. Тогда имеем

$$b \upharpoonright \gamma \in (S_\gamma)^\gamma$$

и, поскольку $B_\gamma \prec B$,

$$\text{Th}((A, a \upharpoonright \gamma)) = \text{Th}((B_\gamma, b \upharpoonright \gamma)).$$

Так как модель B_γ является γ^+ -насыщенной, то, согласно 6.1.4, модель $(B_\gamma, b \upharpoonright \gamma)$ также γ^+ -насыщена относительно логики $\mathcal{L}(\gamma)$. Применяя лемму 6.3.3 для

случая логики $\mathcal{L}(\gamma)$, мы можем продолжить последовательность $b \upharpoonright \gamma$ до последовательности $b \in (S_\gamma)^{\gamma^+}$ так, что

$$\text{Th}((A, a \upharpoonright \gamma^+)) = \text{Th}((B_\gamma, b \upharpoonright \gamma^+)).$$

Таким образом, (1) выполняется при $\beta = \gamma$ и индукция завершается. Теперь независимо от того, является ли a предельным кардиналом или нет, из (1) получаем

$$\text{Th}((A, a)) = \text{Th}((B, b)),$$

откуда по теореме 4.2.8 модель A элементарно вложима в B .

Следствие 6.3.8. Пусть Θ — полная теория, имеющая бесконечные модели. Тогда для всякого кардинала a , такого, что $\|\mathcal{L}\| < a$ и $a = a^*$, существует элементарно a -универсальная модель теории Θ мощности a .

Доказательство. Используя теорему Лёвенгейма—Скolemса и теорему 6.2.9, убеждаемся в существовании специальной модели теории Θ мощности a . После этого требуемое заключение следует из теоремы 6.3.7.

Следствие 6.3.9. Следующие высказывания равносильны:

- (i) $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$;
- (ii) существует модель A' , такая, что обе модели A и B элементарно вложимы в A' .

Доказательство. То, что (i) следует из (ii), является очевидным фактом. Допустим, что (i) выполнено. Если модель A конечна, то по следствию 6.3.5 $A \cong B$, откуда следует (ii). Если модель A бесконечна, то, применяя следствие 6.3.8 к теории $\text{Th}(A)$, опять получаем (ii).

Следующая теорема представляет обобщение следствий 6.3.8 и 6.3.9. В ней не требуется, чтобы рассматриваемая теория была полной.

Теорема 6.3.10. Пусть Θ — непротиворечивая теория. Тогда следующие утверждения равносильны.

(i) Для всякого кардинала α , такого, что $\|\mathcal{L}\| \cup |X| < \alpha$ и $\alpha = \alpha^*$, теория Θ имеет α -универсальную модель мощности α .

(ii) Любые две модели теории Θ изоморфно вложимы в третью модель теории Θ .

Доказательство. Очевидно, достаточно показать лишь, что (i) следует из (ii). Пусть α таков, что $\|\mathcal{L}\| \cup |X| < \alpha$ и $\alpha = \alpha^*$. Имеется не более α полных теорий Θ' , таких, что $\Theta' \subset \Theta$. Каждой такой полной теории Θ' поставим в соответствие специальную модель $A_{\Theta'}$ мощности α , такую, что $\text{Th}(A_{\Theta'}) = \Theta'$. Используя теорему о компактности для логики $\mathcal{L}(\alpha)$ и теорему Лёвенгейма – Скolemа о понижении мощности, можно найти модель $A \in \text{Mod}(\Theta)$, такую, что всякая модель $A_{\Theta'}$ изоморфно вложима в A и, кроме того, $\|A\| = \alpha$. (Детали здесь легко восполнить, пользуясь упр. 5I.) Далее, всякая модель теории Θ является также моделью для некоторой теории Θ' . Поэтому (i) следует из того, что в качестве каждой $A_{\Theta'}$ может быть выбрана α -универсальная модель.

Упражнение 6O. Используя обе части упр. 5I, покажите, что теорема 6.3.10 может быть усиlena путем ослабления условия (ii).

6.4. Единственность специальных моделей

Некоторое видоизменение рассуждений, использованных в доказательстве теоремы 6.3.7, приводит к следующему результату.

Теорема 6.4.1. Пусть A и B – специальные модели. Если $\text{Th}(A) = \text{Th}(B)$ и $\|A\| = \|B\|$, то $A \cong B$.

Доказательство. Пусть $\alpha = \|A\|$, и пусть A_β , $\beta < \alpha$, и B_β , $\beta < \alpha$, – определяющие цепи для моделей A и B соответственно. Если кардинал α конечен, то $A \cong B$ по следствию 6.3.5. Предположим теперь, что α бесконечен. Тогда независимо от того, является ли кардинал α предельным, мы можем выбрать перечисления $a \in R^\alpha$ множества R и $b \in S^\alpha$ множества S

так, чтобы для всех $\nu < \alpha$

$$a_\nu \in R_{|\nu|} \text{ и } b_\nu \in S_{|\nu|}.$$

Для удобства мы выделяем букву η в качестве переменной, пробегающей класс предельных ординалов (включая 0). Построим при помощи трансфинитной индукции две последовательности $c \in R^\alpha$ и $d \in S^\alpha$, такие, что для всякого ординала $\nu < \alpha$, для которого $|\nu| = \gamma$, выполняются следующие условия:

- (1) $c_\nu \in R_\gamma$ и $d_\nu \in S_\gamma$;
- (2) $\text{Th}((A, c \upharpoonright (\nu + 1))) = \text{Th}((B, d \upharpoonright (\nu + 1)))$;
- (3) если $\nu = \eta + 2n$, то $c_\nu = a_{\eta+n}$, и
если $\nu = \eta + 2n + 1$, то $d_\nu = b_{\eta+n}$.

Предположим, что $\mu < \alpha$, $|\mu| = \beta$ и условия (1), (2), (3) выполнены для всех $\nu < \mu$. Тогда, согласно (2), имеем

$$(4) \quad \text{Th}((A, c \upharpoonright \mu)) = \text{Th}((B, d \upharpoonright \mu)),$$

и, учитывая (1), получаем

$$(5) \quad c \upharpoonright \mu \in R_\beta^\mu \text{ и } d \upharpoonright \mu \in S_\beta^\mu.$$

Поскольку $A_\beta \prec A$ и $B_\beta \prec B$, из (4) и (5) следует

$$\text{Th}((A_\beta, c \upharpoonright \mu)) = \text{Th}((B_\beta, d \upharpoonright \mu)).$$

По теореме 4.1.5, применяемой здесь к логике $\mathcal{L}(\mu)$, имеем

$$\overline{\text{Th}^+((A_\beta, c \upharpoonright \mu))} = \overline{\text{Th}^+((B_\beta, d \upharpoonright \mu))}.$$

Так как модели A_β и B_β обе β^+ -насыщены и $\mu < \beta^+$, полученное равенство влечет

$$(6) \quad \text{Th}^+((A_\beta, c \upharpoonright \mu)) = \text{Th}^+((B_\beta, d \upharpoonright \mu)).$$

В случае когда $\mu = \eta + 2n$, положим $c_\mu = a_{\eta+n}$, тогда, согласно (6), можем выбрать $d_\mu \in S_\beta$ так, что

$$(7) \quad [(A_\beta, c \upharpoonright \mu), c_\mu] = [(B_\beta, d \upharpoonright \mu), d_\mu].$$

В случае когда $\mu = \eta + 2n + 1$, положим $d_\mu = b_{\eta+n}$ и, используя (6), снова выбираем $c_\mu \in R_\beta$ так, что

выполняется (7). Во всех случаях (7) немедленно приводит к равенству

$$\text{Th}((A, c \upharpoonright (\mu + 1))) = \text{Th}((B, d \upharpoonright (\mu + 1)))$$

и, таким образом, условия (1), (2) и (3) выполняются для ординала μ . Следовательно, индукция завершена и мы можем считать, что последовательности c и d построены. Теперь очевидно, что c и d перечисляют множества R и S соответственно и что

$$\text{Th}((A, c)) = \text{Th}((B, d)).$$

Следовательно, $A \cong B$ согласно упр. 3G.

Упражнение 6P. Класс $K \subset \mathcal{M}$ элементарно замкнут тогда и только тогда, когда каждый из классов K и $\mathcal{M} \setminus K$ является

- (i) замкнутым относительно изоморфизма;
- (ii) замкнутым относительно объединения элементарных цепей;
- (iii) замкнутым относительно построения ультраподстановок.

Упражнение 6Q. $K \in \text{ЕС}_\Delta$ тогда и только тогда, когда K и $\mathcal{M} \setminus K$ обладают свойствами (i) и (ii) из упр. 6P, класс K замкнут относительно ультраподстановок, а $\mathcal{M} \setminus K$ замкнут относительно ультрастепеней.

Упражнение 6R.* Предположим, что $B_1 \subset A$, $B_2 \subset A$ и $\text{Th}(B_1) = \text{Th}(B_2)$. Тогда существуют три модели B'_1 , B'_2 и A' , такие, что

$$B'_1 \cong B'_2, \quad A \prec A', \quad B_1 \prec B'_1 \subset A', \quad B_2 \prec B'_2 \subset A'.$$

(Обобщите результат из упр. 6F.) Отметим, что приведенное в этом упражнении утверждение в случае логики \mathcal{L} может быть сформулировано в более сильной форме.

Упражнение 6S.* Пусть $z \subset \pi$; обозначим через Σ_z множество всех высказываний из Σ , в которые не входят символы предикатов P_ξ при $\xi \notin z$. Как обычно, $\Theta \upharpoonright \Sigma_z$ означает ограничение теории Θ на пространство X^{Σ_z} . Мы говорим, что $\Theta \upharpoonright \Sigma_z$ непротиворечиво

(полно), если существует модель A , такая, что $[A] \upharpoonright \Sigma_z \in \Theta \upharpoonright \Sigma_z$ (соответственно $\text{Th}(A) \upharpoonright \Sigma_z = \Theta \upharpoonright \Sigma_z$). Предположим, что $z_1, z_2 \subset \pi$ и $\Theta \upharpoonright \Sigma_{z_1 \cap z_2}$ (ограничение теории Θ) полно. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (i) $\Theta \upharpoonright \Sigma_{z_1}$ и $\Theta \upharpoonright \Sigma_{z_2}$ непротиворечивы;
- (ii) $\Theta \upharpoonright \Sigma_{z_1 \cup z_2}$ непротиворечиво.

(Всякая модель, специальная относительно логики \mathcal{L} , является также специальной относительно части \mathcal{L} , содержащей только те предикаты P_ξ , для которых $\xi \in z$.)

*Упражнение 6Т**. Следуя обозначениям из предыдущего упражнения, мы говорим, что класс $K \subset \mathcal{M}$ есть z -класс, если условия $A \in K$ и $[B] \upharpoonright \Sigma_z = [A] \upharpoonright \Sigma_z$ влекут $B \in K$. Предположим, что $K_1, K_2 \in EC_\Delta$, причем K_1 есть z_1 -класс, а K_2 есть z_2 -класс. Тогда следующие утверждения равносильны:

- (i) $K_1 \cap K_2 = 0$;
- (ii) существуют $(z_1 \cap z_2)$ -классы $L_1, L_2 \in EC_\Delta$, такие, что $K_1 \subset L_1$, $K_2 \subset L_2$ и $L_1 \cap L_2 = 0$.

Следующая теорема представляет некий результат о полноте для произвольной непрерывной логики \mathcal{L} , обладающей t -множеством, k -множеством и e -множеством, и лишний раз подчеркивает то важное значение, которое мы придааем этим множествам.

Теорема 6.4.2. *Следующие утверждения равносильны:*

- (i) *модели A и B элементарно эквивалентны относительно логики \mathcal{L} ;*
- (ii) *A и B элементарно эквивалентны относительно логики $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \mathcal{Q})$;*
- (iii) *A и B элементарно эквивалентны относительно всякой логики $\mathcal{L}(\mathcal{F}')$, где $\mathcal{F}' \subset \mathcal{C} \cup \mathcal{Q}$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что (ii) следует из (i), так как все остальные импликации очевидны. Предположим, что $[A]_\mathcal{L} = [B]_\mathcal{L}$. Если модель A конечна, то $A \cong B$, согласно следствию 6.3.5. Тогда, поскольку в логике $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \mathcal{Q})$ нет новых символов предикатов или констант, $[A]_\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \mathcal{Q}) = [B]_\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup \mathcal{Q})$.

Итак, пусть модель A бесконечна. Тогда модель B также бесконечна. Пусть $\alpha = \alpha^*$ — кардинал, такой, что

$$\|A\| \cup \|B\| \cup \mathcal{L}(\mathcal{C} \cup Q) \| < \alpha.$$

Применяя теорему 6.2.9 к логике $\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup Q)$, найдем две специальные модели A' и B' мощности α , такие, что

$$A \prec A' \text{ и } [A]_{\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup Q)} = [A']_{\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup Q)};$$

$$B \prec B' \text{ и } [B]_{\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup Q)} = [B']_{\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup Q)}.$$

Поскольку $[A]_{\mathcal{L}} = [B]_{\mathcal{L}}$, имеем $[A']_{\mathcal{L}} = [B']_{\mathcal{L}}$. Отсюда по теореме 6.4.1 получаем $A' \cong B'$. Следовательно,

$$[A']_{\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup Q)} = [B']_{\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup Q)}.$$

Это влечет $[A]_{\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup Q)} = [B]_{\mathcal{L}(\mathcal{C} \cup Q)}$. Теорема доказана.

Следствие 6.4.3. Предположим, что логики \mathcal{L} и \mathcal{L}' отличаются лишь тем, что $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}'$, и каждая из них обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством. Тогда $[A]_{\mathcal{L}} = [B]_{\mathcal{L}}$ тогда и только тогда, когда $[A]_{\mathcal{L}'} = [B]_{\mathcal{L}'}$.

Упражнение 6U. При тех предположениях, что в следствии 6.4.3, покажите, что $\overline{\text{Th}^+(A)}_{\mathcal{L}} = \overline{\text{Th}^+(B)}_{\mathcal{L}}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\text{Th}^+(A)}_{\mathcal{L}'} = \overline{\text{Th}^+(B)}_{\mathcal{L}'}$.

Упражнение 6V*. Пусть X' — компактное хаусдорфово пространство, содержащее подпространство X . Пусть, далее,

$$\mathcal{L}' = (\langle \pi, \kappa \rangle, X', \mathcal{F}', 0, 1, H')$$

— непрерывная логика, так что $\mathcal{M}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{M}_{\mathcal{L}'}$. Покажите, что если $A, B \in \mathcal{M}_{\mathcal{L}}$ и $[A]_{\mathcal{L}} = [B]_{\mathcal{L}}$, то $[A]_{\mathcal{L}'} = [B]_{\mathcal{L}'}$. (Обратите внимание на замечания в разд. 5.1 относительно независимости конструкции ультрапроизведения от логики \mathcal{L} и проанализируйте детали построения специальных моделей.)

6.5. Некоторые следствия обобщенной континуум-гипотезы

В этом разделе мы используем результаты разд. 5.4 и 5.5 об α -правильных ультрафильтрах и теорему единственности для специальных моделей. При этом мы везде принимаем обобщенную континуум-гипотезу, а также продолжаем считать, что логика \mathcal{L} обладает t -множеством, k -множеством и e -множеством.

Теорема 6.5.1. Для того чтобы модели A и B были элементарно эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовали множество I и ультрафильтр D над I , такие, что

$$D\text{-prod } A \cong D\text{-prod } B.$$

Если при этом $\|\mathcal{L}\| \leq \alpha$ и $\|A\|, \|B\| \leq 2^\alpha$, то можно потребовать, чтобы I имело мощность α .

Доказательство. Достаточность следует (см. следствие 5.1.7) из равенств

$$\text{Th}(A) = \text{Th}(D\text{-prod } A) = \text{Th}(D\text{-prod } B) = \text{Th}(B).$$

Для доказательства необходимости предположим, что для некоторого достаточно большого кардинала α выполняются неравенства $\|\mathcal{L}\| \leq \alpha$ и $\|A\|, \|B\| \leq 2^\alpha$. Как и в доказательстве следствия 5.5.6, заметим, что существует α^+ -правильный счетно неполный ультрафильтр D над α и что ультрастепени $D\text{-prod } A$ и $D\text{-prod } B$ суть α^+ -насыщенные модели мощности $\leq \alpha^+$. Применяя 5.1.7, получаем

$$\text{Th}(D\text{-prod } A) = \text{Th}(A) = \text{Th}(B) = \text{Th}(D\text{-prod } B).$$

Если модель A конечна, то, согласно 6.3.5, имеем

$$D\text{-prod } A \cong A \cong B \cong D\text{-prod } B.$$

Если модель A бесконечна, то модели $D\text{-prod } A$ и $D\text{-prod } B$ также бесконечны и по лемме 6.1.6 каждая из них имеет мощность α^+ . Тогда, согласно лемме 6.2.1, модели $D\text{-prod } A$ и $D\text{-prod } B$ являются специальными. Наконец, из теоремы 6.4.1 получаем

$$D\text{-prod } A \cong D\text{-prod } B.$$

Отметим, что в приведенном сейчас доказательстве обобщенная континуум-гипотеза использовалась дважды: первый раз для доказательства существования α^+ -правильного ультрафильтра D и второй раз — чтобы показать, что используемые D -произведения имеют мощность $\leqslant \alpha^+$. В случае $\alpha = \omega$ использование континуум-гипотезы необходимо только во втором из упомянутых случаев.

В дальнейшем будем считать, что класс $K \subset \mathcal{M}$ замкнут относительно изоморфизмов. Будем говорить, что класс K замкнут относительно ультрастепеней, если $D\text{-prod } B \in K$ для любых $B \in K$, непустого множества I и ультрафильтра D над I .

Следствие 6.5.2. Для того чтобы класс K был элементарно замкнут, необходимо и достаточно, чтобы каждый из классов K и $\mathcal{M} \setminus K$ был замкнут относительно ультрастепеней.

Доказательство. Этот факт легко следует из теоремы 6.5.1.

Следствие 6.5.3. Для того чтобы класс K был элементарным классом, необходимо и достаточно, чтобы K был замкнут относительно ультрапроизведений, а $\mathcal{M} \setminus K$ замкнут относительно ультрастепеней.

Доказательство. Требуемое утверждение следует из теоремы 5.2.4 и следствия 6.5.2.

Теорема 6.5.4. Пусть $K, L \subset \mathcal{M}$. Для того чтобы

$$\overline{\text{Th}(K)} \cap \overline{\text{Th}(L)} \neq 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовали множество I , ультрафильтр D над I и функции $F \in K^I$ и $G \in L^I$, такие, что $D\text{-prod } F \cong D\text{-prod } G$.

Доказательство. Достаточность вытекает из следствия 5.1.6 и леммы 1.5.2.

Для доказательства необходимости предположим, что $h \in \overline{\text{Th}(K)} \cap \overline{\text{Th}(L)}$. Пусть T — множество всех открытых базисных окрестностей точки h в пространстве X^Σ . Тогда для любого $U \in T$ существуют $A_U \in K$ и $B_U \in L$, такие, что $[A_U], [B_U] \in U$. Пусть, далее,

β – кардинал, такой, что $\|A_U\| \leq 2^\beta$ и $\|B_U\| \leq 2^\beta$ для всех $U \in T$; положим $I = S_\omega(T \times \beta)$ и $\alpha = |I|$. Для любого

$$i = \{\langle U_1, \zeta_1 \rangle, \dots, \langle U_n, \zeta_n \rangle\} \in I$$

положим $A_i = A_U$ и $B_i = B_U$, где $U = U_1 \cap \dots \cap U_n$. Согласно упр. 5О, существует α^+ -правильный регулярный ультрафильтр D над I , а согласно упр. 1J ультрафильтр D счетно неполон. Следовательно, по теореме 5.5.4 каждая из моделей

$$A' = D\text{-prod } \lambda i A_i, \quad B' = D\text{-prod } \lambda i B_i$$

α^+ -насыщена. Кроме того, имеем

$$\|A'\| \leq \left| \prod_{i \in I} R_i \right| \leq (2^\beta)^\alpha + \alpha^+$$

и аналогично $\|B'\| \leq \alpha^+$. Поскольку ультрафильтр D – регулярный, для любого $U \in T$ имеем

$$\{i \in I : \langle U, 0 \rangle \in I\} \subset \{i \in I : [A_i] \in U\} \in D$$

и, следовательно,

$$D\text{-lim } \lambda i [A_i] \in U.$$

Поэтому, учитывая следствие 5.1.6, заключаем, что

$$[A'] = D\text{-lim } \lambda i [A_i] = h.$$

Аналогичным образом получаем, что $[B'] = h$ и, следовательно, $\text{Th}(A') = \text{Th}(B')$. Затем, рассуждая как в доказательстве теоремы 6.5.1, убеждаемся, что $A' \cong B'$. Доказательство закончено.

Упражнение 6W. (Теорема об отделимости.) Предположим, что $K, L \subset \mathcal{M}$, $K \cap L = 0$ и каждый из классов K и L замкнут относительно ультрапроизведений. Тогда существуют классы $K', L' \subset \mathcal{M}$, представимые как пересечение сингулярных элементарных классов и такие, что $K \subset K'$, $L \subset L'$ и $K' \cap L' = 0$.

Упражнение 6X. (Сравните с упр. 5F.) Для того чтобы каждый из классов K и $\mathcal{M} \setminus K$ был представим как пересечение конечного числа сингулярных элементарных классов, необходимо и достаточно, чтобы оба эти класса были замкнуты относительно ультрапроизведений.

КЛАССЫ, ЗАМКНУТЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ

В разделах 7.2 и 7.3 настоящей главы мы обобщим следующие два хорошо известных результата для двузначной логики \mathcal{L} на широкий класс непрерывных логик \mathcal{L} : 1) элементарный класс K замкнут относительно расширений моделей тогда и только тогда, когда K есть класс всех моделей некоторого множества эзистенциальных высказываний (Лось [1955b] и Тарский [1954]); 2) элементарный класс K замкнут относительно нахождения гомоморфных образов тогда и только тогда, когда K есть класс всех моделей некоторого множества позитивных высказываний (Линдон [1959]). Эти два результата являются представителями целого ряда результатов относительно логики \mathcal{L} , утверждающих, что элементарный класс K замкнут относительно некоторых отношений тогда и только тогда, когда K есть класс всех моделей некоторого множества высказываний определенного вида. В упражнениях этих разделов мы укажем, как можно обобщить некоторые другие результаты указанного рода для непрерывной теории моделей.

Раздел 7.4 носит несколько более специальный характер, так как в нем рассматривается непрерывная логика \mathcal{L} , для которой отношение H является отношением линейного порядка на X . Мы вынуждены ввести такое ограничение потому, что иначе не совсем ясно, как разумным образом определить понятие приведенного произведения. В этом разделе обобщается следующий результат для двузначной логики: 3) элементарный класс K замкнут относительно приведенного произведения тогда и только тогда, когда K есть класс всех моделей множества условных высказываний

(Кейслер [1965]). В этом результате в противоположность 1) и 2) используется обобщенная континуум-гипотеза. В настоящее время не известно, возможно ли здесь найти доказательство, не использующее эту гипотезу.

Отметим, что отношение порядка H логики \mathcal{L} не упоминалось нигде в последних трех главах (IV, V и VI). Зато в настоящей главе отношение H играет важную роль и мы существенно пользуемся указанным в гл. II предположением, что тройка $(X, 0, 1)$ упорядочена отношением H (для любой непрерывной логики \mathcal{L}).

7.1. Обобщенная теория моделей и отношение порядка

В этом разделе мы получим некоторые обобщения результатов разд. 4.1, которые понадобятся в остальной части главы. В частности, мы проведем в отношении H -множества \mathcal{H} рассуждения, аналогичные рассуждениям разд. 4.1, где речь шла о t -множестве. Всюду в настоящем разделе считаем, что для логики \mathcal{L} выполнены следующие условия:

- 7.1.1. \mathcal{L} обладает H -множеством \mathcal{H} .
- 7.1.2. \mathcal{L} обладает k -множеством \mathcal{K} .
- 7.1.3. \mathcal{L} обладает l -множеством \mathcal{E} .

Заметим, что, согласно лемме 1.4.1, из условия 7.1.1 следует, что отношения H и \dot{H} замкнуты.

Как и в разд. 4.1, мы обозначаем через Ψ произвольное подмножество Σ^+ . Однако в отличие от обозначений из 4.1 для всякого $h \in X^\Psi$ через Ψ_h мы обозначаем следующее подмножество Σ^+ :

$$\Psi_h = \{t(\varphi) : \varphi \in \Psi, t \in \mathcal{H} \text{ и } t(h(\varphi)) = 1\}.$$

По-прежнему мы используем символы 0 или 1 для обозначения постоянных функций с множествами значений $\{0\}$ и $\{1\}$ соответственно. Допуская некоторую неаккуратность, мы будем использовать символ H

также для обозначения бинарного отношения на X^Ψ , определяемого поточечно посредством отношения H , заданного на пространстве X . Поэтому для любых $h, h' \in X^\Psi$ отношение hHh' означает, что $h(\phi)Hh'(\phi)$ для всех $\phi \in \Psi$.

Отметим, между прочим, что, согласно сказанному в упр. 1Р, отношения H и \check{H} на пространстве X^Ψ замкнуты и тройка $(X^\Psi, 0, 1)$ упорядочена посредством H .

Наша первая лемма представляет аналог леммы 4.1.1.

Лемма 7.1.4. *Если*

$$h \in \overline{\check{H}[\text{Th}^+(A) \upharpoonright \Psi]},$$

то

$$I \in \overline{\text{Th}^+(A) \upharpoonright \Psi_h}.$$

Доказательство. Требуется показать, что как только $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Psi_h$ и $I \in V \in \mathcal{S}$, существует $r_0 \in R$, такой, что

$$(1) \quad \varphi_m[A, r_0] \in H[V] \text{ для любого } m \leq n.$$

Заметим, что для любого $m \leq n$ выполняется $\varphi_m = t_m(\psi_m)$, где $t_m \in \mathcal{H}$, $\psi_m \in \Psi$, причем $t_m(h(\psi_m)) = 1$. Поскольку функции t_m непрерывны, имеем

$$h(\psi_m) \in \check{t}_m[V] \in \mathcal{S} \text{ для любого } m \leq n.$$

Согласно условию существует функция

$$g \in \check{H}[\text{Th}^+(A) \upharpoonright \Psi],$$

такая, что $g(\psi_m) \in \check{t}_m[V]$ для всех $m \leq n$. Кроме того, существует $r_0 \in R$, такой, что для всех $\psi \in \Psi$ имеет место $g(\psi)H\psi[A, r_0]$. Следовательно,

$$\varphi_m[A, r_0] \in H[\check{t}_m[V]].$$

Поскольку функции t_m сохраняют отношение H , имеем

$$H[\check{t}_m[V]] \subset \check{t}_m[H[V]],$$

откуда легко следует (1).

Докажем теперь аналог теоремы 4.1.4.

Теорема 7.1.5. Пусть $h \in X^\Psi$. Тогда следующие условия равносильны:

-
- (i) $h \in \check{H}[\text{Th}^+(A) \upharpoonright \Psi]$;
 - (ii) $\varphi[A] = 1$ для любого $\varphi \in \Sigma \cap \mathcal{E}(\mathcal{K}(\Psi_h))$.

Доказательство. Доказательство того, что (i) влечет (ii), аналогично доказательству первой части теоремы 4.1.4, причем вместо леммы 4.1.1 используется лемма 7.1.4.

Предположим теперь, что (i) не выполнено. Тогда существуют $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Psi$ и U_1, \dots, U_n , удовлетворяющие условиям $h(\varphi_i) \in U_i \in \mathcal{S}$, $i = 1, \dots, n$, и такие, что

$$(1) \quad \langle\langle \varphi_1[A, r_0], \dots, \varphi_n[A, r_0] \rangle\rangle: r_0 \in R \subset \\ \subset X^n \setminus (H[U_1] \times \dots \times H[U_n]).$$

Обозначим множество, стоящее в (1) справа от знака включения, символом Z . Поскольку отношение H открыто, каждое из множеств $H[U_m]$, $m \leq n$, открыто и, следовательно, Z замкнуто в пространстве X^n . По теореме 2.4.5 для всякого $m \leq n$ существует конечное множество $\mathcal{H}_m \subset H$,

$$\mathcal{H}_m = \{t_{m1}, \dots, t_{m l_m}\},$$

такое, что:

- $$(2) \quad t(h(\varphi_m)) = 1 \text{ для любого } t \in \mathcal{H}_m;$$
- $$(3) \quad \text{если } t(x) = 1 \text{ для всех } t \in \mathcal{H}_m, \text{ то } x \in H[U_m].$$

Для завершения доказательства теперь можно повторить слово в слово последнюю часть доказательства теоремы 4.1.4.

Мы заканчиваем этот раздел теоремой, аналогичной теореме 4.1.5.

Теорема 7.1.6. Предположим, что

$$\Psi = \mathcal{E}(\mathcal{K}(\mathcal{H}(\Psi))).$$

Тогда для любых двух моделей A и B следующие утверждения равносильны:

-
- (i) $1 \in \text{Th}(B) \upharpoonright \check{h}[1]$ при (единственном) h , таком что $h \in \text{Th}(A) \upharpoonright (\Sigma \cap \Psi)$;

- (ii) $1 \in \text{Th}^+(B) \upharpoonright \check{h}[1]$ при всех $h \in \text{Th}^+(A) \upharpoonright \Psi$.

Доказательство. (i) легко следует из (ii). Допустим, что верно (i), и докажем (ii). Пусть $h \in \text{Th}^+(A) \upharpoonright \Psi$. Поскольку отношение H рефлексивно, то $h \in \check{H}[\text{Th}^+(A) \upharpoonright \Psi]$. Согласно теореме 7.1.5,

$$\phi[A] = 1 \quad \text{для всех } \phi \in \Sigma \cap \mathcal{E}(\mathcal{K}(\Psi_h)).$$

Далее, из условия теоремы и из того, что $\Psi_h \subset \mathcal{K}(\Psi)$, следует, что $\mathcal{E}(\mathcal{K}(\Psi_h)) \subset \Psi$. Пусть f – единственный элемент множества $\text{Th}(A) \upharpoonright (\Sigma \cap \Psi)$, т. е. $f = [A] \upharpoonright (\Sigma \cap \Psi)$. Тогда имеем

$$\Sigma \cap \mathcal{E}(\mathcal{K}(\Psi_h)) \subset \check{f}[1].$$

Из (i) следует, что

$$1 \in \overline{\text{Th}(B) \upharpoonright \check{f}[1]},$$

и, следовательно,

$$\text{Th}(B) \upharpoonright \check{f}[1] = \{1\}.$$

Так что

$$\phi[B] = 1 \quad \text{для всех } \phi \in \Sigma \cap \mathcal{E}(\mathcal{K}(\Psi_h)).$$

Еще раз используя 7.1.5, получаем

$$h \in \check{H}[\text{Th}^+(B) \upharpoonright \Psi].$$

Следовательно,

$$(1) \quad 1 \in \overline{\check{H}[\text{Th}^+(B) \upharpoonright h[1]]}.$$

Так как $(X, \theta, 1)$ упорядочивается отношением H , 1 есть неподвижная точка непрерывности отношения H в пространстве X , т. е. $1 \in V \in \mathcal{S}$ влечет существование $U \in \mathcal{S}$, для которой $1 \in H[U] \subset V$. Следовательно, всякая базисная открытая окрестность V' точки 1 в пространстве $X^{h[1]}$ содержит открытую окрестность U' точки 1 , такую, что $H[U'] \subset V'$ (см. упр. 1Р). Согласно (1), окрестность U' пересекается с $\check{H}[\text{Th}^+(B) \upharpoonright h[1]]$ и, следовательно, $H[U']$ пересекается с $\text{Th}^+(B) \upharpoonright h[1]$. Но в таком случае и V' пересекается с множеством $\text{Th}^+(B) \upharpoonright h[1]$ и, значит, имеет место (ii).

7.2. Расширения моделей и экзистенциальные формулы

В этом разделе мы считаем, что выполнены следующие условия.

7.2.1. Логика \mathcal{L} обладает t -множеством \mathcal{T} .

7.2.2. \mathcal{L} обладает H -множеством \mathcal{H} .

7.2.3. \mathcal{L} обладает k -множеством $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_H$.

7.2.4. \mathcal{L} обладает e -множеством $\mathcal{E} \subset Q_H^{\vee}$.

Определения встречающихся здесь множеств \mathcal{C}_H и Q_H^{\vee} даны в разд. 1.4.

Формула $\varphi \in \Phi$ называется *экзистенциальной*, если¹⁾

$$\varphi \in ((Q_H^{\vee} \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F}) (\mathcal{C} \cap \mathcal{F}) \Lambda.$$

Обычно формула φ двузначной логики l называется *экзистенциальной*, если все встречающиеся в ней кванторы суть кванторы существования и все они расположены в начале формулы φ . Легко видеть, что формула логики l эквивалентна формуле, экзистенциальной в смысле нашего определения, тогда и только тогда, когда она эквивалентна формуле, экзистенциальной в смысле обычно принятого определения. Таким образом, наше понятие экзистенциальной формулы логики \mathcal{L} представляет собой обобщение понятия, принятого для логики l .

Обозначим через Υ^+ множество всех экзистенциальных формул из Σ^+ и через Υ множество всех экзистенциальных высказываний из Σ . Обозначим также через Υ_{μ}^+ и Υ_{μ} множества всех экзистенциальных формул из $\Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}^+$ и $\Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}$ соответственно.

Отметим, что экзистенциальные формулы рассматривались в упр. ЗС и это упражнение может быть теперь сформулировано так:

7.2.5. Если $\varphi \in \Upsilon^+$, $A \subset B$ и $r_0 \in R$, то $\varphi[A, r_0] H \varphi[B, r_0]$. Если $\varphi \in \Upsilon$ и $A \subset B$, то $\varphi[A] H \varphi[B]$.

В этом разделе нашей целью является доказательство утверждений, в некотором смысле обратных утверждению 7.2.5.

¹⁾ См. примечание на стр. 62. — Прим. перев.

Теорема 7.2.6. Предположим, что кардинал $\|B\|$ конечен и что для всякого экзистенциального высказывания Φ

$$\Phi[A] = 1 \text{ влечет } \Phi[B] = 1.$$

Тогда $\|A\| \leq \|B\|$.

Доказательство. Предположим, что $1 < n < \omega$ и $n \leq \|A\|$. Пусть $m = \frac{n(n-1)}{2}$. Возьмем функцию $t \in \mathcal{T}$, такую, что $t(0) = 1$ и $t(1) \neq 1$. Поскольку логика \mathcal{L} обладает k -множеством, можно применить лемму 2.4.7, согласно которой существует функция $k \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{F}$, такая, что $k(1, \dots, 1) = 1$ и $k[1] \subset \subset (X \setminus \{t(1)\})^m$. Пусть Φ_0 — формула:

$$\begin{aligned} \Phi_0 = k(t(v_1 \equiv v_2), t(v_1 \equiv v_3), \dots \\ \dots, t(v_1 \equiv v_n), \dots, t(v_{n-1} \equiv v_n)). \end{aligned}$$

Легко видеть, что Φ_0 обладает следующими тремя свойствами:

- (1) Φ_0 экзистенциальна;
- (2) $\Phi_0[C, r] = 1$ для всякого $C \in \mathcal{M}$ при некотором $r \in T^\infty$ тогда и только тогда, когда $\|C\| \geq n$.

Для произвольного $\psi \in \Phi$ пишем

$$\text{val}(\psi) = \{\psi[C, r] : C \in \mathcal{M} \text{ и } r \in T^\infty\} \setminus \{1\}.$$

Тогда третье свойство формулы Φ_0 можно выразить так:

- (3) $\text{val}(\Phi_0)$ — конечное множество.

Теперь мы хотим найти высказывание, обладающее свойствами (1) и (2).

Из (3) следует, что всякое множество $Z \in \text{val}(\Phi_0)^*$ конечно и, следовательно, $1 \notin \overline{Z}$. Поэтому найдется конечное подмножество $\mathcal{E}_1 = \{e_1, \dots, e_p\} \subset \mathcal{E}$, такое, что для всех $Z \in \text{val}(\Phi_0)^*$ существует $e \in \mathcal{E}_1$, удовлетворяющее условию $e(Z) \neq 1$. Ясно также, что множество $\text{val}((e_j v_1) \Phi_0)$ конечно при всяком $j \leq p$. Следовательно, можно применить лемму 2.4.7, откуда видно, что существует $k_1 \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}_p \cap \mathcal{C}_n$, такой, что

$$k_1(1, \dots, 1) = 1$$

и

$$\check{k}_1[1] \subset X \setminus (\text{val}((e_1 v_1) \varphi_0) \cup \dots \cup \text{val}((e_p v_1) \varphi_0))^p.$$

Пусть

$$\varphi_1 = k_1((e_1 v_1) \varphi_0, \dots, (e_p v_1) \varphi_0),$$

Указанный выбор \mathcal{E}_1 и k_1 обеспечивает выполнение для формулы φ_1 требований (1), (2) и (3). Теперь, повторяя ту же процедуру, построим последовательность формул $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$, такую, что φ_{j+1} для всех $j < n$ получается из φ_j так же, как φ_1 получается из φ_0 . Используя индукцию, убеждаемся, что каждая формула φ_j обладает свойствами (1), (2) и (3). При этом формула φ_j имеет в качестве свободных переменных лишь v_{j+1}, \dots, v_n и, следовательно, φ_n есть высказывание. Поскольку $\|A\| \geq n$, из (1) и (2) следует, что

$$\varphi_n[A] = 1, \quad \varphi_n[B] = 1 \quad \text{и} \quad \|B\| \geq n.$$

Лемма 7.2.7. $\Upsilon^+ = \mathcal{E}(\mathcal{K}(\mathcal{K}(\Upsilon^+)))$.

Доказательство. Требуемое утверждение следует из 7.2.2. – 7.2.4 и определения множества Υ^+ .

Теорема 7.2.8. Предположим, что B – специальная модель, $\|A\| \leq \|B\|$ и для любого эзистенциального высказывания φ выполняется импликация

$$\varphi[A] = 1 \quad \text{влечет} \quad \varphi[B] = 1.$$

Тогда модель A изоморфно вложима в B .

Доказательство. Пусть $\|B\| = \alpha$ и $B_\beta, \beta < \alpha$ – определяющая цепь модели B . Поскольку $\|A\| \leq \alpha$, существует перечисление $a \in R^\alpha$ множества R . Построим теперь при помощи трансфинитной индукции последовательность $b \in S^\alpha$, такую, что для каждого $v < \alpha$ выполняются условия:

- (1) для всех $\varphi \in \Upsilon_v$ соотношение $\varphi[(A, a \upharpoonright v)] = 1$ влечет $\varphi[(B, b \upharpoonright v)] = 1$;
- (2) $\mathcal{R}(b \upharpoonright v) \subset S_{l_\varphi}$.

По предположению теоремы (1) и (2) имеют место при $v=0$. Кроме того, очевидно, что если v — предельный ординал, а условия (1) и (2) выполняются при всех $\mu < v$, то (1) и (2) выполняются и для v .

Предположим, что $v < \alpha$ и что (1) и (2) выполнены. Пусть $\beta = |v|$. Условие (1) можно переписать в виде

$$(3) \quad I \in \overline{\text{Th}((B, b \upharpoonright v)) \upharpoonright h[1]}, \text{ где } h \text{ — (единственный) элемент, такой, что } h \in \text{Th}((A, a \upharpoonright v)) \upharpoonright Y_v.$$

Согласно теореме 4.2.9, имеет место $B_\beta \prec B$, так что из теоремы 4.2.7 вытекает, что

$$(B_\beta, b \upharpoonright v) \prec (B, b \upharpoonright v).$$

Следовательно, (3) выполняется, если B заменить на B_β . Благодаря лемме 7.2.7 мы можем применить теорему 7.1.6 в отношении логики $\mathcal{L}(v)$ и множества Y_v в качестве Ψ . В результате получаем

$$(4) \quad I \in \overline{\text{Th}^+((B_\beta, b \upharpoonright v)) \upharpoonright h[1]} \quad \text{для всех } h \in \overline{\text{Th}^+((A, a \upharpoonright v)) \upharpoonright Y_v^+}.$$

Пусть

$$h_0 = [(A, a \upharpoonright v), a_v] \upharpoonright Y_v^+.$$

Тогда

$$h_0 \in \overline{\text{Th}^+((A, a \upharpoonright v)) \upharpoonright Y_v^+},$$

следовательно, согласно (4),

$$I \in \overline{\text{Th}^+((B_\beta, b \upharpoonright v)) \upharpoonright h_0[1]}.$$

Но поскольку модель B_β является β^+ -насыщенной и $v < \beta^+$, учитывая (2), убеждаемся, что множество $\text{Th}^+((B_\beta, b \upharpoonright v))$ замкнуто, так что

$$I \in \overline{\text{Th}^+((B_\beta, b \upharpoonright v)) \upharpoonright h_0[1]}.$$

Теперь можно указать $b_v \in S_\beta$, такой, что для всех $\varphi \in Y_v^+$

$$\varphi[(A, a \upharpoonright v), a_v] = 1 \quad \text{влечет} \quad \varphi[(B_\beta, b \upharpoonright v), b_v] = 1.$$

Ясно, что (2) верно для $v + 1$, т. е. что $\mathcal{R}(b \upharpoonright v + 1) \subset S_\beta$. Кроме того, используя упр. ЗК и ЗМ применительно к логике $\mathcal{L}(v)$, убеждаемся, что

$$\varphi \in \Upsilon_{v+1} \text{ и } \varphi[(A, a \upharpoonright v + 1)] = 1$$

$$\text{влечет } \varphi[(B_\beta, b \upharpoonright v + 1)] = 1.$$

Поскольку $(B_\beta, b \upharpoonright v + 1) \prec (B, b \upharpoonright v + 1)$, условие (1) верно и для $v + 1$. Это завершает индукцию.

Поскольку (1) выполняется для всех $v < a$, имеем

$$(5) \quad \varphi \in \Upsilon_a \text{ и } \varphi[(A, a)] = 1 \text{ влечет } \varphi[(B, b)] = 1.$$

Пусть теперь $\psi \in \Lambda_{\mathcal{L}(a)} \cap \Sigma_{\mathcal{L}(a)}$ и $x = \psi[(A, a)]$, $y = \psi[(B, b)]$. Если $x \neq y$, то существует $t \in \mathcal{T}$, такой, что $t(x) = 1$ и $t(y) \neq 1$. Но это означает, что

$$(6) \quad t(\psi)[(A, a)] = 1 \text{ и } t(\psi)[(B, b)] \neq 1,$$

что противоречит (5), так как $t(\psi) \in (\mathcal{F} \cap \mathcal{C}) \Lambda_{\mathcal{L}(a)} \subset \Upsilon_a$. Следовательно, должно быть $x = y$. Таким образом, мы показали, что

$$(7) \quad \text{для всех } \psi \in \Lambda_{\mathcal{L}(a)} \cap \Sigma_{\mathcal{L}(a)}$$

$$\text{выполняется } \psi[(A, a)] = \psi[(B, b)].$$

Используя упражнение ЗI, убеждаемся, что отображение $a_v \rightarrow b_v$ есть изоморфизм модели A на подмодель модели B , порожденную множеством $\mathcal{R}b$. Таким образом, модель A изоморфно вложима в B .

Следствие 7.2.9. Следующие три условия равносильны для любых $A, B \in \mathcal{M}$.

(i) A изоморфно вложима в некоторое элементарное расширение B' модели B .

(ii) Для всех $\varphi \in \Upsilon$, $\varphi[A] H \varphi[B]$.

(iii) Для всех $\varphi \in \Upsilon$, $\varphi[A] = 1$ влечет $\varphi[B] = 1$.

Доказательство. (i) влечет (ii) вследствие 7.2.5. Согласно утверждению из упр. 1N, имеем $H[1] = \{1\}$, поэтому (ii) влечет (iii). Пусть B' — специальная модель мощности $\geqslant \|A\|$, являющаяся элементарным расширением B ; модель B' существует согласно теоремам 6.2.9 и 7.2.6. Согласно теореме 7.2.8, из условия (iii) следует, что модель A изоморфно вложима в B' , так что (iii) влечет (i).

Следствие 7.2.10. Если B – специальная модель мощности a , то B есть a -универсальная модель относительно теории

$$\Theta = \{h \in X^\Sigma : \check{h}[1] \cap Y \subset \check{g}[1]\},$$

где $g = [B]$.

Доказательство. Указанное утверждение представляет лишь иную формулировку теоремы 7.2.8.

Класс $K \subset \mathcal{M}$ есть экзистенциальный класс, если он представим как пересечение некоторой совокупности классов, каждый из которых в свою очередь есть объединение конечного числа классов вида

$$\{A \in \mathcal{M} : \varphi[A] \in H[Y]\},$$

где φ – экзистенциальное высказывание, а Y – замкнутое подмножество X . Ясно, что каждый экзистенциальный класс является элементарным классом, так как, согласно лемме 1.4.1, множество $H[Y]$ замкнуто, если Y замкнуто.

Теорема 7.2.11. Пусть $K \in \text{ЕС}_d$. Тогда класс K есть экзистенциальный класс в том и только том случае, когда из $A \in K$ и $A \subset B$ следует $B \in K$.

Доказательство. Сначала проведем доказательство, так сказать, „в легкую сторону“. Предположим, что K – экзистенциальный класс. Мы хотим показать, что любое расширение элемента из K также принадлежит K . Очевидно, достаточно это показать для случая, когда K – сингулярный экзистенциальный класс, т. е. когда

$$K = \{A \in \mathcal{M} : \varphi[A] \in H[Y]\}$$

при некоторых экзистенциальном высказывании φ и замкнутом множестве Y в X . Пусть $A \in K$ и $A \subset B$. Согласно 7.2.5, имеем $\varphi[A] H \varphi[B]$. Поскольку отношение H транзитивно, $\varphi[B] \in H[\varphi[A]] = H[Y]$. Следовательно, $B \in K$.

Теперь предположим, что всякое расширение элемента из класса K принадлежит K . Пусть

$$L = \bigcap \{K' : K' – экзистенциальный класс, K \subset K'\}.$$

Ясно, что $K \subset L$ и L — экзистенциальный класс. Теорема будет доказана, если мы покажем, что $L \subset K$. Предположим, что $A \in L$. Докажем сначала, что

$$(1) \quad \text{Th}(A) \upharpoonright Y \in H[\text{Th}(K) \upharpoonright Y].$$

Поскольку $K \in \text{EC}_\Delta$, множество $\text{Th}(K)$ замкнуто в пространстве X^Σ и, следовательно, $\text{Th}(K) \upharpoonright Y$ замкнуто в X^r . Тогда и множество $H[\text{Th}(K) \upharpoonright Y]$ замкнуто в X^r согласно результату из упр. 1Р. Поэтому для доказательства (1) достаточно показать, что выполняется следующее условие:

(2) для любого конечного множества экзистенциальных высказываний $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ и любой последовательности открытых множеств U_1, \dots, U_n в пространстве X , таких, что

$$\varphi_i[A] \in U_i \quad \text{при } i = 1, \dots, n,$$

имеет место

$$(U_1 \times \dots \times U_n) \cap H[\text{Th}(K) \upharpoonright \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}] \neq 0.$$

Предположим, что (2) ложно. Тогда найдутся $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in Y$ и $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{P}$, такие, что $\varphi_i[A] \in U_i$ при $i = 1, \dots, n$ и

$$(U_1 \times \dots \times U_n) \cap H[\text{Th}(K) \upharpoonright \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}] = 0,$$

или, что то же самое,

$$\check{H}[U_1 \times \dots \times U_n] \cap \text{Th}(K) \upharpoonright \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} = 0.$$

Так как отношение H на X^Σ определяется поточечно, это означает, что

$$(3) \quad (\check{H}[U_1] \times \dots \times \check{H}[U_n]) \cap \text{Th}(K) \upharpoonright \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} = 0.$$

Пусть $Y_1 = X \setminus \check{H}[U_1], \dots, Y_n = X \setminus \check{H}[U_n]$. Поскольку отношение \check{H} открыто, каждое из множеств Y_i замкнуто в пространстве X . Так как H транзитивно, $Y_i = H[Y_i]$ при любом i . Определим при любом $i \leq n$ множество

$$K_i = \{C \in M: \varphi_i[C] \in Y_i\}$$

и положим $K' = K_1 \cup \dots \cup K_n$. Ясно, что K' — экзистенциальный класс. Отсюда $K \subset K'$ согласно (3). Следовательно $A \in K'$. Но это невозможно, поскольку $\varphi_i[A] \in U_i \subset X \setminus Y_i$, при всех i , так что $A \notin K_i$. Таким образом, условие (2) выполняется и (1) доказано.

Условие (1) означает, что существует $B \in K$, такая, что

$$\varphi[B] H \varphi[A] \text{ для всех } \varphi \in \Upsilon.$$

Согласно следствию 7.2.9, модель B изоморфно вложима в некоторое элементарное расширение A' модели A . Поскольку $K \in EC_\Delta$, класс K замкнут относительно изоморфизмов. По предположению всякое расширение модели B принадлежит K , так что $A' \in K$. Кроме того, класс K элементарно замкнут, откуда следует, что $A \in K$. Теорема доказана.

Двузначная логика l удовлетворяет для нее принятым допущениям 7.2.1–7.2.4. Следовательно, для нее все доказанные нами теоремы имеют место. Кроме того, благодаря наличию связки \wp всякий экзистенциальный класс $K \subset \mathcal{M}$, есть просто пересечение классов вида

$$\{A \in \mathcal{M}: \varphi[A] = 1\},$$

где φ — некоторое экзистенциальное высказывание.

Упоминаемые в примерах 2.5.2 и 2.5.3 логики \mathcal{L} также удовлетворяют условиям 7.2.1–7.2.4, так что доказанные теоремы верны и для них.

Упражнение 7A. Пусть $\Psi \subset \Sigma$. Предположим также, что $G \subset \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ и G удовлетворяет следующему требованию:

если $\varphi[A] H \varphi[B]$ при всяком $\varphi \in \Psi$, то существуют $A', B' \in \mathcal{M}$, такие, что $\text{Th}(A) = \text{Th}(A')$, $\text{Th}(B) = \text{Th}(B')$ и $A'GB'$.

Покажите, что если $K \in EC_\Delta$ и $G[K] \subset K$, то класс K представим как пересечение совокупности классов, каждый из которых есть объединение конечного числа классов вида

$$\{A \in \mathcal{M}: \varphi[A] \in H[Y]\},$$

где $\varphi \in \Psi$ и Y замкнуто в X .

В следующей группе упражнений будем считать, что кроме 7.2.1. – 7.2.4 выполняется следующее условие:

7.2.12. Двойственная к логике \mathcal{L} логика $\mathcal{L}(1, 0, \check{H})$ (см. разд. 2.1) обладает t -множеством \mathcal{T}' , \check{H} -множеством \mathcal{H}' , k -множеством $\mathcal{K}' \subset \mathcal{C}_H$ и e -множеством $\mathcal{E}' \subset \mathcal{Q}_H$.

Упражнение 7B*. Формулу $\varphi \equiv \Phi$ назовем *универсальной*, если

$$\varphi \equiv ((\mathcal{Q}_H \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F})(\mathcal{C} \cap \mathcal{F}) \Lambda.$$

Сформулируйте и докажите утверждения, аналогичные теоремам 7.2.8 и 7.2.11, для универсальных высказываний и подмоделей.

Упражнение 7C. Формулу $\varphi \equiv \Phi$ назовем *универсально-экзистенциальной*, если

$$\varphi \equiv ((\mathcal{Q}_H \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F})((\mathcal{Q}_{\check{H}} \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F})(\mathcal{C} \cap \mathcal{F}) \Lambda.$$

Предположим, что $B \subset A \subset B'$ и $B \prec B'$. Если φ – универсально-экзистенциальное высказывание, то $\varphi[A] H \varphi[B]$.

Упражнение 7D. Назовем класс K *универсально-экзистенциальным*, если K представим как пересечение совокупности классов, каждый из которых есть объединение конечного числа классов вида

$$\{A \in \mathcal{M}: \varphi[A] \equiv H[Y]\},$$

где φ – универсально-экзистенциальное высказывание, а Y – замкнутое подмножество X . Покажите, что если K – универсально-экзистенциальный класс, то K замкнут относительно объединений цепей моделей из K . (Используйте упр. 7C и 5J,2.)

Упражнение 7E*. Предположим, что $\|B\| \leq \|A\| = \alpha$, A – специальная модель и

$\varphi[A] H \varphi[B]$ для всякого универсально-экзистенциального высказывания φ .

Докажите следующие утверждения:

- (i) Существует модель B' , такая, что $B \subset B'$ и $B \subset A \subset B'$. (Покажите сначала, что если $b \in S^a$ есть перечисление элементов модели B , то существует $a \in R^a$, такой, что $\varphi[(A, a)] \vdash \varphi[(B, b)]$ для любого экзистенциального высказывания φ из $\Sigma_{\mathcal{L}(a)}$.)
- (ii) Если модель B – также специальная модель мощности a и $a \geq \|\mathcal{L}\|$, то в (i) можно потребовать $B \cong B'$. (Используйте теорему Лёвенгейма–Скolemа о понижении мощности.)
- (iii) Существует модель B' , такая, что $B \subset B'$, являющаяся объединением цепи моделей, каждая из которых изоморфна A .

Упражнение 7F. Пусть $K \in EC_\Delta$. Тогда следующие условия равносильны.

- (i) K универсально-экзистенциальный класс.
- (ii) K замкнут относительно объединений цепей.
- (iii) Если $A \in K$, $B \subset A \subset B'$ и $B \subset B'$, то $B \in K$.

Упражнение 7G.* Каков аналог утверждения из упр. 7F для случая, когда рассматриваются высказывания

$$\varphi \in ((Q_H \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F})((Q_H \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F})((Q_H \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F}) \dots \\ \dots (\mathcal{C} \cap \mathcal{F}) \Lambda,$$

где итерация производится n раз? (Всестороннее исследование этой проблемы для логики \mathcal{L} можно найти в работе Кейслера [1960].)

7.3. Гомоморфизмы и позитивные классы

Всюду в настоящем разделе мы считаем выполнеными следующие условия:

- 7.3.1. $\langle 0, 1 \rangle \in H$.
- 7.3.2. Логика \mathcal{L} обладает H -множеством \mathcal{H} , k -множеством $\mathcal{K} \subset \mathcal{C}_H$ и e -множеством $\mathcal{E} \subset Q_{H^*}$.
- 7.3.3. Двойственная логика $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(1, 0, \check{H})$ (определение см. в разд. 2.1) обладает \check{H} -множеством $\check{\mathcal{H}}$, k -множеством $\check{\mathcal{K}} \subset \mathcal{C}_H$ и e -множеством $\check{\mathcal{E}} \subset Q_{H^*}$.

Допущения, принятые в этом разделе, отличаются от допущений разд. 7.2 тем, что условие 7.2.1 здесь опущено, условия 7.2.2 и 7.2.3 составляют часть 7.3.2 и некоторое ослабление условия 7.2.4 также есть часть 7.3.2. Добавлены же условие 7.3.1 и полный набор соответствующих условий для двойственной логики (условие 7.3.3). Мы применяем здесь ранее полученные результаты в отношении как логики \mathcal{L} , так и логики \mathcal{L}' . В частности, поскольку условия 7.1.1–7.1.3 выполнены для каждой из логик \mathcal{L} и \mathcal{L}' , для \mathcal{L} и \mathcal{L}' верны результаты разд. 7.1. Напомним читателю, что двойственные утверждения получаются путем замены символов O на I , H на \check{H} , \mathcal{H} на \mathcal{H}' , K на \mathcal{K}' , \mathcal{E} на \mathcal{E}' , и наоборот.

Ясно, что указанная в примере 2.5.1 логика l и $l(1, O, \check{H})$ – пара логик, удовлетворяющих условиям 7.3.1–7.3.3. Путем незначительных изменений множеств $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ и $\mathcal{F} \cap \mathcal{Q}$ в примерах 2.5.2 и 2.5.3 получаются логики, удовлетворяющие условиям 7.3.1–7.3.3.

Упражнение 7Н. (i) Покажите, что для указанных в примере 2.5.2 и 2.5.3 логик существует гомеоморфизм F пространства X на X , такой, что xHy тогда и только тогда, когда $F(y)HF(x)$. Воспользуйтесь этим для доказательства утверждений из предыдущего раздела.

(ii) Приведите пример логики \mathcal{L} , удовлетворяющей 7.3.1–7.3.3, для которой нет гомеоморфизма F , подобного указанному в пункте (i).

Формула $\Phi \equiv \Phi$ называется *позитивной*, если

$$\Phi \in ((\mathcal{Q}_H^* \cup \mathcal{C}_H) \cap \mathcal{F}) \Lambda.$$

Учитывая замечание, сделанное в начале разд. 7.2, видим, что данное понятие позитивной формулы совпадает с обычным в случае логики l . Поэтому введенное нами понятие, относящееся к непрерывной логике \mathcal{L} , можно рассматривать как обобщение известного понятия для логики l .

Обозначим символом Π^+ множество всех позитивных формул из Σ^+ , а символом Π – множество всех

позитивных высказываний из Σ . Аналогично, Π_{μ}^+ и Π_{μ} обозначают множества всех позитивных формул из $\Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}^+$ и $\Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}$ соответственно.

Теперь утверждение из упр. 3F можно сформулировать следующим образом.

7.3.4. Если $\varphi \in \Pi^+$, AHB при гомоморфизме h и $r_0 \in R$, то $\varphi[A, r_0] H \varphi[B, h(r_0)]$. Если $\varphi \in \Pi$ и AHB , то $\varphi[A] H \varphi[B]$.

Теорема 7.3.5. Предположим, что модель B конечна и для всякого позитивного высказывания φ выполняется $\varphi[B] H \varphi[A]$. Тогда $\|A\| \leq \|B\|$.

Доказательство. Поскольку 0 — неподвижная точка непрерывности отношения H , условие теоремы влечет

(1) для всякого позитивного высказывания φ , $\varphi[A] = 0$ влечет $\varphi[B] = 0$.

Предположим теперь, что $1 < n < \omega$ и $n \leq \|A\|$. Пусть $m = n(n-1)/2$. Поскольку логика \mathcal{L}' обладает k -множеством \mathcal{K}' , применяя лемму, двойственную 2.4.7, убеждаемся, что существует $k \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{F}$, такой, что k есть композиция функций из \mathcal{K}' и

$$k(0, \dots, 0) = 0 \text{ и } k[0] \subset (X \setminus \{1\})^m.$$

Пусть φ_0 — следующая формула:

$$\varphi_0 = k((v_1 \equiv v_2), (v_1 = v_3), \dots, (v_1 \equiv v_n), \dots, (v_{n-1} \equiv v_n)).$$

Тогда φ_0 обладает следующими свойствами (здесь используем обозначение, примененное в доказательстве теоремы 7.2.6):

- (2) φ_0 — позитивная формула;
- (3) для любого $C \in \mathcal{M}$ имеет место $\varphi_0[C, r] = 0$ при некотором $r \in T^\infty$ тогда и только тогда, когда $n \leq \|C\|$;
- (4) множество $\text{val}(\varphi_0)$ конечно.

Затем, используя в точности те же рассуждения, что и в доказательстве теоремы 7.2.6, но в отношении логики \mathcal{L}' , получаем позитивное высказывание, удовлетворяющее (2) и (3). Поскольку $n \leq \|A\|$, то

$\Phi_n[A] = 0$. Так что, согласно (1), имеем $\Phi_n[B] = 0$ и, следовательно, $n \leq \|B\|$, что доказывает теорему.

Следующая лемма не нуждается в доказательстве.

Лемма 7.3.6. $\Pi^+ = \mathcal{E}(\mathcal{K}(\mathcal{K}(\Pi^+))) = \mathcal{E}'(\mathcal{K}'(\mathcal{K}'(\Pi^+)))$.

Теорема 7.3.7. Пусть A и B — специальные модели. Предположим, что либо B конечна, либо $\|A\| = \|B\|$ и что $\Phi[A] H \Phi[B]$ для всякого позитивного высказывания Φ . Тогда AHB .

Доказательство. Доказательство представляет простое видоизменение доказательства теоремы 6.4.1. Сначала мы проведем рассуждение для случая, когда $\omega \leq \|A\| = \|B\|$, а затем наметим доказательство для случая, когда одна из моделей A и B конечна.

Пусть $\omega \leq a = \|A\| = \|B\|$, и пусть A_β , $\beta < a$, B_β , $\beta < a$, — определяющие цепи для моделей A и B соответственно. Выберем перечисления $a \in R^a$ и $b \in S^a$ множеств R и S такие, что для всех $v \in a$

$$a_v \in R_{|v|} \text{ и } b_v \in S_{|v|}.$$

Выделим букву η для обозначения предельных ординалов, включая 0, затем построим последовательности $d \in R^\eta$ и $e \in S^\eta$, такие, что для всех $v < a$, удовлетворяющих условию $|v| = \gamma$, выполняются следующие требования:

- (1) $d_v \in R_\gamma$ и $e_v \in S_\gamma$;
- (2) если $\Phi \in \Pi_{v+1}$, то $\Phi[(A, d|v+1)] H \Phi[(B, e|v+1)]$;
- (3) если $v = \eta + 2n$, то $d_v = a_{\eta+n}$, и если $v = \eta + 2n+1$, то $e_v = b_{\eta+n}$.

Заметим сначала, что согласно утверждению из упр. 3В, прилагаемому здесь к логикам $\mathcal{L}((\mathcal{C}_H \cup Q_{H^*}) \cap \mathcal{F})$ и $\mathcal{L}(1, 0, (\mathcal{C}_H \cup Q_{H^*}) \cap \mathcal{F})$, условие (2) равносильно каждому из нижеуказанных условий (2') и (2''):

(2') если $\Phi \in \Pi_{v+1}$ и $\Phi[(A, d|v+1)] = 1$, то
 $\Phi[(B, e|v+1)] = 1$;

(2'') если $\Phi \in \Pi_{v+1}$ и $\Phi[(B, e|v+1)] = 0$, то
 $\Phi[(A, d|v+1)] = 0$.

Предположим, что $\mu < \alpha$, $|\mu| = \beta$ и условия (1)–(3) выполнены при всех $\nu < \mu$. Тогда, согласно (2), имеем (4) $\phi[(A, d \upharpoonright \mu)] H \phi[(B, e \upharpoonright \mu)]$ для всех $\phi \in \Pi_\mu$ и, согласно (1), имеем

$$(5) \quad d \upharpoonright \mu \in R_\beta^\mu \text{ и } e \upharpoonright \mu \in S_\beta^\mu.$$

Поскольку $A_\beta \prec A$ и $B_\beta \prec B$, из (4) и (5) получаем

$$(6) \quad \phi[(A_\beta, d \upharpoonright \mu)] H \phi[(B_\beta, e \upharpoonright \mu)] \text{ для всех } \phi \in \Pi_\mu.$$

Предположим, что $\mu = \eta + 2n$. Положим $d_\mu = a_{\eta+n}$. Условие (6) имеет эквивалент (6'), подобный (2'), который позволяет получить

$$(7) \quad I \in \overline{\text{Th}((B_\beta, e \upharpoonright \mu)) \upharpoonright h[1]}, \text{ где } h - (\text{единственная}) \text{ функция из } X^{\Pi_\mu}, \text{ такая, что } h \in \text{Th}((A_\beta, d \upharpoonright \mu)) \upharpoonright \Pi_\mu.$$

Согласно лемме 7.3.6 и теореме 7.1.6, применяемым к логике $\mathcal{L}(\mu)$ и множеству $\Psi = \Pi_\mu$, из (7) следует

$$(8) \quad I \in \overline{\text{Th}^+((B_\beta, e \upharpoonright \mu)) \upharpoonright h[1]} \text{ для всех } h \in \text{Th}^+((A_\beta, d \upharpoonright \mu)) \upharpoonright \Pi_\mu^+.$$

Пусть $h_0 = [(A_\beta, d \upharpoonright \mu), d_\mu] \upharpoonright \Pi_\mu^+$. Тогда будет иметь место $h_0 \in \text{Th}^+((A_\beta, d \upharpoonright \mu)) \upharpoonright \Pi_\mu^+$. Поскольку модель B_β является β^+ -насыщенной, множество $\text{Th}^+((B_\beta, e \upharpoonright \mu))$ замкнуто. Поэтому (8) дает

$$(9) \quad I \in \text{Th}^+((B_\beta, e \upharpoonright \mu)) \upharpoonright h_0[1].$$

Благодаря условию (9) можно найти $e_\mu \in S_\beta$, такой, что

$$\begin{aligned} \text{если } \phi \in \Pi_\mu^+ \text{ и } \phi[(A_\beta, d \upharpoonright \mu), d_\mu] = I, \text{ то} \\ \phi[(B_\beta, e \upharpoonright \mu), e_\mu] = I. \end{aligned}$$

Поэтому (2) и (2') выполняются при замене $\nu + 1$ на μ .

Предположим теперь, что $\mu = \eta + 2n + 1$. Пусть $e_\mu = b_{\eta+n}$. В этом случае, рассуждая аналогичным образом, но уже относительно логики \mathcal{L}' , получаем элемент $d_\mu \in R_\beta$, такой, что (2'') и, следовательно, (2) выполняются для μ (вместо $\nu + 1$). Таким образом, посредством трансфинитной индукции определены

последовательности d и e . Ясно, что d и e перечисляют множества R и S соответственно и что

$$\varphi[(A, d)] H \varphi[(B, e)] \text{ для всех } \varphi \in \Pi_\alpha.$$

Согласно результату из упр. 3I, получаем AHB .

Предположим, наконец, что одна из моделей A и B конечна. Пусть $\alpha = \|A\|$ и $\beta = \|B\|$. Из теоремы 7.3.5 следует, что $\beta \leq \alpha$ и $\beta < \omega$. Пусть $b \in S^\beta$ — перечисление множества S . Независимо от того, конечно α или нет, выберем $a \in R^\beta$, такой, что

$$\text{если } \varphi \in \Pi_\beta \text{ и } \varphi[(A, a)] = 1, \text{ то } \varphi[(B, b)] = 1.$$

Пусть теперь $d \in R^\alpha$ есть произвольное перечисление множества R . Так как модель B конечна, она является α -насыщенной. Поэтому, используя приведенные выше рассуждения, можно найти $e \in S^\alpha$, такой, что

$$\begin{aligned} \text{если } \varphi \in (\Pi_\beta)_\alpha \text{ и } \varphi[(A, a), d] = 1, \text{ то} \\ \varphi[(B, b), e] = 1, \end{aligned}$$

что снова влечет AHB . Теорема доказана.

Следствие 7.3.8. Для любых $A, B \in \mathcal{M}$ следующие три условия равносильны.

(i) Существуют $A' > A$ и $B' > B$, такие, что имеет место $A'H B'$.

(ii) Для всех $\varphi \in \Pi$ имеет место $\varphi[A] H \varphi[B]$.

(iii) Для всех $\varphi \in \Pi$ равенство $\varphi[A] = 1$ влечет $\varphi[B] = 1$.

Доказательство. Импликация, утверждающая, что из (i) следует (ii), тривиальна. Равносильность (ii) и (iii) вытекает из упр. 3B. Поэтому примем (ii) и докажем (i). Предположим сначала, что модель A конечна. Тогда по теореме 7.3.5 модель B также конечна и $\|B\| \leq \|A\|$. Следовательно, согласно теореме 7.3.7, имеет место AHB . Если модель A бесконечна, то независимо от того, конечно или нет модель B , существуют элементарные расширения $A' > A$ и $B' > B$, являющиеся специальными моделями и такие, что для них выполняются условия теоремы 7.3.7. Из 7.3.7 следует также, что $A'H B'$. Поэтому (i) выполняется и следствие доказано.

Класс $K \subseteq \mathcal{M}$ есть *позитивный класс*, если он представим как пересечение некоторой совокупности классов, каждый из которых есть объединение конечного числа классов вида

$$\{A \in \mathcal{M}: \varphi[A] \in H[Y]\},$$

где φ — позитивное высказывание и Y — замкнутое подмножество X . Здесь так же, как и в прежних случаях, поскольку множество $H[Y]$ замкнуто в X , каждый позитивный класс является элементарным классом.

Теорема 7.3.9. *Пусть $K \in EC_\Delta$. Тогда K является позитивным классом в том и только том случае, когда из $A \in K$ и AHB следует $B \in K$.*

Доказательство. Легко проверить, что каждый класс вида

$$\{A \in \mathcal{M}: \varphi[A] \in H[Y]\},$$

где $\varphi \in \Pi$ и Y замкнутое подмножество X , замкнут относительно нахождения гомоморфных образов. Следовательно, всякий позитивный класс замкнут относительно нахождения гомоморфных образов.

Теперь предположим, что из $A \in K$ и AHB следует $B \in K$. Используем результат из упр. 7А. Заменим в этом упражнении множество Ψ на Π и отношение G на AHB . Тогда, согласно следствию 7.3.8, выполняются условия, указанные в упражнении, следовательно, верно и заключение, что и доказывает позитивность класса K . Добавим для тех, кто не выполнил упр. 7А, что доказательство этой части теоремы может быть получено путем дословного повторения соответствующего рассуждения из теоремы 7.2.11, с заменой Y на Π и слова „экзистенциальный“ на „позитивный“. Теорема доказана.

Как было отмечено в начале раздела, логики l и $l(1, 0, \check{H}l)$ удовлетворяют всем предположениям 7.3.1 — 7.3.3. Следовательно, для этих логик верны и все полученные здесь результаты. При этом мы

видим, что благодаря наличию связки \exists каждый позитивный класс $K \subset \mathcal{M}_1$ есть пересечение классов вида

$$\{A \in \mathcal{M}_1 : \phi[A] = 1\},$$

где ϕ — позитивное высказывание.

Теперь можно сформулировать большое число упражнений, аналогичных упражнениям конца разд. 7.2. В качестве образца приведем одно из таких упражнений.

Упражнение 71. Формула ϕ называется *позитивно-экзистенциальной*, если

$$\phi \in ((Q_H \cup C_H) \cap \mathcal{F})^{\Lambda}.$$

Класс $K \subset \mathcal{M}$ называется *позитивно-экзистенциальным*, если K представим как пересечение классов, каждый из которых есть в свою очередь объединение конечного числа классов вида

$$\{A \in \mathcal{M} : \phi[A] \in H[Y]\},$$

где ϕ — позитивно-экзистенциальное высказывание, Y — замкнутое в пространстве X множество.

Предположим, что для логик \mathcal{L} и \mathcal{L}' выполнены условия 7.2.1—7.2.4, 7.2.12 и 7.3.1. Пусть $K \in EC_d$. Тогда следующие три условия равносильны.

- (i) K — позитивно-экзистенциальный класс.
- (ii) Если $A \in K$, AHB и $B \subset C$, то $C \in K$.
- (iii) Если $A \in K$, $A \subset B$ и BHC , то $C \in K$.

7.4. Приведенные произведения и условные классы

Содержание настоящего раздела носит несколько более специальный характер по сравнению с результатами, изложенными в двух предыдущих разделах. Мы изложим здесь в наиболее общем виде результаты Кейслера о приведенных произведениях и условных классах, полученные им для логики l [1965]. Для того чтобы определить разумным образом приведенное произведение, мы вынуждены наложить дальнейшие ограничения на отношение H , упорядочивающее пространство X , и на непрерывную логику \mathcal{L} .

На протяжении всего раздела мы будем предполагать, что

7.4.1. H есть отношение линейного порядка на X .

7.4.2. Логика \mathcal{L} обладает H -множеством \mathcal{H} .

7.4.3. Существует гомеоморфизм $t \in \mathcal{F}$ пространства X на X , такой, что xHy тогда и только тогда, когда $t(y)Ht(x)$.

Мы видим, что примеры 2.5.1 и 2.5.2 удовлетворяют налагаемым условиям, в то же время в примере 2.5.3 не выполняется условие 7.4.1.

На самом деле для получения основного результата требуется, чтобы множество \mathcal{F} содержало, кроме указанных в 7.4.2 и 7.4.3 функций, также некоторые другие функции. Оказывается, наличие этих функций в \mathcal{C} и \mathcal{Q} уже следует из 7.4.1 и 7.4.2. Поэтому мы сначала получим некоторые следствия из 7.4.1 и 7.4.2, а затем укажем нужные дополнительные предположения относительно логики \mathcal{L} (см. 7.4.9 и 7.4.14).

Заметим сначала, что

7.4.4. $0H1$; для всех $x \in X$ выполняются соотношения $0Hx$ и $xH1$; $t(0) = 1$ и $t(1) = 0$; двойственная к \mathcal{L} логика $\mathcal{L}' = \mathcal{L}(1, 0, \check{H})$ обладает \check{H} -множеством \mathcal{H}' .

Далее, согласно определению H -множества, выполняется следующее свойство.

7.4.5. Если $\langle x, y \rangle \in X^2 \setminus H$, то существуют дизъюнктные открытые множества U и V , такие, что

$$H[U] = U, \quad \check{H}[V] = V, \quad x \in U \text{ и } y \in V.$$

Из 7.4.5 и двойственного к нему свойства следует, что

7.4.6. Множества $X^2 \setminus H$ и $X^2 \setminus \check{H}$ открыты в пространстве X^2 и, следовательно, H и \check{H} замкнуты в X^2 .

В оставшейся части раздела для упрощения обозначений мы будем писать

$$x \leqslant y \text{ вместо } xHy$$

и

$$x < y \text{ вместо } xHy \text{ и } x \neq y.$$

Из контекста всегда можно определить, используется ли символ \leqslant или $<$ для обозначения отношения порядка на ординалах или служит в указанном сейчас смысле для замены символа H . Определим замкнутые, открытые и полуоткрытые интервалы относительно введенного отношения порядка следующим образом:

$$[x, y] = \{z \in X : x \leqslant z \leqslant y\},$$

$$(x, y) = \{z \in X : x < z < y\},$$

$$[x, y) = \{z \in X : x \leqslant z < y\},$$

$$(x, y] = \{z \in X : x < z \leqslant y\}.$$

Из леммы 1.4.1 следует, что

7.4.7. Любой замкнутый интервал замкнут в пространстве X и любой открытый интервал открыт в X ; кроме того, замкнутый интервал $[0, 1]$ и полуоткрытые интервалы $[0, x)$ и $(x, 1]$ открыты в X .

Мы определяем в пространстве X^2 обычным образом функции \max и \min относительно порядка H .

Лемма 7.4.8. $\max, \min \in \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_H$.

Доказательство. Покажем, что $\min \in \mathcal{C}_2$. Пусть V — открытое в X множество. Тогда

$$\min^\vee [V] = (V \times X \cap X^2 \setminus H) \cup (X \times V \cap X^2 \setminus H) \cup V \times V,$$

т. е. равно множеству, открытому в X^2 .

Отныне мы предполагаем, что

7.4.9. $\max, \min \in \mathcal{F}$.

Отсюда немедленно следует, что логика \mathcal{L} обладает k -множеством ($\{\min\}$) и что логика \mathcal{L}' обладает k -множеством ($\{\max\}$). Так как каждая из функций \min и \max ассоциативна, можно писать

$$\min(x_1, \dots, x_n) \text{ и } \max(x_1, \dots, x_n).$$

Лемма 7.4.10. Пусть Y — непустое замкнутое множество в пространстве X . Тогда существует $y \in Y$, такой, что $H[y] = H[Y]$.

Доказательство. Предположим, что, напротив, для каждого $y \in Y$ существует $z_y \in Y$, такой, что $z_y < y$. Согласно свойству двойственному к 7.4.5, существует открытое множество V_y , такое, что

$$H[V_y] = V_y, \quad y \in V_y \text{ и } z_y \notin V_y.$$

Совокупность $\{V_y : y \in Y\}$ образует открытое покрытие множества Y , и, следовательно, так как Y компактно, существуют $y_1, \dots, y_n \in Y$, такие, что

$$Y \subset V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}.$$

Пусть $z = \min(z_{y_1}, \dots, z_{y_n})$. Ясно, что $z \in Y$, но

$$z \notin V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Учитывая леммы 7.4.10 и двойственную к ней, определим две функции \inf и \sup с областью определения X^* следующим образом: для $Y \subseteq X^*$ полагаем

$\inf Y$ есть тот $y \in \bar{Y}$, для которого $H[y] = H[\bar{Y}]$,

$\sup Y$ есть тот $y \in \bar{Y}$, для которого $H[y] = H[\bar{Y}]$.

Лемма 7.4.11. Пусть $Y \subseteq X^*$. Тогда $\inf Y$ и $\sup Y$ суть наибольшая нижняя граница и наименьшая верхняя граница множества Y соответственно.

Доказательство. Покажем, что $\inf Y$ есть наибольшая нижняя граница множества Y . Поскольку $Y \subset \bar{Y}$ и $H[\inf Y] = H[\bar{Y}]$, видим, что $\inf Y$ есть нижняя граница множества Y . Предположим, что y есть нижняя граница множества Y . Тогда $Y \subset H[y]$. Так как множество $H[y]$ замкнуто, имеем $\bar{Y} \subset H[y]$. Поэтому $H[\bar{Y}] \subset H[y]$, $H[\inf Y] \subset H[y]$ и $y \leqslant \inf Y$.

Лемма 7.4.12. Предположим, что $x \in V \in \mathcal{P}$. Тогда существует открытое множество W , являющееся интервалом вида $[0, 1]$, $[0, y)$, $(y, 1]$ или (y, z) , такое, что $x \in W$ и $W \subset V$, т. е. указанные интервалы образуют базис топологии \mathcal{P} .

Доказательство. Рассмотрим замкнутые множества

$$Y_1 = \check{H}[x] \cap (X \setminus V), \quad Y_2 = H[x] \cap (X \setminus V).$$

Если $Y_1 = Y_2 = 0$, то положим $W = [0, 1]$. Предположим, что $Y_1 \neq 0$ и $Y_2 \neq 0$. Пусть $y_1 = \sup Y_1$ и $y_2 = \inf Y_2$. Так как множества Y_1 , Y_2 замкнуты, имеем $y_1 \in Y_1$ и $y_2 \in Y_2$. Согласно лемме 7.4.11,

$$y_1 < x < y_2.$$

Рассмотрим открытый интервал $W = (y_1, y_2)$. Ясно, что $x \in W$ и $W \subset V$. В случае когда либо $Y_1 = 0$, либо $Y_2 = 0$, аналогичные рассуждения показывают, что в качестве искомого W можно взять интервал вида $[0, y)$ или $(y, 1]$.

Лемма 7.4.13. $\sup, \inf \in Q$.

Доказательство. Покажем лишь, что $\sup \in Q$. Пусть V — открытое множество. Согласно лемме 7.4.12, нам достаточно лишь показать, что множество $\sup^{\vee}[V]$ открыто в пространстве X^* для случая, когда V — интервал, открытый в X . Не уменьшая общности, примем $V = (x, y)$. Мы утверждаем, что для всех $Y \in X^*$ $\sup Y \in V$ тогда и только тогда, когда $\bar{Y} \subset \check{H}[V]$ и $Y \cap V \neq 0$.

Поскольку множество $\check{H}[V]$ открыто, это означает, что множество $\sup^{\vee}[V]$ открыто в X^* . Лемма доказана.

Отныне мы предполагаем, что

7.4.14. $\inf, \sup \in F$.

Очевидно, что теперь логика \mathcal{L} обладает e -множеством $(\{\sup\})$, а также что логика \mathcal{L}' обладает e -множеством $(\{\inf\})$.

Обратимся теперь к задаче определения понятия приведенного произведения. Пусть D — фильтр над множеством I (I — некоторое непустое множество индексов) и $g \in X^I$. Положим

$$D(g) = \{E\text{-lim } g: D \subset E \text{ и } E \text{ — ультрафильтр над } I\}.$$

Лемма 7.4.15. Множество $D(g)$ замкнуто в пространстве X .

Доказательство. Покажем, что $X \setminus D(g)$ открыто. Пусть $x \in X \setminus D(g)$. Мы утверждаем, что (1) существует открытое множество U , такое, что $x \in U$ и $\{i: g(i) \notin U\} \in D$.

Предположим противное, т. е. что (2) для всякого открытого множества U , такого, что $x \in U$ выполняется $\{i: g(i) \notin U\} \notin D$.

Пусть

$$E' = \{\{i: g(i) \in U\}: x \in U \in \mathcal{P}\}.$$

Ясно, что, согласно (2), пересечение любого конечного числа элементов множества E' непусто. Кроме того, используя (2) еще раз, получаем, что пересечение конечного числа элементов множества $E' \cup D$ непусто.

Далее, пусть E — ультрафильтр над I , такой, что $E' \cup D \subset E$. Тогда $x = E\text{-lim } g$ в противоречии с тем, что $x \notin D(g)$. Следовательно, (1) выполняется. Ясно, что никакая точка из U не может принадлежать $D(g)$. Поэтому $U \cap D(g) = \emptyset$ и, значит, лемма доказана.

Определим *нижний D-предел функции g* (пишем $D\text{-inf } g$) следующим образом:

$$D\text{-inf } g = \inf D(g).$$

Заметим, что если фильтр D есть ультрафильтр, то $D\text{-inf } g = D\text{-lim } g$. Кроме того, согласно лемме 7.4.15, для всякого $g \in X'$ существует ультрафильтр $E \supset D$, такой, что $D\text{-inf } g = E\text{-lim } g$.

Следующая лемма будет весьма полезна в дальнейшем.

Лемма 7.4.16. $D\text{-inf } g = \sup \{\inf \{g(i): i \in J\}: J \in D\}$.

Доказательство. Пусть

$$x = D\text{-inf } g \text{ и } y = \sup \{\inf \{g(i): i \in J\}: J \in D\}.$$

Предположим сначала, что $x < y$. Тогда существует $J \in D$, такой, что

$$x < \inf \{g(i): i \in J\}.$$

Согласно лемме 7.4.5, существует открытое множество U , такое, что

$$\check{H}[U] = U \text{ и } \inf\{g(i) : i \in J\} \notin U,$$

откуда

$$\{i : g(i) \notin U\} \supset J \in D.$$

Поэтому $x \notin D(g)$, что является противоречием. Предположим теперь, что $y < x$. Поскольку $x = \inf D(g)$, имеем $y \notin D(g)$. Следовательно, согласно утверждению (1) из доказательства леммы 7.4.15, существуют открытое множество U и множество $J_1 \subset I$, такие, что

$$y \in U \text{ и } J_1 = \{i : g(i) \notin U\} \in D.$$

Согласно лемме 7.4.12, можно считать, что множество U есть интервал. Кроме того, поскольку $y \neq 1$, можно считать, что интервал U открыт справа, так что имеет место одно из двух:

$$(1) \quad U = [0, z_2)$$

или

$$(2) \quad U = (z_1, z_2).$$

В случае (1) имеем

$$y < z_2 \leqslant \inf\{g(i) : i \in J_1\},$$

что противоречит определению элемента y . В случае (2), поскольку $z_1 < y$, существует $J_2 \in D$, такой, что

$$z_1 < \inf\{g(i) : i \in J_2\}.$$

Пусть $i \in J_1 \cap J_2$. Тогда $g(i) \notin U$ и $z_1 < g(i)$. Это влечет $z_2 \leqslant g(i)$. Таким образом, опять получаем противоречие

$$y < z_2 \leqslant \inf\{g(i) : i \in J_1 \cap J_2\},$$

так что может быть лишь $x = y$, и лемма доказана.

В следующем упражнении показывается, что определение приведенного произведения, которое мы дадим, совпадает с обычным определением в случае логики l .

Упражнение 7J. Предположим, что $\sup(\mathcal{R}g \setminus \{I\}) \neq 1$. Тогда $D\text{-inf } g = 1$ в том и только том случае, когда $\{i: g(i) = 1\} \in D$.

Пусть $F = \lambda i A_i$ — функция, отображающая I в \mathcal{M} . Напомним следующие определения из разд. 1.2. Пусть g, h пробегают множество $\prod_{i \in I} R_i$; тогда

$g \sim h$ означает $\{i \in I: g(i) = h(i)\} \in D$;

$g^{\sim} = \{h: h \sim g\}$;

$D\text{-prod } \lambda i R_i = \left\{ g^{\sim}: g \in \prod_{i \in I} R_i \right\}$.

Приведенное произведение моделей $A_i, i \in I$ (пишем по-прежнему $D\text{-prod } \lambda i A_i$) есть модель $A = (R, \mathcal{A})$ из \mathcal{M} , такая, что

7.4.17. $R = D\text{-prod } \lambda i R_i$.

7.4.18. $\mathcal{A}(c_\zeta) = (\lambda i \mathcal{A}_i(c_\zeta))^{\sim}$ для любого $\zeta < \kappa$.

7.4.19. Для любых $\eta < \pi$ и $g_1^{\sim}, \dots, g_{\tau(\eta)}^{\sim} \in R$ выполняется

$$\mathcal{A}(P_\eta)(g_1^{\sim}, \dots, g_{\tau(\eta)}^{\sim}) =$$

$$= D\text{-inf } \lambda i \mathcal{A}_i(P_\eta)(g_1(i), \dots, g_{\tau(\eta)}(i)).$$

Легко видеть, что всегда $\mathcal{A}(c_\zeta) \in R$. Кроме того, так как каждое значение $\tau(\eta)$ конечно, легко проверить, используя равенство, доказанное в лемме 7.4.16, что $\mathcal{A}(P_\eta)$ есть корректно определенная функция, значения которой не зависят от выбора представителей в классах эквивалентности. Используя упр. 7J, видим, что

$$(v_0 \equiv v_1)[A, r] = D\text{-inf } g,$$

где $g \in \{0, 1\}^I$; $g(i) = 0$, если $r_0(i) \neq r_1(i)$, и $g(i) = 1$, если $r_0(i) = r_1(i)$. Поэтому все формулы $\phi \in \Lambda$ можно рассматривать аналогичным образом.

Если $B = A_i$ при всех $i \in I$, то пишем $D\text{-prod } B$ вместо $D\text{-prod } \lambda i A_i$ и называем такое произведение приведенной степенью модели B . Если D — ультрафильтр над I , то, очевидно, понятия приведенного

произведения и ультрапроизведения совпадают. Далее, в случае логики \mathcal{L} и моделей из \mathcal{M}_1 наше понятие приведенного произведения (опять же согласно упр. 7J) сводится к обычному для двузначной логики понятию.

Необходимость соблюдения правила Лейбница для тождеств вынуждает нас принять 7.4.19 в качестве определения для $\mathcal{A}(P_\eta)(g_1^*, \dots, g_{\tau(\eta)}^*)$. Хотя мы знаем, что (дайте требуемое определение)

$$D\text{-sup } \lambda i \mathcal{A}_i(P_\eta)(g_1(i), \dots, g_{\tau(\eta)}(i))$$

также существует (в силу двойственности), неизвестно, ведет ли использование этого понятия к новым содержательным алгебраическим построениям. Неизвестно также, например, в какой мере наша конструкция приведенного произведения может быть распространена на тот случай, когда упорядочение H на X есть просто отношение частичного порядка. Учитывая, что $D(g) \in X^*$ и $D(g)$ замкнуто в пространстве X (лемма 7.4.15), отметим, что определенная нами конструкция представляет собой, по-видимому, частный случай построения модели A , для которой значения истинности лежат в компактном хаусдорфовом пространстве X^* (рассматриваются только замкнутые в X множества), по данной последовательности моделей A_i , для которых значения истинности берутся в X .

Мы не будем подробно исследовать свойства приведенных произведений, подобно тому, как это сделано в отношении ультрапроизведений в гл. V. Такое детальное исследование для случая логики \mathcal{L} можно найти в работе Фрейна, Мореля и Скотта [1962]. Мы не видим трудностей в перенесении большинства результатов этой работы на случай непрерывной логики. Однако в настоящем разделе основным для нас является получение характеристики условных классов в терминах приведенных произведений. Для этой цели нам понадобится следующее определение.

Формула $\phi \equiv \Phi$ есть *примитивно условная формула* (пишем $\phi \equiv \Gamma'$), если существуют атомарные

формулы $\varphi_1, \dots, \varphi_{n+1} \in \Lambda$ и функции $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathcal{H}$, такие, что либо

$$\varphi = \max(t_1 t \varphi_1, \dots, t_n t \varphi_n),$$

либо

$$\varphi = \max(t_1 t \varphi_1, \dots, t_n t \varphi_n, t_{n+1} \varphi_{n+1}).$$

φ есть *условная формула*, если

$$\varphi \in \{\inf, \sup, \min\} \Gamma'.$$

Обозначим символом Γ^+ множество всех условных формул из Σ^+ , а символом Γ — множество всех условных высказываний. Подобным образом символами Γ_μ^+ и Γ_μ обозначаем множество всех условных формул из $\Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}^+$ и $\Sigma_{\mathcal{L}(\mu)}$ соответственно.

Напомним читателю, что в логике l

$$t = \neg, \sup = \exists, \inf = \forall \text{ и } \mathcal{H} = \{\text{id}\}.$$

Поэтому наше понятие условной формулы и высказывания, примененные к логике l , ведут к обычному понятию условной формулы и высказывания (данных Хорном).

Следующая лемма нужна как часть первого шага индукции в упр. 7К.

Лемма 7.4.20. Пусть $g_1, \dots, g_{n+1} \in X^I$, и пусть $t_1, \dots, t_{n+1} \in \mathcal{H}$ и $y_j = D\text{-}\inf g_j$ при $1 \leq j \leq n+1$. Предположим также, что

$$J_0 = \{i : \max(t_1 t g_1(i), \dots, t_n t g_n(i), t_{n+1} g_{n+1}(i)) = 1\} \in D.$$

Тогда

$$\max(t_1 t y_1, \dots, t_{n+1} y_{n+1}) = 1.$$

Доказательство. Предположим, что

$$(1) \quad t_j t y_j < 1 \text{ при } 1 \leq j \leq n.$$

Докажем, что $t_{n+1} y_{n+1} = 1$. Пусть

$$(2) \quad z_j = \inf \check{t}_j [1] \text{ при } 1 \leq j \leq n+1.$$

Из (1) и (2) следует, что

$$(3) \quad t y_j < z_j \text{ при } 1 \leq j \leq n.$$

Так что, применяя \check{t} к обеим частям неравенства (3), получаем

$$(4) \quad \check{t}(z_j) < y_j \text{ при } 1 \leq j \leq n.$$

Согласно определению элементов y_j и лемме 7.4.16, из (4) следует, что

(5) для всех j , $1 \leq j \leq n$, существует $J_j \in D$, такой, что

$$\check{t}(z_j) < \inf \{g_{J_j}(i) : i \in J_j\}.$$

Пусть $J = J_0 \cap J_1 \cap \dots \cap J_n$. Ясно, что $J \in D$. Если $i \in J$, то получаем, согласно (5) и условию леммы,

$$(6) \quad \max(t_1 t g_1(i), \dots, t_{n+1} t g_{n+1}(i)) = 1$$

и

$$(7) \quad \check{t}(z_j) < g_{J_j}(i) \text{ при } 1 \leq j \leq n.$$

Следовательно, применяя t к обеим частям неравенства (7), имеем

$$t g_{J_j}(i) < z_j \text{ при } 1 \leq j \leq n,$$

откуда получаем по определению z_j (см. (2)), что

$$t_j t g_{J_j}(1) < 1 \text{ при } 1 \leq j \leq n.$$

Согласно (6), это влечет $t_{n+1} t g_{n+1}(i) = 1$, следовательно,

$$\{i : t_{n+1} t g_{n+1}(i) = 1\} \in D,$$

и, учитывая (2), получаем

$$\{i : z_{n+1} \leq g_{n+1}(i)\} \in D.$$

Теперь, используя лемму 7.4.16, получаем

$$z_{n+1} \leq D\text{-inf } g_{n+1} = y_{n+1}.$$

Поэтому $t_{n+1} y_{n+1} = 1$, что и требовалось доказать.

Упражнение 7К. Предположим, что $\varphi \in \Gamma$ и для всех $i \in I$ выполняется $\varphi[A_i] = 1$. Тогда

$$\varphi[D\text{-prod } \lambda i A_i] = 1.$$

Класс $K \subseteq \mathcal{M}$ есть *условный класс*, если K представим как пересечение классов вида

$$\{A \in \mathcal{M}: \Phi[A] = 1\},$$

где Φ – условное высказывание. Отметим, что мы в данном случае не рассматриваем объединения конечного числа классов данного вида. Вместо произвольного замкнутого множества Y мы берем здесь множество $\{1\}$.

Как уже показано в упр. 7К, каждый условный класс K замкнут относительно операции взятия приведенного произведения элементов из K . Следующие леммы приводят к обращению этого результата.

Напомним (обозначение из разд. 1.1), что

$$S^a(I) = \{J: J \subseteq I \text{ и } |I \setminus J| < a\}.$$

Положим временно $R' = \prod_{i \in I} R_i$. Для $r \in (R')^\infty$ и $i \in I$ символом r^i обозначим функцию, определенную на $(R_i)^\infty$ и, такую, что

$$r^i(n) = r_n(i) \text{ при всех } n < \omega.$$

Мы примем то же обозначение и для произвольной последовательности $d \in R'^\omega$.

Лемма 7.4.21. Предположим, что $\|\mathcal{L}\| \leq a$, $a^+ = 2^a$, $|I| = a$, $\|A_i\| \leq a^+$ при всех $i \in I$ и что B – либо конечная, либо специальная модель мощности a^+ и, кроме того, для любого $\Phi \in \Gamma$ выполняется условие

если $\{i: \Phi[A_i] = 1\} \in S^a(I)$, то $\Phi[B] = 1$.

Тогда существует отображение h множества R' на множество S , такое, что для всякой условной формулы Φ и любого $r \in (R')^\infty$ выполняется условие

если $\{i: \Phi[A_i, r^i] = 1\} \in S^a(I)$, то $\Phi[B, h \circ r] = 1$.

Доказательство. Поскольку $2^a = a^+$, имеем $|R'| \leq a^+$. Пусть $a \in (R')^{a^+}$ и $b \in S^{a^+}$ – перечисления элементов R' и S соответственно. Наше доказательство дает возможность установить, что исходя из

условий теоремы, что $|R'| \geq \|B\|$, независимо от того, конечна ли модель B или имеет мощность α^+ , при условии, что она α^+ -насыщена. Мы строим две последовательности $d \in R^{\alpha^+}$, $e \in S^{\alpha^+}$, такие, что для всякого $\nu < \alpha^+$ выполняются следующие условия:

(1) если $\varphi \in \Gamma_{\nu+1}$ и $\{i: \varphi[(A_i, d^i \upharpoonright \nu + 1)] = 1\} \in S^\alpha(I)$,
то $\varphi[(B, e \upharpoonright \nu + 1)] = 1$;

(2) если η — предельный ординал, включая 0, то

при $\nu = \eta + 2n$ имеем $d_\nu = a_{\eta+n}$,

при $\nu = \eta + 2n + 1$ имеем $e_\nu = b_{\eta+n}$.

Пусть $\mu < \alpha^+$ и условия (1) и (2) выполнены для всех $\nu < \mu$. Тогда, очевидно, имеем

(3) если $\varphi \in \Gamma_\mu$ и $\{i: \varphi[(A_i, d^i \upharpoonright \mu)] = 1\} \in S^\alpha(I)$, то
 $\varphi[(B, e \upharpoonright \mu)] = 1$.

Предположим, что $\mu = \eta + 2n$. Положим $d_\mu = a_{\eta+n}$. Пусть

(4) $\Delta = \{\varphi \in \Pi_\mu^+: \{i: \varphi[(A_i, d^i \upharpoonright \mu), d_\mu(i)] = 1\} \in S^\alpha(I)\}$.

Покажем, что постоянная функция $1 \in X^\Delta$ есть элемент

$$\overline{\text{Th}^+((B, e \upharpoonright \mu)) \upharpoonright \Delta}.$$

Для этой цели рассмотрим $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \Delta$ и $I \in V \in \mathcal{P}$. Покажем, что

(5) существует $s_0 \in S$, такой, что $\varphi_j[(B, e \upharpoonright \mu), s_0] \in V$
при всех $1 \leq j \leq m$.

Пусть $\varphi = \min(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$. Имеем $\varphi \in \Gamma_\mu^+$ и $(\sup v_0) \varphi \in \Gamma_\mu$. Согласно (4),

$$\{i: \varphi[(A_i, d^i \upharpoonright \mu), d_\mu(i)] = 1\} \in S^\alpha(I),$$

и, следовательно,

$$\{i: (\sup v_0) \varphi[(A_i, d^i \upharpoonright \mu)] = 1\} \in S^\alpha(I),$$

откуда, согласно (3), имеем $(\sup v_0)\varphi[(B, e \upharpoonright \mu)] = 1$, а это означает, что

$$(6) \quad \sup \{\varphi[(B, e \upharpoonright \mu)], s]: s \in S\} = 1.$$

Условие (6), очевидно, влечет существование $s_0 \in S$, такого, что

$$\varphi[(B, e \upharpoonright \mu), s_0] \in V.$$

Это немедленно дает (5), откуда

$$1 \in \overline{\text{Th}^+(B, e \upharpoonright \mu) \upharpoonright \Delta}.$$

Поскольку модель B является α^+ -насыщенной, множество $\text{Th}^+(B, e \upharpoonright \mu)$ замкнуто, поэтому

$$1 \in \text{Th}^+(B, e \upharpoonright \mu) \upharpoonright \Delta.$$

Выберем теперь $e_\mu \in S$ так, что

$$\varphi[(B, e \upharpoonright \mu), e_\mu] = 1 \quad \text{при всех } \varphi \in \Delta.$$

При таком выборе e_μ , очевидно, условие (1) сохраняется при замене $v + 1$ на μ .

Предположим затем, что $\mu = \eta + 2n + 1$. Положим $e_\mu = b_{\eta+n}$. Пусть

$$\Delta = \{\varphi \in \Gamma_\mu^+: \varphi[(B, e \upharpoonright \mu), e_\mu] \neq 1\}.$$

Следовательно,

$$(i \models v_0)\varphi[(B, e \upharpoonright \mu)] \neq 1 \quad \text{для любого } \varphi \in \Delta.$$

Поскольку $(\inf v_0)\varphi \in \Gamma_\mu$, это влечет, согласно (3), отношение

$$(7) \quad \{i: (\inf v_0)\varphi[(A_i, d^i \upharpoonright \mu)] = 1\} \not\subseteq S^\alpha(I).$$

Для любого $\varphi \in \Delta$ положим

$$I_\varphi = \{i: (\inf v_0)\varphi[(A_i, d^i \upharpoonright \mu)] = 1\}.$$

Согласно (7), имеем

$$|I_\varphi| = \alpha \quad \text{при всех } \varphi \in \Delta.$$

Так как $|\Delta| \leq a$, то можно применить лемму 5.4.5 и получить семейство подмножеств $\{J_\phi : \phi \in \Delta\}$ множества I , такое, что

$$J_\phi \subset I_\phi \quad \text{и} \quad |J_\phi| = a \quad \text{при всех } \phi \in \Delta$$

и

$$J_\phi \cap J_\psi = \emptyset, \quad \text{если } \phi \neq \psi.$$

Пусть $\phi \in \Delta$ и $i \in J_\phi$. Тогда $i \in I_\phi$, а это означает, что

$$(\inf v_0)_\phi [(A_i, d^i \upharpoonright \mu)] \neq 1.$$

Поэтому существует $r_i \in R_i$, такой, что

$$\phi [(A_i, d^i \upharpoonright \mu), r_i] \neq 1.$$

Определим теперь d_μ следующим образом:

$$d_\mu(i) = r_i, \quad \text{если } \phi \in \Delta \quad \text{и} \quad i \in J_\phi,$$

$d_\mu(i)$ произвольно в остальных случаях.

Заметим, что, поскольку множества J_ϕ дизъюнктны, функция d_μ определена корректно. Далее, для так определенной функции d_μ выполняется (1) (при подстановке μ вместо v). Таким образом, индукция завершена. Искомое отображение h задается теперь равенством $h(d_\mu) = e_\mu$ при всяком $\mu < a^+$. Легко проверить, что функция h определена корректно и имеет множество R' своей областью определения, а S — множеством значений.

Л е м м а 7.4.22. *Примем условия предыдущей леммы. Тогда существует фильтр D над множеством I , такой, что*

$$D\text{-prod } \lambda i A_i \cong B.$$

Доказательство. Предположим, что функция h , удовлетворяющая заключению леммы 7.4.21, построена. Определим для любых $\phi \in \Lambda$, $r \in (R')^\infty$ и $y \in X$, удовлетворяющих условию

$$y < \phi[B, h \circ r],$$

множество

$$I(\phi, r, y) = \{i : \phi[A_i, r^i] > y\}.$$

Пусть

$E = \{I(\varphi, r, y) : \varphi, r, y \text{ удовлетворяют указанному выше условию}\}.$

Докажем, что

(1) пересечение конечного числа элементов множества E не пусто.

Пусть $J_1 = I(\varphi_1, r_1, y_1), \dots, J_n = I(\varphi_n, r_n, y_n) \in E$. Мы можем считать, что формулы φ_j выбраны таким образом, что $r = r_1 = r_2 = \dots = r_n$. Это следует из простейших свойств операции подстановки. Далее, поскольку

$$y_j < \varphi_j[B, h \circ r] \text{ при } 1 \leq j \leq n,$$

имеем

$$t\varphi_j[B, h \circ r] < ty_j \text{ при } 1 \leq j \leq n.$$

Определим для всякого j , $1 \leq j \leq n$, функцию $t_j \in \mathcal{H}$, такую, что

$$(2) \quad t_j t\varphi_j[b, h \circ r] \neq 1 \text{ и } t_j t y_j = 1.$$

Рассмотрим теперь условную формулу

$$\varphi = \max(t_1 t\varphi_1, \dots, t_n t\varphi_n).$$

Если $i \notin J_j$, то $\varphi_j[A_i, r^i] \leq y_j$. Поэтому $t y_j \leq t\varphi_j[A_i, r^i]$, так что $t_j t\varphi_j[A_i, r^i] = 1$. Следовательно,

$$\text{если } i \in \bar{J}_1 \cup \dots \cup \bar{J}_n, \text{ то } \varphi[A_i, r^i] = 1.$$

Если $|J_1 \cap \dots \cap J_n| < a$, то $\bar{J}_1 \cup \dots \cup \bar{J}_n \in S^a(I)$ и, согласно определению функции h , имело бы место равенство $\varphi[B, h \circ r] = 1$. Последнее означало бы, что

$$(3) \quad t_j t\varphi_j[B, h \circ r] = 1 \text{ при некотором } j, 1 \leq j \leq n,$$

а это в силу (2) оказывается невозможным. Таким образом, $|J_1 \cap \dots \cap J_n| = a$ и условие (1) доказано.

Пусть D — фильтр над I , порождаемый множеством E , и пусть $A = D\text{-prod} \lambda i A_i$. Докажем, что $A \cong B$. В дальнейшем мы будем считать, что тождество \equiv входит в число символов P_η , $\eta < \pi$. Пусть

$\eta < \pi$, $n = \tau(\eta)$, $g_1, \dots, g_n \in R'$ и

$$\begin{aligned} x &= D\text{-inf } \lambda i \mathcal{A}_i(P_\eta)(g_1(i), \dots, g_n(i)), \\ y &= \mathcal{B}(P_\eta)(hg_1, \dots, hg_n). \end{aligned}$$

Нам достаточно установить, что $x = y$. Если $x < y$, то

$$(4) \quad \inf \{\mathcal{A}_i(P_\eta)(g_1(i), \dots, g_n(i)): i \in J\} \leq x \quad \text{для всех } J \in D.$$

Предположим сначала, что существует $z \in X$, такой, что $x < z < y$. Положим

$$J_0 = I(P_\eta(v_1, \dots, v_n), r, z),$$

где

$$r_j = g_j \quad \text{при } 1 \leq j \leq n.$$

Поскольку $J_0 \in D$, согласно (4) и определению множества J_0 , имеем

$$z \leq \inf \{\mathcal{A}_i(P_\eta)(g_1(i), \dots, g_n(i)): i \in J_0\} \leq x,$$

что является противоречием. Затем предположим, что

$$(5) \quad x < z < y \text{ не выполняется ни для одного } z \in X.$$

Положим

$$J_1 = I(P_\eta(v_1, \dots, v_n), r, x).$$

Согласно (5), имеем

$$x < y \leq \inf \{\mathcal{A}_i(P_\eta)(g_1(i), \dots, g_n(i)): i \in J_1\},$$

что противоречит определению x . Итак, предположим, что $y < x$. Тогда существует $J \in D$, такой, что

$$y < \inf \{\mathcal{A}_i(P_\eta)(g_1(i), \dots, g_n(i)): i \in J\} \leq x.$$

Обозначим выражение, стоящее в середине двойного неравенства, через z . Так как $J \in D$, а фильтр D порожден множеством E , существуют $J_1, \dots, J_n \in E$, такие, что

$$J_1 \cap \dots \cap J_n \subset J.$$

Мы можем считать, что существуют $r \in R'^\infty$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \Lambda$ и $y_1, \dots, y_n \in X$, такие, что при

$1 \leq j \leq n$ имеют место соотношения

$$(6) \quad \begin{cases} y_j < \varphi_j[B, h \circ r], \\ J_j = I(\varphi_j, r, y_j), \\ r_j = g_j. \end{cases}$$

Согласно (6), для каждого фиксированного j имеем

$$t\varphi_j[B, h \circ r] < ty_j.$$

Выберем $t_j \in \mathcal{H}$ так, что

$$(7) \quad t_j t\varphi_j[B, h \circ r] \neq 1 \quad \text{и} \quad t_j t y_j = 1.$$

Пусть $\varphi_{n+1} = P_\eta(v_1, \dots, v_n)$ и $t_{n+1} \in \mathcal{H}$ таков, что

$$(8) \quad t_{n+1} y \neq 1 \quad \text{и} \quad t_{n+1} z = 1.$$

Пусть также $\varphi = \max(t_1 t\varphi_1, \dots, t_n t\varphi_n, t_{n+1} \varphi_{n+1})$. Ясно, что φ — условная формула. Легко проверить, что

$$\{i: \varphi[A_i, r^i] = 1\} \supset J \cup \bar{J}_1 \cup \dots \cup \bar{J}_n \supset I.$$

Следовательно, $\varphi[B, h \circ r] = 1$. Это, однако, невозможно ввиду (7) и (8). Итак, $x = y$, и лемма доказана.

Следующая теорема представляет основной результат настоящего раздела. Для ее доказательства требуется обобщенная континуум-гипотеза.

Теорема 7.4.23. *Примем обобщенную континуум-гипотезу. Пусть $K \subseteq EC_\Delta$. Тогда K есть условный класс в том и только том случае, когда K замкнут относительно приведенных произведений.*

Доказательство. Как уже отмечалось ранее, если K условный класс, то, как следует из упр. 7К, класс K замкнут относительно приведенных произведений. Предположим теперь, что класс K замкнут относительно приведенных произведений. Пусть

$$\Delta = \{\varphi \in \Gamma: \varphi[A] = 1 \quad \text{для всех } A \in K\}.$$

Прежде всего обратим внимание на то, что, поскольку $\psi = (\sup v_0) t(v_0 \equiv v_0) \in \Gamma$ при $\Delta = \Gamma$, имеем $K = 0$ и

$$K = \{A \in \mathcal{M}: \psi[A] = 1\}.$$

Поэтому предположим, что $\Gamma \setminus \Delta \neq 0$. Пусть

$$L = \{A \in \mathcal{M}: \varphi[A] = 1 \text{ для всех } \varphi \in \Delta\}.$$

Докажем, что $K = L$. Ясно, что $K \subset L$. Пусть $B \in L$. Согласно теореме Лёвенгейма – Сколема о повышении мощности, мы можем считать, что

(1) модель B либо конечная, либо специальная мощности α^+ , причем $\|\mathcal{L}\| \leq \alpha$.

Затем для каждого $\varphi \in \Gamma \setminus \Delta$ применим теорему Лёвенгейма – Сколема о понижении мощности и найдем $A_\varphi \in \mathcal{M}$, такой, что

$$(2) \quad A_\varphi \in K, \quad \varphi[A_\varphi] \neq 1 \quad \text{и} \quad \|A_\varphi\| \leq \alpha^+.$$

Пусть $I = (\Gamma \setminus \Delta) \times \alpha$. Для всех $i = \langle \varphi, v \rangle \in I$ положим

$$A_i = A_\varphi.$$

Заметим, что

$$(3) \quad |I| = \alpha \text{ и если } \varphi \in \Gamma \text{ и } \{i: \varphi[A] = 1\} \in S^\alpha(I), \text{ то} \\ \varphi[B] = 1.$$

Поскольку выполняются условия (1), (2) и (3), можно применить лемму 7.4.22, откуда

$$B \cong D\text{-prod } \lambda i A_i, \text{ где } D \text{ – некоторый фильтр над } I.$$

Так как класс K замкнут относительно приведенных произведений, $D\text{-prod } \lambda i A_i \in K$ и, поскольку $K \in EC_\Delta$, получаем $B \in K$. Таким образом, $L \subset K$, и теорема доказана.

*Упражнение 7L**. Примем обобщенную континуум-гипотезу. Пусть $K \in EC_\Delta$. Докажите или опровергните следующее утверждение: K можно представить в виде пересечения совокупности классов, каждый из которых есть объединение конечного числа классов вида

$$\{A \in \mathcal{M}: \varphi[A] = 1\},$$

где $\varphi \in \Gamma$, тогда и только тогда, когда класс K замкнут относительно приведенных степеней.

Исторические замечания

Обширную библиографию работ по теории моделей можно найти в Трудах симпозиума по теории моделей (Беркли).

Глава I

1.2. Теорема о том, что всякий фильтр может быть дополнен до ультрафильтра, принадлежит Тарскому [1930]. Регулярные и однородные ультрафильтры рассматривались уже в ранних работах, посвященных теории моделей (см., например, Морель, Скотт и Тарский [1958], Фрейн, Морель и Скотт [1962]). Понятие D -произведения множеств и моделей (см. главу V) восходит к Сколему [1934], использовавшего его в построении нестандартной модели арифметики¹⁾. Позднее та же конструкция была применена Хьюиттом [1948] в отношении вещественно замкнутых полей и в более общем виде — Лосем [1955]. Употребляемая в книге формулировка понятия D -произведения множеств, а также леммы 1.2.1, 1.2.2 и утверждения из упражнений 1Е, 1F, 1G, 1H по существу содержатся в работе Фрейна, Мореля и Скотта [1962], где также можно найти более полный исторический обзор. В упражнениях 1B, 1C, 1I, 1K указываются некоторые частные случаи результатов Кейслера [1964b].

1.3. Определение топологии \mathcal{P}^* на множество X^* принадлежит Вьеторису [1923].

1.5. Понятие D -предела близко к понятию сходимости по Муру — Смиту (см. Келли [1955]) и к понятию сходимости фильтра (см. Бурбаки [1953]). Краткое рассмотрение связи между понятиями D -предела и сходимости по Муру — Смиту см. в работе Гильдебранда [1963]. Теорема 1.5.8 принадлежит Вьеторису [1923].

1) В отечественных работах по общей топологии понятие фильтра (ультрафильтра) в форме метода центрированных систем широко использовалось, в частности, для построения расширений и абсолютов топологических пространств; см., например, работы С. В. Фомина, В. И. Пономарева и С. Д. Илиадиса. — Прим. ред.

Глава II

2.3. Полное исследование двузначной логики см. в книге Чёрча [1956]. Понятия, введенные в 2.1 и 2.2, возникли в связи с соответствующими понятиями в двузначной логике.

2.5. Пример 2.5.2 принадлежит Лукасевичу (Лукасевич и Тарский [1930]). О развитии теории синтаксиса и теории моделей для указанной в этом примере логики см. следующие работы: Вайсберг [1935], Роуз и Россер [1958], Чэн [1959а], Ратледж [1959], Чэн [1961], Скарпеллини [1962], Беллюс и Чэн [1963], Хей [1963] и Беллюс [1964]. Некоторые приложения этой логики найдены Сколемом [1957], Скарпеллини [1963] и Чэном [1963а, 1965]. Укажем также несколько работ, содержащих результаты о многозначных логиках, для которых значения истинности берутся в некоторых других пространствах: Пост [1921], Россер и Турк [1952], Клини [1952], Мостовский [1961], Чэн и Кейслер [1962], Мостовский [1963], Чэн [1963], Расёва и Сикорский [1963], Мостовский [1964].

Алгебра Линденбаума, упоминаемая в упр. 2D, рассматривается в работе Тарского [1956]. Алгебра Брауэра и интерпретация интуиционистской логики обсуждаются, например, в книге Рассёвой и Сикорского [1963].

Глава III

Большинство основных понятий теории моделей для случая классической логики *l* введены Тарским [1935, 1956]. Значительное развитие в этой области началось с работ Генкина [1949], Робинсона [1951] и Тарского [1952]. Метод, использующий расширение модели *A* до модели (A, a) и называемый методом диаграмм, введен Робинсоном [1951] и Генкиным [1953].

Используемое нами понятие замкнутой теории соответствует обычному понятию дедуктивно замкнутой теории в двузначной логике; понятие теории, как оно используется в нашей работе, соответствует в двузначной логике множеству полных теорий.

В замечаниях, касающихся остальных глав, при указании на тот или иной результат или упражнение мы всегда имеем в виду только частный случай, получающийся из них для двузначной логики.

Глава IV

4.1. Обобщенные теории моделей *A* для случая двузначной логики могут рассматриваться как множества типов эквивалентности элементов *A* относительно полных теорий. Обобщенные теории рассматривались, например, в работах Боота [1961] и Морли [1963].

4.2. Понятие элементарного расширения моделей дано Тарским (см Тарский и Боот [1957]); большинство результатов из разд. 4.2 и 4.3 представляют собой обобщения результатов из

этой работы. Теорема Лёвенгейма — Сколема о понижении мощности, доказанная в работе Тарского и Воота [1957], является общением теоремы Сколема [1920], которая в свою очередь является улучшением результата, полученного Лёвенгеймом [1915]. Вообще теорема Лёвенгейма считается первым результатом в теории моделей.

Глава V

5.1. Основная лемма (лемма 5.1.4) была сформулирована Лосем [1955] и доказана в работе Фрейна, Мореля и Скотта [1962]. Результат, указанный в упр. 5С, принадлежит Фрейну и также изложен в работе Фрейна, Мореля и Скотта [1962].

5.2. Теорема о компактности (теорема 5.2.2) доказана Гёдем [1930] для логик со счетными типами подобия и Мальцевым [1936] для несчетных типов подобия. Доказательство, использующее ультрапроизведения, дано в работе Мореля, Скотта и Тарского [1958] и представлено также в работе Фрейна, Мореля и Скотта [1962]. Для случая пространства значений истинности $[0, 1]$ теорема доказана Чэном [1961]; для компактных хаусдорфовых пространств — Чэном и Кейслером [1962]; Мостовский [1963] дал доказательство теоремы из работы Чэя и Кейслера [1962], не использующее ультрапроизведений.

5.3. Теорема 5.3.1 доказана в работе Фрейна, Мореля и Скотта [1962]; то же относится к результатам, упоминаемым в упр. 4G, 5H, 5I.1. Исторические замечания, связанные с теоремой Лёвенгейма — Сколема о повышении мощности, имеются в работе Воота [1954], см. также работу Тарского и Воота [1957]. Результат упр. 5K можно найти у Воота [1954] и Лося [1955]. Упражнение 5L основывается на результатах, содержащихся в работе Ханфа [1962]; ординал β , упоминаемый в этом упражнении, иногда называют числом Ханфа рассматриваемой логики.

5.4. Понятия и результаты этого раздела заимствованы из Кейслера [1964a].

5.5. Теорема 5.5.4 принадлежит Кейслеру [1964].

Глава VI

6.1. Относительно весьма запутанного вопроса о происхождении понятия α -насыщенной модели см. работу Морли и Воота [1962], где авторы рассматривают близкое понятие однородной универсальной модели (см. также Йонсон [1960]). Теоремы 6.1.7 и 6.1.19 по существу содержатся в работе Морли и Воота [1962].

6.2. Специальные модели впервые введены в работе Морли и Воота [1962]. Наше определение специальной модели эквивалентно определению, данному в этой работе, но проще по форме. Теорема 6.2.9 также содержится в этой работе.

6.3. Понятие универсальной модели можно найти в той же работе Морли и Вootа [1962]. В нашем изложении мы следуем этой работе.

6.4. Теорема 6.4.1 изложена в работе Морли и Вootа [1962]. Упражнения 6P и 6Q близко связаны с характеристикой элементарных классов, использующей понятие предела ультрастепеней (см., например, Кейслер [1963]). Упражнение 6R является по существу теоремой из работы Шпеккера [1962]. В упр. 6S указывается результат о непротиворечивости, содержащийся в работе Робинсона [1956]. Упражнение 6T представляет собой теорему об отделимости Крейга [1957]. Уместно упомянуть также более раннюю работу Бета [1953].

6.5. В этом разделе мы следуем изложению, данному в работе Кейслера [1961]. Теорема 6.5.1 для случая пространства значений $[0, 1]$ сформулирована в работе Чэна [1961] и для случая непрерывных логик — в работе Чэна и Кейслера [1962].

Глава VII

Ссылки к основным результатам для этой главы даны в ее начале. Некоторые из результатов для случая пространства значений $[0, 1]$ сформулированы в работе Чэна [1961].

7.2. Отдельные части утверждения из упр. 7F доказаны в работах Лося и Сушко [1957], Чэна [1959], Робинсона [1959] и Кейслера [1960]. Результаты из упр. 7I можно найти в работе Кейслера [1960].

7.4. Понятие приведенного произведения можно найти в работах Лося [1955] и Фрейна, Мореля и Скотта [1962]. Весьма специальная конструкция приведенных произведений использовалась в работе Чэна и Мореля [1958]. Хори [1951] первым обнаружил, что условные высказывания инвариантны относительно прямых произведений; Чэн показал, что это остается верным и для приведенных произведений. В работе Чэна и Мореля [1958] показано, что не все высказывания, инвариантные относительно прямых произведений, эквивалентны условным высказываниям.

Литература

Беллюс (Belluce L. P.)

1964. Further results on infinite valued predicate logic, *J. Symbolic Logic*, 29, 69—78.

Беллюс и Чэн (Belluce L. P., Chang C. C.)

1963. A weak completeness theorem for infinite valued predicate logic, *J. Symbolic Logic*, 28, 43—50.

Бет (Beth E. W.)

1953. On padoa's method in the theory of definition, *Indag. Math.*, 56, 330—339.

Бурбаки (Bourbaki N.)

1953. *Topologie générale*, Paris. (Русский перевод: Бурбаки Н., Общая топология, Физматгиз, 1958.).

Вайсберг (Wajsberg M.)

1935. Beiträge zum Metaaussagenkalkül I, *Monatsh. Math. Physik*, 42, 221—242.

Воот (Vaught R.)

1954. Application of the Löwenheim — Skolem — Tarski theorem to problems of completeness and decidability, *Indag. Math.*, 16, 467—472.

1961. Denumerable models of complete theories, Infinitistic Methods, Warszaw, 303—321.

1963. Models of complete theories, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69, 299—313.

Вьеторис (Vietoris L.)

1923. Bereiche zweiter Ordnung, *Monatsh. Math. Physik*, 33, 49—62.

Генкин (Henkin L.)

1949. The completeness of the first-order functional calculus, *J. Symbolic Logic*, 14, 105—166.

1953. Some interconnection between modern algebra and mathematical logic, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74, 410—427.

Гёдель (Gödel K.)

1930. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatsh. Math. Physik*, 37, 349—360.

Гильдебрандт (Hildebrandt T. H.)

1963. Introduction to the theory of integration, New York.

Йонссон (Jónsson B.)

1960. Homogeneous universal relational systems, *Math. Scand.*, 8, 137—142.

Кейслер (Keisler H. J.)

1960. Theory of models with generalized atomic formulas, *J. Symbolic Logic*, 25, 1—26.
1961. Ultraproducts and elementary classes, *Indag. Math.*, 23, 477—495.
1963. Limit ultrapowers, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 107, 382—408.
1964. Ultraproducts and saturated models, *Indag. Math.*, 26, 178—186.
- 1964a. Good ideals in fields of sets, *Ann. Math.*, 79, 338—359.
- 1964b. On cardinalities of ultraproducts, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 70, 643—646.
1965. Reduced products and Horn classes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 117, 307—328.
- 1965a. A survey of ultraproducts, Proc. of 1964 Int. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Jerusalem, 112—126.

Келли (Kelley J. L.)

1955. General topology, Princeton. (Русский перевод: Келли Дж., Общая топология, «Наука», 1968.)

Клини (Kleene S. C.)

1952. Introduction to metamathematics, Princeton. (Русский перевод: Клини С. Введение в метаматематику, ИЛ, 1957.)

Крейг (Craig W.)

1957. Three uses of the Herbrand—Gentzen theorem in relating model theory and proof theory, *J. Symbolic Logic*, 22, 269—285.

Лёвенгейм (Löwenheim L.)

1915. Über Möglichkeiten in Relativkalkül, *Math. Ann.*, 76, 447—470.

Линдон (Lyndon R. C.)

1959. Properties preserved under homomorphism, *Pacific J. Math.*, 9, 143—154.

Лось (Łoś J.)

1955. Quelques remarques, théorèmes, et problèmes sur les classes définissables d'algèbres, Mathematical interpretation of formal systems, Amsterdam, 98—113.

- 1955a. On the categoricity in power of elementary deductive systems and some related problems, *Coll. Math.*, 3; 58—62.

- 1955b. On the extending of models, I, *Fund. Math.*, 42, 38—54.

Лось и Сушко (Łoś J., Suszko R.)

1957. On the extending of models, IV, *Fund. Math.*, 44, 52—60.

Лукасевич и Тарский (Łukasiewicz J., Tarski A.)

1930. Untersuchungen über den Aussagenkalkül, *Soc. Sci. Lett. Varsovie, C. R.*, Cl. III, 23, 30—50.

Мальцев А. И.

1936. Untersuchungen aus dem Gebiete der mathematischen Logik, *Матем. сб.*, 1 (43) (1936), 323—326.

Морель, Скотт и Тарский (Morel A. C., Scott D., Tarski A.)

1958. Reduced products and the compactness theorem, *Notices Amer. Math. Soc.*, 5, 674—675.

Морли (Morley M.)

1963. On theories categorical in uncountable powers, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 49, 213—216.

Морли и Воут (Morley M., Vaught R.)

1962. Homogeneous universal models, *Math. Scand.*, 11, 37—57.

Мостовский (Mostowski A.)

1961. Axiomatizability of some many valued predicate calculi, *Fund. Math.*, 50, 165—190.

1963. The Hilbert epsilon function in many-valued logics. Modal and many-valued logics, *Acta Philosophica Fennica*, Fasc. XVI, 169—188.

1964. An example of a non-axiomatizable many-valued logic, *Z. Math. Logik*, 7, 72—76.

Пост (Post E. L.)

1921. Introduction to a general theory of elementary propositions, *Amer. J. Math.*, 43, 163—185.

Расёва и Сикорский (Rasiowa H., Sikorski R.)

1963. The mathematics of metamathematics, Warszaw.

Ратледж (Rutledge J. D.)

1959. A preliminary investigation of the infinitely many-valued predicate calculus, Ph. D. thesis, Cornell.

Робинсон (Robinson A.)

1951. On the metamathematics of algebra, Amsterdam.

1956. A result on consistency and its applications to the theory of definition, *Indag. Math.*, 18, 47—58.

1959. Obstructions to arithmetical extensions and the theorem of Łoś and Suszko, *Indag. Math.*, 21, 489—495.

1963. Introduction to model theory and to the metamathematics of algebra, Amsterdam. (Русский перевод: Робинсон А., Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры, «Наука», 1967.)

Россер и Туркье (Rosser J. B., Turquette A. R.)

1952. Many-valued logics, Amsterdam.

Роуз и Россер (Rose A., Rosser J. B.)

1958. Fragments of many-valued statement calculi, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 87, 1—53.

Скарпеллини (Scarpellini B.)

1962. Die Nichtaxiomatisierbarkeit des unendlichwertigen Prädikatenkalküls von Łukasiewicz, *J. Symb. Logic*, 27, 159—170.

1963. Eine Anwendung der unendlichwertigen Logik auf topologische Räume, *Fund. Math.*, 52, 129—150.

Скolem (Skolem T.)

1920. Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematische Sätze nebst einem Theoreme über dichte Mengen, *Videnskapsselskapet Skrifter I, Mat. Klasse*, № 4.

1934. Über die Nicht-Charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen, *Fund. Math.*, 23, 150—161.

1957. Mengenlehre gegründet auf einer Logik mit unendlich vielen Wahrheitswerten, *S.-B. Berlin Math. Ges.*, 41—56.

Тарский (Tarski A.)

1930. Une contribution à la théorie de la mesure, *Fund. Math.*, 15, 14—20.
 1935. Grundzüge des Systemkalküls, I, II, *Fund. Math.*, 25, 503—526; 26, 283—300.
 1952. Some notions and methods on the borderline of algebra and metamathematics, Proc. of 1950 Int. Congress of Mathematicians, 705—720.
 1954. Contributions to the theory of models, *Indag. Math.*, 16, 572—588.
 1956. Logic, Semantics, Metamathematics, Oxford.

Тарский и Воот (Tarski A., Vaught R.)

1957. Arithmetical extensions of relational system, *Compositio Math.*, 13, 81—102.

Фрейн, Морель и Скотт (Frayne T., Morel A. C., Scott D.)

1962. Reduced direct products, *Fund. Math.*, 51, 195—228.

Ханф (Hahn W.)

1962. Some fundamental problems concerning languages with infinitely long expressions, Ph. D. thesis, University of California, Berkeley.

Хей (Hay L. S.)

1963. Axiomatization of the infinite-valued predicate calculus, *J. Symbolic Logic*, 28, 77—86.

Хори (Horn A.)

1951. On sentences which are true of direct unions of algebras, *J. Symbolic Logic*, 16, 14—21.

Хьюитт (Hewitt E.)

1948. Rings of real-valued continuous functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64, 45—99.

Чёрч (Church A.)

1956. Introduction to mathematical logic, vol. 1, Princeton.
 (Русский перевод: Чёрч А., Введение в математическую логику, том I, ИЛ, 1960)

Чэн (Chang C. C.)

1959. On unions of chains of models, *Proc. Amer. Math. Soc.* 10, 120—127.
 1959a. A new proof of the completeness of the Łukasiewicz axioms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93, 74—80.
 1961. Theory of models of infinite valued logics, I—IV, Abstracts, *Notices of Amer. Math. Soc.*, 8, 68, 141.
 1963. Logic with positive and negative truth values, Modal and many-valued logics, *Acta Philosophica Fennica*, Fasc. XVI, 19—39.
 1963a. The axiom of comprehension in finite valued logic, *Math. Scand.*, 13, 9—30.
 1965. Infinite valued logic as a basis for set theory, Proc. of 1964 Int. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, Jerusalem, 93—100.

- Чэн и Кейслер (Chang C. C., Keisler H. J.)
1962. Model theories with truth values in a uniform space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 68, 107—109.
- Чэн и Морель (Chang C. C., Morel A. C.)
1958. On closure under direct product, *J. Symbolic Logic*, 23, 149—153.
- Шпеккер (Specker E.)
1962. Typical ambiguity, Proc. of 1960 Int. Congress for Logic, Methodology and Philosophy of Science, 116—124.

Предметный указатель

- Алгебра Брауэра 44
— Лиденбаума 44
Атомарная формула 34
- Базис открытых (замкнутых) множеств в пространстве X 21
Базисные открытые (замкнутые) множества 19
Базисный элементарный класс 67
Булево пространство 46
Вхождение в формулу 35
Выделенные значения 31
— элементы модели 56
Высказывание 35
- Главный фильтр 14
Гомоморфизм 58
Гомоморфные модели 58
Гомоморфный образ 59
- Двойственная логика 32
Дизъюнктная функция 98
Дизъюнкция 36
Дуга 48
- Естественное вложение 92
- Замкнутая теория 65
Замкнутое отношение 23
Замыкание относительно композиции (подстановки) 19
— теории 65
Значение истинности 60
— терма 60
- Изоморфизм 58
Изоморфная вложимость 58
Изоморфные модели 58
Изоморфный образ 58
Интуиционистская логика высказываний 45
- Квантор всеобщности 36
— существования 36
Кванторы 31
Классическая вещественно-значная логика 41
— двузначная логика 36
— — — логика высказываний 44
Класс, замкнутый относительно ультрапроизведений 90
— — — ультрастепеней 127
Конъюнктивное множество 37
Конъюнкция 36
- Максимальный фильтр 14
Множество, замкнутое относительно D -пределов 30
— элементов модели 56
- Модель 56
— теории Θ 66
— формулы φ 61
Монотонная функция 95
Мощность логики \mathcal{L} 31
— модели 57
- Мультипликативная функция 96
Мультипликативное множество 98
- Неподвижная точка непрерывности 22
Непрерывная логика 31
Непротиворечивая теория 68
Нетривиальная дуга 48
Нижний D -предел 155
Нормальное пространство 19
- Обобщенная теория 72
Объединение цепи моделей 58
Однородный ультрафильтр 15
Определяющая цепь 113
Открытая теория 65
Открытое отношение 22
Отрицание 36

- Переменная 32
 Перечисление множества 13
 Подмодель 57
 — порожденная множеством 57
 Позитивная формула 144
 Позитивно-экзистенциальная формула 150
 — экзистенциальный класс 150
 Позитивный класс 149
 Полная теория 68
 Приведенная степень множества 16
 — — модели 157
 Приведенное произведение множеств 16
 — — моделей 157
 Примитивно условная формула 158
 Пространство значений логики 31
 — — модели 56
 Противоречивая теория 68
- Равенство 34
 Расширение модели 57
 Расширенная теория,
 см. Обобщенная теория
 Регулярный фильтр 13
- Свободная переменная 35
 Связки 31—
 Сечение модели 59
 Символ предиката 32
 — тождественного равенства 32
 Символы констант 32
 Сингулярное замкнутое (открытое) множество 21—22
 Сингулярный элементарный класс 67
 Слабо регулярный ультрафильтр 14
 — специальная модель 116
 — а-насыщенная модель 113
 Смещающее множество 37
 — — для H 37
 Специальная модель 113
 Счетно неполный ультрафильтр 18
- Теория класса K 66
 Терм 60
 Тип относительно изоморфизма 58
 — подобия 31
 — — логики 31
 — — модели 56
 Тождественная функция 36
- Ультрапроизведение множеств 16
 — моделей 86
 Ультрастепень множества 16
 — модели 88
 Ультрафильтр 14
 Универсальная формула 142
 Универсально-экзистенциальная формула 142
 Универсально-экзистенциальный класс 142
 Упорядочение логики 31
 — отношением H 22
 Урысона лемма 19
 Условная формула 159
 Условный класс 161
- Фильтр 13
 Формула 33
 — ϕ выполняется в модели 61
 — — — — на последовательности 61
 — — истинна в модели 61
 Функция значений истинности модели 66
 — сохраняющая отношение H 22
 — — — H^* 23
- Цепь моделей 58
- Экзистенциальная формула 134
 Экзистенциальное множество 38
 Экзистенциальный класс 139
 Элемент модели 56
 Элементарная вложимость 79
 — подмодель 78
 — теория 65
 — топология 67
 — цепь 79

- Элементарно замкнутый класс 38
 — 67
 — эквивалентные модели 67
 — α -универсальная модель 117
 Элементарный класс 67
- D -предел 25
 D^* -предел 28
 D -произведение множеств 15
 — моделей 86
 D -степень множества 16
 — модели 88
- e -множество 38
 H -множество 37
 k -множество 37
 K -непротиворечивая теория 68
 K -полная теория 68
 K -противоречивая теория 68
 t -множество 37
- α -насыщенная модель 105
 α -правильный ультрафильтр 96
 α -универсальная модель 117

Указатель упражнений

Раздел	Упражнение		
		5.1	5A – 5D
		5.2	5E – 5F
1.2	1A – 1K	5.3	5G – 5L
1.4	1L – 1N	5.4	5M – 5O
		5.5	5P
2.2	2A		
2.4	2B	6.1	6A – 6G
2.5	2C – 2F	6.2	6H – 6L
		6.3	6M – 6O
3.2	3A – 3O	6.4	6P – 6V
3.3	3P – 3Q	6.7	6W – 6X
4.1	4A	7.2	7A – 7G
4.2	4B – 4D	7.3	7H – 7I
4.3	4E – 4I	7.4	7J – 7L

Указатель обозначений

Стр. 11	$v + \mu$	Стр. 31	\mathcal{L}
	a^+		$(\langle \tau, \kappa \rangle, X, \mathcal{F}, 0, 1, H)$
12	a^β	32	$\ \mathcal{L}\ $
	$cf(a)$		v_n
	a^*		P_ξ
	$ X $		c_ζ
	$S(X)$		\equiv
	X^*		$\mathcal{L}(\mathcal{G})$
	$S_a(X)$		$\mathcal{L}(\mu)$
	$S^a(X)$	34	Φ
	\mathcal{D}		Λ
	\mathcal{R}		$\mathcal{G}(\Delta)$
	\dot{H}		$\mathcal{G}_\varphi(\Delta)$
	$G \circ H$		Φ_φ
	$H[Y]$		Λ_φ
13	$(\lambda x \in X) (\dots x \dots)$	35	$v(\varphi)$
	$f: X \rightarrow Y$		Σ
	$f Y$		Σ_φ
	$\prod_{i \in I} Y_i$	36	id
13	X^Y		\sqcap
	X^n		$\&$
	X^∞		\wp
15	$\tilde{f} \sim g$	36	\exists
	\tilde{f}		\forall
	$D\text{-prod } \lambda i R_i$		l
16	$D\text{-prod } R$		\mathcal{F}_l
18	(X, \mathcal{P})	37	$l(1, 0, \dot{H})$
	\mathcal{P}_0	56	$A = (R, \mathcal{A})$
19	\overline{Y}	57	\mathcal{M}
	$\mathcal{C}(Y, Z)$		\mathcal{M}_φ
	\mathcal{C}_n		$\mathcal{A}(P_\eta)$
	\mathcal{C}		$\mathcal{A}(c_\zeta)$
20	(X^*, \mathcal{P}^*)		$\mathcal{B}(P_\eta)$
	Q		$\mathcal{B}(c_\zeta)$
21	(X^I, \mathcal{P}^I)		$B(S, \mathcal{B})$
22	$(X, 0, 1)$		$\ A\ $
23	H^*		$A \subset B$
	Q_{H^*}		$A \cong B$
26	$D\text{-lim } f$	58	$A = \bigcup_{\xi < v} A_\nu$
	$D\text{-lim } Y$		
28	$D\text{-lim } F$		

Стр. 58	AHB	Стр. 73	$\text{Th}^+(A) \uparrow \Psi$
59	$\mathcal{M}_{\mathcal{L}(\mu)}$		Ψ_h
	(A, a)	78	$A < B$
	(A, a_0)	86	$D\text{-prod } \lambda i A_i$
60	$\Phi[A, r]$	87	$D\text{-prod } F$
61	$\Phi[A]$	88	$D\text{-prod } B$
64	$\psi[(A, a), r]$	95	$f \leq g$
	$\Phi(c_{t_0}, \dots, c_{t_n})$	130	Ψ_h
65	$(X^\Sigma, \mathcal{G}^\Sigma)$	134	Γ, Γ^+
66	$[A]$	144	Π, Π^+
	$\text{Th}(K)$	151	$x \leq y$
	$\text{Th}(A)$		$x < y$
	$\text{Mod}(\Theta)$	152	\max
67	EC_s		\min
	EC	153	\inf
	EC_Δ		\sup
72	Σ^+	154	$D(g)$
	$\Phi[A, r_0]$	155	$D\text{-inf}(g)$
	$[A, r_0]$	157	$D\text{-prod } \lambda i A_i$
	$\text{Th}^+(A)$		$D\text{-prod } B$
		159	Γ, Γ^+

Оглавление

<i>Предисловие редактора перевода</i>	5
<i>Предисловие</i>	7
ГЛАВА I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТОПОЛОГИИ	
1.1. Обозначения	11
1.2. <i>D</i> -произведения	13
1.3. Компактные хаусдорфовы пространства	18
1.4. Упорядоченные пространства	22
1.5. <i>D</i> -пределы	25
ГЛАВА II. НЕПРЕРЫВНАЯ ЛОГИКА	31
2.1. Определение непрерывной логики	31
2.2. Формулы	33
2.3. Двузначная логика	36
2.4. Множества связок и кванторов	37
2.5. Примеры	41
2.6. Некоторые теоремы существования	45
ГЛАВА III. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ МОДЕЛЕЙ	56
3.1. Модели	56
3.2. Значения истинности	60
3.3. Элементарная топология	65
ГЛАВА IV. ЭЛЕМЕНТАРНО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ МОДЕЛИ	72
4.1. Обобщенная теория моделей	72
4.2. Элементарные расширения	78
4.3. Теорема Лёвенгейма – Скolem'a о понижении мощности	82
ГЛАВА V. УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯ МОДЕЛЕЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ	86
5.1. Основная лемма	86
5.2. Теорема о компактности	90
5.3. Теорема Лёвенгейма – Скolem'a о повышении мощности	92
5.4. Правильные ультрафильтры	95
5.5. Правильные ультрапроизведения	102

ГЛАВА VI. СПЕЦИАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ	108
6.1. Насыщенные модели	109
6.2. Существование специальных моделей	113
6.3. Универсальные модели	116
6.4. Единственность специальных моделей	121
6.5. Некоторые следствия обобщенной континуум-гипотезы	126
ГЛАВА VII. КЛАССЫ, ЗАМКНУТЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОТНОШЕНИЙ	129
7.1. Обобщенная теория моделей и отношение порядка .	130
7.2. Расширения моделей и экзистенциальные формулы	134
7.3. Гомоморфизмы и позитивные классы	143
7.4. Приведенные произведения и условные классы .	150
<i>Исторические замечания</i>	169
<i>Литература</i>	173
<i>Предметный указатель</i>	178
<i>Указатель упражнений</i>	180
<i>Указатель обозначений</i>	181

Г. Дж. Кейслер, Чэн Чен-чуань

ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ МОДЕЛЕЙ

Редактор В. Ф. Пахомов

Художник Г. И. Юдицкий Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор А. Г. Резоухова. Корректор Н. И. Баранова

Сдано в производство 5/VI 1970 г. Подписано к печати 15/XII 1970 г.
Бумага № 3 84×108^{1/32}=2,88 бум. л. 9,66 усл. печ. л. Уч.-изд. л. 7,68
Изд. № 1/5396. Цена 53 коп. Зак. 670

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Измайловский проспект, 29