

Ф. КЕМПФЕР

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ  
КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

# CONCEPTS IN QUANTUM MECHANICS

*F. A. KAEMPFER*

*Department of Physics  
The University of British Columbia  
Vancouver, Canada*

*1965*

ACADEMIC PRESS · NEW YORK AND LONDON

*Ф. Кемпфер*

# ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

*Перевод Ю. В. КОНОБЕЕВА и В. А. ПАВЛИНЧУКА*

*Под редакцией Д. А. КИРЖНИЦА*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

*Москва 1967*

Настоящий курс квантовой механики, в основе которого лежат лекции автора — канадского физика Кемпфера, значительно отличается от имеющихся учебников как способом изложения, так и отбором материала.

Цель автора состояла в том, чтобы изложить квантовую механику, с самого начала исходя из физических фактов и экспериментов, связанных с микромиром, а не путем постепенного перехода от классических понятий к квантовым (как это обычно делается).

В книге последовательно изложен широкий круг проблем теории квантованных полей и физики элементарных частиц, теории многих тел и квантовой статистики, обсуждаются многие принципиальные вопросы и понятия современной теоретической физики (понятие состояния, понятие частицы, законы сохранения, операции симметрии и т. д.).

Книга представляет интерес для широкого круга физиков — как специалистов теоретиков, так и экспериментаторов. Много полезного найдут здесь лекторы вузов, читающие курс квантовой механики. Книга будет ценным пособием для аспирантов и студентов старших курсов физических факультетов, специализирующихся по теоретической физике.

*Редакция литературы по физике*

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Книга канадского физика Ф. Кемпфера — не просто еще одно руководство по квантовой механике, а оригинально задуманный курс, существенно отличающийся от других книг на ту же тему как отбором материала, так и способом его изложения. Материал, изложенный в книге Кемпфера, далеко выходит за рамки стандартной квантовой механики и включает довольно широкий круг проблем теории квантованного поля и теории элементарных частиц, а также некоторые вопросы теории многих тел и квантовой статистики. Поэтому книгу правильнее было бы назвать курсом «квантовой физики» в широком смысле этого термина.

В этом состоит первое несомненное достоинство настоящей книги, которая представляет собой едва ли не единственную в современной литературе попытку в рамках учебного руководства охватить с единой точки зрения перечисленные выше разделы физики. Усилия такого рода важны и своевременны прежде всего потому, что они предназначены воспрепятствовать утрате чувства единства физического мира; эта опасность весьма реальна в наш век нарастающей специализации науки и взаимного отчуждения специалистов разного профиля. С другой стороны, именно в последние годы появились новые яркие примеры взаимного обогащения разных разделов физики; имеется в виду, в частности, проникновение идей и методов теории квантованного поля в квантовую статистику и, наоборот, использование идей теории сверхпроводимости в теории элементарных частиц. С этой точки зрения важен уже самый факт появления книги Кемпфера. Следует отметить, что в рассматриваемом отношении книга не свободна и от ряда недостатков. В частности, оставляет желать лучшего рассмотрение вопросов теории многих тел.

Первые главы книги посвящены изложению основ квантовой теории, которое в сильной степени отличается от общепринятого. Вместо постепенного перехода от классических понятий к квантовомеханическим автор прямо берет за основу те физические факты, которые непосредственно проявляются в микроскопическом эксперименте. Особенный интерес в этом плане представляет приведенная в книге теория селективных измерений Швингера. Вообще в книге явно выражено стремление освободить

изложение основ квантовой механики от излишних, не проявляющихся на опыте понятий, приведя тем самым форму изложения квантовой теории в соответствие с самим духом этой теории (духом «интеллектуального аскетизма» по выражению Кемпфера). В этом состоит вторая особенность (и второе достоинство) книги.

В свое время Дайсон, один из основателей современной теории квантованного поля, отмечал, что наиболее критична вторая стадия изучения квантовой механики, когда учащийся, уже овладевший аппаратом теории, не может объяснить себе смысл тех расчетов, которые он производит, невольно пытаясь это сделать на языке доквантовых представлений. Кризис проходит, когда учащийся привыкает думать непосредственно на языке квантово-механических понятий.

Можно надеяться, что книга Кемпфера (по крайней мере ее первые главы) поможет читателю быстро и безболезненно преодолеть эту вторую стадию. Нужно отметить, однако, что присущий изложению отрыв квантовой механики от классической не позволил автору рассмотреть вопросы соответствия с классической механикой и квазиклассическую ситуацию.

Широта охвата материала в книге привела к тому, что о многих важных вопросах, которые подняты в тексте, автор говорит явно недостаточно. Учитывая, что книга снабжена в большинстве случаев достаточно подробной библиографией, мы сопровождали текст дополнительными примечаниями лишь в тех случаях, когда это представлялось явно необходимым.

Хотя в книге уделено довольно много места теории элементарных частиц и их взаимодействий, в ней не нашли отражения некоторые разделы теории элементарных частиц, получившие развитие в самые последние годы, например теория унитарной симметрии. Интересующихся этими вопросами читателей можно отослать, например, к обзорным статьям, опубликованным за последние 3—4 года в журнале «Успехи физических наук».

Несколько слов о тех, кому адресована эта книга. Чтение ее требует определенной предварительной подготовки, и ее, во всяком случае, нельзя использовать для первого знакомства с квантовой механикой. Помимо аспирантов и студентов старших курсов физических факультетов, она может оказаться полезной физикам-экспериментаторам и теоретикам, желающим углубить свои познания в квантовой механике и в теории элементарных частиц. С этой точки зрения существенно, что в книге весьма подробно рассмотрены вопросы, связанные со свойствами симметрии элементарных частиц по отношению к инверсии, обращению движения, зарядовому сопряжению и изотопическим преобразованиям.

*Д. Киржиц*

Квантовая механика не является уже революционной теорией. За более чем тридцать пять лет, прошедших со времени ее возникновения, она стала вполне установившейся областью физики.

При изучении квантовой механики можно избежать многих трудностей, если она излагается не в исторической последовательности, а с самого начала вводятся такие понятия, как спин, которые можно истолковать только на основе квантовомеханических представлений.

Основная цель данной книги, таким образом, состоит в отходе от традиционной формы изложения материала и в стремлении, насколько это возможно, избежать аргументации, основывающейся на соответствии с классической физикой. Поэтому в книге намеренно не используются такие обычно употребляемые термины, как «волновая функция» (для  $\psi$ -функции) или «вторичное квантование» (для представления чисел заполнения). Опыт преподавания показал, что такие названия являются источником либо недоразумений, либо трудно искореняемой привычки мыслить нестервыми образами.

Другая цель, которая преследовалась в книге, — уделить особое внимание современным проблемам, представляющим интерес для физиков-экспериментаторов.

Существуют прекрасные учебники квантовой механики, такие, как ставшие уже классическими книги Шиффа или Ландау и Лифшица, в которых рассматриваются стандартные задачи, например об уровнях энергии электрона в атоме водорода или об определении собственных функций оператора момента количества движения, и нет никакой необходимости пытаться конкурировать с этими руководствами. Поэтому стандартные задачи рассматриваются только в той мере, в какой они необходимы для иллюстрации общих положений.

С другой стороны, такие вопросы, как инвариантность относительно обращения времени, правила суперотбора, представление взаимодействия, во многих учебниках излагаются слишком сложно — на языке теории групп или квантовой теории поля,

недоступном многим физикам-экспериментаторам. Между тем эти вопросы по существу весьма просты и должны излагаться соответственно простым языком. В этом смысле настоящая работа является попыткой представить современную квантовую механику с наиболее простой точки зрения.

Это, однако, вовсе не означает, что предлагаемая книга не может служить в качестве введения в квантовую механику. На самом деле материал данной книги вместе с соответствующими задачами и многочисленными ссылками на литературу составил содержание вступительного двухгодичного курса, по мнению автора, вполне удачного, который читался аспирантам Университета Британской Колумбии.

Тем не менее привычки отмирают медленно, и автор понимает, что скорее всего эта книга найдет применение как дополнение к другим руководствам, в которых дается более стандартное изложение.

*Канада, Ванкувер*

*Ф. А. Кемпфер*



## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие редактора перевода.</b>	<b>5</b>
<b>Предисловие автора, в котором излагаются цели этой книги.</b>	<b>7</b>
<b>Содержание, задуманное как краткий конспект книги. В нем делается попытка ориентировать будущего читателя в излагаемом предмете.</b>	<b>9</b>
<b>Введение, содержащее сжатое рассмотрение тех сторон физической реальности, которые не могут быть объяснены в рамках классической механики.</b>	<b>15</b>
<b>Глава 1. Чистые состояния в квантовой механике описываются на языке векторов состояния, для которых возможна вероятностная интерпретация, составляющая содержание одного из основных постулатов квантовой механики. В качестве примера рассматривается дихотомическая спиновая переменная.</b>	<b>19</b>
<b>Глава 2. Наблюдаемые величины описываются операторами в абстрактном пространстве векторов состояния. Для иллюстрации строятся матрицы Паули, которые представляют собой операторы трех декартовых компонент спина.</b>	<b>25</b>
<b>Глава 3. Преобразования в пространстве векторов состояния, оставляющие инвариантными физические величины, могут быть унитарными или антиунитарными. Эти преобразования в пространстве векторов состояния соответствуют преобразованиям симметрии в физическом пространстве. В качестве простейшего примера таких преобразований выбраны вращения в спиновом пространстве.</b>	<b>34</b>
<b>Глава 4. Матрица плотности составляет основу другого способа описания, альтернативного по отношению к описанию с помощью векторов состояния. Построено конкретное выражение матрицы плотности для спина <math>1/2</math> через вектор поляризации. Подчеркивается, что матрицей плотности можно описывать и состояния системы, не обладающие вектором состояния. Кратко обсуждается статистический ансамбль как модель такой системы.</b>	<b>39</b>
<b>Глава 5*. Теория селективных измерений. Дается полное изложение формального аппарата квантовой механики, основанное</b>	

---

\* Главы, отмеченные звездочкой, при первом чтении могут быть пропущены.

- исключительно на анализе экспериментальных ситуаций, возникающих при селективных измерениях. В качестве иллюстрации рассматривается сложное селективное измерение ориентации спина. 46
- Глава 6\*.** Представление неселективных измерений требует введения понятий символов измерения со случайно распределенными фазами. В качестве иллюстрации снова рассматривается мысленный эксперимент по измерению ориентации спина. 54
- Глава 7.** Основной постулат динамики, определяющий зависимость характеристик квантового объекта от времени, формулируется как закон изменения со временем средних значений физических величин. На основе этого закона вводятся представления Шредингера и Гейзенберга и представление взаимодействия. Находятся унитарные преобразования, связывающие эти представления. Выводятся уравнения движения для векторов состояния и матрицы плотности. Эти уравнения решаются различными способами для простейших случаев. Подробно рассматривается спиновый магнитный резонанс. 59
- Глава 8.** Представление наблюдаемых величин, принимающих континуальное или счетное бесконечное множество значений, позволяет расширить область применимости введенных ранее понятий. Вводится понятие  $\psi$ -функции состояния. Особое внимание уделяется геометрической интерпретации  $\psi$ -функции как функции преобразования в гильбертовом пространстве. 74
- Глава 9.** Сдвиг наблюдателя позволяет, в частности, получить явное представление преобразования Галилея. На основе соответствия получаемых формул преобразования формулам классической механики импульс объекта сопоставляется генератору операции сдвига. Это позволяет получить уравнение для  $\psi$ -функции квантового объекта в координатном представлении. Находятся коммутационные соотношения между операторами координат и импульса. 78
- Глава 10\*.** Неопределенности и соотношения между ними. На основе результатов предыдущей главы выводится соотношение неопределенностей Гейзенберга, вводится понятие оптимального вектора состояния, находятся выражения для таких векторов состояния. 85
- Глава 11\*.** Отступление: сверхтекучесть. Содержание этой главы представляет собой некоторое отклонение от основной темы изложения. Явление сверхтекучести рассматривается на основе результатов главы 9. Феноменологически вводится понятие квазичастиц; более строгое обоснование этого понятия в рамках теории многих частиц дано в главе 30. 91
- Глава 12.** Вращение наблюдателя. Возвращаясь к основной линии изложения, можно видеть, что подобно тому, как это было для операции сдвига, исследование преобразования вращения приводит к отождествлению компонент оператора

момента количества движения с генераторами вращения вокруг соответствующих осей. Снова рассматривается задача о спиновом магнитном резонансе, которая на этот раз решается с помощью преобразования уравнения динамики к подходящей вращающейся системе координат. Формулируется основная теорема о собственных векторах оператора момента количества движения, доказательство которой вынесено в Приложение 1.

97

**Глава 13. Связь между свойствами инвариантности гамильтониана и законами сохранения.**

104

**Глава 14. Инвариантность относительно инверсии координат и закон сохранения четности** рассматриваются на основе результатов предыдущей главы. Показано, что среднее значение любой четной относительно инверсии наблюдаемой величины в состояниях с определенной четностью равно нулю. Рассматриваются некоторые физические следствия этой теоремы. Данные, полученные в экспериментах по  $\beta$ -распаду атомных ядер, обсуждаются с точки зрения несохранения четности. Обосновывается необходимость рассматривания комбинированной инверсии как операции симметрии.

108

**Глава 15. Инвариантность относительно обращения движения** не приводит к сохраняющемуся квантовому числу, аналогичному четности. Это связано с антиунитарностью так называемой операции обращения времени. Тем не менее состояния могут быть охарактеризованы некоторым дихотомическим квантовым числом, описывающим их поведение при двукратном обращении времени. Устанавливается, что все состояния, меняющие знак при двукратном обращении времени, дважды вырождены. Вводится понятие правил суперотбора. В главах 14 и 15 для иллюстрации рассматриваются собственные векторы оператора момента количества движения.

121

**Глава 16. Понятие частицы в квантовой механике** вводится как некоторая абстракция, имеющая мало общего с наивным представлением о частицах, используемым в классической физике. Введение понятия квазичастиц позволяет описать свойства макроскопических объектов с помощью того же формализма, который первоначально предназначался для описания так называемых элементарных частиц. Вводится подразделение частиц на фермионы и бозоны. Формулируется принцип Паули.

139

**Глава 17. Фермионные состояния** описываются на основе принципа Паули с помощью дихотомических чисел заполнения квантовых состояний. Это естественным образом приводит к введению операторов рождения и уничтожения и их представлений. В качестве наиболее простых примеров рассматриваются состояния нейтрино и антинейтрино. Показано, что сохранение лептонного числа можно рассматривать как некоторое правило суперотбора.

143

**Глава 18. Бозонные состояния** вводятся аналогичным образом; иллюстрацией служит вывод уравнений для поперечных

фотонов. Особое внимание уделено описанию поляризации фотона. Путем формального обобщения вводятся состояния скалярных и продольных фотонов.

156

**Глава 19. Электроны и позитроны** рассматриваются как простейшие примеры фермионов, у которых вследствие ненулевой массы нет устойчивой ориентации спина, параллельной или антипараллельной направлению импульса. Симметрия теории относительно зарядового сопряжения используется для того, чтобы избежать введения состояний с отрицательной энергией. После того как позитронные состояния признаются пространственно обращенными электронными состояниями, закон сохранения лептонного числа снова рассматривается как некоторое правило суперотбора. Разъясняется процедура приведения четырехкомпонентных  $\psi$ -функций к двухкомпонентному виду.

177

**Глава 20. Отсутствие достаточно обоснованных аргументов, позволяющих теоретически вывести реально существующие взаимодействия**, демонстрируется показом затруденений, присущих попыткам учесть специфику электромагнитного взаимодействия путем введения предположения о неоднозначности фазы  $\psi$ -функции.

198

**Глава 21\*.** Представление о компенсирующем поле вводится на основе требования инвариантности относительно фазовых преобразований. Принятие этой идеи приводит к необходимости рассматривать векторные мезоны как единственные первичные носители взаимодействия между фермионами. Дается краткий обзор попыток устранить противоречия, встречающиеся при изучении короткодействующих взаимодействий.

206

**Глава 22\*.** Гравитация как компенсирующее поле. Вследствие дальнего действия гравитации появляется искушение рассматривать ее как компенсирующее поле. Такой подход допустим по аналогии с калибровочно инвариантной теорией электромагнетизма, однако необходимо учитывать основное различие между гравитацией и электромагнетизмом, а именно тот факт, что, вообще говоря, при наличии гравитации инерциальные системы, если их разделяет конечное расстояние, движутся ускоренно одна по отношению к другой.

218

**Глава 23. Отправная точка квантовой электродинамики.** В этой главе дается представление о диаграммах Фейнмана и вводится понятие оператора рассеяния; последний в неявном виде представляется с помощью оператора упорядочения во времени.

224

**Глава 24. Теория возмущений и понятие пропагатора** вводится при попытке явно определить оператор рассеяния. Основной темой этой главы является теорема Вика, но, кроме того, излагается дальнейшее развитие метода диаграмм Фейнмана и правила их построения в импульсном пространстве.

235

- Глава 25\*.** Иерархия пропагаторов при наличии взаимодействий заставляет смотреть на мир как на бесконечную совокупность пропагаторов. Математическое рассмотрение этой проблемы наталкивается на громадные затруднения, которые пока еще не преодолены. Поскольку внутренне согласованная динамическая теория взаимодействий отсутствует, приходится обратиться к правилам отбора, рассматриваемым в гл. 26. 250
- Глава 26.** О правилах отбора, обусловленных симметрией относительно инверсий и вращений системы координат. На примере системы двух фотонов показано, как находится внутренняя четность такого объекта, как позитроний, для которого это понятие может быть определено совершенно однозначно. 267
- Глава 27.** Перестановочная симметрия многочастичных состояний. Часть этой главы посвящена получению явного вида оператора перестановки частиц в представлении момента количества движения и в представлении чисел заполнения. В качестве иллюстрации рассматривается двухфотонное состояние, исследованное в предыдущей главе. 276
- Глава 28.** Некоторые следствия симметрии относительно зарядового сопряжения и обращения времени выводятся путем последовательного использования антиунитарности соответствующих операторов симметрии. Находятся условия, при выполнении которых можно ввести понятие зарядовой четности и считать зарядовую четность хорошим квантовым числом. Доказывается принцип взаимности и исследуются различные условия, при которых из него следует принцип детального равновесия. 287
- Глава 29.** Характерные свойства объектов, участвующих в сильных взаимодействиях, такие, как изотопический спин, барионное число, странность или гиперзаряд, требуют для своего исследования возврата к рассмотрению операций симметрии, введенных в главах 26—28. В результате такого исследования получают правила отбора, отличные от встречавшихся в предыдущих главах. Эта глава заканчивается изучением всех возможных характеристик, сохраняющихся в силу правил суперотбора, которые следуют из симметрии относительно антиунитарных преобразований. 299
- Глава 30\*.** Понятие квазичастиц оказывается весьма плодотворным при использовании методов квантовой механики для изучения наблюдаемых в некоторых веществах при низких температурах особых макроскопических свойств, таких, как сверхтекучесть и сверхпроводимость. Чтобы показать, что принцип суперпозиции амплитуд вероятностей играет основную роль в уменьшении энергии при образовании квазичастиц из взаимодействующих между собой обычных частиц, в данной главе дается обзор некоторых аспектов квантовой теории многих тел на основе методов, развитых вне рамок теории возмущений Боголюбовым, Купером и Беляевым. 328
- Приложение 1.** Собственные функции и собственные значения оператора момента количества движения столь часто

- требуются в этой книге, что для облегчения справок их представления в пространстве момента количества движения и в координатном пространстве приведены в этом приложении. 350
- Приложение 2. Сложение двух моментов количества движения.** Это приложение содержит таблицы коэффициентов Клебша—Гордана для сложения моментов количества движения  $j_2=1/2$  и  $j_2=1$  с произвольным моментом  $j_1$ . 359
- Приложение 3. Векторные сферические функции** определяются и используются для классификации фотонных состояний, что дает дополнительную информацию по вопросам, рассмотренным в главах 18 и 27. 365
- Приложение 4. Инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований Лоренца** исследуется в основном с целью получения хорошо известной формулы для структурных констант этого преобразования, которая необходима в главе 22. 370
- Приложение 5. Наиболее общее каноническое преобразование пары фермионных операторов** выводится в явном виде с использованием метода Коппе и Мюльшлегеля, заслуживающего самого широкого внимания. Это приложение особенно полезно при изучении глав 27 и 30. 373
- Приложение 6. Дельта-функции и ее применение.** Это приложение включено для того, чтобы облегчить понимание глав 23 и 24. 378
- Приложение 7. Если бы Галилей знал квантовую механику, он, по-видимому, понимал бы, что масса частицы в нерелятивистской механике должна иметь строго фиксированное значение.** Это следует из любопытного правила суперотбора, вытекающего из инвариантности относительно преобразований Галилея, которое было открыто Баргманом. 384

## ВВЕДЕНИЕ

Квантовая механика ставит своей целью дать такое описание физической реальности, которому соответствует намеренное исключение из теории всех понятий и величин, не проявляющихся непосредственно в эксперименте. Тот факт, что для выполнения этой, несомненно разумной, задачи необходимо прилагать особые усилия, отчасти обусловлен особенностями человеческого языка.

Язык сложился в основном на макроскопических моделях. Если, например, употребляют слово «частица», подразумевая объект, наделенный некоторыми физическими свойствами, то пагубное влияние языка ощущается тогда, когда пытаются полностью избежать невольного использования некоторого мысленного образа «частицы», движущейся в интервале между измерениями. Между тем квантовая механика требует отказа от использования неадекватных мысленных образов, призывая к своего рода интеллектуальному аскетизму.

Развитие квантовой механики было вызвано признанием твердо установленных в экспериментах следующих двух сторон физической реальности, абсолютно непонятных с точки зрения классической механики.

1. В самом начале этого столетия было обнаружено, что некоторые динамические величины, которые в классической механике всегда пробегают непрерывный ряд значений, в действительности могут иметь только определенные дискретные значения. Когда какая-нибудь физическая величина  $A$  принимает только дискретные значения  $a_1, \dots, a_n, \dots$ , то говорят, что эта величина «квантуется». Примерами могут служить значения энергии электрона, связанного с атомным ядром, или значения собственного момента количества движения элементарной частицы, т. е. ее «спина».

Временное согласие результатов наблюдений с классической механикой было достигнуто благодаря введению более или менее загадочных «правил квантования». Однако в конечном счете эти ухищрения оказались непригодными, как только в атомной физике был обнаружен другой фундаментальный факт, а именно:

2. Невозможность одновременного точного задания всех физических характеристик объекта. В частности, экспериментальное изучение атомных явлений и их логический анализ привели к открытию того, что

а) взаимодействие между объектом измерения и измерительным прибором не может быть сделано сколь угодно слабым;

б) возмущение, вносимое взаимодействием объекта с прибором, предсказуемо только статистически и поэтому не может быть исключено.

Таким образом, измерение одной характеристики объекта может вызвать неконтролируемое изменение другой, ранее известной характеристики этого объекта. Поэтому бессмысленно одновременно задавать численные значения *всех* характеристик данного объекта.

Эти факты, имеющие фундаментальное значение для явлений микромира, находятся в резком противоречии с классической теорией измерений, которая базируется на предположении, что взаимодействие между объектом и прибором, если и не может быть сделано сколь угодно малым, то по крайней мере может быть точно учтено и, следовательно, в принципе его можно исключить.

Будем называть две физические величины  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  «совместимыми», если измерение одной из них не меняет значения другой величины, полученного в предыдущем измерении. Примерами совместимых характеристик являются: абсолютная величина момента количества движения объекта  $J$  и одна из его компонент, например  $J_z$ , три компонента импульса объекта, энергия и любой другой интеграл движения замкнутой системы.

Две физические величины  $A$  и  $B$ , которые не удовлетворяют приведенному выше определению, будем называть «несовместимыми». Примерами несовместимых характеристик могут служить: любые две компоненты вектора момента количества движения, импульс объекта (при условии, что он не равен нулю) и его четность, странность и зарядовая четность элементарной частицы (при условии, что странность отлична от нуля).

Будем предполагать, что каждая физическая система характеризуется *полным набором* совместимых физических характеристик  $A^{(1)}, \dots, A^{(h)}$ . Это означает, что любые две из них совместимы и не существует других характеристик, которые были бы совместимы с каждой из составляющих этого набора. Это нетривиальное предположение, поскольку в настоящее время отсутствует экспериментальный критерий, который позволял бы установить, имеем ли мы дело с полным набором совместимых характеристик или нет. Так, например, долгое время считалось, что импульс  $p$ , масса  $m$ , заряд  $e$ , спин  $s$ ,  $s_z$  составляют полный



набор физических характеристик электрона. Однако недавно появилась еще одна характеристика электрона — лептонное число  $L$ , которая совместима со всеми величинами  $p, m, e, s, s_3$ .

Следует подчеркнуть, что число физических величин, составляющих полный набор  $A$ , как правило, гораздо меньше числа *всех возможных* характеристик объекта. Обычно можно указать другие полные наборы характеристик  $B, C, \dots$ , которые взаимно несовместимы. Так, если в приведенном выше полном наборе характеристик электрона компоненту спина  $s_3$  заменить другой компонентой, то в результате получится другой полный набор.

«Полное измерение» характеристик объекта означает совокупность экспериментов, позволяющих приписать определенные значения  $a_i^{(k)}$  максимальному числу совместимых физических величин  $A^{(h)}$ . Поскольку любой эксперимент, целью которого является определение значения  $b$  какой-либо другой физической величины  $B$ , вызывает неконтролируемое изменение одного или более из ранее найденных значений  $a_i^{(k)}$ , то, следовательно, любое полное измерение дает оптимальное количество сведений о данном объекте.

Если известен полный набор значений  $a_i^{(k)}$  совместимых физических величин  $A^{(h)}$  некоторого объекта, то говорят, что объект находится в «чистом квантовом состоянии», или просто в состоянии, характеризуемом набором величин  $a_i^{(k)}$ . Таким образом, мы приходим к задаче нахождения такого описания состояния объекта, когда известна вся информация, заключенная в наборе чисел  $a_i^{(k)}$ , и *только* эта информация.



## Чистые состояния

Основные математические понятия, необходимые для описания состояния объекта, легче всего ввести на примере идеализированных физических систем, любая физическая характеристика  $A$  которых имеет конечное число дискретных значений, или квантовых чисел<sup>1)</sup>  $a_1, \dots, a_n$ .

В действительности, конечно, многие величины даже в атомной физике могут принимать непрерывный ряд значений. Однако при этом описание объекта требует несколько более сложного математического аппарата, что может затруднить понимание простого в своей основе формализма квантовой механики. Поэтому рассмотрение случая, когда величины могут пробегать непрерывный ряд значений, мы отложим до гл. 8.

Наиболее простым является случай, когда физическая величина имеет дихотомический характер, т. е. может принимать только два значения. Примерами дихотомических характеристик являются проекция спина электрона на направление внешнего магнитного поля, заряд нуклона, четность совокупности пионов в системе центра масс, число фермионов в данном квантовом состоянии.

Сначала рассмотрим такую экспериментальную ситуацию, когда известно, что спин  $1/2$ , связанный с магнитным моментом, ориентирован вдоль некоторого направления, заданного двумя полярными углами  $\theta$  и  $\varphi$ . Такое спиновое состояние всегда может быть реализовано в эксперименте типа эксперимента Штерна — Герлаха путем приложения внешнего поля в направлении  $\theta, \varphi$  и выделения соответствующей компоненты расщепленного пучка. Это состояние можно описать двумерным единичным комплексным вектором — «вектором состояния», обозначаемым следующим образом:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

<sup>1)</sup> Квантовыми числами чаще называют не сами дискретные значения физической величины, а нумерующие эти значения целые числа. — *Прим. ред.*

где комплексные числа  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  являются функциями углов  $\theta$  и  $\varphi$ , определяющих направление спина. Величина  $a_1$  представляет собой квантовое число, соответствующее «проекции спина на направление  $\theta, \varphi$ ». Требование, чтобы вектор состояния  $|a_1\rangle$  был единичным, т. е. чтобы скалярное произведение  $|a_1\rangle$  и соответствующего эрмитово сопряженного вектора

$$\langle a_1 | = \overline{\alpha_1^* \beta_1^*} \quad (1.2)$$

было равно единице:

$$\langle a_1 | a_1 \rangle = \overline{\alpha_1^* \beta_1^*} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = |\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1, \quad (1.3)$$

позволяет дать вероятностную интерпретацию величин  $|\alpha_1|^2$  и  $|\beta_1|^2$ , находящуюся в соответствии со следующим экспериментальным фактом.

Если пучок атомов со спином  $1/2$ , ориентированный вдоль направления  $\theta, \varphi$  и описываемый вектором состояния  $|a_1\rangle$ , вторично пропустить через установку в опыте Штерна — Герлаха, но с магнитным полем, направленным вдоль оси  $z$ , то в результате измерения окажется, что спины одних частиц направлены вдоль оси  $z$ , а спины других — в противоположном направлении. Соотношение между числом тех и других частиц может быть предсказано в принципе только статистически. Следовательно, для описания такого эксперимента необходимо ввести два числа, в сумме составляющие единицу, одно из которых равно вероятности обнаружить спин данной частицы направленным вдоль положительного направления оси  $z$ , а другое — вероятности обнаружить спин направленным в противоположную сторону. Это наводит на мысль распорядиться зависимостью  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  от углов  $\theta$  и  $\varphi$  таким образом, чтобы величины  $|\alpha_1|^2$  и  $|\beta_1|^2$  можно было отождествить с упомянутыми выше вероятностями. В согласии с этим

условием векторы состояния  $|a_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $|a_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  отвечают тем ситуациям, когда проекция спина на направление  $z$  с достоверностью принимает значения  $+1$  и  $-1$  соответственно<sup>1)</sup>. [В дальнейшем компоненты вектора состояния  $|a_i\rangle$  мы будем, как правило, обозначать  $(a_i)_k$ ; в соответствии с этим  $\alpha_1 = (a_1)_1$  и  $\beta_1 = (a_1)_2$ .]

Подобное вероятностное истолкование может быть дано и в более общем случае. Будем предполагать, что проекция вектора

<sup>1)</sup> Здесь и ниже вместо проекции спина приводится удвоенное значение этой величины; см. гл. 2. — *Прим. ред.*

состояния

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} (a)_1 \\ (a)_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ на другое состояние } |b\rangle = \begin{pmatrix} (b)_1 \\ (b)_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

дает амплитуду вероятности обнаружить в результате измерения квантовое число  $b$ , если первоначально объект находился в состоянии  $|a\rangle$ . Эта проекция определяется выражением

$$\langle b|a\rangle = (b)_1^*(a)_1 + (b)_2^*(a)_2 + \dots = \langle a|b\rangle^*. \quad (1.4)$$

Таким образом,  $|\langle b|a\rangle|^2$  будет интерпретироваться как вероятность обнаружить квантовое число  $b$ , если известно, что объект находится в состоянии, характеризуемом квантовым числом  $a$ .

Например, если вектор  $|a_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  описывает состояние, в котором спин с достоверностью направлен вдоль оси  $z$ , а вектор  $|a_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$  — состояние со спином в направлении  $\theta, \varphi$ , то

$$\langle a_+|a_1\rangle = 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \beta_1 = \alpha_1$$

и, следовательно,  $|\alpha_1|^2$  есть вероятность обнаружить спин  $+1$  в направлении  $z$ , если объект находится в спиновом состоянии  $|a_1\rangle$ .

Этот основной постулат квантовой механики позволяет, исходя из дихотомической природы спина электрона, прийти к заключению о существовании другого единичного вектора

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a_2)_1 \\ (a_2)_2 \end{pmatrix}, \quad |\alpha_2|^2 + |\beta_2|^2 = 1, \quad (1.5)$$

характеризующего состояние со спином, антипараллельным направлению  $\theta, \varphi$ , и ортогонального вектору  $|a_1\rangle$ ,

$$\langle a_2|a_1\rangle = 0, \quad (1.6)$$

так как, если известно, что объект находится в спиновом состоянии  $|a_1\rangle$ , то вероятность обнаружить противоположное направление спина равна нулю. Таким образом, два возможных вектора спиновых состояний, которые могут проявиться при измерении проекции спина на данное направление  $\theta, \varphi$ , описываются системой двух взаимно ортогональных комплексных векторов

$$\langle a_i|a_k\rangle = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2). \quad (1.7)$$

Поскольку измерение проекции спина на заданное направление  $\theta, \varphi$  является полным измерением и дает все возможные сведения об электронном спине, то система базисных векторов

$|a_1\rangle, |a_2\rangle$  будет полной, т. е. будет удовлетворять условию полноты

$$\sum_i |a_i\rangle \langle a_i| = I; \quad (1.8)$$

здесь  $I$  — единичный символ, определяемый равенством  $\langle b|I|a\rangle = \langle b|a\rangle$ , где  $|b\rangle$  и  $|a\rangle$  — произвольные векторы.

Действительно, если рассмотреть измерение проекции спина на некоторое другое направление  $\theta', \varphi'$ , которому отвечают два ортогональных нормированных вектора  $|b_1\rangle$  и  $|b_2\rangle$ , то, согласно основному постулату квантовой механики, эти векторы можно записать в виде линейных суперпозиций<sup>1)</sup>

$$|b_k\rangle = |a_1\rangle c_{1k} + |a_2\rangle c_{2k} = |a_1\rangle \langle a_1|b_k\rangle + |a_2\rangle \langle a_2|b_k\rangle. \quad (1.9)$$

Отсюда, находя проекцию вектора  $|b_k\rangle$  на состояние  $|b_j\rangle$  и используя (1.7), получаем соотношение

$$\langle b_j|b_k\rangle = \sum_i \langle b_j|a_i\rangle \langle a_i|b_k\rangle, \quad (1.10)$$

справедливое только при выполнении условия (1.8).

Как вероятностная интерпретация, так и условия ортогональности и полноты остаются в силе, если любой вектор состояния умножить на число, модуль которого равен единице. Следовательно, *одно и то же физическое состояние  $|a\rangle$  описывается всеми векторами вида  $e^{i\alpha}|a\rangle$ , где  $\alpha$  — произвольное действительное число.*

Представления, развитые выше для частного случая спина  $1/2$ , легко распространить на произвольные состояния, описываемые дихотомической переменной. Так, вектор состояния

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.11)$$

описывает зарядовое состояние нуклона, если  $|\alpha|^2$  интерпретировать как вероятность обнаружить нуклон в протонном состоянии, а  $|\beta|^2$  — как вероятность обнаружить его в нейтронном состоянии. Аналогично то же выражение может описывать запол-

<sup>1)</sup> Соотношения (1.9) действительно следуют из основного постулата квантовой механики — принципа суперпозиции состояний, который, однако, не сводится к приведенному выше утверждению [см. текст после выражения (1.4)]. Содержание этого принципа состоит в следующем. Пусть задан набор состояний 1, 2, ... квантового объекта, для каждого из которых измерение некоторой физической величины с достоверностью приводит к соответствующему числу  $a_1, a_2, \dots$ . Тогда может быть реализовано и такое состояние, для которого то же измерение даст (с той или иной вероятностью) любое из чисел  $a_1, a_2, \dots$ . Вектор этого состояния выражается в виде суперпозиции векторов исходных состояний, а указанная вероятность определяется квадратом модуля соответствующего коэффициента в этой суперпозиции. — *Прим. ред.*

нение фермионных квантовых состояний, если  $|\alpha|^2$  и  $|\beta|^2$  трактовать как вероятности обнаружить данное состояние свободным или занятым.

Развитые выше представления легко обобщить на состояния, характеристики которых могут принимать более чем два значения. Простым примером может служить зарядовое состояние пиона, для описания которого необходим вектор с тремя компонентами:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1, \quad (1.12)$$

так как, согласно эксперименту, пион может иметь положительный, нулевой и отрицательный заряд. В выражении (1.12)  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — амплитуды вероятности обнаружить пион в состоянии с положительным, нулевым или отрицательным зарядом соответственно.

Дополнительные совместимые характеристики объекта всегда можно учесть путем увеличения размерности пространства векторов состояния. Формально это осуществляется введением прямого произведения двух произвольных векторов состояния, а именно:

$$\begin{aligned} a_i^{(1)} a_k^{(2)} \rangle &= |a_i^{(1)}\rangle \times |a_k^{(2)}\rangle = \begin{pmatrix} [a_i^{(1)}]_1 \\ [a_i^{(1)}]_2 \\ \vdots \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} [a_k^{(2)}]_1 \\ [a_k^{(2)}]_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} [a_i^{(1)}]_1 [a_k^{(2)}]_1 \\ [a_i^{(1)}]_1 [a_k^{(2)}]_2 \\ \vdots \\ [a_i^{(1)}]_2 [a_k^{(2)}]_1 \\ [a_i^{(1)}]_2 [a_k^{(2)}]_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (1.13) \end{aligned}$$

где  $|a_i^{(1)}\rangle$  — вектор состояния, в котором характеристика  $A^{(1)}$  имеет значение  $a_i^{(1)}$ , а  $|a_k^{(2)}\rangle$  — вектор состояния, в котором  $A^{(2)}$  имеет значение  $a_k^{(2)}$ . Так, например, состояние нуклона характеризуется двумя дихотомическими переменными — спином и зарядом. Комбинированное пространство, построенное на векторах спиновых и зарядовых состояний, образуется четырьмя

единичными векторами:  $|p \uparrow\rangle$ ,  $|p \downarrow\rangle$ ,  $|n \uparrow\rangle$ ,  $|n \downarrow\rangle$ , обозначения которых не требуют пояснений. Эти векторы равны прямым произведениям

$$|p \uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{заряд}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{спин}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|p \downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{заряд}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{спин}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|n \uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{заряд}} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\text{спин}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|n \downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{заряд}} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{спин}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

### ПРИМЕЧАНИЯ

Расщепления атомного пучка в неоднородном магнитном поле на две компоненты первыми наблюдали Герлах и Штерн [1]. Позже это явление интерпретировалось как проявление связанного со спином  $1/2$  магнитного момента валентного электрона.

Ферми [2] наглядно продемонстрировал удобство применения векторов, зависящих от дихотомических переменных, и использовал их, в частности, для описания зарядового состояния нуклонов.

Запись векторов состояния в виде скобок, используемая везде в этой книге, была введена Дираком [3].

### Литература

1. Gerlach W., Stern O., Zs. Phys., **8**, 110 (1922).
2. Fermi E., Lectures on pions and nucleons, Nuovo Cimento Suppl., **2**, 18 (1955) (см. перевод: Энрико Ферми, Лекции о  $\pi$ -мезонах и нуклонах, ИЛ, 1956).
3. Dirac P. A. M., Quantum Mechanics, 4th ed., London and New York, 1958 (см. перевод: Дирак П., Принципы квантовой механики, М., 1960).



## Наблюдаемые величины

Измерение какой-либо характеристики  $A$  объекта, находящегося в состоянии  $|b\rangle$ , приводит в общем случае к такому изменению этого состояния, что после измерения объект будет находиться в одном из возможных состояний  $|a_i\rangle$ , в котором измеряемая физическая характеристика  $A$  имеет значение, равное  $a_i$ . Какое из этих состояний  $|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots$  проявится как результат измерения, т. е. какое из возможных значений  $a_1, a_2, \dots$  будет в действительности наблюдаться в каждом конкретном опыте по измерению величины  $A$ , можно предсказать лишь статистически.

Хотя таким образом данному состоянию  $|b\rangle$ , вообще говоря, невозможно сопоставить определенное значение  $a_i$  физической величины  $A$ , можно найти среднее значение  $\bar{A}$  этой величины, если измерения проводить над ансамблем объектов, каждый из которых находится в одном и том же чистом состоянии  $|b\rangle$ .

В качестве примера рассмотрим вновь спиновое состояние  $|a_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$ , в котором проекция спина  $\sigma = 2s$  ( $|s| = 1/2$ ) на направление  $\theta, \varphi$  имеет определенное значение  $+1$ . Предположим, что в опыте Штерпа и Герлаха с направлением магнитного поля вдоль оси  $z$  измеряется  $\sigma_z$  — проекция спина на направление  $z$ .

Результатом измерения будет либо состояние  $|a_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , либо

состояние  $|a_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , т. е. будет найдено, что  $\sigma_z$  принимает значения либо  $+1$ , либо  $-1$  с вероятностями  $|\alpha_1|^2$  и  $|\beta_1|^2$  соответственно. Однако если среднее значение спина при поворотах системы координат преобразуется как вектор, то следует ожидать, что величина  $\bar{\sigma}_z$  будет равна просто проекции единичного вектора в направлении  $\theta, \varphi$  на ось  $z$ , т. е.

$$\bar{\sigma}_z = \cos \theta. \quad (2.1)$$

Аналогично средние значения проекций спина  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в состоянии  $|a_1\rangle$  будут равны

$$\bar{\sigma}_1 = \sin \theta \cos \varphi, \quad (2.2)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \sin \theta \sin \varphi. \quad (2.3)$$

Математический аппарат, который отражает влияние измерения на состояние системы и позволяет в то же время вычислить среднее значение наблюдаемой физической величины  $A$  в любом данном состоянии  $|b\rangle$ , состоит в сопоставлении наблюдаемой величине  $A$  линейного эрмитова оператора. Собственными векторами этого оператора являются векторы состояния  $|a_i\rangle$ , в которых величина  $A$  принимает определенные значения  $a_i$ , являющиеся собственными значениями этого оператора:

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle. \quad (2.4)$$

Такое представление оказывается возможным в силу того, что собственные векторы линейного эрмитова оператора образуют систему ортогональных друг другу нормируемых векторов. Представление наблюдаемой величины  $A$  линейным оператором, удовлетворяющим уравнению (2.4), удобно еще и потому, что оператор  $A$  преобразует некоторый данный вектор состояния  $|b\rangle$  в другой вектор состояния  $|c\rangle$ :

$$|c\rangle = A|b\rangle, \quad (2.5)$$

так, что проекция вектора  $|c\rangle$  на  $|b\rangle$  есть среднее значение физической величины  $A$  в состоянии  $|b\rangle$ :

$$\bar{A} = \langle b|c\rangle = \langle b|A|b\rangle. \quad (2.6)$$

Чтобы убедиться в сказанном, разложим вектор состояния  $|b\rangle$  в ряд по базисным векторам  $|a_i\rangle$ :

$$|b\rangle = |a_1\rangle \langle a_1|b\rangle + |a_2\rangle \langle a_2|b\rangle + \dots, \quad (2.7)$$

где  $\langle a_i|b\rangle$  — амплитуда вероятности обнаружить значение  $a_i$  наблюдаемой величины  $A$  в состоянии  $|b\rangle$ . С учетом уравнения (2.4) получаем

$$A|b\rangle = a_1|a_1\rangle \langle a_1|b\rangle + a_2|a_2\rangle \langle a_2|b\rangle + \dots \quad (2.8)$$

и, следовательно,

$$\langle b|A|b\rangle = a_1|\langle a_1|b\rangle|^2 + a_2|\langle a_2|b\rangle|^2 + \dots \quad (2.9)$$

Последнее выражение есть не что иное, как среднее значение  $A$ , поскольку последнее по определению равно сумме произведений величин  $a_i$  на соответствующие им вероятности  $|\langle a_i|b\rangle|^2$ .

Соотношение (2.5) может быть записано в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} (c)_1 \\ (c)_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b)_1 \\ (b)_2 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Среднее значение наблюдаемой физической величины  $A$  должно быть действительной величиной. Это требование ограничивает класс операторов, представляющих наблюдаемые величины, эрмитовыми операторами, т. е. оператор  $A$  должен удовлетворять условию

$$A^+ = A, \quad (2.11)$$

где эрмитово сопряженный оператор  $A^+$  определяется равенством

$$\langle A^+ c | b \rangle = \langle c | A | b \rangle. \quad (2.12)$$

Если это уравнение представить в матричной форме, используя (2.10), то из него следует, что операция эрмитового сопряжения эквивалентна транспонированию матрицы  $A$  с одновременной заменой ее элементов на комплексно сопряженные:

$$A_{ik}^+ = A_{ki}^*. \quad (2.13)$$

Вещественность величины  $\bar{A}$  для эрмитовых операторов следует из соотношений

$$\bar{A} = \langle b | A | b \rangle = \langle A^+ b | b \rangle = \langle b | A^+ | b \rangle^* = \langle b | A | b \rangle^* = \bar{A}^*. \quad (2.14)$$

Следует иметь в виду, что хотя наблюдаемые величины всегда представляются эрмитовыми операторами, обратное не обязательно имеет место, т. е. не всякий эрмитов оператор соответствует наблюдаемой величине.

Из сказанного выше следует, что наблюдаемая проекция спина на направление  $\theta, \varphi$  должна представляться эрмитовым оператором, который может быть записан в виде квадратной двухрядной матрицы

$$\sigma_{\theta, \varphi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

(где  $A_{11}, A_{22}$  — действительные величины) и собственными векторами которого, отвечающими собственным значениям  $+1$  и

—1 соответственно, являются векторы

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad |a_2\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_{\theta, \varphi} |a_1\rangle = +|a_1\rangle, \quad \sigma_{\theta, \varphi} |a_2\rangle = -|a_2\rangle. \quad (2.16)$$

Записанные в компонентах уравнения (2.16) имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11}\alpha_1 + A_{12}\beta_1 &= \alpha_1, & A_{11}\alpha_2 + A_{12}\beta_2 &= -\alpha_2, \\ A_{12}^*\alpha_1 + A_{22}\beta_1 &= \beta_1, & A_{12}^*\alpha_2 + A_{22}\beta_2 &= -\beta_2. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Необходимым и достаточным условием существования отличных от нуля решений полученных систем уравнений является обращение в нуль соответствующих детерминантов:

$$\begin{aligned} A_{11}A_{22} - |A_{12}|^2 + 1 - A_{11} - A_{22} &= 0, \\ A_{11}A_{22} - |A_{12}|^2 + 1 + A_{11} + A_{22} &= 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Последние уравнения эквивалентны следующим:

$$A_{11} + A_{22} = 0, \quad A_{11}A_{22} - |A_{12}|^2 + 1 = 0. \quad (2.19)$$

Отсюда следует, что  $\sigma_{\theta, \varphi}$  можно представить в виде

$$\sigma_{\theta, \varphi} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & -A_{11} \end{pmatrix}, \quad A_{11}^2 + |A_{12}|^2 = +1, \quad (2.20)$$

где  $A_{11}$  — действительная величина.

Чтобы определить зависимость величин  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ , а также  $A_{11}$ ,  $A_{12}$  от полярных углов  $\theta$ ,  $\varphi$ , рассмотрим сначала  $z$ -компоненту спина  $\sigma_3$ . Соответствующий оператор получается из общего выражения (2.20), если положить в нем  $\theta=0$ . Он может быть записан в виде

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^* & -Z_{11} \end{pmatrix}, \quad Z_{11}^2 + |Z_{12}|^2 = 1, \quad (2.21)$$

где  $Z_{11}$  — действительная величина.

Матричные элементы  $Z_{11}$ ,  $Z_{12}$  должны быть выбраны так, чтобы векторы состояния

$$|a_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |a_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

были собственными векторами оператора  $\sigma_3$ , отвечающими собственным значениям  $+1$  и  $-1$  соответственно:

$$\sigma_3 |a_+\rangle = +|a_+\rangle, \quad \sigma_3 |a_-\rangle = -|a_-\rangle, \quad (2.23)$$

т. е. компоненты оператора  $\sigma_3$  должны быть выбраны следующим образом:

$$Z_{11} = 1, \quad Z_{12}^* = 0, \quad Z_{12} = 0, \quad -Z_{11} = -1. \quad (2.24)$$

Таким образом,  $\sigma_3$  представляется матрицей

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Если в соответствии с (2.1) потребовать, чтобы среднее значение  $\sigma_3$  в состоянии  $|a_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}$  было равно  $\cos \theta$ , то получим следующее условие, налагаемое на значения величин  $\alpha_1$  и  $\beta_1$ :

$$\bar{\sigma}_3 = \langle a_1 | \sigma_3 | a_1 \rangle = \overbrace{\alpha_1^* \beta_1^*} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = |\alpha_1|^2 - |\beta_1|^2 = \cos \theta, \quad (2.26)$$

что вместе с условием нормировки

$$|\alpha_1|^2 + |\beta_1|^2 = 1 \quad (2.27)$$

приводит к следующему решению:

$$\alpha_1 = e^{i\psi} \cos \frac{\theta}{2}, \quad \beta_1 = e^{i(\chi+\psi)} \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2.28)$$

где фазы  $\psi$  и  $\chi$  произвольны. Поскольку собственный вектор вообще определен лишь с точностью до фазового множителя, одинакового для всех его компонент, фазу  $\beta_1$  удобно записать в виде суммы  $(\chi + \psi)$  и в дальнейшем положить фазу  $\psi$  равной нулю. При этом вектор  $|a_+\rangle$  будет частным случаем вектора  $|a_1\rangle$  при  $\theta = 0$ . Таким образом,

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\chi} \sin \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Оставшуюся неизвестной фазу  $\chi$  найдем из условий (2.2) и (2.3). Представляя операторы  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  в виде

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12}^* & -X_{11} \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{12}^* & -Y_{11} \end{pmatrix}, \quad (2.30)$$

$$X_{11}^2 + |X_{12}|^2 = 1, \quad Y_{11}^2 + |Y_{12}|^2 = 1$$

(где  $X_{11}$ ,  $Y_{11}$  — действительные величины), вычисляя их средние значения в состоянии, описываемом найденным выше вектором  $|a_1\rangle$  [выражение (2.29)], и учитывая условия (2.2) и (2.3), по-

лучаем в результате простых тригонометрических преобразований

$$\bar{\sigma}_1 = \langle a_1 | \sigma_1 | a_1 \rangle = X_{11} \cos \theta + \frac{1}{2} (X_{12} e^{i\chi} + X_{12}^* e^{-i\chi}) \sin \theta = \sin \theta \cos \varphi, \quad (2.31)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \langle a_1 | \sigma_2 | a_1 \rangle = Y_{11} \cos \theta + \frac{1}{2} (Y_{12} e^{i\chi} + Y_{12}^* e^{-i\chi}) \sin \theta = \sin \theta \sin \varphi.$$

Так как функции  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$  линейно независимы, то из последних уравнений следует, что

$$X_{11} = Y_{11} = 0, \quad (2.32)$$

поэтому, согласно (2.30),  $X_{12}$  и  $Y_{12}$  по модулю равны единице и, следовательно, представимы в виде

$$X_{12} = e^{i\xi}, \quad Y_{12} = e^{i\eta}. \quad (2.33)$$

Подстановка найденных компонент в (2.31) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [e^{i(\chi+\xi)} + e^{-i(\chi+\xi)}] &= \cos \varphi, \\ \frac{1}{2} [e^{i(\chi+\eta)} + e^{-i(\chi+\eta)}] &= \sin \varphi. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Первое из этих уравнений дает

$$\chi + \xi = \varphi. \quad (2.35)$$

Второе из уравнений (2.34) с учетом этого соотношения принимает вид

$$\frac{1}{2} [e^{i(\varphi+\eta-\xi)} + e^{-i(\varphi+\eta-\xi)}] = \sin \varphi. \quad (2.36)$$

Последнее равенство может иметь место только в том случае, если <sup>1)</sup>

$$\eta - \xi = -\frac{\pi}{2}. \quad (2.37)$$

Таким образом, одна из фаз  $\chi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  остается неопределенной. Если выбрать

$$\xi = 0, \quad (2.38)$$

то

$$\eta = -\frac{\pi}{2}, \quad \chi = \varphi \quad (2.39)$$

и, следовательно,

$$X_{12} = 1, \quad Y_{12} = -i. \quad (2.40)$$

<sup>1)</sup> На самом деле здесь приведены лишь простейшие решения уравнений (2.34), (2.36). — *Прим. ред.*

Рассуждая точно так же в случае вектора  $|a_2\rangle$ , окончательно находим следующие представления:

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

$$|a_2\rangle = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (2.42)$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.43)$$

Таким образом, так называемые матрицы Паули (2.43) являются частным случаем оператора спина, общий вид которого находится из уравнений (2.17) и (2.20) при учете (2.42) и (2.43):

$$\sigma_{\theta, \varphi} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sin \theta e^{i\varphi} & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Интересно отметить, что связь между оператором  $\sigma_{\theta, \varphi}$  и его «декартовыми компонентами»  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  такая же, как между обычным вектором, направленным по  $\theta, \varphi$ , и его проекциями в декартовой системе координат:

$$\sigma_{\theta, \varphi} = \sigma_1 \sin \theta \cos \varphi + \sigma_2 \sin \theta \sin \varphi + \sigma_3 \cos \theta. \quad (2.45)$$

Матрицы Паули (2.43) обладают следующими алгебраическими свойствами:

$$\sigma_i \sigma_k + \sigma_k \sigma_i = 2\delta_{ik} I, \quad \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_1 = 2i\sigma_3. \quad (2.46)$$

Вводя вектор  $s_i = 1/2\sigma_i$ , получаем коммутационное соотношение

$$s_1 s_2 - s_2 s_1 = i s_3. \quad (2.47)$$

Остальные коммутационные соотношения получаются из (2.47) циклической перестановкой индексов 1, 2, 3. Как показано в гл. 12, таким коммутационным соотношениям удовлетворяют любые три оператора, представляющие в квантовой механике момент количества движения.

Наиболее полная информация об объекте содержится, вообще говоря, в векторе состояния, который представляет собой в общем случае линейную комбинацию векторов  $|a_i^{(1)} a_k^{(2)} \dots\rangle$ , являющихся одновременно собственными векторами всех операторов, представляющих полный набор совместимых физических величин  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots$ . Векторы состояния  $|a_i^{(1)} a_k^{(2)} \dots\rangle$  образуют

полную систему векторов лишь в том случае, если операторы, соответствующие совместимым наблюдаемым величинам  $A^{(1)}, \dots, A^{(n)}$ , коммутируют между собой:

$$A^{(n)}A^{(m)} - A^{(m)}A^{(n)} = 0. \quad (2.48)$$

Чтобы убедиться в этом, предположим, что вектор  $|a_i^{(1)}a_k^{(2)}\rangle$  является собственным вектором одновременно операторов  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$ , отвечающим собственным значениям  $a_i^{(1)}$  и  $a_k^{(2)}$  соответственно, так что

$$[A^{(1)}A^{(2)} - A^{(2)}A^{(1)}] |a_i^{(1)}a_k^{(2)}\rangle = (a_i^{(1)}a_k^{(2)} - a_k^{(2)}a_i^{(1)}) |a_i^{(1)}a_k^{(2)}\rangle = 0. \quad (2.49)$$

Если теперь потребовать, чтобы система векторов  $|a_i^{(1)}a_k^{(2)}\rangle$  была полной, то произвольный вектор состояния  $|b\rangle$  можно разложить в ряд

$$|b\rangle = \sum_i \sum_k c_{ik} |a_i^{(1)}a_k^{(2)}\rangle, \quad c_{ik} = \langle a_i^{(1)}a_k^{(2)} | b \rangle. \quad (2.50)$$

Тогда в силу соотношения (2.49)

$$[A^{(1)}A^{(2)} - A^{(2)}A^{(1)}] |b\rangle = 0, \quad (2.51)$$

что для произвольного вектора  $|b\rangle$  справедливо только в том случае, если

$$A^{(1)}A^{(2)} - A^{(2)}A^{(1)} = 0. \quad (2.52)$$

Общее соотношение (2.48) выводится отсюда методом индукции.

Можно, конечно, считать две или несколько совместимых наблюдаемых величин за одну, но такую, что при ее измерении получается два числа или больше. Такая свобода в выборе подхода связана с возможностью представления оператора

$$A^{(1)}A^{(2)} = A^{(2)}A^{(1)}$$

в виде прямого произведения

$$A = A^{(1)} \times A^{(2)}, \quad (2.53)$$

действующего в пространстве, базис которого образуют произведения  $|a_i^{(1)}\rangle \times |a_k^{(2)}\rangle$ . При этом оператор  $A$  будет диагонален, если матрицы  $A^{(1)}$  и  $A^{(2)}$  диагональны. Последнее утверждение доказывается непосредственным вычислением, исходя из следующих определений.

Прямым произведением двух матриц  $A$  и  $B$

$$C = A \times B \quad (2.54)$$

называется матрица с элементами

$$C_{ijm} = A_{in} B_{jm}. \quad (2.55)$$



Строки матрицы  $C$  нумеруются парами чисел  $ij=11, 12, \dots, 1n, 21, 22, \dots, 2n, \dots$ . Аналогично нумеруются столбцы. Следовательно, прямое произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

равно

$$C = \begin{pmatrix} A_{11}A_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12} \\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22} \\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12} \\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

Легко убедиться в правильности следующих утверждений:

1. Если  $A$  и  $B$  — квадратные матрицы, то матрица  $C$  также квадратная.
2. Если  $AA' = A''$  и  $BB' = B''$  и если  $A \times B = C$  и  $A' \times B' = C'$ , то  $CC' = A'' \times B''$ , или  $(A \times B)(A' \times B') = AA' \times BB'$ .
3. Прямое произведение двух диагональных матриц есть диагональная матрица.
4. Прямое произведение двух единичных матриц есть единичная матрица.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Описание двухкомпонентного спина с помощью трех операторов  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  было предложено Паули [1].

Определение прямого произведения, используемое в этой книге, совпадает с определением Вигнера [2].

### Литература

1. Pauli W., Zs. Phys., 43, 601 (1927).
2. Wigner E., Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, New York, 1959 (см. перевод: Вигнер Е., Теория групп и ее приложения к квантовой механической теории атомных спектров, ИЛ, 1961).

## Преобразования в пространстве векторов состояния, оставляющие инвариантными физические величины

Если суммировать результаты двух предыдущих глав, то можно сказать, что имеются две величины, в которых сосредоточено физическое содержание квантовомеханических состояний.

1. Абсолютная величина проекции одного вектора состояния  $|a\rangle$  на другой вектор состояния  $|b\rangle$ , т. е.  $|\langle b|a\rangle|$ . Эта величина отождествляется с амплитудой вероятности получить при измерении наблюдаемой величины  $B$  значение  $b$ , если известно, что наблюдаемая величина  $A$  имеет значение  $a$ .

2. Среднее значение наблюдаемой величины  $A$  в состоянии  $|b\rangle$ , т. е.  $\bar{A} = \langle b|A|b\rangle$ . Наблюдаемой величине  $A$  сопоставляется линейный эрмитов оператор  $A^+ = A$ , собственные векторы которого  $|a_i\rangle$  удовлетворяют уравнению  $A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ . Векторы  $|a_i\rangle$  образуют ортонормированный базис пространства векторов состояний, т. е.

$$\langle a_i|a_k\rangle = \delta_{ik}, \quad \sum_i |a_i\rangle \langle a_i| = I.$$

Очевидно, эти две экспериментально определяемые величины не меняются при преобразованиях

$$|a\rangle \rightarrow |a'\rangle, \quad |b\rangle \rightarrow |b'\rangle, \quad A \rightarrow A', \quad (3.1)$$

таких, что

$$|\langle b'|a'\rangle| = |\langle b|a\rangle| \quad (3.2)$$

и

$$\bar{A}' = \bar{A}. \quad (3.3)$$

Одним из таких возможных преобразований является переход к новым базисным векторам, что на геометрическом языке соответствует повороту системы координат в пространстве векторов состояния. Соответствующий линейный оператор  $U$  и обратный ему оператор  $U^{-1}$  определяются соотношениями

$$|a\rangle = U|a'\rangle, \quad U^{-1}|a\rangle = |a'\rangle, \quad U(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha U|a\rangle + \beta U|b\rangle. \quad (3.4)$$

При этом должны выполняться условие (3.3) и условие

$$\langle b'|a'\rangle = \langle b|a\rangle, \quad (3.5)$$

которое является более сильным, чем условие (3.2). Эти требования сводятся к тому, что оператор  $U$  должен быть унитарным:

$$UU^+ = U^+U = I, \text{ или } U^{-1} = U^+. \quad (3.6)$$

Условие (3.3) означает, что  $A'$  получается из  $A$  с помощью преобразования

$$A' = U^+AU. \quad (3.7)$$

При этом, если оператор  $A$  эрмитов, то и  $A'$  также является эрмитовым оператором.

Другим возможным преобразованием (3.1), удовлетворяющим равенству (3.2), является преобразование, совершаемое с помощью *нелинейного* оператора  $\Theta$ , определяемого соотношением

$$\Theta(\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle) = \alpha^*\Theta|a\rangle + \beta^*\Theta|b\rangle \quad (3.8)$$

и обладающего свойством

$$\langle \Theta a | \Theta b \rangle = \langle a | b \rangle^* = \langle b | a \rangle. \quad (3.9)$$

Операторы такого типа называются антиунитарными.

Важность указанных свойств инвариантности квантовомеханического описания физической реальности состоит в том, что возникает возможность сопоставить преобразования симметрии в физическом пространстве соответствующим образом выбранные унитарные или антиунитарные преобразования в абстрактном пространстве, образованном векторами состояния. Так, например, инверсия пространственных координат может быть представлена унитарным оператором, тогда как операция обращения движения, формально эквивалентная изменению направления оси времени на противоположное, требует введения антиунитарного оператора, как будет показано в гл. 14 и 15.

Прямым следствием рассмотренной инвариантности относительно унитарных преобразований является возможность выбирать базисные векторы таким образом, чтобы матрицы, представляющие наблюдаемые величины, имели наиболее простой вид. В частности, всегда можно при помощи унитарного преобразования привести эрмитову матрицу  $A$  к диагональному виду. Диагональные элементы такой трансформированной матрицы  $A$  будут являться собственными значениями  $A$ . При этом элементы матрицы преобразования  $U$  будут состоять из компонент не трансформированных собственных векторов исходной матрицы  $A$ .

Чтобы показать это, запишем уравнение  $A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$  в компонентах:

$$\sum_n A_{mn}(a_i)_n = a_i(a_i)_m. \quad (3.10)$$

Совершая затем преобразование  $U$

$$|a_i\rangle = U|a'_i\rangle, \quad U^+|a_i\rangle = |a'_i\rangle, \quad (3.11)$$

получаем

$$a_i|a'_i\rangle = a_i U^+|a_i\rangle = U^+ A|a_i\rangle = U^+ A U U^+|a_i\rangle = A'|a'_i\rangle, \quad (3.12)$$

т. е. собственные значения операторов  $A'$  и  $A$  одинаковы и равны  $a_i$ , а собственные функции оператора  $A'$  имеют вид  $|a'_i\rangle = U^+|a_i\rangle$ . Если выбрать

$$U_{nm} = (a_m)_n, \quad (3.13)$$

т. е.

$$U = \begin{pmatrix} (a_1)_1 & (a_2)_1 & \dots \\ (a_1)_2 & (a_2)_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad U^+ = \begin{pmatrix} (a_1)_1^* & (a_1)_2^* & \dots \\ (a_2)_1^* & (a_2)_2^* & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

то собственные векторы примут простой вид

$$|a'_i\rangle = U^+|a_i\rangle = \begin{pmatrix} \langle a_1|a_i\rangle \\ \langle a_2|a_i\rangle \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_{1i} \\ \delta_{2i} \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

т. е.

$$|a'_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |a'_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \text{ и т. д.}$$

Теперь легко показать, что при помощи оператора (3.13) матрица  $A'$  приводится к диагональному виду, причем диагональные элементы ее равны  $a_i$ . Действительно,

$$(AU)_{mi} = \sum_n A_{mn} U_{ni} = \sum_n A_{mn} (a_i)_n = a_i (a_i)_m. \quad (3.15)$$

Поэтому в силу ортогональности собственных векторов, отвечающих разным собственным значениям, получаем

$$(U^+AU)_{ki} = \sum_m (a_k)_m^* a_i (a_i)_m = a_i \delta_{ik}, \quad (3.16)$$

т. е.

$$A' = U^+ A U = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Часто унитарный оператор удобно записывать в виде

$$U = e^{iS}, \quad (3.17)$$

где генератор этого преобразования  $S$  эрмитов:

$$S^+ = S. \quad (3.18)$$

Символ  $e^{iS}$  означает сумму ряда

$$e^{iS} = I + iS + \frac{i^2}{2!} S^2 + \dots \quad (3.19)$$

В качестве примера рассмотрим унитарную матрицу, столбцами которой являются собственные векторы (2.41), (2.42) общей матрицы спина (2.44):

$$U = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \quad (3.20)$$

$$U^+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Прямым вычислением проверяется унитарность матрицы

$$U U^+ = U^+ U = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

а также то, что преобразование приводит к диагональному виду оператор спина (2.44):

$$\sigma' = U^+ \sigma U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

При этом диагональные элементы оператора спина, как и следовало ожидать, равны  $+1$  и  $-1$ .

Таким образом, из того факта, что  $\theta$  и  $\varphi$  — полярные углы в физическом пространстве, следует, что унитарный оператор (3.20) представляет в абстрактном спиновом пространстве преобразование, соответствующее такому вращению координат в

физическом пространстве, при котором ось  $z'$  совмещается с направлением  $\theta, \varphi$  в исходной системе координат.

Как легко видеть, представление вращения в спиновом пространстве двузначно, т. е. вращение на угол  $\theta = 2\pi$  приводит не к первоначальным состояниям  $|a_1\rangle$  и  $|a_2\rangle$ , а к состояниям  $-|a_1\rangle, -|a_2\rangle$ . Вращение же на угол  $\theta = 4\pi$  дает вновь  $|a_1\rangle$  и  $|a_2\rangle$ . Однако это ни в коей мере не противоречит эксперименту, так как  $|a_i\rangle$  и  $-|a_i\rangle$  описывают одно и то же физическое состояние.

В гл. 12 будет показано, что вращению на угол  $\phi$  вокруг оси с направляющими косинусами  $\alpha, \beta, \gamma$  соответствует оператор

$$U = \exp i\phi(\alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma s_3), \quad (3.23)$$

где  $s_i = \sigma_i/2$ . Используя выражение (3.19) и коммутационные соотношения (2.47) для операторов  $s_i$ , последнее выражение можно представить в виде <sup>1)</sup>

$$U = \cos \frac{\phi}{2} + 2i(\alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma s_3) \sin \frac{\phi}{2}. \quad (3.24)$$

Следует иметь в виду, что

$$\exp [i\phi(\alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma s_3)] \neq \exp (i\phi\alpha s_1) \exp (i\phi\beta s_2) \exp (i\phi\gamma s_3).$$

### ПРИМЕЧАНИЯ

Унитарные операторы широко использовались с тех пор, как их важная роль в квантовой механике была полностью выяснена Дираком [1] и Иорданом [2]. С другой стороны, антиунитарные операторы, хотя на их значение в квантовой механике было обращено внимание Вигнером [3] много лет назад, не занимали равного с унитарными операторами положения вплоть до недавнего времени, когда в экспериментальных исследованиях по физике элементарных частиц выдвинулись на передний план вопросы временной симметрии.

### Литература

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A113, 621 (1927).
2. Jordan P., Zs. Phys., 40, 809 (1927).
3. Wigner E., Nachr. Akad. Wiss. Goettingen, Math.-Phys. Kl. S. 546 (1932).
- 4\*. Киржниц Д. А., Полевые методы теории многих частиц, Приложение Б, М., 1963.

<sup>1)</sup> Это выражение вытекает из равенства  $(\alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma s_3)^2 = 1/4$ , следующего из правил коммутации, и общей формулы

$$f(x) = \frac{1}{2} [f(\xi) + f(-\xi)] + \frac{x}{2\xi} [f(\xi) - f(-\xi)],$$

где  $x$  — некоторый оператор, квадрат которого  $\xi^2$  является  $c$ -числом. Общие правила обращения с функциями некоммутирующих аргументов можно найти, например, в работе [4\*]. — Прим. ред.

## Матрица плотности

Существует и другой способ описания состояния объекта, отличающийся от описания с помощью векторов состояния тем, что в нем не возникает произвола, связанного с фазой. Он состоит в использовании эрмитовой матрицы  $M(b)$ , элементы которой выражаются через компоненты  $(b)_i$  соответствующего вектора состояния  $|b\rangle$  следующим образом:

$$M_{ik}(b) = (b)_i (b)_k^*, \quad \text{или} \quad M = |b\rangle \langle b|. \quad (4.1)$$

Условие нормировки вектора состояния  $\langle b|b\rangle = 1$  эквивалентно условию

$$\text{Sp } M = 1, \quad (4.2)$$

где  $\text{Sp } M$  обозначает след, т. е. сумму диагональных элементов матрицы  $M$ . Среднее значение  $\bar{A}$  наблюдаемой величины  $A$  в состоянии, описываемом  $M(b)$ , вычисляется следующим образом:

$$\bar{A} = \text{Sp}(MA) = \text{Sp}(AM). \quad (4.3)$$

Действительно, в состоянии  $|b\rangle$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \sum_n \sum_m (b)_m^* A_{mn} (b)_n = \\ &= \sum_n \sum_m M_{nm}(b) A_{nm} = \sum_n |M(b)A|_{nn} = \text{Sp}(MA). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Из (4.1) следует, что если матрица  $M$ , называемая матрицей плотности, описывает чистое состояние  $|b\rangle$ , то она удовлетворяет условию

$$M^2 = M. \quad (4.5)$$

В этом можно убедиться, если принять во внимание условие нормировки векторов состояния

$$(M^2)_{ik} = \sum_j M_{ij} M_{jk} = \sum_j (b)_i (b)_j^* (b)_j (b)_k^* = (b)_i (b)_k^* = M_{ik}. \quad (4.6)$$

Очевидно, эрмитова матрица может удовлетворять условию (4.5) только в том случае, если все ее собственные значения

удовлетворяют тому же условию, т. е. собственные значения матрицы плотности должны быть равными либо 0, либо +1. Но тогда из (4.2) следует, что только одно собственное значение матрицы  $M$  равно +1, а все остальные равны нулю, так как  $M$  может быть приведена к диагональному виду унитарным преобразованием, оставляющим след неизменным:

$$\text{Sp} (U^+ M U) = \text{Sp} (M U U^+) = \text{Sp} M.$$

На геометрическом языке это означает, что  $M(b)$  — оператор проектирования, который, действуя на произвольный вектор  $|a\rangle$ , проектирует его на собственный вектор  $|b\rangle$ , отвечающий собственному значению +1 оператора  $M$ .

Действительно, если  $|b_r\rangle$  — собственный вектор  $M(b_r)$ , отвечающий собственному значению +1, а  $|b_s\rangle$  при  $s \neq r$  — остальные собственные векторы, отвечающие собственным значениям, равным 0, т. е.

$$M(b_r) |b_s\rangle = \left[ \sum_k (b_r)_i (b_r)_k^* (b_s)_k \right] = \delta_{rs} |b_s\rangle, \quad (4.7)$$

то из разложения

$$|a\rangle = \sum_s |b_s\rangle \langle b_s | a \rangle \quad (4.8)$$

немедленно следует, что

$$M(b_r) |a\rangle = |b_r\rangle \langle b_r | a \rangle. \quad (4.9)$$

Таким образом, оператор проектирования  $M(b_r)$  играет роль своего рода «символа селективного измерения»<sup>1)</sup>, поскольку он выбирает из всех исследуемых объектов только те, у которых характеристика  $B$  имеет значение, равное  $b_r$ , и отбрасывает все остальные.

Среднее значение матрицы плотности  $M(b)$  в состоянии  $|a\rangle$  оказывается теперь равным вероятности обнаружить значение  $b$  наблюдаемой величины  $B$ , если известно, что величина  $A$  принимает значение  $a$ :

$$\overline{M(b)} = \langle a | M(b) | a \rangle = \langle a | b \rangle \langle b | a \rangle = |\langle a | b \rangle|^2. \quad (4.10)$$

Поскольку среднее значение эрмитова оператора  $M(b)$  в состоянии  $|a\rangle$ , которое характеризуется матрицей плотности  $M(a)$ , вычисляется по общей формуле (4.4), можно получить следующий интересный результат:

$$|\langle a | b \rangle|^2 = \text{Sp} [M(a) M(b)]. \quad (4.11)$$

Поэтому, используя только символ матрицы плотности, можно получить полное физическое описание чистых состояний.

<sup>1)</sup> См. ниже гл. 5. — Прим. ред.



Рассмотрим вновь в качестве примера вектор состояния

$$|a_1\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix},$$

описывающий спин, имеющий определенное значение проекции на направление  $\theta$ ,  $\varphi$ , равное  $+1$ . Соответствующая матрица плотности

$$M = \begin{pmatrix} |\alpha_1|^2 & \alpha_1\beta_1^* \\ \beta_1\alpha_1^* & |\beta_1|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

имеет след, равный единице, и удовлетворяет условию  $M^2 = M$ . Полезное представление для  $M$  получается, если учесть, что всякую квадратную двухрядную матрицу можно записать в виде линейной комбинации четырех линейно независимых матриц

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & I &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Если  $M$  — эрмитова матрица со следом, равным единице, то это разложение имеет вид

$$M = \frac{1}{2}(I + \mathbf{P}\sigma), \quad (4.13)$$

где  $\mathbf{P} = (P_1, P_2, P_3)$  — вектор, три действительные компоненты которого характеризуют состояние. Условие  $M^2 = M$  может быть выполнено только в том случае, если  $\mathbf{P}$  удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}^2 = 1 \quad (4.14)$$

и, следовательно, состояние системы описывается двумя параметрами, как и должно быть. В самом деле, используя соотношения (2.46), из (4.13) и (4.14) получаем

$$\begin{aligned} M^2 &= \frac{1}{4}(I + \mathbf{P}\sigma)(I + \mathbf{P}\sigma) = \\ &= \frac{1}{4} \left[ I + 2\mathbf{P}\sigma + \sum_i P_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{\substack{j, k \\ (\text{цикл.})}} P_j P_k (\sigma_j \sigma_k + \sigma_k \sigma_j) \right] = \\ &= \frac{1}{4}(I + 2\mathbf{P}\sigma + \mathbf{P}^2 I) = \frac{1}{2}(I + \mathbf{P}\sigma) = M. \quad (4.15) \end{aligned}$$

Конкретное выражение вектора  $\mathbf{P}$  через компоненты  $\alpha_1, \beta_1$  находится приравниванием матричных элементов матриц (4.12) и (4.13):

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 \operatorname{Re} (\beta_1 \alpha_1^*) = \sin \theta \cos \varphi, \\ P_2 &= 2 \operatorname{Im} (\beta_1 \alpha_1^*) = \sin \theta \sin \varphi, \\ P_3 &= |\alpha_1|^2 - |\beta_1|^2 = \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Таким образом, единичный вектор  $\mathbf{P}$  имеет направление  $\theta, \varphi$  и может быть назван вектором поляризации состояния. Единичная длина вектора  $\mathbf{P}$ , вытекающая из условия  $M^2 = M$ , отражает тот факт, что поляризация объекта в чистом спиновом состоянии является полной, т. е. соответствующая проекция равна единице.

Все сказанное до сих пор касалось лишь тех величин, которые могут быть выражены через векторы состояния и их компоненты. Однако квантовомеханическое описание с помощью матрицы плотности обладает тем преимуществом, что оно позволяет придать  $M$  определенный смысл даже тогда, когда объект не находится в чистом состоянии и когда матричные элементы  $M$  принципиально невозможно представить в виде, аналогичном (4.1). С помощью матрицы плотности можно описывать состояния, которые не характеризуются каким-либо вектором состояния.

В качестве модели рассмотрим ситуацию, когда измерения производятся над статистическим ансамблем, состоящим из  $N$  подсистем, которые могут находиться в различных квантовых состояниях. Предположим, что каждая из  $N$  подсистем может находиться в некотором числе возможных квантовых состояний и описывается матрицей плотности  $M_n = M(b_n)$ . Максимальная информация относительно наблюдаемой величины  $A$  будет получена в этом случае, если средние значения  $\bar{A}_n$  наблюдаемой величины  $A$  усреднить еще по ансамблю, а именно

$$\bar{A} = \sum_n p_n \bar{A}_n, \quad (4.17)$$

где  $p_n$  — вероятность найти значение  $\bar{A}_n$  в ансамбле

$$\sum_n p_n = 1, \quad p_n \geq 0. \quad (4.18)$$

Формула, позволяющая вычислять среднее значение какой-либо характеристики в чистом состоянии при помощи матрицы плотности, может быть обобщена на рассматриваемый более общий случай, если ввести обобщенную матрицу плотности

$$M = \sum_n p_n M_n, \quad (4.19)$$

которая в силу соотношения (4.18) удовлетворяет условию

$$\text{Sp } M = 1 \quad (4.20)$$

и приводит к желаемому результату

$$\bar{\bar{A}} = \text{Sp}(MA) = \sum_n p_n \text{Sp}(M_n A) = \sum_n p_n \bar{\bar{A}}_n. \quad (4.21)$$

Эта обобщенная матрица плотности более не удовлетворяет условию  $M^2 = M$ , за исключением случая, когда все  $M_n$  равны  $M$ . Таким образом, условие  $M^2 = M$  является условием того, что система находится в чистом состоянии. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим систему, состоящую из двух подсистем, описываемых матрицами плотности  $M_1$  и  $M_2$ , так что

$$M = p_1 M_1 + p_2 M_2 \quad (4.22)$$

$(0 < p_1 < 1), \quad (0 < p_2 < 1), \quad (p_1 + p_2 = 1).$

Квадрат этой матрицы

$$M^2 = p_1^2 M_1^2 + p_2^2 M_2^2 + p_1 p_2 (M_1 M_2 + M_2 M_1) \quad (4.23)$$

в силу тождеств

$$M_1 M_2 + M_2 M_1 = M_1^2 + M_2^2 - (M_1 - M_2)^2 \quad (4.24)$$

и

$$p_1^2 + p_1 p_2 = p_1 (p_1 + p_2) = p_1, \quad p_2^2 + p_1 p_2 = p_2 \quad (4.25)$$

может быть записан в виде

$$M^2 = p_1 M_1^2 + p_2 M_2^2 - p_1 p_2 (M_1 - M_2)^2. \quad (4.26)$$

Так как матрицы  $M_1$  и  $M_2$  каждая в отдельности удовлетворяют условию  $M^2 = M$ , находим

$$M - M^2 = p_1 p_2 (M_1 - M_2)^2. \quad (4.27)$$

Правая часть этого уравнения представляет собой положительную матрицу; следовательно,  $M$  будет равна  $M^2$  только в том случае, если  $(M_1 - M_2)^2 = 0$ . Квадрат эрмитовой матрицы обращается в нуль только тогда, когда все ее элементы равны нулю. Поэтому необходимым условием выполнения равенства  $M^2 = M$  является равенство  $M_1 = M_2$ . Доказательство для общего случая следует отсюда по индукции.

Следует заметить здесь, что в квантовой статистической механике выражение  $\Sigma = -(\ln M) = -\text{Sp}(M \ln M)$  определяет энтропию статистического ансамбля, описываемого матрицей плотности  $M$ . Энтропия обращается в нуль в случае чистого состояния,

и только в этом случае. Используя этот способ, можно обойтись без понятия «фазового пространства», вводимого в классической статистической механике и не имеющего смысла в квантовой механике в силу того, что импульс и координата являются несовместимыми характеристиками.

Необходимо подчеркнуть, что рассмотренная модель состояния ансамбля, которое не является чистым состоянием<sup>1)</sup>, становится фиктивной, если из эксперимента в принципе нельзя получить оптимальной информации о подсистемах всего объекта. Например, рассмотрим в качестве объекта частично поляризованный пучок электронов. Рассматривая его как ансамбль, введем матрицу плотности

$$M = \sum_n p_n M_n = \sum_n p_n \frac{1}{2} (I + \mathbf{P}_n \boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} (I + \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\sigma}), \quad (4.28)$$

где средняя поляризация

$$\bar{\mathbf{P}} = \sum_n p_n \mathbf{P}_n \quad (4.29)$$

не является более единичным вектором и  $M$  не удовлетворяет более условию (4.5). Абсолютная величина  $|\bar{\mathbf{P}}|$  определяет степень поляризации пучка: значение  $|\bar{\mathbf{P}}| = 0$  соответствует случаю, когда пучок не поляризован, а  $|\bar{\mathbf{P}}| = 1$  — предельному случаю полной поляризации. Если  $\bar{\mathbf{P}}$  — единственный измеряемый параметр объекта, то разложение (4.29) теряет смысл, поскольку вся получаемая из эксперимента информация содержится в матрице плотности

$$M = \frac{1}{2} (I + \bar{\mathbf{P}} \boldsymbol{\sigma}). \quad (4.30)$$

Поэтому представление о системе электронов, как о системе частиц, спин каждой из которых имеет *вполне определенную* ориентацию, задаваемую единичным вектором  $\mathbf{P}_n$ , фиктивно и вводить его с операционалистской точки зрения нежелательно.

Отметим в связи с этим общий результат

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_i &= \text{Sp}(\sigma_i M) = \frac{1}{2} \text{Sp} \sigma_i + \frac{1}{2} \text{Sp} \bar{P}_i + \text{Sp} \left[ \sum_{\substack{k \\ k \neq i, j \neq k, l \neq i}} \sigma_i \bar{P}_k \sigma_j \right] = \\ &= \frac{1}{2} \text{Sp} \bar{P}_i = \bar{P}_i. \end{aligned} \quad (4.31)$$

<sup>1)</sup> Такого рода состояния называются смешанными. — Прим. ред.

**ПРИМЕЧАНИЯ**

На возможность описания состояния системы матрицей плотности первым указал Ландау [1]. Немного позднее Нейман [2] опубликовал две статьи, в которых с помощью матрицы плотности дал весьма полный анализ вопросов, связанных с вероятностной интерпретацией квантовой механики и термодинамики квантовомеханических ансамблей. См. также работы Дирака [3] и Паули [4].

Исчерпывающий обзор применений матрицы плотности дал Фано [5].

Вильямс [6] в гл. 8 своей книги использовал метод матрицы плотности для анализа поляризационных эффектов в процессах рассеяния.

**Л и т е р а т у р а**

1. Л а н д а у Л., Zs. Phys., **45**, 430 (1927).
2. N e u m a n n J., Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math.-Phys., Kl., S. 245, 273 (1927).
3. D i r a c P. A. M., Proc. Cambridge Phil. Soc., **25**, 62 (1929).
4. P a u l i W., Die Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, в книге Handbuch der Physik, Bd. V, 1, Berlin, 1958, S. 69 (см. перевод издания 1933 г.: Паули В., Общие принципы волновой механики, М., 1947).
5. F a n o U., Rev. Mod. Phys., **29**, 74 (1957).
6. W i l l i a m s W. S. C., An Introduction to Elementary Particles, New York, 1961.

## Теория селективных измерений

Описание физических объектов при помощи матрицы плотности может рассматриваться как частный случай более общего метода, основанного на анализе экспериментальных ситуаций, возникающих при селективных измерениях.

Начнем с того, что введем символ  $M(a_i)$ , соответствующий единичному селективному измерению с помощью прибора, выбирающего из всей совокупности исследуемых объектов лишь те, у которых характеристика  $A$  имеет определенное значение  $a_i$ , и отбрасывающего все остальные. Если под  $A$  понимается оператор, представляющий полный набор совместимых наблюдаемых величин, т. е.  $A = A^{(1)} \times A^{(2)} \times \dots$ , то  $M(a_i)$  означает полное селективное измерение, при котором отбираются только те объекты, у которых максимальное число характеристик имеет определенные значения, обозначаемые  $a_i$ . В результате двух селективных измерений  $M(a_i)$  и  $M(a_k)$ , выполненных в произвольной последовательности, при  $i = k$  остаются все объекты с заданными характеристиками  $a_i$ , а при  $i \neq k$  все объекты отбрасываются. Обозначая через  $I$  или  $O$  измерения, сохраняющие или отбрасывающие все объекты, можно представить последовательность измерений в виде произведения соответствующих символов, удовлетворяющих соотношениям

$$M(a_i) M(a_k) = M(a_k) M(a_i) = \delta_{ik} M(a_i), \quad (5.1)$$

где

$$\delta_{ik} = \begin{cases} I & \text{при } i = k, \\ O & \text{при } i \neq k. \end{cases} \quad (5.2)$$

Если далее ввести сумму таких символов  $M(a_i)$ ,  $M(a_k)$ , которая означает отбор объектов с характеристиками, равными либо  $a_i$ , либо  $a_k$ , то тогда условие полноты набора измерений наблюдаемой величины  $A$  заключается в утверждении, что

$$\sum_i M(a_i) = I. \quad (5.3)$$

Чтобы учесть изменение состояния объекта в результате измерения, а также тот факт, что существуют наборы несовместимых

мых наблюдаемых величин, необходимо рассмотреть более общее селективное измерение, производимое с помощью такого прибора, на входе которого пропускаются лишь объекты, находящиеся в состоянии  $b_i$ , а на выходе появляются только объекты в состоянии  $a_k$ . Обозначим такой процесс измерения символом  $M(a_k, b_i)$ . Необходимо при этом подчеркнуть, что предполагается полное отсутствие сведений о том, что происходит внутри прибора в промежутке между входом и выходом. Поэтому  $M(a_k, b_i)$  не совпадает с  $M(a_k)M(b_i)$ , в частности, символ  $M(a_k, a_j)$  при  $k \neq j$  не эквивалентен символу  $O$ . Однако операция  $M(a_i)$  может рассматриваться как частный случай селективного измерения, при котором не происходит изменения состояния:

$$M(a_i) = M(a_i, a_i). \quad (5.4)$$

Во многих случаях символ измерения, такой как  $M(a_k, b_i)$ , удобно представлять графически, в виде схемы, включающей «черный ящик», который символизирует отсутствие сведений о том, что происходит в промежутке между входом и выходом; начальное и конечное состояния представляются прямыми линиями, входящими и выходящими из черного ящика и помеченными соответствующими квантовыми числами, как показано на фиг. 1.



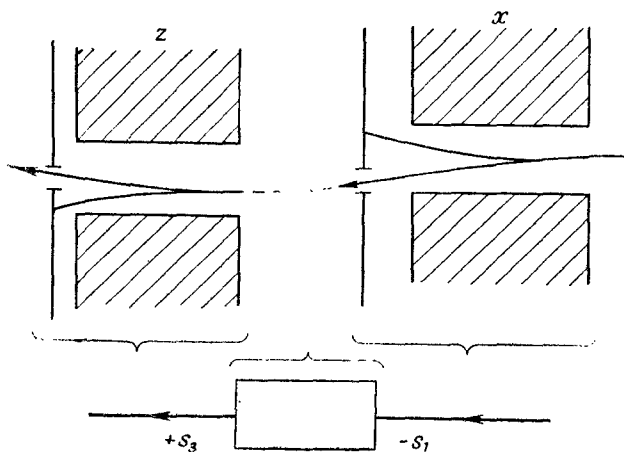
Фиг. 1. Графическое представление символа измерения  $M(a_k, b_i)$  в виде схемы, содержащей черный ящик.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть  $\pm s_1, \pm s_2, \pm s_3$  обозначают возможные значения проекции спина объекта на направления  $x, y$  и  $z$  соответственно, так что, например,  $-s_1$  означает «спин  $-1/2$  в направлении  $x$ ». Например, измерение  $M(+s_3, -s_1)$  может быть выполнено на экспериментальной установке, показанной на фиг. 2; там же приведена соответствующая схема, содержащая черный ящик. Установка изображена лежащей в одной плоскости; несущественные отклонения пучка не указаны. Магниты обозначены в соответствии с теми осями, вдоль которых направлены создаваемые ими магнитные поля. Состояния на входе и выходе устройства соответствуют селективным измерениям в опыте Штерна — Герлаха; в промежуточной области, обозначенной пунктиром, какие-либо сведения о пучке отсутствуют.

Сложное измерение  $M(a_m, b_j)M(c_k, d_i)$ , состоящее в том, что на входе отбираются состояния  $d_i$ , а на выходе — состояния  $a_m$ , является селективным измерением типа  $M(a_m, d_i)$ . Если  $C$  и  $B$  несовместимы, то только некоторая статистически предсказуемая часть объектов после операции  $M(c_k, d_i)$  сможет пройти через стадию измерения  $M(a_m, b_j)$ . Отсюда следует правило умножения

$$M(a_m, b_j)M(c_k, d_i) = \langle b_j | c_k \rangle M(a_m, d_i), \quad (5.5)$$

где  $\langle b_j | c_k \rangle$  — некоторое число, отражающее статистическую взаимосвязь между состояниями  $b_j$  и  $c_k$ . Необходимо подчеркнуть,



Фиг. 2. Экспериментальная установка и соответствующая схема, содержащая черный ящик, которая представляет символ измерения  $M(+s_3, -s_1)$ .

что обозначение для этого числа имеет чисто условный смысл и на данном этапе ничего не говорит относительно возможной геометрической интерпретации в каком-либо абстрактном пространстве.

Значение  $\langle b_j | c_k \rangle$  легко определить в частном случае совместимых наблюдаемых величин, поскольку при этом имеет место соотношение

$$M(a_m, b_j)M(b_k, c_i) = \delta_{jk}M(a_m, c_i). \quad (5.6)$$

Действительно, если  $b_j \neq b_k$ , то на втором этапе сложного измерения не останется ни одного объекта, отобранного на первой стадии, в то время как при  $b_j = b_k$  все объекты, отобранные на первом этапе, остаются после второго отбора. Следовательно,

$$\langle b_j | b_k \rangle = \delta_{jk}. \quad (5.7)$$



Другими частными случаями (5.5) являются

$$M(a_j)M(b_k, c_i) = \langle a_j | b_k \rangle M(a_j, c_i), \quad (5.8)$$

$$M(a_j, b_k)M(c_i) = \langle b_k | c_i \rangle M(a_j, c_i). \quad (5.9)$$

Если в (5.5) изменить последовательность селективных измерений, то получим соотношение

$$M(c_k, d_i)M(a_m, b_j) = \langle d_i | a_m \rangle M(c_k, b_j), \quad (5.10)$$

отличное, вообще говоря, от (5.6). Произведение символов измерения в общем случае некоммумутативно. Из условия полноты (5.3), а также из (5.8) и (5.9) следует, что

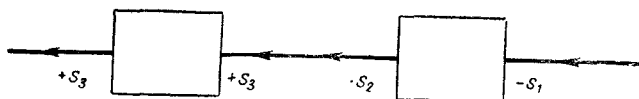
$$\sum_j M(a_j)M(b_k, c_i) = M(b_k, c_i) = \sum_j \langle a_j | b_k \rangle M(a_j, c_i), \quad (5.11)$$

$$\sum_i M(a_j, b_k)M(c_i) = M(a_j, b_k) = \sum_i \langle b_k | c_i \rangle M(a_j, c_i). \quad (5.12)$$

Таким образом, символ измерения одного типа может быть представлен как линейная комбинация символов измерения другого типа. Дважды производя такое разложение, можно получить

$$\begin{aligned} M(c_k, d_i) &= \sum_m \sum_j M(a_m)M(c_k, d_i)M(b_j) = \\ &= \sum_m \sum_j \langle a_m | c_k \rangle \langle d_i | b_j \rangle M(a_m, b_j). \end{aligned} \quad (5.13)$$

В силу этого свойства величин  $\langle a_k | b_i \rangle$  устанавливать связи между символами измерения совокупность чисел  $\langle a_k | b_i \rangle$  называют «функцией преобразования, связывающего  $A$ - и  $B$ -описания».



Фиг. 3. Содержащая черный ящик схема, представляющая измерение  $M(+s_3)M(-s_2, -s_1)$ .

В качестве примера сложных селективных опытов Штерна — Герлаха рассмотрим измерение  $M(+s_3)M(-s_2, -s_1)$ , изображенное графически на фиг. 3. Уравнение (5.8) в данном случае принимает вид

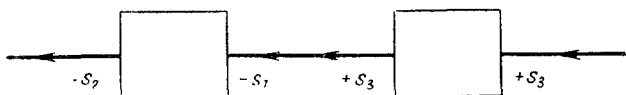
$$M(+s_3)M(-s_2, -s_1) = \langle +s_3 | -s_2 \rangle M(+s_2, -s_1). \quad (5.8a)$$

Из него следует, что это измерение соответствует только одному каналу измерения  $M(+s_3, -s_1)$ , изображенного графически на фиг. 2, который представлен с амплитудой  $\langle +s_3 | -s_2 \rangle$ .

Проводя сложные селективные эксперименты, изображенные графически на фиг. 3, в обратном порядке, получаем совершенно иной случай, а именно, измерение  $M(-s_2, -s_1)M(+s_3)$ , изображенное графически на фиг. 4. В этом случае из уравнения (5.9)

$$M(-s_2, -s_1)M(+s_3) = \langle -s_1 | +s_3 \rangle M(-s_2, +s_3) \quad (5.9a)$$

следует, что  $\langle -s_1 | +s_3 \rangle$  представляет собой амплитуду, определяющую вклад данного канала в измерение  $M(-s_2, +s_3)$ , отличающееся от изображенного на фиг. 2.



Фиг. 4. Схема, представляющая измерение  $M(-s_2, -s_1)M(+s_3)$ .

Функции преобразования обладают свойством

$$\sum_k \langle a_j | b_k \rangle \langle b_k | c_i \rangle = \langle a_j | c_i \rangle. \quad (5.14)$$

Это следует из соотношений

$$\begin{aligned} \sum_k \langle a_j | b_k \rangle \langle b_k | c_i \rangle M(a_j, c_i) &= \sum_k M(a_j) M(b_k) M(c_i) = \\ &= M(a_j) M(c_i) = \langle a_j | c_i \rangle M(a_j, c_i). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Будем называть *оператором* любую линейную комбинацию символов измерения, обозначая его прописными буквами  $X, Y, \dots$ . Оператор  $X$  записывается в виде

$$X = \sum_i \sum_k \langle a_k | X | b_i \rangle M(a_k, b_i). \quad (5.16)$$

При этом коэффициенты разложения  $\langle a_k | X | b_i \rangle$  образуют квадратную матрицу ранга  $N$ ; они называются *матричными элементами* оператора  $X$ . Следовательно, эти операторы являются элементами в  $N^2$ -мерной линейной алгебре, где  $N$  — число различных значений  $a_i$ , характеризующих полный набор наблюдаемых величин  $A$ . В этой алгебре величину  $\langle a_i | b_k \rangle$  можно рассматривать как линейную численную функцию оператора  $M(b_k, a_i)$ , которую, предвосхищая очевидное матричное представление, мы будем называть *следом оператора*  $M(b_k, a_i)$ :

$$\langle a_i | b_k \rangle = \text{Sp } M(b_k, a_i). \quad (5.17)$$

Это определение является разумным, так как линейное соотношение (5.13) позволяет написать

$$\begin{aligned} \text{Sp } M(c_k, d_i) &= \sum_m \sum_j \langle a_m | c_k \rangle \langle d_i | b_j \rangle \text{Sp } M(a_m, b_j) = \\ &= \sum_m \sum_j \langle a_m | c_k \rangle \langle d_i | b_j \rangle \langle b_j | a_m \rangle = \sum_j \langle d_i | b_j \rangle \langle b_j | c_k \rangle = \langle d_i | c_k \rangle. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Отсюда в частных случаях получаем

$$\text{Sp } M(a_k, a_i) = \delta_{ik}, \quad (5.19)$$

$$\text{Sp } M(a_i) = I. \quad (5.20)$$

След произведения двух символов измерения равен

$$\text{Sp } [M(a_m, b_j) M(c_k, d_i)] = \langle b_j | c_k \rangle \text{Sp } M(a_m, d_i) = \langle b_j | c_k \rangle \langle d_i | a_m \rangle. \quad (5.21)$$

С другой стороны,

$$\text{Sp } [M(c_k, d_i) M(a_m, b_j)] = \langle d_i | a_m \rangle \text{Sp } M(c_k, b_j) = \langle d_i | a_m \rangle \langle b_j | c_k \rangle. \quad (5.22)$$

Следовательно, след произведения двух операторов, даже если они не коммутируют между собой, не зависит от порядка их умножения:

$$\text{Sp } (XY) = \text{Sp } (YX). \quad (5.23)$$

В частном случае из (5.21) следует

$$\text{Sp } [M(a_i) M(b_k)] = \langle b_k | a_i \rangle \langle a_i | b_k \rangle. \quad (5.24)$$

Общее правило умножения символов измерения (5.5) и само определение следа (5.17), очевидно, инварианты относительно преобразований

$$\begin{aligned} M(a_k, b_i) &\rightarrow \gamma^{-1}(a_k) M(a_k, b_i) \gamma(b_i), \\ \langle a_k | b_i \rangle &\rightarrow \gamma(a_k) \langle a_k | b_i \rangle \gamma^{-1}(b_i), \end{aligned} \quad (5.25)$$

где величины  $\gamma(a_k)$  и  $\gamma(b_i)$  могут принимать произвольные ненулевые значения. Величины  $M(a_i)$  и  $\langle a_i | a_k \rangle = \delta_{ik}$ , как легко видеть, также инвариантны.

Связь со статистической интерпретацией квантовой механики, развитой в предыдущих главах теперь наиболее естественно установить, рассматривая последовательность измерений  $M(b_i)M(a_k)M(b_i)$ , отличающуюся от  $M(b_i)$ , так как на этапе  $M(a_k)$  при измерении характеристики  $A$  вносится возмущение; только часть объектов, отобранных на первой стадии измерения  $M(b_i)$ , проходит через последнюю стадию измерения  $M(b_i)$ . Входящая в уравнение

$$M(b_i) M(a_k) M(b_i) = p(a_k, b_i) M(b_i) \quad (5.26)$$

величина

$$p(a_k, b_i) = \langle a_k | b_i \rangle \langle b_i | a_k \rangle \quad (5.27)$$

в отличие от  $\langle a_k | b_i \rangle$  инвариантна относительно преобразования (5.25) и обладает свойством аддитивности:

$$M(b_i) [M(a_k) + M(a_j)] M(b_i) = [p(a_k, b_i) + p(a_j, b_i)] M(b_i). \quad (5.28)$$

Поэтому из соотношения

$$M(b_i) \left[ \sum_k M(a_k) \right] M(b_i) = M(b_i) \quad (5.29)$$

следует

$$\sum_k p(a_k, b_i) = 1. \quad (5.30)$$

Таким образом, величина  $p(a_k, b_i)$  может рассматриваться как вероятность наблюдения  $a_k$ , если известно, что объект находится в состоянии  $b_i$ . Так как вероятность всегда действительна и неотрицательна, вполне допустимо на величины  $\langle a_k | b_i \rangle$  наложить следующее ограничение:

$$\langle b_i | a_k \rangle = \langle a_k | b_i \rangle^*, \quad (5.31)$$

поскольку при этом

$$p(a_k, b_i) = |\langle a_k | b_i \rangle|^2 \geq 0. \quad (5.32)$$

Условие (5.31) налагает на входящие в (5.25) величины  $\gamma(a_k)$ ,  $\gamma(b_i)$  ограничение

$$\gamma^*(a_k) = \gamma^{-1}(a_k), \quad (5.33)$$

означающее, что эти величины должны иметь вид

$$\gamma(a_k) = e^{i\phi(a_k)}, \quad (5.34)$$

где  $\phi(a_k)$  — произвольная вещественная фаза.

Исходя из определений оператора и следа (5.16) и (5.17), матричные элементы оператора можно представить в виде

$$\langle a_k | X | b_i \rangle = \text{Sp} [XM(b_i, a_k)]. \quad (5.35)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \text{Sp} [XM(b_i, a_k)] &= \sum_j \sum_m \langle a_m | X | b_j \rangle \text{Sp} [M(a_m, b_j) M(b_i, a_k)] = \\ &= \sum_j \sum_m \langle a_m | X | b_j \rangle \langle b_j | b_i \rangle \text{Sp} M(a_m, a_k) = \\ &= \sum_m \langle a_m | X | b_i \rangle \langle a_k | a_m \rangle = \langle a_k | X | b_i \rangle. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Выражение для среднего значения оператора  $X$  в состоянии  $b_i$  следует из (5.35) как частный случай

$$\bar{X} = \langle b_i | X | b_i \rangle = \text{Sp} [XM(b_i)]. \quad (5.37)$$

Таким образом, отсюда следует, что символ  $M(b_i)$  совпадает с матрицей плотности  $M(b_i)$ , введенной в предыдущей главе.

Оправданием для представления среднего значения в виде (5.37) служит выражение

$$p(a_k, b_i) = \text{Sp} [M(a_k) M(b_i)], \quad (5.38)$$

которое вытекает из определения вероятности и позволяет записать среднее значение наблюдаемой величины

$$\bar{A}_{b_i} = \sum_k a_k p(a_k, b_i) \quad (5.39)$$

в виде

$$\bar{A}_{b_i} = \sum_k \text{Sp} [a_k M(a_k) M(b_i)] = \text{Sp} [A M(b_i)], \quad (5.40)$$

где

$$A = \sum_k a_k M(a_k). \quad (5.41)$$

В заключение приведем таблицу, в которой сравниваются описания имеющих физический смысл величин в представлении векторов состояния и в представлении символов измерения.

Представление векторов состояния	Представление символов измерения
$(b_k)_r (a_i)_s^*$ или $ b_k\rangle \langle a_i $ $(b_k)_r (b_k)_s^*$ $\langle a_k   b_i \rangle$ $\langle a_k   a_i \rangle = \delta_{ik}$ $ \langle a_k   b_i \rangle ^2 = p(a_k, b_i)$ $\langle a_k   X   b_i \rangle$ $\langle b_i   X   b_i \rangle = \bar{X}$	$M_{rs}(b_k, a_i)$ или $M(b_k, a_i)$ $M_{rs}(b_k)$ $\text{Sp} M(b_i, a_k)$ $\text{Sp} M(a_i, a_k) = \delta_{ik}$ $\text{Sp} [M(b_i) M(a_k)] = p(a_k, b_i)$ $\text{Sp} [X M(b_i, a_k)]$ $\text{Sp} [X M(b_i)] = \bar{X}$

### ПРИМЕЧАНИЕ

В гл. 5 и 6 изложение основано на работе Швингера [1].

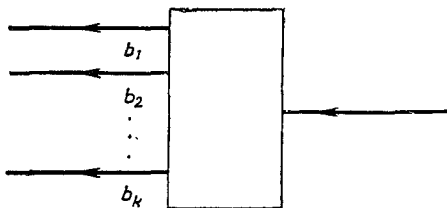
### Литература

1. Schwinger J., The algebra of microscopic measurement, Proc. Natl. Acad. Sci. US, 45, 1542 (1959).

## Представление неселективных измерений

Символы измерения  $M(a_i) = M(a_i, a_i)$ , введенные в предыдущей главе, относятся к прибору, который не только разбивает ансамбль объектов на подансамбли, находящиеся в разных состояниях  $a_1, a_2, \dots$ , но и выбирает среди них лишь один подансамбль  $a_i$ , отбрасывая все остальные.

Разумеется, возможен прибор, который производит неселективное измерение, заключающееся только в разделении ансамбля на подансамбли, без какого-либо их отбора. Если разделение производится по отношению к наблюдаемой величине



Фиг. 5. Схема, представляющая символ неселективного измерения  $M_b$ .

$B$ , то соответствующий символ измерения обозначается  $M_b$  и графически изображается так, как представлено на фиг. 5. Чтобы выразить  $M_b$  через символы селективного измерения  $M(b_k)$ ,



Фиг. 6. Схема, представляющая измерение  $M(a_j, b_k) M(b_k, c_i)$ .

рассмотрим некоторый объект и произведем над ним сначала селективное измерение  $M(b_k, c_i)$ , а затем селективное измерение  $M(a_j, b_k)$ , как это показано на фиг. 6. Вероятность того, что при таком измерении будет получено значение  $b_k$  наблюдаемой ве-

личины  $B$ , а затем значение  $a_j$  наблюдаемой величины  $A$ , равна

$$p(a_j, b_k, c_i) = p(a_j, b_k) p(b_k, c_i) = \\ = |\langle a_j | b_k \rangle \langle b_k | c_i \rangle|^2 = |\langle a_j | M(b_k) | c_i \rangle|^2. \quad (6.1)$$

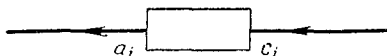
Последнее равенство следует из (5.9) и (5.35), поскольку

$$\langle a_j | M(b_k) | c_i \rangle = \\ = \text{Sp} [M(c_i, a_j) M(b_k)] = \langle a_j | b_k \rangle \text{Sp} M(c_i, b_k) = \\ = \langle a_j | b_k \rangle \langle b_k | c_i \rangle. \quad (6.2)$$

Предположим теперь, что промежуточное измерение величины  $B$  вообще не производилось, так что символ этого измерения в матричном элементе (6.2) может быть заменен оператором тождественного преобразования  $I = \sum_k M(b_k)$ . Соответствующая вероятность равна

$$p(a_j, I, c_i) = |\langle a_j | c_i \rangle|^2 = \left| \sum_k \langle a_j | M(b_k) | c_i \rangle \right|^2. \quad (6.3)$$

Графически этот процесс изображен на фиг. 7. Таким образом, в этом случае когерентных  $B$ -подансамблей имеет место сложение



Фиг. 7. Схема, представляющая измерение  $M(a_j, c_i)$ .

амплитуд вероятностей, приводящее к интерференционным эффектам. Здесь мы используем термины «когерентный» и «интерференция», поскольку (6.3) аналогично выражению, описывающему интерференцию когерентных лучей света, в котором также суммируются амплитуды.

С другой стороны, если в промежуточной стадии включается прибор, производящий  $B$ -разделение, но без отбора состояний, как показано графически на фиг. 8, то вероятность обнаружения  $a_j$  при условии, что начальному состоянию соответствовало значение  $c_i$ , дается выражением

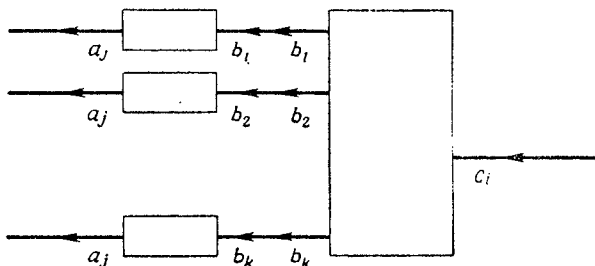
$$p(a_j, b, c_i) = \sum_k p(a_j, b_k, c_i) = \sum_k |\langle a_j | M(b_k) | c_i \rangle|^2. \quad (6.4)$$

Следовательно, для этой совокупности некогерентных  $B$ -подансамблей складываются вероятности, а не амплитуды. При этом в отличие от (6.3) отсутствуют члены, отвечающие интерференции между различными состояниями  $b_k$ , что аналогично сложению интенсивностей в оптике.

Таким образом, символ, соответствующий неселективному измерению  $B$ , можно представить в виде

$$M_b = \sum_k e^{i\phi(b_k)} M(b_k), \quad (6.5)$$

где  $\phi(b_k)$  — фазы, распределенные по случайному закону, которые отражают принципиальную неконтролируемость возмущения, вносимого неселективным измерением. Действительно,



Фиг. 8. Схема, представляющая измерение с промежуточным  $B$ -разделением.

выражение для вероятности (6.4) принимает вид, подобный (6.1)<sup>1)</sup>,

$$p(a_j, b, c_i) = |\langle a_j | M_b | c_i \rangle|^2. \quad (6.6)$$

Так как при неселективном измерении объекты не отбрасываются, то из этого должно следовать

$$\sum_j p(a_j, b, c_i) = \sum_j \langle c_i | M_b^+ | a_j \rangle \langle a_j | M_b | c_i \rangle = \langle c_i | M_b^+ M_b | c_i \rangle = 1, \quad (6.7)$$

а это означает, что операторы  $M_b$  являются унитарными:

$$M_b^+ M_b = M_b M_b^+ = I. \quad (6.8)$$

Необходимо заметить, что согласно (6.5) символ селективного измерения  $M(b_k)$  можно получить из символа неселективного измерения  $M_b$ , если все фазы, кроме одной, положить равными положительным бесконечно большим мнимым числам, что соответствует затуханию состояний всех подансамблей, образующихся при измерении  $M_b$ , за исключением одного.

<sup>1)</sup> Здесь подразумевается усреднение по распределению случайных фаз, в результате которого величина  $\exp(i[\phi(b_i) - \phi(b_k)])$  превращается в  $\delta_{ik}$ . — Прим ред.



Рассмотрим пример, взяв в качестве  $c_i$ ,  $b_k$  и  $a_j$  следующие состояния:

$$\begin{aligned}
 |c_i\rangle &= \left( \begin{array}{l} \text{состояние со спином } +1, \\ \text{направленным по оси } z \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
 |b_1\rangle &= \left( \begin{array}{l} \text{состояние со спином } +1 \\ \text{в направлении } \theta, \varphi \end{array} \right) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \\
 |b_2\rangle &= \left( \begin{array}{l} \text{состояние со спином } -1 \\ \text{в направлении } \theta, \varphi \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\
 |a_j\rangle &= \left( \begin{array}{l} \text{состояние со спином } +1, \\ \text{направленным по оси } x \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

При этом матрицы плотности, соответствующие измерениям  $b_1$  и  $b_2$ ,

$$\begin{aligned}
 M(b_1) &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \\
 M(b_2) &= \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} & -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} & \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{6.10}$$

очевидно, удовлетворяют соотношению

$$M(b_1) + M(b_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I. \tag{6.11}$$

Тогда матричные элементы, отвечающие вероятности (6.1), равны

$$\begin{aligned}
 \langle a_j | M(b_1) | c_i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \overbrace{1}^{\quad} \overbrace{1}^{\quad} \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} \left( \cos \frac{\theta}{2} + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \right),
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
 \langle a_j | M(b_2) | c_i \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \overbrace{1}^{\quad} \overbrace{1}^{\quad} \begin{pmatrix} \sin^2 \frac{\theta}{2} \\ -\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2} \left( \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \right).
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Следовательно, если не измеряется проекция спина на направление  $\theta, \varphi$  между селективными измерениями проекции спина  $+1$  на направления  $z$  и  $x$ , то вероятность равна

$$p(a_j, I, c_i) = |\langle a_j | c_i \rangle|^2 = \left| \sum_k \langle a_j | M(b_k) | c_i \rangle \right|^2 = \frac{1}{2}. \quad (6.14)$$

В случае же, когда включается разделяющее магнитное поле в направлении  $\theta, \varphi$ , но отбора на промежуточной стадии измерения *не производится*, вероятность равна

$$\begin{aligned} p(a_j, b, c_i) &= \sum_k |\langle a_j | M(b_k) | c_i \rangle|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} (1 + \sin \theta \cos \varphi) + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} (1 - \sin \theta \cos \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} (1 + \sin \theta \cos \theta \cos \varphi). \quad (6.15) \end{aligned}$$

#### ПРИМЕЧАНИЕ

Обращаем внимание читателя на очень интересную статью Альбертсона [1], в которой дан тщательный анализ процесса измерения путем последовательного включения измерительного прибора в квантовомеханическое описание, *причем первоначальное состояние прибора не предполагается известным.*

#### Литература

1. Albertson J., Quantum mechanical measurement operator, Phys. Rev., 129, 940 (1963).

## Основной постулат динамики

Цель всякой динамической теории — предсказание результатов экспериментов. Динамические уравнения, описывающие любой физический объект, должны давать возможность предсказать результат полного измерения в момент времени  $t$ , если известен результат такого измерения в момент времени  $t_0$ . При этом предполагается, что в промежутке между  $t_0$  и  $t$  не производится никаких других наблюдений, которые могли бы изменить начальное состояние, установленное при измерении в момент времени  $t_0$ .

В настоящее время представляется, что все квантовомеханические объекты могут быть описаны, исходя из следующего основного постулата.

Для любого физического объекта существует эрмитов оператор  $H = H^+$ , такой, что среднее значение любой наблюдаемой величины  $A$  удовлетворяет уравнению <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} \dot{A} &= i(\overline{HA} - \overline{AH}) + \frac{\partial A}{\partial t} = i\langle b | HA - AH | b \rangle + \langle b | \frac{\partial A}{\partial t} | b \rangle = \\ &= i \operatorname{Sp} [(HA - AH) M] + \operatorname{Sp} \left( \frac{\partial A}{\partial t} M \right). \end{aligned} \quad (7.1)$$

Это уравнение, очевидно, инвариантно относительно унитарного преобразования. Оператор  $H$  называется гамильтонианом объекта. Во многих случаях он совпадает с соответствующей гамильтоновой функцией при классическом описании объекта, отличаясь от последней заменой канонических переменных, входящих в  $H$ , соответствующими операторами. Именно это соответствие с классической механикой впервые привело к открытию, что постулат (7.1) составляет основу квантовомеханического описания поведения физических объектов.

Следует, однако, иметь в виду, что существует много физических объектов, которые не имеют классического аналога, и

<sup>1)</sup> Автор пользуется всюду системой единиц, в которой  $\hbar = c = 1$ . — *Прим. ред.*

поэтому построение соответствующего гамильтониана часто является наиболее трудной задачей при попытке описать поведение реального физического объекта. Отсутствие четкого рецепта для нахождения гамильтониана объекта является одним из главных недостатков современной квантовой механики<sup>1)</sup>.

В зависимости от того, представляется ли среднее значение  $\bar{A}$  наблюдаемой величины  $A$  в виде  $\bar{A} = \langle b | A | b \rangle$  или в виде  $\bar{A} = \text{Sp}(AM)$ , скорость изменения  $\bar{A}$  в каждом из этих случаев записывается по-разному, а именно

$$\dot{\bar{A}} = \langle b | \dot{A} | b \rangle + \langle \dot{b} | A | b \rangle + \langle b | A | \dot{b} \rangle \quad (7.2)$$

или

$$\dot{\bar{A}} = \text{Sp}(\dot{A}M) + \text{Sp}(A\dot{M}). \quad (7.3)$$

Уравнение (7.1) допускает несколько способов описания эволюции во времени физического объекта. В случае (7.2), в частности, особенно полезными оказываются следующие три представления:

1. *Представление Шредингера.* Уравнение (7.1) удовлетворяется, если предположить, что

$$A_s = \frac{\partial A_s}{\partial t}, \quad (7.4)$$

а изменение векторов состояния со временем описывается уравнением

$$i | \dot{b} \rangle_s = H | b \rangle_s. \quad (7.5)$$

Это означает, что в рассматриваемом представлении состояние объекта в момент времени  $t$  определяется результатом полного измерения характеристик объекта в тот же момент времени. Все наблюдаемые величины представляются операторами, не зависящими от времени. Уравнение (7.5) широко известно под названием уравнения Шредингера. Необходимо отметить, что это уравнение содержит только первую производную по времени. В некоторых случаях, в зависимости от конкретного вида  $H$ , уравнение (7.5) оказывается похожим на уравнение диффузии, но только с мнимым коэффициентом диффузии.

2. *Представление Гейзенберга.* Уравнение (7.1) удовлетворяется также, если предположить, что

$$| \dot{b} \rangle_0 = 0. \quad (7.6)$$

<sup>1)</sup> В современной квантовой механике, описывающей взаимодействие элементарных частиц при высоких энергиях, вызывает сомнение уже сама возможность гамильтонова описания, основанного на приведенном выше постулате. — *Прим. ред.*

Соответственно эволюция объекта во времени описывается операторным уравнением

$$i\dot{A}_0 = A_0 H - H A_0 + i \frac{\partial A_0}{\partial t}. \quad (7.7)$$

Это означает, что в таком представлении состояние объекта задается фиксированным вектором, определяемым как результат любого полного измерения характеристик объекта в любой момент времени. Операторы, соответствующие наблюдаемым величинам, теперь меняются со временем согласно уравнению (7.7).

Отметим, что обозначение производной по времени требует известной осторожности. Обычно считается, что  $\dot{\bar{A}} = \partial(\bar{A})/\partial t$ ,  $|\dot{b}\rangle = \partial|b\rangle/\partial t$ . Уравнение (7.7), отвечающее представлению Гейзенберга, строго говоря, должно записываться в виде

$$i \frac{DA_0}{Dt} = A_0 H - H A_0 + i \frac{\partial A_0}{\partial t},$$

где  $DA_0/Dt$  — оператор, среднее значение которого равно  $(DA_0/Dt) = \partial(\bar{A})/\partial t$ . Для самого же гамильтониана в любом случае имеем  $DH/Dt = \partial H/\partial t$ . Использование символа  $d/dt$  для обозначения дифференцирования по времени может привести к недоразумению, так как  $|b\rangle$  зависит в общем случае и от других переменных, например от координаты  $q$  объекта, которая в свою очередь может зависеть от времени. В соотношениях (7.5) и (7.6) при дифференцировании по времени неявная зависимость  $|b\rangle$  от времени, например через  $q(t)$ , не учитывается.

3. *Представление взаимодействия.* Если гамильтониан объекта можно разумным образом разбить на «свободный» гамильтониан  $H^0$ , не зависящий от времени, и гамильтониан «взаимодействия»  $H'$ , который может зависеть от времени:

$$H = H^0 + H', \quad (7.8)$$

то удобно удовлетворить уравнению (7.1), полагая

$$i\dot{A}_I = A_I H^0 - H^0 A_I + i \frac{\partial A_I}{\partial t}, \quad (7.9)$$

так что

$$i|\dot{b}\rangle_I = H' |b\rangle_I. \quad (7.10)$$

Это означает, что в представлении взаимодействия эволюция состояния определяется только гамильтонианом взаимодействия, а изменение операторов соответствующих наблюдаемых величин со временем определяется уравнением (7.9), в которое входит только свободный гамильтониан.

Выбор представления при решении той или иной задачи определяется исключительно соображениями удобства. Инвариантность основного постулата динамики относительно выбора представления соответствует инвариантности уравнения (7.1) относительно унитарных преобразований, связывающих векторы состояния  $|b\rangle_s$ ,  $|b\rangle_0$ ,  $|b\rangle_I$  и операторы  $A_s$ ,  $A_0$ ,  $A_I$  разных представлений, которые отвечают одной и той же физической картине.

В качестве первого примера рассмотрим унитарное преобразование, связывающее представление Шредингера с представлением Гейзенберга:

$$|b\rangle_s = U|b\rangle_0, \quad A_s = UA_0U^+, \quad UU^+ = U^+U = I. \quad (7.11)$$

Поскольку, согласно (7.6),  $|b\rangle_0$  не зависит от времени,

$$|\dot{b}\rangle_s = \dot{U}|b\rangle_0. \quad (7.12)$$

С другой стороны, из (7.5) следует

$$|\dot{b}\rangle_s = -iH|b\rangle_s = -iHU|b\rangle_0. \quad (7.13)$$

Таким образом, оператор преобразования  $U$  удовлетворяет уравнению

$$i\dot{U} = HU. \quad (7.14)$$

Подобные рассуждения применимы и к оператору обратного преобразования  $U^{-1} = U^+$ :

$$-i\dot{U}^+ = U^+H. \quad (7.15)$$

Если вид гамильтониана  $H$  известен, причем  $H$  не зависит явно от времени, то формальное решение уравнения (7.14) найти очень легко; оно имеет вид

$$U(t) = e^{-iHt}U(0). \quad (7.16)$$

Принимая за начальное условие  $U(0) = I$  и, следовательно,  $|b(0)\rangle_s = |b\rangle_0$ , можно записать первое из уравнений (7.11) в виде

$$|b(t)\rangle_s = e^{-iHt}|b(0)\rangle_s. \quad (7.17)$$

Отсюда следует, что гамильтониан есть генератор унитарного преобразования, определяющий в представлении Шредингера зависимость вектора состояния от времени. Этот результат является квантовомеханическим аналогом хорошо известного положения классической механики, согласно которому гамильтониан является генератором канонического преобразования, определяющего эволюцию системы в фазовом пространстве. Так как оператор не содержит явной зависимости от времени  $t$ , то начальное условие  $A_0(0) = A_s$  позволяет записать второе из урав-

нений (7.11) в виде

$$A_0(t) = e^{iHt} A_0(0) e^{-iHt}. \quad (7.18)$$

Следовательно, и здесь гамильтониан выступает как генератор унитарного преобразования, определяющего эволюцию операторов со временем в представлении Гейзенберга. Таким образом, можно сказать, что в представлении Шредингера векторы состояния вращаются в абстрактном пространстве, а операторы и их собственные векторы остаются неподвижными. В случае же представления Гейзенберга, наоборот, векторы состояния неподвижны, а операторы и их собственные векторы вращаются, т. е. ситуация противоположна.

Если  $|b(0)\rangle_s$  — собственная функция  $H$ , отвечающая собственному значению  $\omega$ , то

$$|b(t)\rangle_s = e^{-i\omega t} |b(0)\rangle_s.$$

Поэтому в принципе очень важно найти решение задачи на собственные значения

$$H|b\rangle = \omega|b\rangle. \quad (7.19)$$

К сожалению, число случаев, когда собственные векторы и собственные значения гамильтониана известны, весьма ограничено, а нахождение этих решений часто требует большого математического искусства.

Центральной математической проблемой является определение решения приведенных выше уравнений. Основным интерес представляют

а) случаи, когда решение для данного  $H$  легко может быть найдено;

б) некоторые из случаев, когда решение для данного  $H$  не может быть найдено в замкнутой форме;

в) случаи, когда известны самое большее лишь некоторые общие свойства симметрии гамильтониана, явный вид которого не задан, и когда возможны попытки угадать решение на основе этих свойств симметрии.

В качестве самого простого примера рассмотрим динамику спина  $\mathbf{s}$ , связанного с магнитным моментом  $\boldsymbol{\mu} = (e/m)\mathbf{s}$  электрона во внешнем постоянном магнитном поле  $\mathbf{B}$ . Точным гамильтонианом такой квантовомеханической системы является просто энергия взаимодействия, выраженная через введенный в гл. 2 оператор спина  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$H = -(\boldsymbol{\mu}\mathbf{B}) = -\frac{e}{2m}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{B}). \quad (7.20)$$

При этом компоненты вектора  $\mathbf{B}$  рассматриваются как заданные параметры.

Если выбрать систему координат, в которой  $\mathbf{B}$  имеет только  $z$ -компоненту, и использовать в качестве базисных векторов состояния собственные векторы оператора  $\sigma_3$ , то основное уравнение в представлении Шредингера (7.5) будет иметь следующий вид

$$i \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = -\frac{e}{2m} B_3 \sigma_3 \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = -\frac{e}{2m} B_3 \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

$$\alpha = \cos \frac{\theta}{2}, \quad \beta = \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi}.$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\alpha(t) = \alpha(0) e^{+i\omega_L t}, \quad \beta(t) = \beta(0) e^{-i\omega_L t}, \quad (7.22)$$

где характеристическая частота

$$\omega_L = \frac{eB_3}{2m}. \quad (7.23)$$

Таким образом, выражая  $\alpha$  и  $\beta$  через полярные углы, в соответствии с (2.41) получаем

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta(0)}{\alpha(0)} e^{-2i\omega_L t} = \operatorname{tg} \frac{\theta(0)}{2} \exp i[\varphi(0) - 2\omega_L t]. \quad (7.24)$$

Этот результат означает, что среднее значение спина, который при  $t=0$  имел направление  $\theta(0)$ ,  $\varphi(0)$ , прецессирует вокруг направления внешнего магнитного поля с частотой  $2\omega_L$ .

В представлении Гейзенберга та же система описывается основным уравнением (7.7). При этом для каждой компоненты спина, используя (2.46), получаем

$$\begin{aligned} i\dot{\sigma}_1 &= \sigma_1 H - H\sigma_1 = -\omega_L (\sigma_1 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_1) = 2i\omega_L \sigma_2, \\ i\dot{\sigma}_2 &= \sigma_2 H - H\sigma_2 = -\omega_L (\sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3 \sigma_2) = -2i\omega_L \sigma_1, \\ i\dot{\sigma}_3 &= \sigma_3 H - H\sigma_3 = 0, \end{aligned} \quad (7.25)$$

или в общем виде

$$\dot{\sigma} = 2(\omega_L \times \sigma). \quad (7.26)$$

Это уравнение также описывает прецессию среднего значения наблюдаемой величины  $\sigma$  вокруг направления внешнего поля  $\mathbf{B}$  с угловой скоростью  $2\omega_L = (e/m)\mathbf{B}$ . В этом можно убедиться непосредственно, решив уравнения (7.25). Действительно, согласно (7.18), решения имеют вид

$$\sigma_1(t) = e^{-i\omega_L \sigma_3 t} \sigma_1(0) e^{+i\omega_L \sigma_3 t}, \quad (7.27)$$

$$\sigma_2(t) = e^{-i\omega_L \sigma_3 t} \sigma_2(0) e^{+i\omega_L \sigma_3 t}, \quad (7.28)$$

$$\sigma_3(t) = e^{-i\omega_L \sigma_3 t} \sigma_3(0) e^{+i\omega_L \sigma_3 t} = \sigma_3(0). \quad (7.29)$$



Уравнение (7.29) позволяет заменить в экспонентах выражений (7.27) и (7.28) оператор  $\sigma_3$  на постоянный оператор  $\sigma_3(0)$ ; тогда, используя обозначение  $[AB] = AB - BA$ , получаем разложения

$$\sigma_1(t) = \sigma_1(0) - \frac{i\omega_L t}{1!} [\sigma_3 \sigma_1]_{t=0} + \frac{(i\omega_L t)^2}{2!} [\sigma_3 [\sigma_3 \sigma_1]]_{t=0} - \\ - \frac{(i\omega_L t)^3}{3!} [\sigma_3 [\sigma_3 [\sigma_3 \sigma_1]]]_{t=0} + \dots, \quad (7.27')$$

$$\sigma_2(t) = \sigma_2(0) - \frac{i\omega_L t}{1!} [\sigma_3 \sigma_2]_{t=0} + \frac{(i\omega_L t)^2}{2!} [\sigma_3 [\sigma_3 \sigma_2]]_{t=0} - \\ - \frac{(i\omega_L t)^3}{3!} [\sigma_3 [\sigma_3 [\sigma_3 \sigma_2]]]_{t=0} + \dots \quad (7.28')$$

Из коммутационных соотношений (2.46) имеем

$$[\sigma_3 \sigma_1] = 2i\sigma_2, \quad [\sigma_3 [\sigma_3 \sigma_1]] = -(2i)^2 \sigma_1, \\ [\sigma_3 [\sigma_3 [\sigma_3 \sigma_1]]] = -(2i)^3 \sigma_2, \dots, \quad (7.30)$$

$$[\sigma_3 \sigma_2] = -2i\sigma_1, \quad [\sigma_3 [\sigma_3 \sigma_2]] = -(2i)^2 \sigma_2, \\ [\sigma_3 [\sigma_3 [\sigma_3 \sigma_2]]] = (2i)^3 \sigma_1, \dots, \quad (7.31)$$

так что окончательно получаем

$$\sigma_1(t) = \sigma_1(0) \left[ 1 - \frac{(2\omega_L t)^2}{2!} + \dots \right] + \sigma_2(0) \left[ (2\omega_L t) - \frac{(2\omega_L t)^3}{3!} + \dots \right] = \\ = \sigma_1(0) \cos(2\omega_L t) + \sigma_2(0) \sin(2\omega_L t), \quad (7.27'')$$

$$\sigma_2(t) = \sigma_2(0) \left[ 1 - \frac{(2\omega_L t)^2}{2!} + \dots \right] - \sigma_1(0) \left[ (2\omega_L t) - \frac{(2\omega_L t)^3}{3!} + \dots \right] = \\ = \sigma_2(0) \cos(2\omega_L t) - \sigma_1(0) \sin(2\omega_L t). \quad (7.28'')$$

Унитарный оператор, связывающий представление Шредингера и представление Гейзенберга, имеет вид

$$U(t) = \exp [i\omega_L (\sigma \mathbf{n}) t] I, \\ \mathbf{n} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}. \quad (7.32)$$

Если разложить этот оператор в ряд и использовать коммутационные соотношения, то его можно записать в виде<sup>1)</sup>

$$U(t) = \cos(\omega_L t) + i(\sigma \mathbf{n}) \sin(\omega_L t). \quad (7.33)$$

Оператор  $U(t)$  в соответствии с замечанием, сделанным в конце гл. 3, описывает вращение на угол  $2\omega_L t$  вокруг вектора  $\mathbf{n}$ . Вращение в более общем случае рассмотрено в гл. 12.

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 38. — *Прим. ред.*

Полезно получить описание эволюции состояния объекта со временем на языке матрицы плотности [равенство (7.3)]. В этом случае, согласно основному динамическому постулату (7.1), имеет место равенство

$$\text{Sp}(\dot{A}M) + \text{Sp}(\dot{A}M) = i \text{Sp}[(HA - AH)M] + \text{Sp}\left(\frac{\partial A}{\partial t} M\right). \quad (7.34)$$

В представлении Шредингера из условия (7.4) немедленно следует соотношение

$$\text{Sp}(A_s \dot{M}_s) = i \text{Sp}[(HA_s - A_s H)M_s] = i \text{Sp}[A_s(M_s H - H M_s)]. \quad (7.35)$$

Оно удовлетворяется, если

$$\dot{M}_s = i(M_s H - H M_s). \quad (7.36)$$

Необходимо подчеркнуть, что, поскольку матрица плотности  $M_s$  заменяет собой вектор состояния, она подобно  $|b\rangle_s$  зависит явно от времени в представлении Шредингера. Символ дифференцирования по времени матрицы плотности, как и в случае соответствующего вектора состояния, означает частную производную

$$\dot{M}_s = \frac{\partial M_s}{\partial t}. \quad (7.37)$$

Следовательно, (7.36) можно формально записать, исходя из аналогии с полной производной

$$\frac{DM_s}{Dt} = i(HM_s - M_s H) + \frac{\partial M_s}{\partial t} = 0. \quad (7.38)$$

Это не что иное, как квантовомеханический аналог известной теоремы Лиувилля в классической механике. В справедливости этого уравнения можно непосредственно убедиться на примере чистых состояний, используя уравнение Шредингера. Если принять, что матричные элементы матрицы плотности представимы в виде

$$(M)_{ik} = (b)_i (b)_k^*, \quad (7.39)$$

то, вычисляя частную производную по времени и используя (7.5), получаем

$$\begin{aligned} (\dot{M})_{ik} &= (\dot{b})_i (b)_k^* + (b)_i (\dot{b})_k^* = \\ &= -i \sum_j [H_{ij} (b)_j (b)_k^* - (b)_i (b)_j^* H_{jk}] = -i(HM - MH)_{ik}. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Это соотношение совпадает с соотношением (7.36), записанным в компонентах.

Переход к представлению Гейзенберга можно осуществить, если подставить в (7.34) соотношение (7.7). Это требует выпол-

нения условия

$$\dot{M}_0 = 0. \quad (7.41)$$

Справедливость последнего уравнения можно проверить непосредственно, применяя к (7.39) унитарное преобразование, связывающее  $M_s(t)$  и  $M_s(0)$ . Из (7.17) следует

$$M_s(t) = |b(t)\rangle_s \langle b(t)|_s = e^{-iHt} |b(0)\rangle_s \langle b(0)|_s e^{iHt} = e^{-iHt} M_s(0) e^{iHt}. \quad (7.42)$$

Но  $M_s(0)$  можно отождествить с не зависящей от времени матрицей плотности в представлении Гейзенберга  $M_s(0) = M_0$ . Действительно, если оператор  $A_s$  переходит в  $A_0$  при преобразовании

$$A_s = U A_0 U^+, \quad (7.43)$$

то условие инвариантности выражения

$$\bar{A} = \text{Sp}(A_s M_s) = \text{Sp}(U A_0 U^+ M_s) = \text{Sp}(A_0 U^+ M_s U) = \text{Sp}(A_0 M_0) \quad (7.44)$$

требует, чтобы  $M$  преобразовывалось аналогично, т. е.

$$M_0 = U^+ M_s U, \quad (7.45)$$

что совпадает с (7.42) при  $U(t) = e^{-iHt} I$ .

Интересно отметить, что если система собственных векторов гамильтониана  $H$ , например

$$H |a_i\rangle = \omega_i |a_i\rangle, \quad (7.46)$$

является полной и, следовательно, эти векторы можно использовать в качестве базиса, то в выражения для матричных элементов оператора (7.42)

$$\langle a_i | M(t) | a_k \rangle = M_{ik}(t) = M_{ik}(0) e^{i(\omega_k - \omega_i)t} \quad (7.47)$$

входят лишь разности энергий, а не ненаблюдаемые абсолютные значения энергии.

Если записать матрицу плотности для частного случая спинового магнитного момента в заданном внешнем поле в форме (4.30)

$$M_s = \frac{1}{2} [I + (\mathbf{P}\sigma)], \quad (7.48)$$

где  $\mathbf{P}(t)$  — зависящий от времени вектор поляризации, характеризующий спин, то основное уравнение (7.38), где

$$H = -\frac{e}{2m} (\sigma \mathbf{B}),$$

принимает следующий вид:

$$-\frac{ie}{2m} [(\sigma\mathbf{V})(\mathbf{P}\sigma) - (\mathbf{P}\sigma)(\sigma\mathbf{V})] + \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} \sigma = 0. \quad (7.49)$$

Используя коммутационные соотношения, которым удовлетворяют операторы  $\sigma_i$ , можно показать, что

$$(\sigma\mathbf{V})(\mathbf{P}\sigma) - (\mathbf{P}\sigma)(\sigma\mathbf{V}) = 2i(\sigma[\mathbf{B}\mathbf{P}]). \quad (7.50)$$

Подставляя это в (7.49), найдем

$$\left(\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + \frac{e}{m}[\mathbf{B}\mathbf{P}]\right)\sigma = 0. \quad (7.51)$$

Для того чтобы это уравнение было справедливо, должно выполняться классическое уравнение

$$\frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} = -\frac{e}{m}[\mathbf{B}\mathbf{P}], \quad (7.52)$$

описывающее прецессию вектора поляризации вокруг направления приложенного поля с частотой  $2\omega_L = (e/m)\mathbf{B}$ .

Следовательно, наглядное представление спина как прецессирующего вектора поляризации вполне допустимо и не приводит к противоречию с вероятностной интерпретацией опыта Штерна — Герлаха.

В качестве примера применения представления взаимодействия рассмотрим спиновый магнитный момент  $\mu = \gamma\mathbf{s}$  во внешнем магнитном поле

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 = B_0\mathbf{k} + B_1[i \cos(\omega t) - \mathbf{j} \sin(\omega t)], \quad (7.53)$$

представляющем собой сумму постоянного поля  $\mathbf{B}_0$ , приложенного в направлении  $z$ , и поля  $\mathbf{B}_1$ , вращающегося в плоскости  $(x, y)$  по часовой стрелке с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega\mathbf{k}. \quad (7.54)$$

В этом случае гамильтониан можно представить в виде

$$H = -\gamma(\mathbf{s}\mathbf{B}) = -\gamma(\mathbf{s}\mathbf{B}_0) - \gamma(\mathbf{s}\mathbf{B}_1) = H^0 + H'. \quad (7.55)$$

В представлении взаимодействия выражения для операторов спина совпадают с (7.27) — (7.29). Поэтому для операторов спина получаем выражения

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1(t) &= \sigma_1(0) \cos(\omega_0 t) + \sigma_2(0) \sin(\omega_0 t) \\ \sigma_2(t) &= -\sigma_1(0) \sin(\omega_0 t) + \sigma_2(0) \cos(\omega_0 t) \\ \sigma_3(t) &= \sigma_3(0) \end{aligned} \right\} \omega_0 = 2\omega_L = \gamma B_0. \quad (7.56)$$

Векторы состояния в этом представлении подчиняются уравнению

$$\begin{aligned}
 i|\dot{b}\rangle_I &= H'|b\rangle_I = -\frac{\gamma}{2}(\sigma B_1)|b\rangle_I = \\
 &= -\frac{\omega_1}{2}[\sigma_1(t)\cos(\omega t) - \sigma_2(t)\sin(\omega t)]|b\rangle_I = \\
 &= -\frac{\omega_1}{2}\{\sigma_1(0)\cos[(\omega_0 - \omega)t] + \sigma_2(0)\sin[(\omega_0 - \omega)t]\}|b\rangle_I, \quad (7.57) \\
 \omega_1 &= \gamma B_1.
 \end{aligned}$$

В компонентах это уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
 |b\rangle_I &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\
 \dot{\alpha} &= \frac{i\omega_1}{2} e^{-i(\omega_0 - \omega)t} \beta, \\
 \dot{\beta} &= \frac{i\omega_1}{2} e^{+i(\omega_0 - \omega)t} \alpha.
 \end{aligned} \quad (7.57')$$

Дифференцируя первое из этих уравнений и подставляя  $\dot{\beta}$  из второго, исключаем  $\beta$  и находим уравнение

$$-\ddot{\alpha} - i(\omega_0 - \omega)\dot{\alpha} - \left(\frac{\omega_1}{2}\right)^2 \alpha = 0. \quad (7.58)$$

Решение этого уравнения можно искать в виде

$$\alpha(t) = \alpha(0) e^{i(\Omega/2)t}, \quad (7.59)$$

где  $\Omega$  находится из уравнения

$$\Omega^2 + 2(\omega_0 - \omega)\Omega - \omega_1^2 = 0. \quad (7.60)$$

При этом имеются два решения, соответствующие частотам

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= -(\omega_0 - \omega) + \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}, \\
 \Omega_2 &= -(\omega_0 - \omega) - \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2},
 \end{aligned} \quad (7.61)$$

так что общее решение уравнения (7.58) имеет вид

$$\alpha(t) = \alpha_1(0) e^{i(\Omega_1/2)t} + \alpha_2(0) e^{i(\Omega_2/2)t}. \quad (7.62)$$

Используя это выражение, находим

$$\beta(t) = \left(\frac{2}{i\omega_1}\right) e^{i(\omega_0 - \omega)t} \dot{\alpha} = \alpha_1(0) \left(\frac{\Omega_1}{\omega_1}\right) e^{-i(\Omega_2/2)t} + \alpha_2(0) \left(\frac{\Omega_2}{\omega_1}\right) e^{-i(\Omega_1/2)t}. \quad (7.63)$$

Предположим теперь, что в момент времени  $t=0$  спин с достоверностью имел проекцию  $+1$  на ось  $z$ , т. е.  $|b(0)\rangle = |b_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \alpha_1(0) + \alpha_2(0) = 1, \\ \beta(0) &= \alpha_1(0) \left( \frac{\Omega_1}{\omega_1} \right) + \alpha_2(0) \left( \frac{\Omega_2}{\omega_1} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Отсюда находим начальные значения

$$\alpha_1(0) = \frac{\Omega_2}{\Omega_2 - \Omega_1}, \quad \alpha_2(0) = \frac{\Omega_1}{\Omega_1 - \Omega_2}. \quad (7.65)$$

Теперь можно вычислить вероятность „переворота спина”, т. е. вероятность того, что в момент времени  $t$  спин будет находиться в состоянии  $|b_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  с проекцией на ось  $z$ , равной  $-1$ :

$$P_{\text{пер}} = |\langle b_- | b(t) \rangle|^2 = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right|^2 = |\beta(t)|^2. \quad (7.66)$$

Наконец, подставляя (7.65) в (7.63) и используя тот факт, что  $\Omega_1\Omega_2 = -\omega_1^2$  и  $\Omega_1 - \Omega_2 = 2\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}$ , получаем

$$\begin{aligned} P_{\text{пер}} &= \frac{2\Omega_1^2\Omega_2^2}{\omega_1^2(\Omega_1 - \Omega_2)^2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{\Omega_1 - \Omega_2}{2} t \right) \right] = \\ &= \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}}{2} t \right). \end{aligned} \quad (7.67)$$

Таким образом, амплитуда вероятности переворота спина имеет *резонанс* при  $\omega = \omega_0$ . Это обстоятельство может быть использовано для измерения  $\omega_0$ , а следовательно, и  $\gamma$ .

Рассуждения, подобные тем, которые позволяют вывести (7.36) из (7.34), приводят к тому, что матрица плотности в представлении взаимодействия удовлетворяет уравнению

$$\dot{M}_I = i(M_I H' - H' M_I). \quad (7.68)$$

Делая подстановку  $M_I = 1/2[I + (\mathbf{P}\sigma_I)]$ , путем прямого вычисления получаем

$$\begin{aligned} \dot{P}_1 &= -\omega_0 P_2 + \omega_1 P_3 \sin(\omega t), \\ \dot{P}_2 &= +\omega_0 P_1 - \omega_1 P_3 \cos(\omega t), \\ \dot{P}_3 &= -\omega_1 P_1 \sin(\omega t) + \omega_1 P_2 \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (7.69)$$

Эти уравнения, очевидно, совпадают с (7.52), если вектор  $\mathbf{B}$  имеет вид (7.53). Решение этих уравнений не вызывает никаких затруднений. Дифференцируя  $\dot{P}_3$  дважды по времени и используя выражения для  $\dot{P}_1$  и  $P_2$ , получаем

$$\ddot{P}_3 = -\omega^2 \dot{P}_3, \quad (7.70)$$

где  $\omega = \sqrt{(\omega_0 - \omega)^2 + \omega_1^2}$ . Решение этого уравнения имеет вид

$$P_3(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} + C, \quad (7.71)$$

где постоянные интегрирования  $A$ ,  $B$ ,  $C$  определяются из начальных условий, имеющих в рассматриваемом примере следующий вид:

$$P_3(0) = 1, \quad P_1(0) = P_2(0) = 0. \quad (7.72)$$

Отсюда немедленно находим

$$A = B = \frac{\omega_1^2}{2\omega^2}, \quad C = \frac{(\omega_0 - \omega)^2}{\omega^2}. \quad (7.73)$$

Таким образом, решение (7.71) для этого случая имеет следующий вид:

$$P_3(t) = \left(\frac{1}{\omega^2}\right) [\omega_1^2 \cos(\omega t) + (\omega_0 - \omega)^2]. \quad (7.74)$$

Чтобы этим методом найти вероятность  $P_{\text{пер}}$ , нет необходимости вычислять  $P_1(t)$  и  $P_2(t)$ . Действительно, поскольку матрица плотности в общем случае имеет вид

$$M(t) = \frac{1}{2} [I + (\sigma \mathbf{P})] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & 1 - P_3 \end{pmatrix}, \quad (7.75)$$

то вероятность обнаружить спин в некотором направлении  $\theta$ ,  $\varphi$  равна  $P_{\theta, \varphi} = \text{Sp}[M(\theta, \varphi) M(t)]$ . Для проекции спина на ось  $z$ , равной  $-1$ , находим

$$M(\theta, \varphi) = M(b_-) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому

$$\begin{aligned} P_{\text{пер}} &= \frac{1}{2} \text{Sp} \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & 1 - P_3 \end{pmatrix} \right] = \\ &= \frac{1}{2} (1 - P_3) = \left(\frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right) \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right). \quad (7.76) \end{aligned}$$

Последний результат находится в согласии с (7.67).

Связь между представлениями Шредингера и Гейзенберга и представлением взаимодействия осуществляется унитарными преобразованиями, операторы которых имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} |b\rangle_s &= V|b\rangle_I, & |b\rangle_I &= W|b\rangle_0, \\ VV^+ &= V^+V = I, & WW^+ &= W^+W = I, \end{aligned} \quad (7.77)$$

так что

$$|b\rangle_s = VW|b\rangle_0, \text{ т. е. } |b\rangle_s = U|b\rangle_0, \quad (7.78)$$

где

$$U = VW.$$

Поскольку

$$|\dot{b}\rangle_s = \dot{V}|b\rangle_I + V|\dot{b}\rangle_I = (\dot{V} - iVH')|b\rangle_I, \quad |\dot{b}\rangle_I = \dot{W}|b\rangle_0 \quad (7.79)$$

и

$$\begin{aligned} |\dot{b}\rangle_s &= -iH|b\rangle_s = -iHV|b\rangle_I, \\ |\dot{b}\rangle_I &= -iH'|b\rangle_I = -iH'W|b\rangle_0, \end{aligned} \quad (7.80)$$

то  $V$  и  $W$  должны удовлетворять операторным уравнениям

$$\dot{V} = i(VH' - HV), \quad \dot{W} = -iH'W. \quad (7.81)$$

Эти уравнения согласуются с (7.78), так как уравнение

$$\begin{aligned} \dot{U} = \dot{V}W + V\dot{W} &= i(VH' - HV)W - iVH'W = \\ &= -iHVW = -iHU \end{aligned} \quad (7.82)$$

совпадает с (7.14).

Для рассмотренного выше случая спинового магнитного резонанса явные выражения для  $V$  и  $W$  могут быть найдены без особого труда.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Представления Шредингера и Гейзенберга в квантовой механике впервые были введены в знаменитых работах Шредингера (вначале в кратком сообщении [1], затем в книге [2]) и Гейзенберга [3], а затем в совместных статьях последнего с Борном и Иорданом. Книга Борна и Иордана [4] целиком посвящена развитию представления Шредингера. Унитарное преобразование, связывающее эти два представления, впервые было введено Шредингером [5].



Представление взаимодействия, хотя неявно и использовалось во многих ранних работах, заняло подобающее ему место в результате исследований Томонага [6].

Строгое решение задачи о резонансе в магнитном поле в случае спина  $1/2$  впервые дал Раби [7].

### *Литература*

1. Schroedinger E., Ann. Phys., **79**, 361 (1926).
2. Schroedinger E., Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig, 1928.
3. Heisenberg W., Zs. Phys., **33**, 879 (1925).
4. Born M., Jordan P., Elementare Quantenmechanik, Berlin, 1930.
5. Schroedinger E., Ann. Phys., **79**, 734 (1926).
6. Tomonaga S., Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **1**, 27 (1946).
7. Rabi I. I., Phys. Rev., **51**, 652 (1937).

*Представление наблюдаемых величин, принимающих континуальное или счетное бесконечное множество значений*

Для описания характеристик, величина которых может пробегать непрерывную область значений или бесконечное счетное множество, желательно иметь аппарат, *формально* совпадающий с описанным в гл. 1 и 2 для случая дискретных квантовых чисел. При этом вектор состояния, зависящий от непрерывной переменной  $q$ , обозначается  $|q\rangle$  и представляется комплексным вектором в абстрактном пространстве («гильбертовом пространстве»), континуальном и бесконечномерном. Следовательно, по аналогии с введенным выше в конечномерном пространстве собственным вектором  $|a_i\rangle$ , соответствующим собственному значению  $a_i$  оператора  $A$ , можно формально рассматривать  $|q\rangle$  как собственный вектор некоторого оператора  $Q$ , отвечающий собственному значению  $q$ . Соответствие

$$A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle \leftrightarrow Q|q\rangle = q|q\rangle \quad (8.1)$$

можно распространить на все операции, определенные для вектора  $|a_i\rangle$  в гл. 1 и 2, если в гильбертовом пространстве можно формально ввести условие ортогональности

$$\langle a_i | a_k \rangle = \delta_{ik} \leftrightarrow \langle q' | q'' \rangle = \delta(q' - q'') \quad (8.2)$$

и условие полноты

$$\sum_i |a_i\rangle \langle a_i| = I \leftrightarrow \int |q\rangle dq \langle q| = I. \quad (8.3)$$

Здесь  $\delta(q)$  — хорошо известная  $\delta$ -функция (см. Приложение 6), а  $I$  — оператор тождественного преобразования.

В частности, собственный вектор  $|p\rangle$  какой-либо другой непрерывной характеристики  $P$  можно разложить по векторам  $|q\rangle$ , используя соответствие

$$|b_k\rangle = \sum_i |a_i\rangle \langle a_i | b_k \rangle \leftrightarrow |p\rangle = \int |q''\rangle dq'' \langle q'' | p \rangle \quad (8.4a)$$

и аналогично

$$\langle c_j | = \sum_i \langle c_j | a_i \rangle \langle a_i | \leftrightarrow \langle r | = \int \langle r | q' \rangle dq' \langle q' |. \quad (8.46)$$

Функции преобразования  $\langle q' | p \rangle$  часто называют *волновыми функциями*, или проще  $\psi$ -функциями, и обозначают

$$\psi_p(q') = \langle q' | p \rangle. \quad (8.5)$$

Если представление, построенное на собственных векторах оператора  $Q$ , назвать  $q$ -представлением, то можно сказать, что  $\psi_p(q')$  является компонентой вектора  $|p\rangle$  в «направлении»  $q'$  в  $q$ -представлении. Если известны все компоненты  $\psi_p(q')$ , то, следовательно, известен и вектор  $|p\rangle$ , т. е. компоненты  $\psi_p(q')$  *представляют* вектор  $|p\rangle$  в  $q$ -представлении.

Скалярное произведение двух векторов  $|p\rangle$  и  $|r\rangle$  в  $q$ -представлении можно теперь вычислить, выразив эти векторы через  $\psi$ -функции следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle r | p \rangle &= \int \int \langle r | q' \rangle dq' \langle q' | q'' \rangle dq'' \langle q'' | p \rangle = \\ &= \int \int \langle r | q' \rangle dq' \delta(q' - q'') dq'' \langle q'' | p \rangle = \\ &= \int \langle r | q' \rangle dq' \langle q' | p \rangle = \int \psi_r^*(q') \psi_p(q') dq'. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Отсюда, в частности, для двух ортогональных векторов состояния имеем

$$\langle p'' | p' \rangle = \int \psi_{p''}^*(q') \psi_{p'}(q') dq' = \delta(p'' - p'). \quad (8.7)$$

Оператор  $Q$  в  $q$ -представлении может рассматриваться как бесконечномерная диагональная матрица, матричные элементы которой в силу вышеуказанного соответствия можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle a_k | A | a_l \rangle &= a_l \langle a_k | a_l \rangle = a_l \delta_{kl} \leftrightarrow \langle q'' | Q | q' \rangle = \\ &= q' \langle q'' | q' \rangle = q' \delta(q' - q''). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Действие некоторого оператора  $f(Q)$  на произвольное состояние  $|p\rangle$ , компонентами которого в  $q$ -представлении являются  $\psi_p(q')$ , определяется выражением

$$f(Q)|p\rangle = \int f(Q)|q''\rangle dq'' \langle q'' | p \rangle = \int |q''\rangle dq'' f(q'') \psi_p(q''), \quad (8.9)$$

так что

$$\langle r | f(Q) | p \rangle = \int \psi_r^*(q'') f(q'') \psi_p(q'') dq''. \quad (8.10)$$

В частности, матричные элементы оператора  $P = -i(\partial/\partial Q)$  в  $q$ -представлении имеют вид

$$\langle q'' | P | q' \rangle = -i \left( \frac{\partial}{\partial q'} \right) \delta(q' - q''). \quad (8.11)$$

Через  $\psi$ -функции эти матричные элементы выражаются следующим образом:

$$\langle r | P | p \rangle = \int \psi_r^*(q'') \left[ -\frac{i \partial \psi_p(q'')}{\partial q''} \right] dq''. \quad (8.12)$$

Несколько неожиданной на первый взгляд оказывается возможность перейти от представления, построенного на собственных векторах оператора, имеющего непрерывный спектр собственных значений, например  $|q\rangle$ , к представлению, построенному на неограниченном *счетном* множестве собственных векторов оператора, обладающего дискретным спектром, например  $|E_i\rangle$ , где

$$H | E_i \rangle = \omega_i | E_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, \infty. \quad (8.13)$$

Эти представления связываются соотношениями

$$| E_i \rangle = \int | q' \rangle dq' \langle q' | E_i \rangle \quad (8.14)$$

и

$$| q' \rangle = \sum_i | E_i \rangle \langle E_i | q' \rangle \quad (8.15)$$

при условии, что  $\psi$ -функции удовлетворяют следующим условиям ортогональности и нормировки:

$$\langle E_k | E_i \rangle = \int \langle E_k | q' \rangle dq' \langle q' | E_i \rangle = \int \psi_{E_k}^*(q') \psi_{E_i}(q') dq' = \delta_{ki}, \quad (8.16)$$

$$\langle q'' | q' \rangle = \sum_i \langle q'' | E_i \rangle \langle E_i | q' \rangle = \sum_i \psi_{E_i}(q'') \psi_{E_i}^*(q') = \delta(q'' - q'). \quad (8.17)$$

Таким образом, возможность перехода от  $E$ -представления к  $q$ -представлению и обратно зависит от того, существуют ли  $\psi$ -функции, удовлетворяющие условиям (8.16) и (8.17), или нет. Такой переход всегда возможен, если удастся построить такие  $\psi$ -функции. Для некоторых частных случаев это сделано в следующей главе.

Символ измерения  $M(p, r)$ , соответствующий схеме



также может быть выражен, согласно (8.4), через  $\psi$ -функции:

$$M(p, r) = |p\rangle \langle r| = \int \int |q''\rangle dq'' \psi_p(q'') \psi_r^*(q') dq' \langle q'|. \quad (8.18)$$

При этом его матричные элементы в  $q$ -представлении имеют вид

$$\begin{aligned} \langle q''' | M(p, r) | q \rangle &= \\ &= \int \int \delta(q''' - q'') c' q'' \psi_p(q'') \psi_r^*(q') dq' \delta(q' - q'') = \psi_p(q''') \psi_r^*(q). \end{aligned} \quad (8.19)$$

В частности, матрица плотности для состояния  $|p\rangle$  имеет вид

$$\langle q' | M(p) | q \rangle = \psi_p(q') \psi_p^*(q). \quad (8.20)$$

Если  $\psi$ -функции нормированы, то след этой матрицы равен единице.

### ПРИМЕЧАНИЕ

Более полное и строгое изложение математических вопросов, связанных с использованием гильбертова пространства, читатель может найти в гл. 2 фундаментальной работы Неймана [1].

### Литература

1. Neumann J., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton, New Jersey, 1955 (см. перевод: Нейман И., *Математические основы квантовой механики*, М., 1964).

## Сдвиг наблюдателя

Любое реальное наблюдение физического объекта всегда осуществляется в определенной системе координат. Следовательно, точная постановка задачи об описании состояния объекта в принципе всегда требует информации о положении наблюдателя. Поэтому *любой* вектор состояния  $|b\rangle$  должен зависеть, помимо всех переменных, описывающих свойства объекта, таких, как спин  $s$ , импульс  $p$  и т. д., еще и от координат наблюдателя, скажем  $x_i$ , и, следовательно, должен рассматриваться как функция вида  $|s, p, \dots, x_i\rangle$ .

Будем предполагать, что при описании отдельного объекта можно ввести оператор  $Q$ , определяющий положение этого объекта, так что вектор состояния может быть представлен как собственный вектор оператора  $Q$ , обозначаемый  $|q\rangle$  и удовлетворяющий уравнению  $Q|q\rangle = q|q\rangle$ .

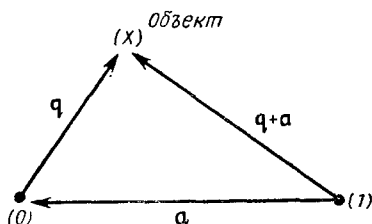
Оставим пока в стороне вопрос о том, как в действительности экспериментально определить компоненты вектора состояния в этом «координатном представлении», характеризуемом непрерывным континуумом возможных значений  $q$  оператора положения  $Q$ , что с необходимостью приводит к тому, что вектор состояния  $|q, \dots\rangle$  является бесконечномерным. Условимся отсчитывать переменные  $q$ , описывающие положение объекта, от координат наблюдателя, так, чтобы вектор  $|q, \dots\rangle$  описывал состояние объекта с точки зрения наблюдателя (0), расположенного в точке  $q=0$ . Необходимо подчеркнуть, однако, что предположение о возможности приписать наблюдателю определенное положение следует рассматривать как некоторую гипотезу и что требуется дополнительное исследование того, насколько эта гипотеза совместима с теми задачами измерения, которые ставит перед собой наблюдатель.

Не останавливаясь пока на этих тонких вопросах, касающихся измерения действительного положения, попытаемся описать тот же объект с помощью вектора состояния, соответствующего наблюдателю (1), смещенному относительно наблюдателя (0). В частности, если наблюдатель (1) смещен относительно (0) на вектор  $a$ , направленный от (1) к (0), как показано на

фиг. 9, то наблюдатель (1) будет описывать объект вектором состояния

$$|q\rangle^T = |q+a\rangle. \quad (9.1)$$

Исходя из требования, что физические свойства объекта не должны зависеть от положения наблюдателя, можно прийти к вы-



Фиг. 9. Описание положения объекта (X) наблюдателем (1), смещенным на вектор  $a$  относительно наблюдателя (0).

воду о существовании унитарного оператора смещения  $T_a$ , определяемого соотношением

$$|q+a\rangle = T_a |q\rangle. \quad (9.2)$$

В рассматриваемом координатном представлении каждую компоненту можно разложить в ряд

$$|q+a\rangle = \left[ I + a \frac{\partial}{\partial Q} + \frac{1}{2!} \left( a \frac{\partial}{\partial Q} \right)^2 + \dots \right] |q\rangle. \quad (9.3)$$

Если ввести оператор

$$P = -i \frac{\partial}{\partial Q}, \quad (9.4)$$

то этот ряд формально можно записать в виде

$$T_a = \left[ I + i(aP) + \frac{i^2}{2!} (aP)^2 + \dots \right] = e^{i(aP)}. \quad (9.5)$$

Подобным же образом можно ввести обратное преобразование

$$T_a^{-1} = e^{-i(aP)}. \quad (9.6)$$

Условие унитарности оператора  $T_a$ ,  $T_a^{-1} = T_a^+$ , требует, чтобы оператор  $P$  был эрмитов.

Для пояснения физического смысла оператора  $P$  рассмотрим частный случай, когда вектор смещения  $a$  является линейной функцией времени:

$$a = Vt, \quad (9.7)$$

т. е. когда наблюдатели (0) и (1) движутся друг относительно друга с постоянной скоростью  $V$ . Тогда оператор преобразова-

ния  $T_a$  является функцией времени и соответствует преобразованию Галилея.

Во всех случаях, когда в уравнении

$$|b\rangle^T = T|b\rangle \quad (9.8)$$

оператор  $T$  зависит от времени, необходимо различать две производные:

а) производную  $(\partial/\partial t)(|b\rangle^T)$ , которая показывает, как меняется со временем вектор состояния объекта в системе наблюдателя (1), и

б) производную  $(\partial|b\rangle/\partial t)^T$ , показывающую наблюдаемое из (1) изменение со временем вектора состояния того же объекта, но описываемого наблюдателем (0).

Так как в представлении Шредингера  $|b\rangle$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial}{\partial t} |b\rangle = H|b\rangle, \quad (9.9)$$

то, применяя к обеим частям уравнения (9.9) слева операцию  $T$ , получаем

$$i \left( \frac{\partial |b\rangle}{\partial t} \right)^T = H^T |b\rangle^T, \quad (9.10)$$

где

$$H^T = THT^{-1}.$$

С другой стороны, дифференцируя (9.8) по времени и используя (9.9), найдем

$$i \frac{\partial}{\partial t} (|b\rangle^T) = iT \frac{\partial |b\rangle}{\partial t} + i\dot{T}|b\rangle = (H^T + i\dot{T}T^{-1})|b\rangle^T. \quad (9.11)$$

Это означает, что *эффективный гамильтониан* наблюдателя (1), а именно тот гамильтониан, который описывает эволюцию во времени состояния  $|b\rangle^T$  в системе наблюдателя (1), в соответствии с основным динамическим постулатом имеет вид

$$H_{\text{эфф}} = H^T + i\dot{T}T^{-1}. \quad (9.12)$$

В частном случае преобразования Галилея (9.7) находим из (9.5)

$$H_{\text{эфф}} = H^T - (Vp). \quad (9.13)$$

В классической механике гамильтониан свободной частицы с импульсом  $p$  и массой  $m$  равен

$$H = \frac{p^2}{2m}; \quad (9.14)$$



эффе́ктивный гамильтониан, получающийся в результате преобразования Галилея, имеет вид

$$H_{\text{эфф}} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - (\mathbf{V}\mathbf{p}). \quad (9.15)$$

При этом соблюдается правило сложения скоростей.

Подобное соответствие позволяет отождествить оператор  $\mathbf{P}$  с оператором импульса объекта. Отсюда немедленно следует, что положение и импульс объекта являются несовместимыми наблюдаемыми величинами, так как для любых двух компонент  $P_j, Q_k$  выполняется соотношение

$$P_j Q_k - Q_k P_j = -i\hbar \delta_{jk}. \quad (9.16)$$

Представляет интерес получить правило преобразования оператора координаты  $Q$  как следствие этого коммутационного соотношения. Разлагая в ряд, для каждой компоненты находим

$$Q^T = T_a Q T_a^{-1} = e^{iaP} Q e^{-iaP} = Q + ia[PQ] + \\ + \frac{i^2}{2!} a^2 [P[PQ]] + \dots = Q + a = Q + Vt, \quad (9.17)$$

как и следовало ожидать. Дифференцирование (9.17) по времени дает

$$\frac{\partial Q^T}{\partial t} = T_a \frac{\partial Q}{\partial t} T_a^{-1} + \dot{T}_a Q T_a^{-1} + T_a Q \dot{T}_a^{-1} = \\ = \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^T + iV(PQ^T - Q^T P) = \left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right)^T + V, \quad (9.18)$$

как и должно быть, поскольку производная  $(\partial Q/\partial t)^T$  показывает, как изменяется со временем координата наблюдателя (0) с точки зрения наблюдателя (1), и уравнение (9.18) представляет собой «теорему сложения скоростей» в соответствии с инвариантностью относительно преобразования Галилея.

Рассмотрим теперь в качестве примера гамильтониан «свободного» объекта (9.14), зависящий только от импульса. В координатном представлении вектор состояния объекта удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial}{\partial t} | \mathbf{q}(t) \rangle = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 | \mathbf{q}(t) \rangle = - \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial}{\partial Q}\right)^2 | \mathbf{q}(t) \rangle. \quad (9.19)$$

Таким образом, вектор состояния  $| \mathbf{q}(t) \rangle$  не является собственным вектором гамильтониана  $H$ . Обозначим собственные векторы состояния гамильтониана  $H$ , соответствующие собственным значениям  $\omega_i$ , через  $| E_i \rangle$ , так что

$$H | E_i \rangle = \omega_i | E_i \rangle, \quad (9.20)$$

и запишем в соответствии с (7.17)

$$|\mathbf{q}(t)\rangle = e^{-iHt} |\mathbf{q}(0)\rangle; \quad (9.21)$$

тогда, вводя не зависящую от времени  $\psi$ -функцию  $\psi_{E_l}(\mathbf{q}) = \langle \mathbf{q}(0) | E_l \rangle$ , выражая  $|E_l\rangle$  через  $|\mathbf{q}(0)\rangle$  в виде

$$|E_l\rangle = \int |\mathbf{q}'(0)\rangle d\mathbf{q}' \psi_{E_l}(\mathbf{q}') \quad (9.22)$$

и учитывая (8.9), можно свести задачу о собственных значениях (9.20) к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} H|E_l\rangle &= \int |\mathbf{q}'(0)\rangle d\mathbf{q}' \left( -\frac{1}{2m} \right) \frac{\partial^2 \psi_{E_l}}{\partial \mathbf{q}'^2} = \\ &= \omega_l \int |\mathbf{q}'(0)\rangle d\mathbf{q}' \psi_{E_l}(\mathbf{q}'). \end{aligned} \quad (9.23)$$

При этом из линейной независимости компонент  $|\mathbf{q}'(0)\rangle$  следует, что  $\psi$ -функции, характеризующие состояние  $|E_l\rangle$  в  $q$ -представлении, удовлетворяют следующему уравнению для собственных значений:

$$\left( -\frac{1}{2m} \right) \frac{\partial^2 \psi_{E_l}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^2} = \omega_l \psi_{E_l}(\mathbf{q}). \quad (9.24)$$

Часто полезно сразу разложить вектор состояния  $|\mathbf{q}(t)\rangle$  в ряд по зависящим от времени  $\psi$ -функциям  $\Psi$ :

$$\begin{aligned} |\mathbf{q}(t)\rangle &= \sum_l |E_l\rangle \langle E_l | \mathbf{q}(t) \rangle = \sum_l |E_l\rangle \Psi_{E_l}^*(\mathbf{q}, t) = \\ &= e^{-iHt} \sum_l |E_l\rangle \psi_{E_l}^*(\mathbf{q}) = \sum_l |E_l\rangle e^{-i\omega_l t} \psi_{E_l}^*(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (9.25)$$

Следовательно, зависящая от времени  $\psi$ -функция и не зависящая от времени  $\psi$ -функция связаны соотношением

$$\Psi_{E_l}(\mathbf{q}, t) = e^{i\omega_l t} \psi_{E_l}(\mathbf{q}). \quad (9.26)$$

Решение уравнения (9.24), очевидно, имеет вид

$$\psi_{E_l}(\mathbf{q}) = \text{const} e^{-l(\mathbf{k}_l \mathbf{q})}, \quad (9.27)$$

где  $\mathbf{k}_l$  и  $\omega_l$  связаны соотношением

$$\omega_l = \frac{\mathbf{k}_l^2}{2m}. \quad (9.28)$$

Следовательно, при таком описании объекту, имеющему энергию  $E$  и импульс  $\mathbf{p}$ , можно сопоставить характеристическую частоту

$\omega$  и характеристическую длину  $|k|^{-1}$ :

$$\omega = E, \quad k = p, \quad (9.29)$$

которые определяют амплитуду вероятности обнаружить объект в момент времени  $t$  в точке  $q$ , если известно, что он обладает энергией  $E$  и импульсом  $p$  (энергия  $E$  и импульс  $p$  совместимы, так как в рассматриваемом случае  $HP - PH = 0$ ), а именно

$$\langle q(t) | E \rangle = \Psi_E(q, t) = \text{const } e^{i(\omega t - kq)}, \quad (9.30)$$

где постоянную следует определить из условия нормировки.

В представлении Гейзенберга эволюция объекта, характеризуемого гамильтонианом (9.14), описывается операторными уравнениями. Используя (9.16), имеем

$$\begin{aligned} \dot{P}_k &= i(HP_k - P_kH) = 0, \\ \dot{Q}_j &= i(HQ_j - Q_jH) = \frac{i}{2m}(P^2Q_j - Q_jP^2) = \frac{P_j}{m}. \end{aligned} \quad (9.31)$$

Отсюда видно, что средние значения импульса и координат свободного объекта удовлетворяют классическим уравнениям

$$\bar{\dot{P}} = 0, \quad \bar{\dot{P}} = m\bar{\dot{Q}}. \quad (9.32)$$

Такое соответствие с классической механикой свидетельствует о том, что гамильтониан (9.14) является тем «правильным» гамильтонианом, который следует подставлять в основное квантовомеханическое уравнение динамики свободного объекта.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Историческим событием, ознаменовавшим рождение квантовой механики, было опубликование статьи де Бройля [1] (см. также [2]), в которой впервые было замечено, что, связывая частоту  $\omega$  и длину  $|k|^{-1}$  с энергией и импульсом частицы, можно описать движение частицы на языке, ранее применявшемся для описания распространения сигнала,

$$f(q, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\omega t - kq)] f(k) dk, \quad \omega = \sqrt{m^2 + k^2};$$

при этом под сигналом понимается суперпозиция  $\psi$ -функций.

Поскольку фазовая скорость, соответствующая  $\psi$ -функции,  $V_{\text{фаз}} = \omega/k$  при  $m \neq 0$ , очевидно, больше скорости света и, следовательно, распространению  $\psi$ -функции нельзя сопоставить дви-

жение некоторого материального объекта, в настоящее время общепринята вероятностная интерпретация  $\psi$ -функции<sup>1)</sup>.

Однако существует искушение рассматривать  $\psi$ -функции, из которых построен сигнал  $f(q, t)$ , как волны в некоторой среде, или «эфире», по аналогии, например, с распространением возмущений на поверхности жидкости. Приверженность человека к привычным представлениям настолько сильна, что ряд известных физиков, в том числе де Бройль, делают изощренные, зачастую отчаянные попытки построить, исходя из наблюдаемых свойств материи, гидродинамику этого гипотетического, не наблюдаемого непосредственно эфира. Этот эфир трактуется как субстанция, стоящая на ступень ниже так называемых элементарных частиц на иерархической лестнице природы.

С чисто практической точки зрения все эти попытки до сих пор оказывались бесплодными, так как они не привели ни к одному эксперименту, который мог бы быть использован для решающей проверки. Список литературы, существующей в настоящее время по развитию этого подхода, содержится в работе Такабаяси [3].

Доказательство того, что средние значения импульса и координаты отдельного объекта удовлетворяют классическим уравнениям, было дано Эренфестом [4].

### Л и т е р а т у р а

1. de Broglie L., Nature, 112, 540 (1923).
2. de Broglie L., Ann. Phys. (Paris), (10), 3, 22 (1925).
3. Takabayasi T., Progr. Theor. Phys. (Kyoto), Suppl., 4, 1 (1957).
4. Ehrenfest P., Zs. Phys., 45, 455 (1927).

---

<sup>1)</sup> В действительности скорость распространения сигнала определяется не фазовой, а групповой скоростью (в случае не слишком большого поглощения), величина которой  $d\omega/dk$  меньше скорости света. Соображения, связанные со скоростью сигнала, на самом деле не имеют отношения к тем причинам, которые побуждают к введению вероятностной интерпретации. — Прим. ред.

## Неопределенности и соотношения между ними

В основе всякой теории измерений лежит понятие неопределенности  $\Delta A$ , которая возникает при экспериментальном определении наблюдаемой величины  $A$  для объекта, находящегося в заданном состоянии  $|b\rangle$ . Определим  $\Delta A$  как корень квадратный из среднего квадрата отклонения от среднего значения:

$$(\Delta A)^2 = \overline{(A - \bar{A})^2} = \bar{A}^2 - (\bar{A})^2. \quad (10.1)$$

Вводя для «нормы»  $|b\rangle$  обозначение

$$\|b\| = \sqrt{\langle b|b\rangle} \quad (10.2)$$

и используя свойство эрмитовости  $A$ , можно записать

$$\begin{aligned} (\Delta A)^2 &= \overline{[A - \langle b|A|b\rangle]^2} = \langle b|[A - \langle b|A|b\rangle]^2|b\rangle = \\ &= \langle [A - \langle b|A|b\rangle]b|[A - \langle b|A|b\rangle]b\rangle = \|[A - \langle b|A|b\rangle]b\|^2. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Справедлива следующая основная теорема. Если операторы  $P$  и  $Q$ , представляющие две наблюдаемые величины, удовлетворяют соотношению

$$PQ - QP = -iI, \quad (10.4)$$

то

$$\Delta P \Delta Q \geq \frac{1}{2}. \quad (10.5)$$

Неравенство (10.5) называется соотношением неопределенностей.

Докажем это неравенство. С этой целью введем сокращенные обозначения

$$\begin{aligned} \hat{P} &= P - \bar{P} = P - \langle b|P|b\rangle, \\ \hat{Q} &= Q - \bar{Q} = Q - \langle b|Q|b\rangle \end{aligned} \quad (10.6)$$

и заметим снова, что

$$\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P} = -iI, \quad (10.7)$$

а также в силу (10.3)

$$\Delta P \Delta Q = \|\hat{P}b\| \cdot \|\hat{Q}b\|. \quad (10.8)$$

Воспользуемся теперь хорошо известным неравенством

$$\|u\| \cdot \|v\| \geq |\langle u | v \rangle|. \quad (10.9)$$

Знак равенства в (10.9) имеет место лишь в том случае, если  $|u\rangle$  и  $|v\rangle$  отличаются друг от друга самое большее на постоянный комплексный множитель. Неравенство (10.9) является обобщением простого геометрического факта, что скалярное произведение двух векторов никогда не превосходит произведения их длин. Отсюда находим

$$\Delta P \Delta Q \geq |\langle \hat{P}b | \hat{Q}b \rangle|, \quad (10.10)$$

а, следовательно, также

$$\Delta P \Delta Q \geq \text{Im} \langle \hat{P}b | \hat{Q}b \rangle. \quad (10.11)$$

Применяя тождество  $\text{Im}(\alpha + i\beta) = -i/2[(\alpha + i\beta) - (\alpha - i\beta)]$ , используя тот факт, что  $\langle u | v \rangle^* = \langle v | u \rangle$ , и предполагая вектор состояния  $|b\rangle$  нормированным, находим

$$\begin{aligned} \Delta P \Delta Q &\geq -\frac{i}{2} (\langle \hat{P}b | \hat{Q}b \rangle - \langle \hat{Q}b | \hat{P}b \rangle) = \\ &= -\frac{i}{2} (\langle \hat{Q}\hat{P}b | b \rangle - \langle \hat{P}\hat{Q}b | b \rangle) = \\ &= \frac{1}{2} \langle i(\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P})b | b \rangle = \frac{1}{2} \|b\|^2 = \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (10.12)$$

что и требовалось доказать. Из этого вывода следует далее, что произведение двух неопределенностей будет минимальным, если вектор состояния  $|b\rangle$  удовлетворяет условию

$$\hat{P}|b\rangle = i\gamma\hat{Q}|b\rangle, \quad (10.13)$$

где  $\gamma$  — действительная положительная величина. Такие векторы состояния называются оптимальными.

Иногда можно встретиться с утверждением, что всем парам канонических переменных в классической механике соответствуют в квантовой механике операторы, удовлетворяющие соотношению (10.4) и, следовательно, подчиняющиеся соотношению неопределенностей (10.5). К таким утверждениям необходимо относиться с осторожностью, так как соотношение неопределенностей (10.5) относится к одновременному измерению двух наблюдаемых величин объекта, находящегося в определенном состоянии  $|b\rangle$ . Поэтому подобные утверждения справедливы, например, для импульса и координаты данного объекта. Далее, в классической механике можно формально рассматривать время и энергию объекта как канонические переменные. Однако было

бы совершенно неверным на основании этого считать, что нельзя точно определить энергию объекта в данный момент времени. Детальный анализ характера энергетических измерений показывает, что закон сохранения энергии может быть проверен в результате двух последовательных измерений энергии  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  только с точностью  $|\omega_1 - \omega_2| (t_2 - t_1) > 1$ . Но это относится к измерениям, при которых объект находится в разных состояниях, а именно  $|b(t_1)\rangle$  и  $|b(t_2)\rangle$ , так что приведенное выше доказательство неприменимо и написанное «соотношение неопределенностей для энергии» имеет совершенно иное происхождение. Для более детального знакомства мы отсылаем читателя к работе Мессиа [2], где особенно полно рассматривается этот вопрос<sup>1)</sup>.

Отождествляя вновь  $P$  и  $Q$  с операторами импульса и координаты отдельного объекта, приводим уравнение (10.13), которому удовлетворяют оптимальные состояния, в  $q$ -представлении к следующему виду:

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial Q} - \bar{P}\right) |b\rangle = i\gamma(Q - \bar{Q}) |b\rangle. \quad (10.14)$$

При этом соответствующая  $\psi$ -функция  $\psi_b(q) = \langle q | b \rangle$  удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка

$$\left(-i \frac{d}{dq} - \bar{P}\right) \psi_b(q) = i\gamma(q - \bar{Q}) \psi_b(q), \quad (10.15)$$

интегрируя которое, мы получаем

$$\begin{aligned} \psi_b(q) &= \exp \int^q (-\gamma q + \gamma \bar{Q} + i\bar{P}) dq = \\ &= C \exp \left[ -\frac{\gamma}{2} q^2 + \gamma \bar{Q} q + i\bar{P} q \right], \end{aligned} \quad (10.16)$$

или

$$\psi_b(q) = C' \exp \left[ -\frac{\gamma}{2} (q - \bar{Q})^2 + i\bar{P} q \right]. \quad (10.17)$$

Постоянная интегрирования  $C'$  определяется условием нормировки

$$\langle b | b \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_b(q)|^2 dq = 1, \quad (10.18)$$

из которого следует

$$|C'|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-\gamma(q - \bar{Q})^2] dq = |C'|^2 \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} = 1, \quad (10.19)$$

<sup>1)</sup> Соотношению неопределенностей для энергии можно придать и другой смысл. Будучи применено к нестационарной замкнутой системе, оно связывает разброс энергии системы ( $\omega_1 - \omega_2$ ) с величиной масштаба нестационарности ( $t_1 - t_2$ ). См. также [4\*—6\*]. — Прим. ред.

так что окончательно находим

$$\psi_b(q) = \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{\gamma}{2}(q - \bar{Q})^2 + i\bar{P}q\right]. \quad (10.20)$$

Таким образом, оптимальный вектор состояния дает гауссово распределение вероятности около среднего значения  $\bar{Q}$ . Теперь не представляет труда вычислить  $\bar{P}$ ,  $\Delta P$ ,  $\Delta Q$  для оптимального состояния (10.20).

Полезное упражнение заключается в преобразовании  $|b\rangle$ , заданного в  $q$ -представлении, к  $|b\rangle$  в  $p$ -представлении. В наиболее общем виде эти представления определяются уравнениями на собственные значения

$$P|p\rangle = p|p\rangle, \quad Q|q\rangle = q|q\rangle. \quad (10.21)$$

При этом должен существовать унитарный оператор  $U$ , такой, что

$$|p\rangle = U|q\rangle, \quad |q\rangle = U^+|p\rangle, \quad (10.22)$$

или в компонентах

$$\begin{aligned} |p'\rangle &= \int \langle p'|U|q''\rangle dq'' |q''\rangle, \\ |q''\rangle &= \int \langle q''|U^+|p'\rangle dp' |p'\rangle, \end{aligned} \quad (10.23)$$

который преобразует произвольный оператор  $A_{(q)}$ , заданный в  $q$ -представлении, в соответствующий оператор  $A_{(p)}$  в  $p$ -представлении согласно формулам

$$\begin{aligned} A_{(p)} &= UA_{(q)}U^+, \\ A_{(q)} &= U^+A_{(p)}U, \end{aligned} \quad (10.24)$$

или в компонентах

$$\langle p''|A|p'\rangle = \int \int \langle p''|U|q''\rangle dq'' \langle q''|A|q'\rangle dq' \langle q'|U^+|p'\rangle. \quad (10.25)$$

Из определений (10.23), которые могут быть также записаны как разложения по  $\psi$ -функциям:

$$|p'\rangle = \int |q''\rangle dq'' \psi_{p'}(q''), \quad |q''\rangle = \int |p'\rangle dp' \psi_{p'}^*(q''), \quad (10.26)$$

следует, что матричные элементы  $U$  совпадают с  $\psi$ -функциями:

$$\begin{aligned} \langle p'|U|q''\rangle &= \langle q''|p'\rangle = \psi_{p'}(q''), \\ \langle q''|U^+|p'\rangle &= \langle p'|q''\rangle = \psi_{p'}^*(q''). \end{aligned} \quad (10.27)$$



Используя представление  $P = -i(\partial/\partial Q)$  в первом из уравнений (10.21), находим, что  $\psi_{p'}^*(q'')$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$-i \frac{\partial \psi_{p'}^*(q'')}{\partial q''} = p' \psi_{p'}^*(q''), \quad (10.28)$$

решением которого является функция

$$\psi_{p'}^*(q'') = \text{const } e^{ip'q''} = \langle q'' | U^+ | p' \rangle. \quad (10.29)$$

Постоянная интегрирования может быть определена из условия унитарности  $U$ :

$$\begin{aligned} \langle p'' | UU^+ | p' \rangle &= \int \langle p'' | U | q' \rangle dq' \langle q' | U^+ | p' \rangle = \\ &= |\text{const}|^2 \int \exp [i(p'' - p')q'] dq' = \\ &= 2\pi |\text{const}|^2 \delta(p' - p'') = \delta(p' - p''). \end{aligned} \quad (10.30)$$

Окончательно находим

$$\langle p' | U | q'' \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ip'q''}. \quad (10.31)$$

Таким образом, компоненты  $|p\rangle$  и  $|q\rangle$  связаны между собой преобразованием Фурье:

$$\begin{aligned} |p'\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-ip'q''} |q''\rangle dq'', \\ |q''\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{+iq''p'} |p'\rangle dp'. \end{aligned} \quad (10.32)$$

В частности,  $\psi$ -функция  $|b\rangle$  в  $p$ -представлении получается из (10.20) простым интегрированием:

$$\psi_b(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\gamma}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{\gamma}{2} (q - \bar{Q})^2 + i(\bar{P} - p)q \right] dq. \quad (10.33)$$

### ПРИМЕЧАНИЯ

Классическим источником для ознакомления с соотношениями неопределенностей является работа Гейзенберга [1].

Соотношение неопределенностей для времени — энергии рассматривается в книге Мессиа [2], в особенности см. гл. IV и VIII.

Ландау и Пайерлс [3] положили начало дискуссии о соотношении неопределенностей для времени — энергии, в частности,

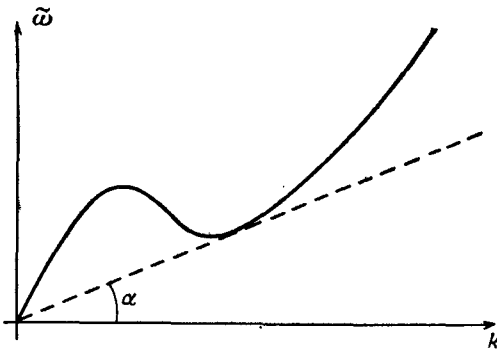
они отметили его следствия при измерении импульса частицы в релятивистском случае, при измерении электромагнитных полей и измерении положения частиц, масса которых как равна, так и не равна нулю.

### *Л и т е р а т у р а*

1. Heisenberg W., Die Physikalischen Prinzipien der Quantentheorie, Leipzig, 1930 (см. перевод: Гейзенберг В., Физические принципы квантовой теории, Л.—М., 1932).
2. Messiah A., Quantum Mechanics, Vol. 1, Amsterdam, 1961.
3. Landau L., Peierls R., Zs., Phys., **69**, 56 (1931).
- 4\*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, М., 1963.
- 5\*. Мандельштам Л. И., Тамм И. Е., Изв. АН СССР, сер. физич., **9**, 122 (1945).
- 6\*. Крылов Н. С., Фок В. А., ЖЭТФ, **17**, 93 (1947).

## Отступление: сверхтекучесть

Общая формула преобразования (9.13), разумеется, справедлива для любого объекта, обладающего энергией и импульсом, а не только для «классической частицы» с энергией, зависящей от импульса  $k$  как  $\omega = k^2/2m$ . Таким объектом, в частности, может быть коллективное возбуждение, или «квазичастица», которая рассматривается как носитель энергии и импульса возбуждения в жидкости<sup>1)</sup>. Зависимость энергии такой квазичастицы от импульса  $\tilde{\omega}(k)$  может, например, иметь вид, представленный на фиг. 10. Если имеет место такая зависимость, то



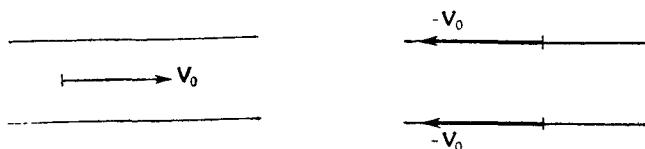
Фиг. 10. Энергетический спектр квазичастиц, предложенный Ландау.

жидкость, оставаясь в основном состоянии, при движении через капилляр не сможет отдавать энергию стенкам капилляра и, следовательно, испытывать трение. Трение будет отсутствовать

<sup>1)</sup> При выполнении некоторых условий слабо возбужденное состояние системы можно свести к невозбужденному состоянию плюс некоторое число особых объектов — квазичастиц, или элементарных возбуждений. Квазичастицы в первом приближении можно считать невзаимодействующими друг с другом. Соответственно энергия и импульс возбуждения системы совпадают с суммой энергий и импульсов квазичастиц. Подробнее см. [5\*—8\*]. — *Прим. ред.*

до тех пор, пока скорость движения жидкости не превзойдет некоторого критического значения  $V_{кр} = \text{tg } \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона прямой, проведенной из начала координат в точку касания этой прямой с кривой  $\tilde{\omega}(k)$ . Исторически именно обнаружение такой критической скорости для сверхтекучего гелия II привело Ландау к предположению о существовании квазичастиц в гелии II с энергетическим спектром, подобным изображенному на фиг. 10.

Чтобы понять, почему возникает сверхтекучее состояние при наличии указанного энергетического спектра квазичастиц, рассмотрим жидкость, движущуюся в капилляре со скоростью  $V_0$ . Значения всех величин в лабораторной системе координат  $S$ , связанной со стенками капилляра, мы не будем отмечать какими-либо индексами (фиг. 11). С другой стороны, ту же экспериментальную ситуацию можно рассматривать в системе координат



Фиг. 11. Преобразование координат к системе, связанной с наблюдателем, который движется вместе с жидкостью, текущей по капилляру.

Слева — система  $S$ : стенка неподвижна, жидкость движется со скоростью  $V_0$ . Справа — система  $S_0$ : стенка движется со скоростью  $-V_0$ , жидкость неподвижна.

$S_0$ , связанной с жидкостью, относительно которой стенки капилляра движутся со скоростью  $-V_0$ . Значения всех величин в системе координат  $S_0$  мы будем отмечать индексом «нуль».

Предположим теперь, что жидкость находится при абсолютном нуле температуры, т. е. в основном состоянии, и, следовательно, квазичастицы в жидкости отсутствуют<sup>1)</sup>. Начальная кинетическая энергия жидкости равна:

$$\begin{array}{ll} \text{в системе } S & \text{в системе } S_0 \\ E_{\text{нач}} = \frac{1}{2} M V_0^2, & E_{\text{нач}} = 0, \end{array} \quad (11.1)$$

где  $M$  — масса всей жидкости. При наличии трения жидкость должна начать двигаться в системе  $S_0$ , а в системе  $S$  — терять

<sup>1)</sup> Предположение об отсутствии квазичастиц в основном состоянии является гипотезой, которую можно обосновать только при отсутствии взаимодействия между молекулами жидкости. Более детальное исследование этого вопроса проведено в гл. 30. Однако рассуждения, приведенные в этой главе, могут быть перенесены и на более общий случай, когда в жидкости даже при абсолютном нуле температуры существуют квазичастицы. (По этому поводу см. примечание в гл. 30. — *Прим. ред.*)

энергию, отдавая ее стенкам. На языке элементарных возбуждений движение жидкости в системе  $S_0$  может возникнуть только тогда, когда в ней постепенно возникает внутреннее движение, т. е. когда в жидкости в результате ее взаимодействия со стенками начинают возникать квазичастицы.

Предположим далее, что в результате этого взаимодействия в системе  $S_0$  в жидкости возникла одна квазичастица с импульсом  $\mathbf{k}_0$  и энергией  $\tilde{\omega}_0(k_0)$ . При этом энергия жидкости в системе  $S_0$ , очевидно, будет равна

$$E_0 = \tilde{\omega}_0(k_0). \quad (11.2)$$

Чтобы найти выражение для энергии этой квазичастицы в системе  $S$ , можно воспользоваться общей формулой преобразования (9.13). Так, если  $S$  движется относительно  $S_0$  со скоростью  $\mathbf{V}_0$ , то эффективный гамильтониан  $H_{\text{эфф}}$  объекта с импульсом  $\mathbf{P}_0$  в системе  $S$  имеет следующий вид:

$$H_{\text{эфф}} = H_0^T + (\mathbf{P}_0 \mathbf{V}_0), \quad (11.3)$$

где  $H_0^T = U H_0 U^{-1}$ ,  $U = \exp(i\mathbf{P}_0 \mathbf{V}_0 t)$ . Гамильтониан «свободной» квазичастицы  $H_0$  не зависит от координат и, следовательно,  $H_0^T = H_0$ , т. е. изменение эффективной энергии целиком обусловлено кинематическим эффектом относительного движения. Таким образом, энергия квазичастицы в системе  $S$  равна

$$\tilde{\omega}(k_0) = \tilde{\omega}_0(k_0) + (\mathbf{k}_0 \mathbf{V}_0). \quad (11.4)$$

Полная же энергия жидкости в системе  $S$  равна

$$E = \tilde{\omega}_0(k_0) + (\mathbf{k}_0 \mathbf{V}_0) + \frac{1}{2} M V_0^2. \quad (11.5)$$

Если имеется трение, то изменение энергии в  $S$  должно быть отрицательным и в соответствии с (11.1) и (11.5) имеем

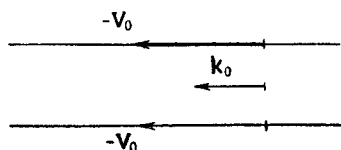
$$E - E_{\text{нач}} = \tilde{\omega}_0(k_0) + (\mathbf{k}_0 \mathbf{V}_0) < 0. \quad (11.6)$$

При данном значении  $k_0$  минимум этого выражения достигается в том случае, когда векторы  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{V}_0$  антипараллельны. Этот случай соответствует квазичастицам, импульсы которых параллельны скорости стенок в  $S_0$ , как это показано на фиг. 12. Поэтому

$$\tilde{\omega}_0(k_0) - k_0 V_0 < 0, \quad \text{или} \quad V_0 > \frac{\tilde{\omega}_0(k_0)}{k_0}. \quad (11.7)$$

Для появления вязкости необходимо, чтобы это неравенство выполнялось по крайней мере для одного значения  $k_0$  импульса квазичастицы. Далее,  $\tilde{\omega}_0(k_0)/k_0$  представляет собой наклон прямой, проведенной из начала координат в точку  $\tilde{\omega}_0(k_0)$  на дис-

персионной кривой. Минимальное значение этого наклона точно равно  $\operatorname{tg} \alpha$ , как показано на фиг. 10. Если  $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ , то при скоростях  $V_0 < V_{\text{кр}} = \operatorname{tg} \alpha$  в жидкости не могут возникать квазичастицы и жидкость будет обладать свойством сверхтекучести, т. е. движение не будет замедляться трением. Условие  $\operatorname{tg} \alpha \neq 0$ , очевидно, эквивалентно требованию, чтобы кривая  $\tilde{\omega}(k)$  не касалась оси абсцисс в начале координат. Поэтому, в частности, если частицами с наименьшей энергией являются фононы, для которых  $\tilde{\omega}(k) = c_0 k$  ( $c_0$  — скорость звука), то сверхтекучесть обязательно возникает. Следовательно, для того чтобы показать, что при низких температурах жидкость становится сверхтекучей, достаточно доказать, что при низких температурах возбуждаются только фононы. Такое доказательство для некоторых частных случаев дано в гл. 30.

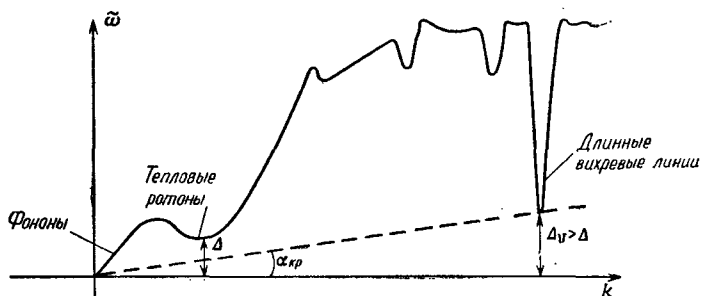


Фиг. 12. Импульс  $k_0$  квазичастицы в системе  $S_0$  антипараллелен  $V_0$ .

Как впервые показал Ландау, фононы лишь частично ответственны за инерционные свойства жидкости, в которой они существуют. Если они являются единственными возбуждениями, то в принципе температуру перехода из сверхтекучего состояния в нормальное можно найти, определив ту температуру, при которой масса, соответствующая фононному газу, равна массе всей жидкости. В жидком гелии II вклад «ротонной» части спектра возбуждения, соответствующей возбуждениям с энергиями, лежащими вблизи минимума кривой, показанной на фиг. 10, преобладает при температурах выше  $0,6^\circ \text{K}$ , и переход к нормальному состоянию можно объяснить *тепловым* возбуждением ротонов с энергией  $\tilde{\omega} = \Delta \approx 9^\circ \text{K}$ . К сожалению, этому значению  $\Delta$  соответствует такое значение угла  $\alpha$  (см. фиг. 10), при котором критическая скорость во много раз превышает значения, наблюдаемые на опыте<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Последующие рассуждения автора требуют критического к себе отношения. В частности, не соответствует современным представлениям кривая спектра возбуждений, приведенная на фиг. 13. Эта кривая в действительности ведет себя выше точки минимума («тепловые ротонны») монотонным образом вплоть до точки своего окончания. Вихревые же линии (точнее, вихревые кольца) образуют особую ветвь спектра возбуждений с зависимостью  $\tilde{\omega}$  от  $k$  вида  $\tilde{\omega} \sim \ln k \cdot \sqrt{k}$ ; эта ветвь простирается в области больших  $k$ , однако

Эту трудность можно устранить, если механизм появления вязкости при критической скорости связать с более реальным спектром возбуждений типа, показанного на фиг. 13, который соответствует возможности существования нескольких квазистабильных возбуждений ротонного типа, но с большей эффективной массой (т. е. наличием более узких линий возбуждения) и с большей энергией возбуждения  $\Delta_v > \Delta$ . Хотя они не могут быть возбуждены термически при температурах, соответствующих сверхтекучему состоянию, однако они могут быть возбуждены



Фиг. 13. Возможный вид реального спектра возбуждений в жидком гелии II.

механическим путем, поскольку таким возбуждениям на дисперсионной кривой соответствуют углы  $\alpha$ , меньшие по сравнению с углом, показанным на фиг. 10. Такие квазичастицы можно отождествить с «длинными» ротонами, или вихревыми линиями, существование которых впервые предположили Онзагер и Фейнман в связи с проблемой критической скорости в гелии II. В то время как существование возбуждений, которые на фиг. 13 обозначены как «тепловые ротонны», для определенных систем можно доказать, что и сделано в гл. 30 на основании общих принципов, строгое квантовомеханическое доказательство существования «длинных» ротоннов, или вихревых линий, относится к широкому классу еще не решенных в настоящее время проблем.

Возбуждение длинных вихревых линий за счет трения можно рассматривать как некую механическую «накачку», в результате

положение точки ее начала до сих пор неизвестно. Во всяком случае, вихревые кольца никоим образом не могут соответствовать минимумам, изображенным на фиг. 13. Подробности о виде спектра возбуждений в гелии можно найти в работах [7\*, 9\*].

Что же касается критической скорости, то она обнаруживает сильную зависимость от диаметра капилляра и по этой причине не может объясняться объемными вихревыми кольцами, из которых шла речь выше. Скорее всего она связана с особыми поверхностными вихревыми возбуждениями (см. [3, 7\*, 10\*]). — Прим. ред.

которой заселяются уровни  $\Delta_v$ , лежащие выше уровней  $\Delta$ , остающихся практически пустыми при температурах ниже  $0,6^\circ \text{K}$ , и, таким образом, возникает ситуация, используемая при создании мазеров и известная как состояние с отрицательной температурой. При этом возникает интересный вопрос: нельзя ли *механически* индуцировать переходы  $\Delta_v \rightarrow \Delta$ , возбуждая в жидком гелии II, движущемся через капилляр со скоростью выше критической, колебания с резонансной частотой  $\Delta_v - \Delta$ , которые могут усиливаться в результате индуцированного излучения. Если скорость жидкости в капилляре меньше критической, то этого усиления не будет происходить. В этой связи имеет смысл отметить, что приведенный на фиг. 13 спектр возбуждений, по-видимому, является сильно упрощенным и что на самом деле существует несколько типов вихревых линий, уровни энергии которых  $\Delta_v$  лежат выше, чем  $\Delta$ . При этом возможны переходы, соответствующие превращению вихревых линий одного типа в другой и сопровождающиеся гораздо меньшим изменением энергии, чем при полном распаде вихревой линии на тепловые ротоны.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Ландау [1] впервые высказал предположение о существовании спектра квазичастиц вида, изображенного на фиг. 10, для объяснения явления сверхтекучести жидкого гелия II.

Онзагер [2] указал на возможность существования квазистабильных возбуждений, отличных от рассмотренных Ландау тепловых ротонов. Представление о квантовых вихревых линиях типа тех, которые были предложены Онзагером, Фейнман [3] использовал для количественного расчета значения критической скорости в жидком гелии II.

Обзор экспериментальных работ по исследованию вихревых линий в жидком гелии II см. в работе Вайшена [4].

### Литература

1. Ландау Л., Journ. Phys. USSR, **5**, 71 (1941).
2. Onsager L., Nuovo cimento, **6**, Suppl. 2, 249 (1949).
3. Feynman R. P., Progr. Low Temp. Phys., **1**, Ch. II (1955).
4. Vinen W. F., Progr. Low Temp. Phys., **3**, Ch. I (1961).
- 5\*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1964.
- 6\*. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е., Методы квантовой теории поля в статистической физике, М., 1962.
- 7\*. Халатников И. М., Введение в теорию сверхтекучести, М., 1965.
- 8\*. Киржниц Д. А., Полевые методы теории многих частиц. Приложение Б, М., 1963.
- 9\*. Пятаевский Л. П., Усп. физич. наук, **88**, 409 (1966).
- 10\*. Keller W. E., Hammett E. F., Physics, **2**, 221 (1966).



## Вращение наблюдателя

По аналогии с рассмотрением, проведенным в гл. 9, рассмотрим теперь поворот наблюдателя (1) относительно наблюдателя (0) на угол  $\phi$  вокруг заданной оси  $\mathbf{n}$ . При этом векторы состояния  $|b\rangle^T$  и  $|b\rangle$ , соответствующие рассматриваемым системам отсчета, связаны унитарным преобразованием

$$|b\rangle^T = T_{\mathbf{n}, \phi} |b\rangle, \quad T_{\mathbf{n}, \phi} = e^{i\mathbf{n}\phi \cdot \mathbf{J}}, \quad (12.1)$$

где  $\mathbf{J}\{J_1, J_2, J_3\}$  — эрмитов оператор момента количества движения.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим сначала объект, не обладающий спином. В этом случае момент количества движения объекта равен просто орбитальному моменту и в соответствии с выражением, известным для момента количества движения в классической механике, он может быть представлен следующими тремя операторами:

$$\begin{aligned} J_1 &= Q_2 P_3 - Q_3 P_2 = -i \left( Q_2 \frac{\partial}{\partial Q_3} - Q_3 \frac{\partial}{\partial Q_2} \right), \\ J_2 &= Q_3 P_1 - Q_1 P_3 = -i \left( Q_3 \frac{\partial}{\partial Q_1} - Q_1 \frac{\partial}{\partial Q_3} \right), \\ J_3 &= Q_1 P_2 - Q_2 P_1 = -i \left( Q_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} - Q_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} \right). \end{aligned} \quad (12.2)$$

При этом мы исходим из того, что система собственных векторов  $|\mathbf{q}\rangle$  оператора  $\mathbf{Q}$  является полной, и, следовательно, они могут быть выбраны в качестве базиса при описании объекта. Легко проверить, что операторы  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  подчиняются следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} J_1 J_2 - J_2 J_1 &= iJ_3, \\ J_2 J_3 - J_3 J_2 &= iJ_1, \\ J_3 J_1 - J_1 J_3 &= iJ_2, \end{aligned} \quad (12.3)$$

или

$$[\mathbf{J}\mathbf{J}] = i\mathbf{J},$$

которые по форме совпадают с коммутационными соотношениями (2.47) для спиновых операторов  $s_i$ .

Предположим теперь, что ось вращения совпадает с осью  $q_3$ , так что координаты объекта относительно обоих наблюдателей связаны между собой следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} Q_1^T &= Q_1 \cos \phi + Q_2 \sin \phi, & Q_1 &= Q_1^T \cos \phi - Q_2^T \sin \phi, \\ Q_2^T &= -Q_1 \sin \phi + Q_2 \cos \phi, & Q_2 &= Q_1^T \sin \phi + Q_2^T \cos \phi, \\ Q_3^T &= Q_3, & Q_3 &= Q_3^T, \end{aligned} \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \phi} = -Q_2, \quad \frac{\partial Q_2}{\partial \phi} = Q_1, \quad \frac{\partial Q_3}{\partial \phi} = 0.$$

Если разложить преобразованный вектор состояния в ряд

$$|\mathbf{q}\rangle^T = |q_1^T, q_2^T, q_3^T\rangle = |\mathbf{q}\rangle + \phi \left( \frac{d|\mathbf{q}\rangle}{d\phi} \right)_{\phi=0} + \frac{\phi^2}{2!} \left( \frac{d^2|\mathbf{q}\rangle}{d\phi^2} \right)_{\phi=0} + \dots \quad (12.5)$$

и использовать соотношение

$$\left( \frac{d|\mathbf{q}\rangle}{d\phi} \right)_{\phi=0} = \sum_i \frac{\partial |\mathbf{q}\rangle}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial \phi} = \left( Q_1 \frac{\partial}{\partial Q_2} - Q_2 \frac{\partial}{\partial Q_1} \right) |\mathbf{q}\rangle = iJ_3 |\mathbf{q}\rangle, \quad (12.6)$$

то этот вектор можно записать в следующем виде:

$$|\mathbf{q}\rangle^T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{n!} (iJ_3)^n |\mathbf{q}\rangle = e^{i\phi J_3} |\mathbf{q}\rangle. \quad (12.7)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом частном случае справедливо соотношение (12.1).

Если в качестве объекта рассмотрения взять спин, ориентированный в направлении, заданном углами  $\theta$ ,  $\varphi$  на единичной сфере, так что

$$|b\rangle = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (12.8)$$

то оператор поворота вокруг оси  $q_3$  будет выражаться через оператор  $s_3 = \sigma_3/2$  следующим образом:

$$T_\phi = e^{(i/2)\phi\sigma_3}. \quad (12.9)$$

Простой вид оператора  $\sigma_3$  позволяет просуммировать бесконечный ряд, которым представлен оператор  $T_\phi$ . Учитывая, что

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

находим

$$T_\phi = \left[ 1 + \frac{1}{2!} \left( \frac{i\phi}{2} \right)^2 + \dots \right] I + \left[ \frac{i\phi}{2} + \frac{1}{3!} \left( \frac{i\phi}{2} \right)^3 + \dots \right] \sigma_3 = \\ = \cos \left( \frac{\phi}{2} \right) I + i \sin \left( \frac{\phi}{2} \right) \sigma_3 = \begin{pmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{pmatrix}. \quad (12.10)$$

Отсюда получаем

$$|b\rangle^T = e^{i\phi/2} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i(\varphi-\phi)} \end{pmatrix} \quad (12.11)$$

Это выражение отличается от  $|b\rangle$  не только несущественным фазовым множителем, но и азимутальным углом  $\varphi^T = \varphi - \phi$ . Таким образом, и в этом частном случае справедливо унитарное преобразование вида (12.1).

Особый интерес представляет вращение с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , когда

$$\mathbf{n}\phi = \omega t \quad (12.12)$$

и оператор преобразования является функцией времени

$$T_\omega = e^{i(\omega\mathbf{J})t}. \quad (12.13)$$

Эффективный гамильтониан вращающегося наблюдателя имеет вид, аналогичный найденному для случая равномерного прямолинейного движения:

$$H_{\text{эфф}} = H^T + i\dot{T}T^{-1} = H^T - (\omega\mathbf{J}), \quad (12.14)$$

где  $\omega$  — вектор угловой скорости наблюдателя (1) в системе наблюдателя (0). Угловая скорость наблюдателя (0) относительно наблюдателя (1), очевидно, равна  $-\omega$ .

В дальнейшем понадобятся формулы преобразования для компонент момента количества движения при вращении с угловой скоростью  $\omega = -\omega\mathbf{k}$ . Эти формулы имеют вид

$$J_1^T = e^{-i\omega J_3 t} J_1 e^{i\omega J_3 t} = J_1 \cos(\omega t) + J_2 \sin(\omega t), \\ J_2^T = e^{-i\omega J_3 t} J_2 e^{i\omega J_3 t} = -J_1 \sin(\omega t) + J_2 \cos(\omega t), \quad (12.15) \\ J_3^T = e^{-i\omega J_3 t} J_3 e^{i\omega J_3 t} = J_3.$$

Они следуют непосредственно из коммутационных соотношений (12.3). Например, используя обычное обозначение  $[J_n J_m] =$

$= J_n J_m - J_m J_n$ , находим

$$\begin{aligned} e^{-i\omega J_1 t} J_1 e^{i\omega J_1 t} &= J_1 + i\omega t [J_1 J_3] + \frac{(i\omega t)^2}{2!} [[J_1 J_3] J_3] + \dots \\ \dots &= J_1 \left[ 1 - \frac{(\omega t)^2}{2!} + \dots \right] + J_2 \left[ \omega t - \frac{(\omega t)^3}{3!} + \dots \right] = \\ &= J_1 \cos(\omega t) + J_2 \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (12.16)$$

Для любых трех операторов  $J_1, J_2, J_3$ , удовлетворяющих коммутационным соотношениям (12.3), можно доказать следующую теорему:

Собственные векторы одного из этих операторов, например  $J_3$ , и оператора  $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$  совпадают и характеризуются двумя квантовыми числами  $j$  и  $m$ , так что

$$\begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle, \\ J_3 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle. \end{aligned} \quad (12.17)$$

При этом  $j$  может принимать значения  $0, 1/2, 1, 3/2, \dots$ , а квантовое число  $m$  при данном  $j$  может принимать  $2j+1$  возможных значений  $-j, -j+1, \dots, j-1, j$ . Доказательство этой теоремы приведено в Приложении 1.

В качестве применения развитых выше представлений о вращении наблюдателя рассмотрим снова спиновый магнитный момент во внешнем поле

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= B_0 \mathbf{k} + B_1 [i \cos(\omega t) - j \sin(\omega t)], \\ \boldsymbol{\omega} &= -\omega \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (12.18)$$

При этих условиях наблюдается спиновый магнитный резонанс, исследованный в гл. 7. Уравнение движения для магнитного момента  $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{s}$  в лабораторной системе координат в представлении Шредингера имеет вид

$$i | \dot{b} \rangle = -\gamma (\mathbf{sB}) | b \rangle. \quad (12.19)$$

В качестве первого шага при решении уравнения (12.19), в которое входит зависящий от времени гамильтониан  $H = -\gamma (\mathbf{sB})$ , совершим переход к системе координат (1), вращающейся относительно лабораторной системы с угловой скоростью  $\boldsymbol{\omega}$ . После преобразования вектор состояния имеет вид

$$| b \rangle' = e^{i(\boldsymbol{\omega s})t} | b \rangle; \quad (12.20)$$

он удовлетворяет уравнению

$$\frac{i \partial | b \rangle'}{\partial t} = H'_{\text{эфф}} | b \rangle', \quad (12.21)$$

где

$$H'_{\text{эфф}} = H' - (\boldsymbol{\omega s}) = -\gamma e^{i(\boldsymbol{\omega s})t} (\mathbf{sB}) e^{-i(\boldsymbol{\omega s})t} - (\boldsymbol{\omega s}). \quad (12.22)$$

Используя формулы (12.15), можно показать, что

$$e^{i(\omega\mathbf{s})t}(\mathbf{sB})e^{-i(\omega\mathbf{s})t} = e^{-i\omega s_3 t} [s_3 B_0 + B_1 (s_1 \cos \omega t - s_2 \sin \omega t)] e^{i\omega s_3 t} = s_3 B_0 + s_1 B_1. \quad (12.23)$$

Поэтому эффективный гамильтониан можно записать в виде

$$H'_{\text{эфф}} = -\gamma(\mathbf{sB}'_{\text{эфф}}), \quad (12.24)$$

где эффективное поле определяется выражением

$$\mathbf{B}'_{\text{эфф}} = \left[ B_0 - \frac{\omega}{\gamma} \right] \mathbf{k} + B_1 \mathbf{i}. \quad (12.25)$$

Таким образом, в уравнение (12.21) входит гамильтониан, который не зависит более от времени  $t$ . Решение этого уравнения удобно получить с помощью второго преобразования — перехода к системе координат (2), вращающейся вокруг направления вектора  $\mathbf{B}'_{\text{эфф}}$  с угловой скоростью

$$\mathbf{w} = -\gamma \mathbf{B}'_{\text{эфф}}, \quad (12.26)$$

величина которой, согласно (12.25), равна

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2}, \quad (12.27)$$

где  $\omega_0$  и  $\omega_1$  — характеристические частоты, определяемые как и в гл. 7 выражениями

$$\omega_0 = \gamma B_0, \quad \omega_1 = \gamma B_1. \quad (12.28)$$

При этом дважды преобразованный вектор состояния

$$|b\rangle'' = e^{i(\mathbf{w}\mathbf{s})t} |b\rangle' \quad (12.29)$$

удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial |b\rangle''}{\partial t} = 0, \quad (12.30)$$

поскольку эффективный гамильтониан, описывающий спин во второй системе, равен

$$H''_{\text{эфф}} = H'_{\text{эфф}} - (\mathbf{w}\mathbf{s}) = -\gamma(\mathbf{sB}'_{\text{эфф}}) + \gamma(\mathbf{sB}'_{\text{эфф}}) = 0. \quad (12.31)$$

Эффективное поле  $\mathbf{B}'_{\text{эфф}}$  одинаково как для системы координат (1), так и для системы (2), поэтому гамильтониан  $H'_{\text{эфф}}$  остается инвариантным при преобразовании (12.29). Таким образом, решение уравнения (12.19) можно получить сразу же, учитывая, что

$$|b(t)\rangle'' = |b(0)\rangle'' = |b(0)\rangle' = |b(0)\rangle \quad (12.32)$$

и

$$|b(t)\rangle = e^{-i(\omega\mathbf{s})t} e^{-i(\mathbf{w}\mathbf{s})t} |b(t)\rangle'', \quad (12.33)$$

что окончательно дает

$$|b(t)\rangle = e^{-i(\omega\mathbf{s})t} e^{-i(\omega\mathbf{s})t} |b(0)\rangle. \quad (12.34)$$

Чтобы раскрыть смысл этих преобразований, полезно ввести угол  $\Theta$  между вектором эффективного поля  $\mathbf{B}'_{\text{эфф}}$  и вектором  $\mathbf{B}_0$ :

$$\cos \Theta = \frac{B_0 - (\omega/\gamma)}{B'_{\text{эфф}}} = \frac{\omega_0 - \omega}{\omega}, \quad \sin \Theta = \frac{\omega_1}{\omega}. \quad (12.35)$$

При этом получаем

$$(\omega\mathbf{s}) = -\omega s_3 \quad \text{и} \quad (\omega\mathbf{s}) = -\omega (s_1 \sin \Theta + s_3 \cos \Theta). \quad (12.36)$$

Чтобы установить связь с экспериментом, рассмотрим частицу со спином  $1/2$  и предположим, что в момент времени  $t=0$  ее спин параллелен вектору  $\mathbf{B}_0$ , т. е.  $|b(0)\rangle = |b_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Тогда вероятность переворота спина [см. выражение (7.66)] с учетом того, что  $|b_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ , равна

$$P_{\text{пер}} = |\langle b_- | b(t) \rangle|^2 = |\langle b_- | e^{-i(\omega\mathbf{s})t} e^{-i(\omega\mathbf{s})t} b_+ \rangle|^2. \quad (12.37)$$

Чтобы вычислить это выражение, вспомним, что векторы состояния  $|b_+\rangle$ ,  $|b_-\rangle$  являются собственными состояниями оператора  $-i(\omega\mathbf{s})t = (\omega/2)\sigma_3 t$ , отвечающими собственным значениям  $i\omega t/2$  и  $-i\omega t/2$  соответственно. Тогда можно написать

$$\begin{aligned} \langle b_- | e^{-i(\omega\mathbf{s})t} e^{-i(\omega\mathbf{s})t} b_+ \rangle &= \langle e^{i(\omega\mathbf{s})t} b_- | e^{-i(\omega\mathbf{s})t} b_+ \rangle = \\ &= e^{-i\omega t/2} \langle b_- | e^{-i(\omega\mathbf{s})t} b_+ \rangle \end{aligned} \quad (12.38)$$

и поэтому

$$P_{\text{пер}} = \left| \langle b_- | \exp \left[ i \frac{\omega}{2} t (\sigma_1 \sin \Theta + \sigma_3 \cos \Theta) \right] b_+ \right|^2. \quad (12.39)$$

Разлагая в ряд экспоненциальный оператор и используя соотношения  $\sigma_i^{2n} = I$  и  $\sigma_i^{2n+1} = \sigma_i$ , получаем

$$\begin{aligned} \exp \left[ i \frac{\omega}{2} t (\sigma_1 \sin \Theta + \sigma_3 \cos \Theta) \right] &= \\ &= I \cos \frac{\omega t}{2} + i (\sigma_1 \sin \Theta + \sigma_3 \cos \Theta) \sin \frac{\omega t}{2}. \end{aligned} \quad (12.40)$$

Таким образом,  $P_{\text{пер}}$  содержит только матричные элементы типа

$$\langle b_- | \sigma_1 b_+ \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1, \quad \langle b_- | \sigma_3 b_+ \rangle = 0, \quad \langle b_- | I b_+ \rangle = 0, \quad (12.41)$$

так что окончательно имеем

$$P_{\text{пер}} = \sin^2 \Theta \sin^2 \frac{\omega t}{2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{\omega_1^2 + (\omega_0 - \omega)^2}}{2} t \right). \quad (12.42)$$

Последнее выражение совпадает с резонансной формулой (7.67), полученной выше с помощью совершенно другого метода, использующего представление взаимодействия.

### ПРИМЕЧАНИЕ

Раби и др. [1] впервые использовали вращающуюся систему координат при рассмотрении вопросов магнитного резонанса.

### Литература

1. Rabi I. I., Ramsay N. F., Schwinger J., Rev. Mod. Phys., **26**, 167 (1954).

## Связь между свойствами инвариантности гамильтониана и законами сохранения

Если  $\psi$ -функция, описывающая физический объект, подвергается унитарному преобразованию

$$T = e^{i\tau S}, \quad T^{-1} = T^\dagger = e^{-i\tau S}, \quad (13.1)$$

где  $S$  — эрмитов оператор, а  $\tau$  — некоторый параметр, характеризующий преобразование, то при этом гамильтониан системы преобразуется согласно соотношению

$$H^T = e^{i\tau S} H e^{-i\tau S}. \quad (13.2)$$

Чтобы рассчитать  $H^T$ , необходимо, вообще говоря, прибегнуть к разложению

$$\begin{aligned} H^T &= (I + i\tau S + \dots) H (I - i\tau S + \dots) = \\ &= H + i\tau [SH] + \frac{(i\tau)^2}{2!} [S [SH]] + \dots \end{aligned} \quad (13.3)$$

Отсюда видно, что если гамильтониан  $H$  коммутирует с генератором  $S$  унитарного преобразования  $T$ , то он остается инвариантным при таком преобразовании.

Обратное утверждение не справедливо, т. е. из равенства  $H^T = H$  нельзя заключить, что  $[SH]=0$ , за исключением одного случая — когда производится бесконечно малое унитарное преобразование

$$T = I + i\tau S, \quad T^{-1} = I - i\tau S, \quad (13.4)$$

где теперь  $\tau$  — бесконечно малый параметр. В этом случае условие

$$H^T = H + i\tau [SH] = H \quad (13.5)$$

действительно эквивалентно условию<sup>1)</sup>

$$[SH]=0. \quad (13.6)$$

Выше было установлено, что скорость изменения среднего значения любой наблюдаемой величины определяется коммута-

<sup>1)</sup> Этот вывод справедлив и для конечных  $\tau$ , если, как это и бывает обычно, генератор  $S$  не зависит от  $\tau$ . — *Прим. ред.*



тором оператора, соответствующего этой величине, с гамильтонианом. Если такой коммутатор равен нулю, то среднее значение этой наблюдаемой величины не зависит от времени.

Отсюда можно сделать вывод, что операторы, отвечающие интегралам движения любой физической системы, порождают такие унитарные преобразования, которые оставляют гамильтониан системы инвариантным. Это соответствует хорошо известному в классической механике положению о том, что интегралы движения порождают такие бесконечно малые канонические преобразования, при которых гамильтониан остается инвариантным.

В частности, пользуясь результатами, которые были получены в гл. 9 и 12, можно прийти к важным выводам о том, что закон сохранения импульса является следствием инвариантности гамильтониана по отношению к бесконечно малым сдвигам, а закон сохранения момента количества движения также вытекает из инвариантности гамильтониана, но по отношению к бесконечно малым вращениям.

Гамильтониан можно считать генератором бесконечно малого унитарного преобразования, представляющего собой сдвиг начала отсчета времени. Уравнение (7.5) для бесконечно малого интервала времени можно записать в виде

$$\frac{|b(t+\tau)\rangle_s - |b(t)\rangle_s}{\tau} = -iH|b(t)\rangle_s. \quad (13.7)$$

Оно преобразуется к виду

$$|b\rangle_s^T = |b(t+\tau)\rangle_s = (I + i\tau S)|b(t)\rangle_s, \quad (13.8)$$

если

$$S = -H \quad (13.9)$$

[см. также текст после формулы (7.17)].

Следовательно, закон сохранения энергии является следствием инвариантности гамильтониана по отношению к бесконечно малому сдвигу начала отсчета времени, если  $H$  описывает энергию системы. Эта инвариантность будет иметь место, если  $H$  явно не зависит от времени.

Описанная связь между законами сохранения и свойствами инвариантности гамильтониана значительно упрощает выбор гамильтониана для описания физической системы, подчиняющейся тем или иным законам сохранения, так как требования инвариантности накладывают определенные ограничения на выбор гамильтониана.

В качестве примера рассмотрим объект, обладающий импульсом  $\mathbf{P}$ , спином  $\mathbf{S}$  и моментом  $\mathbf{L}$ , и попытаемся найти наиболее общий вид гамильтониана, в котором содержатся, помимо члена, отвечающего кинетической энергии  $\mathbf{P}^2/2m$ , другие члены,

линейные по  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{L}$ . Требование инвариантности по отношению к вращениям ограничивает возможные комбинации, составленные из этих трех векторов, следующими выражениями:

$$(\mathbf{PL}), \quad (13.10)$$

$$(\mathbf{PS}), \quad (13.11)$$

$$(\mathbf{SL}), \quad (13.12)$$

$$(\mathbf{P}[\mathbf{SL}]), \quad (13.13)$$

$$(\mathbf{S}[\mathbf{PL}]), \quad (13.14)$$

$$(\mathbf{L}[\mathbf{PS}]), \quad (13.15)$$

которые являются скалярами, коммутирующими с полным моментом  $\mathbf{L} + \mathbf{S}$ , что легко проверить. Если теперь добавить требование инвариантности гамильтониана относительно изменения направления движения объекта на противоположное, то из выражений (13.10)—(13.15) останутся только члены  $(\mathbf{PL})$ ,  $(\mathbf{PS})$ ,  $(\mathbf{SL})$ , так как при изменении направления движения объекта меняется знак каждого из векторов  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{S}$ , что приводит к изменению знаков в выражениях (13.13)—(13.15). Поэтому комбинации такого типа не удовлетворяют требованиям инвариантности. Наконец, добавляя еще одно требование, чтобы гамильтониан не изменялся при инверсии системы координат, находим, что в результате остается лишь один член, удовлетворяющий этому требованию, поскольку при инверсии координат вектор  $\mathbf{P}$  изменяет знак, а векторы  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{L}$  не меняются. При этом выражения (13.10) и (13.11) меняют знак, т. е. являются псевдоскалярами, в то время как (13.12) представляет собой истинный скаляр. Таким образом, искомым гамильтониан имеет вид

$$H = \beta (\mathbf{SL}), \quad (13.16)$$

где  $\beta$  — некоторое число, и представляет собой энергию так называемой спин-орбитальной связи, которая играет важную роль при расчетах энергетических уровней атомов и атомных ядер.

Преобразования, состоящие в изменении направления движения на противоположное и инверсии координат, которые были введены нами пока произвольно, рассматриваются более подробно в гл. 14 и 15. Эти преобразования отличаются от сдвигов и вращений в том отношении, что они не могут быть получены непрерывным образом из тождественного преобразования и поэтому не существует соответствующих бесконечно малых преобразований. Однако инвариантность гамильтониана по отношению к преобразованию инверсии, описываемому унитарным оператором, приводит в квантовой механике к особому закону сохранения, который не имеет аналога в классической механике.

Следствие инвариантности гамильтониана при изменении направления движения на противоположное является более сложным, поскольку преобразование, заключающееся в обращении движения, отвечает антиунитарному оператору и поэтому требует специального рассмотрения, которое не может быть проведено в данной главе. Такое рассмотрение показывает, что при применении антиунитарных операторов симметрии возникают так называемые правила суперотбора, которые в результате приводят к сохранению определенных квантовых чисел.

В течение длительного времени было известно, что большинство физических процессов, которые можно описать методами классической физики, инвариантны по отношению к инверсии координат и к обращению движения. Следствия такой инвариантности в классической физике часто недооценивались и поэтому на них обращалось мало внимания до тех пор, пока не были открыты новые физические явления, в которых явно нарушались свойства симметрии по отношению к инверсии и соответствующие квантовомеханические законы сохранения. Это привело к всеобщему пересмотру свойств симметрии как в квантовомеханическом, так и в классическом описании физических объектов и процессов.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Борн и др. [1] впервые показали, что равенство нулю коммутаторов, составленных из операторов наблюдаемых величин и гамильтониана, является условием постоянства этих величин.

Вейль [2] рассмотрел свойства симметрии гамильтониана.

В книге Голдстейна [3] содержится изложение вопроса о связи между инвариантностью гамильтониана при канонических преобразованиях и законами сохранения в классической механике.

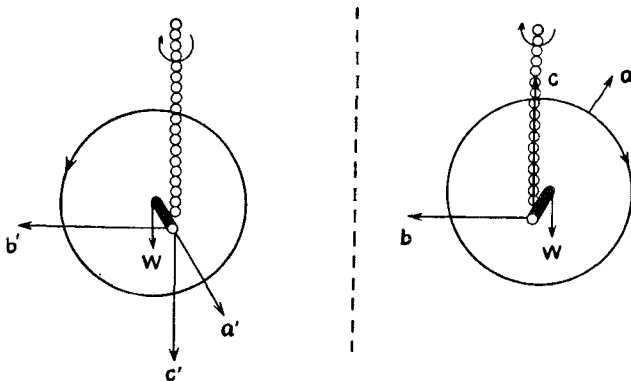
### Литература

1. Born M., Heisenberg W., Jordan P., Zs. Phys., **35**, 557 (1926).
2. Weyl H., Zs. Phys., **46**, 1 (1927).
3. Goldstein H., Classical Mechanics, Reading, Mass., 1951 (см. перевод: Голдстейн Г., Классическая механика, М., 1957).

## Инвариантность относительно инверсии координат и закон сохранения четности

Говорят, что физический процесс или физическое свойство, относящиеся к реальному объекту, характеризуются определенной четностью, если в результате зеркального отображения мы приходим снова к возможному физическому процессу или свойству, относящемуся к тому же реальному объекту.

В качестве примера рассмотрим тяжелый волчок, вращающийся вокруг оси  $a$ , к которому приложен момент относительно оси  $b$ , перпендикулярной  $a$ . В результате этого возникает прецессия вокруг оси  $c$ , перпендикулярной осям  $a$  и  $b$ .



Фиг. 14. Прецессия тяжелого волчка и зеркальное отображение этого процесса.

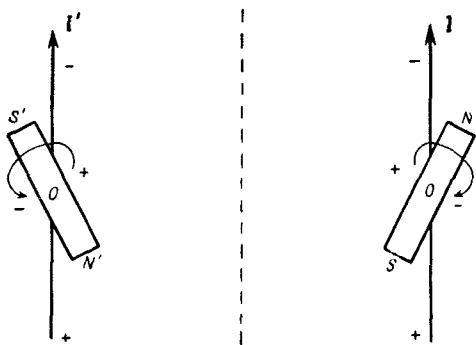
Такой опыт может быть поставлен, если использовать велосипедное колесо, один конец короткой оси которого закреплен, а другой конец поддерживается гибкой цепью, как показано на фиг. 14. Момент возникает за счет веса  $W$  колеса. Векторы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  именно в таком порядке образуют правовинтовую систему, если обычным образом условиться о правом и левом направлениях вращения.

Если теперь установить зеркало в плоскости, параллельной той, в которой лежат векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{c}$ , то при отображении в зеркале направление вращения колеса и направление прецессии изменяются на противоположные ( $\mathbf{a}' = -\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c}' = -\mathbf{c}$ ), но направление вектора силы тяжести  $\mathbf{W}$  и, следовательно, направление момента не изменяются ( $\mathbf{b}' = \mathbf{b}$ ).

Описываемый процесс характеризуется определенной четностью, поскольку процесс, отраженный в зеркале, может быть реально осуществлен путем изменения направления вращения реального колеса на противоположное, в результате чего возникает прецессия в противоположном направлении. В этом случае векторы  $\mathbf{a}'$ ,  $\mathbf{b}'$  и  $\mathbf{c}'$  в таком порядке вновь образуют правовинтовую систему.

В качестве второго примера рассмотрим магнитное поле, создаваемое электрическим током, протекающим по прямому проводнику. Если магнитную стрелку расположить над проводником, по которому протекает ток, то можно обнаружить, что она поворачивается таким образом, что ее северный полюс испытывает правовинтовое вращение вокруг вектора тока  $\mathbf{I}$ .

На первый взгляд может показаться, что описываемое явление не имеет определенной четности, поскольку при отражении



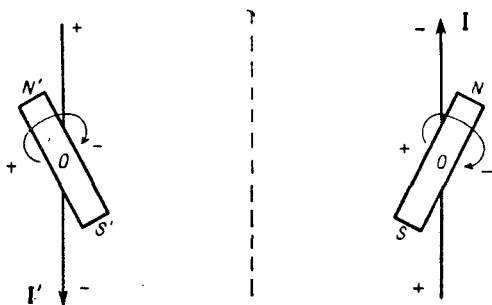
Фиг. 15. Отклонение магнитного диполя током и зеркальное отображение этого процесса (в предположении, что заряд — скалярная величина).

в зеркале, расположенном параллельно плоскости, в которой находятся проводник и первоначальное направление стрелки, последняя поворачивается в противоположном направлении, в то время как направление движения тока остается неизменным. Однако если вспомнить, что любой магнит можно заменить подходящим образом выбранным круговым током, то мы увидим, как это показано на фиг. 15, что отображение магнитной стрелки в

зеркале есть магнит, у которого знаки полюсов изменены (при условии, что заряд при отображении в зеркале не меняет знака).

Из этого можно заключить, что рассматриваемое явление характеризуется определенной четностью, поскольку процесс, отраженный в зеркале, может быть получен с реальным током и с реальной магнитной стрелкой.

Важно отметить, что чисто электромагнитные явления обладают определенной четностью, даже если электрический заряд является псевдоскаляром, т. е. если зеркальное отображение положительного заряда есть отрицательный заряд, и наоборот. В этом случае при отображении в зеркале направление тока  $I'$



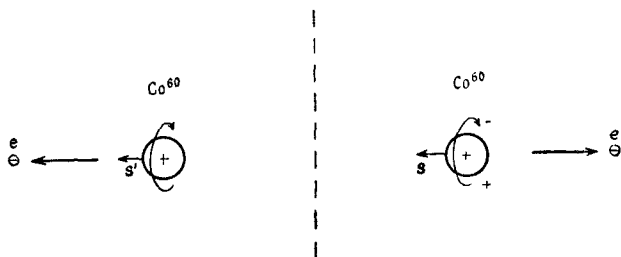
Фиг. 16. Отклонение магнитного диполя током и зеркальное отображение этого процесса (в предположении, что заряд — псевдоскалярная величина)

изменяется на противоположное, как показано на фиг. 16, но теперь зеркальное отображение магнита будет представлять собой магнит с таким же расположением полюсов. Таким образом, зеркальное отображение поворота магнитной стрелки снова будет соответствовать явлению, которое можно осуществить с помощью реального тока и реального магнита.

Эксперименты, исследующие только электромагнитные эффекты, не могут дать ответ на вопрос, является ли электрический заряд скаляром или псевдоскаляром. Зеркальное отображение любого чисто электромагнитного процесса может быть осуществлено либо в реальном мире с использованием зарядов того же знака, либо в «антимире», в котором знаки всех зарядов изменяются на противоположные. В этом смысле электромагнитное поле обладает высокой степенью симметрии.

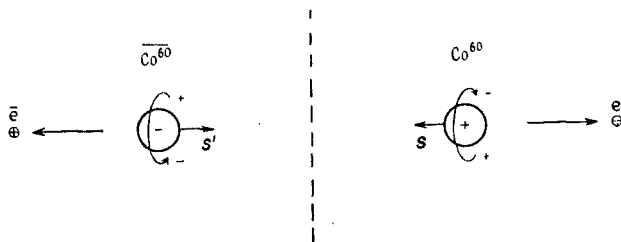
Процессы, в которых проявляются слабые взаимодействия и которые приводят, в частности, к  $\beta$ -распаду атомных ядер, имеют меньшую степень симметрии, чем чисто электромагнитные процессы. Зеркальное отображение  $\beta$ -распада не может быть осуществлено в реальном мире, в котором имеются только

положительно заряженные ядра; но, по-видимому, может быть осуществлено в антимире, в котором все частицы, участвующие в распаде, заменяются соответствующими античастицами и знаки всех электрических зарядов изменяются на противоположные. Таким образом,  $\beta$ -распад не характеризуется определенной четностью, *если к числу физически возможных экспериментов не относить эксперименты в антимире.*



Фиг. 17. Бета-распад  $\text{Co}^{60}$  и его зеркальное отображение (заряд — скаляр).

Как характерный пример рассмотрим  $\beta$ -распад ядра  $\text{Co}^{60}$ , которое, испуская электрон и антинейтрино, превращается в ядро  $\text{Ni}^{60}$ . Экспериментально обнаружено, что электрон испускается преимущественно в направлении, противоположном направлению спина ядра  $\text{Co}^{60}$ , ориентированного с помощью магнитного поля. Если поставить зеркало перпендикулярно направлению спина ядра и рассматривать изображение процесса  $\beta$ -распада в зеркале, то видно, что электроны испускаются параллельно направлению спина, как показано на фиг. 17. Таким образом, мы



Фиг. 18. Бета-распад  $\text{Co}^{60}$  и его зеркальное отображение (заряд — псевдоскаляр).

имеем процесс, который не осуществляется в реальном мире. Однако зеркальное отображение  $\beta$ -распада представляет собой соответствующий  $\beta$ -распад в антимире, в котором знаки всех зарядов изменены на противоположные (фиг. 18) и в котором

ядра анти- $\text{Co}^{60}$ , испуская антиэлектроны (т. е. позитроны) и нейтрино, превращаются в ядра анти- $\text{Ni}^{60}$ .

Если мы утверждаем, что симметрия по отношению к отражению является универсальным принципом, то мы вынуждены приписать электрическому заряду трансформационные свойства псевдоскаляра. В дальнейшем мы будем исходить из такого предположения. Поэтому если мы хотим описать зеркальное отображение объектов, характеристикой которых является их электрический заряд, то мы должны прибавить к операции инверсии координат (обозначаемой  $\Pi$ ) еще операцию «зарядового сопряжения» (обозначаемую  $\Gamma$ ); в результате возникает операция, называемая в литературе «комбинированной инверсией» (обозначаемая  $\Sigma = \Pi\Gamma$ ). Как показано в гл. 19, вообще говоря,  $\Gamma$  (и, следовательно,  $\Sigma$ ) нельзя представить в виде унитарного оператора, и симметрия, возникающая при комбинированной инверсии, не ведет к простому «закону сохранения комбинированной четности».

Надо еще раз подчеркнуть, однако, что мы не приходим к противоречию, если будем считать заряд скаляром при рассмотрении чисто электромагнитных процессов. Следовательно, инверсия координат без одновременного зарядового сопряжения частиц является допустимым оператором симметрии при условии, что слабые взаимодействия исключаются из рассмотрения.

В качестве первого примера из квантовой механики рассмотрим единичный объект, который *не имеет* внутренних характеристик, таких, например, как спин, заряд и т. д., и который поэтому полностью описывается вектором состояния  $|b\rangle$ , зависящим только от координат объекта  $\mathbf{q}$ . Таким образом, существует однокомпонентная  $\psi$ -функция  $\psi_b(\mathbf{q})$ , определяемая соотношением

$$|b\rangle = \int |\mathbf{q}\rangle d\mathbf{q} \langle \mathbf{q}|b\rangle = \int |\mathbf{q}\rangle \psi_b(\mathbf{q}) d\mathbf{q}. \quad (14.1)$$

Чтобы исследовать вопрос о том, как нужно описывать такой объект при его отражении в зеркале, достаточно рассмотреть только операцию инверсии координат ( $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ ), поскольку любое зеркальное отражение может быть разложено на операции инверсии и собственно вращения. Инверсия координат требует описания объекта с помощью преобразованной  $\psi$ -функции:

$$|b\rangle^T = \int |\mathbf{q}\rangle \psi_b(-\mathbf{q}) d\mathbf{q}. \quad (14.2)$$

Попытаемся теперь связать  $|b\rangle^T$  с непреобразованным вектором состояния  $|b\rangle$  с помощью линейного унитарного оператора  $\Pi$ :

$$|b\rangle^T = \Pi |b\rangle; \quad (14.3)$$



здесь  $\Pi$  представляет собой оператор замены  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$ , действующий на  $\psi$ -функцию в выражении (14.1). Чтобы провести квантовомеханическое описание четности объекта, достаточно потребовать, чтобы гамильтониан этого объекта оставался инвариантным при преобразовании

$$H = \Pi H \Pi^{-1}, \quad (14.4)$$

поскольку тогда преобразованная  $\psi$ -функция удовлетворяет тому же динамическому уравнению, что и непреобразованная, т. е. в представлении Шредингера из  $H|b\rangle = i|\dot{b}\rangle$  следует, что

$$\Pi H \Pi^{-1} \Pi |b\rangle = i \Pi |\dot{b}\rangle, \quad \text{или} \quad H |b\rangle^T = i |\dot{b}\rangle^T, \quad (14.5)$$

так что, если  $|b\rangle$  описывает возможное состояние объекта, то  $|b\rangle^T$  также описывает возможное состояние того же объекта.

В уравнении (14.4) содержится «закон сохранения четности», поскольку оно может быть записано в виде

$$\Pi H - H \Pi = 0. \quad (14.6)$$

Это означает, что среднее значение оператора  $\Pi$  постоянно во времени. Этот закон подтверждается всей совокупностью опытов, в которых не проявляются слабые взаимодействия. С другой стороны, поскольку гамильтониан, описывающий процессы слабого взаимодействия (например, распад  $\text{Co}^{60}$ ), очевидно, не инвариантен при инверсии только координат, можно ожидать специфических корреляций между продуктами распада, как показано на фиг. 17, которые обусловлены «несохранением четности» в этом случае.

Особый интерес представляют собственные состояния оператора  $\Pi$ , определяемые соотношением

$$\Pi |u\rangle = P |u\rangle, \quad \text{где} \quad P - \text{число}. \quad (14.7)$$

Собственные значения этого оператора могут быть сразу же определены, если потребовать, чтобы  $|u\rangle$  была однозначной функцией координат, поскольку в этом случае двукратное применение оператора  $\Pi$  к функции  $|u\rangle$  должно дать ту же функцию (точнее, отличающуюся на неопределенный фазовый множитель, который выбран равным  $+1$ ):

$$\Pi^2 |u\rangle = P^2 |u\rangle = |u\rangle. \quad (14.8)$$

Следовательно, существуют два собственных значения оператора  $\Pi$ , а именно корни уравнения

$$P^2 = 1, \quad \text{т. е.} \quad P_1 = +1 \quad \text{и} \quad P_2 = -1. \quad (14.9)$$

Собственные состояния оператора  $\Pi$ , соответствующие собственному значению  $+1$ , называются состояниями положительной четности и обозначаются  $|u_+\rangle$ , а собственные состояния, отвечающие собственному значению  $-1$ , называются состояниями отрицательной четности и обозначаются  $|u_-\rangle$ :

$$\Pi|u_+\rangle = +|u_+\rangle \quad \text{и} \quad \Pi|u_-\rangle = -|u_-\rangle. \quad (14.10)$$

Очевидно, четность единичного объекта, описываемого однозначным вектором состояния, является дихотомической переменной и поэтому в соответствии с соображениями, развитыми в гл. 1, можно использовать представление

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad |u_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |u_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.11)$$

Функция  $|b\rangle$  не обязательно является собственной функцией оператора  $\Pi$ , но она всегда может быть разложена следующим образом:

$$|b\rangle = |u_+\rangle \langle u_+|b\rangle + |u_-\rangle \langle u_-|b\rangle = \psi_b(+)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_b(-)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (14.12)$$

так что

$$|b^T\rangle = \Pi|b\rangle = \psi_b(+)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \psi_b(-)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (14.13)$$

Понятно, что  $\psi_b(+)$  и  $\psi_b(-)$  являются  $\psi$ -функциями только в соответствующем двумерном пространстве четности; по отношению ко всем остальным переменным они являются векторами состояния, имеющими  $n/2$  компонент, если  $n$  — число компонент  $\psi$ -функции  $|b\rangle$ . Поэтому если мы хотим придерживаться последовательной системы обозначений, то надо полную  $\psi$ -функцию

писать в виде прямого произведения  $\psi_b(+)\times\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и т. д.

Состояние, в котором  $\psi_b(+)\neq 0$  и  $\psi_b(-)\neq 0$ , называется состоянием смешанной четности. Всегда можно выбрать две линейные комбинации, которые отвечают тому же самому пространству, что и векторы  $|b\rangle$  и  $|b^T\rangle$ , и которые имеют определенную четность, а именно

$$\psi_b(+)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(|b\rangle + |b^T\rangle), \quad \psi_b(-)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(|b\rangle - |b^T\rangle). \quad (14.14)$$

Собственные состояния гамильтониана  $H$ , соответствующего невырожденным собственным значениям  $\omega$ , всегда являются также и собственными состояниями оператора  $\Pi$ , т. е. имеют

определенную четность. Действительно, если

$$H|u\rangle = \omega|u\rangle, \quad (14.15)$$

то также

$$\Pi H \Pi^{-1} \Pi|u\rangle = \omega \Pi|u\rangle, \quad \text{или} \quad H \Pi|u\rangle = \omega \Pi|u\rangle. \quad (14.16)$$

Для невырожденных значений  $\omega$  эти соотношения верны только в том случае, если

$$\Pi|u\rangle = P|u\rangle \quad (P \text{ — некоторое число}); \quad (14.17)$$

откуда с учетом определения (14.7) следует, что  $|u\rangle$  является собственным вектором оператора  $\Pi$ .

Собственные векторы  $|l, m\rangle$  оператора орбитального момента объекта также имеют определенную четность. В полярных координатах  $|l, m\rangle$  имеют вид (см. Приложение 1)

$$|l, m\rangle = \int |\theta, \varphi\rangle d\Omega Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (14.18)$$

где  $\psi$ -функция

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) \sim \sin^m \theta (\cos^{l-m} \theta + a \cos^{l-m-2} \theta + \dots) e^{im\varphi}. \quad (14.19)$$

В полярных координатах инверсия  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$  соответствует преобразованию  $r, \theta, \varphi \rightarrow r, \pi - \theta, \pi + \varphi$ . Учитывая это, получаем

$$\begin{aligned} \Pi Y_{lm}(\theta, \varphi) \sim \sin^m(\pi - \theta) [\cos^{l-m}(\pi - \theta) + \\ + a \cos^{l-m-2}(\pi - \theta) + \dots] e^{im(\pi + \varphi)}. \end{aligned} \quad (14.20)$$

Поскольку для четных значений  $l$

$$\cos^{l-m}(\pi - \theta) = \begin{cases} \cos^{l-m} \theta, & \text{если } m \text{ — четное,} \\ -\cos^{l-m} \theta, & \text{если } m \text{ — нечетное,} \end{cases} \quad (14.21a)$$

а для нечетных  $l$

$$\cos^{l-m}(\pi - \theta) = \begin{cases} -\cos^{l-m} \theta, & \text{если } m \text{ — четное,} \\ \cos^{l-m} \theta, & \text{если } m \text{ — нечетное,} \end{cases} \quad (14.21b)$$

и поскольку далее

$$\sin^m(\pi - \theta) e^{im(\pi + \varphi)} = \begin{cases} \sin^m \theta e^{im\varphi}, & \text{если } m \text{ — четное,} \\ -\sin^m \theta e^{im\varphi}, & \text{если } m \text{ — нечетное,} \end{cases} \quad (14.22)$$

мы имеем

$$\Pi Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (14.23)$$

Это означает, что состояния с нечетными значениями  $l$  имеют отрицательную четность, а состояния с четными значениями  $l$  имеют положительную четность независимо от того, какое значение имеет  $m$ .

В общем случае все наблюдаемые величины можно разделить на имеющие положительную и отрицательную четность в зависимости от того, меняют ли знак при инверсии координат операторы, соответствующие этим величинам. Таким образом, любой четный оператор  $A(+)$  определяется соотношением

$$\Pi A(+) \Pi^{-1} = A(+)$$
 (14.24)

и любой нечетный оператор  $B(-)$  — соотношением

$$\Pi B(-) \Pi^{-1} = -B(-)$$
 (14.25)

независимо от трансформационных свойств этих операторов при вращениях или сдвигах. Легко проверить, что операторы  $A(+)$  и  $B(-)$  могут быть представлены с учетом преобразования (14.11) в виде

$$A(+)=A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$
 (14.26)

$$B(-)=B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
 (14.27)

где матрицы  $2 \times 2$  действуют только на переменную четности, а  $A$  и  $B$  действуют на все другие переменные объекта. Для произвольного общего состояния (14.12) можно найти для средних значений величин, отвечающих операторам  $A(+)$  и  $B(-)$ , следующие выражения:

$$\overline{A(+)} = \langle b | A(+)|b \rangle = \langle \psi_b(+)|A|\psi_b(+)\rangle + \langle \psi_b(-)|A|\psi_b(-)\rangle,$$
 (14.28)

$$\overline{B(-)} = \langle b | B(-)|b \rangle = \langle \psi_b(+)|B|\psi_b(-)\rangle + \langle \psi_b(-)|B|\psi_b(+)\rangle.$$
 (14.29)

Из (14.29) немедленно следует *фундаментальная теорема*:

*Среднее значение любой наблюдаемой величины отрицательной четности равно нулю в любом состоянии с определенной четностью, т. е. в состоянии, для которого либо  $\psi_b(+)=0$ , либо  $\psi_b(-)=0$ .*

Примером переменной отрицательной четности является импульс объекта; примерами переменной положительной четности могут служить момент количества движения и энергия.

Из приведенных соображений можно заключить, что объект, находящийся в состоянии определенной четности, *может* иметь отличными от нуля только наблюдаемые положительной четности, такие, например, как момент количества движения и энергия, но *не может* иметь отличными от нуля наблюдаемые отрицательной четности, такие, как импульс. Однако в состоянии

смешанной четности объект *может* характеризоваться неисчезающими значениями наблюдаемых величин отрицательной четности.

До открытия корреляции между направлением магнитного момента ядра  $\text{Co}^{60}$  и направлением испускания электронов при  $\beta$ -распаде этого ядра (см. фиг. 17) предполагалось, что электрический заряд при инверсии координат преобразуется как скаляр (см. фиг. 15). При таком предположении из уравнений Максвелла следовало, что магнитный заряд, электрический дипольный момент, магнитный квадрупольный момент и т. д. нужно рассматривать как наблюдаемые величины отрицательной четности, в то время как магнитный дипольный момент, электрический квадрупольный момент и т. д. нужно рассматривать как наблюдаемые величины положительной четности. В соответствии с этим принималось, что отсутствие элементарного магнитного заряда и электрического дипольного момента у любого объекта, находящегося в основном состоянии (обычно рассматривалось невырожденное собственное состояние гамильтониана  $H$ , имеющее определенную четность), достаточным образом объясняется инвариантностью относительно инверсии координат, из которой следовала невозможность существования переменных отрицательной четности, таких, как магнитный заряд и электрический дипольный момент, в состояниях, обладающих определенной четностью.

Однако после проведения экспериментов с ядрами  $\text{Co}^{60}$  электрическому заряду следует приписать трансформационные свойства псевдоскаляра в соответствии с теми соображениями, которые привлекались в связи с фиг. 16 и 18, и пересмотреть с их учетом рассмотренную выше классификацию мультипольных моментов. При этом возникают следующие вопросы:

1. Если действительно электрический заряд, магнитный дипольный момент и т. д. являются соответственно псевдоскаляром, вектором и т. д., т. е. наблюдаемыми величинами отрицательной четности, то почему многие так называемые элементарные частицы и другие простые объекты обладают отличными от нуля значениями этих наблюдаемых величин в основном состоянии?

2. Если магнитный заряд, электрический дипольный момент и т. д. являются наблюдаемыми величинами положительной четности, то почему они никогда не наблюдаются в основном состоянии какого-либо «элементарного» объекта? Этот вопрос основан на том, вообще говоря, справедливом наблюдении, что в природе обычно реализуется любая возможность, не противоречащая общим принципам, — наблюдению, которое иногда выражают афоризмом: «Все, что не запрещено, то обязательно».

Последовательные, хотя и не обязательно верные, возможные ответы на эти два вопроса состоят в следующем.

1. Сам факт, что некоторые объекты в основном состоянии обладают не равным пулю электрическим зарядом, означает, что эти основные состояния не могут быть состояниями определенной четности. Это возможно при условии, что основное состояние объекта является *вырожденным* по энергии. Такая ситуация может быть совершенно общей, если наряду с основным состоянием объекта с энергией  $\omega_0$  и с данным зарядом существует другое состояние с той же энергией  $\omega_0$ , отвечающее объекту того же типа, но с противоположным зарядом. Если принять эту точку зрения, то «элементарными» частицами, которые *могли бы* обладать определенной четностью, являются только нейтральный фотон, нейтральный  $\pi$ -мезон и нейтральная  $K$ -частица. Если бы какая-либо из перечисленных выше частиц действительно имела определенную четность, то она не обладала бы отличными от нуля значениями наблюдаемых величин отрицательной четности, таких, как магнитный дипольный момент и т. д. Условия, при которых понятие внутренней четности элементарных частиц имеет смысл, более детально исследованы в гл. 26.

2. Отсутствие магнитного заряда, электрического дипольного момента и т. д. у «элементарных» систем *может* быть обусловлено некоторыми другими требованиями инвариантности, такими, как инвариантность по отношению к изменению направления движения на противоположное, которая рассматривается в гл. 15, или инвариантность по отношению к зарядовому сопряжению, которая рассматривается в гл. 28.

Разделение состояний на состояния положительной и отрицательной четности, которые соответствуют собственным значениям  $+1$  и  $-1$  оператора  $\Pi$ , основано на требовании, чтобы  $\psi$ -функция объекта, не имеющего никаких пространственных характеристик, за исключением положения, являлась однозначной функцией координат. Это означает, что оператор  $\Pi^2$  может отличаться от единичного оператора только на фазовый множитель (с модулем, равным 1), который был выбран таким, что  $\Pi^2 = I$ . Если попытаться приписать четность объектам, имеющим спин  $j = 1/2$ , то при этом приходится сталкиваться с дополнительной неопределенностью, связанной с двужначностью спинового состояния как функции координат. В зависимости от того, рассматриваем ли мы двукратное применение оператора  $\Pi$  как вращение на угол  $2\pi n$  с  $n$  четным или нечетным, мы получаем

$$\Pi'^2 |u'\rangle = P'^2 |u'\rangle = |u'\rangle \quad \text{или} \quad \Pi''^2 |u''\rangle = P''^2 |u''\rangle = -|u''\rangle, \quad (14.30)$$

причем каждый случай соответствует возможному представлению, в котором

$$P'_1 = +1, P'_2 = -1 \quad \text{или} \quad P''_1 = +i, P''_2 = -i. \quad (14.31)$$

Соответственно оператор  $\Pi$  можно представить в виде

$$\Pi' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \Pi'' = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (14.32)$$

если состояния положительной и отрицательной четности описываются, как обычно, с помощью функций

$$|u'_+\rangle = |u''_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad |u'_-\rangle = |u''_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Однако поскольку любой унитарный оператор всегда определен с точностью до некоторого фазового множителя, использование одного лишь представления  $\Pi'$  не связано ни с какими физическими ограничениями, но при этом всегда нужно помнить, что такой выбор является условным.

Как показано в гл. 26, из экспериментальных данных для двух взаимодействующих объектов можно определить только, имеют ли они одинаковую четность или обладают противоположными четностями. По-видимому, невозможно придумать такой эксперимент, в котором можно было бы определить абсолютную четность какого-либо объекта. Поэтому нужно условиться о том, чтобы приписать какому-то объекту определенную четность и определять четность других объектов относительно этого объекта. Условились приписывать положительную четность вакуумному состоянию.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Вигнер [1] дал первое четкое определение квантовомеханического закона сохранения четности как следствия свойств симметрии физической системы по отношению к преобразованию инверсии. Он указал, что в классической механике не существует аналога этому закону и что он является источником тех правил отбора, которые в атомных спектрах открыл Лапорт [2]. (Между прочим, в своей первой статье Вигнер не использовал термина «четность», а Паули в своей известной статье в энциклопедии<sup>1)</sup>)

<sup>1)</sup> См. литературу к Приложению 4. — *Прим. ред.*

назвал эту величину «сигнатурой». Автор данной книги не мог установить, кто первый ввел термин «четность» для характеристики собственных значений оператора инверсии  $\Pi$ .) Вейль [3] описал ту мало заметную роль, которую играют свойства симметрии по отношению к инверсии в классической физике.

Ву и др. [4] открыли несохранение четности при  $\beta$ -распаде  $\text{Co}^{60}$ , осуществив эксперимент, предложенный Ли и Янгом [5]. Возможность «спасения» симметрии отражения в случае несохранения четности путем введения комбинированной четности была предложена Янгом [6] в его докладе на Международной конференции по теоретической физике в Сиэттле в 1956 г. См. также по этому вопросу работу Ландау [7] и примечание 9 в статье Вика и др. [8]<sup>1)</sup>.

### Л и т е р а т у р а

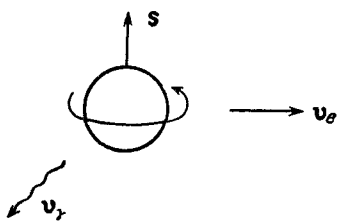
1. Wigner E., Über die Erhaltungssätze in der Quantenmechanik, Nachr. Akad. Wiss. Goettingen, Math.-Phys. Kl. p. 375 (1927).
2. Laporte O., Zs. Phys., **23**, 135 (1924).
3. Weyl H., Symmetry, Princeton, New Jersey, 1952.
4. Wu C. S., Ambler E., Hayward R. W., Poppes D. D., Hudson P. R., Phys. Rev., **105**, 1413 (1957) (см. перевод в сборнике «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957).
5. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **104**, 254 (1956) (см. перевод в сборнике «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957).
6. Yang C. N., Rev. Mod. Phys., **29**, 231 (1957).
7. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **32**, 405 (1957).
8. Wick G. C., Wightman A. S., Wigner E. P., Phys. Rev., **88**, 101 (1952).
- 9\*. Окунь Л. Б., Усп. физич. наук, **89**, 603 (1966).

<sup>1)</sup> Введение понятия комбинированной четности и гипотеза о ее сохранении принадлежат Ландау [7]. В последние годы выяснилось, что комбинированная четность не сохраняется при распаде  $K_2^0$ -мезона на два пиона. Этот фундаментальный факт еще далек от своего объяснения [9\*]. — *Прим. ред.*

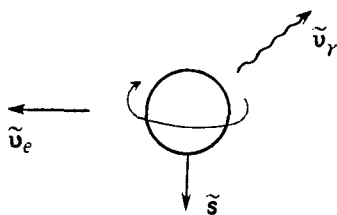


## Инвариантность относительно обращения движения

Еще одним свойством симметрии, с которым мы в той или иной мере сталкиваемся при рассмотрении всех явлений и процессов, встречающихся в природе, является так называемая «реверсивность». Любой физический процесс или свойство, относящиеся в реальному объекту, характеризуются определенной реверсивностью, если после изменения направлений всех движений на противоположные (обращения) мы снова получаем *возможный* физический процесс или свойство, относящиеся к тому же объекту.



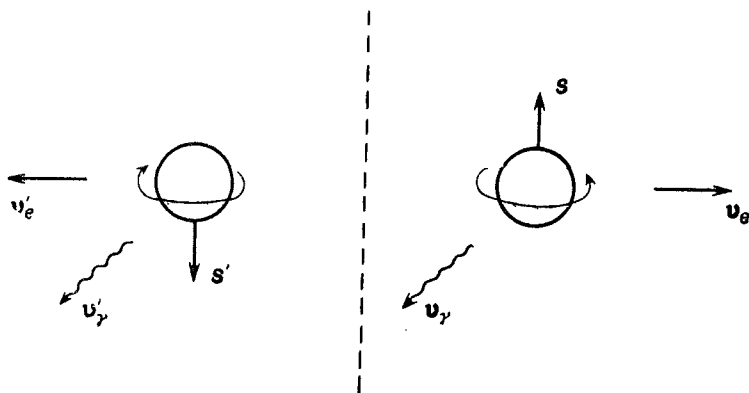
Фиг. 19. Пример состояния, не обладающего определенной реверсивностью.



Фиг. 20. Состояние, полученное из состояния, изображенного на фиг. 19, обращением движения.

Если бы реверсивность не была универсальным свойством физической реальности, то должны были бы существовать стационарные ситуации, инвариантные по отношению ко всем операциям симметрии, за исключением операции обращения движения. Например, пусть мы наблюдаем в процессе  $\beta$ -распада ядра состояние, в котором спин ядра  $s$  и скорости испускаемых электрона  $v_e$  и  $\gamma$ -кванта  $v_\gamma$  направлены, как показано на фиг. 19, так что векторы  $v_\gamma$ ,  $v_e$  и  $s$  образуют правовинтовую систему. Мы приходим к заключению, что это состояние не обладает реверсивностью, если только не существует другая, пока еще не открытая, форма материи — скажем, метаматерия (отличная от антиматерии), которая отвечает изменению направлений всех

движений в обычной материи на противоположные. Действительно, если мы обратим направления всех движений, изображенных на фиг. 19, то получим состояние, показанное на фиг. 20 и существенно отличающееся от приведенного на фиг. 19, поскольку обращенные векторы  $\tilde{\mathbf{v}}_\gamma$ ,  $\tilde{\mathbf{v}}_e$  и  $\tilde{\mathbf{s}}$  образуют левовинтовую систему, отличную от той, которая существует в гипотетической экспериментальной ситуации на фиг. 19. Следует отметить, что состояние, изображенное на фиг. 19, обладает определенной четностью, так как его зеркальное отображение, показанное на фиг. 21, отвечает состоянию, в котором зеркально отраженные векторы  $\mathbf{v}'_\gamma$ ,  $\mathbf{v}'_e$ ,  $\mathbf{s}'$  снова образуют правовинтовую систему.



Фиг. 21. Состояние, изображенное на фиг. 19, и его зеркальное отображение.

До сих пор все эксперименты, поставленные для обнаружения состояний типа изображенного на фиг. 19, дали отрицательные результаты. В частности, процесс  $\beta$ -распада ядра  $\text{Co}^{60}$ , показанный на фиг. 17, обладает реверсивностью, так как состояние, которое возникает при замене направлений спина ядра и скорости электрона на противоположные, является также возможным состоянием. И в этом новом состоянии электрон движется в направлении, противоположном направлению спина ядра.

Операцию обращения движений в случае нестационарного процесса можно мысленно представить с помощью такой последовательности изображений рассматриваемого объекта в различные моменты времени, которая напоминает кинофильм, прокрученный в обратном направлении, — от конца к началу. Поскольку такая операция формально эквивалентна изменению знака временной переменной во всех выражениях, зависящих от времени, ее можно назвать «обращением времени». Таким обра-

зом, термин «обращение движения» означает, что не только обращаются направления всех движений в данном состоянии, но обращается и последовательность состояний.

В процессах столкновения реверсивность как начального, так и конечного состояний может приводить к очень общему соотношению, связывающему прямой процесс и «противоположный» ему процесс, в котором изменена *только* последовательность конечного и начального состояний. Это соотношение, известное под названием «принципа детального равновесия», рассматривается в гл. 28.

Не следует путать понятие реверсивности какого-либо процесса с термодинамическим понятием обратимости процесса. Рассматриваемый процесс обладает определенной реверсивностью, если процесс, в котором обращены направления всех движений, в принципе также является возможным, хотя, может быть, и очень мало вероятным. Процесс механического перемешивания колоды игральных карт обладает реверсивностью, хотя с термодинамической точки зрения его нужно рассматривать как необратимый процесс. Интересным и пока еще не имеющим ответа является вопрос о том, приведет ли нарушение инвариантности по отношению к обращению направлений движения и, следовательно, принципа детального равновесия, если это нарушение когда-либо будет зарегистрировано, к каким-либо термодинамическим следствиям и если это действительно будет иметь место, насколько эти следствия окажутся далеко идущими.

Наблюдаемые величины могут быть совершенно общим способом разбиты на два класса:  $T$ -четные и  $T$ -нечетные, в зависимости от того, меняют или не меняют они знак при обращении времени. Из определения операции обращения времени следует, что все производные четного порядка от координат объекта —  $Q$ ,  $\dot{Q}$  и т. д. — являются  $T$ -четными, а все производные нечетного порядка —  $\dot{Q}$ ,  $Q$  и т. д. —  $T$ -нечетными. Если считать, как это обычно принимается, что масса тела является  $T$ -четной величиной, то можно заключить, что импульс  $\mathbf{P}$  и момент количества движения  $\mathbf{J}$  представляет собой  $T$ -нечетные величины, в то время как энергия  $H$  является  $T$ -четной величиной.

Что касается трансформационных свойств наблюдаемых физических величин электромагнитной природы при обращении времени, то из уравнений Максвелла следует лишь, что электрический заряд и магнитный заряд должны преобразовываться при обращении времени противоположным образом. Таким образом, если одна из этих величин является  $T$ -четной, то другая должна быть  $T$ -нечетной. В отсутствие каких-либо экспериментальных данных, кроме чисто электромагнитных, которые

позволили бы ответить на вопрос, является ли электрический заряд  $T$ -четной или  $T$ -нечетной величиной, последний может считаться  $T$ -нечетной величиной в соответствии с гипотезой Фейнмана, предложившего рассматривать позитроны как «обращенные во времени» электроны<sup>1)</sup>. Следует подчеркнуть, однако, что на данной стадии наших знаний такое предположение является чисто условным. (В действительности некоторые данные, изложенные ниже, свидетельствуют в пользу того, что заряд электрона должен рассматриваться как  $T$ -четная величина, поскольку лептонное число, характеризующее как электроны и позитроны, так и нейтрино и антинейтрино, является  $T$ -четной переменной.) В соответствии с этим электрическое поле  $\mathbf{E}$  и электрический дипольный момент  $\mathbf{p}$  могут пока рассматриваться как  $T$ -нечетные, а магнитное поле  $\mathbf{B}$  и магнитный дипольный момент  $\boldsymbol{\mu}$  — как  $T$ -четные величины.

Хотя определение эрмитовых операторов, четных и нечетных по отношению к обращению времени, которые в квантовой механике соответствуют  $T$ -четным и  $T$ -нечетным наблюдаемым величинам, имеет смысл, однако разделение квантовомеханических состояний на состояния с четной и нечетной «реверсивностью», аналогичное разделению состояний на четные и нечетные по отношению к инверсии координат, является сомнительным по следующим причинам.

Ясно, что состояние, возникающее при обращении времени  $\Theta$

$$|b\rangle^T = \Theta |b\rangle, \quad (15.1)$$

не может быть связано с  $|b\rangle$  при помощи линейного унитарного оператора, так как если потребовать, чтобы  $T$ -четная энергия  $H$  и  $T$ -нечетные импульс  $\mathbf{P}$  и момент количества движения  $\mathbf{J}$  преобразовывались в соответствии с соотношениями

$$\Theta H \Theta^{-1} = H, \quad \Theta \mathbf{P} \Theta^{-1} = -\mathbf{P}, \quad \Theta \mathbf{J} \Theta^{-1} = -\mathbf{J}, \quad (15.2)$$

то основное динамическое уравнение

$$H |b\rangle = i \frac{\partial |b\rangle}{\partial t} \quad (15.3)$$

и канонические коммутационные соотношения

$$[PQ] = i, \quad [JJ] = iJ \quad (15.4)$$

<sup>1)</sup> Идея о том, что позитрон можно в известном смысле рассматривать как электрон, движущийся попятно во времени, высказывалась и до Фейнмана [9\*, 10\*]. В первой из этих работ уже фигурировали простейшие диаграммы, получившие впоследствии название диаграмм Фейнмана. — *Прим. ред.*

не будут инвариантными при соответствующем унитарном преобразовании, так как при этом преобразовании только одна часть каждого уравнения меняет знак.

Однако требованиям инвариантности, накладываемым реверсивностью реальных физических процессов, можно удовлетворить, используя антиунитарный оператор

$$\Theta = TK. \quad (15.5)$$

В этом выражении  $T$  — унитарный оператор, отвечающий преобразованию  $t \rightarrow -t$ , а  $K$  — антилинейный оператор комплексного сопряжения, действующий на все числа, которые входят в векторы состояния. Оператор  $\Theta$ , примененный к  $\psi$ -функции, описывающей состояние  $|b\rangle$ , дает

$$\Theta|b\rangle = \Theta \int |q\rangle dq \psi_b(q, t) = \int |q\rangle dq T\psi_b^*(q, t) = \int |q\rangle dq \psi_b^*(q, -t). \quad (15.6)$$

Понятие собственных состояний оператора обращения времени  $\Theta$ , если вводить его по аналогии с собственными состояниями линейного оператора инверсии  $\Pi$ , является поэтому в общем не очень разумным. Основное динамическое уравнение, которому удовлетворяет функция  $|b\rangle^T$ , следует теперь из уравнения (15.3) если применить (15.5):

$$\Theta H \Theta^{-1} \Theta|b\rangle = \Theta i \frac{\partial |b\rangle}{\partial t} = -i \Theta \frac{\partial |b\rangle}{\partial t} = i \frac{\partial}{\partial t} (\Theta|b\rangle). \quad (15.7)$$

С учетом того, что  $\Theta H \Theta^{-1} = H$ , это уравнение может быть записано в виде

$$H|b\rangle^T = i \frac{\partial |b\rangle^T}{\partial t}. \quad (15.8)$$

Очевидно, оно идентично уравнению (15.3), которому удовлетворяет функция  $|b\rangle$ . Канонические коммутационные соотношения (15.4) также инвариантны относительно преобразования (15.5), поскольку оператор  $K$  изменяет знак мнимой единицы, которая стоит в правой части каждого из соотношений (15.4). Таким образом, применение оператора  $\Theta$ , в соответствии с трансформационными свойствами (15.2) векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{J}$ , не изменяет этих уравнений.

Хотя квантовое число, отвечающее оператору  $\Theta$  и аналогичное четности, в общем не имеет смысла, тем не менее вектор состояния  $|b\rangle$  можно характеризовать собственным значением линейного унитарного оператора  $\Theta^2$ . Физическое требование, чтобы дважды примененная операция обращения времени давала бы то же состояние

$$\Theta^2|b\rangle = \varepsilon|b\rangle, \quad |\varepsilon| = 1, \quad (15.9)$$

означает, что все состояния должны быть собственными состояниями оператора  $\Theta^2$ . Поскольку операция комплексного сопряжения, примененная дважды, эквивалентна действию единичного оператора  $K^2=I$ , можно записать

$$\Theta^2 = TKT K = TT^*K^2 = TT^* = \epsilon I. \quad (15.10)$$

Из свойства унитарности оператора  $T$  далее следует

$$\epsilon^2 = 1, \quad (15.11)$$

так как для унитарного оператора имеем  $T^{-1} = T^+ = \tilde{T}^*$  и последнее равенство в (15.10) можно записать в виде

$$T^* = \epsilon \tilde{T}^*; \quad (15.12)$$

транспонирование последнего соотношения дает

$$\tilde{T}^* = \epsilon T^* = \epsilon^2 \tilde{T}^*, \quad (15.13)$$

что может быть справедливо только в том случае, если справедливо соотношение (15.11). Следовательно, возможные собственные значения оператора  $\Theta^2$  равны  $\epsilon = +1$  и  $\epsilon = -1$ . Умножение оператора  $\Theta$  на фазовый множитель  $e^{i\alpha}$ , конечно, не изменяет  $\Theta^2$ , поскольку  $e^{i\alpha}\Theta e^{i\alpha}\Theta = e^{i\alpha}\Theta e^{-i\alpha}\Theta^2 = \Theta^2$ .

Можно показать в совершенно общем виде, что  $\psi$ -функция, описывающая объект с целочисленным значением полного момента количества движения  $j$ , не имеющий других внутренних характеристик, отвечает собственному значению оператора  $\Theta^2$ , равному  $\epsilon = +1$ , а  $\psi$ -функция, описывающая объект с полуцелым значением момента количества движения  $j$ , не обладающий другими внутренними характеристиками, отвечает собственному значению  $\epsilon = -1$ . (Для целей настоящей книги достаточно проверить эти утверждения только для значений  $j = 0, 1/2, 1$ .) Чтобы это сделать, найдем вид оператора  $\Theta$  в том представлении, в котором операторы компонент  $J_1$  и  $J_3$  полного момента количества движения имеют действительные матричные элементы, а оператор компоненты  $J_2$  имеет чисто мнимые матричные элементы (см. Приложение 1).

Уравнение преобразования (15.2) для  $J$ , записанное в компонентах

$$\Theta J_1 + J_1 \Theta = 0, \quad \Theta J_2 + J_2 \Theta = 0, \quad \Theta J_3 + J_3 \Theta = 0, \quad (15.14)$$

требует, чтобы унитарный оператор  $T$ , определяемый выражением (15.5), удовлетворял уравнениям

$$T J_1 + J_1 T = 0, \quad T J_2 - J_2 T = 0, \quad T J_3 + J_3 T = 0, \quad (15.15)$$

решение которых отвечает вращению на угол  $\pi$  вокруг оси 2, что интуитивно очевидно:

$$T = e^{i\pi J_2}, \quad T^+ = T^{-1} = e^{-i\pi J_2}. \quad (15.16)$$

Действительно, разлагая в ряд по  $J_2$ , используя перестановочные соотношения для  $J_i$  и учитывая (12.16), получаем

$$\begin{aligned} T J_1 T^{-1} &= e^{i\pi J_2} J_1 e^{-i\pi J_2} = J_1 \cos \pi + J_3 \sin \pi = -J_1, \\ T J_2 T^{-1} &= e^{i\pi J_2} J_2 e^{-i\pi J_2} = J_2, \\ T J_3 T^{-1} &= e^{i\pi J_2} J_3 e^{-i\pi J_2} = J_3 \cos \pi - J_1 \sin \pi = -J_3. \end{aligned} \quad (15.17)$$

В этом представлении оператор  $\Theta^2$  принимает вид

$$\Theta^2 = T T^* = e^{i\pi J_2} e^{-i\pi J_2^*} = e^{2i\pi J_2} = I + 2i\pi J_2 + \frac{(2i\pi)^2}{2!} J_2^2 + \dots \quad (15.18)$$

Рассмотрим теперь объект, находящийся в состоянии с полным моментом количества движения  $J^2$ , отвечающим квантовому числу  $j$ , так что  $J^2 = j(j+1)I$ . Всегда можно произвести такое унитарное преобразование, которое оставляет оператор  $\Theta^2$  инвариантным, но делает  $J_2$  диагональной матрицей. Поэтому вместо оператора  $J_2$  можно подставить его собственные значения, которые отличаются от  $j$  только на целое число. Таким образом, поскольку  $\exp[2\pi i (\text{целое число})] = 1$ , оператор  $\Theta^2$  идентичен экспоненте  $\exp(2\pi i j)$ , которая равна  $+1$  при целом значении  $j$  и  $-1$  при полуцелом значении  $j$ <sup>1)</sup>.

Интересно проверить этот совершенно общий результат для частных случаев, когда  $j=0, 1/2, 1$ . Для  $j=0$  имеем тривиальное соотношение:

$$\Theta^2(j=0) = I. \quad (15.19)$$

Для  $j=1/2$  получаем  $J_2 = 1/2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  и поэтому  $J_2^2 = (1/2)^2 I$ , так что

$$\Theta^2\left(j = \frac{1}{2}\right) = I \cos \pi + 2i J_2 \sin \pi = -I. \quad (15.20)$$

Для  $j=1$  имеем

$$J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_2^3 = J_2,$$

<sup>1)</sup> Автор благодарен Д. Пинку и П. Велану за эту простую идею доказательства.

так что

$$\Theta^2(j=1) = I + iJ_2 \sin 2\pi - J_2^2(1 - \cos 2\pi) = I \text{ и т. д.} \quad (15.21)$$

Случаи, когда  $\epsilon = +1$  и  $\epsilon = -1$ , требуют теперь отдельного рассмотрения.

1. Случай  $\epsilon = +1$ . Объект можно описать с помощью ортогонального набора  $|b_+\rangle$  собственных  $\psi$ -функций полной наблюдаемой величины  $B$ , например с помощью собственных функций  $|l, m\rangle$  операторов  $J^2$  и  $J_3$ , которые одновременно являются и собственными векторами оператора  $\Theta^2$ :

$$\Theta^2|b_+\rangle = |b_+\rangle. \quad (15.22)$$

Из этого следует, что функция  $|b_+\rangle^T = \Theta|b_+\rangle$  является также собственным вектором оператора  $\Theta^2$ , отвечающим собственному значению  $+1$ . Далее имеем

$$|u_{\text{четн}}\rangle = c(|b_+\rangle + \Theta|b_+\rangle); \quad (15.23)$$

с действительно, если  $\Theta|b_+\rangle \neq -|b_+\rangle$ , т. е.  $|u_{\text{четн}}\rangle$  не исчезает, и поэтому получаем

$$\Theta|u_{\text{четн}}\rangle = |u_{\text{четн}}\rangle, \quad (15.24)$$

что объясняет индекс «четн». Если для отдельного состояния, скажем  $|b'_+\rangle$ , справедливо соотношение  $\Theta|b'_+\rangle = -|b'_+\rangle$ , то выбираем  $|u_{\text{четн}}\rangle$  в таком виде

$$|u_{\text{четн}}\rangle = i|b'_+\rangle \quad (15.23')$$

и уравнение (15.24) снова выполняется. Подобным же образом, используя набор  $|b_+\rangle$ , можно построить другой набор  $|u_{\text{нечетн}}\rangle$ :

$$|u_{\text{нечетн}}\rangle = c(|b_+\rangle - \Theta|b_+\rangle), \quad (15.25)$$

с действительно, если  $\Theta|b_+\rangle \neq |b_+\rangle$ ;

$$|u_{\text{нечетн}}\rangle = i|b'_+\rangle, \text{ если } \Theta|b'_+\rangle = |b'_+\rangle, \quad (15.25')$$

который удовлетворяет уравнению

$$\Theta|u_{\text{нечетн}}\rangle = -|u_{\text{нечетн}}\rangle. \quad (15.26)$$

*Такая возможность введения четных и нечетных состояний в противоположность ситуации, возникающей в случае применения оператора инверсии  $\Pi$ , не эквивалентна возможности описывать состояния с помощью имеющего физический смысл квантового числа, характеризующего оператор  $\Theta$ , такого, например, как четность в случае применения оператора  $\Pi$ . Это обусловлено тем, что четное относительно применения  $\Theta$  состояние преоб-*



разуется в нечетное, и наоборот, путем простого умножения вектора состояния  $|u\rangle$  на физически ненаблюдаемый фазовый множитель  $i$ . Однако на квантовое число  $\epsilon$ , которое соответствует оператору  $\Theta^2$ , такое изменение фазы не влияет и поэтому оно может быть использовано как имеющая физический смысл характеристика состояния.

Хотя функции  $|u\rangle$  и не являются собственными функциями оператора  $\Theta$  в обычном смысле, однако они могут быть отнесены к «инвариантным состояниям» оператора  $\Theta$ . Поэтому мы имеем следующую общую теорему:

*В состоянии, инвариантном по отношению к оператору  $\Theta$ , среднее значение любого  $T$ -нечетного оператора равно нулю.*

Действительно, если  $\Theta A \Theta^{-1} = -A$ , то для инвариантного состояния  $|u\rangle$ , учитывая, что  $\Theta|u\rangle = e^{i\alpha}|u\rangle$ , где фаза  $\alpha$  произвольна, имеем

$$\bar{A} = \langle u|A|u\rangle = -\langle u|\Theta A \Theta^{-1}|u\rangle = -\langle u|e^{-i\alpha} A e^{i\alpha}|u\rangle = -\bar{A}, \quad (15.27)$$

откуда следует, что  $\bar{A} = 0$  независимо от фазы  $\alpha$ . Таким образом, это утверждение сохраняет свою силу при унитарных преобразованиях, хотя любое данное состояние  $|u\rangle$ , скажем  $|u_{\text{четн}}\rangle$ , допускает только действительные ортогональные преобразования  $|u\rangle \rightarrow R|u\rangle$  (где  $\tilde{R} = R^{-1}$ ), так как только при этом соотношение  $\Theta = I$  остается справедливым. При унитарном преобразовании  $U^+ = U^{-1}$  оператор  $\Theta$  преобразуется в оператор

$$\Theta' = U \Theta U^{-1} = U T (U^{-1})^* K = U (U^{-1})^* T' K,$$

где

$$T' = \tilde{U}^+ T \tilde{U} \quad (\text{или } \Theta' = U \tilde{U} T' K).$$

Если предположение Фейнмана о том, что электрический заряд и электрический дипольный момент являются  $T$ -нечетными величинами, правильно, то из него можно, например, сделать вывод о том, что элементарная частица, имеющая целочисленный спин и не обладающая никакими иными внутренними свойствами, которые могли бы сделать неприменимым обозначение с помощью квантового числа  $\epsilon = +1$ , должна быть электрически нейтральной и не может обладать электрическим дипольным моментом.

Если в некотором состоянии  $|b'_+\rangle$  выполняется соотношение  $\Theta|b'_+\rangle = |b''_+\rangle$ , то должно быть справедливо также и соотношение  $\Theta|b''_+\rangle = |b'_+\rangle$  и мы получаем два инвариантных состояния

$$\begin{aligned} |u'_{\text{четн}}\rangle &= c(|b'_+\rangle + \Theta|b'_+\rangle) = c(|b'_+\rangle + |b''_+\rangle), \\ |u''_{\text{четн}}\rangle &= c(|b''_+\rangle + \Theta|b''_+\rangle) = c(|b''_+\rangle + |b'_+\rangle), \end{aligned} \quad (15.28)$$

которые случайно являются тождественными. Этот очевидный недостаток всегда может быть устранен путем выбора функций  $i|b'_+\rangle$  и  $|b''_+\rangle$  в качестве базиса, поскольку тогда инвариантные состояния

$$\begin{aligned} |v'_{\text{четн}}\rangle &= c(i|b'_+\rangle + \Theta i|b'_+\rangle) = ic(|b'_+\rangle - |b''_+\rangle), \\ |v''_{\text{четн}}\rangle &= c(|b''_+\rangle + \Theta|b''_+\rangle) = c(|b''_+\rangle + |b'_+\rangle) \end{aligned} \quad (15.28')$$

являются взаимно ортогональными.

Почувительно проиллюстрировать эти соображения для случая  $j=1$ , для которого в явном виде имеем

$$\begin{aligned} T(j=1) &= e^{i\pi J_2} = I + iJ_2 \sin \pi - J_2^2(1 - \cos \pi) = \\ &= I - 2J_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (15.29)$$

Взяв за базис собственные состояния оператора  $J_3$ , а именно:

$$|1, +1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (15.30)$$

находим

$$\Theta|1, +1\rangle = |1, -1\rangle, \quad \Theta|1, 0\rangle = -|1, 0\rangle, \quad \Theta|1, -1\rangle = |1, +1\rangle \quad (15.31)$$

и тем самым получаем случаи (15.23') и (15.28). Поэтому можно выбрать в качестве нового базиса следующий набор с дополнительными фазами:

$$|1, +1\rangle = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (15.30')$$

с помощью которого получаем три ортогональных инвариантных состояния

$$\begin{aligned} |u(+1)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, +1\rangle + \Theta|1, +1\rangle) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, +1\rangle - i|1, -1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ -i \end{pmatrix}, \\ |u(0)\rangle &= |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (15.32)$$

$$\begin{aligned}
 |u(-1)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, -1\rangle + \Theta |1, -1\rangle) = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|1, -1\rangle - i |1, +1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Тот факт, что матрица  $T$  симметрична при  $j=1$ , как видно из уравнения (15.29), является частным случаем более общего положения о том, что  $T$  всегда является симметричной матрицей при  $\varepsilon=+1$ . Это следует из соотношения  $\Theta^2 = TT^* = I$ , если его умножить на транспонированный оператор  $\tilde{T} = T^{+*}$ :

$$TT^*T^{+*} = \tilde{T} \quad \text{и} \quad T = \tilde{T} \quad \text{для} \quad \varepsilon = +1 \quad (15.33)$$

вследствие унитарности  $T$ . Аналогично для случая  $\varepsilon=-1$ , который мы рассмотрим теперь, получаем

$$T = -\tilde{T} \quad \text{для} \quad \varepsilon = -1. \quad (15.34)$$

Это означает, что в данном случае  $T$  должно быть антисимметричной матрицей.

2. *Случай*  $\varepsilon=-1$ . Объект можно описать с помощью ортогонального набора  $|b_{-}\rangle$  собственных функций полной наблюдаемой величины  $B$ , например с помощью собственных функций  $|j, m\rangle$  операторов  $J^2$  и  $J_z$ , которые являются одновременно собственными функциями оператора  $\Theta^2$ :

$$\Theta^2 |b_{-}\rangle = -|b_{-}\rangle. \quad (15.35)$$

Отсюда следует снова, как и в случае  $\varepsilon=+1$ , что функции  $|b_{-}\rangle^T = \Theta |b_{-}\rangle$  являются также собственными функциями  $\Theta^2$ , отвечающими собственному значению  $-1$ . Однако функции  $|b_{-}\rangle^T$  всегда ортогональны функциям  $|b_{-}\rangle$ , поскольку

$$\langle b_{-} | \Theta b_{-} \rangle = \langle \Theta^2 b_{-} | \Theta b_{-} \rangle = -\langle b_{-} | \Theta b_{-} \rangle \quad (\text{и поэтому} = 0), \quad (15.36)$$

где первое равенство следует из соотношения  $\langle a | b \rangle = \langle \Theta b | \Theta a \rangle$ , а второе — из (15.35).

Обозначая два ортогональных дополнения любого состояния  $|b_{-}\rangle$  через  $|b'_{-}\rangle$  и  $|b''_{-}\rangle$  и определяя их с условием, накладываемым на фазы, при помощи соотношений

$$|b''_{-}\rangle = i\Theta |b'_{-}\rangle \quad \text{и} \quad |b'_{-}\rangle = i^* \Theta |b''_{-}\rangle = -i\Theta |b''_{-}\rangle, \quad (15.37)$$

можно показать, что собственные функции оператора  $\Theta^2$  являются дважды вырожденными, а переход из состояния  $|b'_{-}\rangle$  в состояние  $|b''_{-}\rangle$  не может быть совершен путем унитарного преобразования. Таким образом, чтобы ввести понятие реверсивности

объекта, нужно потребовать в случае  $\varepsilon = -1$  введения еще двух дополнительных измерений в абстрактном пространстве векторов состояния. Уравнению (15.37) можно удовлетворить с помощью  $2n$ -мерного представления

$$|b'_-\rangle = |b\rangle \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |b''_-\rangle = |b\rangle^T \times \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad |b\rangle^T = TK|b\rangle, \quad (15.37')$$

где  $n$  — размерность пространства, отвечающего собственным векторам  $|b\rangle$  величины  $B$  при условии, что в пространстве реверсивности, отвечающем векторам  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ , оператор  $\Theta$  приобретает дополнительный множитель — матрицу размерности  $2 \times 2$  и поэтому имеет вид

$$\Theta = T_- K, \quad T_- = T \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (15.38)$$

где  $T$  представляет собой операцию изменения знака времени  $t \rightarrow -t$ , примененную только к компонентам вектора  $|b\rangle$ . Действительно,

$$\begin{aligned} i\Theta|b'_-\rangle &= i|b\rangle^T \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = i|b\rangle^T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |b''_-\rangle, \\ -i\Theta|b''_-\rangle &= -i|b\rangle \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} = -i|b\rangle \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} = |b'_-\rangle. \end{aligned} \quad (15.37'')$$

Операторы, которые являются четными или нечетными при обращении направления движения, также приобретают в пространстве реверсивности дополнительные матрицы  $2 \times 2$ , которые для эрмитовых операторов должны быть выбраны в виде единичных матриц:

$$A_{\text{четн}} = A \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{\text{нечетн}} = B \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (15.39)$$

поскольку тогда

$$\Theta A_{\text{четн}} - A_{\text{четн}} \Theta = \begin{pmatrix} 0 & -(\Theta A - A\Theta) \\ \Theta A - A\Theta & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (15.40)$$

при условии, что  $\Theta A - A\Theta = 0$ , и

$$\Theta B_{\text{нечетн}} + B_{\text{нечетн}} \Theta = \begin{pmatrix} 0 & \Theta B + B\Theta \\ -(\Theta B + B\Theta) & 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (15.41)$$

при условии, что  $\Theta B + B\Theta = 0$ .

В качестве иллюстрации рассмотрим случай  $j=1/2$ . Имеем

$$T\left(j=\frac{1}{2}\right)=e^{i\pi J_2}=I \cos \frac{\pi}{2}+2iJ_2 \sin \frac{\pi}{2}=2iJ_2=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (15.42)$$

Взяв за базис собственные состояния оператора  $J_3$ , а именно

$$|b_1\rangle=|\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}\rangle=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |b_2\rangle=|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (15.43)$$

получим представления

$$|b'_{1-}\rangle=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |b'_{2-}\rangle=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$|b''_{1-}\rangle=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |b''_{2-}\rangle=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \quad (15.44)$$

$$T_-=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переход к другому набору базисных векторов  $|a_-\rangle$  можно осуществить, если записать векторы  $|a'_{j-}\rangle$  в виде линейных комбинаций:

$$|a'_{j-}\rangle=\sum_k V_{jk}|b'_{k-}\rangle+\sum_k W_{jk}|b''_{k-}\rangle. \quad (15.45)$$

Поэтому набор  $|a''_{j-}\rangle$ , если он удовлетворяет уравнениям (15.37), разлагается таким же образом:

$$|a''_{j-}\rangle=i\Theta|a'_{j-}\rangle=-\sum_k W_{jk}^+|b'_{k-}\rangle+\sum_k V_{jk}^-|b''_{k-}\rangle. \quad (15.46)$$

Следовательно, в пространстве реверсивности матрица преобразования  $S$ , связывающая набор

$$\begin{pmatrix} |a\rangle \\ |a\rangle^T \end{pmatrix}$$

фермиона и  $-1$  для антифермиона, аддитивно и, согласно экспериментальным данным, точно сохраняется во всех известных взаимодействиях. Следовательно, если функция  $|b'_-\rangle$  описывает фермионное состояние и удовлетворяет уравнению

$$F|b'_-\rangle = +|b'_-\rangle, \quad (15.54)$$

то функция  $|b''_-\rangle$  будет описывать антифермионное состояние и удовлетворять уравнению

$$F|b''_-\rangle = -|b''_-\rangle. \quad (15.55)$$

Оператор  $F$  действует в пространстве, отвечающем функциям  $|b\rangle$ , как единичный оператор, и поэтому в пространстве реверсивности он имеет вид

$$F = I \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (15.56)$$

который гарантирует, что  $F$  удовлетворяет уравнениям (15.54) и (15.55) и является нечетным относительно обращения времени:

$$\begin{aligned} FT_- + T_-F &= I \times \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \\ &= I \times \left[ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0. \quad (15.57) \end{aligned}$$

Таким образом, если  $|b'_-\rangle$  описывает электрон, характеризуемый квантовыми числами  $(\mathbf{k}, j=1/2, m=+1/2)$ , то обращенная во времени функция  $|b''_-\rangle$  описывает позитрон, имеющий квантовые числа  $(-\mathbf{k}, j=1/2, m=-1/2)$ . Это отвечает предположению, сделанному Фейнманом, который предложил описывать позитроны как электроны, «обращенные во времени». Если стать на эту точку зрения, то можно прийти к выводу, что точное сохранение величины  $F$  является следствием одного из правил суперотбора, которое запрещает преобразование фермионного состояния в антифермионное и наоборот.

К сожалению, такая точка зрения, хотя она и очень привлекательна, не более чем гипотеза, основанная на довольно шатком фундаменте, поскольку далеко не установлено, что вырождение состояний, отвечающих квантовому числу  $\Theta^2 = -1$ , всегда является источником правила суперотбора, приводящего к сохранению фермионного числа. В действительности существует еще одна операция симметрии, обладающая, по-видимому, всеобщей применимостью, а именно операция комбинированной инверсии

$$\Sigma = \Pi\Gamma, \quad (15.58)$$

которая состоит из унитарной операции инверсии координат  $\Pi$  и операции зарядового сопряжения  $\Gamma$ , представляющей собой преобразование частиц в античастицы и наоборот. В случае фермионов  $\Sigma$  является антиунитарным оператором, как это показано в гл. 19, и, следовательно, приводит к появлению еще одного дихотомического квантового числа — собственного значения оператора  $\Sigma^2$ , которое может быть равно  $+1$  или  $-1$ , как в случае оператора  $\Theta^2$ . Таким образом, если фермион отвечает квантовому числу  $\Sigma^2 = -1$ , то подпространства, образованные  $\psi$ -функциями  $|b\rangle$  и  $\Sigma|b\rangle$ , разделяются еще одним правилом суперотбора. Это правило может быть ответственно за точное сохранение какой-то другой наблюдаемой величины, которая устраняет вырождение между рассматриваемым состоянием и состоянием, возникающим в результате применения к первому состоянию оператора комбинированной инверсии. Таким образом, элементарные частицы можно подразделить на различные «виды», которым приписываются  $\psi$ -функции  $|b_{\Sigma^2, \epsilon_\Theta}\rangle$  в соответствии с собственными значениями  $\epsilon_\Theta = \Theta^2$  и  $\epsilon_\Sigma = \Sigma^2$  операторов  $\Theta^2$  и  $\Sigma^2$ . Должно существовать четыре вида частиц, а именно:  $|b_{++}\rangle$ ,  $|b_{+-}\rangle$ ,  $|b_{-+}\rangle$  и  $|b_{--}\rangle$ .

Существуют веские экспериментальные доказательства того, что фермионное число сохраняется отдельно для барионов и для двух типов лептонов. Можно говорить о законе сохранения барионного числа  $B$ , о законе сохранения лептонного числа  $L$  и о законе сохранения мюонного числа  $L_\mu$ .

Имеются некоторые основания считать, что закон сохранения лептонного числа  $L$ , связанный с обычными нейтрино ( $L = +1$ ) и антинейтрино ( $L = -1$ ), испускаемыми при  $\beta$ -распаде ядер, является следствием правила суперотбора, обусловленного существованием квантового числа  $\epsilon_\Sigma = -1$ , приписываемого нейтрино и антинейтрино (а также электрону и позитрону), поскольку  $\psi$ -функция антинейтрино  $|\bar{\nu}\rangle$  может быть получена из  $\psi$ -функции нейтрино  $|\nu\rangle$  путем применения оператора комбинированной инверсии  $|\bar{\nu}\rangle = \Sigma|\nu\rangle$ . Подобным же образом  $\psi$ -функция позитрона  $|e^+\rangle$  может рассматриваться как полученная из  $\psi$ -функции электрона  $|e^-\rangle$  с помощью преобразования комбинированной инверсии. Это показано в гл. 17 и 19. С другой стороны, мюонное число  $L_\mu$  и барионное число  $B$  могут быть последовательно связаны с правилом суперотбора, вытекающим из симметрии по отношению к обращению времени, как это показано в гл. 17 и 29.

Чтобы провести детальную классификацию элементарных частиц по их «видам», удобно сначала развить аппарат, который позволяет описывать состояния с переменным числом частиц.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Крамерс [1] впервые обратил внимание на особое двукратное вырождение состояний, отвечающих нечетному числу электронов в отсутствие внешнего магнитного поля. Это вырождение было затем объяснено Вигнером [2] для случая систем с полуцелым моментом количества движения как следствие симметрии по отношению к обращению времени. В его статье содержатся также соображения о роли антиунитарных операций симметрии в квантовой механике.

Зохер и Терек [3] дали обзор тех мало заметных на первый взгляд следствий, к которым приводит операция обращения времени в классической физике.

Вигнер [4] развил формализм антиунитарных операторов в наиболее общем виде, а также указал [5] экспериментальные критерии, которые в принципе позволяют решить, может ли операция симметрии в квантовой механике быть представлена с помощью унитарного или антиунитарного оператора.

Фейнман [6] высказал предположение, что позитроны могут рассматриваться как электроны, «обращенные во времени».

Вик и др. [7] ввели термин «правило суперотбора» для ситуаций, в которых не имеется ни спонтанных переходов между состояниями, отвечающими двум различным подпространствам, ни измеримых величин с конечными матричными элементами, соответствующими этим состояниям.

Вигнер [8] указал, что можно спасти, если это понадобится, симметрию по отношению к изменению направления движения на противоположное путем введения понятия метаматерии, отличающегося от понятия антиматерии.

## Л и т е р а т у р а

1. Kramers H. A., Proc. Acad. Sci., Amsterdam, **A33**, 959 (1930).
2. Wigner E., Nachr. Acad. Wiss. Goettingen, Math.-Phys. Kl., p. 546, 1932.
3. Zocher H., Török C., Proc. Natl. Acad. Sci. US, **39**, 681 (1953).
4. Wigner E., Journ. Math. Phys., **1**, 409 (1960).
5. Wigner E., Journ. Math. Phys., **1**, 414 (1960).
6. Фейнман R. P., Theory of Fundamental Processes, New York, 1961, p. 26.
7. Wick G. C., Wightman A. S., Wigner E., Phys. Rev., **88**, 101 (1952).
8. Wigner E. P., Rev. Mod. Phys., **29**, 255 (1957).
- 9\*. Зисман Г. А., ЖЭТФ, **10**, 1163 (1940); **11**, 631 (1941).
- 10\*. Stueckelberg E. C. C., Helv. Phys. Acta, **15**, 23 (1942).



## *Понятие частицы в квантовой механике*

Формализм квантовой механики естественным образом приспособлен для описания «частиц», которые вводятся как носители различных наблюдаемых на опыте свойств, более детально описанных в гл. 17 и 18.

Следует ясно понимать, что понятие частицы в квантовой механике является абстракцией и существенно отличается от наивного понятия частицы, используемого в классической физике, где частица без особой погрешности может быть наглядно представлена в виде маленького шарика, способного двигаться по определенной траектории во времени и в пространстве. Невозможность одновременного наблюдения координаты и импульса привела в квантовой механике к отказу от такого слишком упрощенного представления. Слово «частица» теперь относится к квантовомеханическому состоянию, характеризующемуся набором квантовых чисел, которые в принципе связаны с каким-нибудь наблюдаемым событием, таким как перенос импульса при «столкновении», или с последовательностью наблюдаемых событий, такой, как туманный след частицы в ионизационной камере.

Это абстрактное представление, достигнутое ценой утраты прежней удовлетворительной с наивной точки зрения картины, привело к приложимости квантовомеханического понятия частицы к таким явлениям, которые, как думали ранее, отвечают концепции классического поля. Поэтому такие большие разделы физики, как динамика газов, жидкостей и твердых тел, охватываются квантовомеханическим описанием с помощью введения понятий экситона, фонона, ротона и т. д. Это позволило описать многие свойства макроскопических тел в рамках того же формализма, который был первоначально предложен для описания так называемых элементарных частиц — фермионов и бозонов.

Свойственное классической физике различие между «действительными» частицами, такими, как электрон, и «действительными» полями, такими, как поле скоростей в жидкости, в квантовой механике сохранилось в виде различия между частицами и квазичастицами. В настоящее время также существует

концептуальное различие между «вакуумом», из которого, как считают, рождаются различные элементарные частицы, и «квaziвакуумом», из которого могут возникать различные квазичастицы, или элементарные возбуждения твердого тела, жидкости или газа.

По установленным представлениям предполагается, что вакуумное состояние элементарных частиц является абсолютно незаполненным. В противоположность этому квазивакуум всегда представляют как некоторое заполненное состояние: либо как основное состояние кристаллической решетки, состоящей из реально существующих атомов, либо как заполненную электронами сферу Ферми без дырок или щелей и т. д. Однако *формализм*, который развивается ниже, *не отражает этого различия между вакуумом и квазивакуумом, между частицами и квазичастицами*. Как вакуум, так и квазивакуум всегда могут быть описаны с помощью вектора состояния, обозначаемого  $|0\rangle$  и отвечающего совершенно незаполненному соответственно частицами или квазичастицами состоянию.

В этой связи полезно напомнить о таком любопытном историческом факте. На определенной стадии развития теории элементарных частиц Дирак нашел удобным ввести в качестве вакуумного состояния для электронно-позитронной системы состояние, существенно отличающееся от незаполненного, а именно состояние, в котором все отрицательные энергетические уровни заполнены (нет ни дырок, ни щелей) и которое поэтому напоминает то состояние, которое теперь называют квазивакуумным. Тот факт, что, поступив так, Дирак не пришел к серьезным противоречиям, является довольно примечательным. Формальные причины, поставившие Дирака перед соответствующей альтернативой в выборе вакуумного состояния, детально рассмотрены в гл. 17.

Во всяком случае, различие между частицами и квазичастицами в последние годы имеет тенденцию становиться все менее отчетливым, и как результат имеется значительное взаимное плодотворное влияние теории элементарных частиц и теорий твердого, жидкого и газообразного состояний вещества.

Все сказанное выше не означает, конечно, что мы отрицаем полезность описания макроскопических тел на основе представления об атомах, образующих, например, решетку в твердом теле. Помимо всего прочего, наличие атомов решетки отчетливо проявляется в экспериментах, связанных с относительно высокими энергиями, например при дифракции рентгеновских лучей на кристаллических образцах. Поэтому в таком экспериментальном смысле можно сказать, что атомы решетки действительно существуют.

Тем не менее нет никаких оснований считать, что нельзя, хотя бы в принципе, провести теоретические расчеты, основанные на понятии квазичастиц и объясняющие *все* наблюдения, проведенные над макроскопическими телами. Если такую программу окажется возможным осуществить, то можно логически представить себе ситуацию, в которой допустимо и даже выгодно полностью отбросить представление об атомах и описывать вещество только на основе того, что мы теперь называем «квазичастицами».

С этой точки зрения можно говорить о возможности развития теории элементарных частиц, основанной на введении понятия некоего субстрата — «праматерии», который может играть для вакуумного состояния элементарных частиц ту же роль, какую играют атомы макроскопических тел для квазивакуума, из которого возникают квазичастицы. Первоначальное дираковское толкование электронно-позитронного вакуума, быть может, оставлено несколько преждевременно.

Возвращаясь теперь к тому, что твердо установлено о частицах и квазичастицах, мы можем высказать одно категорическое утверждение о числах заполнения фермионных и бозонных состояний, которое нельзя сделать в такой же категорической форме о квазичастицах.

Пусть мы знаем, что для определенного физического объекта существует полный набор квантовых чисел  $\tau$ , так что заданные значения  $\tau$  полностью описывают состояние этого объекта. Например, в случае элементарной частицы, характеризуемой импульсом  $k$ , спином  $s$  и лептонным числом  $L$ , под  $\tau$  можно понимать шесть квантовых чисел  $(k, j, m, L)$ . Так как само понятие частицы предполагает существование таких объектов, которые в принципе можно пересчитать, то мы приходим к заключению, что существуют состояния заполнения  $|0_\tau\rangle, |1_\tau\rangle, |2_\tau\rangle, \dots$ , являющиеся собственными состояниями соответствующим образом выбранного оператора, который представляет наблюдаемое число частиц, обладающих свойством  $\tau$ ; эти состояния отвечают таким ситуациям, когда имеются соответственно 0, 1, 2, ... частиц со свойством  $\tau$ .

По причинам, которые в настоящее время понятны только частично, все частицы, имеющие полужелый спин и называемые фермионами, удовлетворяют следующему *принципу исключения* (принципу Паули): *число фермионов  $N_\tau$  в данном полностью описанном квантовом состоянии  $\tau$  может быть равно только 0 или 1.*

Число  $n_\tau$  частиц, имеющих целочисленный спин и называемых бозонами, в данном квантовом состоянии  $\tau$ , по-видимому,

не ограничено ничем, за исключением того, что должно быть  $n_{\tau} \geq 0$ .

Для квазичастиц нельзя сделать категорических утверждений такого рода. Ограничения для чисел заполнения квазичастичных состояний, если они существуют, должны быть рассмотрены отдельно в каждом конкретном случае<sup>1)</sup>.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Паули [1] открыл принцип исключения. Читатели, интересующиеся тем глубоким вкладом, который Паули внес в квантовую механику, найдут пищу для размышлений в книге под редакцией Фирца и Вайскопфа [2].

Связь между принципом исключения и спином рассматривается в работах Паули [3] и Людерса и Цумино [4].

Дирак [5] первым ввел представление о вакууме, как о состоянии, которое не является незаполненным.

Попытка описания элементарных частиц с помощью квазичастичной модели содержится в работе Намбу и Иона-Лазинио [6]. Ранняя, более наивная попытка Кемпфера [7] оказалась неудачной.

### Литература

1. Pauli W., Zs. Phys., **31**, 765 (1925).
2. Theoretical Physics in the Twentieth Century (ed. Fierz M., Weisskopf V. F.), New York, 1960 (см. перевод: Теоретическая физика XX века, ИЛ, 1962).
3. Pauli W., Phys. Rev., **58**, 716 (1940).
4. Lüders G., Zumino B., Phys. Rev., **110**, 1450 (1958).
5. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A126**, 360 (1930).
6. Nambu Y., Jona-Lasinio G., Phys. Rev., **122**, 345; **124**, 246 (1961).
7. Kämpfer F. A., Can. Journ. Phys., **31**, 165 (1953); **32**, 259 (1954).

<sup>1)</sup> Можно, по-видимому, считать, что в тех условиях, когда само понятие квазичастицы имеет смысл, приведенные выше утверждения сохраняют свою силу и для квазичастиц. — *Прим. ред.*

## Фермионные состояния

Из принципа Паули следует, что число фермионов  $N_\tau$  в данном квантовом состоянии, определяемом полным набором  $\tau$ , является дихотомической переменной. Возможные заполнения состояний соответствуют векторам состояния, которые могут быть равны только  $|0_\tau\rangle$  или  $|1_\tau\rangle$ . В абстрактном двумерном пространстве они могут быть представлены в виде

$$|0_\tau\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_\tau, \quad |1_\tau\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_\tau. \quad (17.1)$$

Эти векторы состояния образуют ортонормированный набор. Соответствующий оператор в таком пространстве, отвечающий наблюдаемому числу фермионов  $N(\tau)$ , очевидно, имеет вид

$$N(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\tau, \quad (17.2)$$

поскольку он обладает требуемыми свойствами

$$N(\tau)|0_\tau\rangle = 0_\tau|0_\tau\rangle, \quad N(\tau)|1_\tau\rangle = 1_\tau|1_\tau\rangle. \quad (17.3)$$

Особенно полезно ввести оператор уничтожения  $a(\tau)$  и оператор рождения  $a^+(\tau)$ , которые следующим образом связывают состояния  $|0_\tau\rangle$  и  $|1_\tau\rangle$ :

$$a(\tau)|1_\tau\rangle = c_\tau|0_\tau\rangle, \quad a^+(\tau)|0_\tau\rangle = c_\tau^*|1_\tau\rangle, \quad (17.4)$$

где  $c_\tau$  — некоторое комплексное число. В соответствии с принципом Паули потребуем далее, чтобы выполнялись соотношения

$$a(\tau)|0_\tau\rangle = 0, \quad a^+(\tau)|1_\tau\rangle = 0. \quad (17.5)$$

Это приводит к следующим выражениям для операторов  $a(\tau)$  и  $a^+(\tau)$ :

$$a(\tau) = c_\tau \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_\tau, \quad a^+(\tau) = c_\tau^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_\tau, \quad (17.6)$$

оправдываемым, ввиду эрмитовой сопряженности операторов  $a^+(\tau)$  и  $a(\tau)$ , обозначения, принятые в (17.4). Требование, чтобы

последовательное действие одного оператора рождения и одного оператора уничтожения в любом порядке на какое-либо состояние восстанавливало исходное состояние, накладывает на множитель  $c_\tau$  следующее ограничение:

$$|c_\tau|^2 = 1, \quad (17.7)$$

так что действительно

$$a^+(\tau)a(\tau)|1_\tau\rangle = c_\tau a^+(\tau)|0_\tau\rangle = |c_\tau|^2|1_\tau\rangle = |1_\tau\rangle \text{ и т. д.} \quad (17.8)$$

Используя такой выбор  $c_\tau$ , находим, что операторы  $a(\tau)$  и  $a^+(\tau)$  связаны с оператором  $N(\tau)$  следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} a^+(\tau)a(\tau) &= |c_\tau|^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\tau = N(\tau), \\ a(\tau)a^+(\tau) &= |c_\tau|^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\tau = I(\tau) - N(\tau), \end{aligned} \quad (17.9)$$

где  $I(\tau)$  обозначает единичный оператор:

$$I(\tau) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_\tau. \quad (17.10)$$

Сложив два соотношения (17.9), получим антикоммутиционное соотношение

$$a(\tau)a^+(\tau) + a^+(\tau)a(\tau) = I(\tau). \quad (17.11)$$

Подобное описание может быть распространено на все квантовые состояния  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m, \dots$ , которые могут занимать рассматриваемые фермионы. Векторы состояния некоторой системы фермионов, отвечающие разным возможностям заполнения, определены в пространстве, представляющем собой прямое произведение пространств, соответствующих отдельным квантовым состояниям:

$$\begin{aligned} |N_{\tau_1}, N_{\tau_2}, \dots, N_{\tau_m}, \dots\rangle &= \\ &= |N_{\tau_1}\rangle \times |N_{\tau_2}\rangle \times \dots \times |N_{\tau_m}\rangle \times \dots \end{aligned} \quad (17.12)$$

Для удобства условимся писать числа заполнения в определенном порядке, соответствующем определенной последовательности индексов квантовых состояний  $\tau_m$ ; так,  $\tau_m$  будет всегда находиться слева от  $\tau_n$ , если  $m < n$ . Никакой физически наблюдаемый эффект не должен, конечно, зависеть от изменения этого условия.

Важный частный случай заполнения уровней отвечает вакуумному состоянию

$$|0\rangle = |0_{\tau_1}, 0_{\tau_2}, \dots, 0_{\tau_m}, \dots\rangle, \quad (17.13)$$

т. е. состоянию, абсолютно не заполненному частицами. Противоположностью ему, по крайней мере для фермионов, является целиком заполненное состояние, определяемое выражением

$$|1\rangle = |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}, \dots, 1_{\tau_m}, \dots\rangle. \quad (17.14)$$

Теперь можно построить операторы рождения  $a^+(\tau_m)$ , переводящие фермионы из вакуумного состояния в различные квантовые состояния  $\tau_m$ <sup>1)</sup>:

$$a^+(\tau_m)|\dots 0_{\tau_m} \dots\rangle = c_{\tau_m}^*|\dots 1_{\tau_m} \dots\rangle, \quad (17.15)$$

и операторы уничтожения  $a(\tau_m)$ , удаляющие фермионы из заполненного состояния, соответствующего квантовым числам  $\tau_m$ :

$$a(\tau_m)|\dots 1_{\tau_m} \dots\rangle = c_{\tau_m}|\dots 0_{\tau_m} \dots\rangle. \quad (17.16)$$

Таким способом любое состояние типа (17.12), отвечающее произвольному заполнению уровней, может быть получено либо из вакуумного состояния путем последовательного применения операторов рождения, либо из абсолютно заполненного состояния путем последовательного применения операторов уничтожения.

Соответствующим выбором множителей  $c_{\tau_m}$  операторы  $a^+(\tau_m)$  и  $a(\tau_m)$  можно представить в виде матриц, удовлетворяющих антикоммутиационным соотношениям

$$\{a(\tau_m)a(\tau_{m'})\} = \{a^+(\tau_m)a^+(\tau_{m'})\} = 0, \quad \{a(\tau_m)a^+(\tau_{m'})\} = I(\tau_m)\delta_{mm'} \quad (17.17)$$

(здесь  $\{ab\} = ab + ba$ ), которые содержат соотношение (17.11) как частный случай. Приведенным соотношениям можно удовлетворить, полагая

$$c_{\tau_m} = \prod_{n=1}^{m-1} (1 - 2N_{\tau_n}), \quad (17.18)$$

так что условие (17.7) снова удовлетворяется. Множители  $c_{\tau_m}$  равны  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того, является ли число заполненных состояний  $N_{\tau_m} = 1$  при  $n < m$  четным или нечетным, так как каждое заполненное состояние дает в (17.18) вклад, равный  $-1$ , а каждое незаполненное — равный  $+1$ . Вводя определение

$$I(\tau_n) - 2N(\tau_n) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\tau_n} = I_3(\tau_n), \quad (17.19)$$

<sup>1)</sup> В действительности оператор рождения создает в вакууме частицу, увеличивая тем самым общее число частиц. — *Прим. ред.*

можно сразу записать операторы  $a(\tau_m)$  и  $a^+(\tau_m)$  в матричном представлении:

$$a(\tau_m) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\tau_1} \times \dots \\ \dots \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_{\tau_{m-1}} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tau_m} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\tau_{m+1}} \times \dots, \quad (17.20)$$

$$a^+(\tau_m) = \prod_{n=1}^{m-1} I_3(\tau_n) \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\tau_m} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} I(\tau_n), \quad (17.21)$$

учитывая при этом, что матрица с индексом  $\tau_n$  действует лишь в том подпространстве общего пространства векторов состояния (17.12), которое отвечает квантовому состоянию  $\tau_n$ .

Представление, которое мы здесь использовали, имеет одно интересное свойство: оно остается инвариантным при унитарном преобразовании типа

$$U = U^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\tau_1} \times \dots \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\tau_n} \times \dots = \prod_{n=1}^{\infty} I_1(\tau_n). \quad (17.22)$$

В сущности такое преобразование приводит к тому, что заполненные квантовые состояния становятся незаполненными («дырками») и наоборот. Действительно, для любого значения  $n$

$$N'(\tau) = UN(\tau)U^\dagger = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = I(\tau) - N(\tau), \quad (17.23)$$

так что

$$U|0\rangle = |1\rangle, \quad U|1\rangle = |0\rangle \quad (17.24)$$

и

$$a'(\tau_m) = Ua(\tau_m)U^\dagger = (-1)^{m-1} a^+(\tau_m), \quad a^{+'}(\tau_m) = (-1)^{m-1} a(\tau_m). \quad (17.25)$$

Соотношения (17.25) можно записать в явном виде

$$a'(\tau_m) = c'_{\tau_m} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\tau_m}, \quad a^{+'}(\tau_m) = c'^*_{\tau_m} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{\tau_m}, \quad (17.26)$$

где

$$c'_{\tau_m} = \prod_{n=1}^{m-1} (1 - 2N'_{\tau_n}) = \prod_{n=1}^{m-1} (2N_{\tau_n} - 1) = (-1)^{m-1} c_{\tau_m}. \quad (17.27)$$



Эта своеобразная симметрия между заполненными состояниями, полученными из вакуума, и соответствующими дырками в абсолютно заполненном состоянии позволила Дираку рассматривать позитроны как дырки в заполненном «море» электронов, обладающих отрицательной энергией.

Часто для применения к теории квазичастиц удобно произвести такое унитарное преобразование  $U(\tau_m)$ , при котором только для некоторых квантовых состояний, а именно для тех, которые отвечают значениям  $\tau_n$ , где  $n < m$ , заполненные и незаполненные состояния меняются местами. Оператор такого преобразования имеет вид

$$U(\tau_m) = U^\dagger(\tau_m) = \\ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\tau_1} \times \dots \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{\tau_{m-1}} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_{\tau_m} \times \dots \quad (17.28)$$

В качестве первого примера рассмотрим фермион, находящийся в состоянии с определенным импульсом  $\mathbf{k}$  и спиновым квантовым числом  $s = +1$  или  $s = -1$ . Обозначим это состояние  $|\mathbf{k}, s\rangle$ . Очевидно, оно получается из вакуумного состояния применением к последнему оператора рождения  $a^+(\mathbf{k}, s)$ . Поэтому в двумерном пространстве заполнения полный вектор такого единичного фермионного состояния имеет следующий явный вид:

$$|\mathbf{k}, s\rangle = a^+(\mathbf{k}, s)|0\rangle = |\mathbf{k}, s\rangle \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (17.29)$$

Простейшими частицами, состояние которых можно полностью охарактеризовать заданием импульса  $\mathbf{k}$  и спина  $s$ , являются нейтрино и антинейтрино. Эти частицы не обладают массой, так что их энергия  $\Omega$  и импульс  $\mathbf{k}$  связаны соотношением

$$\Omega^2 - \mathbf{k}^2 = 0. \quad (17.30)$$

Если потребовать, чтобы энергия была положительным числом, то

$$\Omega = |\mathbf{k}|. \quad (17.31)$$

В экспериментальном отношении нейтрино и антинейтрино, возникающие при  $\beta$ -распаде ядер, отличаются тем, что спин нейтрино всегда направлен противоположно импульсу (спин и импульс «антипараллельны»), т. е. нейтрино является левовинтовой частицей:

$$(\mathbf{s}\mathbf{k}) = -k = -|\mathbf{k}| \quad \text{для нейтрино,} \quad (17.32)$$

в то время как антинейтрино является в этом смысле правовинтовой частицей

$$(\mathbf{sk}) = +|\mathbf{k}| \quad \text{для антинейтрино.} \quad (17.33)$$

Поэтому соотношение (17.31) может быть записано в виде

$$\Omega = \begin{cases} -(\mathbf{sk}) & \text{для нейтрино,} \\ +(\mathbf{sk}) & \text{для антинейтрино.} \end{cases} \quad (17.34)$$

Гамильтонианы, описывающие соответственно  $\nu$  и  $\bar{\nu}$ , имеют вид

$$H_\nu = -(\sigma\mathbf{P}), \quad H_{\bar{\nu}} = +(\sigma\mathbf{P}). \quad (17.35)$$

При этом в спиновом пространстве запись

$$H|\mathbf{k}, s\rangle = \mp(\sigma\mathbf{P})|\mathbf{k}, s\rangle = |\mathbf{k}| |\mathbf{k}, s\rangle \quad \text{означает} \\ \mp \begin{pmatrix} P_3 & P_1 - iP_2 \\ P_1 + iP_2 & -P_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\mathbf{k}, s\rangle_1 \\ |\mathbf{k}, s\rangle_2 \end{pmatrix} = |\mathbf{k}| \begin{pmatrix} |\mathbf{k}, s\rangle_1 \\ |\mathbf{k}, s\rangle_2 \end{pmatrix}. \quad (17.36)$$

В координатном представлении собственное состояние  $|\mathbf{k}, s\rangle$  можно описать двухкомпонентными  $\psi$ -функциями [см. (9.30)]

$$\langle \mathbf{q}(t) | \mathbf{k}, s \rangle = \Psi_{\mathbf{k}, s}(\mathbf{q}, t) = e^{i\Omega t} \psi_{\mathbf{k}, s}(\mathbf{q}), \quad (17.37)$$

так что

$$|\mathbf{k}, s\rangle = \int |\mathbf{q}(t)\rangle \Psi_{\mathbf{k}, s}(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q}. \quad (17.38)$$

Тем же методом, который был использован при выводе (9.30) из (9.20), можно показать, что если использовать обозначения  $\mathbf{P} = -i(\partial/\partial\mathbf{Q})$  и  $H = +i(\partial/\partial t)$  и обозначить  $\psi$ -функции нейтрино и антинейтрино через  $\phi$  и  $\pi$  соответственно, то эти  $\psi$ -функции удовлетворяют уравнениям

$$H_\nu \phi(\mathbf{q}) = i \left( \sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \phi(\mathbf{q}) = \\ = i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_3} & \frac{\partial}{\partial q_1} - i \frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} + i \frac{\partial}{\partial q_2} & -\frac{\partial}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = -|\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (17.39)$$

$$H_{\bar{\nu}} \pi(\mathbf{q}) = -i \left( \sigma \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \right) \pi(\mathbf{q}) = \\ = -i \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial q_3} & \frac{\partial}{\partial q_1} - i \frac{\partial}{\partial q_2} \\ \frac{\partial}{\partial q_1} + i \frac{\partial}{\partial q_2} & -\frac{\partial}{\partial q_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix} = -|\mathbf{k}| \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \end{pmatrix}. \quad (17.40)$$

Решения уравнения (17.39) можно получить, записав

$$\phi_n(\mathbf{q}) = A_n e^{-i\mathbf{k}\mathbf{q}}, \quad (17.41)$$

где амплитуды определяются из линейных уравнений

$$\begin{aligned} k_3 A_1 + (k_1 - ik_2) A_2 &= -|k| A_1, \\ (k_1 + ik_2) A_1 - k_3 A_2 &= -|k| A_2; \end{aligned} \quad (17.42)$$

при этом должно выполняться условие нормировки

$$\int_V \phi^*(\mathbf{q}) \phi(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = (|A_1|^2 + |A_2|^2) V = 1. \quad (17.43)$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения уравнений (17.42) является равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов при амплитудах  $A$ :

$$\begin{vmatrix} k_3 + |k| & k_1 - ik_2 \\ k_1 + ik_2 & -k_3 + |k| \end{vmatrix} = \mathbf{k}^2 - k_1^2 - k_2^2 - k_3^2 = 0. \quad (17.44)$$

Последнее уравнение тождественно выполняется, из чего следует, что решения  $\phi_n(\mathbf{q})$  действительно имеют вид (17.41). Можно показать, что при соответствующем выборе фазы

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{k_1 - ik_2}{\sqrt{V} \sqrt{2|k|(|k| + k_3)}}, \\ A_2 &= +\frac{|k| + k_3}{\sqrt{V} \sqrt{2|k|(|k| + k_3)}}. \end{aligned} \quad (17.45)$$

Именно такой вид амплитуд достаточно ясно свидетельствует о том, что существует корреляция между направлениями спина и импульса нейтрино. Введя полярные углы  $\theta$ ,  $\varphi$ , определяющие направление импульса  $\mathbf{k}$  ( $k_1 = |k| \sin \theta \cos \varphi$ ,  $k_2 = |k| \sin \theta \sin \varphi$ ,  $k_3 = |k| \cos \theta$ ), запишем амплитуды  $A_1$  и  $A_2$  в виде

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\sin \theta e^{-i\varphi}}{\sqrt{V} \sqrt{2(1 + \cos \theta)}} = -\frac{1}{\sqrt{V}} \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}, \\ A_2 &= \frac{1}{\sqrt{V}} \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (17.46)$$

Тогда функция

$$\phi(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} e^{-i\varphi} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{q}} \quad (17.47)$$

отвечает спиновому состоянию (2.42), описывающему объект со спином, равным  $-1$ , в направлении импульса  $(\theta, \varphi)$ .

Решения уравнения (17.40) можно получить, если аналогичным образом записать

$$\pi_n(\mathbf{q}) = B_n e^{-i\mathbf{k}\mathbf{q}}, \quad (17.48)$$

что дает при соответствующем выборе фаз следующие выражения для амплитуд:

$$B_1 = \frac{|k| + k_3}{\sqrt{V} \sqrt{2|k|(|k| + k_3)}}, \quad B_2 = \frac{k_1 + ik_2}{\sqrt{V} \sqrt{2|k|(|k| + k_3)}}. \quad (17.49)$$

В полярных координатах функция

$$\pi(\mathbf{q}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{pmatrix} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{q}} \quad (17.50)$$

отвечает, как и ожидалось, спиновому состоянию (2.41), описывающему объект со спином, равным  $+1$  в направлении импульса  $(\theta, \varphi)$ .

Нейтрино и антинейтрино обладают особым внутренним свойством, характеризующимся лептонным числом  $L$ , которое строго сохраняется во всех переходах, включая рождение и уничтожение этих и других частиц, относящихся к разряду лептонов. Условились приписывать значение  $L = +1$  нейтрино  $\nu$ , электрону  $e^-$  и мюону  $\mu^-$ , а значение  $L = -1$  — антинейтрино  $\bar{\nu}$ , антиэлектрону  $e^+$  (позитрону) и антимюону  $\mu^+$ . Поскольку исключения из закона сохранения лептонного числа не известны, последний можно интерпретировать как следствие некоторого правила суперотбора, связанного с существованием некоторого антиунитарного оператора симметрии, квадрат которого равен  $-I$ .

Одним из таких операторов симметрии является оператор обращения времени  $\Theta$ . В соответствии с изложенным в гл. 15 в случае лептонов со спином  $1/2$  этот оператор действительно обладает свойством  $\Theta^2 = -I$  при условии, что лептоны не имеют никаких иных внутренних характеристик, помимо спина, наличие которых могло бы нарушать это свойство. Однако обращение времени не дает желаемых правил суперотбора, не приводя к переводу состояния нейтрино в состояние антинейтрино и наоборот, поскольку при его применении изменяются знаки как спина, так и импульса, т. е. спиральность не меняет знака. Существование нейтрино и антинейтрино с определенными, но противоположными спиральностями приводит к далеко идущему выводу относительно предположения Фейнмана, предложившего рассматривать античастицы как частицы, «обращенные во времени». Это предположение не может быть использовано, чтобы

формально различать нейтрино и антинейтрино, испускаемые в разных типах  $\beta$ -распада.

К счастью, существует оператор, изменяющий спиральность частицы — оператор инверсии координат  $\Pi$ , применение которого меняет знак только импульса и который поэтому представляется в спиновом пространстве единичным оператором

$$\Pi = I \times \Pi_D, \quad (17.51)$$

где оператор  $\Pi_D$  действует на динамические переменные, такие, как  $\mathbf{P}$  и  $H$ , и меняет в любой  $\psi$ -функции  $\mathbf{q}$  на  $-\mathbf{q}$ . В соответствии с замечанием, сделанным в конце гл. 14,  $\Pi_D$  является действительным оператором, так что  $\Pi_D^2 = I$ .

Сам по себе оператор  $\Pi$  не является оператором симметрии ни для нейтринных, ни для антинейтринных состояний вследствие определенной спиральности этих частиц. Поэтому, будучи примененным, например, к нейтринному состоянию, оператор  $\Pi$  дает состояние, не реализующееся в природе. Однако можно устранить этот недостаток, введя оператор «зарядового сопряжения частиц»  $\Gamma$ , который, будучи примененным к любому нейтринному состоянию, переводит его в соответствующее антинейтринное состояние, оставляя без изменения динамические переменные. Поэтому оператор «комбинированной инверсии»

$$\Sigma = \Pi \Gamma \quad (17.52)$$

является оператором симметрии нейтринно-антинейтринной системы. Более того, *если предположить, что  $\Gamma$  представляет собой антиунитарный оператор, причем*

$$\Gamma^2 = -I, \quad (17.53)$$

*то можно описать как нейтрино, так и антинейтрино таким образом, что закон сохранения лептонного числа  $L$  будет следствием правила суперотбора, разделяющего пространство инверсии на два подпространства, соответствующие состояниям  $|\nu\rangle$  и  $|\bar{\nu}\rangle = \Sigma|\nu\rangle$ .*

Представление  $\Gamma$  может быть получено при рассмотрении объединения двух двумерных пространств собственных функций — операторов —  $(\sigma\mathbf{P})$  и  $(\sigma\mathbf{P})$ . Соответственно нейтринно-антинейтринная система описывается с помощью четырехкомпонентной  $\psi$ -функции

$$\psi(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \phi(\mathbf{q}) \\ \pi(\mathbf{q}) \end{pmatrix}. \quad (17.54)$$

В этом пространстве оператор  $\Gamma$  может быть представлен в виде

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} K, \quad (17.55)$$

а оператор  $\Pi$  — единичным оператором. В совокупности это позволяет записать оператор инверсии в следующем виде:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Pi_D K. \quad (17.56)$$

Таким образом, мы действительно получаем

$$\Sigma^2 = -I. \quad (17.57)$$

Лептонное число  $L$  в этом пространстве имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (17.58)$$

что позволяет записать выражения (17.35) в виде единого гамильтониана

$$H = -L(\sigma \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} -(\sigma \mathbf{P}) & 0 \\ 0 & (\sigma \mathbf{P}) \end{pmatrix}, \quad (17.59)$$

приводящего к уравнению

$$H\psi(\mathbf{q}) = -|\mathbf{k}|\psi(\mathbf{q}). \quad (17.60)$$

Приведенные соображения не доказывают, что для нейтрино оператор зарядового сопряжения частиц  $\Gamma$  должен быть антиунитарным. Для электронов и позитронов такое доказательство проведено в гл. 19. До сих пор мы показали только, что такое предположение совместимо с той точкой зрения, что антинейтрино является «отраженным в зеркале» нейтрино. Далее, проведенное рассмотрение не доказывает, что частица, соответствующая обращенному во времени левовинтовому нейтрино, не может существовать в природе. Можно лишь сказать, что такая частица, если она существует, не может быть отождествлена с правовинтовым антинейтрино, которое испускается при  $\beta$ -распаде атомных ядер.

Накапливается все больше экспериментальных данных, свидетельствующих о существовании нейтрино другого типа — так называемого мюонного нейтрино  $\nu_\mu$  и его античастицы  $\bar{\nu}_\mu$ , которые имеют ту же спиральность, что и  $\nu$  и  $\bar{\nu}$  соответственно, и испускаются в реакциях с участием мюонов, например

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, & \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu, & \mu^- &\rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}. \end{aligned}$$

Очевидно, существует второе лептонное число  $L_\mu$  («мюонное число»), которое аддитивно и сохраняется независимо от  $L$ , о

чем свидетельствует отсутствие таких процессов, как

$$\mu^- \rightarrow e^- + \nu, \quad \mu^- + p \rightarrow p + e^-.$$

Если лептонам присписать лептонные числа, приведенные в табл. 1, то переход  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}$ , например, может иметь место, поскольку лептонные числа в начальном и конечном состояниях равны  $L = +1 = +1 + 1 - 1$  и  $L_\mu = -1 = +1 - 1 - 1$ .

Таблица 1

Лептонные числа различных лептонов

	$\mu^+$	$\mu^-$	$e^+$	$e^-$	$\bar{\nu}$	$\nu$	$\bar{\nu}_\mu$	$\nu_\mu$
$L$	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1
$L_\mu$	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1

Мюонное нейтрино  $\nu_\mu$  можно согласовать с фейнмановским предположением, если ввести пространство рверсивности, так что, например, по образцу (15.37) состояние мюонного нейтрино возникает при обращении времени из нейтринного состояния, а мюонное антинейтринное состояние — путем аналогичной процедуры с антинейтринным состоянием:

$$|\nu_\mu\rangle = i\Theta|\nu\rangle, \quad |\nu\rangle = -i\Theta|\nu_\mu\rangle; \quad (17.61)$$

при этом мюонное нейтрино оказывается левовинтовым в соответствии с опытами, в которых наблюдался распад  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ .

Состояние  $|\bar{\nu}_\mu\rangle$  возникает в результате применения оператора комбинированной инверсии  $\Sigma$  к состоянию  $|\nu_\mu\rangle$ , а сохранение величины  $L$  в процессах, протекающих с участием мюонного нейтрино, снова гарантируется соотношением  $\Sigma^2 = -I$ . С другой стороны, сохранение  $L_\mu$  следует из правила суперотбора, обусловленного свойством  $\Theta^2 = -I$  антиунитарного оператора обращения времени  $\Theta$ .

Это обсуждение поднимает ряд запутанных на первый взгляд вопросов, касающихся трансформационных свойств электронных, мюонных и нуклонных состояний при применении оператора обращения времени  $\Theta$  и оператора комбинированной инверсии  $\Sigma$ . Если лептонным числам  $L$  и  $L_\mu$  присписать те значения, которые были предложены выше, то позитроны должны рассматриваться как электроны, обращенные в пространстве, что противоречит первоначальной концепции Фейнмана. Только мюоны могут быть отождествлены с электронами, обращенными во времени. Существующее различие между массами мюона и

а оператор  $\Pi$  — единичным оператором. В совокупности это позволяет записать оператор инверсии в следующем виде:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Pi_D K. \quad (17.56)$$

Таким образом, мы действительно получаем

$$\Sigma^2 = -I. \quad (17.57)$$

Лептонное число  $L$  в этом пространстве имеет вид

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (17.58)$$

что позволяет записать выражения (17.35) в виде единого гамильтониана

$$H = -L(\sigma \mathbf{P}) = \begin{pmatrix} -(\sigma \mathbf{P}) & 0 \\ 0 & (\sigma \mathbf{P}) \end{pmatrix}, \quad (17.59)$$

приводящего к уравнению

$$H\psi(\mathbf{q}) = -|\mathbf{k}|\psi(\mathbf{q}). \quad (17.60)$$

Приведенные соображения не доказывают, что для нейтрино оператор зарядового сопряжения частиц  $\Gamma$  *должен* быть антиунитарным. Для электронов и позитронов такое доказательство проведено в гл. 19. До сих пор мы показали только, что такое предположение совместимо с той точкой зрения, что антинейтрино является «отраженным в зеркале» нейтрино. Далее, проведенное рассмотрение не доказывает, что частица, соответствующая обращенному во времени левовинтовому нейтрино, не может существовать в природе. Можно лишь сказать, что такая частица, если она существует, не может быть отождествлена с правовинтовым антинейтрино, которое испускается при  $\beta$ -распаде атомных ядер.

Накапливается все больше экспериментальных данных, свидетельствующих о существовании нейтрино другого типа — так называемого мюонного нейтрино  $\nu_\mu$  и его античастицы  $\bar{\nu}_\mu$ , которые имеют ту же спиральность, что и  $\nu$  и  $\bar{\nu}$  соответственно, и испускаются в реакциях с участием мюонов, например

$$\begin{aligned} \pi^+ &\rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, & \pi^- &\rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu, \\ \mu^+ &\rightarrow e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu, & \mu^- &\rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}. \end{aligned}$$

Очевидно, существует второе лептонное число  $L_\mu$  («мюонное число»), которое аддитивно и сохраняется независимо от  $L$ , о



чем свидетельствует отсутствие таких процессов, как

$$\mu^- \rightarrow e^- + \gamma, \quad \mu^- + p \rightarrow p + e^-.$$

Если лептонам присписать лептонные числа, приведенные в табл. 1, то переход  $\mu^- \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}$ , например, может иметь место, поскольку лептонные числа в начальном и конечном состояниях равны  $L = +1 = +1 + 1 - 1$  и  $L_\mu = -1 = +1 - 1 - 1$ .

Таблица 1

Лептонные числа различных лептонов

	$\mu^+$	$\mu^-$	$e^+$	$e^-$	$\bar{\nu}$	$\nu$	$\bar{\nu}_\mu$	$\nu_\mu$
$L$	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1
$L_\mu$	+1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1

Мюонное нейтрино  $\nu_\mu$  можно согласовать с фейнмановским предположением, если ввести пространство рверсивности, так что, например, по образцу (15.37) состояние мюонного нейтрино возникает при обращении времени из нейтринного состояния, а мюонное антинейтринное состояние — путем аналогичной процедуры с антинейтринным состоянием:

$$|\nu_\mu\rangle = i\Theta| \nu\rangle, \quad |\nu\rangle = -i\Theta|\nu_\mu\rangle; \quad (17.61)$$

при этом мюонное нейтрино оказывается левовинтовым в соответствии с опытами, в которых наблюдался распад  $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$ .

Состояние  $|\bar{\nu}_\mu\rangle$  возникает в результате применения оператора комбинированной инверсии  $\Sigma$  к состоянию  $|\nu_\mu\rangle$ , а сохранение величины  $L$  в процессах, протекающих с участием мюонного нейтрино, снова гарантируется соотношением  $\Sigma^2 = -I$ . С другой стороны, сохранение  $L_\mu$  следует из правила суперотбора, обусловленного свойством  $\Theta^2 = -I$  антиунитарного оператора обращения времени  $\Theta$ .

Это обсуждение поднимает ряд запутанных на первый взгляд вопросов, касающихся трансформационных свойств электронных, мюонных и нуклонных состояний при применении оператора обращения времени  $\Theta$  и оператора комбинированной инверсии  $\Sigma$ . Если лептонным числам  $L$  и  $L_\mu$  присписать те значения, которые были предложены выше, то позитроны должны рассматриваться как электроны, обращенные в пространстве, что противоречит первоначальной концепции Фейнмана. Только мюоны могут быть отождествлены с электронами, обращенными во времени. Существующее различие между массами мюона и

электрона в этом случае окажется еще более непонятным, так как должно выполняться преобразование  $m_\mu = \Theta m_e \Theta^{-1}$ ). С другой стороны, существование только одного барионного числа, приписываемого нуклонам и антинуклонам, позволяет предполагать, что для нуклонов только антиунитарный оператор симметрии обладает тем свойством, что его квадрат равен  $-I$ . Это оказывается возможным потому, что барионы имеют другие внутренние характеристики, помимо спина. В гл. 29 изложены причины, позволяющие предположить, что сохранение барионного числа  $B$  является следствием правила суперотбора, возникающего благодаря инвариантности системы при обращении времени.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Иордан и Вигнер [1] ввели операторы рождения и уничтожения для фермионов.

Дирак [2] указал на возможность взаимной замены понятий заполненных и незаполненных фермионных состояний.

Вейль [3] вывел двухкомпонентное уравнение, которое было использовано Ли и Янгом [4] для описания нейтрино<sup>2)</sup>. Это уравнение было отвергнуто Паули [5] до открытия несохранения четности в слабых взаимодействиях на том основании, что оно нарушает симметрию законов природы при отражении. Паули [6] впервые предположил, что существует некоторая гипотетическая частица, обладающая свойствами нейтрино. Название «нейтрино», по-видимому, ввел Ферми.

Конопинский и Махмуд [7] впервые предположили, что существует закон сохранения лептонного числа (см. также [4]). О втором лептонном числе  $L_\mu$  см., например, работу Хорна [8].

### Литература

1. Jordan P., Wigner E., Zs. Phys., 47, 631 (1928).
2. Dirac P. A. M., Quantum Mechanics, 4th ed., § 65, London and New York, 1958 (см. перевод: Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, М., 1960).
3. Weyl H., Zs. Phys., 56, 330 (1929).

<sup>1)</sup> Это соотношение связывает, конечно, не численные значения массы, а соответствующие операторы (так называемые массовые операторы). — Прим. ред.

<sup>2)</sup> Теория двухкомпонентного нейтрино была независимо предложена также в работах [9\*, 10\*]. — Прим. ред.

4. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **105**, 1671 (1957) (см. перевод в сборнике «Новые свойства симметрии элементарных частиц», ИЛ, 1957).
5. Pauli W., в книге Handbuch der Physik, Bd. XXIV, Berlin, 1933, S. 226 (см. перевод: Паули В., Общие принципы волновой механики, М., 1947).
6. Pauli W., Discussion at the American Physical Society meeting, Pasadena, 1931.
7. Kopirinski E., Mahmoud H. M., Phys. Rev., **92**, 1045 (1953).
8. Hogn D., Phys. Letters, **2**, 303 (1962).
- 9\*. Salam A., Nuovo Cimento, **5**, 209 (1957).
- 10\*. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, **32**, 405 (1957).

## Бозонные состояния

Поскольку на число заполнения бозонного состояния, характеризующегося полным набором квантовых чисел  $\tau$ , не накладывается никаких ограничений, собственные состояния, отвечающие бозонному числу  $n(\tau)$ , образуют бесконечномерное пространство и могут быть представлены в виде ортонормированного набора

$$|0_\tau\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |1_\tau\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad |n_\tau\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}} \right\} n_\tau - 1 \text{ компонент } 0. \quad (18.1)$$

В таком пространстве оператор, отвечающий наблюдаемому числу бозонов  $n(\tau)$ , является диагональной матрицей и имеет вид

$$n(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 2 & \\ \vdots & & & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}_\tau. \quad (18.2)$$

Соответствующие операторы, описывающие уничтожение и рождение бозона в квантовом состоянии  $\tau$ , имеют вид

$$b(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}_\tau, \quad b^+(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \vdots & & & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots \end{pmatrix}_\tau. \quad (18.3)$$

Они обладают свойством

$$b(\tau)|n_\tau\rangle = \sqrt{n_\tau}|n_\tau - 1\rangle, \quad b^+(\tau)|n_\tau\rangle = \sqrt{n_\tau + 1}|n_\tau + 1\rangle. \quad (18.4)$$

Нормировка, вытекающая из соотношений (18.4), означает, что любое состояние с  $n_{\tau} < 0$  тождественно равно нулю и что оператор  $n(\tau)$  связан с операторами  $b(\tau)$  и  $b^+(\tau)$  следующими соотношениями, аналогичными (17.9):

$$b^+(\tau)b(\tau) = n(\tau), \quad b(\tau)b^+(\tau) = I(\tau) + n(\tau). \quad (18.5)$$

Вычитая одно из этих соотношений из другого, получаем коммутационное соотношение

$$b(\tau)b^+(\tau) - b^+(\tau)b(\tau) = I(\tau). \quad (18.6)$$

Такое рассмотрение может быть теперь обобщено на все квантовые состояния  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m, \dots$ , доступные для бозонов. Состояние, отвечающее заполнению всей бозонной системы, определяется в пространстве, представляющем собой прямое произведение подпространств, отвечающих заполнению отдельных квантовых состояний:

$$|n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, \dots, n_{\tau_m}, \dots\rangle = |n_{\tau_1}\rangle \times |n_{\tau_2}\rangle \times \dots \times |n_{\tau_m}\rangle \times \dots \quad (18.7)$$

Нетрудно построить операторы рождения  $b^+(\tau_m)$ , которые переводят бозон из произвольного состояния в определенное квантовое состояние  $\tau_m$ <sup>1)</sup>:

$$b^+(\tau_m) | \dots, n_{\tau_m}, \dots \rangle = \sqrt{n_{\tau_m} + 1} | \dots, n_{\tau_m} + 1, \dots \rangle. \quad (18.8)$$

Аналогично строятся операторы уничтожения  $b(\tau_m)$ , обладающие свойством

$$b(\tau_m) | \dots, n_{\tau_m}, \dots \rangle = \sqrt{n_{\tau_m}} | \dots, n_{\tau_m} - 1, \dots \rangle. \quad (18.9)$$

Эти операторы легко могут быть представлены в следующем виде:

$$b(\tau_m) = \prod_{n=1}^{m-1} I(\tau_n) \times \left[ \begin{array}{cccc} 0 & \sqrt{1} & & \\ & \sqrt{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{array} \right]_{\tau_m} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} I(\tau_n), \quad (18.10)$$

$$b^+(\tau_m) = \prod_{n=1}^{m-1} I(\tau_n) \times \left[ \begin{array}{cccc} 0 & & & \\ \sqrt{1} & & & \\ & \sqrt{2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{array} \right]_{\tau_m} \times \prod_{n=m+1}^{\infty} I(\tau_n); \quad (18.11)$$

<sup>1)</sup> Оператор рождения просто рождает бозон в данном квантовом состоянии. — Прим. ред.

они удовлетворяют, как легко проверить, следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [b(\tau_m) b(\tau_{m'})] &= [b^+(\tau_m) b^+(\tau_{m'})] = 0, \\ [b(\tau_m) b^+(\tau_{m'})] &= I(\tau_m) \delta_{mm'}, \end{aligned} \quad (18.12)$$

где  $[ab] = ab - ba$ . Соотношения (18.12) содержат в себе соотношение (18.6) как частный случай.

Простейшим примером бозона является фотон, который, подобно нейтрину и антинейтрину, не обладает массой и не имеет никаких иных внутренних динамических характеристик, за исключением импульса  $\mathbf{x}$  и абстрактной дихотомической переменной поляризации  $S_3$ , которая равна  $S_3 = +1$  для правой и  $S_3 = -1$  для левой круговой поляризации в направлении  $\mathbf{x}$ . Однако фотон существенным образом отличается от этих фермионов, поскольку он описывается функциями  $|j, m\rangle$ , отвечающими моменту количества движения  $j$ , который принимает только целочисленные значения. Не существует никакого различия между фотоном и соответствующей ему античастицей; фотоны наблюдаются со всевозможными линейными комбинациями правой и левой круговой поляризации.

Экспериментально импульс  $\mathbf{x}$  и переменная поляризации  $S_3$  фотона являются совместимыми наблюдаемыми величинами. Поэтому существует представление, в котором фотон с правой круговой поляризацией возникает при применении к вакууму оператора  $b^+(\mathbf{x}, R)$

$$|1_{\mathbf{x}, R}\rangle = b^+(\mathbf{x}, R)|0\rangle = |\mathbf{x}, R\rangle \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad (18.13)$$

а фотон с левой круговой поляризацией возникает при применении к вакууму оператора  $b^+(\mathbf{x}, L)$

$$|1_{\mathbf{x}, L}\rangle = b^+(\mathbf{x}, L)|0\rangle = |\mathbf{x}, L\rangle \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}. \quad (18.14)$$

Здесь  $|\mathbf{x}, R\rangle$  и  $|\mathbf{x}, L\rangle$  — собственные функции импульса  $\mathbf{P}$  и переменной поляризации  $S_3$ , которые могут быть записаны в виде

$$|\mathbf{x}, R\rangle = |\mathbf{x}, +1\rangle \times |R\rangle, \quad |\mathbf{x}, L\rangle = |\mathbf{x}, -1\rangle \times |L\rangle, \quad (18.15)$$

где  $|R\rangle$  и  $|L\rangle$  — двумерные собственные функции дихотомической переменной поляризации  $S_3$ , которые в соответствии с общими положениями, изложенными в гл. 1 и 2, могут быть записаны в виде

$$|R\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |L\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (18.16)$$

а  $|\kappa, \pm 1\rangle$  — собственные функции оператора импульса  $\mathbf{P}$ , удовлетворяющие уравнению

$$\mathbf{P}|\kappa, \pm 1\rangle = \kappa|\kappa, \pm 1\rangle. \quad (18.17)$$

Поскольку фотон не имеет массы, его энергия  $\omega$ , как и в случае фермионов с нулевой массой, равна

$$\omega = |\kappa|, \quad (18.18)$$

а поскольку его спин  $j=1$  направлен параллельно  $\kappa$  при  $S_3 = +1$  и антипараллельно  $\kappa$  при  $S_3 = -1$ , векторы  $|\kappa, \pm 1\rangle$  должны быть собственными функциями гамильтонианов

$$H_+ = +(\mathbf{J}\mathbf{P}) \quad \text{при } S_3 = 1, \quad \text{т. е. } (\mathbf{J}\mathbf{P})|\kappa, +1\rangle = |\kappa||\kappa, +1\rangle, \quad (18.19)$$

$$H_- = -(\mathbf{J}\mathbf{P}) \quad \text{при } S_3 = -1, \quad \text{т. е. } -(\mathbf{J}\mathbf{P})|\kappa, -1\rangle = |\kappa||\kappa, -1\rangle. \quad (18.20)$$

Здесь  $\mathbf{J}$  — оператор момента количества движения; его компоненты для  $j=1$  равны (см. Приложение 1)

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (18.21)$$

Поэтому в пространстве собственных функций переменной поляризации  $S_3$  (18.16) гамильтониан можно записать в виде

$$H = \begin{pmatrix} (\mathbf{J}\mathbf{P}) & 0 \\ 0 & -(\mathbf{J}\mathbf{P}) \end{pmatrix} = S_3 \times (\mathbf{J}\mathbf{P}). \quad (18.22)$$

Будучи примененным к общему фотонному состоянию с импульсом  $\kappa$ , которое является линейной комбинацией

$$|\kappa, S\rangle = \alpha(S)|\kappa, R\rangle + \beta(S)|\kappa, L\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \quad (18.23)$$

гамильтониан (18.22) всегда имеет собственные значения (18.18)

$$H|\kappa, S\rangle = \omega|\kappa, S\rangle. \quad (18.24)$$

Здесь принимается, что энергия  $\omega$  может быть только положительным числом.

Собственное состояние оператора импульса  $\mathbf{P}$  в соответствии с общими положениями, изложенными в гл. 14, никогда не является состоянием с определенной четностью. Интуитивно ясно, что операция инверсии координат  $\Pi$  превращает фотон с импульсом  $\mathbf{x}$  и поляризацией  $\mathbf{S}_3$  в фотон с импульсом  $-\mathbf{x}$  и поляризацией  $-\mathbf{S}_3$ , так как отражение в зеркале винта с правой нарезкой дает винт с левой нарезкой, и наоборот. В пространстве функций (18.16) оператор инверсии имеет вид

$$\Pi_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18.25)$$

Поэтому при применении оператора инверсии функции  $|R\rangle$  и  $|L\rangle$  преобразуются друг в друга, а переменная поляризации  $\mathbf{S}_3$  является нечетной при преобразовании инверсии

$$\Pi_S |R\rangle = |L\rangle, \quad \Pi_S |L\rangle = |R\rangle, \quad \Pi_S \mathbf{S}_3 + \mathbf{S}_3 \Pi_S = 0. \quad (18.26)$$

В полном пространстве функций (18.15) существует представление

$$\Pi = \Pi_D \times \Pi_S = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_D \\ \Pi_D & 0 \end{pmatrix}, \quad (18.27)$$

где  $\Pi_D$  действует на динамические переменные в соответствии с общим правилом

$$\Pi_D \Pi_D^{-1} = \mathbf{J}, \quad \Pi_D \mathbf{P} \Pi_D^{-1} = -\mathbf{P}. \quad (18.28)$$

Применение оператора  $\Pi$  оставляет гамильтониан (18.22) инвариантным:

$$\Pi H - H \Pi = \begin{pmatrix} 0 & -[\Pi_D(JP) + (JP)\Pi_D] \\ [\Pi_D(JP) + (JP)\Pi_D] & 0 \end{pmatrix} = 0, \quad (18.29)$$

что и требуется при преобразовании инверсии фотона.

С другой стороны, оператор, отвечающий изменению направления движения частицы на противоположное, превращает фотон с импульсом  $\mathbf{x}$  и поляризацией  $\mathbf{S}_3$  в фотон с импульсом  $-\mathbf{x}$  и поляризацией  $\mathbf{S}_3$ , так как спиральность остается неизменной, если  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{J}$  преобразуются при действии оператора  $\Theta_D$  следующим образом:

$$\Theta_D \mathbf{J} \Theta_D^{-1} = -\mathbf{J}, \quad \Theta_D \mathbf{P} \Theta_D^{-1} = -\mathbf{P}. \quad (18.30)$$

В поляризационном пространстве оператор  $\Theta$  может быть поэтому представлен в виде

$$\Theta_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (18.31)$$



так что

$$\Theta = \Theta_D \times \Theta_S = \begin{pmatrix} \Theta_D & 0 \\ 0 & \Theta_D \end{pmatrix}, \quad \Theta_D = TK, \quad (18.32)$$

где оператор  $T$  в спиновом пространстве, образованном компонентами (18.21) оператора  $J$ , в соответствии с выражением (15.29) имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18.33)$$

Очевидно, гамильтониан (18.22) остается инвариантным при действии оператора  $\Theta$ , поэтому имеет место симметрия фотона относительно изменения направления движения на противоположное. Вопрос о трансформационных свойствах фотонных состояний при зарядовом сопряжении частиц может быть решен только вместе с вопросом о трансформационных свойствах фермионов, взаимодействующих с электромагнитным полем. Это сделано в гл. 28. Для целей настоящей главы достаточно отметить, что оператор зарядового сопряжения частиц  $\Gamma$ , дважды примененный к фотонному состоянию, должен дать то же самое состояние, т. е. должно соблюдаться условие  $\Gamma^2 = I$ . Поскольку для фотона также  $\Theta^2 = +I$ , он описывается функциями «типа»  $|b_{++}\rangle$  в том смысле, как это объяснено в конце гл. 15; таким образом, не существует правил суперотбора для рождения и уничтожения фотонов.

Решение уравнения (18.24) наиболее удобно провести в импульсном представлении. Запишем шестикомпонентный вектор состояния в комбинированном спин-поляризационном пространстве в виде

$$|\kappa, S\rangle = \begin{pmatrix} \alpha(S) \chi^R(\kappa) \\ \beta(S) \chi^L(\kappa) \end{pmatrix}; \quad (18.34)$$

при этом трехкомпонентные векторы

$$\chi^R = \begin{pmatrix} \chi_1^R \\ \chi_2^R \\ \chi_3^R \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \chi^L = \begin{pmatrix} \chi_1^L \\ \chi_2^L \\ \chi_3^L \end{pmatrix}$$

будут подчиняться условиям нормировки

$$\chi^{R*} \chi^R = 1, \quad \chi^{L*} \chi^L = 1, \quad \text{так что} \quad \langle \kappa, S | \kappa, S \rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (18.35)$$

Поскольку функции  $\chi^R$  и  $\chi^L$  являются собственными функциями оператора  $S_3$ , отвечающими различным собственным значениям, они должны удовлетворять условию ортогональности

$$\langle \kappa, R | \kappa, L \rangle = \chi^{R*} \chi^L = \chi^{L*} \chi^R = \langle \kappa, L | \kappa, R \rangle = 0. \quad (18.36)$$

Уравнение (18.24), записанное в компонентах, с учетом (18.21) и (18.22) при  $\mathbf{P} = \kappa$  имеет вид

$$\begin{aligned} \kappa_3 \chi_1^R + \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 - i\kappa_2) \chi_2^R &= \omega \chi_1^R, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 + i\kappa_2) \chi_1^R + \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 - i\kappa_2) \chi_3^R &= \omega \chi_2^R, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 + i\kappa_2) \chi_2^R - \kappa_3 \chi_3^R &= \omega \chi_3^R. \end{aligned} \quad (18.37)$$

Для функций  $\chi_1^L$ ,  $\chi_2^L$ ,  $\chi_3^L$  получаются аналогичные уравнения, но с изменением знаков перед всеми членами в левых частях. Для существования нетривиальных решений такой системы уравнений необходимо, чтобы детерминант, составленный из коэффициентов, был равен нулю:

$$\begin{vmatrix} \pm \kappa_3 - \omega & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 - i\kappa_2) & 0 \\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 + i\kappa_2) & -\omega & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 - i\kappa_2) \\ 0 & \pm \frac{1}{\sqrt{2}} (\kappa_1 + i\kappa_2) & \mp \kappa_3 - \omega \end{vmatrix} = 0. \quad (18.38)$$

Это требование, очевидно, выполняется при любых значениях  $\omega \neq 0$  ввиду справедливости соотношения (18.18). Легко найти решения

$$\begin{aligned} \chi_1^R &= -i \frac{\kappa_1 - i\kappa_2}{2\omega} \sqrt{\frac{\omega + \kappa_3}{\omega - \kappa_3}}, & \chi_2^R &= -i \sqrt{\frac{\omega^2 - \kappa_3^2}{2\omega^2}}, \\ \chi_3^R &= -i \frac{\kappa_1 + i\kappa_2}{2\omega} \sqrt{\frac{\omega - \kappa_3}{\omega + \kappa_3}}, \end{aligned} \quad (18.39a)$$

$$\begin{aligned} \chi_1^L &= -i \frac{\kappa_1 - i\kappa_2}{2\omega} \sqrt{\frac{\omega - \kappa_3}{\omega + \kappa_3}}, & \chi_2^L &= i \sqrt{\frac{\omega^2 - \kappa_3^2}{2\omega^2}}, \\ \chi_3^L &= -i \frac{\kappa_1 + i\kappa_2}{2\omega} \sqrt{\frac{\omega + \kappa_3}{\omega - \kappa_3}}. \end{aligned} \quad (18.39b)$$

Вводя полярные координаты  $\theta$ ,  $\varphi$ , характеризующие направление  $\kappa$  ( $\kappa_1 = \omega \sin \theta \cos \varphi$ ,  $\kappa_2 = \omega \sin \theta \sin \varphi$ ,  $\kappa_3 = \omega \cos \theta$ ), нахо-

дим, что функция  $\chi^R$  отвечает спиновому состоянию

$$\chi^R = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} (1 + \cos \theta) e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2} \sin \theta \\ (1 - \cos \theta) e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (18.40)$$

и описывает спин  $j=1$ , направленный параллельно  $\mathbf{x}$ , а  $\chi^L$  отвечает спиновому состоянию

$$\chi^L = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} -(1 - \cos \theta) e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2} \sin \theta \\ -(1 + \cos \theta) e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (18.41)$$

и описывает спин  $j=1$ , направленный антипараллельно  $\mathbf{x}$ . Путем непосредственного вычисления можно определить, что эти функции являются собственными функциями оператора

$$\begin{aligned} J_{\theta, \varphi} &= J_1 \sin \theta \cos \varphi + J_2 \sin \theta \sin \varphi + J_3 \cos \theta = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\varphi} & 0 \\ \sin \theta e^{i\varphi} & 0 & \sin \theta e^{-i\varphi} \\ 0 & \sin \theta e^{i\varphi} & -\sqrt{2} \cos \theta \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (18.42)$$

соответствующими собственным значениям  $+1$  и  $-1$ . Оператор  $J_{\theta, \varphi}$  имеет другую нормированную собственную функцию

$$\chi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sin \theta e^{-i\varphi} \\ \sqrt{2} \cos \theta \\ \sin \theta e^{+i\varphi} \end{pmatrix}, \quad (18.43)$$

соответствующую собственному значению  $0$ . Хотя такая функция не отвечает спиновому состоянию реального фотона, поскольку при этом требуется существование состояний с продольной поляризацией  $|\mathbf{x}, 0\rangle$ , она может быть использована для записи условия поперечности реального фотона в компактной форме:

$$\chi^{0*} \chi^R = 0, \quad \chi^{0*} \chi^L = 0, \quad \text{так что } \langle \mathbf{x}, 0 | \mathbf{x}, S \rangle = 0. \quad (18.44)$$

Изменение поляризации  $S$  фотонного состояния с данным импульсом  $\mathbf{x}$  означает изменение амплитуд  $\alpha(S)$  и  $\beta(S)$ , определяемых выражением (18.23). Такое изменение поляризации можно описать в абстрактном виде как вращение в поляризационном пространстве, образованном собственными векторами оператора  $S_3$ . Генераторами таких вращений при данном  $\mathbf{x}$

являются операторы

$$\begin{aligned} S_1 &= b^+(R)b(L) + b^+(L)b(R), \\ S_2 &= -ib^+(R)b(L) + ib^+(L)b(R), \\ S_3 &= b^+(R)b(R) - b^+(L)b(L) = n(R) - n(L), \\ S_0 &= b^+(R)b(R) + b^+(L)b(L) = n(R) + n(L), \end{aligned} \quad (18.45)$$

которые с учетом коммутационных соотношений (18.12) для операторов  $b^+$  и  $b$  удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [S_1 S_2] &= 2iS_3, \quad [S_2 S_3] = 2iS_1, \quad [S_3 S_1] = 2iS_2, \\ [S_k S_0] &= 0 \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (18.46)$$

а также условию

$$S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = S_0(S_0 + 2). \quad (18.47)$$

Таким образом, согласно выражению (2.46), операторы (18.45) изоморфны матрицам Паули (2.43). В поляризованном пространстве они могут быть представлены в виде

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (18.48)$$

Это объясняет, между прочим, почему для оператора поляризации используется обозначение  $S_3$ .

Приведенное выше описание легко обобщить на случай состояний, которые содержат  $n_{\kappa, S}$  фотонов, каждый с импульсом  $\kappa$  и поляризацией  $S$ . Наиболее общий вид  $\psi$ -функции фотона  $|\dots n_{\kappa, S} \dots\rangle$  отвечает общим собственным состояниям гамильтониана

$$H = \sum_{\kappa} \sum_S H(\kappa, S) b^+(\kappa, S) b(\kappa, S) \quad (18.49)$$

и оператора поляризации

$$S_3 = \sum_{\kappa} S_3(\kappa) = \sum_{\kappa} [b^+(\kappa, R)b(\kappa, R) - b^+(\kappa, L)b(\kappa, L)] \quad (18.50)$$

с собственными значениями

$$W = \sum_{\kappa} \sum_S \omega n_{\kappa, S} \quad (18.51)$$

и

$$S_3 = \sum_{\kappa} (n_{\kappa, R} - n_{\kappa, L}). \quad (18.52)$$

Так как операторы поляризации (18.48) изоморфны операторам, отвечающим моменту количества движения  $j = 1/2$ , то в поляризованном пространстве многофотонные состояния можно получить из однофотонных, если учесть правила сложения моментов количества движения, приведенные в Приложении 2. Частные примеры рассмотрены в гл. 27 и 28.

Вместо квантовых чисел  $\kappa$  и  $S_3$ , использованных выше для описания отдельного фотона, можно использовать квантовые числа  $\omega$ ,  $j$ ,  $m$ ,  $P$  (энергия, момент количества движения, четность). Такой формализм, хотя он и широко используется, является менее наглядным; поэтому он излагается в Приложении 3.

На этом этапе соответствие квантовомеханического описания фотонов классическому описанию, в основе которого лежат поперечные электромагнитные поля  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ , получаемые путем дифференцирования векторного потенциала  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = [\nabla \mathbf{A}], \quad (18.53)$$

может быть установлено непосредственным способом, если условиться, что энергия  $W$  соответствует интегралу

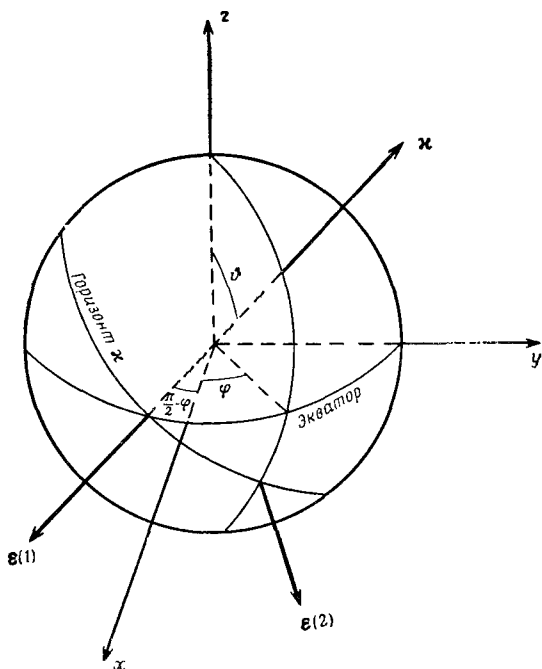
$$W = \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d\mathbf{q} \quad (18.54)$$

в том смысле, что среднее значение  $H$  в данном состоянии должно быть численно равно значению  $W$ , рассчитанному на основе использования классических полей, описывающих ту же самую физическую ситуацию.

Это соответствие было прослежено создателями квантовой электродинамики в противоположном направлении. Они искали подходящие выражения, которые могли бы рассматриваться как операторы, соответствующие классическим электродинамическим полям. При этом оказалось, что поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , очень полезные для описания макроскопических явлений, включающих усреднение по многим фотонам, совершенно непригодны для описания элементарных процессов, в которых участвуют отдельные фотоны. Цель последующего рассмотрения состоит не в том, чтобы использовать указанное выше соответствие с классической электродинамикой. Теория фотонов, излагаемая в этой главе, может опираться на свою собственную феноменологическую основу. Цель скорее состоит в том, чтобы сделать явным глубокое отличие между классическими полями и квантовомеханическими операторами, которые должны использоваться вместо них.

Поляризацию поперечного поля, распространяющегося в направлении  $\kappa$ , удобно описать путем введения двух действительных

ортогональных единичных векторов  $\varepsilon(1)$  и  $\varepsilon(2)$ , направленных по линиям пересечения плоскости горизонта вектора  $\mathbf{k}$  с экваториальной плоскостью ( $x, y$ ) и с плоскостью ( $z, \mathbf{k}$ ) соответственно, как показано на фиг. 22.



Фиг. 22. Векторы поляризации  $\varepsilon(1)$  и  $\varepsilon(2)$  характеризующие поперечные поля, распространяющиеся в направлении  $\mathbf{k}$ .

Поскольку при всевозможных переориентациях вектора  $\mathbf{k}$  с сохранением заданного угла  $\varphi$  линия пересечения горизонта с экватором остается неизменной, компоненты этих векторов равны

$$\varepsilon_1(1) = \sin \varphi, \quad \varepsilon_2(1) = -\cos \varphi, \quad \varepsilon_3(1) = 0, \quad (18.55)$$

$$\varepsilon_1(2) = \cos \theta \cos \varphi, \quad \varepsilon_2(2) = \cos \theta \sin \varphi, \quad \varepsilon_3(2) = -\sin \theta, \quad (18.56)$$

где  $\theta$  и  $\varphi$  — полярные углы, описывающие направление вектора распространения в соответствии с соотношениями

$$n_1 = \frac{\kappa_1}{\omega} = \sin \theta \cos \varphi, \quad n_2 = \frac{\kappa_2}{\omega} = \sin \theta \sin \varphi, \quad n_3 = \frac{\kappa_3}{\omega} = \cos \theta. \quad (18.57)$$

Если рассматривать только круговую поляризацию, то можно ввести также комплексные ортогональные единичные векторы

$$\varepsilon(R) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varepsilon(1) + i\varepsilon(2)], \quad (18.58)$$

$$\varepsilon(L) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varepsilon(1) - i\varepsilon(2)] = \varepsilon^*(R), \quad (18.59)$$

удовлетворяющие соотношениям ортонормированности

$$\varepsilon^*(R) \varepsilon(R) = \varepsilon^*(L) \varepsilon(L) = 1 \quad (18.60)$$

и

$$\varepsilon^*(R) \varepsilon(L) = \varepsilon^*(L) \varepsilon(R) = 0 \quad (18.61)$$

и условиям поперечности

$$n\varepsilon(R) = 0, \quad n\varepsilon(L) = 0. \quad (18.62)$$

Соотношения (18.60)–(18.62) формально являются следствием соотношений ортонормированности (18.35), (18.36) и условия поперечности (18.44). Поэтому можно отождествить компоненты комплексных векторов состояния  $\chi^R$ ,  $\chi^L$  и  $\chi^0$  с соответствующим образом выбранными линейными комбинациями векторов  $\varepsilon(R)$ ,  $\varepsilon(L)$  и  $n$  соответственно. Подставляя (18.55)–(18.57) в выражения (18.40), (18.41) и (18.43), легко получаем

$$\begin{aligned} \chi^R &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\varepsilon_1(R) + i\varepsilon_2(R) \\ \sqrt{2} \varepsilon_3(R) \\ \varepsilon_1(R) + i\varepsilon_2(R) \end{pmatrix}, \\ \chi^L &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\varepsilon_1(L) + i\varepsilon_2(L) \\ \sqrt{2} \varepsilon_3(L) \\ \varepsilon_1(L) + i\varepsilon_2(L) \end{pmatrix}, \\ \chi^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -n_1 + in_2 \\ \sqrt{2} n_3 \\ n_1 + in_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (18.63)$$

Это соответствие между спиновыми состояниями и векторами поляризации можно сделать более очевидным, если произвести в спиновом пространстве унитарное преобразование

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad U^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & i & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad (18.64)$$

которое ведет вместо (18.21) к представлению

$$s_1 = UJ_1U^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad s_2 = UJ_2U^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$s_3 = UJ_3U^+ = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (18.65)$$

и к перестановке компонент спиновых состояний, так что

$$\eta^R = U\chi^R = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(R) \\ \varepsilon_2(R) \\ \varepsilon_3(R) \end{pmatrix} = \varepsilon(R),$$

$$\eta^L = U\chi^L = \varepsilon(L), \quad \eta^0 = U\chi^0 = \mathbf{n}. \quad (18.66)$$

Соотношения ортонормированности

$$\eta^{R*}\eta^R = \eta^{L*}\eta^L = 1, \quad \eta^{R*}\eta^L = \eta^{R*}\eta^L = 0, \quad \eta^{0*}\eta^R = \eta^{0*}\eta^L = 0 \quad (18.67)$$

теперь совпадают с соотношениями (18.60) — (18.62).

Собственные состояния оператора  $s_3$

$$\xi^1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \xi^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (18.68)$$

можно рассматривать как систему трех ортонормированных векторов, которые можно использовать для разложения любого произвольного вектора  $\mathbf{f}$ . В частности, такое разложение полезно, когда хотят использовать представление момента количества движения, приводящее к описанию фотонных состояний с помощью так называемых векторных сферических гармоник, сведения о которых излагаются в Приложении 3.

Для описания вектора состояния (18.34) в координатном представлении требуется шестикомпонентная  $\psi$ -функция

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \alpha(S)\psi^R(x) \\ \beta(S)\psi^L(x) \end{pmatrix}, \quad x = (\mathbf{q}, t), \quad (18.69)$$

где  $\psi^R(x)$  и  $\psi^L(x)$  — трехкомпонентные  $\psi$ -функции, удовлетворяющие уравнениям Шредингера, которые получаются из (18.19) и (18.20), если подставить в них выражения  $\mathbf{P} = -i\nabla$  и  $H = i\partial/\partial t$ ,



и которые в спиновом представлении (18.65) имеют вид

$$-is\nabla\psi^R = i\frac{\partial}{\partial t}\psi^R, \quad is\nabla\psi^L = i\frac{\partial}{\partial t}\psi^L. \quad (18.70)$$

Записав функции  $\psi^R$  и  $\psi^L$  в виде векторов  $\boldsymbol{\psi}^R$  и  $\boldsymbol{\psi}^L$ , каждый из которых имеет три компоненты  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ , мы можем переписать эти уравнения в векторных обозначениях

$$[\nabla\boldsymbol{\psi}^R] = i\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^R}{\partial t}, \quad [-\nabla\boldsymbol{\psi}^L] = i\frac{\partial\boldsymbol{\psi}^L}{\partial t} \quad (18.71)$$

и решить с учетом условия поперечности

$$(\nabla\boldsymbol{\psi}^R) = (\nabla\boldsymbol{\psi}^L) = 0. \quad (18.72)$$

Формальное сходство этих уравнений с уравнениями Максвелла для вакуума для комплексных векторов поля  $\mathbf{E} + i\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E} - i\mathbf{B}$  подтверждается введением эрмитовых операторов

$$\mathbf{E}(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{x}} \sum_S \sqrt{\frac{\omega}{2}} [\varepsilon(S)b(\mathbf{x}, S)e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} - \varepsilon^*(S)b^+(\mathbf{x}, S)e^{+i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}], \quad (18.73)$$

$$[\nabla\mathbf{B}(x)] = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{x}} \sum_S \omega \sqrt{\frac{\omega}{2}} \times \\ \times [\varepsilon(S)b(\mathbf{x}, S)e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} + \varepsilon^*(S)b^+(\mathbf{x}, S)e^{+i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}], \quad (18.74)$$

где  $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \omega t - \mathbf{x}\mathbf{q}$ , а  $V$  — нормировочный объем. Эти операторы могут быть определены с помощью дифференцирования оператора векторного потенциала в соответствии с правилом (18.53):

$$\mathbf{A}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{x}} \sum_S \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\varepsilon(S)b(\mathbf{x}, S)e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} + \varepsilon^*(S)b^+(\mathbf{x}, S)e^{+i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}}]. \quad (18.75)$$

Произведя это дифференцирование, получим следующие разложения:

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{x}} \sum_S \sqrt{\omega} e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} \varepsilon(S)b(\mathbf{x}, S) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ -i\mathbf{E} + \frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}} [\nabla\mathbf{B}] \right], \quad (18.76)$$

$$\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{x}} \sum_S \sqrt{\omega} e^{+i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}} \varepsilon^*(S)b^+(\mathbf{x}, S) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ i\mathbf{E} + \frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}} [\nabla\mathbf{B}] \right], \quad (18.77)$$

где  $1/\sqrt{-\nabla^2}$  — оператор, определяемый соотношением

$$\frac{1}{\sqrt{-\nabla^2}} e^{\pm i\mathbf{x}\cdot\mathbf{q}} = \frac{e^{\pm i\mathbf{x}\cdot\mathbf{q}}}{|\mathbf{x}|} = \frac{e^{\pm i\mathbf{x}\cdot\mathbf{q}}}{\omega}. \quad (18.78)$$

Умножая (18.76) на (18.77) слева, интегрируя по  $d\mathbf{q}$  и используя условие нормировки, получаем

$$\sum_{\kappa} \sum_S \omega b^+(\kappa, S) b(\kappa, S) = \\ = \frac{1}{2} \int \left\{ \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 + \frac{i}{\sqrt{-\nabla^2}} [\mathbf{E} [\nabla \mathbf{B}] - [\nabla \mathbf{B}] \mathbf{E}] \right\} d\mathbf{q}. \quad (18.79)$$

Если не учитывать операторной природы величин  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , то можно показать, что член, содержащий выражение  $\mathbf{E}[\nabla \mathbf{B}] - [\nabla \mathbf{B}]\mathbf{E}$ , обращается в нуль и устанавливается желаемое соответствие с классическими полями. Однако в квантовой механике эти члены должны обязательно присутствовать, поскольку без них среднее значение интеграла в правой части соотношения (18.79) становится бесконечным для любого фотонного состояния, включая вакуумное. Эта особенность возникает из-за операторной природы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$ , которые содержат операторы рождения и операторы уничтожения. Поэтому операторы  $\mathbf{E}^2$  и  $\mathbf{B}^2$ , характеризующие интенсивность электромагнитных полей, включают члены типа  $b(\kappa, S)b^+(\kappa, S)$ , средние значения которых для вакуума не равны нулю, что приводит к бесконечному значению

$$\left\langle 0 \left| \frac{1}{2} \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d\mathbf{q} \right| 0 \right\rangle = \frac{1}{2} \sum_{\kappa} \omega. \quad (18.80)$$

Введение члена  $\int (i/2 \sqrt{-\nabla^2})(\mathbf{E} [\nabla \mathbf{B}] - [\nabla \mathbf{B}] \mathbf{E}) d\mathbf{q}$  необходимо, поскольку, как показывает простой расчет, он в точности компенсирует эту так называемую нулевую энергию. Этот вопрос мы не будем здесь рассматривать более подробно. Заметим лишь, что понятие нулевой энергии не появляется в теории фотонов, если придерживаться описания, в котором оператор энергии имеет вид  $\sum_{\kappa} \sum_S \omega b^+ b$ , так как среднее значение этого оператора для вакуума, очевидно, равно нулю и остается конечным для любого состояния с конечным числом фотонов.

Столь же радикально различие между классическим и квантовомеханическим описаниями эффектов электромагнитной поляризации. Если взять в качестве примера наиболее общий случай эллиптической поляризации, то в классической электродинамике можно одновременно задать величины всех трех параметров, определяющих поляризацию. В качестве таких параметров можно выбрать величины  $e_1$ ,  $e_2$  и  $\gamma$ , так что в любой момент времени вектор электрического поля в плоскости  $\{\mathbf{e}(1), \mathbf{e}(2)\}$  будет иметь компоненты

$$E_1 = e_1 \cos(\omega t), \quad E_2 = e_2 \cos(\omega t + \gamma). \quad (18.81)$$

Конец вектора  $\mathbf{E}$  описывает в этой плоскости эллипс, называемый эллипсом поляризации.

В квантовой механике о средних значениях операторов (18.73), соответствующих этим компонентам поля, ничего столь же определенного сказать нельзя, поскольку диагональные элементы операторов  $b$  и  $b^+$  равны нулю и, следовательно, средние значения самих операторов поля также обращаются в нуль во всех состояниях с определенным числом фотонов. С операционалистской точки зрения это обстоятельство является весьма положительной чертой квантовомеханического формализма, так как в принципе нельзя сказать ничего определенного об измерении электромагнитных полей, не включив в рассмотрение прибор, взаимодействующий с полем. При этом взаимодействии происходит излучение и поглощение фотонов, так что число их является переменным. Однако можно представить себе измерение интенсивности поля, т. е. квадратичной функции от напряженностей, в стационарных ситуациях, когда полное число фотонов не меняется. Поэтому параметры  $e_1$ ,  $e_2$ ,  $\gamma$  должны быть поставлены в соответствие операторам, которые были бы по крайней мере билинейными комбинациями операторов рождения и уничтожения. Операторы  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ , введенные выше выражениями (18.45), удовлетворяют как раз такому требованию, и их средние значения можно использовать для описания поляризации даже в случае не полностью поляризованных пучков.

Поскольку поляризация фотона является дихотомической переменной, приводя тем самым к изоморфизму абстрактных операторов поляризации (18.45) с матрицами Паули, то можно воспользоваться выводом, приведенным в гл. 4, и описать поляризацию фотонного пучка с помощью матрицы плотности

$$M = \frac{1}{2} (I + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{S}), \quad (18.82)$$

где  $|\bar{\mathbf{P}}|$  — степень поляризации пучка фотонов.

В частности, вся информация о поляризации однофотонного состояния (18.23), которое является состоянием с определенной поляризацией, так что  $|\bar{\mathbf{P}}| = 1$ , содержится в матрице плотности

$$M(S) = \begin{pmatrix} \alpha(S)\alpha^*(S) & \alpha(S)\beta^*(S) \\ \alpha^*(S)\beta(S) & \beta(S)\beta^*(S) \end{pmatrix}, \quad (18.83)$$

где на числа  $\alpha(S)$  и  $\beta(S)$  накладывается условие нормировки  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = \text{Sp}M(S) = 1$ , причем эти числа определены с точностью до произвольного общего фазового множителя. Используя представление операторов  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_0$  в пространстве

поляризации (18.60), можно получить следующие выражения для их средних значений:

$$\begin{aligned}\bar{S}_1 &= \text{Sp} [S_1 M(S)] = \alpha^* \beta + \alpha \beta^*, \\ \bar{S}_2 &= -i(\alpha^* \beta - \alpha \beta^*), \\ \bar{S}_3 &= \alpha \alpha^* - \beta \beta^*, \\ \bar{S}_0 &= \alpha \alpha^* + \beta \beta^*.\end{aligned}\tag{18.84}$$

Эти величины теперь можно приравнять классическим параметрам Стокса

$$S_1 = \frac{1}{2} e_1 e_2 \cos \gamma, \quad S_2 = \frac{1}{2} e_1 e_2 \sin \gamma, \quad S_3 = \frac{1}{4} (e_1^2 - e_2^2),\tag{18.85}$$

которые являются квадратичными функциями амплитуд поля  $e_1, e_2$  и, таким образом, устанавливают связь между величинами  $e_1, e_2, \gamma$  и  $\psi$ -функциями  $\alpha$  и  $\beta$  в пространстве поляризаций.

До сих пор мы ограничивались рассмотрением поперечных фотонов, которые можно описать с помощью трехкомпонентного векторного потенциала  $\mathbf{A}(\mathbf{q})$ . Такое рассмотрение с эстетической точки зрения имеет тот недостаток, что не очевидна его ковариантность по отношению к преобразованиям Лоренца. Но уже небольшое размышление показывает, что этот дефект не слишком серьезен, поскольку электромагнитные потенциалы обладают свойством калибровочной инвариантности, которая позволяет формально релятивистские выражения

$$A_\mu^{\text{tr}}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_x \sum_{S=1}^2 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\varepsilon_\mu(S) b(x, S) e^{-ixx} + \varepsilon_\mu^*(S) b^+(x, S) e^{+ixx}]$$

$$(\mu = 1, 2, 3, 4)\tag{18.86}$$

привести к виду (18.75) с помощью калибровочного преобразования

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial x_\mu} \right).\tag{18.87}$$

Здесь  $\Lambda$  — некоторая скалярная функция, которая при заданной четвертой компоненте  $\varepsilon_\mu(S)$  выбирается таким образом, чтобы преобразование (18.87) было эквивалентно замене

$$\varepsilon_\mu(S) \rightarrow \varepsilon'_\mu(S) = \varepsilon_\mu(S) - \left[ \frac{\varepsilon_4(S)}{\omega} \right] \kappa_\mu,\tag{18.88}$$

так что

$$\varepsilon'_4(S) = 0 \text{ и } \varepsilon'_\mu \kappa_\mu = -\varepsilon'_\mu \kappa_\mu = 0 = \varepsilon_\mu \kappa_\mu \text{ для } S = 1, 2.\tag{18.89}$$

Равенство нулю массы покоя фотона, т. е. соотношение  $\kappa^2 = \kappa_\mu \kappa_\mu = \omega^2 - \kappa^2 = 0$ , очевидно, является причиной такой инвариантности условия поперечности (18.89).

При наличии источников электромагнитного поля у описания, использующего выражение (18.75), появляется и другой недостаток, гораздо более серьезный, чем только что отмеченный, а именно такое описание становится неполным: одних поперечных фотонов недостаточно, например, для описания кулоновского поля, окружающего электрический заряд. Требуются две дополнительные поляризации, соответствующие «продольным» и «временным» фотонам, чтобы охватить все разнообразие электромагнитных явлений.

Последнее слово в этом вопросе, по-видимому, еще не сказано. Здесь мы дадим лишь краткий обзор общепринятого формального аппарата, разработанного для описания этих экзотических фотонов, которые не существуют как свободные частицы.

Определение оператора (18.86) легко распространить релятивистски ковариантным образом на случай *четырёх* независимых поляризаций, написав просто

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\kappa} \sum_{S=1}^4 \frac{1}{\sqrt{2\omega}} [\varepsilon_\mu(S) b(\kappa, S) e^{-i\kappa x} + \varepsilon_\mu^*(S) b^+(\kappa, S) e^{i\kappa x}], \quad (18.90)$$

где теперь  $\varepsilon_\mu(S)$  — набор *четырёх* ортогональных единичных векторов, удовлетворяющих условию

$$\varepsilon_\mu(S) \varepsilon_\mu^*(S') = \delta_{SS'}. \quad (18.91)$$

Эти векторы можно выбрать разными способами; один из наиболее употребительных наборов (значения  $S=1, 2$  соответствуют, как и раньше, поперечным поляризациям) имеет вид

$$\begin{aligned} \varepsilon(1) \kappa = 0, \quad \varepsilon_4(1) = 0; \quad \varepsilon(2) \kappa = 0, \quad \varepsilon_4(2) = 0; \\ \varepsilon(3) = \frac{\kappa}{\omega}, \quad \varepsilon_4(3) = 0; \quad \varepsilon(4) = 0, \quad \varepsilon_4(4) = 1; \end{aligned} \quad (18.92)$$

$\varepsilon_\mu(3)$  и  $\varepsilon_\mu(4)$  можно называть векторами продольной и временной поляризации соответственно. При таком выборе векторы поляризации формально удовлетворяют условию ковариантности

$$\sum_{S=1}^4 \varepsilon_\mu(S) \varepsilon_\nu^*(S) = \delta_{\mu\nu}. \quad (18.93)$$

Однако система единичных векторов (18.92) не является единственно возможной и не всегда наиболее удобной. Исходя из требования одной только релятивистской ковариантности, вместо

(18.93) достаточно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{S=1}^4 \varepsilon_{\mu}(S) \varepsilon_{\nu}^*(S) = \delta_{\mu\nu} + \kappa_{\mu} \kappa_{\nu} f(\kappa^2), \quad (18.94)$$

где  $f(\kappa^2)$  — произвольная функция. Разные наборы  $\varepsilon_{\mu}(S)$ , соответствующие разным функциям  $f(\kappa^2)$ , эквивалентны различным калибровкам электромагнитных потенциалов, поэтому во всех расчетах удобно сохранять функцию  $f(\kappa^2)$  произвольной, чтобы подчеркнуть калибровочную инвариантность описания.

Чтобы понять это, рассмотрим калибровочное преобразование (18.87), где теперь  $\Lambda(x)$  — линейная по  $A_{\mu}(x)$  скалярная функция наиболее общего вида:

$$\Lambda(x) = -F(-\square) \frac{\partial A_{\nu}}{\partial x_{\nu}}. \quad (18.95)$$

Здесь  $F$  — произвольная функция скалярного оператора  $\square = \partial^2/\partial x_{\mu} \partial x_{\mu}$ ; знаки в (18.95) выбраны исключительно из соображений удобства. Учитывая, что  $A_{\mu}(x)$  дается выражением (18.90), получаем в явном виде

$$\Lambda(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\kappa} \sum_S \frac{F(\kappa^2)}{\sqrt{2\omega}} [\kappa_{\nu} \varepsilon_{\nu}(S) b(\kappa, S) e^{-i\kappa x} - \kappa_{\nu} \varepsilon_{\nu}^*(S) b^+(\kappa, S) e^{i\kappa x}], \quad (18.96)$$

так что

$$A'_{\mu}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\kappa} \sum_S \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \{[\varepsilon_{\mu}(S) + F(\kappa^2) \kappa_{\mu} \kappa_{\nu} \varepsilon_{\nu}(S)] b(\kappa, S) e^{-i\kappa x} + \text{компл. сопр.}\}. \quad (18.97)$$

Таким образом, калибровочное преобразование, соответствующее (18.96), эквивалентно следующему изменению векторов поляризации:

$$\varepsilon_{\mu}(S) \rightarrow \varepsilon'_{\mu}(S) = \varepsilon_{\mu}(S) + F(\kappa^2) \kappa_{\mu} \kappa_{\nu} \varepsilon_{\nu}(S). \quad (18.98)$$

При этом

$$\sum_{S=1}^4 \varepsilon'_{\mu}(S) \varepsilon'_{\nu}{}^*(S) = \delta_{\mu\nu} + \kappa_{\mu} \kappa_{\nu} [2F(\kappa^2) + \kappa^2 F^2(\kappa^2)], \quad (18.99)$$

что совпадает с (18.94), если опустить индексы в левой части и положить

$$f(\kappa^2) = 2F(\kappa^2) + \kappa^2 F^2(\kappa^2). \quad (18.100)$$

Для многих приложений удобнее ввести скалярную функцию  $d_l(\kappa^2)$ , определяемую выражением

$$f(\kappa^2) = \frac{d_l - 1}{\kappa^2}. \quad (18.101)$$

При этом выражение (18.94) разбивается на две части, а именно:

$$\sum_{S=1}^4 \varepsilon_{\mu}(S) \varepsilon_{\nu}^*(S) = \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{\kappa_{\mu}\kappa_{\nu}}{\kappa^2} \right) + d_l \frac{\kappa_{\mu}\kappa_{\nu}}{\kappa^2}. \quad (18.102)$$

Первое слагаемое можно назвать «поперечной частью» в четырехмерном смысле, так как оно удовлетворяет условию

$$\kappa_{\mu} \left( \sum_{S=1}^4 \varepsilon_{\mu}(S) \varepsilon_{\nu}^*(S) \right)^{\text{tr}} = 0. \quad (18.103)$$

Произвол в калибровке векторных потенциалов заключается теперь в свободе выбора множителя  $d_l(\kappa^2)$ . Если можно показать, что наблюдаемые эффекты не зависят от  $d_l$ , то теория будет «явно калибровочно-инвариантной».

Условия (18.92), приводящие к соотношению (18.93), очевидно, эквивалентны предположению, что  $d_l=1$ . Другой возможный выбор, по крайней мере такой же удобный, — это  $d_l=0$ . Во многих приложениях, однако, удобнее не определять множитель  $d_l$  в процессе вычислений, сохраняя, таким образом, свободу в выборе калибровки, и придавать ему определенное численное значение только в том случае, когда это приводит к существенному упрощению вычислений.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Понятие операторов рождения и уничтожения для бозонов ввели Иордан и Клейн [1]. См. также работу Дирака [2].

Яух и Рорлих [3] рассматривают поперечную поляризацию фотонов. В их книге можно найти подробную библиографию предшествовавших работ по этому вопросу.

Арчибальд [4] заметил, что уравнения Максвелла для вакуума можно записать в виде уравнения Шредингера для двух трехкомпонентных  $\psi$ -функций. См. также книгу Ахиезера и Берестецкого [5].

Ландау и Пайерлс [6] получили разложение операторов рождения и уничтожения фотона по операторам электромагнитного поля. Роуз [7] привел унитарное преобразование (18.64).

Обсуждение некоторых осложнений, возникающих при введении продольных и временных фотонов, можно найти в работе Челлена [8].

Боголюбов и Ширков [9] последовательно используют условие калибровки, при котором функция  $d_l$  остается произвольной.

### Литература

1. Jordan P., Klein O., Zs. Phys., **45**, 751 (1927).
2. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A114**, 243 (1927).
3. Jauch J. M., Rohrlich F., The Theory of Photons and Electrons, Reading, Massachusetts, 1955, pp. 41—46.
4. Archibald W. J., Can. Journ. Phys., **33**, 565 (1955).
5. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, М., 1959.
6. Landau L., Peierls R., Zs. Phys., **62**, 188 (1930).
7. Rose M. E., Multipole Fields, New York, 1955, Ch. II (см. перевод: Роуз М., Поля мультиполей, ИЛ, 1957).
8. Källén G., Quantenelektrodynamik, в книге Handbuch der Physik, Bd. V, Berlin, 1958, Ch. II.
9. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.



## Электроны и позитроны

Для частиц, имеющих отличную от нуля массу покоя  $m$ , выполняется следующее соотношение между энергией  $\Omega$  и импульсом  $\mathbf{k}$ :

$$\Omega^2 = \mathbf{k}^2 + m^2. \quad (19.1)$$

Спин таких частиц может быть ориентирован относительно вектора  $\mathbf{k}$  произвольным образом. Если даже в некоторой системе координат спин и импульс оказываются параллельными или антипараллельными, эта ориентация нарушается при преобразовании Лоренца (при условии, что скорость частицы меньше скорости света), поскольку при таком преобразовании спин и импульс, первый из которых является антисимметричным тензором, а второй — вектором, изменяются по разным законам.

Сюда относятся, в частности, электроны и позитроны, обладающие спином  $j = 1/2$ , но отличающиеся от нейтрино и антинейтрино отсутствием жесткой корреляции направлений их спина и импульса  $\mathbf{k}$ . Именно эта корреляция приводит к тому, что  $\psi$ -функция частицы с нулевой массой удовлетворяет или уравнению  $[H - (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P})]u = 0$  (для «правовинтовых» частиц), или уравнению  $[H + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P})]v = 0$  (для «левовинтовых» частиц). Подробно об этом говорится в гл. 17. Учесть существование массы покоя путем простого добавления члена  $mu$  и  $mv$  в уравнения для  $u$  и  $v$  соответственно нельзя, так как скалярный характер величины  $m$  делает полученные таким путем уравнения неинвариантными относительно отражений  $\Pi$ . Способ включить в рассмотрение массу, не нарушив при этом никаких требований инвариантности, в том числе и инвариантности по отношению к преобразованию Лоренца, был предложен Дираком, который показал, что электроны можно описывать четырехкомпонентными  $\psi$ -функциями, полученными путем объединения двухкомпонентных  $\psi$ -функций  $u$  и  $v$ , «зацепленных» друг с другом за счет введения массового члена:

$$\begin{aligned} (H - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{P})u &= mv, \\ (H + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{P})v &= mu. \end{aligned} \quad (19.2)$$

В пределе  $m \rightarrow 0$  эти функции описывают не связанные друг с другом «правовинтовую» и «левовинтовую» частицы с массой, равной нулю, и спином  $j=1/2$ , но при  $m \neq 0$  из этих уравнений первого порядка подстановкой их друг в друга можно получить двухкомпонентные уравнения второго порядка:

$$\begin{aligned} (H + \sigma \mathbf{P})(H - \sigma \mathbf{P}) u &= m^2 u, \\ (H - \sigma \mathbf{P})(H + \sigma \mathbf{P}) v &= m^2 v. \end{aligned} \quad (19.3)$$

В случае свободных частиц в силу коммутационных соотношений для  $\sigma$  эти уравнения эквивалентны уравнениям

$$(H^2 - P^2 - m^2) u = 0, \quad (H^2 - P^2 - m^2) v = 0. \quad (19.4)$$

Вводя матрицы четвертого ранга

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.5)$$

и четырехкомпонентную  $\psi$ -функцию

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (19.6)$$

и используя соотношения

$$\gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma v \\ \sigma u \end{pmatrix}, \quad \gamma_4 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}, \quad (19.7)$$

можно записать уравнения (19.2) в компактном виде

$$(\gamma_4 H - \gamma \mathbf{P}) \psi = m \psi. \quad (19.8)$$

Это уравнение, полученное Дираком, можно переписать в следующем виде:

$$(\alpha \mathbf{P} + \beta m) \psi = H \psi, \quad (19.9)$$

где

$$\alpha = \gamma_4 \gamma, \quad \beta = \gamma_4. \quad (19.10)$$

Введенные здесь матрицы  $(\gamma, \gamma_4) \equiv \gamma_\mu$  совпадают с теми матрицами, которые использовал Фейнман. Из матриц  $\gamma$ , используемых в большинстве обычных учебников, они получаются с помощью унитарного преобразования. Матрицы  $\gamma_\mu$  антикоммутируют друг с другом:

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad \text{где } \delta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & +1 \end{pmatrix}. \quad (19.11)$$

В рассматриваемом абстрактном четырехмерном пространстве весьма важную роль играет матрица

$$\gamma_5 = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad (19.12)$$

которая удовлетворяет соотношениям

$$\gamma_5^2 = -1 \text{ и } \gamma_5 \gamma_\mu + \gamma_\mu \gamma_5 = 0. \quad (19.13)$$

Операторы

$$C_L = \frac{1}{2} (I + i\gamma_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (19.14)$$

и

$$C_R = \frac{1}{2} (I - i\gamma_5) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (19.15)$$

выделяют из  $\psi$ -функции ее компоненты  $u$  и  $v$  соответственно:

$$C_R \psi = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} = \psi_R, \quad C_L \psi = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} = \psi_L. \quad (19.16)$$

Аналогично оператор

$$C = -i\gamma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (19.17)$$

можно назвать оператором «спиральности», поскольку  $\psi_R$  и  $\psi_L$  являются собственными функциями этого оператора и им отвечают собственные числа  $+1$  и  $-1$  соответственно:

$$C\psi_R = +\psi_R, \quad C\psi_L = -\psi_L. \quad (19.18)$$

Спиновые операторы можно выразить через матрицы  $\gamma$  следующим образом:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} = i\gamma_2 \gamma_3 \quad (19.19)$$

(с циклической перестановкой индексов). Поскольку операторы  $\hat{\sigma}$  и  $(\gamma_4 H - \gamma P)$  не коммутируют, решения уравнения Дирака (19.8), вообще говоря, не являются собственными векторами оператора  $\hat{\sigma}$  при произвольном направлении спина. Только в том случае, если частица покоится и  $P\psi = 0$ , т. е.

$$\gamma_4 H \psi_{\text{пок}} = m \psi_{\text{пок}}, \text{ или } \begin{cases} H v = m u \\ H u = m v \end{cases} \quad (19.20)$$

с вытекающим отсюда равенством

$$u = v, \text{ т. е. } \psi_{\text{пок}} = \begin{pmatrix} u \\ u \end{pmatrix}, \quad (19.21)$$

$\psi$ -функция будет собственной функцией оператора  $\hat{\sigma}$ . Условимся ниже всегда выбирать такое представление, что

$$\hat{\sigma}_z \psi_{\text{пок}} = \pm \psi_{\text{пок}}. \quad (19.22)$$

Чтобы пояснить смысл сказанного, можно ввести в системе координат, где частица покоится, векторы состояний  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C$  и  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C$ , определяющие пространство спиральности, которым соответствуют собственные значения оператора  $C$ , равные  $\pm 1$ , и собственные векторы  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S$ , определяющие спиновое пространство, которым соответствуют собственные значения  $\sigma_z$ , равные  $\pm 1$ . Соответственно произвольное состояние электрона можно характеризовать квантовыми числами  $\mathbf{k}$ ,  $S$  и  $C$ , где  $C$  — дихотомическая переменная, принимающая два значения  $R$  и  $L$  («правовинтовая» и «левовинтовая» частицы), а  $S$  — дихотомическая переменная, принимающая значения  $\uparrow$  и  $\downarrow$ , которые определяют направление спина (вверх или вниз) в системе координат, в которой частица покоится. Такое состояние возникает при действии на вакуум  $|0\rangle$  соответствующего оператора рождения:

$$|\mathbf{k}, S, C\rangle = a^+(\mathbf{k}, S, C)|0\rangle, \quad (19.23)$$

где

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}, S, C\rangle &= |\mathbf{k}, S, R\rangle \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C + |\mathbf{k}, S, L\rangle \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \\ &= |\mathbf{k}, \uparrow, R\rangle \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C + |\mathbf{k}, \downarrow, R\rangle \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C + \\ &+ |\mathbf{k}, \uparrow, L\rangle \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_S \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C + |\mathbf{k}, \downarrow, L\rangle \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_S \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C. \end{aligned} \quad (19.24)$$

В координатном представлении

$$|\mathbf{k}, S, C\rangle = \int |\mathbf{q}\rangle d\mathbf{q} \psi_{\mathbf{k}, S, C}(\mathbf{q}) \quad (19.25)$$

$\psi$ -функции, характеризующие состояния  $|\mathbf{k}, S, R\rangle, |\mathbf{k}, S, L\rangle, |\mathbf{k}, \uparrow, R\rangle, |\mathbf{k}, \downarrow, R\rangle$  и  $|\mathbf{k}, \uparrow, L\rangle, |\mathbf{k}, \downarrow, L\rangle$  представляют собой соответственно  $u, v, u_1, u_2, v_1$  и  $v_2$ .

В таком комбинированном четырехмерном пространстве «спин — спиральность» оператор инверсии координат можно представить в следующем виде (символами 0 и 1 изображаются

соответствующие матрицы второго ранга):

$$\hat{\Pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \gamma_4. \quad (19.26)$$

При таком выборе оператора инверсии координат  $\Pi$  в силу антикоммутационных соотношений (19.11) и (19.13) действительно выполняются те условия, что спиральность  $C = -i\gamma_5$  меняет знак при инверсии, а спин  $\hat{\sigma}_j = i\gamma_h\gamma_l$  (с циклической перестановкой индексов) не меняет. Следовательно, можно ожидать, что полный оператор инверсии представляется в виде

$$\Pi = \eta_{\Pi} \gamma_4 \Pi_D = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_D \\ \Pi_D & 0 \end{pmatrix} \eta_{\Pi}. \quad (19.27)$$

Здесь  $\Pi_D$  действует на динамические переменные, такие, как  $H$  и  $\mathbf{P}$ , и соответствует преобразованию  $\mathbf{q} \rightarrow -\mathbf{q}$  в аргументе  $\psi$ -функции, а  $\eta_{\Pi}$  — фазовый множитель, который в соответствии с условиями, принятыми в гл. 14, мы будем выбирать так, чтобы выполнялось соотношение  $\eta_{\Pi}^2 = +1$ .

Оператор обращения времени, с другой стороны, должен оставлять спиральность неизменной и, следовательно, должен быть диагональным в соответствующем пространстве. Этого можно добиться, положив

$$\hat{\Theta} = \hat{T}K = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T \end{pmatrix} K, \quad (19.28)$$

где оператор  $T$ , действующий в спиновом пространстве, в соответствии с равенством (15.42) имеет вид

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\sigma_2, \quad (19.29)$$

а  $K$  — оператор комплексного сопряжения. Этим мы гарантируем правильность трансформационных свойств оператора  $\hat{\sigma}$ , а именно обеспечиваем выполнение равенства  $\hat{\Theta}\hat{\sigma}\hat{\Theta}^{-1} = -\hat{\sigma}$ . Оператор  $\hat{T}$  можно выразить через матрицы  $\gamma$  в виде

$$\hat{T} = \gamma_1\gamma_3 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix}, \quad (19.30)$$

после чего оператор обращения времени можно представить в виде

$$\Theta = \eta_{\Theta} \gamma_1 \gamma_3 \times T_D K, \quad (19.31)$$

где  $T_D$  действует на динамические переменные и производит над любой зависящей от времени  $\psi$ -функцией преобразование  $t \rightarrow -t$ , а  $\eta_\theta$  — неопределенный пока фазовый множитель, подчиненный лишь условию  $\eta_\theta \eta_\theta^* = 1$ .

Будем теперь искать собственные функции, отвечающие уравнению (19.8) и удовлетворяющие соотношениям

$$H\psi = \Omega\psi \text{ и } P\psi = k\psi, \text{ где } \Omega = +\sqrt{k^2 + m^2}. \quad (19.32)$$

Следует иметь в виду, что энергия  $\Omega$  не может принимать отрицательных значений. Используя оператор  $P = -i(\partial/\partial Q)$ , можно получить в координатном представлении

$$\left(\gamma_4\Omega + i\gamma \frac{\partial}{\partial q}\right)\psi = m\psi. \quad (19.33)$$

Записав  $\psi$ -функцию в виде

$$\psi_{k, s, c}(q) = A(k, S, C) e^{ikq} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} e^{ikq}, \quad (19.34)$$

мы получим четыре линейных однородных уравнения для  $A_n(k, \dots)$

$$(\gamma_4\Omega - \gamma k) A = mA. \quad (19.35)$$

Используя представление (19.5), их можно записать в явной форме:

$$\begin{aligned} (\Omega + k_3) A_3 + (k_1 - ik_2) A_4 &= mA_1, \\ (\Omega - k_3) A_4 + (k_1 + ik_2) A_3 &= mA_2, \\ (\Omega - k_3) A_1 - (k_1 - ik_2) A_2 &= mA_3, \\ (\Omega + k_3) A_2 - (k_1 + ik_2) A_1 &= mA_4. \end{aligned} \quad (19.36)$$

Необходимым и достаточным условием существования у этой системы уравнений нетривиального решения является обращение в нуль определителя, составленного из соответствующих коэффициентов:

$$\begin{vmatrix} -m & 0 & (\Omega + k_3) & (k_1 - ik_2) \\ 0 & -m & (k_1 + ik_2) & (\Omega - k_3) \\ (\Omega - k_3) & -(k_1 - ik_2) & -m & 0 \\ -(k_1 + ik_2) & (\Omega + k_3) & 0 & -m \end{vmatrix} = \\ = (\Omega^2 - k^2 - m^2)^2 = 0. \quad (19.37)$$

Последнее равенство является очевидным следствием соотношения (19.1).

Для заданной энергии  $\Omega = +\sqrt{k^2 + m^2} > 0$  уравнение (19.34) имеет два линейно независимых решения, а именно:

$$A(1) = \frac{1}{\sqrt{2V\Omega}} \begin{pmatrix} \frac{m}{\sqrt{\Omega - k_3}} \\ 0 \\ \sqrt{\Omega - k_3} \\ -(k_1 + ik_2) \\ \sqrt{\Omega - k_3} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A(2) = \frac{1}{\sqrt{2V\Omega}} \begin{pmatrix} \frac{(k_1 - ik_2)}{\sqrt{\Omega - k_3}} \\ \sqrt{\Omega - k_3} \\ 0 \\ m \\ \sqrt{\Omega - k_3} \end{pmatrix}. \quad (19.38)$$

Эти решения нормированы условием

$$A^*(1) A(1) = A^*(2) A(2) = \frac{1}{V}, \quad \text{т. е.} \quad \int_V \psi^* \psi d\mathbf{q} = 1, \quad (19.39)$$

и удовлетворяют соотношению ортогональности

$$A^*(1) A(2) = A^*(2) A(1) = 0. \quad (19.40)$$

Фазы выбраны так, что в системе координат, где частица покоится (т. е.  $\mathbf{k} = 0$ ), решения имеют вид

$$A(1; \mathbf{k} = 0) = \frac{1}{\sqrt{2V}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad A(2; \mathbf{k} = 0) = \frac{1}{\sqrt{2V}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (19.41)$$

Они являются собственными функциями оператора  $\hat{\sigma}_3$  и соответствуют собственным значениям  $+1$  и  $-1$  соответственно.

Уравнения (19.36) формально имеют еще одну пару решений, если принять за энергию величину  $E = -\Omega = -\sqrt{k^2 + m^2} < 0$ , так что всего насчитывается *четыре* линейно независимых решения, которые мы будем обозначать  $A_\alpha(r)$ , где  $r = 1, 2, 3, 4$ . Они приведены в табл. 2. Условие нормировки имеет вид

$$A_\alpha^*(r) A_\alpha(r') = \frac{1}{V} \delta_{rr'} \quad (19.42)$$

(по греческим индексам, встречающимся дважды, производится суммирование).

По аналогии с теорией фотонов, изложенной в гл. 18, в которой все наблюдаемые величины можно представить в виде операторов, билинейных по операторам рождения и уничтожения.

Таблица 2

Четыре линейно независимые решения уравнений (19.36)

$$(\Omega = +\sqrt{k^2 + m^2}).$$

$\alpha \backslash r$	1	2	3	4
1	$\frac{m}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$\frac{k_1 - ik_2}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$-\sqrt{\Omega - k_3}$	0
2	0	$\sqrt{\Omega - k_3}$	$\frac{k_1 + ik_2}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$\frac{-m}{\sqrt{\Omega - k_3}}$
3	$\sqrt{\Omega - k_3}$	0	$\frac{m}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$\frac{k_1 - ik_2}{\sqrt{\Omega - k_3}}$
4	$\frac{-(k_1 + ik_2)}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$\frac{m}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	0	$\sqrt{\Omega - k_3}$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2V\Omega}}$$

часто бывает удобно пользоваться дираковскими операторами поля, зависящими от координат и времени. Их можно построить с помощью функций  $A_\alpha(r)$  в следующем виде:

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \left[ e^{i(\mathbf{k}\mathbf{q} - \Omega t)} \sum_{r=1}^2 A(r, \mathbf{k}) a(r, \mathbf{k}) + e^{i(\mathbf{k}\mathbf{q} + \Omega t)} \sum_{r=3}^4 A(r, \mathbf{k}) a(r, \mathbf{k}) \right], \quad (19.43)$$

где  $a(r, \mathbf{k}) = a(\mathbf{k}, r)$  — оператор уничтожения электрона с положительной энергией, если  $r=1, 2$ , и электрона с отрицательной энергией, если  $r=3, 4$ . С помощью дираковских операторов и сопряженных им операторов  $\bar{\psi}(x) = \psi^*(x)\gamma_4$  можно записать оператор энергии любого многоэлектронного состояния в виде

$$H = \int \mathcal{H}(x) d\mathbf{q} = \int \bar{\psi}(-i\mathbf{y}\nabla + m)\psi d\mathbf{q} = \\ = \sum_{\mathbf{k}} \Omega \left[ \sum_{r=1}^2 a^+(r, \mathbf{k}) a(r, \mathbf{k}) - \sum_{r=3}^4 a^+(r, \mathbf{k}) a(r, \mathbf{k}) \right]. \quad (19.44)$$

Нет ничего удивительного в том, что это выражение не является положительно определенным, поскольку решения с отрицательными энергиями включены в теорию. Трудность интерпретации еще более усугубляется, если рассмотреть оператор плотности электрического тока

$$j_\mu(x) = e\bar{\psi}\gamma_\mu\psi, \quad (19.45)$$



который определен в соответствии с законом сохранения

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0, \quad (19.46)$$

вытекающим из прямого и сопряженного уравнений Дирака:

$$-i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \gamma_\mu \psi + m\psi = 0, \quad i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \bar{\psi} \gamma_\mu + m\bar{\psi} = 0. \quad (19.47)$$

Если записать оператор электрического заряда

$$Q = e \int j_4(x) dq = e \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^4 a^+(r, \mathbf{k}) a(r, \mathbf{k}), \quad (19.48)$$

то получится выражение, которое явным образом положительно определено.

Требуется, конечно, как раз обратное, а именно положительно определенная плотность энергии и электрический заряд, который может принимать как положительные, так и отрицательные средние значения.

Одним известным разрешением этой дилеммы является дырочная теория позитрона, созданная Дираком, который по существу использовал возможность выполнения унитарного преобразования, обменивающего заполненные состояния с отрицательной энергией и дырочные состояния, в соответствии с процедурой, описанной в гл. 17. Если выбирать знаки в соответствии с условием (17.25), то это преобразование сводится к введению новых операторов

$$\begin{aligned} a_+^+(2, -\mathbf{k}) &\equiv -a^+(3, \mathbf{k}) \text{ вместо } a(3, \mathbf{k}), \\ a_+^+(1, -\mathbf{k}) &\equiv a^+(4, \mathbf{k}) \text{ вместо } a(4, \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (19.49)$$

Если использовать обозначения

$$\begin{aligned} a_+(r, \mathbf{k}) &\equiv a(r, \mathbf{k}) \text{ для } r=1, 2, \\ A_+(r, \mathbf{k}) &\equiv A(r, \mathbf{k}) \text{ для } r=1, 2, \\ A_-(2, -\mathbf{k}) &\equiv -A(3, \mathbf{k}), \\ A_-(1, -\mathbf{k}) &\equiv A(4, \mathbf{k}), \end{aligned} \quad (19.50)$$

то оператор (19.43) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 [e^{i(\mathbf{k}\mathbf{q}-\Omega t)} A_+(r, \mathbf{k}) a_+(r, \mathbf{k}) + \\ &\quad + e^{i(\mathbf{k}\mathbf{q}+\Omega t)} A_-(r, -\mathbf{k}) a_+^+(r, -\mathbf{k})] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 [e^{i(\mathbf{k}\mathbf{q}-\Omega t)} A_+(r, \mathbf{k}) a_+(r, \mathbf{k}) + \\ &\quad + e^{-i(\mathbf{k}\mathbf{q}-\Omega t)} A_-(r, \mathbf{k}) a_+^+(r, \mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (19.51)$$

Индексы «+» и «-» присвоены операторам  $a$  и амплитудам  $A$  в соответствии с интерпретацией, согласно которой индекс «+» отвечает лептонному числу  $L=+1$ , а индекс «-» — лептонному числу  $L=-1$ . Амплитуды  $A_L(r, \mathbf{k})$ , соответствующие выражениям (19.50), приведены в табл. 3. В табл. 4 приведены амплитуды  $\bar{A}_L(r, \mathbf{k}) = A_L^*(r, \mathbf{k}) \gamma_4$ .

С помощью этих таблиц можно немедленно построить матрицы, которые понадобятся несколько ниже:

$$\sum_r [A_+(\mathbf{k}, r)]_\alpha [\bar{A}_+(\mathbf{k}, r)]_\beta =$$

$$= \begin{pmatrix} m & 0 & \Omega + k_3 & k_1 - ik_2 \\ 0 & m & k_1 + ik_2 & \Omega - k_3 \\ \Omega - k_3 & -(k_1 - ik_2) & m & 0 \\ -(k_1 + ik_2) & \Omega + k_3 & 0 & m \end{pmatrix} \times \frac{1}{2V\Omega} \quad (19.52)$$

и

$$\sum_r [\bar{A}_-(\mathbf{k}, r)]_\alpha [A_-(\mathbf{k}, r)]_\beta =$$

$$= \begin{pmatrix} -m & 0 & \Omega - k_3 & -(k_1 + ik_2) \\ 0 & -m & -(k_1 - ik_2) & \Omega + k_3 \\ \Omega + k_3 & k_1 + ik_2 & -m & 0 \\ k_1 - ik_2 & \Omega - k_3 & 0 & -m \end{pmatrix} \times \frac{1}{2V\Omega}. \quad (19.53)$$

Используя матрицы  $\gamma$ , эти выражения можно переписать в виде

$$\sum_r [A_+(\mathbf{k}, r)]_\alpha [\bar{A}_+(\mathbf{k}, r)]_\beta = \frac{1}{2V\Omega} [\gamma_4 \Omega - \mathbf{k}\boldsymbol{\gamma} + mI]_{\alpha\beta} \quad (19.52')$$

или

$$\sum_r A_+(\mathbf{k}, r) \bar{A}_+(\mathbf{k}, r) = \frac{1}{2V\Omega} (\hat{k} + m)$$

и

$$\sum_r [\bar{A}_-(\mathbf{k}, r)]_\beta [A_-(\mathbf{k}, r)]_\alpha = \frac{1}{2V\Omega} [\gamma_4 \Omega - \mathbf{k}\boldsymbol{\gamma} - mI]_{\alpha\beta} \quad (19.53')$$

или

$$\sum_r A_-(\mathbf{k}, r) \bar{A}_-(\mathbf{k}, r) = \frac{1}{2V\Omega} (\hat{k} - m),$$

где

$$\hat{k} = k_\nu \gamma_\nu = \gamma_4 \Omega - \mathbf{k}\boldsymbol{\gamma}.$$

Амплитуды  $A_L(r, k)$ 

$$(\Omega = + \sqrt{k^2 + m^2}).$$

$\alpha \backslash r$	1	2	1	2
1	$\frac{m}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$\frac{k_1 - ik_2}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	0	$\sqrt{\Omega + k_3}$
2	0	$\sqrt{\Omega - k_3}$	$\frac{-m}{\sqrt{\Omega + k_3}}$	$\frac{k_1 + ik_2}{\sqrt{\Omega + k_3}}$
3	$\sqrt{\Omega - k_3}$	0	$\frac{-(k_1 - ik_2)}{\sqrt{\Omega + k_3}}$	$\frac{-m}{\sqrt{\Omega + k_3}}$
4	$\frac{-(k_1 + ik_2)}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$\frac{m}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$\sqrt{\Omega + k_3}$	0
		$L = +1$	$L = -1$	

$$\times \frac{1}{\sqrt{2V\Omega}}$$

Таблица 4

Амплитуды  $\bar{A}_L(r, k) = A_L^*(r, k) \gamma_4$ 

$$(\Omega = + \sqrt{k^2 + m^2}).$$

$\alpha \backslash r$	1	2	1	2
1	$\sqrt{\Omega - k_3}$	0	$\frac{-(k_1 + ik_2)}{\sqrt{\Omega + k_3}}$	$\frac{-m}{\sqrt{\Omega + k_3}}$
2	$\frac{-(k_1 - ik_2)}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$\frac{m}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$\sqrt{\Omega + k_3}$	0
3	$\frac{m}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	$\frac{k_1 + ik_2}{\sqrt{\Omega - k_3}}$	0	$\sqrt{\Omega + k_3}$
4	0	$\sqrt{\Omega - k_3}$	$\frac{-m}{\sqrt{\Omega + k_3}}$	$\frac{k_1 - ik_2}{\sqrt{\Omega + k_3}}$
		$L = +1$	$L = -1$	

$$\times \frac{1}{\sqrt{2V\Omega}}$$

В новых обозначениях оператор энергии записывается в виде

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 \Omega [N_+(\mathbf{k}, r) + N_-(\mathbf{k}, r) - 2], \quad (19.54)$$

где

$$N_{\pm}(\mathbf{k}, r) = a_{\pm}^+(\mathbf{k}, r) a_{\pm}(\mathbf{k}, r); \quad (19.55)$$

эти произведения интерпретируются теперь как операторы чисел электронов и позитронов соответственно. Выражение (19.54), очевидно, инвариантно относительно замены  $\mathbf{k} \leftrightarrow -\mathbf{k}$  и (или)  $r=1, 2 \leftrightarrow r=2, 1$ . Однако условия, содержащиеся в обозначениях (19.50), таковы, что любое позитронное состояние  $(\mathbf{k}, r)$  отличается с механической точки зрения от электронного состояния  $(\mathbf{k}, r)$  только своей спиральностью.

В этой дырочной теории позитрона бесконечная энергия вакуума  $-2 \sum_{\mathbf{k}} \Omega$  исключается из рассмотрения, поскольку она для всех состояний одинакова и поэтому в принципе ненаблюдаема. Модифицированное определение плотности электрического тока, которое позволяет сразу же избавиться от ненулевого заряда вакуума без нарушения закона сохранения (19.46), имеет следующий вид:

$$j_{\mu}(x) = \frac{e}{2} [\bar{\Psi}, \gamma_{\mu} \Psi] = \frac{e}{2} [\gamma_{\mu}]_{\alpha\beta} [\bar{\Psi}_{\alpha} \Psi_{\beta} - \Psi_{\beta} \bar{\Psi}_{\alpha}]. \quad (19.56)$$

При этом, в частности, для полного электрического заряда получается

$$Q = e \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 [N_+(\mathbf{k}, r) - N_-(\mathbf{k}, r)]. \quad (19.57)$$

Это согласуется с интерпретацией  $N_+$  и  $N_-$  как операторов чисел электронов и позитронов соответственно<sup>1)</sup>.

Поучительно и полезно с точки зрения последующих приложений выразить оператор плотности тока (19.56) через операторы  $a_{\pm}^+(\mathbf{k}, r)$  и  $a_{\pm}(\mathbf{k}, r)$ ; используя антикоммутируемость этих операторов, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \frac{e}{2} [\bar{\Psi}, \gamma_{\mu} \Psi] = & e \sum_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_r \sum_{r'} \{ \exp(-i[(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \mathbf{q} - (\Omega' - \Omega)t]) \times \\ & \times \bar{A}_{\pm}(\mathbf{k}', r') \gamma_{\mu} A_{\pm}(\mathbf{k}, r) a_{\pm}^+(\mathbf{k}', r') a_{\pm}(\mathbf{k}, r) - \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Если вместо соотношений (19.42) пользоваться релятивистски-ковариантной нормировкой на  $\Omega/m$  частиц в единице объема, то в определение (19.51) следует добавить множитель  $\sqrt{m/\Omega}$ .

$$\begin{aligned}
 & - \exp(i[\mathbf{k}' - \mathbf{k}] \mathbf{q} - (\Omega' - \Omega) t]) \bar{A}_-(\mathbf{k}', r') \gamma_\mu \times \\
 & \times A_-(\mathbf{k}, r) a_-(\mathbf{k}, r) a_-(\mathbf{k}', r') + \\
 & + \exp(-i[(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \mathbf{q} - (\Omega' + \Omega) t]) \bar{A}_+(\mathbf{k}', r') \gamma_\mu \times \\
 & \times A_-(\mathbf{k}, r) a_+(\mathbf{k}', r') a_-(\mathbf{k}, r) - \\
 & - \exp(i[(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \mathbf{q} - (\Omega' + \Omega) t]) \bar{A}_-(\mathbf{k}', r') \gamma_\mu \times \\
 & \times A_+(\mathbf{k}, r) a_+(\mathbf{k}, r) a_-(\mathbf{k}', r') \} - \\
 & - e \sum_{\mathbf{k}} \sum_r [\bar{A}_+(\mathbf{k}, r) \gamma_\mu A_+(\mathbf{k}, r) - \bar{A}_-(\mathbf{k}, r) \gamma_\mu A_-(\mathbf{k}, r)].
 \end{aligned}
 \tag{19.56'}$$

Последний член, не содержащий операторов  $a$  и  $a^+$ , обращается в нуль для всех  $\mu$ , что можно проверить непосредственным вычислением с помощью табл. 4. Равенство (19.57) получается как частный случай, соответствующий  $\mu=4$ .

Можно с самого начала обойтись без остроумной дырочной теории, необходимость в которой обусловлена включением в рассмотрение решений с отрицательной энергией, если использовать любопытное свойство симметрии уравнений Дирака, которое в литературе известно под названием симметрии зарядового сопряжения. Это означает, что если поменять местами операторы чисел частиц  $N_+$  и  $N_-$ :

$$N_+ \rightleftharpoons N_-, \tag{19.58}$$

то это не повлияет ни на какие механические операторы, вроде  $P_\mu$ , в то время как оператор  $j_\mu$  меняет знак, если считать, что  $e$  — фиксированный числовой параметр. Этим свойством, очевидно, обладают уже выражения (19.54) и (19.56).

Благодаря этому замечательному свойству уравнения Дирака и его решений (уравнение, описывающее нейтрино, например, таким свойством не обладает) операцию (19.58) можно представить в виде оператора  $\hat{\Gamma}$ , действующего только в пространстве спин — спиральность, так что вместо (19.58) можно написать

$$\begin{aligned}
 \psi & \rightarrow \psi' = \eta_r \hat{\Gamma} \bar{\psi} = \eta_r \bar{\psi} \tilde{\Gamma}, \\
 \bar{\psi} & \rightarrow \bar{\psi}' = \eta_r^* \hat{\Gamma}^{-1} \psi = \eta_r^* \psi \tilde{\Gamma}^{-1}.
 \end{aligned}
 \tag{19.58'}$$

Здесь  $\hat{\Gamma}$  не действует на операторы рождения и уничтожения, а  $\eta_r$  — неопределенный пока фазовый множитель, удовлетворяющий лишь условию  $\eta_r \eta_r^* = 1$ . Представление  $\hat{\Gamma}$  через матрицы  $\gamma_\mu$  можно получить, потребовав, чтобы функция  $\psi'$  удовлетворяла

уравнению Дирака

$$\left(-i\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m\right)\psi' = 0 \quad (19.59)$$

при условии, что  $\psi$  и  $\bar{\psi}$  удовлетворяет уравнениям (19.47). Как оказывается, сказанного достаточно, чтобы обеспечить инвариантность  $P_\mu$  и изменение знака  $j_\mu$ . Подставляя  $\psi'$  в (19.59), получаем

$$\hat{\Gamma} \left(-i\hat{\Gamma}^{-1} \gamma_\mu \hat{\Gamma} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_\mu} + m\bar{\psi}\right) = 0. \quad (19.60)$$

Это уравнение есть следствие второго уравнения (19.47) при условии, что

$$\hat{\Gamma}^{-1} \gamma_\mu \hat{\Gamma} = -\tilde{\gamma}_\mu, \quad (19.61)$$

или в компонентах

$$[\hat{\Gamma}^{-1} \gamma_\mu \hat{\Gamma}]_{\alpha\beta} = -[\gamma_\mu]_{\beta\alpha}.$$

Имея в виду (19.5), получаем

$$[\gamma_\mu]_{\alpha\beta} = \begin{cases} +[\gamma_\mu]_{\beta\alpha} & \text{для } \mu = 2, 4, \\ -[\gamma_\mu]_{\beta\alpha} & \text{для } \mu = 1, 3. \end{cases} \quad (19.62)$$

Таким образом, условию (19.61) можно удовлетворить, выбрав

$$\hat{\Gamma} = i\gamma_2\gamma_4 = i \begin{pmatrix} -\sigma_2 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad (19.63)$$

так что

$$\tilde{\Gamma} = -\hat{\Gamma}, \text{ т. е. } \tilde{\Gamma} \hat{\Gamma}^{-1} = -I, \quad (19.64)$$

и оператор  $\hat{\Gamma}$  становится унитарным:

$$\hat{\Gamma}^{-1} = -\hat{\Gamma}^*, \text{ т. е. } \hat{\Gamma} \hat{\Gamma}^+ = I. \quad (19.65)$$

Теперь легко показать, что при замене  $\psi \rightarrow \psi'$  оператор  $j_\mu$  меняет знак. Используя (19.64) и (19.61), получаем

$$\begin{aligned} j'_\mu &= \frac{e}{2} [\bar{\psi}', \gamma_\mu \psi'] = \frac{e}{2} [\gamma_\mu]_{\alpha\beta} [\bar{\psi}'_\alpha \psi'_\beta - \psi'_\beta \bar{\psi}'_\alpha] = \\ &= -\frac{e}{2} [\gamma_\mu]_{\alpha\beta} [\hat{\Gamma}^{-1}]_{\alpha\gamma} [\hat{\Gamma}]_{\beta\delta} [\psi_\gamma \bar{\psi}_\delta - \bar{\psi}_\delta \psi_\gamma] = \\ &= \frac{e}{2} [\hat{\Gamma}^{-1}]_{\gamma\alpha} [\gamma_\mu]_{\alpha\beta} [\hat{\Gamma}]_{\beta\delta} [\bar{\psi}_\delta \psi_\gamma - \psi_\gamma \bar{\psi}_\delta] = \\ &= -\frac{e}{2} [\gamma_\mu]_{\delta\gamma} [\bar{\psi}_\delta \psi_\gamma - \psi_\gamma \bar{\psi}_\delta] = -j_\mu. \end{aligned} \quad (19.66)$$

Следует подчеркнуть, что если мы хотим раскрыть смысл стрелок в соотношении (19.58'), определяя формально новый оператор  $\Gamma$ , связывающий  $\psi'$  и  $\psi$ :

$$\psi' = \Gamma\psi = \eta_{\Gamma}\hat{\Gamma}\bar{\psi} = \eta_{\Gamma}\hat{\Gamma}\psi^* \gamma_4 = \eta_{\Gamma}\hat{\Gamma}\gamma_4 K\psi, \quad (19.67)$$

то этот оператор *должен* быть антиунитарным:

$$\Gamma = \eta_{\Gamma}\hat{\Gamma}\gamma_4 K = \eta_{\Gamma}i\gamma_2 K. \quad (19.68)$$

Поскольку матрица  $\gamma_2$  чисто мнимая и  $\gamma_2\gamma_2 = -I$ , а  $\eta_{\Gamma}\eta_{\Gamma}^* = 1$ , мы получаем

$$\Gamma^2 = i\gamma_2 K i\gamma_2 K = -\gamma_2\gamma_2 = +I, \quad (19.69)$$

и сама по себе симметрия относительно зарядового сопряжения не генерирует в электронно-позитронной системе правила суперотбора. Однако если, используя (19.27), рассмотреть операцию комбинированной инверсии

$$\Sigma = \Pi\Gamma = \eta_{\Pi}\eta_{\Gamma}\gamma_4 \Pi_D i\gamma_2 K, \quad (19.70)$$

то легко заметить, что оператор  $\Sigma$  также антиунитарен и обладает дополнительным свойством<sup>1)</sup>

$$\Sigma^2 = i\gamma_4\gamma_2 K i\gamma_4\gamma_2 K = -\gamma_4\gamma_2\gamma_4\gamma_2 = \gamma_2^2\gamma_4^2 = -I. \quad (19.71)$$

*Тем самым пространства, отвечающие векторам состояния  $|\dots N_L(\mathbf{k}, r)\dots\rangle$  и соответствующим образом преобразованным векторам  $\Sigma|\dots N_L(\mathbf{k}, r)\dots\rangle$ , отделены друг от друга правилом суперотбора, которое с учетом того, что действие оператора  $\Gamma$  приводит к замене  $L \leftrightarrow -L$ , может быть интерпретировано, как причина сохранения лептонного числа  $L$  применительно к электронам и позитронам.*

Таким образом, можно с самого начала обойтись без введения состояний с отрицательной энергией, рассматривая только решения уравнения Дирака, соответствующие положительной энергии, и получая позитронные состояния из электронных с помощью оператора комбинированной инверсии  $\Sigma$ . В законности такой операции можно убедиться, рассчитав с помощью соотношения (19.70) результат действия оператора  $\Sigma$  на первые два столбца табл. 3:

$$\Sigma A_{+1}(\mathbf{k}, r) = \eta_{\Pi}\eta_{\Gamma} A_{-1}(-\mathbf{k}, r). \quad (19.72)$$

Этот результат сводится, таким образом, к изменению знака импульса  $\mathbf{k}$  и замене лептонного числа  $L = +1$  на  $L = -1$ . В ча-

<sup>1)</sup> Следует заметить, что это свойство сохранится, если выбрать условие  $\eta_{\Pi}^2 = -1$ , поскольку  $\eta_{\Pi}$  входит в  $\Sigma^2$  только в виде комбинации  $\eta_{\Pi}\eta_{\Pi}^*$ .

стности, оператор (19.51) можно записать в виде

$$\psi(x) = \sum_{\mathbf{k}} \sum_{r=1}^2 (I + \Sigma) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{q} - \Omega t)} A_{+1}(\mathbf{k}, r) a_{+1}(\mathbf{k}, r), \quad (19.73)$$

имея в виду, что в результате применения оператора комбинированной инверсии к оператору уничтожения получается

$$\Sigma a_{+1}(\mathbf{k}, r) \Sigma^{-1} = \eta_{\Pi} \eta_{\Gamma} a_{-1}^{\dagger}(-\mathbf{k}, r). \quad (19.74)$$

Эти рассуждения подкрепляют ту точку зрения, высказанную еще при проведении аналогичных выкладок для нейтрино и антинейтрино, что антилептон следует рассматривать как лептон, обращенный в пространственном, а не во временном смысле, как предполагал Фейнман.

Операция временной инверсии в применении к электронам также описывается антиунитарным оператором, удовлетворяющим соотношению

$$\Theta^2 = \gamma_1 \gamma_3 K \gamma_1 \gamma_3 K = \gamma_1 \gamma_3 \gamma_1 \gamma_3 = -\gamma_3^2 \gamma_1^2 = -1 \quad (19.75)$$

(поскольку  $\gamma_1$  и  $\gamma_3$  действительны и  $\gamma_1^2 = \gamma_3^2 = -1$ ),

так что обращенные во времени электронные состояния отделены от исходных состояний правилом суперотбора. Появляется искушение отождествить эти состояния с соответствующими мюонными состояниями, так чтобы сохранение мюонного числа  $L_{\mu}$ , упоминавшееся в гл. 17, вытекало именно из этого правила суперотбора. Это предположение — чисто спекулятивное, конечно, — делает еще более загадочным происхождение массы мюона, которая является единственным, за исключением числа  $L_{\mu}$ , параметром, отличающим в динамическом смысле мюон от электрона. Поскольку в настоящее время не существует удовлетворительной динамической теории масс элементарных частиц, нельзя сбрасывать со счетов возможность того, что в реальном физическом мире массы электрона и мюона связаны между собой соотношением  $m_{\mu} = \Theta m_e \Theta^{-1}$ <sup>1)</sup>.

Уравнение Дирака в четырехкомпонентной форме (19.8) имеет обманчиво простой вид. Богатство информации, содержащееся в нем, выступает более отчетливо, если попытаться записать это уравнение в двухкомпонентной форме. Для этого рассмотрим снова уравнения (19.2) и вспомним, что, согласно соотношению (19.21), двухкомпонентные функции  $u$  и  $v$  совпадают в системе координат, в которой частица покоится, т. е. при условии, что собственное значение  $\mathbf{P}$  обращается в нуль. Таким образом, в этой системе координат достаточно знать двухкомпонент-

<sup>1)</sup> См. примечание 1 на стр. 154. — *Прим. ред.*



ную функцию  $u$  и по ней можно, например, восстановить двухкомпонентную функцию  $w$  и получить, таким образом, всю информацию, содержащуюся в четырехкомпонентной  $\psi$ -функции.

Выражаясь более точно, мы хотим найти вместо четырехкомпонентной  $\psi$ -функции двухкомпонентную функцию  $w$  и вместо матрицы  $4 \times 4$ , задающей оператор  $\hat{F}$ , матрицы  $2 \times 2$ , определяющие такой оператор  $F$ , что средние значения оператора  $F$  по состоянию  $w$  и оператора  $\hat{F}$  по состоянию  $\psi$  совпадают:

$$\langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle = \langle w | F | w \rangle. \quad (19.76)$$

Условия нормировки имеют вид

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (19.77)$$

и

$$\langle w | w \rangle = 1. \quad (19.78)$$

Строгое соблюдение равенства (19.78) необходимо для законности всей процедуры.

Чтобы практически осуществить переход от четырехкомпонентного описания к двухкомпонентному, вспомним, что отличный от нуля импульс  $\mathbf{P}$  означает, что  $v$  и  $u$  не совпадают, и запишем

$$v = (I + W)u, \quad (19.79)$$

где  $W$  — оператор, отвечающий матрице  $2 \times 2$ , который можно получить из уравнений (19.2), как будет показано ниже, с помощью метода последовательных приближений. Аналогично искомая двухкомпонентная функция  $w$  должна получаться с помощью некоторого оператора, например  $G$ , действующего на  $u$ :

$$w = Gu, \quad u = G^{-1}w. \quad (19.80)$$

Связь между  $G$  и  $W$  получается непосредственно из условий нормировки (19.77) и (19.78), которые принимают вид

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle u | u \rangle + \langle v | v \rangle = \langle u | I + (I + W^\dagger)(I + W) | u \rangle = I \quad (19.81)$$

и

$$\langle w | w \rangle = \langle u | G^\dagger G | u \rangle = 1. \quad (19.82)$$

Эти условия могут выполняться только в том случае, если с точностью до некоторого фазового множителя справедливо равенство

$$G^\dagger G = I + (I + W^\dagger)(I + W). \quad (19.83)$$

Но наиболее общий оператор, отвечающий матрице  $4 \times 4$ , имеет вид

$$\hat{F} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}, \quad (19.84)$$

где  $F_{jk}$  — матрицы  $2 \times 2$ , так что его среднее значение можно выразить через двухкомпонентные функции в следующем виде:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle &= \langle u | F_{11} | u \rangle + \langle u | F_{12} | v \rangle + \langle v | F_{21} | u \rangle + \langle v | F_{22} | v \rangle = \\ &= \langle u | F_{11} + F_{12}(I + W) + (I + W^+) F_{21} + \\ &+ (I + W^+) F_{22}(I + W) | u \rangle = \\ &= \langle w | (G^+)^{-1} [F_{11} + F_{12}(I + W) + (I + W^+) F_{21} + \\ &+ (I + W^+) F_{22}(I + W)] G^{-1} | w \rangle. \end{aligned} \quad (19.85)$$

Условие (19.76) удовлетворяется, если в качестве матрицы  $2 \times 2$  использовать выражение

$$F = (G^+)^{-1} [F_{11} + F_{12}(I + W) + (I + W^+) F_{21} + (I + W^+) F_{22}(I + W)] G^{-1}. \quad (19.86)$$

Остается лишь получить выражения для  $G$  и  $W$  из уравнений (19.2). Подставляя туда (19.79), можно получить операторные уравнения

$$\begin{aligned} H - \sigma \mathbf{P} &= (I + W) m, \\ (H + \sigma \mathbf{P})(I + W) &= mI, \end{aligned} \quad (19.87)$$

так что

$$I + W = I + W^+ = \frac{1}{m} (H - \sigma \mathbf{P}) \quad (19.88)$$

и, следовательно, из (19.83) имеем

$$G^+ G = [I - i(I + W)] [I + i(I + W)]. \quad (19.89)$$

Таким образом, с точностью до произвольного фазового множителя

$$G = I + i(I + W) = \sqrt{2} e^{i(\pi/4)} \left[ I + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\pi/4)} W \right], \quad (19.90)$$

$$G^+ = I - i(I + W) = \sqrt{2} e^{-i(\pi/4)} \left[ I + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i(\pi/4)} W \right]. \quad (19.91)$$

Выражения для операторов  $G^{-1}$  и  $(G^+)^{-1}$ , входящих в (19.86), можно теперь получить в виде рядов по степеням  $W$ . Выпишем приближенные выражения, сохраняя члены до  $P^3/m^3$ :

$$H = \sqrt{m^2 + P^2} = m + \frac{P^2}{2m} + \dots, \quad (19.92)$$

$$W = \frac{1}{m} (H - \sigma \mathbf{P} - m) = -\frac{\sigma \mathbf{P}}{m} + \frac{P^2}{2m^2} + \dots, \quad (19.93)$$

$$W^2 = \frac{P^2}{m^2} - \frac{P^2 \sigma \mathbf{P}}{m^3} + \dots, \quad (19.94)$$

$$W^3 = -\frac{P^2 \sigma \mathbf{P}}{m^3} + \dots, \quad (19.95)$$

откуда следует

$$G^{-1} = \frac{1-i}{2} I - \frac{1}{2} W + \frac{1+i}{4} W^2 - \frac{i}{4} W^3 + \dots =$$

$$= \frac{1-i}{2} I + \frac{\sigma P}{2m} + \frac{iP^2}{4m^2} - \frac{P^2\sigma P}{4m^3} + \dots, \quad (19.96)$$

$$(G^+)^{-1} = \frac{1+i}{2} I + \frac{\sigma P}{2m} - \frac{iP^2}{4m^2} - \frac{P^2\sigma P}{4m^3} + \dots \quad (19.97)$$

Собирая члены, получаем для (19.86)

$$F = \frac{1}{2}(F_{11} + F_{12} + F_{21} + F_{22}) +$$

$$+ \frac{1}{4m} \{[(F_{11} - F_{22})\sigma P + \sigma P(F_{11} - F_{22})] +$$

$$+ i[(F_{11} + F_{22})\sigma P - \sigma P(F_{11} + F_{22})] +$$

$$+ [(F_{21} - F_{12})\sigma P - \sigma P(F_{21} - F_{12})] +$$

$$+ i[(F_{21} + F_{12})\sigma P - \sigma P(F_{21} + F_{12})]\} +$$

$$+ \frac{1}{8m^2} \{-[(F_{11} + F_{22})P^2 + P^2(F_{11} + F_{22})] +$$

$$+ i[(F_{11} - F_{22})P^2 - P^2(F_{11} - F_{22})] -$$

$$- [(F_{21} + F_{12})P^2 + P^2(F_{21} + F_{12})] +$$

$$+ i[(F_{21} - F_{12})P^2 + P^2(F_{21} - F_{12})] +$$

$$+ 2[\sigma P(F_{11} + F_{22})\sigma P - i\sigma P(F_{21} - F_{12})\sigma P]\} +$$

$$+ \frac{1}{8m^3} \{-[(F_{11} - F_{22})P^2\sigma P + P^2\sigma P(F_{11} - F_{22})] -$$

$$- i[(F_{11} + F_{22})P^2\sigma P - P^2\sigma P(F_{11} + F_{22})] +$$

$$+ [(F_{12} - F_{21})P^2\sigma P - P^2\sigma P(F_{12} - F_{21})] -$$

$$- i[(F_{12} + F_{21})P^2\sigma P - P^2\sigma P(F_{12} + F_{21})] -$$

$$- [\sigma P(F_{12} - F_{21})P^2 - P^2(F_{12} - F_{21})\sigma P] +$$

$$+ i[\sigma P(F_{11} + F_{22})P^2 - P^2(F_{11} + F_{22})\sigma P]\} +$$

$$+ \text{члены порядка } \frac{P^4}{m^4} \text{ и выше.} \quad (19.98)$$

Этой формулы должно быть достаточно для практических целей. Она применима даже в том случае, когда  $P$  — оператор импульса дираковской частицы в постоянном внешнем поле; подробнее это разъяснено в гл. 20.

В качестве простого примера в табл. 5 приведены матрицы  $\gamma$  в двухкомпонентной форме для случая отсутствия поля в виде разложения до членов порядка  $P^2/m^2$  включительно.

Таблица 5

**Матрицы  $\gamma$  в двухкомпонентной форме в виде разложения до членов порядка  $P^2/m^2$  включительно**

Мы замечаем, что операторы  $\alpha$  можно интерпретировать как представляющие вектор кинематической скорости. Это завершает отделение понятия импульса от понятия скорости, которое проходит красной нитью в развитии классической механики в 19 веке.

$\hat{F}$	$F_{11}$	$F_{22}$	$F_{12}$	$F_{21}$	$F$
$\gamma_1$	0	0	$-\sigma$	$\sigma$	$\frac{1}{2m} [\sigma (\sigma P) - (\sigma P) \sigma] = -\frac{i}{2m} [\sigma P]$
$\gamma_4$	0	0	1	1	$\left(1 - \frac{P^2}{2m^2}\right) I$
$\alpha = \gamma_4 \gamma_1$	$\sigma$	$-\sigma$	0	0	$\frac{1}{2m} [(\sigma P) \sigma + \sigma (\sigma P)] = \frac{P}{m} I$
$\gamma_5$	1	-1	0	0	$\frac{(\sigma P)}{m}$

### ПРИМЕЧАНИЯ

Дирак [1] получил уравнение, носящее его имя. Условия и обозначения, касающиеся уравнения Дирака, совпадают с теми, которые использовал Фейнман [2].

Дирак [3] выдвинул дырочную теорию положительно заряженных электронов, чтобы обойти трудности, возникающие при рассмотрении состояний с отрицательной энергией. Эти состояния ранее рассмотрел Оппенгеймер [4].

Зарядовое сопряжение, как операция симметрии, по-видимому, было предложено впервые Крамерсом [5].

Беккер [6] первым дал правильное приведение уравнения Дирака к двухкомпонентному виду. См. также работу Храпливи [7]. Предшествующие работы, выполненные различными авторами, опирались на процедуру, разработанную Дарвиным [8]. Они содержат некорректность, поскольку двухкомпонентные  $\psi$ -функции, использованные Дарвиным, не нормированы соответствующим образом, поэтому в двухкомпонентном гамильтониане возникают неэрмитовы слагаемые.

*Л и т е р а т у р а*

1. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A117**, 610 (1928); **A118**, 351 (1928).
2. Feynman R. P., Theory of Fundamental Processes, Benjamin, New York, 1961, Ch. 23.
3. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., **A126**, 360 (1931).
4. Oppenheimer J. R., Phys. Rev., **35**, 562 (1930).
5. Kramers H. A., Proc. Acad. Sci. Amsterdam, **A40**, 814 (1937).
6. Becker R., Nachr. Akad. Wiss. Goettingen Math.-Phys. Kl., p. 39 (1945).
7. Chraplyvy Z. V., Phys. Rev., **91**, 388; **92**, 1310 (1953); **99**, 317 (1955).
8. Darwin C. G., Proc. Roy. Soc., **A118**, 654 (1928).

## *Отсутствие достаточно обоснованных аргументов, позволяющих теоретически вывести реально существующие взаимодействия*

С капризностью природы, которую она проявила, создав четыре основных вида взаимодействия столь резко различной силы, может поспорить лишь ее же не менее загадочный произвол в выборе масс так называемых элементарных частиц.

Разнообразные попытки понять с классической точки зрения тайну взаимодействия приводили как к монументальным теоретическим построениям, вроде эйнштейновской теории тяготения, так и к провалам, вроде эйнштейновской единой теории поля. Теперь уже никто не пытается подойти к проблеме взаимодействия с этой стороны, отчасти потому, что электромагнетизм и гравитация охватывают, как оказалось, лишь часть наблюдаемых проявлений взаимодействия.

Экспериментальное исследование так называемых сильного и слабого взаимодействий, которые с эмпирической точки зрения, по-видимому, так же не связаны между собой, как электромагнетизм и гравитация, накопило со времени создания квантовой механики весьма обширный материал, делающий своевременными поиски среди основных принципов квантовой механики того принципа, исходя из которого удалось бы построить теорию взаимодействий.

Произвол в выборе фазы вектора состояния, в частности, был излюбленной отправной точкой многих попыток, направленных на получение реально существующих взаимодействий из соображений инвариантности. Для этого подхода типична такая последовательность рассуждений.

Рассмотрим одночастичное состояние  $|1\rangle = a^+|0\rangle$ , характеризуемое набором  $\psi$ -функций  $\phi_\tau(\mathbf{q})$ , таких, что

$$W_\tau = \int \phi_\tau^*(\mathbf{q}) \phi_\tau(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 1 \quad (20.1)$$

и

$$R_{\tau\tau'} e^{i\gamma_{\tau\tau'}} = \int \phi_{\tau'}^*(\mathbf{q}) \phi_\tau(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \text{комплексное число}, \quad (20.2)$$

такое, что вероятность нахождения значений  $\tau'$  наблюдаемых величин, если известно, что частица находится в состоянии, ха-

характеризуемом значениями  $\tau$ ,

$$R_{\tau\tau'} = R_{\tau\tau'}^2. \quad (20.3)$$

Любое такое состояние можно описать линейной суперпозицией  $\psi$ -функций  $\psi_k(\mathbf{q})$ , соответствующих состояниям с определенным значением импульса  $k$ :

$$\phi_\tau(\mathbf{q}) = \sum_k c_k(\tau) \psi_k(\mathbf{q}). \quad (20.4)$$

Введенные выше величины можно выразить через коэффициенты этого разложения

$$W_\tau = \sum_k |c_k(\tau)|^2, \quad (20.5)$$

$$R_{\tau\tau'} e^{i\gamma_{\tau\tau'}} = \sum_k c_k^*(\tau') c_k(\tau).$$

Теперь возникает следующий вопрос. Если записать

$$\phi_\tau(\mathbf{q}) = A_\tau(\mathbf{q}) e^{i\alpha_\tau(\mathbf{q})}, \quad (20.6)$$

где  $A_\tau(\mathbf{q})$  и  $\alpha_\tau(\mathbf{q})$  — действительные функции, то в какой степени фаза  $\alpha_\tau(\mathbf{q})$  определяется двумя величинами, которые имеют смысл наблюдаемых величин, а именно  $W_\tau$  и  $R_{\tau\tau'}$ ?

Ясно, что  $W_\tau$  не зависит от  $\alpha_\tau(\mathbf{q})$ , и, следовательно, фаза не определяется величиной  $W_\tau$ . Единственное требование, возникающее при задании  $R_{\tau\tau'}$ , состоит в том, что интеграл (20.2) должен иметь определенный модуль. Следовательно, хотя подынтегральная функция и не обязана иметь определенной фазы в каждой точке, но разность фаз в любых двух не обязательно соседних точках пространства должна быть строго определена. Это следует из обобщения простых правил, которым подчиняется сложение комплексных чисел. Предположим, что в сумме  $R(\cos \gamma + i \sin \gamma) = R_1(\cos \gamma_1 + i \sin \gamma_1) + R_2(\cos \gamma_2 + i \sin \gamma_2)$  требуется определить только  $R$ , а  $\gamma$  может быть произвольным. Из элементарной формулы  $R^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2 \cos(\gamma_1 - \gamma_2)$  следует, что при заданном  $R$  определена только разность  $\gamma_1 - \gamma_2$ .

Таким образом, изменение фазы произведения  $\phi_{\tau'}^*(\mathbf{q}) \phi_\tau(\mathbf{q})$  вдоль замкнутой кривой должно быть равно нулю. Отсюда следует, что изменение фазы функции  $\phi_\tau(\mathbf{q})$  вдоль замкнутой кривой должно быть равно по величине и противоположно по знаку изменению фазы функции  $\phi_{\tau'}^*(\mathbf{q})$ ; поэтому изменение фазы должно быть одинаково для всех функций  $\phi_\tau(\mathbf{q})$ . Получаем вывод:

*Изменение фазы  $\psi$ -функции вдоль замкнутой кривой одинаково для всех  $\psi$ -функций независимо от  $\tau$ .*

Другими словами, изменение фазы вдоль замкнутой кривой есть нечто такое, что определяется динамическими свойствами самой системы и не зависит от природы конкретного состояния. Это наводит на мысль об использовании неоднозначности фазы для учета характеристик внешнего окружения частицы, например поля, в котором она движется.

Чтобы исследовать эту возможность, запишем, объединяя зависимость от координат и времени,

$$\Phi_{\tau}(x) = \Phi_{\tau}^0(x) e^{i\beta(x)}. \quad (20.7)$$

Здесь  $\Phi_{\tau}^0(x)$  — «обычная»  $\psi$ -функция, т. е. функция, имеющая определенную фазу в каждой точке  $x = (\mathbf{q}, t)$  пространства — времени, а вся неопределенность фазы заключена во множителе  $e^{i\beta(x)}$ . Из сказанного выше следует, что  $\beta(x)$  не обязана быть функцией  $x$ , имеющей определенное значение в каждой точке, но  $\beta(x)$  должна иметь в каждой точке определенные значения производных

$$\kappa_{\nu} = \frac{\partial \beta}{\partial x_{\nu}}, \quad (20.8)$$

которые, вообще говоря, не удовлетворяют условию интегрируемости  $\partial \kappa_{\nu} / \partial x_{\mu} = \partial \kappa_{\mu} / \partial x_{\nu}$ . Изменение фазы вдоль замкнутой кривой должно быть наблюдаемой величиной, поскольку от него зависит  $R_{\tau\tau}$ . В четырехмерном пространстве это изменение фазы определяется по теореме Стокса

$$\oint \kappa_{\mu} dx_{\mu} = \int \int \left( \frac{\partial \kappa_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \kappa_{\mu}}{\partial x_{\nu}} \right) dS_{\mu\nu}, \quad (20.9)$$

где  $dS_{\mu\nu}$  — антисимметричный тензор элемента поверхности, «натянутой» на кривую.

Теперь заманчиво отождествить производные фазы  $\beta$  с электромагнитными потенциалами

$$\kappa_{\nu} = -eA_{\nu}, \quad (20.10)$$

так чтобы

$$\frac{\partial \kappa_{\nu}}{\partial x_{\mu}} - \frac{\partial \kappa_{\mu}}{\partial x_{\nu}} = -eF_{\mu\nu} \quad (20.11)$$

можно было отождествить с тензором электромагнитного поля, если  $e$  — численное значение электрического заряда рассматриваемой частицы. Однородные уравнения Максвелла

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_{\lambda}} = 0 \quad (20.12)$$

тогда автоматически удовлетворяются и сводятся к требованию, чтобы правая часть равенства (20.9) не зависела от того, какая



из поверхностей, натянутых на замкнутую кривую, выбрана. Действительно, если взять две таких поверхности, то разность между интегралами  $\int F_{\mu\nu} dS_{\mu\nu}$ , взятыми по этим поверхностям, по теореме Гаусса равна

$$\Delta \int F_{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = \int \varepsilon_{\chi\lambda\mu\nu} \frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} d^4x, \quad (20.13)$$

где интеграл в правой части берется по объему между двумя поверхностями и условие (20.12) необходимо для обращения этого выражения в нуль.

Отождествление производной фазы с электромагнитным потенциалом, выражаемое равенством (20.10), должно приводить к существованию некоторых наблюдаемых эффектов, значение которых для квантовомеханического представления о взаимодействии впервые было осознано Аароновым и Бомом и которые должны поразить любого физика, воспитанного на классической электродинамике. Если, например, когерентный пучок электронов разделяется на две части, огибающие соленоид, то наблюдаемая за соленоидом интерференционная картина будет непрерывно сдвигаться, если непрерывно менять поток  $F$  через соленоид. Это следует из равенства (20.10). Действительно, если рассмотреть в некоторой точке интерференционной картины  $\psi$ -функцию, являющуюся линейной комбинацией двух  $\psi$ -функций, соответствующих двум путям по обе стороны соленоида:

$$\phi = \phi_1 e^{i\beta_1} + \phi_2 e^{i\beta_2}, \quad \beta_1 = -e \int_1 \mathbf{A} d\mathbf{q}, \quad \beta_2 = -e \int_2 \mathbf{A} d\mathbf{q}, \quad (20.14)$$

то интерференция между двумя пучками будет зависеть от

$$\beta_2 - \beta_1 = e \oint \mathbf{A} d\mathbf{q} = eF, \quad (20.15)$$

где интеграл берется по замкнутому контуру, образованному двумя путями вокруг соленоида, и, следовательно,  $F$  — полный поток через соленоид.

Поскольку этот эффект будет наблюдаться даже в том случае, если электронный пучок вовсе не попадает в область с отличным от нуля магнитным полем, Бом и Ааронов утверждали, что в квантовой механике потенциалы приобретают статус наблюдаемых величин, которым они не обладают в классической электродинамике. Бом и Ааронов подчеркивали, что этот вывод неизбежен, если пытаться сохранить концепцию *локальности* взаимодействия в качестве одного из основных постулатов.

Можно, однако, сформулировать квантовую электродинамику, вообще не пользуясь потенциалами, если признать, что

нелокальность присуща самому понятию фазы, зависящей от пути интегрирования, как это показал Манделстам. Тогда более разумно, по-видимому, рассматривать эксперимент Бома — Ааронова как указание на существенную нелокальность, свойственную  $\psi$ -функциям в электромагнитном поле<sup>1)</sup>. Это свойство  $\psi$ -функций можно продемонстрировать и другим способом. Дифференцируя (20.7), получаем

$$\frac{\partial \Phi_\tau}{\partial x_\nu} = e^{i\beta} \left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} + i\kappa_\nu \right) \Phi_\tau^0 = e^{i\beta} \left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} - ieA_\nu \right) \Phi_\tau^0. \quad (20.16)$$

Отсюда следует, что если  $\Phi_\tau$  удовлетворяет любому уравнению, содержащему оператор энергии — импульса  $P_\mu = i(\partial/\partial x_\mu)$ , то  $\Phi_\tau^0$  будет удовлетворять и уравнению, в котором  $P_\mu$  заменено на  $P_\mu + eA_\mu$ . На основе равенства (20.10) тогда необходимо заключить, что  $\psi$ -функция  $\Phi$  всегда удовлетворяет одному и тому же уравнению независимо от того, присутствует поле или нет, и все влияние поля сводится к тому, что нарушается однозначность фазы. Это эквивалентно положению, при котором «обычная» часть  $\psi$ -функции  $\Phi^0$ , а именно та часть, которая имеет определенную фазу, удовлетворяет уравнению, в котором  $P_\mu$  заменено на  $P_\mu + eA_\mu$ . В частности, уравнение Дирака для электрона в электромагнитном поле теперь принимает вид

$$\gamma_\mu (P_\mu + eA_\mu) \psi = m\psi, \quad (20.17)$$

где  $\psi$  теперь имеет определенную фазу в каждой точке пространства — времени.

Следует заметить, что это уравнение инвариантно относительно преобразований фазы, содержащих *однозначные* функции  $\lambda(x)$ ,

$$\psi \rightarrow \psi e^{ie\lambda(x)} \quad (20.18)$$

при условии, что преобразование (20.18) сопровождается калибровочным преобразованием векторных потенциалов

$$A_\nu \rightarrow A_\nu + \frac{\partial \lambda}{\partial x_\nu}. \quad (20.19)$$

Эта инвариантность становится очевидной, если ввести явно зависимость  $\Phi$  от пути интегрирования

$$\Phi(x, P) = \Phi^0(x) \exp \left[ -ih \int_{-\infty}^x A_\mu(\xi) d\xi_\mu \right] \quad (20.20)$$

<sup>1)</sup> Нелокальность, возникающая при исключении потенциалов и переходе к напряженностям поля, имеет чисто внешний характер и не приводит в отличие от истинной нелокальных теорий к нарушению требований причинности (см. по этому поводу [7\*]). Критический анализ аргументации Бома и Ааронова содержится в работе [8\*]. — Прим. ред.

и калибровочно-инвариантную производную

$$\partial_{\mu}\Phi(x, P) = \lim_{dx_{\mu} \rightarrow 0} \left\{ \frac{[\Phi(x + dx_{\mu}, P') - \Phi(x, P)]}{dx_{\mu}} \right\}, \quad (20.21)$$

где контур  $P'$  получается из  $P$  продолжением на величину  $dx_{\mu}$  в направлении  $x_{\mu}$ , т. е.  $P'$  проходит через точку  $x$  — конец контура  $P$ . Уравнение Дирака можно тогда записать в виде

$$i\gamma_{\mu}\partial_{\mu}\Phi = m\Phi. \quad (20.22)$$

Следует иметь в виду, что операторы  $\partial_{\mu}$ ,  $\partial_{\nu}$  при наличии поля не коммутируют:

$$(\partial_{\mu}\partial_{\nu} - \partial_{\nu}\partial_{\mu})\Phi = -ie\Phi F_{\mu\nu}. \quad (20.23)$$

Как средство для облегчения вычислений электромагнитные потенциалы, конечно, всегда очень удобны, если требуется действительно решить уравнение (20.22).

Правило замены  $P_{\mu}$  на  $P_{\mu} + eA_{\mu}$  при наличии электромагнитного поля известно давно и успешно применяется для правильного описания экспериментальных ситуаций в тех случаях, когда представление электромагнитного поля классическими потенциалами имеет смысл. Сравнение энергетических уровней в кулоновском поле, полученных при решении уравнения (20.17), с наблюдаемыми значениями можно найти практически во всех учебниках квантовой механики. Хорошее приближение к действительности, получаемое при использовании этого эмпирического правила, тем более удивительно, если вспомнить, сколько произвольных допущений сделано при его «выводе» с помощью приведенных выше рассуждений.

Возможно, наиболее серьезным недостатком аргументации, приведшей к равенству (20.10), является полная произвольность значения параметра  $e$ , названного электрическим зарядом рассматриваемой частицы, который, например, можно положить равным нулю и тем самым сделать бессмысленным все проведенное выше рассмотрение. Другими словами, до сих пор не выдвинуто какой-либо причины, обуславливающей существование заряженных или незаряженных частиц. В частности, совершенно не ясно, почему по аналогии с электронами, подчиняющимися уравнению (20.17), не существуют нейтрино, взаимодействующие с электромагнитным полем и подчиняющиеся соответствующим образом модифицированному нейтринному уравнению  $\sigma_{\mu}(P_{\mu} + eA_{\mu})\psi = 0$ .

В этой связи уместно вспомнить любопытное рассуждение Дирака, основанное на фундаментальной неопределенности фазы любого комплексного числа, которая определена с точностью  $n2\pi$ , где  $n$  — целое число. Рассматривая однозначную часть  $\psi$ -функции  $\Phi^0$ , Дирак утверждает, что изменение фазы при

движении вдоль малого замкнутого контура должно быть мало и не может равняться величине, кратной  $2\pi$ , поскольку в пределе бесконечно малого контура это противоречило бы непрерывности  $\Phi$ . Однако существует исключительный случай, а именно когда  $\Phi^0$  обращается в нуль, поскольку при этом фаза не имеет смысла. Поскольку функция  $\Phi^0$  комплексна, для ее обращения в нуль должны выполняться два условия, так что, вообще говоря, точки, в которых  $\Phi(x)$  обращается в нуль, будут лежать на некоторой линии узлов. Из соображений непрерывности можно заключить, что изменение фазы при движении вдоль контура, охватывающего линию узлов, в пределе должно составить  $n2\pi$ . Это целое число  $n$  является характеристикой данной линии узлов, а его знак может быть связан с направлением обхода, которое в свою очередь определяется заданием направления на линии узлов. Если рассмотреть теперь большой контур в координатном пространстве, через который проходит несколько линий узлов, то полное изменение фазы вдоль этой кривой

$$\Delta\beta = 2\pi \sum_i n_i + e \int \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}. \quad (20.24)$$

Если поверхность замкнута, то выражение (20.24) должно обращаться в нуль:

$$\sum_{\text{з. п.}} n_i = -\frac{e}{2\pi} \int \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}, \quad (20.25)$$

где суммирование производится по замкнутой поверхности. Если  $\sum_{\text{з. п.}} n_i \neq 0$ , то это значит, что некоторые линии узлов оканчиваются внутри замкнутой поверхности. Таким образом, концевые точки линий узлов, если они существуют, совпадают для всех  $\psi$ -функций и представляют собой источники магнитного потока  $4\pi f = 2\pi n/e$ , где  $f$  — заряд магнитного монополя в концевой точке:

$$f = \frac{n}{2e}. \quad (20.26)$$

Эти рассуждения не показывают, конечно, должны ли существовать в природе такие линии узлов с концевыми точками или без них. Как в случае электрического заряда  $e$ , аргументы, указывающие на существование  $f$ , не настолько определены, чтобы доказать существование или несуществование определенного конечного значения  $n$ . Все экспериментальные данные, накопленные к настоящему времени, показывают, что магнитный монополюль в природе *не существует*<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Проблема магнитного монополя продолжает обсуждаться вплоть до настоящего времени, хотя ситуация здесь едва ли может считаться ясной (см. [9\*—12\*]). — *Прим. ред.*

Выражение (20.26) инвариантно по отношению к инверсии координат и изменению направления движения на обратное только в том случае, если при любом из этих преобразований изменяет знак  $n$  — характеристика линии узлов, и независимо от того, меняет ли при этом преобразовании свой знак  $e$ , вследствие противоположных трансформационных свойств электрического и магнитного полей.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Первая попытка вывести электромагнитное взаимодействие из инвариантности уравнения Шредингера по отношению к преобразованиям фаз, по-видимому, принадлежит Лондону [1].

Дирак [2] использовал неопределенность фазы любой однозначной  $\psi$ -функции для обоснования возможности существования магнитного монополя.

Ааронов и Бом [3] привлекли внимание к экспериментам, которые прямо продемонстрировали неоднозначность фазы при наличии электромагнитного поля. Эксперимент Ааронова и Бома с магнитным соленоидом в расщепленном электронном пучке был действительно поставлен Чамберсом [4].

Манделстам [5] предложил формулировку электродинамики без потенциалов и показал, в каком смысле зависимость фазы от пути означает нелокальность  $\psi$ -функции в присутствии электромагнитного поля.

Читатели, интересующиеся сравнением решений уравнения (20.17) с экспериментальными данными для атомарного водорода, отсылаются к брошюре Серизэса [6], где эти результаты изложены особенно кратко и доступно.

### Литература

1. London F., Zs. Phys., 42, 375 (1927).
2. Dirac P. A. M., Proc. Roy. Soc., A133, 60 (1931).
3. Aharonov Y., Bohm D., Phys. Rev., 115, 485 (1959).
4. Chambers R. G., Phys. Rev. Letters, 5, 3 (1960).
5. Mandelstam S., Ann. Phys. New York, 19, 1 (1962).
6. Series G. W., Spectrum of Atomic Hydrogen, London and New York, 1957.
- 7\*. Огневский В. И., Полубариннов И. В., ЖЭТФ, 43, 1365 (1962).
- 8\*. Фейнберг Е. Л., Усп. физич. наук, 78, 53 (1962).
- 9\*. Dirac P. A. M., Phys. Rev., 74, 817 (1948).
- 10\*. Schwinger J., Phys. Rev., 127, 1147 (1962).
- 11\*. Девонс С., Усп. физич. наук, 85, 755 (1965).
- 12\*. Болотовский Б. М., Усп. физич. наук, 85, 761 (1965).

## Представление о компенсирующем поле<sup>1)</sup>

Требование инвариантности относительно фазовых преобразований (20.18) приводит к необходимости введения какого-то поля, которое за счет калибровочного преобразования (20.19) компенсировало бы влияние преобразования (20.18) на уравнение для  $\psi$ -функции. Поэтому некоторые авторы поддались искушению возвести обобщенную форму калибровочной инвариантности в ранг фундаментального принципа и искали в идее «компенсирующего поля» *raison d'être*<sup>2)</sup> всех наблюдающихся в природе взаимодействий. Формулировка такого подхода существенно упрощается, если в качестве отправной точки использовать так называемый принцип наименьшего действия, состоящий в том, что для реально осуществляющихся  $\psi$  величина

$$\int L \left[ \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_\nu} \right] d^4x \quad (21.1)$$

экстремальна. Уравнения, которым подчиняется  $\psi$ -функция, вытекают отсюда как уравнения Эйлера — Лагранжа этой вариационной задачи:

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} \equiv \frac{\partial L}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left[ \frac{\partial L}{\partial (\partial \psi / \partial x_\nu)} \right] = 0. \quad (21.2)$$

Например, «лагранжиан»  $L$ , приводящий при использовании (21.2) к уравнению Дирака и сопряженному ему уравнению, имеет вид

$$L_D = i\bar{\psi}\gamma_\mu \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} - m\bar{\psi}\psi. \quad (21.3)$$

Необходимо отдавать себе отчет в том, что введение условия (21.1) является чисто формальным приемом, и процедура, при-

<sup>1)</sup> При чтении этого параграфа следует иметь в виду серьезную критику основной идеи теории компенсирующего поля, состоящей в том, что требование обобщенной калибровочной инвариантности с необходимостью приводит к возникновению векторного поля (см. [10\*]). — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Здесь «первопричина» (*фр.*). — *Прим. ред.*

водящая при подстановке (21.3) в (21.2) к уравнению Дирака, ни в коей мере не является «выводом» этого уравнения.

Предположим, что необходимо потребовать инвариантности  $L$  относительно унитарных преобразований типа

$$U = \exp [ie_\alpha(x) S_\alpha], \quad (21.4)$$

где  $S_\alpha$  ( $\alpha=1, 2, \dots, n$ ) —  $n$  эрмитовых операторов, а  $e_\alpha(x)$  —  $n$  действительных функций координат и времени. Идея состоит в том, чтобы связать операторы  $S_\alpha$  с внутренними свойствами элементарных частиц, такими, как электрический заряд, изоспин и т. д. Например, можно представить себе двух наблюдателей, расположенных в различных точках пространства. Пусть, называя определенный нуклон нейтроном или протоном, они пользуются взаимно противоположными определениями этих частиц, но наблюдают за *одним и тем же* актом сильного взаимодействия, которое инвариантно относительно такого изменения названий<sup>1)</sup>, т. е. инвариантно относительно поворотов в абстрактном изоспиновом пространстве. В этом случае генераторы пространственно-временных преобразований, связанных с динамическими, а не с внутренними свойствами элементарных частиц, полностью исключаются из рассмотрения. Координаты  $x$  относятся к плоскому пространственно-временному континууму, где смещения, в частности, интегрируемы. Если параметры, характеризующие пространственно-временные преобразования, такие, как смещения, повороты и преобразования Лоренца, сделать зависящими от координат, то генераторы  $S_\alpha$  не будут, вообще говоря, коммутировать с параметрами  $e_\alpha(x)$ , и придется рассматривать неинтегрируемые, искривленные пространства. Подробнее этот вопрос мы рассмотрим в гл. 22.

Преобразование (20.18) соответствует частному случаю, когда  $n=1$ ,  $S=eI$  и  $e(x)=\lambda(x)$ . Тогда лагранжиан (21.3) неинвариантен относительно этого преобразования, поскольку

$$U^{-1} \frac{\partial}{\partial x_\mu} U = \frac{\partial}{\partial x_\mu} + U^{-1} \frac{\partial U}{\partial x_\mu}. \quad (21.5)$$

Однако этот недостаток лагранжиана  $L_D$  можно исправить, введя компенсирующее поле  $B_\mu$ , которое преобразуется как

$$B'_\mu = U^{-1} B_\mu U + \frac{i}{g} U^{-1} \frac{\partial U}{\partial x_\mu}, \quad (21.6)$$

так что если  $\psi$ -функция преобразуется как

$$\psi' = U^{-1} \psi, \quad \bar{\psi}' = U \bar{\psi}, \quad (21.7)$$

<sup>1)</sup> Здесь имеется в виду, что сильное взаимодействие инвариантно относительно замены протона нейтроном и обратно. — *Прим. ред.*

то лагранжиан

$$\tilde{L}_D = i\bar{\psi}\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - igB_\mu\right)\psi - m\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}'\gamma_\mu\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - igB'_\mu\right)\psi' - m\bar{\psi}'\psi' \quad (21.8)$$

теперь инвариантен относительно преобразования (21.4). В упоминавшемся выше частном случае параметр  $g$ , до сих пор произвольный, следует теперь отождествить с численной величиной  $e$  заряда электрона, а  $B_\mu$  -- с векторным электродинамическим потенциалом  $A_\mu$ .

Очевидно, что, опираясь на калибровочную инвариантность, нельзя вводить скалярные поля. Любое компенсирующее поле должно быть с необходимостью векторным. Следовательно, если компенсирующее поле является первичным переносчиком взаимодействия между фермионами, то пионное поле, которое в течение длительного времени считали тем «клесм», который удерживает нуклоны вместе, следует «разжаловать» из разряда тех полей, кванты которых рассматриваются как элементарные частицы. Для любой калибровочно-инвариантной теории сильных взаимодействий в принципе требуются векторные мезоны в качестве переносчиков взаимодействия, и в такой теории пионы следует считать составными частицами, например их можно рассматривать как связанные состояния нуклонов и антинуклонов, как впервые предложили Ферми и Янг.

Формулы преобразований (21.5) и (21.6) в общем случае довольно сложны, поскольку они зависят от антикоммутаторов операторов  $S_\alpha$ . Справедливы следующие разложения:

$$U^{-1} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} = i \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial x_\mu} S_\alpha - \frac{i^2}{2!} \epsilon_\alpha \frac{\partial \epsilon_\beta}{\partial x_\mu} [S_\alpha, S_\beta] + \\ + \frac{i^3}{3!} \epsilon_\alpha \epsilon_\beta \frac{\partial \epsilon_\gamma}{\partial x_\mu} [S_\alpha, [S_\beta, S_\gamma]] - \dots, \quad (21.9)$$

$$U^{-1} B_\mu U = B_\mu - i\epsilon_\alpha [S_\alpha, B_\mu] + \frac{i^2}{2!} \epsilon_\alpha \epsilon_\beta [S_\alpha, [S_\beta, B_\mu]] - \dots \quad (21.10)$$

Если считать, что локальная калибровочная инвариантность, определяемая равенством (21.4), имеет место для произвольных операторов  $S_\alpha$ , то мы окажемся лицом к лицу с обескураживающе богатым разнообразием возможных компенсирующих полей. Необходимы какие-то физические причины, ограничивающие возможности формального выбора компенсирующих полей. К выяснению этих причин мы перейдем ниже и приведем некоторые примеры. Существенного упрощения можно добиться, если ограничиться рассмотрением операторов  $S_\alpha$ , удовлетворяющих ком-



мутационным соотношениям типа

$$[S_\alpha, S_\beta] = C_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma. \quad (21.11)$$

«Структурные константы»  $C_{\alpha\beta\gamma}$  набора преобразований  $S_\alpha$  в этом случае не зависят от представления, выбранного для  $S_\alpha$ , и удовлетворяют соотношениям

$$C_{\alpha\beta\gamma} + C_{\beta\alpha\gamma} = 0 \quad (21.12)$$

и

$$C_{\alpha\beta\epsilon} C_{\epsilon\gamma\delta} + C_{\beta\gamma\epsilon} C_{\epsilon\alpha\delta} + C_{\gamma\alpha\epsilon} C_{\epsilon\beta\delta} = 0, \quad (21.13)$$

где (21.12) вытекает из определения (21.11), а (21.13) следует из тождества Якоби для тройных коммутаторов. Частными случаями операторов, удовлетворяющих условию (21.11), являются преобразования, изоморфные евклидовым вращениям в пространствах трех и четырех измерений, и преобразования Лоренца.

Вводя без ограничения общности новые полевые переменные  $B_{\alpha, \mu}$ , коммутирующие со всеми операторами  $S_\alpha$ , с помощью соотношения

$$B_{\mu} = S_\alpha B_{\alpha, \mu}, \quad (21.14)$$

можно переписать выражения (21.9) и (21.10) в виде

$$U^{-1} \frac{\partial U}{\partial x_\mu} = S_\alpha \left( i \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial x_\mu} - \frac{i^2}{2!} \epsilon_\beta \frac{\partial \epsilon_\gamma}{\partial x_\mu} C_{\beta\gamma\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{i^3}{3!} \epsilon_\beta \epsilon_\gamma \frac{\partial \epsilon_\delta}{\partial x_\mu} C_{\gamma\delta\epsilon} C_{\beta\epsilon\alpha} - \dots \right), \quad (21.15)$$

$$U^{-1} B_\mu U = S_\alpha \left( B_{\alpha, \mu} - i \epsilon_\beta B_{\gamma, \mu} C_{\beta\gamma\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{i^2}{2!} \epsilon_\beta \epsilon_\gamma B_{\delta, \mu} C_{\gamma\delta\epsilon} C_{\beta\epsilon\alpha} - \dots \right). \quad (21.16)$$

Следовательно, операторы (21.6) удовлетворяют *бесконечно малому* калибровочному преобразованию, если  $B_{\alpha, \mu}$  преобразуются в соответствии с формулой

$$\delta B_{\alpha, \mu} = B_{\alpha, \mu} - B'_{\alpha, \mu} = i \epsilon_\beta B_{\gamma, \mu} C_{\beta\gamma\alpha} + \frac{1}{g} \frac{\partial \epsilon_\alpha}{\partial x_\mu}. \quad (21.17)$$

Эта формула дает ключ к построению калибровочно-инвариантного лагранжиана  $L_B$  для поля  $B_{\alpha, \mu}$ , который позволяет получить уравнения компенсирующего поля и который в частном случае электромагнитного поля должен совпадать с хорошо известным лагранжианом

$$L_A = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (21.18)$$

содержащим только калибровочно-инвариантные поля

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}. \quad (21.19)$$

Вводя для неизвестного лагранжиана обозначение

$$L_B = L_B(B_{\alpha, \mu}; B_{\alpha, \mu | \nu}), \quad B_{\alpha, \mu | \nu} \equiv \frac{\partial B_{\alpha, \mu}}{\partial x_\nu}, \quad (21.20)$$

потребуем в качестве следствия инвариантности по отношению к преобразованиям (21.17), чтобы выполнялось условие

$$\delta L_B = \frac{\partial L_B}{\partial B_{\alpha, \mu}} \delta B_{\alpha, \mu} + \frac{\partial L_B}{\partial B_{\alpha, \mu | \nu}} \delta B_{\alpha, \mu | \nu} = 0. \quad (21.21)$$

Подставляя (21.17) и помня, что  $\delta$  и  $\partial/\partial x_\nu$  коммутируют, получаем

$$\delta B_{\alpha, \mu | \nu} = i\epsilon_\beta B_{\nu, \mu | \nu} C_{\beta\nu\alpha} + i \frac{\partial \epsilon_\beta}{\partial x_\nu} B_{\nu, \mu} C_{\beta\nu\alpha} + \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \epsilon_\alpha}{\partial x_\nu \partial x_\mu}. \quad (21.22)$$

Собирая коэффициенты при  $\epsilon_\alpha$ ,  $\partial \epsilon_\alpha / \partial x_\mu$  и  $\partial^2 \epsilon_\alpha / \partial x_\nu \partial x_\mu$ , получаем

$$C_{\alpha\beta\gamma} \left( B_{\beta, \mu} \frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \mu}} + B_{\beta, \mu | \nu} \frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \mu | \nu}} \right) = 0, \quad (21.23)$$

$$\frac{\partial L_B}{\partial B_{\alpha, \mu}} + ig C_{\alpha\beta\gamma} B_{\beta, \nu} \frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \nu | \mu}} = 0, \quad (21.24)$$

$$\frac{\partial L_B}{\partial B_{\alpha, \mu | \nu}} + \frac{\partial L_B}{\partial B_{\alpha, \nu | \mu}} = 0. \quad (21.25)$$

Уравнение (21.25) может выполняться только в том случае, если производные от  $B$  входят в  $L_B$  в виде комбинации  $B_{\alpha, [\mu | \nu]} = B_{\alpha, \nu | \mu} - B_{\alpha, \mu | \nu}$ , а из (21.24) следует далее, что  $B_{\alpha, [\mu | \nu]}$  входит в  $L_B$  только в виде следующего сочетания:

$$G_{\alpha, \mu\nu} = B_{\alpha, [\mu | \nu]} - \frac{ig}{2} C_{\beta\gamma\alpha} (B_{\beta, \mu} B_{\gamma, \nu} - B_{\beta, \nu} B_{\gamma, \mu}) = -G_{\alpha, \nu\mu}. \quad (21.26)$$

Уравнения (21.23) недостаточно для однозначного определения  $L_B$ . Однако если мы хотим получить общее выражение, содержащее (21.18) как частный случай, то следует ввести «напряженности поля»

$$G_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial B_\mu}{\partial x_\nu} - ig (B_\mu B_\nu - B_\nu B_\mu) = S_\alpha G_{\alpha, \mu\nu} \quad (21.27)$$

и записать

$$\begin{aligned} L_B &= -\frac{1}{4} \text{Sp } G_{\mu\nu} G_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} G_{\alpha, \mu\nu} G_{\beta, \mu\nu} \text{Sp } S_\alpha S_\beta = \\ &= -\frac{1}{4} G_{\alpha, \mu\nu} G_{\beta, \mu\nu} C_{\alpha\gamma\delta} C_{\delta\gamma\beta}. \end{aligned} \quad (21.28)$$

Доказательство того, что  $L_B$  действительно удовлетворяет уравнению (21.23), громоздко, и здесь мы его опускаем.

Полный лагранжиан, описывающий взаимодействующие друг с другом поля  $\psi$  и  $B$ , имеет теперь вид

$$L = \tilde{L}_D + L_B, \quad (21.29)$$

где производные от  $\psi$  появляются в комбинациях  $[(\partial/\partial x_\mu) - igS_\alpha B_{\alpha, \mu}] \psi$ , так что

$$\frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial (\partial \psi / \partial x_\mu)} S_\alpha \psi = \frac{i}{g} \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial B_{\alpha, \mu}}. \quad (21.30)$$

Произвольный параметр взаимодействия  $g$  может быть введен по-другому — как множитель, на который можно умножить  $L_B$ . При этом выводы, полученные в настоящей главе, не изменятся. Формально это эквивалентно выбору в качестве переменных величин полей  $B'_\mu = g B_\mu$  вместо  $B_\mu$ , так что

$$\partial_\mu \psi \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_\mu} - i S_\alpha B'_{\alpha, \mu} \right) \psi \quad \text{и} \quad L_B = g^{-1} L_B(B').$$

Инвариантность  $L$  по отношению к бесконечно малому калибровочному преобразованию, при котором  $B_{\alpha, \mu}$  изменяется в соответствии с (21.17), а  $\psi$  — в соответствии с формулами

$$\delta \psi = i \varepsilon_\alpha S_\alpha \psi, \quad (21.31)$$

$$\delta \bar{\psi} = -i \varepsilon_\alpha S_\alpha \bar{\psi}, \quad (21.32)$$

$$\delta \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} = i \frac{\partial \varepsilon_\alpha}{\partial x_\mu} S_\alpha \psi + i \varepsilon_\alpha S_\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu}, \quad (21.33)$$

приводит к закону сохранения «тока»

$$\frac{\partial J_{\alpha, \mu}}{\partial x_\mu} = 0, \quad (21.34)$$

который можно вывести следующим образом.

Поскольку  $L_B$  уже выбрано так, что при таком преобразовании  $\delta L_B = 0$ , нужно только записать

$$\delta \tilde{L}_D = \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial \psi} \delta \bar{\psi} + \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial \bar{\psi}} \delta \psi + \left[ \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial (\partial \psi / \partial x_\mu)} \right] \delta \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial B_{\alpha, \mu}} \delta B_{\alpha, \mu} = 0. \quad (21.35)$$

При этом мы использовали тот факт, что  $\tilde{L}_D$  не содержит ни  $(\partial \bar{\psi} / \partial x_\mu)$ , ни  $B_{\alpha, \mu | \nu}$ . Первый член обращается в нуль, поскольку, согласно уравнениям поля,

$$\frac{\delta L}{\delta \bar{\psi}} = \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial \bar{\psi}} = 0, \quad (21.36)$$

а остальные члены после подстановки (21.17), (21.31) и (21.33) принимают вид

$$\epsilon_a \left[ \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial \psi} S_a \psi + \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial (\partial \psi / \partial x_\mu)} S_a \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} + C_{\alpha\beta\gamma} B_{\beta, \mu} \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial B_{\gamma, \mu}} \right] + \frac{\partial \epsilon_a}{\partial x_\mu} \left[ \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial (\partial \psi / \partial x_\mu)} S_a \psi - \frac{i}{g} \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial B_{\alpha, \mu}} \right] = 0. \quad (21.37)$$

Вторые скобки обращаются в нуль в соответствии с (21.30), а для первых скобок можно воспользоваться уравнениями поля

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} = \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial \psi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial (\partial \psi / \partial x_\mu)} = 0 \quad (21.38)$$

и

$$\frac{\delta L}{\delta B_{\gamma, \mu}} = \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial B_{\gamma, \mu}} + \frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \mu}} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \mu | \nu}} = 0 \quad (21.39)$$

и получить

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[ \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial (\partial \psi / \partial x_\mu)} S_a \psi \right] + C_{\alpha\beta\gamma} \left( -B_{\beta, \mu} \frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \mu}} + B_{\beta, \mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \mu | \nu}} \right) = 0. \quad (21.40)$$

Теперь  $C_{\alpha\beta\gamma} B_{\beta, \mu} (\partial L_B / \partial B_{\gamma, \mu})$  можно заменить с учетом (21.33) и переписать (21.40) в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[ \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial (\partial \psi / \partial x_\mu)} S_a \psi + C_{\alpha\beta\gamma} B_{\beta, \nu} \frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \nu | \mu}} \right] = 0, \quad (21.41)$$

что совпадает по форме с (21.34), если принять за плотность тока

$$J_{\alpha, \mu} = \frac{\partial \tilde{L}_D}{\partial (\partial \psi / \partial x_\mu)} S_a \psi + C_{\alpha\beta\gamma} B_{\beta, \nu} \frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \nu | \mu}} = j_{\alpha, \mu}(\psi) + j_{\alpha, \mu}(B). \quad (21.42)$$

Уравнения (21.39), определяющие поле  $B$ , можно переписать в виде

$$\frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \mu}} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial L_B}{\partial B_{\gamma, \mu | \nu}} = i g j_{\alpha, \mu}(\psi). \quad (21.43)$$

Эти уравнения, за исключением случая  $C_{\alpha\beta\gamma} = 0$ , который соответствует взаимодействию, близкому к электромагнитному, существенно нелинейны, поскольку компенсирующее поле  $B$  действует как свой собственный источник, на что указывает наличие второго члена в правой части выражения для тока (21.42). Следовательно, векторные частицы (которые в завершённой

квантовой теории должны выступать как носители взаимодействия), за исключением случая  $C_{\alpha\beta\gamma} = 0$ , должны обладать теми же свойствами симметрии, что и первичные частицы, их порождающие. Таким образом, любые векторные мезоны, переносящие взаимодействие, связанное с изоспиновой симметрией нуклонов, сами должны обладать изоспином. Частицы, связанные с однопараметрической симметрией, являются исключением в том смысле, что они не обладают соответствующими свойствами источников поля. Так, фотоны не несут электрического заряда.

Если выбрать конкретный вид инвариантности по отношению к вращениям в изоспиновом пространстве, так что

$$S_{\alpha} = T_{\alpha} (\alpha = 1, 2, 3), \quad C_{\alpha\beta\gamma} = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}, \quad \text{Sp } S_{\alpha} S_{\beta} = 2\delta_{\alpha\beta}, \quad (21.44)$$

то получатся уравнения, характеризующие векторное поле  $\mathbf{B}_{\mu}$ , которое впервые ввели Янг и Миллс, пытаюсь описать некоторые факты, касающиеся сильных взаимодействий, с помощью векторных мезонов, обладающих барионным изоспином:

$$G_{\alpha, \mu\nu} \equiv \mathbf{G}_{\mu\nu} = \mathbf{B}_{[\mu | \nu]} + g [\mathbf{B}_{\mu} \mathbf{B}_{\nu}], \quad (21.45)$$

$$\partial_{\mu} \psi \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} - ig (\mathbf{T} \mathbf{B}_{\mu}) \right] \psi, \quad (\partial_{\mu} \partial_{\nu} - \partial_{\nu} \partial_{\mu}) \psi = -ig (\mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{T}) \psi, \quad (21.46)$$

$$L_B = -\frac{1}{2} (\mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{G}_{\mu\nu}), \quad (21.47)$$

$$J_{\alpha, \mu} \equiv \mathbf{J}_{\mu} = i\bar{\psi} \gamma_{\mu} \mathbf{T} \psi + i [\mathbf{G}_{\mu\nu} \mathbf{B}_{\nu}] = i\bar{\psi} \gamma_{\mu} \mathbf{T} \psi + i [\mathbf{B}_{[\mu | \nu]} \mathbf{B}_{\nu}], \quad (21.48)$$

$$\frac{\delta L_B}{\delta \mathbf{B}_{\mu}} = \frac{\partial \mathbf{G}_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}} - ig \mathbf{J}_{\mu}. \quad (21.49)$$

Компенсирующее поле обладает одной чертой, привлекательной со всех точек зрения, — оно не зависит от конкретного вида операторов  $S_{\alpha}$ , которые определяют свойства симметрии  $\psi$ -поля. Компенсирующее поле зависит лишь от структурных постоянных  $C_{\alpha\beta\gamma}$ , которые одинаковы для всех представлений операторов  $S_{\alpha}$ . Физически это означает, что компенсирующее поле  $B$  одинаково для всех  $\psi$ -полей, которые обладают симметрией определенного типа, заданной операторами  $S_{\alpha}$ . Поэтому существует только одно универсальное электромагнитное поле, которое за счет калибровочного преобразования компенсирует влияние однопараметрического изменения фаз, вызванного оператором электрического заряда.

Было предложено несколько схем для того, чтобы сочетать эмпирические свойства симметрии сильных взаимодействий, которые проявляются в сохранении различных характеристик частиц — барионного заряда, гиперзаряда и изоспина (см гл. 29),

с существованием векторных мезонных полей различных типов. Каждое из этих полей вводится описанным выше способом как компенсирующее поле  $B$ , возникающее за счет требования калибровочной инвариантности, так что упомянутые законы сохранения тождественны уравнениям типа (21.41). Следует отметить схему Сакурай, в которой постулируется существование трех типов векторных мезонов. Два из них с помощью представления о компенсирующем поле связываются с двумя однопараметрическими характеристиками — барионным зарядом и гиперзарядом, и один — с трехпараметрической характеристикой — изоспином.

Было высказано также несколько предложений считать переносчиком слабых взаимодействий некий векторный мезон, возникающий как компенсирующее поле вследствие калибровочной симметрии, характерной для частиц, которые участвуют в слабых взаимодействиях.

Однако все попытки отождествить реально наблюдаемые векторные мезоны с одним из возможных компенсирующих полей  $B$ , которые могут переносить какое-то взаимодействие, помимо электромагнитного, наталкиваются на один внутренний недостаток теории. Разработанный выше формализм нельзя распространить на компенсирующие поля  $B$ , в лагранжианы которых входят члены типа

$$-\frac{\mu_0^2}{2} B_{\alpha, \mu} B_{\alpha, \mu} \quad (21.50)$$

( $\mu_0$  — постоянная), не нарушив при этом калибровочную инвариантность, которая служит оправданием всего подхода в целом. С другой стороны, такие члены необходимы, если мы хотим описать реально существующие векторные мезоны, помимо фотона, поскольку лишь при учете членов типа (21.50) уравнения поля принимают вид

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} - \mu_0^2 B_\mu = igj_\mu, \quad (21.51)$$

необходимый для описания взаимодействия, приводящего к короткодействующим силам и, следовательно, к существованию мезонов с отличной от нуля массой покоя в соответствии с наблюдаемыми фактами.

Некоторые авторы использовали тот факт, что включение членов типа (21.50) в  $L_B$  не влияет на вывод выражения для тока (21.42) и закона сохранения (21.41), и оправдывали этим «частично калибровочно-инвариантные» теории, в которых поле  $B$ , в этом случае уже не заслуживающее названия «компенсирующего», связано с сохраняющимся током уравнением типа (21.51).

Этот подход не покажется совсем уже бессмысленным, если вспомнить «гибридную» сущность изложенной выше теории. Поле  $B$  до сих пор рассматривалось классически. В последовательной квантовой теории поля  $\psi$  и  $B$  всегда должны содержать операторы рождения и уничтожения, с которыми, в частности, связано появление так называемого эффекта поляризации вакуума. Поэтому можно доказать, следуя Швингеру, что если взаимодействие достаточно сильно, то даже в строго калибровочно-инвариантной теории векторные мезоны будут распространяться так же, как частицы с отличной от нуля массой покоя.

Интуитивно это можно понять при помощи следующих рассуждений. В реальной электродинамике относительная малость константы взаимодействия ( $e^2 = 1/137$ ) гарантирует устойчивость фотона по отношению к возможному распаду на два или больше атомов позитрония, поскольку энергия связи позитрония порядка  $-e^2 m$ , а масса образующих его частиц  $m$ . Аналогично любой внешний заряд  $Q$ , помещенный в электродинамический вакуум, будет поляризовать его, порождая виртуальные атомы позитрония лишь вблизи себя, и останется (с учетом возможной перенормировки численного значения) нескомпенсированным и способным играть роль источника далекодействующего кулоновского поля. Если теперь увеличивать силу взаимодействия (а это можно делать аналитически без нарушения калибровочной инвариантности, которая является структурным свойством теории и не зависит от величины  $e^2$ ), то при некотором критическом значении порядка  $e^2 \approx 1$  возникнет совершенно иная ситуация. Векторный мезон станет неустойчивым относительно распада на различные связанные состояния источников поля и приобретет такие свойства, которые обычно связываются с массивными векторными мезонами, способными распадаться на два или несколько пионов, каждый из которых в свою очередь можно рассматривать как связанные состояния нуклона и антинуклона. Любой внешний «заряд», помещенный в такого рода вакуум, вызовет цепной процесс поляризации, в результате которого первоначальный заряд переместится в пространственном смысле на бесконечность, что приведет к полной компенсации этого заряда в любом конечном объеме. Следовательно, не сохранится никакого далекодействующего поля, связанного с этим «зарядом», что выразится в отсутствии в этом случае векторных мезонов с нулевой массой покоя.

Аналитическая разработка этой заманчивой идеи, которая была высказана Швингером и подтверждена им на некоторых упрощенных моделях, ко времени написания настоящей книги еще не закончена. Поэтому все калибровочно-инвариантные теории сильных и слабых взаимодействий будут висеть в воздухе

до тех пор, пока не будет выяснен ключевой вопрос: может ли строгая калибровочно-инвариантная теория последовательно описать векторные мезоны с отличной от нуля массой покоя<sup>1)</sup>.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Янг и Миллс [1] впервые попытались построить теорию сильных взаимодействий на основе векторного мезонного поля, которое является компенсирующим полем, необходимым для обеспечения инвариантности по отношению к поворотам в изоспиновом пространстве с зависящей от координат фазой.

Предложение рассматривать нуклоны как связанные состояния нуклона и антинуклона было выдвинуто Ферми и Янгом [2].

Сакураи [3] пытался построить теорию сильных взаимодействий, включающую три типа компенсирующих полей, соответствующих трем типам векторных мезонов. Одно поле генерируется трехпараметрической группой преобразований, а каждое из двух других — однопараметрической группой преобразований. См. также работы Швингера [4] и Ли и Янга [5].

Роман [6] предложил схему компенсирующих полей, которая включает слабые взаимодействия. См. также работу Салама и Уорда [7]<sup>2)</sup>.

Глэшоу и Гелл-Манн [8] рассмотрели некоторые следствия, вытекающие из так называемых «частично калибровочно-инвариантных» теорий взаимодействия.

Швингер [9] привел формальный, но несколько нереалистичный пример, демонстрирующий возможность существования компенсирующих полей, имеющих конечную массу покоя, при выполнении строгой калибровочной инвариантности, если взаимодействие достаточно сильно.

### Литература

1. Yang C. N., Mills R. L., Phys. Rev., **96**, 191 (1954).
2. Fermi E., Yang C. N., Phys. Rev., **76**, 1739 (1949).
3. Sakurai J., Ann. Phys. N. Y., **11**, 1 (1960).
4. Schwinger J., Ann. Phys. N. Y., **2**, 407 (1957).
5. Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **98**, 1501 (1955).

<sup>1)</sup> Положительный ответ на этот вопрос был обоснован в работах [11\*, 12\*] без использования динамических моделей типа изложенной в тексте. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> По теории компенсирующих полей выпущен сборник переводов [13\*], в котором дана подробная библиография. — Прим. ред.



6. Roman P., Nuovo Cimento, **21**, 747 (1961).
7. Salam A., Ward J. C., Nuovo Cimento, **11**, 568 (1959).
8. Glashow S. L., Gell-Mann M., Ann. Phys. N. Y., **15**, 437 (1961).
9. Schwinger J., Phys. Rev., **128**, 2425 (1962).
- 10\*. Огневский В. И., Полубаринов И. В., Nuovo Cimento, **23**, 173 (1962).
- 11\*. Огневский В. И., Полубаринов И. В., ЖЭТФ, **41**, 247 (1961).
- 12\*. Feldman G., Matthews P., Phys. Rev., **130**, 1633 (1963).
- 13\*. «Элементарные частицы и компенсирующие поля», сборник переводов под ред. Д. Д. Иваненко, изд-во «Мир», 1964.

## Гравитация как компенсирующее поле

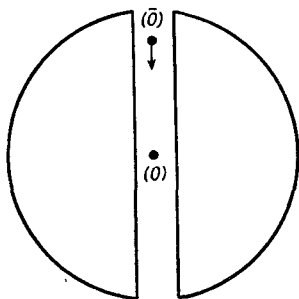
Единственным, кроме электромагнетизма, взаимодействием, которое не требует уравнений поля, соответствующих конечной массе покоя, и находится в этом смысле на уровне классической теории поля, свободной от каких бы то ни было расхождений с требованиями калибровочной инвариантности, является гравитация.

Между электромагнетизмом и гравитацией существует, конечно, одна фундаментальная разница. В то время как электромагнитную теорию можно сформулировать так, что она будет глобально инвариантна по отношению к преобразованиям Лоренца, при наличии гравитации можно требовать лишь *локальной* лоренц-инвариантности по той простой причине, что в этом случае инерциальные системы отсчета будут ускоряться одна по отношению к другой, если они разделены конечным расстоянием. Следовательно, описание событий в пространстве — времени требует задания *двух* чисел, а именно расстояния  $x$  от точки, где произошло событие, до начала той инерциальной системы координат, в которой мы его описываем, и величины  $u$ , которая определяет положение этого начала инерциальной системы в основной криволинейной системе координат.

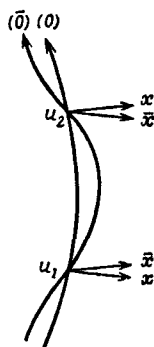
Для иллюстрации рассмотрим двух наблюдателей  $(0)$  и  $(\bar{0})$ , которые помещаются в началах координат двух инерциальных систем. Наблюдатель  $(0)$  располагается в центре Земли, а наблюдатель  $(\bar{0})$  совершает возвратно-поступательное движение по туннелю, проходящему через центр Земли (фиг. 23). В основном криволинейном континууме два наблюдателя будут описывать мировые линии, которые можно представить графически, как это сделано на фиг. 24. Интуитивно ясно, что переход от одной из этих систем координат к другой не может быть совершен с помощью преобразования Лоренца; это можно сделать лишь *локально* в тех случаях, когда мировые линии пересекаются, так как только в те моменты времени, когда начала этих систем совпадают, они не ускорены друг по отношению к другу. Операция смещения становится при таких условиях неинтегрируемой,

поскольку обе системы координат  $x$  и  $\bar{x}$ , движущиеся с точки зрения своих наблюдателей без вращения, вращаются друг по отношению к другу в промежутки между последовательными встречами в точках  $u_1$  и  $u_2$ , как указано на фиг. 24.

Эти рассуждения можно сделать формально точными, если ввести набор из 16 функций  $h_{\mu}^k(u)$ , которые позволяют в каждой



Фиг. 23. Пример двух инерциальных систем, ускоряемых одна по отношению к другой.



Фиг. 24. Мировые линии наблюдателей  $(0)$  и  $(\bar{0})$ , описываемые в криволинейном континууме.

точке континуума  $u_{\mu}$  записать преобразование к локальной инерциальной системе координат  $x_h$  в виде

$$\frac{\partial x^k}{\partial u^{\mu}} = h_{\mu}^k(u) \quad \text{и} \quad \frac{\partial u^{\mu}}{\partial x^k} = h_k^{\mu}(u), \quad (22.1)$$

так что

$$h_{\mu}^k h_k^{\nu} = \delta_{\mu}^{\nu}.$$

(Латинские индексы относятся к локальным инерциальным системам координат, а греческие — к основному континууму.) Поскольку  $h_{\mu}^k$  не обязаны удовлетворять какому-либо условию интегрируемости, т. е.

$$h_{\mu}^k |_{\nu} - h_{\nu}^k |_{\mu} \neq 0, \quad h_{\mu}^k |_{\nu} \equiv \frac{\partial h_{\mu}^k}{\partial u^{\nu}}, \quad (22.2)$$

их можно рассматривать как набор 16 независимых заданных функций, описывающих свойства заданного гравитационного поля, которое измеряют наблюдатели, жестко связанные с инерциальными системами.

Поэтому задача настоящей главы заключается в том, чтобы показать, как требование *локальной* лоренц-инвариантности накладывает динамические ограничения на  $h_{\mu}^k$ . Эти ограничения имеют вид уравнений поля, которым должны удовлетворять функции  $h_{\mu}^k$  по аналогии с ограничениями, накладываемыми калибровочной инвариантностью на векторные потенциалы в электродинамике и приводящими к уравнениям Максвелла как к одному из возможных наборов таких уравнений.

Можно использовать стандартный аппарат теории гравитации, учитывая, что если метрику в произвольной инерциальной системе  $x$  выбрать в виде

$$g_{ik} = \delta_{ik}, \quad \text{так что} \quad ds^2 = \delta_{ik} dx^i dx^k, \quad (22.3)$$

то метрику  $g_{\mu\nu}$  континуума  $u$ , определяемую соотношением

$$ds^2 = g_{\mu\nu} du^{\mu} du^{\nu} = \frac{\partial x^i}{\partial u^{\mu}} \frac{\partial x^k}{\partial u^{\nu}} \delta_{ik} du^{\mu} du^{\nu}, \quad (22.4)$$

можно выразить через функции  $h_{\mu}^k$  в виде

$$g_{\mu\nu} = h_{\mu}^i h_{\nu}^k \delta_{ik} = h_{k\mu} h_{\nu}^k \quad (22.5)$$

и, следовательно, все остальные величины, характеризующие геометрию континуума  $u$ , такие, как  $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$  и тензор кривизны  $R_{\mu\nu\sigma}^{\lambda}$ , тоже выражаются через переменные поля  $h_{\mu}^k$ .

Вопрос теперь в том, можно ли функции  $h_{\mu}^k$ , описывающие гравитацию, связать с компенсирующим полем  $B$ , введение которого становится необходимым, если потребовать инвариантности по отношению к *локальным* преобразованиям Лоренца, связывающим произвольную *локальную* инерциальную систему  $x^h$  с другой *локальной* системой  $\bar{x}^h$  с помощью соотношений

$$\bar{x}^k = x^k + \varepsilon_l^k(u) x^l, \quad \varepsilon^{kl}(u) = -\varepsilon^{lk}(u). \quad (22.6)$$

При этом сами функции  $h_{\mu}^k$  преобразуются следующим образом:

$$\delta h_{\mu}^k = \varepsilon_l^k(u) h_{\mu}^l, \quad (22.7)$$

а  $\psi$ -функции преобразуются согласно соотношению

$$\delta\psi = \frac{1}{2} \varepsilon^{kl}(u) M_{kl}\psi. \quad (22.8)$$

Здесь генераторы  $M_{kl}$ , представляющие преобразование Лоренца, удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

(см. Приложение 4):

$$\{M_{kl}, M_{mn}\} = \frac{1}{2} C_{kl, mn}^{ab} M_{ab}, \quad M_{ab} = -M_{ba}, \quad (22.9)$$

где

$$C_{kl, mn}^{ab} C_{ab, ij}^{mn} = 4 (\delta_{ki} \delta_{lj} - \delta_{kj} \delta_{li}). \quad (22.10)$$

Действительно, любой интеграл действия

$$I = \int L \left( \psi, \frac{\partial \psi}{\partial x^k} \right) d^4 x, \quad (22.11)$$

определяющий динамику  $\psi$ -функции в инерциальной системе, в криволинейных координатах записывается следующим образом:

$$I = \int L \left[ \psi(u), h_{\mu}^{\nu}(u) \frac{\partial \psi}{\partial u^{\mu}} \right] h d^4 u \equiv \int \mathcal{L} \left( \psi, \frac{\partial \psi}{\partial u^{\mu}}, h_{\mu}^{\nu} \right) d^4 u, \quad (22.12)$$

$$h = \det |h_{\mu}^{\nu}|, \quad \mathcal{L} = hL,$$

и в таком виде не является инвариантным по отношению к преобразованию (22.6). Однако по аналогии с выводом, приводящим к выражению (21.8), этот недостаток можно устранить, если постулировать существование компенсирующего поля

$$B_{\mu}^{kl}(u) = -B_{\mu}^{lk}(u), \quad (22.13)$$

которое преобразуется в соответствии с равенствами

$$\delta B_{\mu}^{kl} = \frac{1}{4} C_{ab, ij}^{kl} \varepsilon^{ab}(u) B_{\mu}^{ij} + \frac{\partial \varepsilon^{bl}}{\partial u^{\mu}} = \varepsilon_m^k B_{\mu}^{ml} + \varepsilon_m^l B_{\mu}^{km} + \frac{\partial \varepsilon^{kl}}{\partial u^{\mu}}; \quad (22.14)$$

при этом  $\mathcal{L}$  заменяется на

$$\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}(\psi, \partial_{\mu} \psi, h_{\mu}^{\nu}), \quad (22.15)$$

где использовано следующее обозначение:

$$\partial_{\mu} \psi \equiv \left( \frac{\partial}{\partial u^{\mu}} - \frac{1}{2} B_{\mu}^{kl} M_{kl} \right) \psi. \quad (22.16)$$

Соотношение между компенсирующим полем  $B$  и гравитационным полем  $h$  можно теперь получить, если отождествить «калибровочно-инвариантную производную» (22.16) с величиной, которая известна под названием «ковариантной производной»  $\psi$ . Чтобы показать это, запишем (22.16) для специального случая тензорного поля  $\psi$  с компонентами  $\psi^{ij}$  в локально инерциальной системе отсчета

$$\partial_{\mu} \psi^{ij} = \frac{\partial \psi^{ij}}{\partial u^{\mu}} - B_{\mu}^{ik} \psi_k^j - B_{\mu}^{jk} \psi_k^i \quad (22.17)$$

и перейдем к компонентам  $\psi^{\rho\sigma}$  тензора  $\psi$  в криволинейной системе отсчета с помощью соотношений

$$\psi^{\rho\sigma} = h_i^\rho h_j^\sigma \psi^{ij}, \quad \psi^{ij} = h_\rho^i h_\sigma^j \psi^{\rho\sigma} \quad (22.18)$$

Умножая (22.17) на  $h_i^\rho h_j^\sigma$  и используя соотношения  $\psi_k^j = \delta_{kl} \psi^{jl}$  и  $h_k^\mu h_\nu^k = \delta_\nu^\mu$ , получаем

$$h_i^\rho h_j^\sigma \partial_\mu \psi^{ij} = \frac{\partial \psi^{\rho\sigma}}{\partial u^\mu} + \Gamma_{\tau\mu}^\rho \psi^{\tau\sigma} + \Gamma_{\tau\mu}^\sigma \psi^{\rho\tau}, \quad (22.19)$$

где

$$\Gamma_{\tau\mu}^\rho \equiv h_i^\rho h_\tau^i h_{\mu}^j - B_{\tau,\mu}^\rho \quad (22.20)$$

и

$$B_{\tau,\mu}^\rho = h_j^\rho h_{\tau k} h_\mu^{jk}. \quad (22.21)$$

Если теперь удастся показать, что символы  $\Gamma_{\tau\mu}^\rho$ , определяемые выражением (22.20), совпадают с символами Кристоффеля

$$\Gamma_{\tau\mu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} (g_{\sigma\tau|\mu} + g_{\mu\sigma|\tau} - g_{\mu\tau|\sigma}), \quad (22.22)$$

то тем самым будет доказано, что выражение (22.19) совпадает с ковариантной производной. Для этой цели перепишем выражение (22.19) для самого метрического тензора

$$h_i h_j \partial_\mu (\delta^{ij}) = g_{\rho\sigma|\mu} + \Gamma_{\tau\mu}^\rho g^{\tau\sigma} + \Gamma_{\tau\mu}^\sigma g^{\rho\tau}. \quad (22.23)$$

Поскольку согласно определению (22.17) и вследствие антисимметрии полей  $B_\mu^{jk}$  по индексам  $i, k$  справедливо равенство

$$\partial_\mu (\delta^{ij}) = -B_\mu^{ij} - B_\mu^{ji} = 0, \quad (22.24)$$

правая часть (22.23) должна обращаться в нуль. Поэтому можно однозначно записать выражение для  $\Gamma$ , если предположить, что его компоненты удовлетворяют условиям

$$\Gamma_{\nu\mu}^\rho = \Gamma_{\nu\mu}^\rho, \quad (22.25)$$

и получить тем самым равенство (22.22). Следовательно, выражение (22.23) есть не что иное, как ковариантная производная

$$h_i^\rho h_j^\sigma \partial_\mu \psi^{ij} \equiv \psi_{;\mu}^{\rho\sigma}. \quad (22.26)$$

Таким образом, (22.20) и (22.21) определяют искомую связь между компенсирующим полем  $B_\mu^{ij}$  и гравитационным полем  $h_\mu^k$ .

Как и в соответствующем случае, рассмотренном в гл. 21, лагранжиан для поля  $B$ , который следует добавить к  $\tilde{\mathcal{L}}$  для получения полного лагранжиана

$$\mathcal{L} = \tilde{\mathcal{L}} + \mathcal{L}_B, \quad (22.27)$$

из которого путем варьирования получаются уравнения для гравитационного поля  $h$

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta h_{\mu}^i} = 0, \quad (22.28)$$

не определяется однозначно требованием калибровочной инвариантности. Можно лишь сказать, что лагранжиан  $\mathcal{L}_B$  должен иметь вид

$$\mathcal{L}_B = \mathcal{L}_B(h_{\mu}^k, F_{\mu\nu}^{kl}), \quad (22.29)$$

где  $F_{\mu\nu}^{kl}$  выражается через компенсирующее поле в виде

$$F_{\mu\nu}^{kl} = \frac{\partial B_{\nu}^{kl}}{\partial u^{\mu}} - \frac{\partial B_{\mu}^{kl}}{\partial u^{\nu}} - \frac{1}{4} C_{ab, ij} (B_{\mu}^{ab} B_{\nu}^{ij} - B_{\nu}^{ab} B_{\mu}^{ij}). \quad (22.30)$$

Непосредственным вычислением легко показать, используя соотношения (22.20) и (22.21), что  $F_{\mu\nu}^{kl}$  связано с хорошо известным тензором кривизны

$$R_{\lambda\mu\nu}^{\kappa} = \frac{\partial \Gamma_{\lambda\mu}^{\kappa}}{\partial u^{\nu}} - \frac{\partial \Gamma_{\lambda\nu}^{\kappa}}{\partial u^{\mu}} + \Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\nu}^{\kappa} - \Gamma_{\lambda\nu}^{\sigma} \Gamma_{\sigma\mu}^{\kappa} \quad (22.31)$$

следующим образом:

$$F_{\mu\nu}^{kl} = h^{i\lambda} h_{\lambda}^k R_{\mu\nu}^{\lambda}. \quad (22.32)$$

В частности, уравнения гравитационного поля, предложенные Эйнштейном, получаются, если выбрать

$$\mathcal{L}_B = \kappa^{-1} h R, \quad (22.33)$$

где

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = h_i^{\mu} h_{\mu}^{\nu} F_{\mu\nu}^{kl}, \quad R_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}^{\kappa}, \quad (22.34)$$

а параметр взаимодействия  $\kappa$ , как и электрический заряд в соответствующем случае, остается на данном этапе развития теории полностью неопределенным.

Детали читатель может найти в работе Утиямы [1].

### ПРИМЕЧАНИЯ

Утияма [1] впервые полностью разработал общий формализм теории компенсирующих полей и применил его, в частности, к случаю гравитационного взаимодействия. См. также обзорную статью Адамского [2].

### Литература

1. Utiyama R., Phys. Rev., 101, 1597 (1956).
2. Адамский В. Б., Усп. физич. наук, 54, 609 (1961).
- 3\*. Огневецкий В. И., Полубаринов И. В., Препринт Р-2106, Дубна, 1965.

## Отправная точка квантовой электродинамики

Материал, изложенный в гл. 20 и 21, наводит на мысль, хотя и не доказывает этого, что в полной квантовой теории фермионов, взаимодействующих посредством электромагнитного поля, гамильтониан невзаимодействующих фермионов и фотонов, который в обозначениях (19.54) и (18.79) после вычитания нулевых энергий имеет вид

$$H^0 = H_{\psi}^0 + H_A^0, \quad (23.1)$$

$$H_{\psi}^0 = \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \Omega [N_+(\mathbf{k}, r) + N_-(\mathbf{k}, r)], \quad \Omega = +\sqrt{k^2 + m^2}, \quad (23.2)$$

$$H_A^0 = \sum_{\mathbf{x}} \sum_S \omega n(\mathbf{x}, S), \quad \omega = |\mathbf{x}|, \quad (23.3)$$

должен быть дополнен гамильтонианом взаимодействия

$$H' = - \int A_{\mu} j_{\mu} d\mathbf{q}, \quad (23.4)$$

где теперь  $A_{\mu}(x)$  и  $j_{\mu}(x)$  определяются выражениями (18.86) и (19.56) через операторы рождения и уничтожения  $b^+$ ,  $b$  и  $a^+$ ,  $a$  соответственно. Этот гамильтониан взаимодействия есть функция времени, содержащая восемь основных членов, каждый из которых линеен по фотонным операторам  $b^+$  и  $b$  и билинеен по электронно-позитронным операторам  $a_L^-$  и (или)  $a_L$ . Интегрирование по  $\mathbf{q}$  в (23.4) приводит к появлению в каждом из этих членов  $\delta$ -функции от импульсов соответствующих частиц, что обуславливает сохранение импульса при всех переходах между состояниями, вызванных взаимодействием. Используя обозначение (см. Приложение 6)

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k}\mathbf{q}} d\mathbf{q}, \quad (23.5)$$



получаем

$$\begin{aligned}
 H'(t) = & -\frac{e(2\pi)^3}{V\bar{V}} \sum_{\mathbf{x}} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}} \sum_S \sum_{r'} \sum_r \frac{1}{V^{2\omega}} \times \\
 & \times [\varepsilon_{\mu}(S) \bar{A}_+( \mathbf{k}', r') \gamma_{\mu} A_+( \mathbf{k}, r) b(\mathbf{x}, S) a_+^{\dagger}(\mathbf{k}', r') a_+( \mathbf{k}, r) \times \\
 & \times e^{i(\Omega' - \Omega - \omega)t} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{x}) + \varepsilon_{\mu}^*(S) \bar{A}_+( \mathbf{k}', r') \gamma_{\mu} A_+( \mathbf{k}, r) \times \\
 & \times b^{\dagger}(\mathbf{x}, S) a_+^{\dagger}(\mathbf{k}', r') a_+( \mathbf{k}, r) e^{i(\Omega' - \Omega + \omega)t} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} + \mathbf{x}) - \\
 & - \varepsilon_{\mu}(S) \bar{A}_-( \mathbf{k}', r') \gamma_{\mu} A_-( \mathbf{k}, r) b(\mathbf{x}, S) a_+^{\dagger}(\mathbf{k}, r) a_-( \mathbf{k}', r') \times \\
 & \times e^{-i(\Omega' - \Omega + \omega)t} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} + \mathbf{x}) - \varepsilon_{\mu}^*(S) \bar{A}_-( \mathbf{k}', r') \gamma_{\mu} A_-( \mathbf{k}, r) \times \\
 & \times b^{\dagger}(\mathbf{x}, S) a_+^{\dagger}(\mathbf{k}, r) a_-( \mathbf{k}', r') e^{-i(\Omega' - \Omega - \omega)t} \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{x}) + \\
 & + \varepsilon_{\mu}(S) \bar{A}_+( \mathbf{k}', r') \gamma_{\mu} A_-( \mathbf{k}, r) b(\mathbf{x}, S) a_+^{\dagger}(\mathbf{k}', r') a_+^{\dagger}(\mathbf{k}, r) \times \\
 & \times e^{i(\Omega' + \Omega - \omega)t} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k} - \mathbf{x}) + \varepsilon_{\mu}^*(S) \bar{A}_+( \mathbf{k}', r') \gamma_{\mu} A_-( \mathbf{k}, r) \times \\
 & \times b^{\dagger}(\mathbf{x}, S) a_+^{\dagger}(\mathbf{k}', r') a_+^{\dagger}(\mathbf{k}, r) e^{i(\Omega' + \Omega + \omega)t} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k} + \mathbf{x}) - \\
 & - \varepsilon_{\mu}(S) \bar{A}_-( \mathbf{k}', r') \gamma_{\mu} A_+( \mathbf{k}, r) b(\mathbf{x}, S) a_+( \mathbf{k}, r) a_-( \mathbf{k}', r') \times \\
 & \times e^{-i(\Omega' + \Omega + \omega)t} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k} + \mathbf{x}) - \varepsilon_{\mu}^*(S) \bar{A}_-( \mathbf{k}', r') \gamma_{\mu} A_+( \mathbf{k}, r) \times \\
 & \times b^{\dagger}(\mathbf{x}, S) a_+( \mathbf{k}, r) a_-( \mathbf{k}', r') e^{-i(\Omega' + \Omega - \omega)t} \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k} - \mathbf{x})]. \quad (23.6)
 \end{aligned}$$

Мы выписали полностью это выражение для гамильтониана взаимодействия в квантовой электродинамике, чтобы читатель получил представление о тех вычислительных трудностях, с которыми приходится сталкиваться всякий раз при попытке получить с помощью этого гамильтониана информацию о возможных результатах того или иного эксперимента.

Со времени появления первых работ по квантовой электродинамике существуют два основных подхода к решению математических проблем, связанных со сложностью гамильтониана  $H'$ , которые привели к существенным результатам и позволили во многих случаях добиться прекрасного количественного согласия между предсказаниями теории и экспериментом:

1) развитие вычислительных методов, которые сделали возможным применение к гамильтониану  $H'$  так называемой теории возмущений, и

2) использование свойств симметрии гамильтониана  $H'$ , приводящих к так называемым правилам отбора и другим общим следствиям, которые оказываются полезными при вычислении экспериментально наблюдаемых величин, таких, как сечения и времени жизни.

Если разбиение гамильтониана  $H = H^0 + H'$  на слагаемые, одно из которых соответствует невзаимодействующим частицам, а другое — взаимодействию между ними, вообще имеет смысл, то результаты, вытекающие из рассмотрения свойств симметрии, не должны зависеть от численного значения константы взаимодействия  $e$ . Но этого нельзя сказать о теории возмущений, применимость которой зависит от справедливости предположения о «слабом взаимодействии», что соответствует  $e^2 < 1$ <sup>1)</sup>. Но даже при выполнении этого условия применение теории возмущений приводит к многочисленным осложнениям, которые сделали необходимой разработку специальных математических методов, известных под названием «перенормировки». Случай сильного взаимодействия, соответствующий  $e^2 > 1$ , до сих пор не поддавался никаким попыткам математического рассмотрения, несмотря на то что на решение этой проблемы были затрачены огромные усилия. Разработка электродинамики сильных взаимодействий стала еще более насущной задачей с тех пор, как появились некоторые новые взгляды, которых мы кратко коснулись в гл. 21 и которые, по-видимому, указывают на возможность того, что все фундаментальные взаимодействия переносятся в действительности векторными мезонами, моделью которых может служить фотон.

Поскольку в разных членах гамильтониана  $H'$  операторы рождения и уничтожения появляются лишь в особых комбинациях, каждый член имеет отличные от нуля матричные элементы лишь для переходов между состояниями, числа заполнения которых различаются вполне определенным образом. Так, слагаемое

$$b(\mathbf{k}) a_+^\dagger(\mathbf{k}') a_+(\mathbf{k}) \quad (23.7)$$

дает отличный от нуля вклад только в матричный элемент

$$\langle n(\mathbf{k}) - 1, 1_+(\mathbf{k}'), 0_+(\mathbf{k}) | H' | n(\mathbf{k}), 0_+(\mathbf{k}'), 1_+(\mathbf{k}) \rangle. \quad (23.8)$$

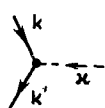
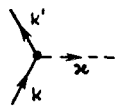
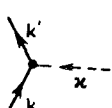
При классификации таких слагаемых большую помощь оказывает предложенный Фейнманом графический метод, который складывается из следующих правил.

Каждому члену  $H'$  соответствует так называемая вершина, в которой сходятся или из которой выходят несколько линий. Каждая выходящая из вершины линия соответствует оператору рождения фотона или электрона или оператору уничтожения позитрона, а каждая входящая — оператору уничтожения фото-

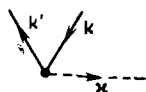
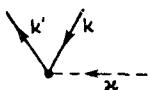
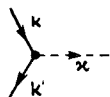
<sup>1)</sup> В области высоких энергий и в инфракрасной области в правой части этого неравенства возникает большой по величине логарифмический множитель. Это обстоятельство ухудшает применимость теории возмущений. — *Прим. ред.*

на или электрона или оператору рождения позитрона. Фотонам соответствуют пунктирные линии, а электронам и позитронам — сплошные. Кроме того, соблюдается условие, что линии, соответствующие электронам, направлены вверх, а линии, соответствующие позитронам, — вниз.

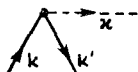
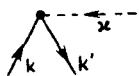
Таким образом, члены гамильтониана  $H'$  изображаются следующими «диаграммами Фейнмана» (на них символ  $k$  обозначает  $k$  и  $r$ , а символ  $\varkappa$  обозначает  $\varkappa$  и  $S$ ):



$$\text{I } b(\varkappa) a_{+}^{\dagger}(k') a_{+}(k) \quad \text{II } b^{+}(\varkappa) a_{+}^{\dagger}(k') a_{+}(k) \quad \text{III } b(\varkappa) a_{-}^{\dagger}(k) a_{-}(k')$$



$$\text{IV } b^{+}(\varkappa) a_{-}^{\dagger}(k) a_{-}(k') \quad \text{V } b(\varkappa) a_{+}^{\dagger}(k') a_{-}^{\dagger}(k) \quad \text{VI } b^{+}(\varkappa) a_{+}^{\dagger}(k') a_{-}^{\dagger}(k)$$



$$\text{VII } b(\varkappa) a_{+}(k) a_{-}(k') \quad \text{VIII } b^{+}(\varkappa) a_{+}(k) a_{-}(k')$$

Появляется возможность разложить любой реальный процесс взаимодействия на элементарные вершины, соответствующие виртуальным элементарным актам взаимодействия следующих восьми типов:

- I. Поглощение фотона при рассеянии электрона.
- II. Испускание фотона при рассеянии электрона.
- III. Поглощение фотона при рассеянии позитрона.
- IV. Испускание фотона при рассеянии позитрона.
- V. Поглощение фотона при рождении электронно-позитронной пары.
- VI. Испускание фотона при рождении электронно-позитронной пары.
- VII. Поглощение фотона при уничтожении электронно-позитронной пары.
- VIII. Испускание фотона при уничтожении электронно-позитронной пары.

В соответствии с фундаментальным динамическим постулатом, сформулированным в гл. 7, любой вектор состояния  $|u(t)\rangle = |b(t)\rangle_I$ , описывающий систему фермионов, взаимодействующих с электромагнитным полем, должен удовлетворять уравнению (7.10)

$$i \frac{\partial}{\partial t} |u(t)\rangle = H'_I(t) |u(t)\rangle. \quad (23.9)$$

Сравнение следствий, вытекающих из этого уравнения, с экспериментом облегчается, если выполнить его формальное интегрирование, приводящее к понятию *матрица рассеяния*.

Для первого знакомства это понятие можно представить себе в общих чертах с помощью нижеследующих рассуждений, полезных как мнемоническое правило. (Более подробное рассмотрение будет приведено ниже.) По прошествии бесконечно малого интервала времени  $\Delta t$  имеем

$$|u(t + \Delta t)\rangle = \exp[-iH'(t)\Delta t] |u(t)\rangle; \quad (23.10)$$

делая следующий шаг, получаем

$$|u(t + 2\Delta t)\rangle = \exp[-iH'(t + \Delta t)\Delta t] \exp[-iH'(t)\Delta t] |u(t)\rangle \quad (23.11)$$

и т. д. Поскольку  $H'(t)$  и  $H'(t + \Delta t)$ , вообще говоря, не коммутируют, необходимо принять во внимание, что

$$e^A e^B \neq e^{A+B}, \text{ если } AB \neq BA, \quad (23.12)$$

поэтому нельзя написать непосредственно

$$\prod_{n=0}^{\dots} \exp[-iH'(t + n\Delta t)\Delta t] = \exp\left[-i \int_{t_0}^{\dots} H'(t) dt\right].$$

Однако замкнутую формулу можно получить, введя оператор временного упорядочения  $P$ , так что

$$|u(t + 2\Delta t)\rangle = P[\exp(-i\{H'(t + \Delta t) + H'(t)\}\Delta t)] |u(t)\rangle, \quad (23.13)$$

где

$$P[H(t_1)H(t_2)] = \begin{cases} H(t_2)H(t_1), & \text{если } t_2 > t_1, \\ H(t_1)H(t_2), & \text{если } t_2 < t_1, \end{cases} \quad (23.14)$$

и в общем виде

$$P[H(t_1)H(t_2)\dots H(t_n)] = H(t_i)H(t_j)\dots H(t_k), \quad (23.15)$$

где  $t_i > t_j > \dots > t_k$ . Поэтому формально можно записать решение уравнения (23.9) в виде

$$|u(t)\rangle = P\left[\exp\left(-i \int_{t_0}^t H'(t) dt\right)\right] |u(t_0)\rangle, \quad (23.16)$$

где  $P[\dots]$  можно рассматривать как унитарный оператор, связывающий вектор состояния в момент времени  $t_0$  с вектором состояния в момент времени  $t$ . Упорядочение во времени, согласно предписанию (23.15), является релятивистски-инвариантной операцией при условии, что  $P$  действует на операторы, которые коммутируют, будучи отнесены к точкам, разделенным пространственно-подобным интервалом<sup>1)</sup>.

Применяя это решение к реализуемым экспериментально ситуациям, мы обычно интересуемся сравнением «конечного» состояния системы  $|u(t=+\infty)\rangle$  с «начальным» ее состоянием в далеком прошлом  $|u(t=-\infty)\rangle$ . Для этих предельных случаев запишем

$$|u(t=+\infty)\rangle = S|u(t=-\infty)\rangle, \quad (23.17)$$

где унитарный оператор (матрица) рассеяния  $S$  определяется выражением

$$S = P \left[ \exp \left( -i \int_{-\infty}^{+\infty} H'(t) dt \right) \right] = P \left[ \exp \left( -i \int \mathcal{H}'(x) d^4x \right) \right], \quad (23.18)$$

причем в случае квантовой электродинамики

$$\mathcal{H}'(x) = -A_\mu(x)j_\mu(x). \quad (23.19)$$

Матричные элементы перехода между некоторым начальным состоянием, которое задается полным набором квантовых чисел  $\tau$  и обозначается  $|\tau\rangle = |u(t=-\infty)\rangle$ , и некоторым конечным состоянием, которое аналогично обозначается  $|\tau'\rangle = |u(t=+\infty)\rangle$ , в общем случае имеют вид

$$\langle \tau' | S | \tau \rangle = \delta_{\tau'\tau} + \langle \tau' | R | \tau \rangle \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \delta(P'_0 - P_0), \quad (23.20)$$

где «матрица реакции»  $\langle \tau' | R | \tau \rangle$  — некоторая определенная функция импульсов  $\mathbf{p}$  и энергий  $p_0$  частиц, участвующих в переходе. Символами  $\mathbf{P}$  и  $P_0$  обозначены полный импульс и полная энергия системы в состоянии  $\tau$ , а наличие  $\delta$ -функции отражает закон сохранения этих динамических величин.

Вычисляя вероятности переходов между состояниями  $\tau' \neq \tau$ , так что  $\delta_{\tau'\tau} = 0$ , необходимо иметь в виду при возведении (23.20) в квадрат, что

$$[\delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \delta(P'_0 - P_0)]^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \delta(P'_0 - P_0) \int d^4x \quad (23.21)$$

<sup>1)</sup> В пространственно-подобной области понятия «раньше» и «позже», входящие в определение операции  $P$ , теряют свой абсолютный смысл. Однако если операторы поля коммутируют в этой области, то их порядок несуществен и произведение  $P$  имеет релятивистски-инвариантный смысл во всем пространстве. — *Прим. ред.*

(см. Приложение 6), так что имеет смысл определять лишь вероятность перехода, отнесенную к единице объема и единице времени:

$$w_{\tau'\tau} = \frac{|\langle \tau' | S | \tau \rangle|^2}{\int d^4x} = \frac{1}{(2\pi)^4} |\langle \tau' | R | \tau \rangle|^2 \delta(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \delta(P'_0 - P_0). \quad (23.22)$$

Теперь можно стандартным способом ввести понятие сечения рассеяния с переходом в данное конечное состояние, разделив выражение (23.22) на число падающих частиц, проходящих в единицу времени через единицу площади. Некоторые авторы потратили много усилий на определение сечений релятивистски-ковариантным способом. Хотя такие определения и могут быть полезными, особенно в тех случаях, когда требуется производить расчеты в системе центра масс, однако они довольно громоздки и требуют усложнения обозначений, если в начальном или конечном состоянии имеется более чем две частицы. Поскольку обычно приходится иметь дело с лабораторной системой, в которой одна из частиц в начальном состоянии покоится и редко приходится рассматривать в конечном состоянии больше чем три частицы, как правило, при описании данной экспериментальной ситуации удобнее всего переходить к так называемому фазовому пространству. Стандартным примером применения фазового пространства в квантовой электродинамике является рассмотрение хорошо известного эффекта Комптона, которое приведено в Приложении 6 для иллюстрации использования  $\delta$ -функций. Читатели, интересующиеся другими примерами, отсылаются к работе Ферми [2].

Поскольку именно понятие матрицы рассеяния наиболее четко отражает квантовомеханический подход к процессам, связанным с переходом из начального состояния в конечное, оно заслуживает несколько более подробного рассмотрения, чем вывод выражения (23.18), приведенный выше.

Рассмотрим в самом общем виде некий физический объект, для которого по предположению гамильтониан можно записать в виде

$$H = H^0 + H', \quad (23.23)$$

где  $H'$  соответствует энергии взаимодействия системы. Предположим далее, что член  $H'$ , записанный в представлении Шредингера, не содержит явно времени  $t$ .

Согласно изложенному в гл. 7, этот объект можно описывать различными способами.

1. В представлении Шредингера состояние системы в момент времени  $t$  может быть определено путем наблюдения в тот же момент времени  $t$  и, будучи обозначено  $|b(t)\rangle_s$ , удовлетворяет

уравнению Шредингера

$$i \frac{\partial |b\rangle_s}{\partial t} = H |b\rangle_s. \quad (23.24)$$

Решения уравнения Шредингера при  $H' = 0$  будем обозначать  $|c(t)\rangle_s$ , так что в этом представлении

$$i \frac{\partial |c\rangle_s}{\partial t} = H^0 |c\rangle_s. \quad (23.25)$$

2. В представлении Гейзенберга состояние описывается фиксированным вектором, не зависящим от времени, и его можно отождествить с начальным значением  $|b(t)\rangle_s$  в представлении Шредингера  $|b\rangle_0 = |b(0)\rangle_s$ . Преобразование от представления Шредингера к представлению Гейзенберга производится с помощью унитарных операций [см. (7.17)]:

$$|b(t)\rangle_s = \exp(-iHt) |b\rangle_0, \quad |c(t)\rangle_s = \exp(-iH^0t) |c\rangle_0. \quad (23.26)$$

3. В представлении взаимодействия понятие состояния опять придается новый смысл. Говорят о «состоянии в момент  $t$ » в представлении взаимодействия и обозначают его  $|b(t)\rangle_I = |u(t)\rangle$ , подразумевая под этим описание, полученное из наблюдения в момент времени  $t$  и затем мысленно приведенное «движением без взаимодействия» к моменту времени  $t=0$ . Таким образом, связь между произвольным вектором состояния  $|u(t)\rangle$  в представлении взаимодействия и соответствующим вектором состояния  $|b\rangle_0$  в представлении Гейзенберга имеет вид

$$|b(t)\rangle_I = |u(t)\rangle = \exp(iH^0t) \exp(-iHt) |b\rangle_0, \quad (23.27)$$

т. е. эволюция состояния во времени по существу определяется оператором  $H'$ .

Вводя обозначения

$$U(t) = \exp(iHt) \exp(-iH^0t), \quad U^+(t) = \exp(iH^0t) \exp(-iHt), \quad (23.27')$$

можно переписать (23.27) в виде

$$|u(t)\rangle = U^+(t) |b\rangle_0 \quad (23.28)$$

и, таким образом, получить

$$|u(t_2)\rangle = U^+(t_2) U(t_1) |u(t_1)\rangle = U(t_2, t_1) |u(t_1)\rangle, \quad (23.29)$$

где

$$U(t_2, t_1) = U^+(t_2) U(t_1). \quad (23.30)$$

Этот оператор преобразования  $U(t_2, t_1)$  удовлетворяет уравнению

$$i \frac{\partial U(t_2, t_1)}{\partial t_2} \equiv [H'(t_2)]_I U(t_2, t_1), \quad (23.31)$$

где

$$[H'(t)]_I = \exp(iH^0 t) H' \exp(-iH^0 t) \quad (23.32)$$

есть гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия («эффективное» взаимодействие), содержащий зависимость от времени [примером может служить выражение (23.6)]. Чтобы доказать уравнение (23.31), заметим, что согласно (23.27) и (23.26) «состояние в момент времени  $t$ » в представлении взаимодействия совпадает с состоянием в представлении Шредингера, приведенным к моменту времени  $t=0$  путем движения без взаимодействия:

$$|u(t)\rangle = \exp(iH^0 t) |b(t)\rangle_s. \quad (23.33)$$

Используя (23.24) и выполняя дифференцирование, получаем

$$i \frac{\partial |u(t)\rangle}{\partial t} = -H^0 \exp(iH^0 t) |b(t)\rangle_s + i \exp(iH^0 t) \frac{\partial |b(t)\rangle_I}{\partial t} = \\ = \exp(iH^0 t) H' |b(t)\rangle_s = \exp(iH^0 t) H' \exp(-iH^0 t) |u(t)\rangle. \quad (23.34)$$

Уравнение (23.31) можно формально проинтегрировать, используя граничное условие  $U(t, t) = 1$ ; в результате получим

$$U(t_2, t_1) = 1 - i \int_{t_1}^{t_2} [H'(t)]_I U(t, t_1) dt. \quad (23.35)$$

Записав

$$U(t, t_1) = U^{(0)}(t, t_1) + U^{(1)}(t, t_1) + U^{(2)}(t, t_1) + \dots \quad (23.36)$$

и проведя итерации начиная с  $U^{(0)}(t, t_1)$ , получим

$$U(t_2, t_1) = 1 - i \int_{t_1}^{t_2} [H'(t)]_I dt + \\ + (-i)^2 \int_{t_1}^{t_2} [H'(t)]_I dt \int_{t_1}^t [H'(t')]_I dt' + \dots \quad (23.37)$$

Этот ряд можно просуммировать и представить в виде упорядоченного во времени произведения

$$U(t_2, t_1) = P \left[ \exp \left( -i \int_{t_1}^{t_2} H'(t) dt \right) \right]. \quad (23.38)$$

Отсюда оператор рассеяния  $S$ , связывающий начальное состояние  $|\tau\rangle = |u(t = -\infty)\rangle$  с конечным состоянием  $|\tau'\rangle = |u(t = +\infty)\rangle$ , получается как предел

$$S = U(+\infty, -\infty). \quad (23.39)$$



Хотя представление взаимодействия особенно хорошо приспособлено для описания процессов рассеяния, эти процессы можно описать и в остальных двух представлениях, вводя понятия «конечной и начальной конфигураций» и «уходящей и приходящей волн».

Рассмотрим для простоты систему, которая не обладает связанными состояниями и в которой возможны лишь так называемые одноканальные процессы рассеяния. Это означает, что каждому решению  $|b(t)\rangle_s$  уравнения Шредингера (23.24) должны однозначно соответствовать решения  $|c_+(t)\rangle_s$  и  $|c_-(t)\rangle_s$  уравнения (23.25); соответствия устанавливаются требованиями

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |b(t)\rangle_s = \lim_{t \rightarrow +\infty} |c_+(t)\rangle_s, \quad (23.40)$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} |b(t)\rangle_s = \lim_{t \rightarrow -\infty} |c_-(t)\rangle_s. \quad (23.41)$$

Эти определения «результата рассеяния»  $|c_+\rangle$  и «состояния, предшествовавшего рассеянию»,  $|c_-\rangle$  включают понятие о взаимодействии, которое отсутствует для больших по модулю положительных и отрицательных значений  $t$  и которое «включается» только в течение процесса рассеяния где-то между этими граничными значениями.

Теперь можно ввести понятие «конечной и начальной конфигураций», которые обозначаются символами  $|c_+(0)\rangle$  и  $|c_-(0)\rangle$  соответственно и получаются следующим путем: результат рассеяния  $|c_+(t)\rangle$  для больших  $t > 0$  и состояние, предшествующее рассеянию,  $|c_-(t)\rangle$  для больших по модулю  $t < 0$  пересчитываются для момента времени  $t=0$  по законам движения без взаимодействия в соответствии со вторым из уравнений (23.26). Продолжав это, можно связать реальное состояние  $|b(0)\rangle$  в момент времени  $t=0$  с конечной конфигурацией  $|c_+(0)\rangle$  соотношением

$$|b(0)\rangle = \Omega_+ |c_+(0)\rangle, \quad (23.42)$$

где

$$\Omega_+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(iHt) \exp(-iH^0t), \quad (23.43)$$

и с начальной конфигурацией  $|c_-(0)\rangle$  соотношением

$$|b(0)\rangle = \Omega_- |c_-(0)\rangle, \quad (23.44)$$

где

$$\Omega_- = \lim_{t \rightarrow -\infty} \exp(iHt) \exp(-iH^0t). \quad (23.45)$$

Таким образом, в представлении Гейзенберга любое состояние рассеяния  $|b\rangle_0$  можно характеризовать его начальной или конечной конфигурацией. И наоборот, состояние с конечной конфигурацией  $|c_+(0); \tau\rangle$ , где  $\tau$  — набор квантовых чисел, опреде-

ляющих это состояние, можно обозначить через  $|b_\tau(\text{out})\rangle_0$  и называть «уходящей волной», а состояние с начальной конфигурацией  $|c_-(0); \tau\rangle$  можно обозначить  $|b_\tau(\text{in})\rangle_0$  и называть «приходящей волной».

Оператор рассеяния в представлении Гейзенберга можно определить иначе (по Янгу и Фелдману) — как оператор, проектирующий уходящие волны на приходящие:

$$|b_\tau(\text{in})\rangle = S_Y |b_\tau(\text{out})\rangle \quad \text{для всех } \tau, \quad (23.46)$$

так что амплитуда вероятности обнаружить уходящую волну  $|b_{\tau'}(\text{out})\rangle$ , если приходящая волна  $|b_\tau(\text{in})\rangle$  известна, равна

$$\langle b_{\tau'}(\text{out}) | b_\tau(\text{in}) \rangle = \langle b_{\tau'}(\text{out}) | S_Y | b_\tau(\text{out}) \rangle. \quad (23.47)$$

Оператор рассеяния  $S_Y$  можно выразить через операторы  $\Omega_\pm$ , так как вместо (23.46) можно написать

$$\Omega_- |c_-(0); \tau\rangle = S_Y \Omega_+ |c_+(0); \tau\rangle \quad (23.48)$$

и поскольку  $|c_-(0); \tau\rangle \equiv |c_+(0); \tau\rangle$ , получаем

$$S_Y = \Omega_- \Omega_+^\dagger. \quad (23.49)$$

При этом используется условие унитарности

$$\Omega \Omega^\dagger = I. \quad (23.50)$$

### ПРИМЕЧАНИЯ

Книга Фейнмана [1] содержит, помимо всего прочего, переиздания его ранних работ, в которых разрабатывается графический метод. В книге Ферми [2] приведено несколько примеров искусственного использования методов, связанных с фазовым пространством. Оператор рассеяния был введен Уилером [3]. Альтернативное определение  $S_Y$  дали Янг и Фелдман [4].

Читатели, интересующиеся тем, как преодолеваются трудности, обусловленные наличием связанных состояний и многоканального рассеяния, отсылаются к работам Экстайна [5] и Яуха [6]. См. также обзорную статью Бренига и Хаага [7].

### Литература

1. Feynman R. P., Quantum Electrodynamics, New York, 1961 (см. перевод: Фейнман Р., Квантовая электродинамика, «Мир», 1964).
2. Fermi E., Elementary Particles, New Haven, Connecticut, 1951 (см. перевод: Ферми Э., Элементарные частицы, ИЛ, 1953).
3. Wheeler J. A., Phys. Rev., **52**, 1107 (1937).
4. Yang C. N., Feldman D., Phys. Rev., **79**, 972 (1950).
5. Ekstein H., Nuovo Cimento, **4**, 1017 (1956).
6. Jauch J. M., Helv. Phys. Acta, **31**, 127; **31**, 661 (1958).
7. Brenig W., Haag R., Fortschr. Phys., **7**, 183 (1959).

## Теория возмущений и понятие пропагатора

Экспериментально определенное значение константы взаимодействия  $e$  в квантовой электродинамике оказалось равным  $e^2 \approx 1/137$ . Поэтому ввиду слабости взаимодействия между заряженными фермионами и фотонами был развит способ рассмотрения этого взаимодействия с использованием теории возмущений, который основывается по существу на предположении, что разложение оператора рассеяния  $S$  в ряд

$$S = I + \sum_{n \geq 1} \int \dots \int \mathcal{S}_n(x_1, \dots, x_n) d^4 x_1 \dots d^4 x_n = I + \sum_{n \geq 1} S_n \quad (24.1)$$

имеет смысл даже в том случае, если некоторые из его членов имеют расходящиеся матричные элементы.

Сравнивая это разложение с (23.18), можно получить каждый из членов ряда (24.1) с помощью подстановки

$$\mathcal{S}_n = \frac{(-i)^n}{n!} P \{ \mathcal{H}'(x_1) \dots \mathcal{H}'(x_n) \}. \quad (24.2)$$

Соответственно матричные элементы, подлежащие вычислению, имеют вид

$$\langle \tau' | S_n | \tau \rangle = \left( \frac{-ie}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \int \dots \int \langle \tau' | P \{ [\bar{\Psi}(x_1), \gamma_{\mu} \Psi(x_1)] A_{\mu}(x_1) \dots \dots [\bar{\Psi}(x_n), \gamma_{\mu} \Psi(x_n)] A_{\mu}(x_n) \} | \tau \rangle d^4 x_1 \dots d^4 x_n. \quad (24.3)$$

Приведение этого, на первый взгляд очень сложного, выражения к виду, более удобному для непосредственных вычислений, может быть произведено поэтапно; каждый из этих этапов является плодом длительных усилий многих авторов, работы которых появились в конце сороковых и начале пятидесятих годов.

1. Вместо того чтобы пользоваться «упорядоченным по времени произведением»

$$P[A(x_1) A(x_2) \dots A(x_n)] = A(x_i) A(x_j) \dots A(x_k), \quad t_i > t_j > \dots > t_k$$

совокупности  $n$  бозонных или фермионных операторов, определяемым равенством (23.15), удобнее применять «хронологиче-

ское», или  $T$ -произведение, которое обозначается  $T[A(x_1)A(x_2)\dots A(x_n)]$  и отличается от  $P$  знаковым множителем  $\eta$ :

$$T[A(x_1)A(x_2)\dots A(x_n)] = \eta A(x_i)A(x_j)\dots A(x_k), \quad (24.4)$$

где

$$t_i > t_j > \dots > t_k.$$

Здесь  $\eta = +1$ , если переход от последовательности  $A(x_1)A(x_2)\dots A(x_n)$  к  $A(x_i)A(x_j)\dots A(x_k)$  требует четного числа перестановок фермионных операторов, и  $\eta = -1$ , если такой переход требует нечетного числа перестановок. Поскольку в  $S_n$  все фермионные операторы входят попарно, любое изменение последовательности  $\psi(x_i)\psi(x_i)\bar{\psi}(x_j)\psi(x_j) \rightarrow \bar{\psi}(x_j)\psi(x_j)\bar{\psi}(x_i)\psi(x_i)$  включает в себя четное число перестановок фермионных операторов; поэтому мы получаем просто

$$P[\mathcal{H}'(x_1)\dots\mathcal{H}'(x_n)] = T[\mathcal{H}'(x_1)\dots\mathcal{H}'(x_n)]. \quad (24.5)$$

2. Каждый из операторов  $A_\mu(x)$ ,  $\psi(x)$  и  $\bar{\psi}(x)$  разбивается на два слагаемых, одно из которых соответствует отрицательной, а другое — положительной частоте:

$$\begin{aligned} A_\mu(x) &= A_\mu^{(-)}(x) + A_\mu^{(+)}(x), \\ \psi(x) &= \psi^{(-)}(x) + \psi^{(+)}(x), \\ \bar{\psi}(x) &= \bar{\psi}^{(-)}(x) + \bar{\psi}^{(+)}(x). \end{aligned} \quad (24.6)$$

Эта операция по существу представляет собой разбиение на операторы рождения и уничтожения, поскольку  $\psi$ -функции с фазой  $e^{ikx} = e^{i(\mathbf{kq} - \omega t)}$  всегда связаны с операторами уничтожения, а  $\bar{\psi}$ -функции с фазой  $e^{-ikx} = e^{-i(\mathbf{kq} - \omega t)}$  — с операторами рождения. Таким образом, в соответствии с определениями (18.86) и (19.51) получаем

$$\begin{aligned} A_\mu^{(-)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{x}} \sum_S \frac{\varepsilon_\mu(S)}{\sqrt{2\omega}} e^{i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}b} \hat{b}(\mathbf{x}, S), \\ A_\mu^{(+)}(x) &= \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{x}} \sum_S \frac{\varepsilon_\mu^*(S)}{\sqrt{2\omega}} e^{-i\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}b^+}(\mathbf{x}, S), \\ \psi^{(-)}(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_r A_+(\mathbf{k}, r) e^{ikx} a_+(\mathbf{k}, r), \\ \psi^{(+)}(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_r A_-(\mathbf{k}, r) e^{-ikx} a_-(\mathbf{k}, r), \\ \bar{\psi}^{(-)}(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \bar{A}_-(\mathbf{k}, r) e^{ikx} a_-(\mathbf{k}, r), \\ \bar{\psi}^{(+)}(x) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \bar{A}_+(\mathbf{k}, r) e^{-ikx} a_+(\mathbf{k}, r). \end{aligned} \quad (24.7)$$

3. Теперь нужно так изменить порядок расположения операторов, образующих  $S_n$ , чтобы все операторы рождения стояли слева от операторов уничтожения. С этой целью вводится «нормальное произведение» операторов, которое обозначается  $N[\dots]$ . Для двух бозонных операторов  $A_1(x_1)$  и  $A_2(x_2)$  оно имеет вид

$$N[A_1(x_1) A_2(x_2)] = A_1^{(+)}(x_1) A_2^{(+)}(x_2) + A_1^{(+)}(x_1) A_2^{(-)}(x_2) + \\ + A_2^{(+)}(x_2) A_1^{(-)}(x_1) + A_1^{(-)}(x_1) A_2^{(-)}(x_2), \quad (24.8)$$

а для двух фермионных операторов  $\psi_1(x_1)$  и  $\psi_2(x_2)$  оно записывается в виде

$$N[\psi_1(x_1) \psi_2(x_2)] = \psi_1^{(+)}(x_1) \psi_2^{(+)}(x_2) + \psi_1^{(+)}(x_1) \psi_2^{(-)}(x_2) - \\ - \psi_2^{(+)}(x_2) \psi_1^{(-)}(x_1) + \psi_1^{(-)}(x_1) \psi_2^{(-)}(x_2). \quad (24.9)$$

Определение нормального произведения произвольного числа бозонных и (или) фермионных операторов следует отсюда по индукции. Знак минус перед третьим членом в правой части равенства (24.9) введен для того, чтобы учесть антикоммутацию фермионных операторов.

Введение нормального произведения даст следующие три преимущества:

а) Среднее значение любого нормального произведения по вакууму обращается в нуль:

$$\langle 0 | N[\dots] | 0 \rangle = 0. \quad (24.10)$$

б) Поскольку справедливы соотношения

$$N[A_1(x_1) A_2(x_2)] = N[A_2(x_2) A_1(x_1)] \quad (24.11)$$

и

$$N[\psi_1(x_1) \psi_2(x_2)] = -N[\psi_2(x_2) \psi_1(x_1)], \quad (24.12)$$

можно считать, что внутри скобок нормального произведения все бозонные операторы *всегда* коммутируют, а все фермионные операторы *всегда* антикоммутируют.

в) Операторы в гамильтониане взаимодействия  $\mathcal{H}'(x)$  уже выстроены в нормальном порядке; это непосредственно следует из (23.6), если вспомнить, что бозонные и фермионные операторы между собой коммутируют. Поэтому можно написать

$$\mathcal{H}'(x) = -eN[\bar{\psi}(x) \gamma_\mu A_\mu(x) \psi(x)]. \quad (24.13)$$

Это следует, конечно, из выбранного нами определения плотности тока, которое построено таким образом, чтобы среднее значение тока по вакууму обращалось в нуль<sup>1)</sup>.

4. Хронологическое произведение можно разложить на сумму нормальных произведений, поскольку хронологическое произведение двух операторов в силу коммутационных и антикоммутационных соотношений отличается от нормального произведения этих же операторов только числом, которое называется «хронологической сверткой». Обозначая «хронологическую свертку» двух бозонных операторов  $A_1(x_1)$  и  $A_2(x_2)$  символом  $\overline{A_1(x_1) A_2(x_2)}$ , получаем по определению

$$T[A_1(x_1) A_2(x_2)] = N[A_1(x_1) A_2(x_2)] + \overline{A_1(x_1) A_2(x_2)}. \quad (24.14)$$

Аналогично обозначая хронологическую свертку двух фермионных операторов  $\psi_1(x_1)$  и  $\psi_2(x_2)$  через  $\overline{\psi_1(x_1) \psi_2(x_2)}$ , получаем

$$T[\psi_1(x_1) \psi_2(x_2)] = N[\psi_1(x_1) \psi_2(x_2)] + \overline{\psi_1(x_1) \psi_2(x_2)}. \quad (24.15)$$

Уравнение (24.10) позволяет вычислить любую хронологическую свертку как среднее значение по вакууму

$$\overline{A_1(x_1) A_2(x_2)} = \langle 0 | T[A_1(x_1) A_2(x_2)] | 0 \rangle, \quad (24.16)$$

$$\overline{\psi_1(x_1) \psi_2(x_2)} = \langle 0 | T[\psi_1(x_1) \psi_2(x_2)] | 0 \rangle. \quad (24.17)$$

Используя последовательно операции (24.14) и (24.15), можно теперь выразить хронологическое произведение в виде суммы членов, каждый из которых содержит лишь нормальные произведения и хронологические свертки. Более точно можно сформулировать это утверждение в виде теоремы Вика, которая доказывается методом индукции: *Любое хронологическое произведение равно сумме всевозможных нормальных произведений, которые можно построить, производя все возможные свертки.* Смысл этого утверждения лучше всего пояснить, записав примеры соответствующих разложений для случая двух,

<sup>1)</sup> Основное удобство перехода к нормальным произведениям заключается в том, что эти произведения в отличие от  $T$ -произведений содержат операторы только реальных частиц, участвующих в процессе. — *Прим. ред.*

трех и четырех операторов:

$$\begin{aligned}
 T[AB] &= N[AB] + N[\overline{AB}], \\
 T[ABC] &= N[ABC] + N[\overline{ABC}] + N[\overline{ABC}] + N[\overline{ABC}], \\
 T[ABCD] &= N[ABCD] + N[\overline{ABCD}] + N[\overline{ABCD}] + N[\overline{ABCD}] + \\
 &+ N[\overline{ABCD}] + N[\overline{ABCD}] + N[\overline{ABCD}] + \\
 &+ N[\overline{ABCD}] + N[\overline{ABCD}] + \\
 &+ N[\overline{ABCD}] + N[\overline{ABCD}].
 \end{aligned} \tag{24.18}$$

При этом использовано обозначение

$$N[\overline{ABCD}] \equiv \eta \overline{CD} N[AB], \quad N[\overline{ABCD}] \equiv \eta \overline{ADBC} \tag{24.19}$$

и т. д., где  $\eta$  — прежний знаковый множитель, равный  $+1$  или  $-1$  в зависимости от того, четным или нечетным числом перестановок фермионных операторов последовательность множителей  $ABCD$  превращается в  $CDAB$ ,  $ADBC$  и т. д.

Теперь все готово для разложения члена  $S_n$  в выражении для оператора рассеяния (24.1) на сумму слагаемых, каждое из которых содержит только нормальные произведения и свертки. Для  $n \geq 3$  это довольно трудоемкая задача, но для  $n=2$ , имея в виду равенства (24.5) и (24.13) и теорему Вика и учитывая, что свертки между фермионным и бозонным операторами, так же

как  $\overline{\psi\psi}$  и  $\overline{\psi\psi}$ , обращаются в нуль, получаем разложение

$$S_2 = -\frac{e^2}{2} \int \int T \{ N[\overline{\psi}(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1}(x_1) \psi(x_1)] N[\overline{\psi}(x_2) \times \\ \times \gamma_{\mu_2} A_{\mu_2}(x_2) \psi(x_2)] \} d^4 x_1 d^4 x_2 \tag{24.20}$$

на восемь слагаемых

$$S_2 = \sum_{C=1}^{VIII} S_2^{(C)}, \tag{24.21}$$

которые мы здесь выпишем:

$$S_2^{(I)} = -\frac{e^2}{2} \int \int N[\overline{\psi}(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1}(x_1) \psi(x_1) \overline{\psi}(x_2) \gamma_{\mu_2} A_{\mu_2}(x_2) \times \\ \times \psi(x_2)] d^4 x_1 d^4 x_2,$$

$$S_2^{(II)} = -\frac{e^2}{2} \int \int N[\overline{\psi}(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1}(x_1) \overline{\psi}(x_2) \times \\ \times \gamma_{\mu_2} A_{\mu_2}(x_2) \psi(x_2)] d^4 x_1 d^4 x_2,$$

$$\begin{aligned}
S_2^{(III)} &= -\frac{e^2}{2} \int \int N [\overline{\psi}(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1}(x_1) \psi(x_1) \overline{\psi}(x_2) \gamma_{\mu_2} A_{\mu_2}(x_2) \psi(x_2)] \times \\
&\quad \times d^4 x_1 d^4 x_2, \\
S_2^{(IV)} &= -\frac{e^2}{2} \int \int N [\overline{\psi}(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1}(x_1) \psi(x_1) \overline{\psi}(x_2) \gamma_{\mu_2} A_{\mu_2}(x_2) \times \\
&\quad \times \psi(x_2)] d^4 x_1 d^4 x_2, \\
S_2^{(V)} &= -\frac{e^2}{2} \int \int N [\overline{\psi}(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1}(x_1) \psi(x_1) \overline{\psi}(x_2) \gamma_{\mu_2} A_{\mu_2}(x_2) \times \\
&\quad \times \psi(x_2)] d^4 x_1 d^4 x_2, \\
S_2^{(VI)} &= -\frac{e^2}{2} \int \int N [\overline{\psi}(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1}(x_1) \psi(x_1) \overline{\psi}(x_2) \gamma_{\mu_2} A_{\mu_2}(x_2) \psi(x_2)] \times \\
&\quad \times d^4 x_1 d^4 x_2, \\
S_2^{(VII)} &= -\frac{e^2}{2} \int \int N [\overline{\psi}(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1}(x_1) \psi(x_1) \overline{\psi}(x_2) \gamma_{\mu_2} A_{\mu_2}(x_2) \psi(x_2)] \times \\
&\quad \times d^4 x_1 d^4 x_2, \\
S_2^{(VIII)} &= -\frac{e^2}{2} \int \int N [\overline{\psi}(x_1) \gamma_{\mu_1} A_{\mu_1}(x_1) \psi(x_1) \overline{\psi}(x_2) \gamma_{\mu_2} A_{\mu_2}(x_2) \psi(x_2)] \times \\
&\quad \times d^4 x_1 d^4 x_2.
\end{aligned}
\tag{24.22}$$

Изложенные в гл. 23 приемы построения диаграмм Фейнмана, соответствующих различным членам гамильтониана взаимодействия, позволяют образно классифицировать и исключительно наглядно интерпретировать каждый член в матрице рассеяния после разложения его на нормальные произведения. Следует только распространить эти приемы на хронологические свертки, *которые не являются операторами*, следующим способом.

а. Каждой переменной интегрирования  $x_i$  сопоставляется вершина, которая также обозначается  $x_i$ . Поскольку каждая такая переменная появляется в сопровождении одного и только одного множителя  $\gamma_{\mu_i}$ , это эквивалентно сопоставлению вершины  $x_i$  каждому из множителей  $\gamma_{\mu_i}$ .

б. Каждому одиночному оператору  $\psi(x_i)$  сопоставляется сплошная линия, приходящая в вершину  $x_i$ , каждому одиночному оператору  $\overline{\psi}(x_i)$  — сплошная линия, выходящая из вершины  $x_i$ , а каждому одиночному множителю  $A(x_i)$  — пунктирная



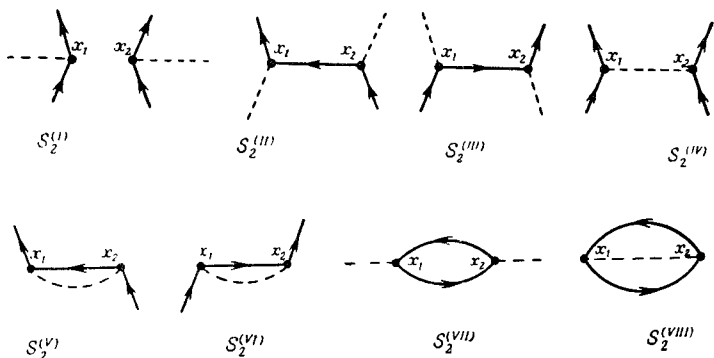
линия, соединенная с вершиной  $x_i$ , направление которой не определяется. Эти условия согласуются с теми, которые были изложены в гл. 23, но они менее детальны, поскольку мы пока не делаем различия между входящими электронами и выходящими позитронами, между выходящими электронами и входящими позитронами, а также между входящими и выходящими фотонами.

в. Поскольку хронологическое спаривание связывает только символы  $\psi$  и  $\bar{\psi}$ , притом принадлежащие разным вершинам  $x_i$  и  $x_k$ , и никогда не связывает два символа  $\psi$  или два символа  $\bar{\psi}$ , то достаточными и непротиворечивыми являются следующие условия.

Каждой свертке  $\overline{\psi(x_i)\psi(x_k)}$  сопоставляется сплошная линия, соединяющая вершины  $x_i$  и  $x_k$  и направленная от  $x_k$  к  $x_i$ ;

каждой свертке  $\overline{\bar{\psi}(x_i)\bar{\psi}(x_k)}$  сопоставляется сплошная линия, идущая от  $x_i$  к  $x_k$ , а каждой свертке  $\overline{A(x_i)A(x_k)}$  — пунктирная линия между вершинами  $x_i$  и  $x_k$  без указания направления.

При таких условиях все непарные операторы  $\psi$ ,  $\bar{\psi}$ ,  $A$  в  $S_n$  приводят к появлению «внешних линий», а все свертки  $\overline{\psi\psi}$ ,  $\overline{\bar{\psi}\bar{\psi}}$ ,  $\overline{AA}$  — к появлению «внутренних линий», так что все фермионные линии можно проводить в направлении, указанном стрелкой, не отрывая руки. Так, например, восемь членов (24.22) соответствуют следующим восьми диаграммам:



За исключением  $S_2^{(I)}$ , все диаграммы, отвечающие различным членам  $S_2$ , имеют одну или больше внутренних линий. При рассмотрении этих диаграмм неизбежно возникает мысль

принять вместе с Фейнманом образный способ говорить о них, сопоставляя каждой внутренней линии представление о частице, *распространяющейся* в виртуальном состоянии между вершинами этой линии. В соответствии с этим

$$\overline{\psi(x_i)} \psi(x_k)$$

и

$$\overline{A_{\mu_i}(x_i)} A_{\mu_k}(x_k)$$

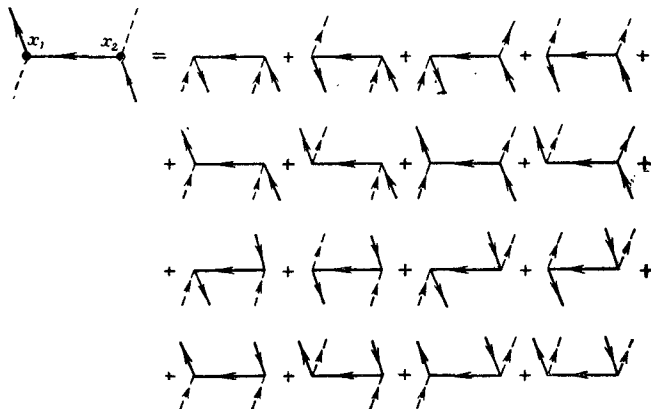
мы будем называть фермионной и фотонной функциями распространения (пропагаторами).

Если мы хотим найти в истории физики мнемоническое правило, сравнимое по наглядности и убедительности с фейнмановскими диаграммами, то следует обратиться к фарадеевской концепции силовых линий поля. Этой исторической аналогией следует воспользоваться здесь для своевременного предупреждения против всякого слишком буквального понимания мысленных образов, в основном покоящихся на совокупности *соглашений*, какими бы последовательными и естественными эти соглашения ни казались. Так, слишком буквальное понимание фарадеевской концепции поля привело Максвелла к эфирной теории вакуума, которая в конечном счете оказалась неудачной. Подобные искушения возникают и при рассмотрении фейнмановских диаграмм, особенно типа  $S_2^{(VIII)}$ .

Для вычисления матричных элементов требуется разложить все остающиеся операторы на отрицательно- и положительно-частотные части. Соответственно  $S_2^{(I)}$  раскладывается на  $2^6 = 64$  члена,  $S_2^{(II)}$ ,  $S_2^{(III)}$  и  $S_2^{(IV)}$  — на  $2^4 = 16$  членов каждая,  $S_2^{(V)}$ ,  $S_2^{(VI)}$  и  $S_2^{(VII)}$  — на  $2^2 = 4$  члена каждая, а  $S_2^{(VIII)}$  не требует дальнейшего разложения. На языке фейнмановских диаграмм это сводится к разделению внешних линий на электронные линии, позитронные линии, входящие фотонные линии и уходящие фотонные линии. Если снова, как в гл. 23, для внешних линий принять, что электронные линии рисуются со стрелкой, направленной вверх, позитронные — со стрелкой вниз, а все внешние фотонные линии изображаются со стрелкой вверх, то мы придем к однозначному разложению каждой основной диаграммы  $S_2^{(C)}$  на сумму «направленных диаграмм». Так, например, имеем

$$S_2^{(II)} = \sum_{d=1}^{16} S_2^{(II, d)}, \quad (24.22')$$

или

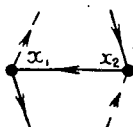


и совершенно аналогичное разложение для  $S_2^{(III)}$ .

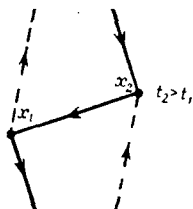
Именно на этой стадии рассмотрения совершенно ясно проявляется последовательность способа говорить о фермионных линиях, описывающих позитроны, как об «электронах, движущихся назад во времени», связывая направление вверх в каждой направленной диаграмме с направлением времени. Этот способ можно распространить на фермионные пропагаторы, так что

множитель  $\overbrace{\psi(x_k)\psi(x_i)}$  представляет графически движение виртуального электрона от  $x_k$  к  $x_i$  при условии, что  $t_k < t_i$ , и виртуального позитрона от  $x_k$  к  $x_i$  при условии  $t_k > t_i$ .

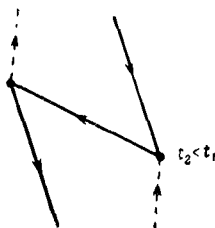
Так, например, можно считать, что диаграмма



которая дает вклад в комpton-эффект на позитроне, состоит из двух виртуальных событий, происходящих в точках  $x_1$  и  $x_2$ . Именно, для  $t_2 > t_1$  происходят два виртуальных процесса рассеяния с поглощением фотона в точке  $x_2$  и испусканием фотона в точке  $x_1$



а для  $t_2 < t_1$  — виртуальная аннигиляция электрон-позитронной пары в точке  $x_1$  и виртуальное рождение пары в точке  $x_2$



Однако поскольку при вычислении соответствующего члена  $S_2^{(II)}$  выполняется интегрирование по  $x_1$  и  $x_2$ , пропагатор автоматически учтет эти возможности, и поэтому нет необходимости придерживаться какого-либо условия относительно направлений вверх и вниз при рассмотрении внутренних линий.

Теперь условный характер фразы «позитроны — это электроны, движущиеся назад во времени», должен быть совершенно ясен, и читатель не придет к ошибочному заключению, что позитронные *состояния* обязательно получены из электронных *состояний* посредством операции инверсии времени.

Из разложения (24.22) для  $S_2^{(II)}$  и идентичного выражения для  $S_2^{(II)}$  можно непосредственно видеть, какие члены в  $S_2$  дают вклад, например, в комитон-эффект на электроне. Они описываются диаграммами, содержащими один входящий электрон, один входящий фотон, один выходящий электрон и один выходящий фотон:

$$\begin{aligned}
 & \text{Four diagrams representing the decomposition of } S_2^{(II)} \text{ into terms with one electron and one photon.} \\
 & \text{The first row shows four diagrams separated by plus signs, followed by an equals sign.} \\
 & \text{The second row shows two diagrams in parentheses, multiplied by a factor of 2, representing a simplified sum of the first row.} \\
 \end{aligned}
 \tag{24.23}$$

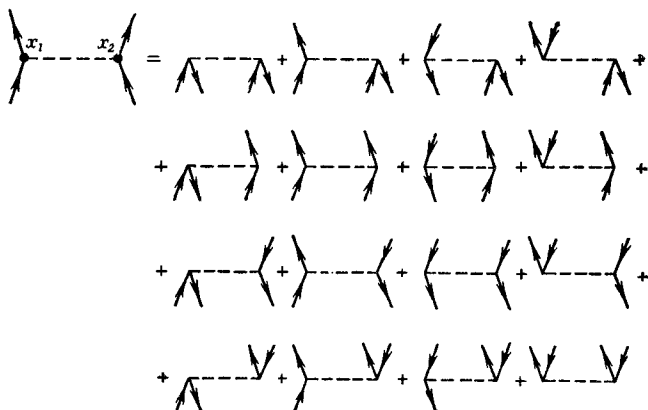
или аналитически

$$\begin{aligned}
 S_2^{(C. E.)} = & -e^2 \int \int \bar{\Psi}^{(+)}(x_1) \gamma_{\mu_1} \overline{\Psi(x_1)} \Psi(x_2) \gamma_{\mu_2} \Psi^{(-)}(x_2) \times \\
 & \times [A_{\mu_2}^{(+)}(x_2) A_{\mu_1}^{(-)}(x_1) + A_{\mu_1}^{(+)}(x_1) A_{\mu_2}^{(-)}(x_2)] d^4 x_1 d^4 x_2. \tag{24.24}
 \end{aligned}$$

Аналогично, например, из разложения

$$S_2^{(IV)} = \sum_{d=1}^{16} S_2^{(IV)(d)}, \quad (24.25)$$

или



можно выделить член, который дает вклад в электрон-электронное рассеяние, а именно шестую диаграмму в правой части равенства (24.25):

$$S_2^{(E. E. S.)} = \frac{e^2}{2} \int \int \bar{\psi}^{(+)}(x_1) \gamma_{\mu_1} \bar{\psi}^{(+)}(x_2) \psi^{(-)}(x_1) \gamma_{\mu_2} \psi^{(-)}(x_2) \times \\ \times \overline{A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2)} d^4 x_1 d^4 x_2. \quad (24.26)$$

Чтобы можно было вычислять матричные элементы, необходимо решить еще одну задачу, а именно найти пропагаторы.

Согласно (24.17), фермионный пропагатор определяется выражением

$$\overline{\psi(x_1) \psi(x_2)} = \langle 0 | T [\psi(x_1) \bar{\psi}(x_2)] | 0 \rangle = \\ = \begin{cases} \langle 0 | \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) | 0 \rangle & \text{для } t_1 > t_2, \\ -\langle 0 | \bar{\psi}(x_2) \psi(x_1) | 0 \rangle & \text{для } t_1 < t_2. \end{cases} \quad (24.27)$$

После разложения операторов  $\psi(x_1)$  и  $\bar{\psi}(x_2)$  на положительно- и отрицательно-частотные части легко видеть, что не равный нулю вклад в это среднее по вакууму дают только по одному члену в каждом случае:

$$\overline{\psi(x_1) \psi(x_2)} = \begin{cases} \langle 0 | \psi^{(-)}(x_1) \bar{\psi}^{(+)}(x_2) | 0 \rangle & \text{для } t_1 > t_2, \\ -\langle 0 | \bar{\psi}^{(-)}(x_2) \psi^{(+)}(x_1) | 0 \rangle & \text{для } t_1 < t_2. \end{cases} \quad (24.28)$$

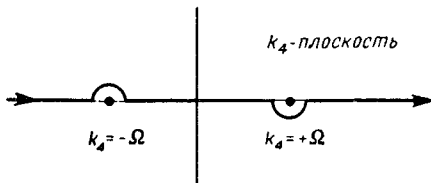
Подставляя разложение (24.7), получаем

$$\overline{\psi(x_1)\psi(x_2)} = \begin{cases} \sum_{\mathbf{k}} \sum_r A_+(\mathbf{k}, r) \bar{A}_+(\mathbf{k}, r) \exp[ik(x_1 - x_2)] & \text{для } t_1 > t_2, \\ - \sum_{\mathbf{k}} \sum_r \bar{A}_-(\mathbf{k}, r) A_-(\mathbf{k}, r) \exp[-ik(x_1 - x_2)] & \text{для } t_1 < t_2. \end{cases} \quad (24.29)$$

Суммирование по спидам в соответствии с (19.52) и (19.53) дает

$$\overline{\psi(x_1)\psi(x_2)} = \begin{cases} \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\hat{k} + m)}{2V\Omega} \exp[ik(x_1 - x_2)] = \\ = \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\gamma_4\Omega - \gamma\mathbf{k} + m)}{2V\Omega} \exp[-ik(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \\ + i\Omega(t_1 - t_2)], \quad (24.30) \\ - \sum_{\mathbf{k}} \frac{(\hat{k} - m)}{2V\Omega} \exp[-ik(x_1 - x_2)] = \\ = - \sum_{\mathbf{k}} \frac{(-\gamma_4\Omega - \gamma\mathbf{k} + m)}{-2V\Omega} \exp[-ik(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - \\ - i\Omega(t_1 - t_2)], \end{cases}$$

где  $\Omega$  всегда обозначает  $+\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ . Во втором равенстве произведена замена индекса суммирования  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ .



Фиг. 25. Фейнмановский контур.

Эти формулы можно объединить, используя интеграл

$$I = \int_F \frac{f(k_4) e^{ik_4 x}}{k^2 - m^2} dk_4 = \int_F \frac{f(k_4) e^{-ik_4 \mathbf{q} + ik_4 t}}{(k_4 - \Omega)(k_4 + \Omega)} dk_4, \quad (24.31)$$

где  $k^2 = k_4^2 - \mathbf{k}^2$ , а  $\int_F$  обозначает интегрирование вдоль «фейнмановского контура» в комплексной  $k_4$ -плоскости, как показано на фиг. 25. Тогда следует различать два случая:

а)  $t > 0$ ; контур можно замкнуть в верхней полуплоскости, так что

$$I = 2\pi i \operatorname{Res}(k_4 = +\Omega) = 2\pi i \frac{i(\Omega)}{2\Omega} e^{-ik\mathbf{q}} e^{+i\Omega t} (t > 0). \quad (24.32a)$$

б)  $t < 0$ ; контур можно замкнуть в нижней полуплоскости, так что

$$I = -2\pi i \operatorname{Res}(k_4 = -\Omega) = -2\pi i \frac{i(-\Omega)}{-2\Omega} e^{-ik\mathbf{q}} e^{-i\Omega t} (t < 0). \quad (24.32б)$$

Таким образом, переходя в (24.30) от суммы  $\sum_k (\dots/V)$  к интегралу  $1/(2\pi)^3 \int \dots d\mathbf{k}$ , можно представить пропагатор в виде

$$\overline{\psi(x_1)\psi(x_2)} = \frac{1}{i(2\pi)^4} \int_F \frac{\hat{k} + m}{k^2 - m^2} \exp[ik(x_1 - x_2)] d^4k = -\overline{\psi(x_2)\psi(x_1)}. \quad (24.33)$$

Вычисление фотонного пропагатора осуществляется совершенно аналогично вычислению фермионного пропагатора. Подставляя в формулу

$$\overline{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)} = \begin{cases} \langle 0 | A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) | 0 \rangle = \langle 0 | A_\mu^{(-)}(x_1) A_\nu^{(+)}(x_2) | 0 \rangle & \text{для } t_1 > t_2, \\ \langle 0 | A_\nu(x_2) A_\mu(x_1) | 0 \rangle = \langle 0 | A_\nu^{(-)}(x_2) A_\mu^{(+)}(x_1) | 0 \rangle & \text{для } t_1 < t_2 \end{cases} \quad (24.34)$$

разложение (24.7), получаем

$$\overline{A_\mu(x_1)A_\nu(x_2)} = \begin{cases} \sum_{\mathbf{k}} \sum_S \frac{\varepsilon_\mu(S) \varepsilon_\nu^*(S)}{2V\omega} \exp[i\mathbf{k}(x_1 - x_2)] = \\ = \sum_{\mathbf{k}} \sum_S \frac{\varepsilon_\mu \varepsilon_\nu^*}{2V\omega} \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + i\omega(t_1 - t_2)], \\ \sum_{\mathbf{k}} \sum_S \frac{\varepsilon_\nu(S) \varepsilon_\mu^*(S)}{2V\omega} \exp[i\mathbf{k}(x_2 - x_1)] = \\ = - \sum_{\mathbf{k}} \sum_S \frac{\varepsilon_\nu \varepsilon_\mu^*}{-2V\omega} \exp[-i\mathbf{k}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - i\omega(t_1 - t_2)]. \end{cases} \quad (24.35)$$

Суммирование по поляризациям можно провести калибровочно-инвариантным методом, который изложен в гл. 18 и приводит к (18.102), а формулу (24.35) снова можно объединить, используя интеграл

$$\int_F \frac{e^{ikx}}{k^2} dk_4 = e^{-ikq} \int_{F'} \frac{e^{ik_4 t}}{(k_4 - \omega)(k_4 + \omega)} dk_4 = \begin{cases} \frac{2\pi i}{2\omega} e^{-ikq + i\omega t} & (t > 0), \\ -\frac{2\pi i}{-2\omega} e^{-ikq - i\omega t} & (t < 0), \end{cases} \quad (24.36)$$

Таблица 6

**Фейнмановские правила для вычисления матричных элементов, описываемых направленными диаграммами**

Предполагается: суммирование по всем индексам, появляющимся дважды; интегрирование вдоль фейнмановского контура по импульсам всех внутренних линий; суммирование по поляризациям во внутренних линиях.

Диаграмма	Частица	Направление	Множитель в матричном элементе
	Электрон	Входящий	$[1/(2\pi)^{3/2}] A_+(k, r)$
	Электрон	Выходящий	$[1/(2\pi)^{3/2}] \bar{A}_+(k, r)$
	Позитрон	Входящий	$[1/(2\pi)^{3/2}] \bar{A}_-(k, r)$
	Позитрон	Выходящий	$[1/(2\pi)^{3/2}] A_-(k, r)$
	Фотон	Входящий	$[1/(2\pi)^{3/2}] [\epsilon_\mu(S)/\sqrt{2\omega}]$ (только $S = 1, 2$ )
	Фотон	Выходящий	$[1/(2\pi)^{3/2}] [\epsilon_\mu^*(S)/\sqrt{2\omega}]$ (только $S = 1, 2$ )
	Вершинная часть		$ie\gamma_\mu (2\pi)^4 \delta(k_2 - k_1 - x) = \Gamma_\mu^0(k_1, k_1 + x, -x)$
	Фермионный пропагатор		$\frac{1}{i(2\pi)^4} \frac{\hat{k} + m}{k^2 - m^2} = G^0(k)$
	Фотонный пропагатор		$\frac{1}{i(2\pi)^4 x^2} \left[ \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} \right) + \frac{d_{\mu\nu} x_\mu x_\nu}{x^2} \right] = D_{\mu\nu}^0(x)$



так что в результате для фотонного пропагатора получаем

$$\overline{A_\mu(x_1) A_\nu(x_2)} = \frac{1}{i(2\pi)^4} \int_F \frac{1}{k^2} \left\{ \left[ \delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right] + d_1 \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right\} \times \\ \times \exp[ik(x_1 - x_2)] d^4k. \quad (24.37)$$

Поскольку интегрирование по любому  $x_i$  дает  $\delta$ -функцию и так как вычисление матричных элементов всегда включает интегрирование по всем координатам вершин  $x_i$ , можно сразу сформулировать правила вычисления фейнмановских диаграмм в импульсном пространстве, которые кратко изложены в табл. 6.

### ПРИМЕЧАНИЯ

После появления работы Вика [1] рассмотрение матрицы рассеяния методом теории возмущений стало стандартным, и его можно найти во многих книгах лишь с небольшими вариациями. Читатели, желающие узнать, как этот формализм применять к вычислению сечений, отсылаются к книгам Мандла [2], Челлена [3], Боголюбова и Ширкова [4], Яуха и Рорлиха [5], Фейнмана [6].

### Литература

1. Wick G. C., Phys. Rev., **80**, 268 (1950).
2. Mandl F., Introduction to Quantum Field Theory, New York, 1959.
3. Källén G., Quantenelektrodynamik, в книге Handbuch der Physik, Bd. V, 1, Berlin, 1958.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.
5. Jauch J. M., Rohrlich F., The Theory of Photons and Electrons, Reading, Massachusetts, 1955.
6. Фейнман Р. Р., Quantum Electrodynamics, New York, 1961 (см. перевод: Фейнман Р., Квантовая электродинамика, «Мир», 1964).

## Иерархия пропагаторов

Разделение частиц на «свободные» и «виртуальные», соответствующее разделению линий в любой фейнмановской диаграмме на «внешние» и «внутренние», является в значительной мере искусственным и с операционалистской точки зрения фактически несостоятельным. Поскольку невозможно в принципе «выключить» взаимодействие, было бы более уместно рассматривать мир *sub specie aeternitatis*<sup>1)</sup> как бесконечную совокупность пропагаторов, которую можно представить графически бесконечной сетью одних только внутренних линий.

Рассмотрим, например, такую экспериментальную ситуацию, в которой имеет смысл рассматривать начальное и конечное состояния как однофермионные. На языке фейнмановских диаграмм это соответствует внешней фермионной линии, входящей в область внутренних линий и выходящей из нее, как показано на фиг. 26. Однако прежде чем мы получим возможность обозначить внешнюю линию некоторыми квантовыми числами, соответствующее состояние следует как-то приготовить, т. е. нужно провести измерение квантовых чисел. Но для любого такого измерения требуется какое-то взаимодействие, и в чистой квантовой электродинамике это соответствует наличию двух вершин, связанных с испусканием или поглощением фотонов. Эти вершины являются конечными точками мнимых «внешних» линий, так что фиг. 26 следует изобразить более реалистично, как показано на фиг. 27, с обычным условием, что при  $t_2 > t_1$  описывается распространение электрона, а при  $t_2 < t_1$  — распространение позитрона от точки  $x_1$  к точке  $x_2$ . Поскольку любое однофермионное состояние можно рассматривать как результат действия на вакуумное состояние соответствующего оператора рождения, это позволяет записать любой матричный элемент  $S$ -матрицы между начальным состоянием «фермион в точке  $x_i$ », обозначаемым  $|x_i\rangle = \bar{\psi}(x_i)|0\rangle$ , и конечным состоянием «фермион в точ-

<sup>1)</sup> Буквально: «с точки зрения вечности»; здесь, по-видимому, в смысле «отвлекаясь от всего преходящего, несущественного с рассматриваемой точки зрения». — *Прим. ред.*

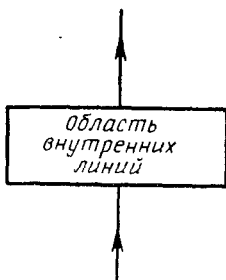
ке  $x_j \gg \langle x_j | = \langle 0 | \psi(x_j)$  как среднее значение по вакууму

$$\langle x_j | S | x_i \rangle = \langle 0 | \psi(x_j) S \bar{\psi}(x_i) | 0 \rangle. \quad (25.1)$$

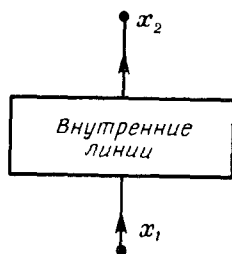
Это приводит к понятию *истинного фермионного пропагатора*, который дает амплитуду распространения фермиона между вершинами  $x_1$  и  $x_2$  и определяется как хронологически упорядоченная амплитуда матрицы рассеяния:

$$G(x_2, x_1) = \langle 0 | T [\psi(x_2) S \bar{\psi}(x_1)] | 0 \rangle. \quad (25.2)$$

Обычный фермионный пропагатор (24.27), который мы будем теперь обозначать  $G^0(x_2, x_1)$ , получается отсюда, если в разло-



Фиг. 26. Гипотетический переход из однофермионного начального состояния в однофермионное конечное состояние.



Фиг. 27. Более реальное графическое представление распространения одного фермиона.

жении  $S$ -матрицы опустить все члены, за исключением члена нулевого порядка, равного единице, так что

$$G^0(x_2, x_1) = \langle 0 | T [\psi(x_2) \bar{\psi}(x_1)] | 0 \rangle. \quad (25.3)$$

На фиг. 28 графически представлен истинный пропагатор в импульсном пространстве  $G(k)$  с «областью неизвестности», заштрихованной условно для фермионного пропагатора снизу слева вверх направо, которая символизирует все возможные переплетения внутренних линий, дающих в соответствии с разложением  $S$ -матрицы (25.2) вклад в  $G(x_2, x_1)$  и в его выражение в импульсном представлении  $G(k)$ . Область внутренних линий называется «областью неизвестности», так как не рассматриваются никакие измерения, помимо определения величины  $k$  в конечных вершинах. Поэтому, как и в гл. 5, можно найти символ измерения  $M(k; k)$ , такой, что

$$G(k) = \text{Sp } M(k; k) \quad (25.4)$$

и

$$G^0(k) = \frac{1}{i(2\pi)^4} \frac{\hat{k} + m}{k^2 - m^2}. \quad (25.4')$$

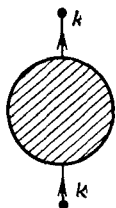
Аналогично можно ввести *истинный фотонный пропагатор* как хронологически упорядоченную амплитуду матрицы рассеяния между однофотонными состояниями, которую по аналогии с (25.2) можно представить в виде среднего значения по вакууму:

$$D_{\mu\nu}(x_2, x_1) = \langle 0 | T [A_\mu(x_2) S A_\nu(x_1)] | 0 \rangle, \quad (25.5)$$

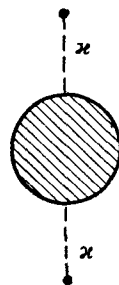
содержащего обычный пропагатор (24.34) как результат разложения  $S$ -матрицы и оставления только первого члена:

$$D_{\mu\nu}^0(x_2, x_1) = \langle 0 | T [A_\mu(x_2) A_\nu(x_1)] | 0 \rangle. \quad (25.5')$$

Графическое представление в импульсном пространстве истинного фотонного пропагатора приведено на фиг. 29, причем



Фиг. 28. Графическое представление истинного фермионного пропагатора (область неизвестности заштрихована снизу слева вверх направо).



Фиг. 29. Графическое представление истинного фотонного пропагатора (область неизвестности заштрихована снизу справа вверх налево).

область неизвестности в этом случае принято заштриховывать снизу справа вверх налево. Предполагается существование символа измерения  $M_{\mu\nu}(x; x)$ , связанного с импульсным представлением  $D_{\mu\nu}(x)$  пропагатора  $D_{\mu\nu}(x_2, x_1)$ , так что

$$D_{\mu\nu}(x) = \text{Sp } M_{\mu\nu}(x; x) \quad (25.6)$$

и

$$D_{\mu\nu}^0(x) = \frac{1}{i(2\pi)^4 x^2} \left[ \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} \right) + \frac{d_{\mu\nu}^0 x_\mu x_\nu}{x^2} \right]. \quad (25.6')$$

Особый интерес для последующего представляет, кроме того, *истинная вершинная часть*, представленная графически на фиг. 30; область неизвестности в этом случае заштриховывается

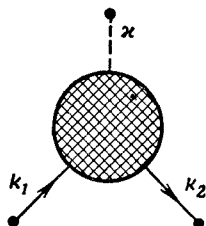
крест-накрест. Обозначим ее импульсное представление через  $\Gamma_\mu(k_1, k_2, \kappa)$ ; тогда должен существовать символ измерения  $M_\mu(k_1; k_2; \kappa)$ , такой, что

$$\Gamma_\mu(k_1, k_2, \kappa) = \text{Sp } M_\mu(k_1; k_2; \kappa) \quad (25.7)$$

и в низшем порядке

$$\Gamma_\mu^0(k_1, k_2, \kappa) = ie\gamma_\mu(2\pi)^4 \delta(k_1 - k_2 - \kappa). \quad (25.7')$$

Наконец, поучительно специально рассмотреть истинный вакуумный пропагатор, представленный графически на фиг. 31 как



Фиг. 30. Графическое представление истинной вершинной части (область неизвестности заштрихована крест-накрест).



Фиг. 31. Графическое представление истинного вакуумного пропагатора (область неизвестности заштрихована горизонтально).

одна только область неизвестности, заштрихованная горизонтально. Соответствующий символ измерения обозначим через  $M(0; 0)$ , а вакуумный пропагатор

$$C(0) = \text{Sp } M(0; 0). \quad (25.8)$$

Можно построить любой символ измерения, замечая, что произвольный матричный элемент  $S$ -матрицы можно записать в виде

$$\langle \tau' | S | \tau \rangle = \text{Sp } (S | \tau \rangle \langle \tau' |). \quad (25.9)$$

Таким образом, символ измерения, связанный с истинным вакуумным пропагатором, есть просто

$$M(0; 0) = S | 0 \rangle \langle 0 |. \quad (25.10)$$

Теорию возмущений теперь можно рассматривать как попытку «осветить» области неизвестности, связанные с каждым истинным пропагатором, с помощью ряда последовательных приближений. Так, оставляя в  $S$ -матрице члены до третьего порядка включительно, истинные пропагаторы можно представить

следующим образом:

$$\text{Штрихованный круг} = \text{Пустой круг} + \text{Круг с вертикальной линией} + \dots \quad (25.11)$$

$$\text{Круг с диагональными штрихами} = \text{Круг с вертикальной линией} + \text{Круг с линией и петлей} + \text{Круг с линией, петлей и линией} + \dots \quad (25.12)$$

$$\text{Круг с диагональными штрихами} = \text{Круг с вертикальной пунктирной линией} + \text{Круг с линией и петлей} + \text{Круг с линией, петлей и пунктирной линией} + \dots \quad (25.13)$$

$$\begin{aligned} \text{Круг с сетчатым штрихом} = & \text{Круг с тремя лучами} + \text{Круг с треугольником и тремя лучами} + \text{Круг с петлей и тремя лучами} + \\ & + \text{Круг с петлей, треугольником и тремя лучами} + \text{Круг с петлей, петлей и тремя лучами} + \dots \quad (25.14) \end{aligned}$$

Рассмотрение показывает, что каждая диаграмма всегда сопровождается одним и тем же рядом вакуумных диаграмм. Предполагая, что эти разложения имеют смысл, обычно пренебрегают всеми членами, содержащими любые *несвязные* вакуумные диаграммы, на том основании, что это сводится просто к умножению всех векторов состояния на ненаблюдаемый постоянный фазовый множитель. Действительно, собственное значе-

ние  $C(0)$   $S$ -матрицы в вакуумном состоянии

$$S|0\rangle = C(0)|0\rangle \quad (25.15)$$

должно быть по модулю равно единице в силу унитарности  $S$ -матрицы<sup>1)</sup>:

$$|C|^2 = 1, \text{ или } C = e^{i\alpha} \text{ (}\alpha \text{ — действительная величина),} \quad (25.16)$$

а при разложении в ряд величина  $C$  численно равна сумме всех вкладов в  $S$ -матрицу, не содержащих «несвернутых» операторов. Но этот множитель одинаков для всех матричных элементов  $S$ -матрицы, поскольку наличие несвязных вакуумных диаграмм можно записать, например, в следующем виде:

The diagram shows an equation of vacuum diagrams. On the left, a circle with two external lines (top and bottom) and an upward-pointing arrow inside is added to a similar circle but with a smaller circle inside it (representing a loop), also with an upward arrow. This is followed by an ellipsis. This sum is equal to a single circle with two external lines and an upward arrow, followed by a large curly bracket. Inside the bracket, there is a circle with two external lines and no internal lines, added to a circle with two external lines and a loop inside, followed by an ellipsis.

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} + \dots = \text{Diagram 3} \left\{ \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \dots \right\} \quad (25.17)$$

так что пренебрежение всеми вакуумными диаграммами эквивалентно замене

$$S \rightarrow S' = C^{-1}S = e^{-i\alpha}S. \quad (25.18)$$

Здесь невозможно более игнорировать основную трудность, характерную для всей теории возмущений: *вторые члены в правых частях разложений (25.11)–(25.14) вносят бесконечные вклады* в истинные пропагаторы. Вычисление этих вкладов по правилам, сформулированным в табл. 6, приводит к квадратично расходящимся интегралам для вакуумных диаграмм второго порядка и к логарифмически расходящимся интегралам для фермионных и фотонных пропагаторов второго порядка и вершинных частей третьего порядка.

Появление этих расходимостей в разложении оператора рассеяния по теории возмущений не дискредитирует такой подход в целом и не приводит к отказу от теории возмущений. Это обусловлено рядом обстоятельств, среди которых наиболее важным

<sup>1)</sup> Это условие нарушается в присутствии достаточно сильных или быстро меняющихся внешних полей, способных привести к реальному рождению пар. — *Прим. ред.*

представляется следующее. Используя разложение по теории возмущений и рассматривая все бесконечные вклады так, как если бы они были конечными (что формально всегда можно сделать с помощью некоторой инвариантной процедуры «обрезания»), можно вывести методом итераций систему уравнений, которым удовлетворяют вычисленные таким путем истинные пропагаторы. Есть достаточные основания надеяться, что эти уравнения будут справедливы, хотя вычисление пропагаторов с помощью разложения по теории возмущений оказывается бессмысленным<sup>1)</sup>.

Существование интегральных уравнений, последовательно связывающих различные области неизвестности при наличии взаимодействия, можно показать с помощью следующего элементарного рассмотрения.

Основной постулат квантовой механики, сформулированный в гл. 1 и устанавливающий вероятностную интерпретацию, можно для целей настоящей главы переписать следующим образом.

Пусть  $P_{ab}$  — вероятность того, что если измерение величины  $A$  дало результат  $a$ , то последующее измерение величины  $B$  даст результат  $b$ ,  $P_{bc}$  — вероятность найти значение  $c$  величины  $C$ , если величина  $B$  имеет значение  $b$ , а  $P_{ac}$  — вероятность найти значение  $c$  величины  $C$ , если величина  $A$  имеет значение  $a$ . Тогда существуют комплексные числа  $\langle a|b \rangle$ ,  $\langle b|c \rangle$ ,  $\langle a|c \rangle$ , такие, что

$$P_{ab} = |\langle a|b \rangle|^2, \quad P_{bc} = |\langle b|c \rangle|^2, \quad P_{ac} = |\langle a|c \rangle|^2$$

и

$$\langle a|c \rangle = \sum_b \langle a|b \rangle \langle b|c \rangle \quad (25.19)$$

при условии, что не делается попытки измерить величину  $B$  между измерениями величин  $A$  и  $C$ .

Суммирование в (25.19) проводится по всем возможным «каналам», т. е. по всем возможным значениям  $B$ , через которые объект может достичь значения  $c$  величины  $C$ , если он имел значение  $a$  величины  $A$ .

Это знаменитое «правило сложения амплитуд вероятностей», согласно (6.2) и (6.3), можно записать на языке символов изме-

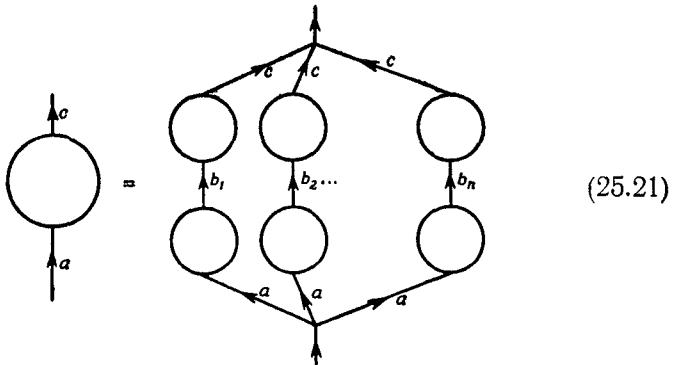
<sup>1)</sup> В действительности эти уравнения могут быть выведены и без использования теории возмущений, например с помощью функциональной техники. Поэтому изложенные в тексте соображения не имеют отношения к вопросу о применимости теории возмущений. — *Прим. ред.*



рения:

$$\begin{aligned} \text{Sp} [M(c, a)] &= \sum_b \langle a | M(b) | c \rangle = \sum_b \text{Sp} [M(c, a) M(b)] = \\ &= \sum_b \text{Sp} [M(b, a)] \text{Sp} [M(c, b)]. \end{aligned} \quad (25.20)$$

На языке областей неизвестности это разложение соответствует рассеению первоначальной области неизвестности, связанной с  $M(c, a)$ , на сеть *других* областей неизвестности, связанных с  $M(b, a)$  и  $M(c, b)$ , так что



(25.21)

Конечно, этого уравнения недостаточно для определения  $M(c, a)$ , поскольку все области неизвестности, связанные с  $M(b_n, a)$  и  $M(c, b_n)$  в свою очередь можно разрезать аналогично (25.21) и т. д., что соответствует дальнейшему разложению каждой амплитуды вероятности в (25.19) тем же самым способом, именно  $\langle b | c \rangle = \sum_a \langle b | d \rangle \langle d | c \rangle$  и т. д.

Уравнение (25.19) и его графическое представление (25.21) включает в себе в принципе бесконечную иерархию областей неизвестности, которую можно выявить посредством итераций. Эта иерархия находит свое выражение в совместной системе соответствующих интегральных уравнений.

Отличительная черта квантовой электродинамики состоит в том, что в ней эти иерархические уравнения для областей неизвестности, связанных с истинными пропагаторами фермионов и фотонов, можно записать в замкнутой форме, содержащей только сами эти пропагаторы и истинную вершинную часть. Эта возможность связана с особой формой гамильтониана взаимодействия, которая позволяет разделить любой процесс взаимодействия на элементарные акты, представляемые графически

вершинами, в которых испускается или поглощается один фотон с сохранением импульса и лептонного числа.

Для истинного фермионного пропагатора методом итераций получается следующее иерархическое уравнение:

$$(25.22)$$

которое можно аналитически записать в импульсном пространстве в виде

$$G(k) = G^0(k) + ie(2\pi)^4 G(k) \int \Gamma_\mu(k, k-x, x) G(k-x) \times \\ \times D_{\mu\nu}(x) \gamma_\nu d^4x G^0(k). \quad (25.22')$$

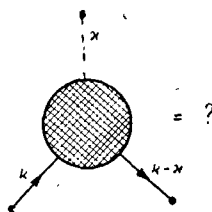
Аналогично для истинного фотонного пропагатора получается иерархическое уравнение

$$(25.23)$$

или аналитически в импульсном пространстве

$$D_{\mu\nu}(x) = D_{\mu\nu}^0(x) + ie(2\pi)^4 D_{\mu\sigma}(x) \text{Sp} \left[ \int \Gamma_\sigma(x-k, k, x) \times \right. \\ \left. \times G(k) G(x-k) \gamma_\tau d^4k \right] D_{\tau\nu}^0(x). \quad (25.23')$$

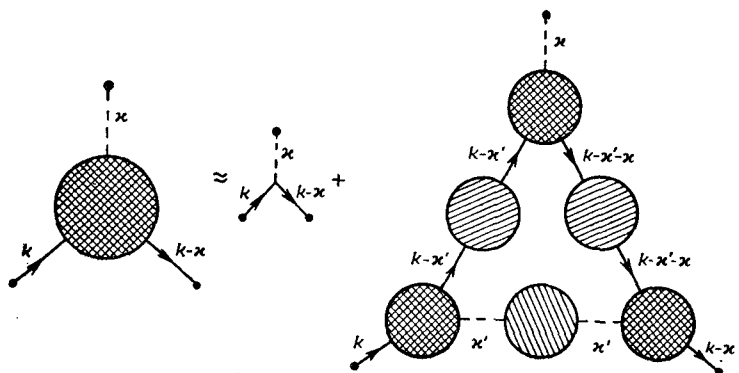
Прежде чем пытаться решить эту систему уравнений, необходимо записать аналогичное выражение для истинной вершинной части. Однако до сих пор все попытки записать в замкнутом виде иерархическое уравнение для области неизвестности, связанной с истинной вершинной частью, оказались безуспешными<sup>1)</sup>. Поэтому следует честно констатировать, что



$$(25.24)$$

Вопросительный знак в (25.24) составляет одну из важных математических проблем, связанных с существованием электромагнитного взаимодействия.

Некоторые авторы, в частности Ландау и его сотрудники, рассматривали вопрос о внутренней согласованности квантовой электродинамики на основе приближенной процедуры, в которой вместо вопросительного знака в (25.24) подставляется выражение



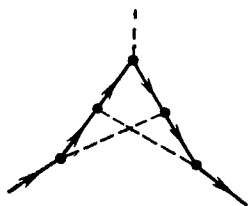
$$(25.25)$$

<sup>1)</sup> Это связано с тем чисто геометрическим фактом, что в отличие от фермионного и фотонного пропагаторов диаграммы вершинной части обладают необычайно большим многообразием своих топологических форм. Это и препятствует их объединению в замкнутые выражения типа (25.22), (25.23). — *Прим. ред.*

соответствующее интегральному уравнению

$$\Gamma_{\sigma}(k, k - \kappa, \kappa) = \Gamma_{\sigma}^0(k, k - \kappa, \kappa) + \int \Gamma_{\mu}(k, k - \kappa', \kappa') \times \\ \times D_{\mu\nu}(\kappa') G(k - \kappa') \Gamma_{\sigma}(k - \kappa', k - \kappa' - \kappa, \kappa) \times \\ \times G(k - \kappa' - \kappa) \Gamma_{\nu}(k - \kappa' - \kappa, k - \kappa, \kappa') d^4\kappa'. \quad (25.25')$$

Заключения этих авторов вызывают сомнения, поскольку уравнение (25.25) не может полностью описывать истинную вершинную часть. Оно не содержит, например, вклада в истинную вершинную часть от диаграмм типа показанной на фиг. 32<sup>1)</sup>.



Фиг. 32. Тип диаграмм, опущенных в разложении (25.25).

В отсутствие каких-либо определенных сведений об истинных пропагаторах в квантовой электродинамике получила широкое распространение идея, известная под названием «перенормировки» и занимающая большое место в соответствующей научной литературе<sup>2)</sup>. В этой литературе можно найти два совершенно различных взгляда на смысл перенормировки.

1. Рассмотрение разложений (25.12) — (25.14) в ряд теории возмущений показывает, что бесконечности в истинных пропагаторах появляются только как множители  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  и как добавка  $\delta m$  к массе фермиона, так что можно записать

$$G = Z_2 G^{\text{per}}, \\ \Gamma_{\mu} = Z_1^{-1} \Gamma_{\mu}^{\text{per}}, \\ D_{\mu\nu} = Z_3 D_{\mu\nu}^{\text{per}}, \quad (25.26)$$

<sup>1)</sup> В цитированных работах в основе принципа отбора диаграмм лежало предположение о малости затравочной константы связи. Соответственно вклад диаграмм типа изображенных на фиг. 32 оказывается малым сравнительно с диаграммами, входящими в (25.25). — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Процедура перенормировки не связана непосредственно ни с уровнем наших знаний о структуре истинных пропагаторов, ни с расходимостями. Эта процедура представляет собой необходимый элемент всякой последовательной теории, имея своей целью приведение в соответствие величин, входящих в аппарат теории, с наблюдаемыми на опыте величинами. — *Прим. ред.*

причем подразумевается, что функции  $G^{\text{рег}}$ ,  $\Gamma_{\mu}^{\text{рег}}$  и  $D_{\mu\nu}^{\text{рег}}$  не содержат бесконечностей и включают массу фермиона только в виде комбинации

$$m_{\text{эксп}} = m + \delta m. \quad (25.27)$$

Можно показать, в частности, что фермионный пропагатор в теории возмущений имеет вид<sup>1)</sup>

$$G = \frac{Z_2}{\hat{k} - m_{\text{эксп}}}; \quad (25.28)$$

это наводит на мысль отождествить величину  $m_{\text{эксп}}$  с действительно наблюдаемой массой фермиона. Процедура, в которой величина  $m + \delta m$  полагается конечной, называется «перенормировкой массы» и сводится к замене массы «голой» частицы  $m$  массой «одетой» частицы  $m_{\text{эксп}}$ , которая включает в себя через  $\delta m$  все вклады в  $m_{\text{эксп}}$ , связанные с наличием взаимодействия.

Кроме того, поскольку любой множитель  $e^2$  в разложении в ряд по теории возмущений будет появляться всегда вместе с константами  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  в виде комбинации  $e^2 Z_3 Z_1^{-2} Z_2^2$ , величину

$$e_{\text{эксп}} = e Z_3^{1/2} Z_1^{-1} Z_2 \quad (25.29)$$

отождествляют с экспериментально определяемым зарядом фермиона; такая процедура называется «перенормировкой заряда».

Поскольку бесконечности теории возмущений «учтены» этой формальной процедурой перенормировки, все вклады в матрицу рассеяния будут конечными, и можно в принципе провести вычисления в любом порядке по  $e_{\text{эксп}}^2$ . Конечно, перенормировка не дает гарантии, что остающееся разложение в ряд теории возмущений по степеням  $e_{\text{эксп}}^2$  сходится.

Исследование свойств сходимости перенормированной теории возмущений осложняется остающейся всегда трудоемкостью вычислений по теории возмущений выше второго порядка, в котором расчеты и без того достаточно громоздки. В нескольких случаях, для которых такие вычисления проведены в третьем и четвертом порядке и возможно сравнение с экспериментом, теоретические предсказания подтверждаются с удивительной точностью.

Эмпирический успех этого рецепта проведения расчетов по теории возмущений замечателен, если иметь в виду очевидную бессмысленность расходящихся констант  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  и  $\delta m$ , которые появляются как ряды по степеням перенормированного заряда

<sup>1)</sup> Это выражение справедливо лишь вблизи «массовой поверхности», т. е. при  $k^2 \approx m_{\text{эксп}}^2$ . — *Прим. ред.*

$e^2$  с расходящимися коэффициентами. Придерживаясь теории возмущений, мы отказываемся фактически от всякой надежды получить истинные пропагаторы, не содержащие бесконечностей, и процедуру перенормировки в этой форме следует признать рецептом, который дает правильные результаты по неизвестным пока причинам.

2. Совершенно иная точка зрения относительно смысла перенормировки развита рядом авторов, которые считают, что истинные пропагаторы нельзя однозначно определить из иерархических уравнений (25.22) — (25.24). Защитники этого подхода фактически *предполагают* существование набора истинных пропагаторов  $G'$ ,  $\Gamma'_\mu$  и  $D'_{\mu\nu}$ , не содержащих бесконечностей и включающих параметр связи  $e'$ , и *утверждают*, что переход ко второму набору истинных пропагаторов  $G''$ ,  $\Gamma''_\mu$  и  $D''_{\mu\nu}$ , не содержащих бесконечностей и включающих параметр связи  $e''$ , не вызывает никаких наблюдаемых изменений при условии, что эти два набора связаны соотношениями

$$\begin{aligned} G'' &= z_2 G', \\ \Gamma''_\mu &= z_1^{-1} \Gamma'_\mu, \\ D''_{\mu\nu} &= z_3 D'_{\mu\nu}, \\ e''^2 &= e'^2 z_3^{-1} z_1^2 z_2^{-2}, \end{aligned} \quad (25.30)$$

где  $z_1, z_2, z_3$  — произвольные *конечные* числа. Следует подчеркнуть, что существование такой «мультипликативной ренормализационной группы преобразований» нельзя доказать с помощью теории возмущений, поскольку теория возмущений сразу исключает существование истинных пропагаторов, не содержащих бесконечностей. Существование соотношений (25.30) самое большее *подсказывается* теорией возмущений: если в соотношениях (25.26) замснить  $G$  на  $z_2 G$ ,  $\Gamma_\mu$  на  $z_1^{-1} \Gamma_\mu$  и  $D_{\mu\nu}$  на  $z_3 D_{\mu\nu}$ , то это приведет к изменению эффективной величины заряда, а именно к замене величины  $e^2_{\text{экср}}$  на  $e^2_{\text{экср}} z_3 z_1^{-2} z_2^2$ . Следовательно, если одновременно выполнить *компенсирующую* перенормировку заряда  $e^2 \rightarrow e^2 z_3^{-1} z_1^2 z_2^{-2}$ , то в результате всех этих операций величина  $e^2_{\text{экср}}$  *не изменится*.

Сама общность этого подхода является его слабостью. Требования инвариантности, выраженные соотношениями (25.30), слишком слабы в качестве условий, накладываемых на неизвестные истинные пропагаторы, и поэтому недостаточны для однозначного установления их структуры.

Чтобы из соотношений (25.30) получить информацию относительно аналитических свойств истинных пропагаторов, необходи-

мо сделать некоторые предположения относительно зависимости пропагаторов от их аргументов. Например, обычно предполагают, что истинный фотонный пропагатор можно представить в виде

$$D_{\mu\nu}(x^2) = \frac{d(x^2)}{x^2} \left( \delta_{\mu\nu} - \frac{x_\mu x_\nu}{x^2} \right) + \frac{d_l(x^2)}{x^2} \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}, \quad (25.31)$$

где неизвестные функции  $d(x^2)$  и  $d_l(x^2)$  не содержат бесконечностей. Такая форма подсказывается видом пропагатора свободного фотона  $D_{\mu\nu}^0$ , которому соответствует  $d(x^2) = 1$ . Однако следует иметь в виду, что специфическая форма выражения (25.31) содержит сильные предположения об аналитических свойствах  $D_{\mu\nu}(x^2)$ , примером чему служит существование полюса при  $x^2 = 0$ . Аналогично обычно предполагается, что истинный фермионный пропагатор имеет вид

$$G(k) = \frac{a(k^2) \hat{k} - b(k^2) m}{k^2 + m^2} \quad (25.32)$$

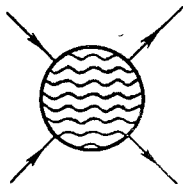
с неизвестными функциями  $a(k^2)$  и  $b(k^2)$ ; здесь снова проявляется аналогия с теорией возмущений, в которой пропагатор свободного фермиона в низшем приближении имеет вид

$$G^0(k) = \frac{\hat{k} - m}{k^2 + m^2}.$$

Если принять для пропагаторов выражения типа (25.31) и (25.32), то уравнения (25.30) становятся функциональными уравнениями для неизвестных функций  $d$ ,  $a$  и  $b$ , что позволяет использовать изящный математический метод. Мы не будем здесь дальше следовать этому подходу, поскольку имеются серьезные сомнения в наличии какого-либо сходства аналитических свойств истинных и свободных пропагаторов<sup>1)</sup>. Отметим только, что в настоящее время не существует какой-либо детальной информации об истинных пропагаторах, которая не основывалась бы на теории возмущений. Даже функциональные уравнения для  $d$ ,  $a$  и  $b$  никогда не решались без обращения к аргументам теории возмущений, которую всегда призывают на помощь, если нужно определить частные значения истинных пропагаторов, например предельное поведение функции  $d$  при малом параметре связи  $e^2$ .

<sup>1)</sup> Вопрос о полюсах пропагаторов решается ссылкой не на теорию возмущений, а на опыт, который, несомненно, свидетельствует о существовании одночастичных состояний с массами  $m^2 = 0$  (фотон) и  $m^2 = m_{\text{электрон}}^2$  (электрон). При соответствующих значениях  $k^2$  и должны быть расположены полюсы пропагаторов. — *Прим. ред.*

В последние годы были сделаны изобретательные попытки выйти из этого круга неудач, проявившихся в рамках теории возмущений, с помощью очень общих предположений об аналитических свойствах истинных пропагаторов, которые позволяют вывести общие соотношения между действительной и мнимой частями истинного пропагатора, известные как «дисперсионные



Фиг. 33. Графическое представление четырехфермионной вершины.

соотношения». Например, предполагается, что истинный пропагатор фотона составлен из вкладов пропагаторов свободных частиц с различными массами. Тогда функция  $d(\kappa^2)$  принимает вид

$$\frac{d(\kappa^2)}{\kappa^2} = Z \left[ \frac{1}{\kappa^2} + \int_0^{\infty} \frac{\rho(M^2) dM}{\kappa^2 + M^2} \right] \quad (25.33)$$

с неизвестной спектральной функцией  $\rho(M^2)$ , что позволяет вывести дисперсионное соотношение

$$\text{Im} [d(\kappa^2)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Re} \frac{d(\kappa'^2) d\kappa'^2}{\kappa'^2 - \kappa^2}. \quad (25.34)$$

Спектральное представление (25.33) содержит неявное предположение, что истинный пропагатор всегда *независимо от величины параметра связи* имеет полюс при  $\kappa^2=0$ , соответствующий полюсу пропагатора свободного фотона. Однако сравнительно недавняя работа Швингера (см. конец гл. 21) заставляет усомниться в справедливости этого предположения, которое на первый взгляд кажется таким безобидным и разумным.

В теории, стремящейся отказаться от какой-либо опоры на теорию возмущений, нельзя с самого начала исходить из предполагаемой сходимости итерационной процедуры, которая позволяет в теории возмущений разложить любой истинный пропагатор на три основные составляющие, а именно фермионный пропагатор  $G$ , фотонный пропагатор  $D_{\mu\nu}$  и вершинную часть  $\Gamma_{\mu}$ . Соответственно главные усилия в теории дисперсионных соотно-



шений были направлены на угадывание непосредственно аналитических свойств более сложных истинных пропагаторов, например пропагатора, связанного с четырехфермионной вершиной, которая изображена на фиг. 33. Она представляет все фермионные процессы рассеяния с областью неизвестности, включающей все возможные каналы, которые могут давать вклад в амплитуду этого конкретного процесса. Не пытаясь умалить этих героических усилий, следует признать, что все так называемые дисперсионные соотношения, предложенные до сих пор, основаны на искусных догадках относительно аналитических свойств истинных пропагаторов<sup>1)</sup>.

По-видимому, само существование большого числа фермионов и бозонов с непонятным численным отношением их масс показывает, что структура даже простейших пропагаторов гораздо сложнее, чем обычно предполагается. Ни для кого не будет неожиданностью, если загадка спектра масс окажется в действительности самосогласованной проблемой, включающей всю иерархию пропагаторов. С этой точки зрения сколько-нибудь быстрый успех в решении этой задачи кажется маловероятным; напротив, следует ожидать, что она потребует дальнейшей тяжелой работы.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Интегральные уравнения, связывающие истинные пропагаторы, впервые формально вывел Швингер [1].

Понятие истинного пропагатора содержится уже в работе Дайсона [2], который положил начало современному варианту теории перенормировки. Превосходное рассмотрение дано в книге Боголюбова и Ширкова [3]. Примерами первой точки зрения на смысл перенормировки служат работы Челлена [4] и Лемана [5]. Вторая точка зрения, предполагающая существование мультипликативной ренормализационной группы преобразований, изложена Штюкельбергом и Петерманом [6] и Гелл-Маном и Лоу [7].

Внутренняя согласованность квантовой электродинамики рассмотрена в серии работ Ландау и др. [8]. См. также Ландау и др. [9] и Ландау [10].

Читателей, интересующихся дисперсионными соотношениями, отсылаем к статье Манделстама [11].

---

<sup>1)</sup> Это утверждение представляется излишне категоричным. Целый ряд простейших дисперсионных соотношений, таких, как (25.34) или однократные дисперсионные соотношения для двухчастичного рассеяния, может быть выведен из общих аксиом квантовой теории поля [12\*]. — *Прим. ред.*

### Литература

1. Schwinger J., Proc. Natl. Acad. Sci. US, **37**, 452 (1951).
2. Dyson F. J., Phys. Rev., **75**, 1736 (1949).
3. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантованных полей, М., 1957.
4. Källén G., Helv. Phys. Acta, **25**, 416 (1952).
5. Lehmann H., Nuovo Cimento, **11**, 342 (1954).
6. Stueckelberg E. C. G., Petermann A., Helv. Phys. Acta, **26**, 499 (1953).
7. Gell-Mann M., Low F., Phys. Rev., **95**, 1300 (1954).
8. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М., ДАН СССР, **95**, 733, 1177; **96**, 261 (1954).
9. Ландау Л. Д., Абрикосов А. А., Халатников И. М., Nuovo Cimento, **13**, Suppl. 3, 80 (1956).
10. Ландау Л. Д., О квантовой теории поля, в сборнике «Нильс Бор и развитие физики», ИЛ, 1958.
11. Mandelstam S., Rep. Progr. Phys., **25**, 99 (1962).
- 12<sup>2</sup>. Боголюбов Н. Н., Медведёв Б. В., Поливанов М. К., Вопросы теории дисперсионных соотношений, М., 1958.

## *О правилах отбора, обусловленных симметрией относительно инверсий и вращений системы координат*

Несмотря на трудности, связанные с вопросом о внутренней согласованности квантовой электродинамики, она является вполне удовлетворительной теорией с точки зрения возможности количественных предсказаний. В отличие от электромагнетизма для сильных и слабых взаимодействий все еще не существует столь же эффективного метода. Отсутствие сколько-нибудь глубоких динамических представлений создает резкий контраст с уже достигнутыми прочными знаниями о некоторых свойствах симметрии этих, еще не понятых в других отношениях взаимодействий. Цель этой и следующих трех глав — показать на нескольких примерах, выбранных из-за их простоты, как элементарное рассмотрение симметрии может привести к детальным предсказаниям. Поскольку здесь, больше чем в какой-либо другой главе, любое стремление к полноте изложения нарушило бы решение удерживать настоящую работу в определенных границах, все усилия будут направлены к скромной дидактической цели — возбудить у читателя желание большего, побуждая его таким образом к изучению теории групп, которая является адекватным и почти незаменимым языком для систематического рассмотрения свойств симметрии.

Следствия симметрии удобно классифицировать в соответствии с различными типами преобразований, связанными с различными симметриями.

1. Симметрии, которые можно сформулировать на языке трансформационных свойств векторов состояния при унитарных преобразованиях в координатном пространстве. К этой категории принадлежат законы сохранения и правила отбора, обусловленные инвариантностью относительно инверсий и вращений системы координат. Они рассматриваются в настоящей главе.

2. Симметрия относительно перестановки тождественных объектов, которую можно представить унитарным преобразованием в пространстве чисел заполнения. Эта симметрия рассматривается в гл. 27.

3. Симметрии, которые следует сформулировать на языке трансформационных свойств векторов состояния при антиунитарных преобразованиях. К этой категории принадлежат

а) правила суперотбора, примеры которых упоминаются в гл. 17 и 19;

б) более тонкие следствия инвариантности относительно инверсии времени, такие, как принцип взаимности и принцип детального равновесия;

в) следствия инвариантности относительно зарядового сопряжения. Детали пунктов (б) и (в) являются предметом рассмотрения в гл. 28.

4. Симметрии в пространстве векторов состояния, представляющие абстрактные внутренние свойства, такие, как изоспин. Они рассматриваются в гл. 29.

Простым физическим объектом, проявляющим нетривиальным образом симметрии первой и второй категорий, является система двух фотонов. В частности, система двух фотонов с нулевым полным импульсом является одной из простейших систем с определенной четностью.

Как показано в общем виде в гл. 14, операцию инверсии координат можно представить унитарным оператором  $\Pi$ , и если гамильтониан физической системы инвариантен относительно операции инверсии  $\Pi$ , то четность сохраняется. Сохранение четности в сильных и электромагнитных взаимодействиях часто можно использовать для установления внутренних свойств нестабильных объектов путем наблюдения четности продуктов их распада.

Однофотонное состояние  $|\kappa, S\rangle$ , определяемое в соответствии с (18.23), никогда не может быть состоянием определенной четности вследствие трансформационных свойств

$$\Pi|\kappa, R\rangle = |-\kappa, L\rangle, \quad \Pi|\kappa, L\rangle = |-\kappa, R\rangle \quad (26.1)$$

в комбинированном импульсно-поляризационном пространстве. В более общем случае любое однофотонное состояние (18.13) или (18.14) должно преобразовываться следующим образом:

$$\Pi|1_{\kappa, R}\rangle = \eta|1_{-\kappa, L}\rangle, \quad \Pi|1_{\kappa, L}\rangle = \eta|1_{-\kappa, R}\rangle, \quad (26.2)$$

где  $\eta$  — неопределенный пока фазовый множитель, удовлетворяющий условию

$$\eta^2 = 1, \quad (26.3)$$

налагаемому требованием, чтобы операция  $\Pi^2$  была эквивалентна тождественному преобразованию. Следовательно, операторы рождения и уничтожения должны преобразовываться следующим

щим образом:

$$\begin{aligned} \Pi b^+(\kappa, R) \Pi^{-1} &= \eta b^+(-\kappa, L), & \Pi b^+(\kappa, L) \Pi^{-1} &= \eta b^+(-\kappa, R), \\ \Pi b(\kappa, R) \Pi^{-1} &= \eta b(-\kappa, L), & \Pi b(\kappa, L) \Pi^{-1} &= \eta b(-\kappa, R). \end{aligned} \quad (26.4)$$

Этот фазовый множитель  $\eta$  иногда неудачно называют «внутренней четностью» однофотонного состояния. Его значение зависит от трансформационных свойств, приписанных оператору векторного потенциала (18.75). Принимая обычное условие, требующее, чтобы оператор магнитного поля преобразовывался как аксиальный вектор, находим, что вектор-потенциал должен менять знак при инверсии координат:

$$\Pi \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \Pi^{-1} = -\mathbf{A}(-\mathbf{q}, t). \quad (26.5)$$

Физический смысл множителя  $\eta$  неясен. Было бы совершенно ошибочным думать, что фотон «переносит» эту «внутреннюю четность», когда он перемещается с импульсом  $\kappa$ , поскольку понятие системы центра инерции бессмысленно для частицы, масса которой равна нулю, а только в такой системе объект мог бы иметь определенную внутреннюю четность. К счастью, трансформационные свойства любого двухфотонного состояния не зависят от  $\eta$ , поскольку такое состояние создается из вакуума применением двух операторов рождения, и поэтому операция  $\Pi$  всегда порождает только множитель  $\eta^2 = 1$ .

Для заданного импульса одного фотона  $\kappa$  можно построить четыре различных двухфотонных состояния с нулевым импульсом, а именно:

$$\begin{aligned} |RR\rangle &= b^+(\kappa, R) b^+(-\kappa, R) |0\rangle, \\ |LL\rangle &= b^+(\kappa, L) b^+(-\kappa, L) |0\rangle, \\ |RL\rangle &= b^+(\kappa, R) b^+(-\kappa, L) |0\rangle, \\ |LR\rangle &= b^+(\kappa, L) b^+(-\kappa, R) |0\rangle, \end{aligned} \quad (26.6)$$

которые графически воспроизведены на фиг. 34 и которые при инверсии координат преобразуются, согласно (26.4), следующим образом:

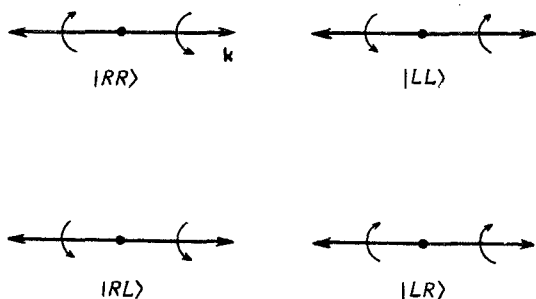
$$\Pi |RR\rangle = |LL\rangle, \quad \Pi |LL\rangle = |RR\rangle, \quad \Pi |RL\rangle = |RL\rangle, \quad \Pi |LR\rangle = |LR\rangle. \quad (26.7)$$

Поэтому собственные состояния оператора  $\Pi$  имеют вид

$$|RR\rangle - |LL\rangle \quad \text{с собственным значением} \quad P = -1 \quad (26.8a)$$

и  
 $|RR\rangle + |LL\rangle, |RL\rangle, |LR\rangle$  с собственным значением  $P = +1$ .  
 (26.86)

Состояния  $|RR\rangle - |LL\rangle$  и  $|RR\rangle + |LL\rangle$  можно различить экспериментально, поскольку в каждом из двух случаев плоскости



Фиг. 34. Четыре двухфотонных состояния с нулевым полным импульсом.

поляризации фотонов коррелированы различным образом. Чтобы убедиться в этом, разложим в соответствии с (18.69) круговую поляризацию на линейные:

$$\begin{aligned}
 b^+(\mathbf{x}, R) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [b^+(\mathbf{x}, 1) + ib^+(\mathbf{x}, 2)], \\
 b^+(\mathbf{x}, L) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [b^+(\mathbf{x}, 1) - ib^+(\mathbf{x}, 2)],
 \end{aligned}
 \tag{26.9}$$

что дает

$$\begin{aligned}
 |RR\rangle - |LL\rangle &= [b^+(\mathbf{x}, R)b^+(-\mathbf{x}, R) - b^+(\mathbf{x}, L)b^+(-\mathbf{x}, L)]|0\rangle = \\
 &= -i[b^+(\mathbf{x}, 2)b^+(-\mathbf{x}, 1) + b^+(\mathbf{x}, 1)b^+(-\mathbf{x}, 2)]|0\rangle
 \end{aligned}
 \tag{26.8a'}$$

и

$$|RR\rangle + |LL\rangle = [b^+(\mathbf{x}, 1)b^+(-\mathbf{x}, 1) + b^+(\mathbf{x}, 2)b^+(-\mathbf{x}, 2)]|0\rangle.
 \tag{26.86'}$$

Это означает, что состояние  $|RR\rangle - |LL\rangle$  образуется всякий раз, когда испускание фотона, поляризованного вдоль одной оси, сопровождается испусканием другого фотона, поляризованного вдоль ортогональной ей оси, т. е. плоскости поляризации в этом состоянии всегда перпендикулярны друг другу. С другой стороны, состояние  $|RR\rangle + |LL\rangle$  отличается от вакуумного состояния рождением двух фотонов, плоскости поляризации которых всегда параллельны. В состояниях  $|RL\rangle$  и  $|LR\rangle$  нет такой корреля-

ции, поскольку, например,

$$|RL\rangle = \frac{1}{2} [b^+(\mathbf{x}, 1)b^+(-\mathbf{x}, 1) + b^+(\mathbf{x}, 2)b^+(-\mathbf{x}, 2) + \\ + ib^+(\mathbf{x}, 1)b^+(-\mathbf{x}, 2) - ib^+(\mathbf{x}, 2)b^+(-\mathbf{x}, 1)]|0\rangle, \quad (26.86'')$$

так что вероятности найти плоскости поляризации параллельными или перпендикулярными одна другой в точности равны  $1/2$  в каждом случае.

Если объект с полным моментом количества движения, равным нулю, распадается на два фотона, то наблюдение корреляции между плоскостями поляризации позволяет определить внутреннюю четность этого объекта при условии, что распад вызывается взаимодействием, инвариантным относительно инверсии координат и, следовательно, сохраняющим четность. Примерами таких объектов могут служить нейтральный пион  $\pi^0$  и позитроний в синглетном основном состоянии [см. ниже (27.22)]. В обоих случаях наблюдение дает корреляцию, характерную для состояния  $|RR\rangle - |LL\rangle$ , показывая, что как  $\pi^0$ -мезон, так и позитроний в синглетном основном состоянии являются псевдоскалярными частицами, т. е. имеют внутреннюю четность  $P = -1$ .

Двухфотонные состояния определенной четности обладают интересными трансформационными свойствами относительно вращений. Рассмотрим прежде всего однофотонное состояние  $|\mathbf{x}, S\rangle$  и выполним вращение на угол  $\pi$  вокруг оси, перпендикулярной  $\mathbf{x}$ , которое обозначим через  $U_{\perp}$ . Интуитивно ясно, что в повернутой таким образом системе координат фотон окажется движущимся в направлении  $-\mathbf{x}$ , но с той же поляризацией. Таким образом, однофотонное состояние под действием  $U_{\perp}$  преобразуется следующим образом:

$$U_{\perp}|\mathbf{x}, R\rangle = |-\mathbf{x}, R\rangle, \quad U_{\perp}|\mathbf{x}, L\rangle = |-\mathbf{x}, L\rangle. \quad (26.10)$$

Соответственно двухфотонные состояния (26.6) будут преобразовываться так:

$$\begin{aligned} U_{\perp}|RR\rangle &= |RR\rangle, & U_{\perp}|LL\rangle &= |LL\rangle, \\ U_{\perp}|RL\rangle &= |LR\rangle, & U_{\perp}|LR\rangle &= |RL\rangle. \end{aligned} \quad (26.11)$$

Поэтому общие собственные состояния операторов  $\Pi$  и  $U_{\perp}$  имеют вид

$$|RR\rangle - |LL\rangle \quad (26.12a)$$

$$|RR\rangle + |LL\rangle \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{с собственным значением } U_{\perp} = +1, \quad (26.12б)$$

$$|RL\rangle + |LR\rangle \quad (26.12в)$$

$$|RL\rangle - |LR\rangle \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{с собственным значением } U_{\perp} = -1, \quad (26.12г)$$

Линейные комбинации (26.12в) и (26.12г) уже не являются собственными состояниями оператора вращения  $U_{\parallel}$  вокруг оси, параллельной  $\mathbf{x}$ , что и не удивительно, поскольку они представляют собой линейные суперпозиции состояний с различными значениями компоненты момента количества движения в направлении  $\mathbf{x}$ .

Из этих трансформационных свойств можно вывести *правило отбора*: частица со спином 1 и определенной четностью не может распасться на два фотона.

Для доказательства этого утверждения заметим прежде всего, что проекция спина частицы на направление  $\mathbf{x}$  может иметь значения  $m = +1, 0, -1$ . Поскольку в двухфотонных состояниях (26.6) возможны значения  $m = -2, 0, +2$  проекции момента количества движения на ось  $\mathbf{x}$ , при сохранении момента количества движения только состояние с  $m = 0$  может распасться на два фотона. Поэтому в качестве возможных конечных состояний остаются  $|RR\rangle - |LL\rangle$  и  $|RR\rangle + |LL\rangle$ . Однако состояние частицы с  $m = 0$  преобразуется как сферическая гармоника  $Y_{1,0} = \cos \theta$  ( $\theta$  — угол, отсчитываемый от направления  $\mathbf{x}$ , см. Приложение 1):

$$U_{\perp} |m = 0\rangle = - |m = 0\rangle, \quad (26.13)$$

обладая собственным значением  $U_{\perp} = -1$ , и, таким образом, два оставшихся состояния (26.12а) и (26.12б) исключаются из числа возможных конечных состояний, поскольку они относятся к собственному значению  $U_{\perp} = +1$ .

В отличие от частиц с массой, равной нулю, для частиц с ненулевой массой покоя можно определить понятие внутренней четности отдельной частицы, поскольку такая частица, если она покоится, может находиться в состоянии с определенной четностью. Особый интерес представляют фермионы со спином  $1/2$ ,  $\psi$ -функции которых удовлетворяют уравнению Дирака. Как показано в гл. 19, операцию инверсии координат для этих частиц можно представить оператором

$$\Pi = \eta_P \gamma_4 \Pi_D, \quad (26.14)$$

где фазовый множитель  $\eta_P$  может принимать одно из четырех возможных значений  $\pm 1$  или  $\pm i$  в зависимости от того, имеет ли оператор двукратной инверсии координат  $\Pi^2$  значение  $+1$  или  $-1$ . В соответствии с обсуждением в гл. 14 в связи с двузначностью  $\psi$ -функций для частиц со спином  $1/2$  примем здесь условие  $\Pi^2 = +1$  и будем рассматривать только случай  $\eta_P = \pm 1$ .

Пусть состояние одиночного покоящегося электрона или позитрона является собственным состоянием оператора  $\Pi_D$  с собственным значением  $P_D$ . Обозначим такое состояние посредством



$|e^\mp\rangle \equiv |k=0, r, P_D, L=\pm 1\rangle$ , где  $r$  — спиновый индекс, а  $L$  — лептонное число. Тогда можно определить внутреннюю четность  $P_i$  с помощью соотношения

$$\Pi |e^\mp\rangle = P_i P_D |e^\mp\rangle. \quad (26.15)$$

Если состояние электрона или позитрона характеризуется квантовым числом орбитального момента количества движения  $l$ , то в общем случае  $P_D = (-1)^l$ , как было показано в гл. 14. Тогда из представления состояния  $|e^-\rangle$  в пространстве «спин — спиральность» с помощью  $\psi$ -функций (см. табл. 3)

$$A_+ (k=0, r=1) = \text{const} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_+ (k=0, r=2) = \text{const} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (26.16)$$

и представления (19.5) для  $\gamma_4$  следует, что

$$\Pi |e^-\rangle = \eta_P P_D |e^-\rangle. \quad (26.17)$$

Таким образом, фазовый множитель  $\eta_P$  можно отождествить с внутренней четностью электрона

$$P_i (e^-) = \eta_P. \quad (26.18)$$

С другой стороны, позитронное состояние  $|e^+\rangle$  в пространстве «спин — спиральность» представляется в виде

$$A_- (k=0, r=1) = \text{const} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_- (k=0, r=2) = \text{const} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (26.19)$$

так что

$$\Pi |e^+\rangle = -\eta_P P_D |e^+\rangle, \quad (26.20)$$

откуда можно сделать заключение, что для внутренней четности позитрона

$$P_i (e^+) = -\eta_P. \quad (26.21)$$

Другими словами, хотя внутренняя четность фермиона, удовлетворяющего уравнению Дирака, не определена однозначно, частица и античастица всегда имеют в этом случае противоположную внутреннюю четность.

Следовательно, позитроний, который можно описать произведением состояний  $|e^-\rangle \times |e^+\rangle$ , имеет внутреннюю четность

$P_i = -1$ . Поэтому в состоянии определенной четности полная четность позитрония

$$P \text{ (позитроний)} = -P_D. \quad (26.22)$$

Таким образом, имеется *правило отбора*: позитроний в состоянии с четным  $l$  ( $P_D = +1$ ) не может распасться на  $n$ -фотонное состояние положительной четности, а позитроний в состоянии с нечетным  $l$  ( $P_D = -1$ ) не может распасться на  $n$ -фотонное состояние отрицательной четности.

Внутренняя четность не сказывается на оптических переходах между различными уровнями позитрония, поскольку в этом случае наблюдается только изменение  $P_D$ , и правила отбора, следующие из сохранения четности и момента количества движения, точно такие же, как для спектра водорода.

Возможность однозначного установления относительной четности электрона и позитрона  $P(e^-e^+)$  тесно связана с разделением электронных и позитронных состояний правилом суперотбора, которое в этом случае можно связать с сохранением лептонного числа и которое позволяет [см. уравнения (15.52) и (15.53)] с полным основанием говорить об относительной четности двух состояний. С другой стороны, невозможно измерить относительную четность фермионных состояний, принадлежащих различным частицам данного зарядового мультиплета, таких, как нейтронные и протонные состояния, поскольку они разделены не правилом суперотбора, а законом сохранения, например законом сохранения заряда (который должен выполняться независимо от сохранения лептонного или барионного числа), следующим, вероятно (см. гл. 20), из некоторой фазовой инвариантности, вследствие которой относительные фазы состояний, принадлежащих одному мультиpletу, произвольны. Поэтому относительную четность  $P(pn)$  следует фиксировать соглашением, и обычно принимается, что фермионы, принадлежащие одному мультиpletу, имеют одинаковую внутреннюю четность, так что, в частности, *принимается*  $P(pn) = +1$ . Аналогично остается неопределенной внутренняя четность странных фермионов, (гиперонов), таких, как  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  и  $\Xi$ , если ее не фиксировать соглашением об относительной четности между нуклоном  $N$  и одним из гиперонов, например  $P(N\Lambda)$ . Обычно *принимается*  $P(N\Lambda) = +1$ . После того как сделаны эти два предположения, можно в принципе определить внутреннюю четность тяжелых бозонов, таких, как  $\pi$  и  $K$ , и барионов  $N$ ,  $\Lambda$ ,  $\Sigma$  и  $\Xi$ .

Ко времени написания этой книги внутренние четности так называемых элементарных частиц известны не полностью. Однако интересно отметить, что все бозоны, обладающие массой покоя, в том числе «резонансы»  $\eta$ ,  $\omega$ ,  $\rho$  и т. д., имеют отрица-

тельную внутреннюю четность. С другой стороны, все барионы, для которых известна внутренняя четность, имеют положительную внутреннюю четность. Неизвестно, представляет ли этот любопытный факт общее правило.

### **ПРИМЕЧАНИЯ**

Симметрии двухфотонного состояния впервые полностью проанализировал Янг [1]. Вопрос о том, как в принципе можно наблюдать корреляцию между плоскостями поляризации двух фотонов, испущенных при распаде  $\pi^0$ -мезона, также рассмотрел Янг [2].

Детальное обсуждение того, как в принципе получить информацию об относительной внутренней четности барионов и бозонов с отличной от нуля массой, см. в работе Сакураи [3].

### ***Литература***

1. Yang C. N., Phys. Rev., **77**, 242 (1950).
2. Yang C. N., Phys. Rev., **77**, 722 (1950).
3. Sakurai J., в книге Brandeis Lectures in Theoretical Physics, 1961, Vol. 1, New York, 1962, p. 231.

## Перестановочная симметрия многочастичных состояний

Двухфотонным состояниям, определенным соотношениями (26.6), свойствен тот недостаток, что они не обладают перестановочной симметрией, характерной для многочастичных состояний. Рассмотрим произвольное состояние двух бозонов

$$|1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle = b^+(\tau_1)b^+(\tau_2)|0\rangle, \quad (27.1)$$

где  $\tau$  — *полный* набор квантовых чисел, которые можно использовать для того, чтобы характеризовать неразличимые в остальных отношениях частицы. «Неразличимость» частиц означает, что невозможно приписать частице какой-либо другой индекс, помимо набора квантовых чисел  $\tau$ . Однако в выражении (27.1) это требование не учтено, поскольку порядок, в котором написаны операторы  $b^+$ , подразумевает дополнительную нумерацию бозонов, так как набором квантовых чисел  $\tau_1$  можно назвать «первым» бозоном в соответствии с условием, по которому порядок операторов устанавливается слева направо, а бозон с набором квантовых чисел  $\tau_2$  — «вторым» бозоном. Состояние (27.1) физически неотлично от состояния

$$|1_{\tau_2}, 1_{\tau_1}\rangle = b^+(\tau_2)b^+(\tau_1)|0\rangle, \quad (27.2)$$

в котором по использованному выше условию нумерации «первый» бозон имеет квантовые числа  $\tau_2$ , а «второй» бозон имеет квантовые числа  $\tau_1$ . Из этого требования неразличимости можно сделать вывод о существовании унитарного оператора перестановки  $T_{12}$ , связывающего эти состояния, так что

$$|1_{\tau_2}, 1_{\tau_1}\rangle = T_{12}|1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle = T_{12}b^+(\tau_1)b^+(\tau_2)T_{12}^{-1}|0\rangle \quad (27.3)$$

и, таким образом,

$$T_{12}b^+(\tau_1)b^+(\tau_2)T_{12}^{-1} = b^+(\tau_2)b^+(\tau_1), \quad (27.4)$$

где учтено обычное условие, что вакуумное состояние есть инвариант  $T_{12}|0\rangle = |0\rangle$ .

С помощью аналогичных аргументов получим, что для двухфермионных состояний также существует соотношение типа

(27.3), так что условие (27.4) остается справедливым, если операторы  $b^+$  заменить соответствующими операторами рождения фермионов  $a^+$ .

Двукратное действие оператора  $T_{12}$  должно восстанавливать начальное состояние

$$T_{12}^2 |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle = |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle \quad (27.5)$$

с точностью до фазового множителя, который полагают равным единице. Поэтому возможные собственные значения оператора  $T_{12}$  должны быть равны  $+1$  или  $-1$ . Соответствующие собственные функции мы будем называть «симметричными» и «антисимметричными» относительно перестановок и обозначим соответственно

$|1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_s$  и  $|1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_a$ , так что

$$T_{12} |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_s = + |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_s, \quad (27.6)$$

$$T_{12} |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_a = - |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_a. \quad (27.7)$$

Из коммутационных соотношений для бозонных операторов рождения  $b^+$  и антикоммутационных соотношений для фермионных операторов рождения  $a^+$  непосредственно следует, что двухчастичные бозонные состояния симметричны, а двухчастичные фермионные состояния антисимметричны относительно перестановок. В самом деле, для бозонов уравнение (27.3) можно решить с помощью коммутационных соотношений (18.12):

$$\begin{aligned} T_{12} |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_B &= b^+(\tau_2) b^+(\tau_1) |0\rangle = \\ &= + b^+(\tau_1) b^+(\tau_2) |0\rangle = + |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_B, \end{aligned} \quad (27.8)$$

а для фермионов антикоммутационные соотношения (17.17) дают

$$\begin{aligned} T_{12} |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_F &= a^+(\tau_2) a^+(\tau_1) |0\rangle = \\ &= - a^+(\tau_1) a^+(\tau_2) |0\rangle = - |1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_F. \end{aligned} \quad (27.9)$$

Это трансформационное свойство можно сделать явным, записывая двухбозонное состояние через одночастичные состояния:

$$|1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_s = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |1_{\tau_1}\rangle_1 |1_{\tau_2}\rangle_2 + |1_{\tau_2}\rangle_1 |1_{\tau_1}\rangle_2 ]; \quad (27.10)$$

оператор перестановки  $T_{12}$  действует теперь на индексы частиц  $\alpha$  в  $|\rangle_\alpha$  ( $\alpha=1, 2$ ). Аналогично двухфермионное состояние можно записать как антисимметризованную комбинацию одночастичных состояний:

$$|1_{\tau_1}, 1_{\tau_2}\rangle_a = \frac{1}{\sqrt{2}} [ |1_{\tau_1}\rangle_1 |1_{\tau_2}\rangle_2 - |1_{\tau_2}\rangle_1 |1_{\tau_1}\rangle_2 ]. \quad (27.11)$$

Инвариантность гамильтониана относительно перестановки индексов частиц означает, что

$$T_{12}HT_{12}^{-1} = H, \text{ или } T_{12}H - HT_{12} = 0. \quad (27.12)$$

Отсюда следует, что собственное значение оператора  $T_{12}$  должно быть интегралом движения. Таким образом, если в некоторый момент времени вектор состояния системы является симметричным или антисимметричным относительно перестановки индексов частиц, то он будет обладать этим свойством во все моменты времени, если только не включается некоторое взаимодействие, не инвариантное относительно этой перестановки, т. е. такое взаимодействие, которое позволяет различить частицы. Однако такое кажущееся «несохранение перестановочной симметрии» можно всегда интерпретировать как следствие того, что рассмотренный набор квантовых чисел не является полным<sup>1)</sup>. Так, если для двух фермионов, полное описание которых требует задания импульсов и спинов, переставлять только индексы импульса, но не индексы спина, то можно обнаружить состояния либо симметричные, либо антисимметричные относительно перестановки только индексов импульса, но перестановка индексов как импульса, так и спина одновременно должна в этом случае приводить к антисимметрии вектора состояния.

Непосредственным обобщением доводов, использованных в случае двухчастичных состояний, можно найти, что любое многобозонное состояние  $|n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, \dots\rangle$  симметрично относительно любой перестановки  $\mathcal{P}$  индексов частиц:

$$\mathcal{P}|n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, \dots\rangle = |n_{\tau_1}, n_{\tau_2}, \dots\rangle, \quad (27.13)$$

а любое многофермионное состояние  $|N_{\tau_1}, N_{\tau_2}, \dots\rangle$  антисимметрично относительно этой перестановки:

$$\mathcal{P}|N_{\tau_1}, N_{\tau_2}, \dots\rangle = \delta_{\mathcal{P}}|N_{\tau_1}, N_{\tau_2}, \dots\rangle, \quad (27.14)$$

где

$$\delta_{\mathcal{P}} = \begin{cases} +1, & \text{если } \mathcal{P} \text{ — четная перестановка,} \\ -1, & \text{если } \mathcal{P} \text{ — нечетная перестановка.} \end{cases} \quad (27.15)$$

Каждый, кто знаком с языком теории групп, заметит, что бозонные и фермионные состояния принадлежат двум существующим одномерным представлениям группы перестановок, а именно полностью симметричному и полностью антисимметрич-

<sup>1)</sup> Если указанное взаимодействие действительно делает частицы различимыми, то никаким добавлением новых квантовых чисел нельзя восстановить перестановочную симметрию. Сказанное относится, например, к протонно-нейтронной системе с учетом электромагнитных взаимодействий. — *Прим. ред.*

ному представлениям соответственно. Это является прямым следствием эмпирического факта, выраженного в коммутационных и антикоммутационных соотношениях и состоящего в том, что числа заполнения бозонных квантовых состояний неограничены, а числа заполнения фермионных квантовых состояний удовлетворяют принципу Паули.

Хотя для группы перестановок существуют представления более высоких размерностей, соответствующие различным ограничениям на возможные числа заполнения квантовых состояний, однако оказывается, что ни одно из них не реализуется в природе. Причина этого странного эмпирического факта в настоящее время не вполне понятна<sup>1)</sup>.

В качестве примера, нетривиальным образом иллюстрирующего введенные в этой главе понятия, рассмотрим снова двухфотонное состояние, но для характеристики входящих в него однофотонных состояний используем вместо квантовых чисел  $\mathbf{x}$ ,  $S$  (импульс, поляризация) квантовые числа  $\omega$ ,  $j$ ,  $m$ ,  $P$  (энергия, момент количества движения, четность) (см. Приложения 2 и 3). Любое двухфотонное состояние является тогда линейной комбинацией произведений  $|l, m_l\rangle |s, m_s\rangle$ , где  $|l, m_l\rangle$  представляет возможное орбитальное состояние системы двух фотонов, а  $|s, m_s\rangle$  — возможное спиновое состояние этой системы. Эти линейные комбинации для данного состояния с полным моментом количества движения  $|j, m\rangle$  должны быть выбраны в соответствии с правилами сложения моментов количества движения, изложенными в Приложении 2, где показано также, что для  $|s_1| = |s_2| = 1$  существует девять спиновых состояний  $|s, m_s\rangle$ , которые при перестановке индексов частиц преобразуются следующим образом:

$$T_{12}|s, m_s\rangle = +|s, m_s\rangle \quad \text{при } s = 0, 2, \quad (27.16a)$$

$$T_{12}|s, m_s\rangle = -|s, m_s\rangle \quad \text{при } s = 1. \quad (27.16b)$$

С другой стороны, для орбитального состояния

$$T_{12}|l, m_l\rangle = (-1)^l |l, m_l\rangle. \quad (27.17)$$

Это следует из возможности полностью характеризовать орбитальное состояние  $\psi$ -функцией  $\psi_{lm_l}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \psi_{lm_l}(\mathbf{x})$ , зависящей только от относительного импульса двух фотонов  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$ , поскольку в импульсном пространстве гамильтониан системы двух

<sup>1)</sup> Аномальные перестановочные свойства (так называемые «парастатистики») привлекают в последнее время к себе интерес в связи с проблемами массы  $\mu$ -мезона, кварков и т. д. — *Прим. ред.*

фотонов можно записать в виде

$$H = \pm (\mathbf{s}_1 \mathbf{x}_1 \pm \mathbf{s}_2 \mathbf{x}_2) = \pm \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{s}_1 \pm \mathbf{s}_2) (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) + \frac{1}{2} (\mathbf{s}_1 \mp \mathbf{s}_2) (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \right]. \quad (27.18)$$

В системе центра масс этот гамильтониан принимает вид

$$\pm \frac{1}{2} (\mathbf{s}_1 \mp \mathbf{s}_2) \mathbf{x}.$$

Таким образом, операция перестановки индексов частиц дает

$$T_{12} \Psi_{lm_l}(\mathbf{x}) = \Psi_{lm_l}(-\mathbf{x}) \quad (27.19)$$

и, следовательно, для орбитального движения она эквивалентна инверсии координат

$$T_{12} \Psi_{lm_l}(\mathbf{x}) = \Pi \Psi_{lm_l}(\mathbf{x}). \quad (27.20)$$

Поскольку четность любого состояния с орбитальным моментом количества движения  $l$  равна  $(-1)^l$  (см. гл. 14), отсюда следует соотношение (27.17), и можно записать

$$-T_{12} |l, m_l\rangle |s, m_s\rangle = (-1)^l |l, m_l\rangle T_{12} |s, m_s\rangle. \quad (27.21)$$

Так как полный вектор состояния должен быть симметричным

$$T_{12} |j, m\rangle = + |j, m\rangle \quad (27.22)$$

и четность состояния определяется исключительно его орбитальной частью, следует сделать вывод, что в двухфотонные состояния положительной четности ( $l$  четно) могут давать вклад только симметричные спиновые состояния ( $s=0$  или  $s=2$ ), тогда как в состояния отрицательной четности ( $l$  нечетно) могут давать вклад только антисимметричные спиновые состояния ( $s=1$ ).

Имеется интересная альтернативная классификация поляризационных состояний системы двух фотонов. В гл. 18 показано, что поляризационное пространство фотона, создаваемое собственными векторами  $|R\rangle$  и  $|L\rangle$  оператора  $S_3$ , изоморфно пространству, создаваемому собственными векторами  $|1/2, +1/2\rangle$  и  $|1/2, -1/2\rangle$  оператора  $s_3$ , относящегося к спину  $s=1/2$  [см. формулы (18.57) — (18.60)]. Следовательно, правила сложения моментов количества движения  $j=1/2$  применимы к сложению поляризаций фотонов. Чтобы выявить эту аналогию, будем характеризовать поляризационные состояния каждой частицы квантовыми числами  $1/2 S_0$  и  $1/2 S_3$ , так что в общем случае

$$|S\rangle = \left| \frac{1}{2} S_0, \frac{1}{2} S_3 \right\rangle \quad (27.23)$$



и, в частности, для одного фотона

$$|R\rangle = \left| \frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle, \quad |L\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (27.24)$$

Поляризационные состояния системы двух фотонов получатся теперь с помощью правила сложения, выраженного формулой (П2.9) в Приложении 2, которое приводит к четырем поляризационным состояниям, состоящим из антисимметричного синглета и симметричного триплета в поляризационном пространстве, а именно:

$$\frac{1}{2} S_0 = 0 \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|R\rangle_1 |L\rangle_2 - |L\rangle_1 |R\rangle_2], \quad (27.25)$$

$$\frac{1}{2} S_0 = 1 \quad \begin{cases} |1, 1\rangle = |R\rangle_1 |R\rangle_2, \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|R\rangle_1 |L\rangle_2 + |L\rangle_1 |R\rangle_2], \\ |1, -1\rangle = |L\rangle_1 |L\rangle_2. \end{cases} \quad (27.26)$$

Поскольку гамильтониан свободных фотонов коммутирует с оператором поляризации  $S$ ,  $\frac{1}{2}S_0$  и  $\frac{1}{2}S_3$  являются хорошими квантовыми числами для описания любой системы взаимодействующих фотонов. Однако остается открытым вопрос о том, насколько широко можно использовать вращательную симметрию в поляризационном пространстве, т. е. «закон сохранения поляризации», для ограничения возможного выбора гамильтониана взаимодействия, содержащего только операторы рождения и уничтожения фотонов и предназначенного для феноменологического учета возможного фотон-фотонного взаимодействия. На вопрос о том, «сохраняется ли поляризация» при испускании и поглощении фотонов другими объектами, нельзя ответить до тех пор, пока не определено понятие оператора поляризации для этих объектов.

Оператор перестановки  $T_{12}$ , введенный символически соотношением (27.3), во многих случаях действительно можно построить, если определить переменные частиц, на которые должен действовать оператор  $T_{12}$ . Например, перестановку спиновых индексов в случае  $j = \frac{1}{2}$  можно осуществить оператором

$$T_{12} = \frac{1}{2} [I + \sigma(1) \cdot \sigma(2)], \quad (27.27)$$

где  $\sigma(1)$  и  $\sigma(2)$  — спиновые матрицы Паули, действующие на спиновые векторы состояния  $|\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2}\rangle_{1,2}$  для частиц 1 и 2. В силу соотношений

$$\sigma_i^2 = I, \quad \sigma_i \sigma_j = i \sigma_k \quad (27.28)$$

( $i, j, k = 1, 2, 3$  с циклической перестановкой) оператор  $\sigma(1) \cdot \sigma(2)$  удовлетворяет квадратному уравнению

$$[\sigma(1) \cdot \sigma(2)]^2 + 2[\sigma(1) \cdot \sigma(2)] - 3 = 0 \quad (27.29)$$

и, следовательно, собственные значения  $\xi$  оператора  $\sigma(1) \cdot \sigma(2)$  также удовлетворяют уравнению

$$\xi^2 + 2\xi - 3 = 0 \quad (27.30)$$

и равны

$$\xi^+ = +1 \quad \text{и} \quad \xi^- = -3. \quad (27.31)$$

Соответствующие собственные значения  $\eta$  оператора  $T_{12}$  тогда равны

$$\begin{aligned} \eta^+ &= \frac{1}{2}(1 + \xi^+) = +1, \\ \eta^- &= \frac{1}{2}(1 + \xi^-) = -1, \end{aligned} \quad (27.32)$$

а  $T_{12}$  удовлетворяет условию (27.5):

$$T_{12}^2 = \frac{1}{4} \{I + 2[\sigma(1) \cdot \sigma(2)] + [\sigma(1) \cdot \sigma(2)]^2\} = I. \quad (27.33)$$

Используя соотношения (27.28), можно показать также, что

$$\begin{aligned} T_{12}\sigma(1)T_{12}^{-1} &= \sigma(2), \\ T_{12}\sigma(2)T_{12}^{-1} &= \sigma(1). \end{aligned} \quad (27.34)$$

Например,

$$\begin{aligned} T_{12}\sigma_1(1) &= \frac{1}{2} [\sigma_1(1) + \sigma_1(2) - i\sigma_3(1)\sigma_2(2) + i\sigma_2(1)\sigma_3(2)], \\ \sigma_1(2)T_{12} &= \frac{1}{2} [\sigma_1(2) + \sigma_1(1) + i\sigma_2(1)\sigma_3(2) - i\sigma_3(1)\sigma_2(2)], \end{aligned} \quad (27.35)$$

откуда

$$T_{12}\sigma_1(1) = \sigma_1(2)T_{12}, \quad \text{или} \quad T_{12}\sigma_1(1)T_{12}^{-1} = \sigma_1(2), \quad (27.36)$$

так что первое из шести соотношений (27.34) проверено. Как можно убедиться, проводя непосредственные вычисления, собственными функциями оператора  $T_{12}$  являются антисимметричный синглет и симметричный триплет (П2.9):

$$\begin{aligned} T_{12}|0, 0\rangle &= -|0, 0\rangle, \\ T_{12}|1, m_s\rangle &= +|1, m_s\rangle, \quad m_s = +1, 0, -1. \end{aligned} \quad (27.37)$$

Например, используя обычное представление для  $\sigma$  и  $|^{1/2}, \pm^{1/2}\rangle$ , найдем

$$\begin{aligned} T_{12}|0, 0\rangle &= \frac{1}{2} \left[ I + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_2 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}_2 + \right. \\ &+ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_2 \right] \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2 \right] = -|0, 0\rangle. \quad (27.38) \end{aligned}$$

Можно найти выражения, аналогичные (27.27), для оператора перестановки спиновых индексов в случае  $j > 1/2$ . Если обозначить операторы момента количества движения для частиц 1 и 2 через  $\mathbf{J}(1)$  и  $\mathbf{J}(2)$  соответственно, то в общем случае для представления  $T_{12}$  требуется полином степени  $2j$  относительно  $\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)$ , поскольку оператор  $\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)$  удовлетворяет алгебраическому уравнению порядка  $(2j+1)$ . Например, для  $j=1$  имеются следующие соотношения, которые легко получить из представления (18.65):

$$\begin{aligned} J_i^3 &= J_i, \quad J_i J_j J_i = 0, \quad J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = 2, \\ J_i^2 J_j &= i J_i J_k, \quad J_i J_j J_k = i(I - J_j^2), \quad J_i J_j^2 = i J_k J_j \end{aligned} \quad (27.39)$$

( $i, j, k=1, 2, 3$  с циклической перестановкой), так что

$$[\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)]^3 + 2[\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)]^2 - [\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)] - 2 = 0. \quad (27.40)$$

Поэтому собственные значения  $\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)$  удовлетворяют кубическому уравнению

$$\xi^3 + 2\xi^2 - \xi - 2 = 0, \quad (27.41)$$

которое имеет три решения:

$$\xi_1 = +1, \quad \xi_2 = -1, \quad \xi_3 = -2. \quad (27.42)$$

Оператор

$$T_{12} = [\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)]^2 + [\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)] - 1 \quad (27.43)$$

имеет тогда собственные значения

$$\begin{aligned} \eta^+ &= +1, \text{ соответствующее } \xi_1 \text{ и } \xi_3, \\ \eta^- &= -1, \text{ соответствующее } \xi_2, \end{aligned} \quad (27.44)$$

и удовлетворяет условию

$$T_{12}^2 = 1. \quad (27.45)$$

Собственными функциями оператора  $T_{12}$  в этом случае являются мультиплеты (П2.10):

$$\begin{aligned} T_{12}|0, 0\rangle &= +|0, 0\rangle, \\ T_{12}|1, m_s\rangle &= -|1, m_s\rangle, \quad m_s = +1, 0, -1, \\ T_{12}|2, m_s\rangle &= +|2, m_s\rangle, \quad m_s = +2, +1, 0, -1, -2. \end{aligned} \quad (27.46)$$

Интересно отметить, что оператор  $\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)$  снимает вырождение симметричных состояний  $|0, 0\rangle$  и  $|2, m_s\rangle$  по  $T_{12}$ ; они отвечают соответственно собственным значениям  $\xi_3$  и  $\xi_1$ , как следует из простых вычислений

$$\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)|0, 0\rangle = -2|0, 0\rangle = \xi_3|0, 0\rangle, \quad (27.47)$$

$$\mathbf{J}(1) \cdot \mathbf{J}(2)|2, m_s\rangle = +|2, m_s\rangle = \xi_1|2, m_s\rangle. \quad (27.48)$$

Можно найти также представление оператора перестановки индексов частиц, действующего на *полный* набор динамических переменных. Такой оператор для фермионов должен обладать свойством

$$T_{12}^+ = T_{12}^{-1}, \quad T_{12}a(1)T_{12}^{-1} = a(2), \quad (27.49)$$

так что

$$T_{12}a^+(1)T_{12}^{-1} = a^+(2), \quad T_{12}a(2)T_{12}^{-1} = a(1) \text{ и т. д.}$$

Здесь  $a^+(1)$  означает оператор рождения фермиона  $a^+(1) = a^+(\tau_1)$ , который характеризуется полным набором квантовых чисел  $\tau_1$ . Построить оператор  $T_{12}$  из операторов рождения и уничтожения для фермионов относительно легко, поскольку имеется только конечное число билинейных комбинаций, содержащих операторы  $a(1)$ ,  $a^+(1)$ ,  $a(2)$  и  $a^+(2)$ , из которых можно построить наиболее общий унитарный оператор, содержащий  $a(1)$ ,  $a^+(1)$ ,  $a(2)$  и  $a^+(2)$  (см. Приложение 5), частным случаем которого должен быть оператор  $T_{12}$ , если он вообще существует. Мы найдем, что оператор

$$T_{12} = -ie^{i\frac{\pi}{2}R_{12}}e^{i\frac{\pi}{2}S_{12}}, \quad T_{12}^{-1} = ie^{-i\frac{\pi}{2}S_{12}}e^{-i\frac{\pi}{2}R_{12}}, \quad (27.50)$$

где

$$R_{12} = [a^+(1)a(2) + a^+(2)a(1)], \quad (27.51)$$

$$S_{12} = [1 - a^+(1)a(1) - a^+(2)a(2)], \quad (27.52)$$

будет производить действие, требуемое формулами (27.49). Действительно, поскольку

$$[S_{12}, a(1)] = a(1), \quad [S_{12}, a(2)] = a(2), \quad (27.53)$$

имеем

$$e^{i\frac{\pi}{2}S_{12}}a(1)e^{-i\frac{\pi}{2}S_{12}} = a(1) + \frac{i\pi}{2}[S_{12}, a(1)] + \\ + \left(\frac{i\pi}{2}\right)^2 \frac{1}{2!}[S_{12}, [S_{12}, a(1)]] + \dots = a(1)e^{i\frac{\pi}{2}} = ia(1) \quad (27.54)$$

и аналогично

$$e^{i\frac{\pi}{2}S_{12}}a(2)e^{-i\frac{\pi}{2}S_{12}} = ia(2). \quad (27.55)$$

Таким образом, поскольку

$$[R_{12}, a(1)] = -a(2), \quad [R_{12}, a(2)] = -a(1), \quad (27.56)$$

получаем окончательно

$$T_{12}a(1)T_{12}^{-1} = ie^{i\frac{\pi}{2}R_{12}}a(1)e^{-i\frac{\pi}{2}R_{12}} = \\ = i\left\{a(1) + \frac{i\pi}{2}[R_{12}, a(1)] + \dots\right\} = \\ = i\left\{a(1)\cos\frac{\pi}{2} - ia(2)\sin\frac{\pi}{2}\right\} = a(2) \quad (27.57)$$

и аналогично

$$T_{12}a(2)T_{12}^{-1} = i\left\{a(2)\cos\frac{\pi}{2} - ia(1)\sin\frac{\pi}{2}\right\} = a(1). \quad (27.58)$$

Представление (27.50) для оператора перестановки оказывается в равной мере действительным и для бозонов, поскольку билинейная природа операторов  $R_{12}$  и  $S_{12}$  приводит к тем же коммутационным соотношениям (27.53) и (27.56), если фермионные операторы всюду заменить соответствующими бозонными операторами, например  $r_{12}$  и  $s_{12}$ . Решающее различие между этими двумя случаями состоит в том, что  $T_{12}$  с фермионными операторами имеет единственное собственное значение  $-1$ , а  $T_{12}$  с бозонными операторами имеет единственное собственное значение  $+1$ .

Для фермионов операторы  $S_{12}$  и  $R_{12}$  удовлетворяют соотношениям

$$S_{12}^2 + R_{12}^2 = 1, \quad R_{12}S_{12} = 0, \quad R_{12}^3 = R_{12}, \quad S_{12}^3 = S_{12}, \quad (27.59)$$

так что можно записать

$$e^{i\frac{\pi}{2}S_{12}} = 1 + iS_{12}\sin\frac{\pi}{2} + S_{12}^2\left(\cos\frac{\pi}{2} - 1\right) = 1 + iS_{12} - S_{12}^2, \\ e^{i\frac{\pi}{2}R_{12}} = 1 + iR_{12} - R_{12}^2. \quad (27.60)$$

Таким образом, оператор перестановки для фермионов можно использовать в гораздо более наглядной форме

$$T_{12} = S_{12} + R_{12} = 1 - a^+(1)a(1) - a^+(2)a(2) + \\ + a^+(1)a(2) + a^+(2)a(1). \quad (27.61)$$

Множитель  $\pm i$  в (27.50) теперь задним числом обоснован, поскольку соотношение

$$T_{12}^2 = S_{12}^2 + R_{12}^2 = 1 \quad (27.62)$$

требует этого условия относительно фазы.

Для бозонов такого простого представления не существует.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Важность перестановочной симметрии в квантовомеханическом описании многочастичных состояний первым, очевидно, оценил Гейзенберг [1]. Исчерпывающее рассмотрение приложения перестановочной симметрии к классификации многофотонных состояний дано в книге Ахиезера и Берестецкого [2].

Явное представление оператора перестановки спиновых индексов для  $j=1/2$  дал Дирак [3].

### Литература

1. Heisenberg W., Zs. Phys., 38, 411 (1926).
2. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 1-е изд., М., 1953; 2-е изд., М., 1959.
3. Dirac P. A. M., Quantum Mechanics, 4th ed., London and New York, 1958, § 58 (см. перевод: Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, М., 1960).

## *Некоторые следствия симметрии относительно зарядового сопряжения и обращения времени*

Если частица отличается от своей античастицы некоторой характеристикой, такой, как фермионное число  $F$ , то состояние, описывающее одну такую частицу или античастицу, т. е. состояние с определенным  $F$ , никогда не может быть собственным состоянием оператора зарядового сопряжения  $\Gamma$ , поскольку по определению операции зарядового сопряжения операторы  $\Gamma$  и  $F$  антикоммутируют:

$$\Gamma F + F\Gamma = 0, \quad (28.1)$$

или, иными словами, фермионное число  $F$  изменяет знак при операции  $\Gamma$ . Для фермионов со спином  $1/2$ , удовлетворяющих уравнению Дирака, имеется дополнительное осложнение, обусловленное антиунитарностью  $\Gamma$ , установленной в гл. 19. Поэтому при рассмотрении одночастичных состояний бессмысленно вводить по аналогии с четностью понятие «зарядовой четности», означающее собственное значение оператора  $\Gamma$ .

Однако в специальном случае многофермионной системы с полным фермионным числом, равным нулю, т. е. системы, состоящей из равного числа фермионов и антифермионов, вектор состояния может быть собственным вектором оператора  $\Gamma$  [см. замечание после формулы (15.53)]:

$$\Gamma |F=0\rangle = C |F=0\rangle; \quad (28.2)$$

такое состояние мы будем называть «состоянием определенной зарядовой четности  $C$ ». Величина  $C$  зависит весьма интересным образом от квантового числа орбитального момента количества движения  $l$  и спинового квантового числа  $s$  через посредство перестановочной симметрии состояния.

Чтобы это выявить, рассмотрим в качестве примера атом позитрония в системе центра инерции, так что его вектор состояния можно записать в виде

$$|\text{позитроний}\rangle = |\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2, s_1, s_2, L_1 = +1, L_2 = -1\rangle, \quad (28.3)$$

где  $\mathbf{k}_i$ ,  $s_i$ ,  $L_i$  обозначают импульс, спиновое квантовое число и лептонное число соответствующей частицы. В этом случае

операция зарядового сопряжения, по определению, сводится к операции перестановки индексов  $L$

$$\Gamma \equiv T_{12}(L). \quad (28.4)$$

С другой стороны, оператор перестановки индексов  $s_i$  имеет собственное значение  $+1$  для триплетного состояния  $s_1 + s_2 = s = 1$  и собственное значение  $-1$  для синглетного состояния  $s_1 + s_2 = s = 0$  [см. Приложение 2, формула (П2.9)]:

$$T_{12}(s) = (-1)^{s+1}. \quad (28.5)$$

Наконец, перестановка индексов  $k_i$  эквивалентна операции инверсии координат  $\Pi_D$ , и в системе центра инерции имеем

$$T_{12}(\mathbf{k}) = (-1)^l. \quad (28.6)$$

Если величины  $\mathbf{k}$ ,  $s$  и  $L$  образуют полный набор, то операция полной перестановки индексов частиц  $T_{12}$  есть произведение

$$T_{12} = T_{12}(\mathbf{k}) T_{12}(s) T_{12}(L) = (-1)^{l+s+1} \Gamma. \quad (28.7)$$

Поскольку фермионы со спином  $1/2$  удовлетворяют принципу Паули,  $T_{12}$  должно быть равно  $-1$ , и можно сделать вывод, что

$$C(\text{позитроний}) = (-1)^{l+s}. \quad (28.8)$$

Это заключение не меняется при введении второго лептонного числа  $L_\mu$ , рассмотренного в гл. 17, поскольку электрон и позитрон имеют одно и то же лептонное число  $L_\mu$  и поэтому  $T_{12}(L_\mu) = +1$ , так что (28.8) остается справедливым в этом случае.

Из предположения, что электромагнитное взаимодействие (23.4) инвариантно относительно зарядового сопряжения, т. е.

$$\Gamma A_\mu j_\mu \Gamma^{-1} = A_\mu j_\mu, \quad (28.9)$$

следует несколько правил отбора, которые можно использовать для экспериментальной проверки этого предположения. Хотя понятие зарядового сопряжения первоначально было определено только для объектов с различающимися частицами и античастицами, но в силу того что оператор плотности электрического тока в соответствии с (19.66) меняет знак

$$\Gamma j_\mu \Gamma^{-1} = -j_\mu, \quad (28.10)$$

требование инвариантности (28.9) приводит для фотонных состояний к определенному свойству преобразования при зарядовом сопряжении, поскольку оператор  $A_\mu$  должен теперь преобразовываться следующим образом:

$$\Gamma A_\mu \Gamma^{-1} = -A_\mu. \quad (28.11)$$



Однофотонное состояние  $|1_\nu\rangle$  с точностью до некоторого множителя получается действием на вакуумное фотонное состояние  $|0_\nu\rangle$  оператора  $A_\mu$ , который, согласно (18.90), содержит линейно фотонные операторы рождения и уничтожения, так что

$$|1_\nu\rangle = A_\mu |0_\nu\rangle, \quad (28.12)$$

поэтому

$$\Gamma |1_\nu\rangle = \Gamma A_\mu |0_\nu\rangle = \Gamma A_\mu \Gamma^{-1} \Gamma |0_\nu\rangle = -A_\mu \Gamma |0_\nu\rangle. \quad (28.13)$$

При условии (которое уже подразумевалось выше при рассмотрении позитрония), что вакуумное состояние обладает положительной зарядовой четностью, следует сделать вывод, что однофотонное состояние имеет отрицательную зарядовую четность:

$$\Gamma |1_\nu\rangle = C |1_\nu\rangle, \text{ причем } C(1 \text{ фотон}) = -1. \quad (28.13a)$$

Тогда для  $n$ -фотонного состояния  $|n_\nu\rangle$  немедленно получаем

$$C(n \text{ фотонов}) = (-1)^n. \quad (28.14)$$

Сравнение с (28.8) приводит к следующему *правилу отбора*:

Позитроний в триплетном состоянии ( $s=1$ ) с нечетным  $l$  или в синглетном состоянии ( $s=0$ ) с четным  $l$  не может распадаться на нечетное число фотонов, а позитроний в триплетном состоянии с четным  $l$  или в синглетном состоянии с нечетным  $l$  не может распадаться на четное число фотонов.

Разработать критический эксперимент, который позволил бы проверить сохранение зарядовой четности  $C$  в распаде позитрония, оказывается неожиданно трудно, поскольку при сохранении четности и момента количества движения имеются дополнительные правила отбора, которые следуют из (27.22) и классификации фотонных состояний. Для распада на два фотона, как можно видеть из табл. 7, составленной в соответствии с данной в гл. 27 и Приложении 3 классификацией двухфотонных состояний, состояние позитрония  ${}^3D_2$  представляет собой низшее состояние, для которого наблюдение отсутствия или наличия двухфотонного распада является критической проверкой сохранения или несохранения зарядовой четности  $C$  во взаимодействии, ответственном за этот распад.

Соотношения (28.8) и (28.14) приводят также к правилу отбора в оптических переходах между различными состояниями позитрония при испускании или поглощении одного фотона. Обозначая спиновое и орбитальное квантовые числа позитрония в начальном и конечном состояниях через  $s, l$  и  $s', l'$ , будем иметь

$$(-1)^{l+s} = -(-1)^{l'+s'}, \quad (28.15)$$

если при переходе сохраняется зарядовая четность  $C$ . Это означает, в частности, что в позитронии запрещены квадрупольные

Таблица 7

## Правила отбора для распада позитрония на два фотона

Состояние позитрония	$J$	$P = (-1)^{l+1}$	$C = (-1)^{l+s}$	Распад на два фотона при сохранении	
				$C$	$P, J, J_3$
$^1S_0$	0	-1	+1	Разрешен	Разрешен
$^3P_0$	0	+1	+1	Разрешен	Разрешен
$^1P_1$	1	+1	-1	Запрещен	Запрещен
$^3S_1, ^3D_1$	1	-1	-1	Запрещен	Запрещен
$^3P_1$	1	+1	+1	Разрешен	Запрещен
$^1D_2$	2	-1	+1	Разрешен	Разрешен
$^3P_2, ^3F_2$	2	+1	+1	Разрешен	Разрешен
$^3D_2$	2	-1	-1	Запрещен	Разрешен

переходы ( $l' - l = \pm 2$ ,  $s' - s = 0$ ), хотя они существуют в соответствующем спектре водорода. Экспериментальную проверку этого предсказания также трудно осуществить, поскольку электрические дипольные переходы ( $l' - l = \pm 1$ ,  $s' - s = 0$ ) между соответствующими энергетическими уровнями разрешены. В этой связи следует отметить, что эти запрещенные линии могут появиться, если позитроний помещен в заданное постоянное внешнее электрическое поле, поскольку тогда взаимодействие перестает быть симметричным относительно двух частиц противоположного знака заряда, так что среднее значение  $\Gamma$  уже не сохраняется, или, используя типичную фразу, « $C$  перестает быть хорошим квантовым числом».

Поведение барионов и обладающих массой бозонов при зарядовом сопряжении осложняется наличием у них еще одной характеристики — изоспина, который рассмотрен в гл. 29, где приведены также следствия симметрии относительно зарядового сопряжения для этих объектов.

Обращаясь теперь к следствиям инвариантности относительно обращения времени  $\Theta$ , с первого взгляда можно ожидать правил отбора, подобных тем, которые обусловлены инвариантностью относительно зарядового сопряжения, вследствие антиунитарности оператора  $\Theta$ , установленной в гл. 16. Как и в случае симметрии относительно зарядового сопряжения, при рассмотрении одночастичных состояний бессмысленно вводить по аналогии с четностью понятие «временной четности», означающее собственное значение оператора  $\Theta$ . Аналоги состояний определенной зарядовой четности  $C$  (28.2), т. е. «состояния с определенной временной четностью  $T$ », могут существовать только в

том случае, если имеется аддитивное квантовое число, скажем  $L_\mu$ , которое меняет знак при обращении времени:

$$\Theta L_\mu + L_\mu \Theta = 0, \quad (28.16)$$

и если можно реализовать произведение состояний, описывающее равное число частиц с признаком  $L_\mu = +1$  и частиц с признаком  $L_\mu = -1$ , так что для него действительно

$$\Theta | L_\mu = 0 \rangle = T | L_\mu = 0 \rangle. \quad (28.17)$$

Оказывается, такая ситуация никогда не реализуется в природе, если только не иметь в виду гипотезу, упомянутую в конце гл. 17, согласно которой второе лептонное число  $L_\mu$  обладает свойством (28.16), что делает состояние, образованное обычным нейтрино  $\nu$  и мюонным нейтрино  $\nu_\mu$ , кандидатом на обладание определенной временной четностью в соответствии с (28.17).

Несмотря на отсутствие правил отбора, аналогичных тем, которые следуют из сохранения  $C$  и  $P$ , инвариантность относительно обращения времени приводит к некоторым важным и доступным экспериментальной проверке следствиям при наблюдении переходов между состояниями, расположенными в определенной последовательности во времени.

Непосредственный интерес представляют рассмотренные в гл. 23 ситуации, в которых амплитуда перехода из начального состояния  $|\tau\rangle$  в конечное  $|\tau'\rangle$  определяется матричным элементом

$$\langle \tau' | S | \tau \rangle \quad (28.18)$$

оператора рассеяния  $S$ , определенного как предел

$$S = U(+\infty, -\infty) \quad (28.19)$$

унитарного оператора  $U(t_2, t_1)$ , удовлетворяющего уравнению

$$i \frac{\partial U(t_2, t_1)}{\partial t_2} = H_{\text{вз}}(t_2) U(t_2, t_1) \quad (28.20)$$

с начальным условием  $U(t_2, t_1) = 1$  при  $t_2 = t_1$ , где  $H_{\text{вз}}(t_2)$  — гамильтониан взаимодействия в представлении взаимодействия. Решение уравнения (28.20) всегда можно записать в символической форме [см. формулу (23.16)]

$$U(t_2, t_1) = P \left[ \exp \left( -i \int_{t_1}^{t_2} H_{\text{вз}}(t) dt \right) \right], \quad (28.21)$$

где  $P$  — оператор хронологического упорядочения.

Общим следствием инвариантности уравнения (28.20) относительно обращения времени является *принцип взаимности*:

Амплитуда перехода из начального состояния  $|\tau\rangle$  в конечное состояние  $|\tau'\rangle$  с точностью до фазового множителя  $\pm 1$  равна амплитуде «обращенного» процесса, в котором обращена последовательность начального и конечного состояний и каждое состояние  $|\tau\rangle$  заменено обращенным во времени состоянием  $|\tau_T\rangle$ :

$$\langle \tau' | S | \tau \rangle = \pm \langle \tau_T | S | \tau'_T \rangle. \quad (28.22)$$

Не следует путать «обращенный» процесс  $|\tau'_T\rangle \rightarrow |\tau_T\rangle$  с «обратным» процессом  $|\tau'\rangle \rightarrow |\tau\rangle$ , в котором изменена только последовательность состояний.

Например, если  $\tau$  обозначает набор квантовых чисел  $\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B, \dots, \mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B, \dots$  импульсов и спинов частиц  $A, B, \dots$  в начальном состоянии, а  $\tau'$  обозначает набор квантовых чисел  $\mathbf{k}_C, \mathbf{k}_D, \dots, \mathbf{s}_C, \mathbf{s}_D, \dots$  частиц  $C, D, \dots$  (которые, вообще говоря, отличаются от частиц  $A, B, \dots$ ) в конечном состоянии, то, поскольку  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{s}$  меняют знак при обращении времени, имеем процесс  $|\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B, \dots, \mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B, \dots\rangle \rightarrow |\mathbf{k}_C, \mathbf{k}_D, \dots, \mathbf{s}_C, \mathbf{s}_D, \dots\rangle$ , обратный процесс  $|\mathbf{k}_C, \mathbf{k}_D, \dots, \mathbf{s}_C, \mathbf{s}_D, \dots\rangle \rightarrow |\mathbf{k}_A, \mathbf{k}_B, \dots, \mathbf{s}_A, \mathbf{s}_B, \dots\rangle$ ,

обращенный процесс  $|- \mathbf{k}_C, - \mathbf{k}_D, \dots, - \mathbf{s}_C, - \mathbf{s}_D, \dots\rangle \rightarrow |- \mathbf{k}_A, - \mathbf{k}_B, \dots, - \mathbf{s}_A, - \mathbf{s}_B, \dots\rangle$ .

Доказательство принципа взаимности (28.22) облегчается, если воспользоваться возможностью представления свойства антиунитарности оператора обращения времени  $\Theta$  с помощью операции перестановки в пространстве чисел заполнения. Так, если для вакуумного состояния предположить, с условием относительно фазы, преобразование

$$\Theta | 0 \rangle = \langle 0 |, \quad (28.23)$$

то в представлении чисел заполнения любое состояние, которое образуется из вакуума действием соответствующего числа операторов рождения

$$|\tau\rangle = a^+(\tau_1) \dots a^+(\tau_n) | 0 \rangle, \quad (28.24)$$

будет преобразовываться следующим образом:

$$\Theta |\tau\rangle = \epsilon_n \langle 0 | a[(\tau_n)_T] \dots a[(\tau_1)_T] = \epsilon_n \langle \tau_T |, \quad (28.25)$$

где  $\epsilon_n$  — фазовый множитель  $\pm 1$ , который для данного числа частиц  $n$  можно выбрать произвольно, не нарушая инвариантность относительно инверсии времени для коммутационных или антикоммутационных соотношений между операторами  $a(\tau)$  и  $a^+(\tau)$ . [Операторы  $a$  и  $a^+$  в формулах (28.25) и (28.26) могут

быть как фермионными, так и бозонными.] Действие оператора  $\Theta$  на все динамические переменные учтено подстановкой обращенных во времени квантовых чисел  $\tau_T$  вместо первоначальных квантовых чисел  $\tau$ . Аналогично имеем

$$\begin{aligned} \langle \tau' | \Theta^{-1} &= \langle 0 | a(\tau'_m) \dots a(\tau'_1) \Theta^{-1} = \\ &= \epsilon_m a^+ [(\tau'_1)_T] \dots a^+ [(\tau'_m)_T] | 0 \rangle = \epsilon_m | \tau'_T \rangle. \end{aligned} \quad (28.26)$$

Имея в виду такое представление  $\Theta$ , можно переписать амплитуду перехода (28.18) в виде

$$\langle \tau' | S | \tau \rangle = \langle \tau' | \Theta^{-1} \Theta S \Theta^{-1} \Theta | \tau \rangle = \epsilon_m \epsilon_n \langle \tau_T | S_T | \tau'_T \rangle, \quad (28.27)$$

где  $S_T$  — обращенный во времени оператор рассеяния

$$S_T = \Theta S \Theta^{-1}. \quad (28.28)$$

Таким образом, для доказательства принципа взаимности достаточно доказать, что равенство

$$S_T = S \quad (28.29)$$

следует из инвариантности уравнения (28.20) относительно обращения времени.

Для этого вспомним об унитарности  $U(t_2, t_1) = U^+(t_1, t_2)$ , запишем уравнение, комплексно сопряженное по отношению к (28.20), и поменяем индексы  $t_1$  и  $t_2$ :

$$-i \frac{\partial U(t_2, t_1)}{\partial t_1} = U(t_2, t_1) H_{\text{вз}}(t_1). \quad (28.20')$$

Сложим уравнения (28.20) и (28.20') и положим  $t_2 = t$ ,  $t_1 = -t$ :

$$2i \frac{\partial U(t, -t)}{\partial t} = H_{\text{вз}}(t) U(t, -t) + U(t, -t) H_{\text{вз}}(-t). \quad (28.30)$$

Если справедливо уравнение (28.30), то инвариантность относительно обращения времени требует, чтобы было справедливо также уравнение

$$2i \frac{\partial U_T(t, -t)}{\partial t} = U_T(t, -t) [H_{\text{вз}}(t)]_T + [H_{\text{вз}}(-t)]_T U_T(t, -t), \quad (28.30')$$

где  $U_T = \Theta U \Theta^{-1}$  и т. д. Антиунитарность оператора обращения времени здесь последовательно учтена требованием, чтобы при действии  $\Theta$  на правую часть (28.30) изменялся порядок множителей  $U$  и  $H$ , содержащих операторы рождения и уничтожения.

По определению обращения времени

$$[H_{\text{вз}}(t)]_T = H_{\text{вз}}(-t), \quad (28.31)$$

так что (28.30') можно записать как уравнение для  $U_T(t, -t)$  в виде

$$2i \frac{\partial U_T(t, -t)}{\partial t} = H_{\text{вз}}(t) U_T(t, -t) + U_T(t, -t) H_{\text{вз}}(-t), \quad (28.32)$$

которое совпадает с уравнением (28.30) для  $U(t, -t)$ . Следовательно,

$$U_T(t, -t) = U(t, -t). \quad (28.33)$$

Поскольку в силу (28.19)  $S$  представляет собой частный случай  $U(t, -t)$ , соотношение (28.29) доказано, а следовательно, доказан принцип взаимности.

При некоторых специальных условиях принцип взаимности приводит к простому соотношению между вероятностями прямого и обратного процессов, известному как *принцип детального равновесия*:

$$|\langle \tau' | S | \tau \rangle|^2 = |\langle \tau | S | \tau' \rangle|^2. \quad (28.34)$$

Справедливость такого принципа значительно облегчает статистический анализ состояний, находящихся в тепловом равновесии или приближающихся к нему, поскольку он означает, что переходы из состояния  $\tau$  в состояние  $\tau'$  могут быть сбалансированы обратными переходами непосредственно из состояния  $\tau'$  в состояние  $\tau$  без привлечения каких-либо промежуточных состояний, через которые могло бы установиться такое равновесие. Однако *следует подчеркнуть, что принцип детального равновесия в общем случае не справедлив*. Он не всегда справедлив даже в классической механике. Например, как отметил еще Больцман, детальное равновесие отсутствует, если речь идет о переходах при столкновении частиц, силы взаимодействия между которыми проявляются как несферическая «форма» частиц.

Некоторые из специальных условий, при которых в квантовой механике *выполняется* принцип детального равновесия, сформулированы ниже в виде нескольких теорем.

*Теорема I.* Если взаимодействие, вызывающее переходы, слабо и если разложение  $S$ -матрицы по теории возмущений в соответствии с формулой (24.1) имеет смысл, так что все наблюдаемые эффекты можно описать в первом приближении

$$\langle \tau' | S | \tau \rangle = \langle \tau' | S_1 | \tau \rangle, \quad (28.35)$$

то принцип детального равновесия справедлив.

Это непосредственно следует из представления  $S_1$  в виде интеграла по времени от  $H_{вз}$  и из эрмитовости  $H_{вз}$ :

$$\langle \tau' | H_{вз} | \tau \rangle^* = \langle \tau | H_{вз} | \tau' \rangle, \quad (28.36)$$

так что

$$|\langle \tau' | S_1 | \tau \rangle|^2 = |\langle \tau | S_1 | \tau' \rangle|^2. \quad (28.37)$$

*Теорема II.* Если процесс инвариантен относительно инверсии координат  $\Pi$  и если измеряются только такие квантовые числа, которые меняют знак как при обращении времени  $\Theta$ , так и при инверсии координат  $\Pi$ , то принцип детального равновесия справедлив.

Рассмотрим, например, переход между состояниями, которые полностью описываются импульсами  $\mathbf{k}$  и спинами  $\mathbf{s}$ . Тогда принцип взаимности требует, чтобы

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{k}'_C, \mathbf{s}'_C, \dots | S | \mathbf{k}_A, \mathbf{s}_A, \dots \rangle &= \\ &= \pm \langle -\mathbf{k}_A, -\mathbf{s}_A, \dots | S | -\mathbf{k}'_C, -\mathbf{s}'_C, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (28.38)$$

Инвариантность относительно инверсии координат означает, что

$$\begin{aligned} \langle -\mathbf{k}_A, -\mathbf{s}_A, \dots | S | -\mathbf{k}'_C, -\mathbf{s}'_C, \dots \rangle &= \\ &= \langle \mathbf{k}_A, -\mathbf{s}_A, \dots | S | \mathbf{k}'_C, -\mathbf{s}'_C, \dots \rangle. \end{aligned} \quad (28.39)$$

так что

$$\langle \mathbf{k}'_C, \mathbf{s}'_C, \dots | S | \mathbf{k}_A, \mathbf{s}_A, \dots \rangle = \pm \langle \mathbf{k}_A, -\mathbf{s}_A, \dots | S | \mathbf{k}'_C, -\mathbf{s}'_C, \dots \rangle. \quad (28.40)$$

Если спины в обоих переходах не измеряются, то имеем соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{\text{спины}} |\langle \mathbf{k}'_C, \mathbf{s}'_C, \dots | S | \mathbf{k}_A, \mathbf{s}_A, \dots \rangle|^2 &= \\ &= \sum_{\text{спины}} |\langle \mathbf{k}_A, \mathbf{s}_A, \dots | S | \mathbf{k}'_C, \mathbf{s}'_C, \dots \rangle|^2, \end{aligned} \quad (28.41)$$

представляющее собой принцип детального равновесия, примененный к начальному и конечному состояниям, в которых известны только импульсы.

Известным примером применения теоремы II является определение спина  $\pi^+$ -мезона путем сравнения сечений реакции  $p+p \rightarrow d+\pi^+$  и обратной по отношению к ней реакции  $\pi^+ + d \rightarrow p+p$ , измеренных для данных импульсов и усредненных по спиновым состояниям. В этом случае отношение сечений зависит по существу только от множителей фазового пространства, среди которых неизвестно только вырождение состояний  $\pi^+$ -мезона по спину ( $2s_\pi + 1$ ).

Другой парой реакций, для которой проверен принцип детального равновесия, следующий из инвариантности относительно обращения времени и теоремы II, являются фоторасщепление  $\text{He}^3 \gamma + \text{He}^3 \rightarrow \text{H}^2 + p$  и радиационный захват протона дейтерием  $p + \text{H}^2 \rightarrow \text{He}^3 + \gamma$ .

*Теорема III.* Если в реакции с двумя частицами в начальном и конечном состояниях спины частиц лежат в плоскости реакции, то принцип детального равновесия справедлив при условии, что взаимодействие инвариантно относительно пространственных вращений. Это утверждение справедливо даже в том случае, если в реакции не сохраняется четность.

Справедливость этой теоремы легко установить с помощью следующих геометрических соображений. Начертим диаграмму процесса, как показано на фиг. 35, имея в виду, что ни один из спинов  $s_A, s_B, s_C, s_D$  не имеет компонент, перпендикулярных плоскости, образованной векторами импульсов  $\mathbf{k}_A$  и  $\mathbf{k}_B$ . В силу сохранения импульса эта плоскость совпадает с плоскостью, образованной векторами  $\mathbf{k}_C$  и  $\mathbf{k}_D$ . Теперь начертим диаграмму обращенного процесса, как показано на фиг. 36. Если процесс инвариантен относительно пространственных вращений, то амплитуда обращенного процесса равна амплитуде такого процесса, который получается поворотом всех векторов в обращенном процессе на угол  $\pi$  вокруг оси, перпендикулярной плоскости реакции, как показано на фиг. 37. Сравнение с фиг. 35 показывает, что в результате получается обратный процесс. Это означает, что амплитуды прямого и обратного процессов равны, а следовательно, в этом случае принцип детального равновесия справедлив. Поскольку здесь не использована инвариантность относительно инверсии координат, теорема III справедлива и тогда, когда в реакции не сохраняется четность.

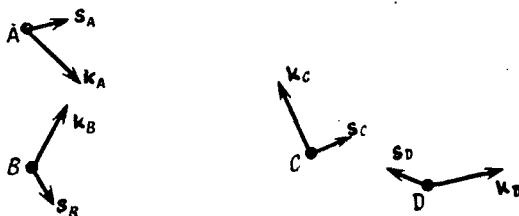
*Теорема IV.* Если начальное и конечное состояния реакции характеризуются только квантовыми числами *полного* момента количества движения  $j, m$  и наборами других *скалярных* квантовых чисел  $\tau_A, \tau_B, \dots$  и  $\tau_C, \tau_D, \dots$ , не меняющих знака при обращении времени, то принцип детального равновесия справедлив при условии, что реакция инвариантна относительно пространственных вращений.

Эту теорему легко доказать, если заметить, что при сформулированных условиях лишь квантовое число  $m$  меняет знак при обращении времени, так что в соответствии с принципом взаимности

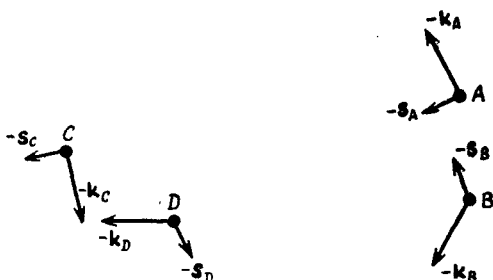
$$\begin{aligned} \langle \tau_C, \tau_D, \dots, j, m | S | \tau_A, \tau_B, \dots, j, m \rangle = \\ = \pm \langle \tau_A, \tau_B, \dots, j, -m | S | \tau_C, \tau_D, \dots, j, -m \rangle \quad (28.42) \end{aligned}$$



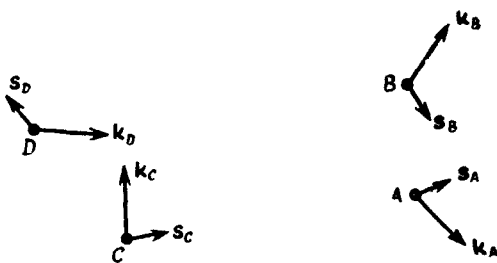
и, следовательно, если  $S$ -матрица инвариантна относительно вращений, то правая часть равна такому матричному элементу, который получается вращением координат, преобразующим  $m$



Ф и г. 35. Процесс.



Ф и г. 36. Обращенный процесс.



Ф и г. 37. Обратный процесс.

в  $-m$ , но не меняющим скаляры  $\tau, j$ , так что

$$\begin{aligned} \langle \tau_C, \tau_D, \dots, j, m | S | \tau_A, \tau_B, \dots, j, m \rangle = \\ = \pm \langle \tau_A, \tau_B, \dots, j, m | S | \tau_C, \tau_D, \dots, j, m \rangle. \end{aligned} \quad (28.43)$$

Поскольку соотношение (28.43) связывает амплитуду прямого процесса с амплитудой обратного процесса, принцип взаимности в этом случае справедлив.

Таким образом, принцип детального равновесия, который играет большую роль во всех доказательствах существования

стационарных состояний в статистической физике, справедлив лишь при выполнении некоторых очень жестких условий. Кажется почти невозможным экспериментально реализовать системы, лишенные каких-либо свойств магнитного взаимодействия, а так как любое магнитное взаимодействие будет, вообще говоря, снижать вырождение энергетических уровней по спинам, то практически неизбежно энергетические уровни будут характеризоваться некоторым спиновым квантовым числом  $s$ . Но при этих условиях принцип детального равновесия *не может* быть справедливым, и все доказательства существования стационарных состояний, которые используют принцип детального равновесия, вызывают подозрение, поскольку их применимость к действительности сомнительна.

Тем не менее в отсутствие детального равновесия для переходов, по-видимому, требуется некоторый тип *полного равновесия*, если вообще существуют стационарные состояния. Вопрос о том, при каких условиях полное равновесие следует вообще из принципа взаимности для физически реализуемых систем, составляет одну из нерешенных проблем статистической физики.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Ранние рассмотрения правил отбора для позитрония, следующих из симметрии относительно зарядового сопряжения, содержатся в работах Вольфенштейна и Равенхолла [1] и Мишеля [2]. Свойство зарядовой четности фотона уже подразумевается в работе Фарри [3]. Точно его впервые сформулировали, по-видимому, Гелл-Манн и Пайс [4].

Четкое изложение принципа взаимности и условий, при которых справедлив принцип детального равновесия, содержится в книге Вильямса [5]. Приложения симметрии по отношению к обращению времени к сильным взаимодействиям детально рассмотрели Хенли и Джекобсон [6].

Приведенное здесь доказательство принципа взаимности близко к доказательству Мандла [7].

### Литература

1. Wolfenstein L., Ravenhall D. G., Phys. Rev., **88**, 279 (1952).
2. Michel L., Nuovo Cimento, **10**, 319 (1953).
3. Furry W., Phys. Rev., **51**, 125 (1937).
4. Gell-Mann M., Pais A., Phys. Rev., **97**, 1387 (1955).
5. Williams W. S. C., An Introduction to Elementary Particles, New York, 1961.
6. Henley E. M., Jacobson B. A., Phys. Rev., **113**, 225, 234 (1959).
7. Mandl F., Symmetry Properties of Particles and Fields, CERN Lectures, Geneva, 1960.

## Характерные свойства объектов, участвующих в сильных взаимодействиях

Всем барионам ( $N, \Lambda, \Sigma, \Xi, \dots$ ) и мезонам ( $\pi, K, \dots$ ), принимающим участие в сильных взаимодействиях, присущи некоторые внутренние свойства, отсутствующие, например, у лептонов, которые участвуют только в слабых и электромагнитных взаимодействиях. Среди этих свойств наиболее важное место занимает «изоспин»  $T$ , заимствовавший свое название и статус динамической переменной из любопытного свойства симметрии сильно взаимодействующих объектов в абстрактном «изопространстве». Это свойство формально напоминает симметрию относительно вращений в трехмерном координатном пространстве и приводит в силу такого изоморфизма с обычными вращениями к сохранению двух новых квантовых чисел  $T$  и  $T_3$  в процессах, вызванных сильными взаимодействиями, по аналогии с сохранением двух квантовых чисел момента количества движения  $s$  и  $s_3$  (или  $j$  и  $m$ ) в процессах, вызванных взаимодействиями, инвариантными относительно вращений в обычном пространстве.

Первоначально «изопространство» было введено Гейзенбергом как удобный способ различать нейтронное и протонное состояния нуклона с помощью приписываемой нуклону дихотомической переменной  $\tau_3$ , принимающей значение  $\tau_3 = +1$ , если нуклон находится в протонном состоянии, и значение  $\tau_3 = -1$ , если нуклон находится в нейтронном состоянии. Если принять эту абстракцию, рассматривающую протон и нейтрон как два единственно возможных состояния некоторого объекта, называемого «нуклоном», то можно использовать математический аппарат, развитый в гл. 1 и 2, для рассмотрения дихотомической переменной фермионного спина, изменив только интерпретацию обозначений.

Тогда состояние нуклона в изопространстве можно записать в виде

$$|\chi\rangle = a|p\rangle + b|n\rangle, \quad (29.1)$$

где  $|p\rangle$  и  $|n\rangle$  — чистые протонное и нейтронное состояния, определенные как собственные векторы

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (29.2)$$

оператора «изоспина»

$$\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (29.3)$$

с собственными значениями, равными соответственно  $+1$  и  $-1$ , так что  $a$  и  $b$  в (29.1) можно рассматривать как  $\psi$ -функции в изопространстве, разложенные по векторам (29.2), причем это разложение интерпретируется таким образом, что  $|a|^2$  дает вероятность обнаружить нуклон в протонном состоянии, а  $|b|^2$  — вероятность обнаружить нуклон в нейтронном состоянии.

В этом представлении электрический заряд  $Q$  (в единицах электронного заряда  $-e$ ), который несет нуклон, можно представить оператором

$$Q = \frac{1}{2}(\tau_3 + I), \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (29.4)$$

для которого  $|p\rangle$  и  $|n\rangle$  являются собственными функциями с собственными значениями, равными соответственно  $+1$  и  $0$ . Аналоги операторов  $\sigma_+$  и  $\sigma_-$  (см. Приложение 1), построенные из спиновых матриц  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , можно поэтому назвать операторами «рождения и уничтожения заряда»:

$$\tau_+ = \frac{1}{2}(\tau_1 + i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_- = \frac{1}{2}(\tau_1 - i\tau_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29.5)$$

Они построены из изоспиновых матриц

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (29.6)$$

и обладают свойствами

$$\begin{aligned} \tau_+ |n\rangle &= |p\rangle, & \tau_- |n\rangle &= 0, \\ \tau_+ |p\rangle &= 0, & \tau_- |p\rangle &= |n\rangle. \end{aligned} \quad (29.7)$$

Полезны также «проекторные» операторы

$$\tau_p = \frac{1}{2}(I + \tau_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_n = \frac{1}{2}(I - \tau_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (29.8)$$

которые выделяют из общего состояния  $|\chi\rangle$  протонную и нейтронную компоненты соответственно:

$$\tau_p |\chi\rangle = a |p\rangle, \quad \tau_n |\chi\rangle = b |n\rangle. \quad (29.9)$$

В развитой здесь терминологии вектор состояния, необходимый для полного описания одного нуклона, представляет собой

прямое произведение двух векторов  $|\varphi\rangle$  и  $|\chi\rangle$ :

$$|(\text{нуклон})\rangle = |\varphi\rangle \times |\chi\rangle, \quad (29.10)$$

где  $|\varphi\rangle$  учитывает все динамические характеристики нуклона, такие, как импульс и спин, а  $|\chi\rangle$  определяется квантовыми числами, которые необходимы для полного определения состояния нуклона в изопространстве. Ввиду изоморфизма между операторами изоспина  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  и спиновыми операторами Паули  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  естественно теперь ввести для обозначения нуклонного состояния в изопространстве квантовые числа  $T = 1/2$  и  $T_3 = \pm 1/2$  по аналогии с квантовыми числами  $s = 1/2$  и  $s_3 = \pm 1/2$ , необходимыми для полного определения обычного спинового состояния фермиона. Вместо того чтобы сказать: «существуют только два типа нуклонов», мы будем теперь говорить: «нуклон имеет изоспин  $T = 1/2$  с двумя возможными ориентациями в изопространстве  $T_3 = +1/2$  и  $T_3 = -1/2$ ». Таким образом, состояния (29.2) записываются в виде

$$|p\rangle = \left| T = \frac{1}{2}; T_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle, \quad |n\rangle = \left| T = \frac{1}{2}; T_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle. \quad (29.11)$$

При этом имеется в виду, что сложение изоспиновых квантовых чисел нуклонов осуществляется применением правил сложения обычных моментов количества движения, приведенных в Приложении 2.

В частности, для атомного ядра, содержащего  $A$  нуклонов, полный изоспин будет представлен оператором  $\hat{T} = (\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3)$  с компонентами

$$\hat{T}_i = \frac{1}{2} \sum_{N=1}^A \tau_i(N), \quad (29.12)$$

так что

$$\hat{T}^2 = \hat{T}_1^2 + \hat{T}_2^2 + \hat{T}_3^2, \quad (29.13)$$

а полный заряд ядра будет собственным значением оператора

$$Z = \sum_{N=1}^A Q(N) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{N=1}^A \tau_3(N) + \sum_{N=1}^A I \right] = \hat{T}_3 + \frac{A}{2} I. \quad (29.14)$$

Поскольку  $\hat{T}$  удовлетворяет тем же коммутационным соотношениям, что и компоненты момента количества движения, можно применить выводы Приложения 1 и сделать заключение, что в изопространстве должен существовать вектор состояния  $|T, T_3\rangle$ , удовлетворяющий уравнениям

$$\hat{T}^2 |T, T_3\rangle = T(T+1) |T, T_3\rangle, \quad \hat{T}_3 |T, T_3\rangle = T_3 |T, T_3\rangle, \quad (29.15)$$

так что любую систему многих нуклонов можно характеризовать двумя квантовыми числами изоспина  $T, T_3$ , если так можно классифицировать одиночные нуклоны.

Однако как только таким путем изоспин признан законной характеристикой нуклона, без которой любой набор характеристик был бы неполным, возникают серьезные следствия для классификации многонуклонных состояний, обусловленные принципом Паули.

Рассмотрим для иллюстрации двухнуклонное состояние, которое, вообще говоря, является прямым произведением

$$|\tau(1)\tau'(2)\rangle = |s(1)s'(2)\rangle \times |\mathbf{T}(1)\mathbf{T}'(2)\rangle \quad (29.16)$$

вектора состояния, полностью характеризующегося пространственными квантовыми числами  $s$  и  $s'$  (такими, как импульс, спин и т. д.) нуклона 1 и нуклона 2, и вектора состояния в изопространстве, характеризующегося изоспиновыми квантовыми числами  $\mathbf{T}$  и  $\mathbf{T}'$  двух нуклонов. Принцип Паули требует, чтобы операция перестановки индексов частиц  $T_{12}$ , примененная к индексам частиц 1 и 2 *полного* набора квантовых чисел  $\tau$  и  $\tau'$ , меняла знак вектора состояния, т. е.

$$T_{12}|\tau(1)\tau'(2)\rangle = -|\tau(1)\tau'(2)\rangle; \quad (29.17)$$

следовательно, если справедливо (29.17), то данное изоспиновое состояние  $|\mathbf{T}(1)\mathbf{T}'(2)\rangle$  в силу его свойств преобразования относительно  $T_{12}$  в изопространстве налагает сильные ограничения на возможные квантовые числа  $s$  и  $s'$  двух нуклонов.

Более конкретно, в соответствии с правилами сложения двух спинов  $1/2$  [см. Приложение 2, формула (П2.9)], система двух нуклонов в изопространстве может принадлежать либо антисимметричному синглету с полным изоспином  $T=0$ :

$$|T=0, T_3=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle|n\rangle - |n\rangle|p\rangle), \quad (29.18)$$

либо симметричному триплету с полным изоспином  $T=1$ :

$$\begin{aligned} |T=1, T_3=+1\rangle &= |p\rangle|p\rangle, \\ |T=1, T_3=0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|p\rangle|n\rangle + |n\rangle|p\rangle), \\ |T=1, T_3=-1\rangle &= |n\rangle|n\rangle. \end{aligned} \quad (29.19)$$

Используя систему центра масс, обозначая координатное состояние двух нуклонов, симметричное относительно перестановки индексов частиц, как  $|\text{четное}\rangle$ , а антисимметричное координатное состояние как  $|\text{нечетное}\rangle$ , и вспоминая, что возможные спиновые состояния системы двух нуклонов являются либо антисимме-

тричным синглетом  $|1\rangle$ , либо симметричным триплетом  $|3\rangle$ , можно немедленно записать возможные полностью антисимметричные состояния системы двух нуклонов, а именно:

$$|\text{четное}\rangle \times |1\rangle \times |T=1\rangle, \quad (29.20a)$$

$$|\text{нечетное}\rangle \times |3\rangle \times |T=1\rangle, \quad (29.20б)$$

$$|\text{четное}\rangle \times |3\rangle \times |T=0\rangle, \quad (29.20в)$$

$$|\text{нечетное}\rangle \times |1\rangle \times |T=0\rangle, \quad (29.20г)$$

поскольку симметричный изоспиновый триплет  $|T=1\rangle$  должен объединяться с состоянием, антисимметричным в комбинированном координатно-спиновом пространстве, а антисимметричный изоспиновый синглет  $|T=0\rangle$  должен объединяться с состоянием, симметричным в координатно-спиновом пространстве, чтобы обеспечить выполнение условия (29.17).

Принятые здесь обозначения симметричного и антисимметричного координатных состояний  $|\text{четное}\rangle$  и  $|\text{нечетное}\rangle$  соответственно основаны на том использованном уже в предыдущей главе факте, что в случае двух частиц оператор перестановки пространственных индексов частиц  $T_{12}$  совпадает с оператором инверсии координат  $\Pi$  в системе центра масс. Если принять, что внутренняя четность частиц положительна, то координатное состояние будет иметь четность  $(-1)^l$ , где  $l$  — относительный орбитальный момент количества движения. Отсюда следует, что антисимметричное состояние должно быть состоянием с нечетным  $l$ , а симметричное состояние — состоянием с четным  $l$ .

Требуемые принципом Паули комбинации (29.20) квантовых чисел орбитального момента, спина и изоспина приводят, в частности, к тому следствию, что бипротон и бинейтрон не могут существовать в состояниях  $|\text{четное}\rangle|3\rangle$  или  $|\text{нечетное}\rangle|1\rangle$  по пространственным и спиновым переменным, поскольку и тот и другой в силу (29.19) принадлежат изоспиновому триплету. С другой стороны, дейтрон может существовать во всех четырех комбинациях пространственных и спиновых переменных.

Экспериментально обнаружено, что принадлежащие состоянию с  $T=1$  бипротон и бинейтрон не существуют в стабильных состояниях, тогда как дейтрон стабилен, но только в том случае, если он находится в состоянии  $|\text{четное}\rangle|3\rangle$ , а именно в  ${}^3S$ -состоянии, которое принадлежит  $T=0$ . Наимизшее состояние дейтрона типа  $|\text{четное}\rangle|1\rangle$ , а именно  ${}^1S$ -состояние, принадлежащее  $T=1$ , не стабильно. Эти факты указывают на то, что специфические ядерные взаимодействия, приводящие к стабильным состояниям ядер, зависят только от абсолютной величины изоспина и не различаются в пределах  $(2T+1)$ -мультиплета. Более того, приведенная в табл. 8 классификация низших энергетических





уровней ядер (независимо от того, являются они стабильными состояниями или резонансными состояниями с положительной энергией) наводит на мысль, что наименьший возможный изоспин  $T$  приводит к наиболее сильной связи.

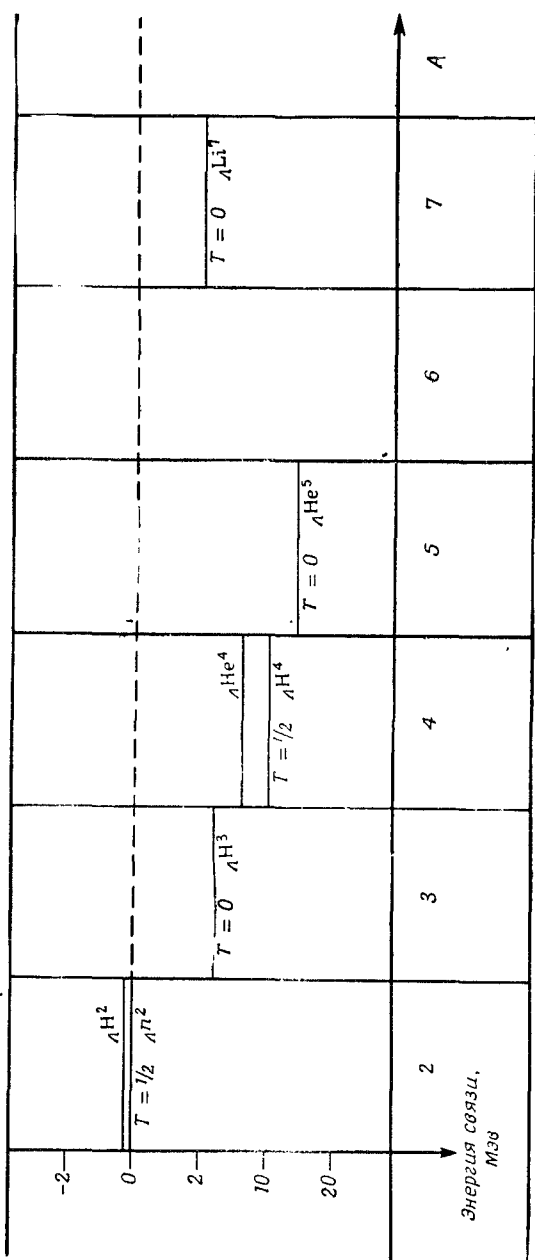
В соответствии с этим во всех теориях ядерных взаимодействий, которые исходят из понятия гамильтониана взаимодействия, предполагается инвариантность  $H_{\text{вз}}$  относительно вращений в изопространстве, что эквивалентно предположению о сохранении изоспина в ядерных взаимодействиях. Поскольку изменение ориентации в изопространстве означает изменение  $T_z$ , что в свою очередь означает изменение величины полного электрического заряда ядра, предположение об инвариантности относительно вращений в изопространстве сводится к предположению о зарядовой независимости ядерных сил. В настоящее время предполагают, что существующее фактически расщепление энергетических уровней, принадлежащих данному изоспиновому мультиплету, в принципе можно объяснить остающимся электромагнитным взаимодействием между нуклонами, которое по определению зависит от заряда, так что гамильтониан электромагнитного взаимодействия зависит от  $T_z$  и, следовательно, не может быть инвариантным относительно вращений в изопространстве. Это классический пример симметрии, справедливой для сильного взаимодействия, которая «разрушается» более слабым взаимодействием. Другими словами, закон сохранения изоспина не является абсолютным законом сохранения; он справедлив только в реакциях, которые вызваны сильными взаимодействиями, но «нарушается», если учитываются электромагнитные взаимодействия.

В последние годы стали возможны эксперименты по замене в ядрах нейтрона  $\Lambda$ -частицей. Наблюдение полученных таким образом «гиперядер» неожиданно предоставило еще одно доказательство той точки зрения, что сильные взаимодействия, к которым принадлежит и  $\Lambda$ — $N$ -взаимодействие, сохраняют изоспин, вследствие чего результирующая энергия уровней может зависеть только от полного изоспина  $T$ , который является скаляром в изопространстве. Поскольку  $\Lambda$ -частица имеет изоспин  $T=0$  (она встречается только в виде электрически нейтральной частицы), замена ею нейтрона приводит к образованию ядра с изоспином  $T$ , уменьшенным на  $1/2$ . Поскольку массовое число ядра  $A$  не изменяется при такой замене, мультиплетная структура энергетических уровней гиперядер должна быть сходной с мультиплетной структурой ядер, но сдвинутой вверх по шкале  $A$ , как показано в табл. 9.

Данные этой таблицы подтверждаются наблюдениями гиперядер  ${}^{\Lambda}\text{H}^3$ ,  ${}^{\Lambda}\text{He}^4$ ,  ${}^{\Lambda}\text{He}^5$  и  ${}^{\Lambda}\text{Li}^7$  с предсказываемой мультиплет-

Таблица 9

Низшие уровни энергии гиперядер до  $A \approx 7$  с классификацией по полному изоспину  $T$



ностью. Не следует ожидать численного согласия с энергиями связи соответствующих ядерных уровней, поскольку полные числа частиц  $A$ , участвующих во взаимодействии, различны, а, кроме того,  $\Lambda$ -частица отличается от нейтрона другой внутренней характеристикой — «странностью», которая может быть существенна для динамики; эта характеристика рассматривается ниже в данной главе. Тем не менее интересно отметить, что наблюдаемая энергия связи гиперядра  ${}_{\Lambda}\text{H}^3$ , равная примерно 2,6 Мэв, очень близка к энергии связи дейтрона  $\text{H}^2$ , равной примерно 2,2 Мэв; в табл. 8 и 9 соответствующие уровни расположены почти одинаково.

Возможно, здесь полезно записать наиболее общий вид гамильтониана взаимодействия двух нуклонов, удовлетворяющего требованию зарядовой независимости ядерных сил, т. е. инвариантного относительно вращений в изопространстве. Без положения этого требования симметрии мы имели бы наиболее общее выражение для гамильтониана взаимодействия в виде

$$H_{\text{вз}} = H_{1,1} \mathcal{G}_{1,1} + H_{1,0} \mathcal{G}_{1,0} + H_{1,-1} \mathcal{G}_{1,-1} + H_{0,0} \mathcal{G}_{0,0}, \quad (29.21)$$

где  $H_{T, \tau_3}$  — операторы взаимодействия, действующие на пространственные и спиновые переменные двух нуклонов, если последние находятся в изоспиновом состоянии  $|T, T_3\rangle$ , а  $\mathcal{G}_{T, \tau_3}$  — проекционные операторы, которые «вырезают» из общего изоспинового состояния двух нуклонов

$$|\chi\rangle = a |1, 1\rangle + b |1, 0\rangle + c |1, -1\rangle + d |0, 0\rangle \quad (29.22)$$

компоненты с соответствующими квантовыми числами  $T, T_3$ . Эти операторы имеют явный вид

$$\mathcal{G}_{1,1} = \left[ \frac{1}{2} + \hat{T}_3(1) \right] \left[ \frac{1}{2} + \hat{T}_3(2) \right],$$

так что  $\mathcal{G}_{1,1} |\chi\rangle = a |1, 1\rangle$ ;

$$\mathcal{G}_{1,0} = \frac{1}{4} + \hat{T}_1(1) \hat{T}_1(2) + \hat{T}_2(1) \hat{T}_2(2) - \hat{T}_3(1) \hat{T}_3(2),$$

так что  $\mathcal{G}_{1,0} |\chi\rangle = b |1, 0\rangle$ ; (29.23)

$$\mathcal{G}_{1,-1} = \left[ \frac{1}{2} - \hat{T}_3(1) \right] \left[ \frac{1}{2} - \hat{T}_3(2) \right],$$

так что  $\mathcal{G}_{1,-1} |\chi\rangle = c |1, -1\rangle$ ;

$$\mathcal{G}_{0,0} = \frac{1}{4} - \hat{T}_1(1) \hat{T}_1(2) - \hat{T}_2(1) \hat{T}_2(2) - \hat{T}_3(1) \hat{T}_3(2),$$

так что  $\mathcal{G}_{0,0} |\chi\rangle = d |0, 0\rangle$ .

Гипотеза симметрии относительно вращений в изопространстве означает, например, что

$$H_{1,1} = H_{1,0} = H_{1,-1} = H_a \quad (29.24)$$

и

$$H_{0,0} = H_s, \quad (29.25)$$

где  $H_a$  и  $H_s$ , вообще говоря, различны. Фактически из эксперимента известно, что  $H_a$ , низшим собственным состоянием которого является виртуальное состояние дейтрона  $|\text{четное}\rangle|1\rangle$ , должно приводить к такой потенциальной энергии, которая составляет около  $1/2$  потенциальной энергии, обусловленной  $H_s$ , основным состоянием которого является стабильное состояние дейтрона  $|\text{четное}\rangle|3\rangle$ . Подставляя (29.23) — (29.25) в (29.21), найдем общий гамильтониан взаимодействия двух нуклонов, сохраняющий изоспин, в виде

$$\begin{aligned} H_{\text{вз}} = H_a \left\{ \frac{3}{4} + [\hat{T}(1) \hat{T}(2)] \right\} + H_s \left\{ \frac{1}{4} - [\hat{T}(1) \hat{T}(2)] \right\} = \\ = \frac{3H_a + H_s}{4} + (H_a - H_s)[\hat{T}(1) \hat{T}(2)], \quad (29.26) \end{aligned}$$

который, очевидно, является скаляром в изопространстве.

Интересно детально рассмотреть, как «нарушится» «закон сохранения изоспина», если к гамильтониану взаимодействия добавить электромагнитное взаимодействие. Если взять, например, кулоновское взаимодействие, которое действует только между двумя протонами, т. е. между двумя нуклонами, находящимися в силу (29.19) в состоянии  $|T=1, T_3=1\rangle$ , то к выражению (29.26) следует добавить член

$$H_{\text{кул}} = \frac{e^2}{r} G_{1,1} = \frac{e^2}{r} \left\{ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} [\hat{T}_3(1) + \hat{T}_3(2)] + \hat{T}_3(1) \hat{T}_3(2) \right\}, \quad (29.27)$$

который уже не инвариантен относительно вращений в изопространстве. Действительно,

$$H_{\text{кул}} \hat{T}_1 - \hat{T}_1 H_{\text{кул}} \neq 0 \quad \text{и} \quad H_{\text{кул}} \hat{T}_2 - \hat{T}_2 H_{\text{кул}} \neq 0. \quad (29.28)$$

так что  $T$  теперь не сохраняется. Однако  $T_3$  по-прежнему сохраняется, так как

$$H_{\text{кул}} \hat{T}_3 - \hat{T}_3 H_{\text{кул}} = 0. \quad (29.29)$$

Это соотношение гарантирует сохранение электрического заряда в силу общего определения (29.14), которое здесь записывается в виде

$$\hat{T}_3 = Z - 1, \quad (29.30)$$

где  $Z$  — заряд (порядковый номер) системы двух нуклонов.

В сороковых годах многие физики сомневались в необходимости введения изоспина в качестве настоящего квантового числа. В конце концов можно прийти к теории ядерных сил, если рассматривать с самого начала нейтрон и протон как различные частицы (отличающиеся электрическим зарядом) и пытаться получить структуру гамильтониана (29.26), предполагая специальную координатную и спиновую зависимость зарядово-независимого ядерного взаимодействия. Логически это возможно, если постулировать, что взаимодействие между двумя нуклонами в состояниях  $|\text{четное}\rangle|1\rangle$  и  $|\text{нечетное}\rangle|3\rangle$  отличается от взаимодействия в состояниях  $|\text{четное}\rangle|3\rangle$  и  $|\text{нечетное}\rangle|1\rangle$ , но во всех остальных отношениях зарядово-независимо.

Однако эти сомнения в значительной степени были рассеяны, когда в начале пятидесятых годов распространение формализма изоспина на пионы и их взаимодействия дало возможность изящно учесть многие особенности пион-нуклонного взаимодействия, которые трудно было бы объяснить любым другим путем. По-видимому, наибольшее влияние среди прочих доказательств в пользу изоспина, как вполне приемлемой характеристики, оказало объяснение Бракнером в 1952 г. общей особенности рассеяния пионов на протонах. К этому времени экспериментально было установлено отношение  $\sigma(\pi^+) : \sigma(\pi^-) = 3 : 1$  для полных сечений рассеяния соответственно положительных и отрицательных  $\pi$ -мезонов на протонах при энергии мезонов до 300 Мэв в лабораторной системе координат. Бракнер показал, что это эмпирическое отношение можно понять просто как следствие правил, определяющих сложение изоспинов, если предположить, что сохранение изоспина имеет силу для пион-нуклонных взаимодействий. Он рассуждал следующим образом.

Поскольку существуют три пиона:  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  и  $\pi^-$ , то зарядовое состояние пиона необходимо описывать трехмерным вектором в изотопическом пространстве, являющимся линейной комбинацией базисных векторов:

$$|\pi^+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\pi^0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\pi^-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (29.31)$$

Базисные векторы, иначе обозначаемые

$|T=1, T_3=+1\rangle$ ,  $|T=1, T_3=0\rangle$ ,  $|T=1, T_3=-1\rangle$ , являются собственными векторами оператора

$$\rho_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (29.32)$$

отвечающими собственным значениям 1, 0, --1 соответственно. Отсюда видно, что оператор  $\rho_3$  можно отождествить с оператором  $Q$  заряда пиона. Следовательно, можно утверждать, что пион обладает изотопическим спином  $\rho=1$ , причем по аналогии с операторами момента количества движения, отвечающими  $j=1$ , остальные компоненты оператора изотопического спина  $\rho$  определяются выражениями

$$\rho_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}. \quad (29.33)$$

Далее по аналогии с (29.5) можно построить операторы рождения и уничтожения заряда:

$$\rho_+ = \frac{1}{2} (\rho_1 + i\rho_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29.34)$$

$$\rho_- = \frac{1}{2} (\rho_1 - i\rho_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

обладающие свойствами:

$$\rho_+ |\pi^+\rangle = 0, \quad \rho_+ |\pi^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^+\rangle, \quad \rho_+ |\pi^-\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^0\rangle, \quad (29.35)$$

$$\rho_- |\pi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^0\rangle, \quad \rho_- |\pi^0\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}} |\pi^-\rangle, \quad \rho_- |\pi^-\rangle = 0.$$

В этих обозначениях оператор  $\hat{T}$  полного изоспина системы, состоящей из  $A$  нуклонов и  $B$  пионов, можно записать в виде

$$\hat{T} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \tau(i) + \sum_{k=1}^B \rho(k), \quad (29.36)$$

а оператор электрического заряда системы — в виде

$$Q = \hat{T}_3 + \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^A \tau_3(i) + \sum_{k=1}^B \rho_3(k) + \frac{A}{2}. \quad (29.37)$$

Тогда, так же как и в случае системы, состоящей только из одних нуклонов, состояние системы из  $A$  нуклонов и  $B$  пионов можно характеризовать двумя квантовыми числами  $T$  и  $T_3$ , как и в (29.15). При этом требование «сохранения изотопического спина» в сильных взаимодействиях равносильно требованию,

чтобы динамические свойства системы, состоящей из нуклонов и пионов, зависели только от  $T$  и не зависели от  $T_3$ .

В качестве простого примера рассмотрим систему, состоящую из одного нуклона и одного пиона. Используя правила сложения моментов количества движения (см. табл. 14), находим, что в изотопическом пространстве существуют четыре вектора состояния, отвечающих полному изоспину  $T = 3/2$ , и два вектора состояния, отвечающих полному изоспину  $T = 1/2$ :

$$\begin{aligned} |T = \frac{3}{2}, T_3 = \frac{3}{2}\rangle &= \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle |1, 1\rangle = |p\rangle |\pi^+\rangle, \\ \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle |1, 0\rangle + \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle |1, 1\rangle = \\ &= \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) |p\rangle |\pi^0\rangle + \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) |n\rangle |\pi^+\rangle, \end{aligned} \quad (29.38)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle |1, 0\rangle + \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle |1, -1\rangle = \\ &= \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) |n\rangle |\pi^0\rangle + \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) |p\rangle |\pi^-\rangle, \end{aligned}$$

$$\left| \frac{3}{2}, -\frac{3}{2} \right\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle |1, -1\rangle = |n\rangle |\pi^-\rangle;$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle |1, 0\rangle - \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle |1, 1\rangle = \\ &= \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) |p\rangle |\pi^0\rangle - \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) |n\rangle |\pi^+\rangle, \end{aligned} \quad (29.39)$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle |1, -1\rangle - \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle |1, 0\rangle = \\ &= \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) |p\rangle |\pi^-\rangle - \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) |n\rangle |\pi^0\rangle. \end{aligned}$$

Для сравнения теории с упомянутыми выше экспериментальными результатами исследуем свойства протон-пионных состояний в изотопическом пространстве. Из выражений (29.38) и (29.39) видно, что состояние  $|p\rangle |\pi^+\rangle$  является чистым изоспиновым состоянием с  $T = 3/2$ , в то время как состояния  $|p\rangle |\pi^0\rangle$  и  $|p\rangle |\pi^-\rangle$  являются суперпозициями состояний:

$$\begin{aligned} |p\rangle |\pi^+\rangle &= \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle, \\ |p\rangle |\pi^0\rangle &= \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle + \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left| \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle, \\ |p\rangle |\pi^-\rangle &= \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \right) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \left( \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (29.40)$$

Если предположить теперь, что в пион-нуклонных взаимодействиях изотопический спин сохраняется, то при фиксированных значениях полной энергии и момента количества движения должны существовать две амплитуды вероятности  $a(1/2)$  и  $a(3/2)$ , зависящие только от  $T$  и характеризующие соответственно переходы рассматриваемой системы из начального состояния  $|T=1/2\rangle$  в конечное состояние  $|T=1/2\rangle$  и из начального состояния  $|T=3/2\rangle$  в конечное состояние  $|T=3/2\rangle$ . В частности, из начального состояния  $|p\rangle|\pi^+\rangle$ , являющегося, согласно (29.40), состоянием  $|T=3/2\rangle$ , система пион — нуклон в результате рассеяния может перейти в состояние  $|T=3/2\rangle$  с амплитудой вероятности  $a(3/2)$ :

$$|p\rangle|\pi^+\rangle = \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle \rightarrow a\left(\frac{3}{2}\right) \left| \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \right\rangle = a\left(\frac{3}{2}\right) |p\rangle|\pi^+\rangle. \quad (29.41)$$

Из начального состояния  $|p\rangle|\pi^-\rangle$ , являющегося смесью состояний  $|T=1/2\rangle$  и  $|T=3/2\rangle$ , рассматриваемая система в результате рассеяния может перейти в конечное состояние, в котором начальное состояние  $|T=1/2\rangle$  представлено с амплитудой вероятности  $a(1/2)$ , а состояние  $|T=3/2\rangle$  — с амплитудой  $a(3/2)$ , т. е.

$$\begin{aligned} |p\rangle|\pi^-\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}} \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle \rightarrow \\ &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}} a\left(\frac{1}{2}\right) \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}} a\left(\frac{3}{2}\right) \left| \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ a\left(\frac{3}{2}\right) - a\left(\frac{1}{2}\right) \right] |n\rangle|\pi^0\rangle + \frac{1}{3} \left[ a\left(\frac{3}{2}\right) + 2a\left(\frac{1}{2}\right) \right] |p\rangle|\pi^-\rangle. \end{aligned} \quad (29.42)$$

Содержание уравнения (29.42) суммировано в табл. 10.

Таблица 10

Амплитуды рассеяния для пион-протонных столкновений

Процесс	Амплитуда
$ p\rangle \pi^+\rangle \rightarrow  p\rangle \pi^+\rangle$	$a\left(\frac{3}{2}\right)$
$ p\rangle \pi^-\rangle \rightarrow  p\rangle \pi^-\rangle$	$\frac{1}{3} a\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{2}{3} a\left(\frac{1}{2}\right)$
$ p\rangle \pi^-\rangle \rightarrow  n\rangle \pi^0\rangle$	$\frac{1}{3} \sqrt{2} a\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{3} \sqrt{2} a\left(\frac{1}{2}\right)$



Предположим теперь, что в пион-нуклонных взаимодействиях в области энергий налетающего пиона ниже 300 Мэв по неизвестным пока причинам преобладает состояние с  $T=3/2$ , так что  $a(3/2) \gg a(1/2)$ . Тогда, поскольку сечение процесса пропорционально квадрату соответствующей амплитуды, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \sigma(p\pi^+ \rightarrow p\pi^+) : \sigma(p\pi^- \rightarrow p\pi^-) : \sigma(p\pi^- \rightarrow n\pi^0) = \\ = \left| a\left(\frac{3}{2}\right) \right|^2 : \frac{1}{9} \left| a\left(\frac{3}{2}\right) \right|^2 : \frac{2}{9} \left| a\left(\frac{3}{2}\right) \right|^2 = 9 : 1 : 2. \end{aligned} \quad (29.43)$$

Если процессы ( $p\pi^- \rightarrow p\pi^-$ ) и ( $p\pi^- \rightarrow n\pi^0$ ) рассматривать как единый процесс рассеяния  $\pi^-$ -мезона на протоне, сечение которого равно  $\sigma(\pi^-)$ , то из (29.43) следует

$$\sigma(\pi^+) : \sigma(\pi^-) = 3 : 1, \quad (29.44)$$

что находится в согласии с опытными данными. Если же пион-нуклонные взаимодействия таковы, что  $a(1/2) = a(3/2)$ , то вместо наблюдаемого отношения 9 : 1 : 2 сечения должны относиться друг к другу как 1 : 1 : 0. При  $a(1/2) \gg a(3/2)$  сечения указанных выше процессов должны относиться друг к другу как 0 : 2 : 1, что также находится в противоречии с экспериментальными данными.

Таким образом, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что в пион-нуклонных взаимодействиях изоспин сохраняется, причем в области энергий ниже 300 Мэв преобладает состояние  $|T=3/2\rangle$ . Разумеется, путем подобного анализа невозможно объяснить, почему состояние  $|T=3/2\rangle$  является предпочтительным. Изучение углового распределения рассеянных пионов позволяет определить зависимость взаимодействия от спина. Опять же по неизвестным пока причинам оказывается, что преобладает состояние  $P_{3/2}$  системы пион — нуклон. При этом сечение рассеяния имеет четко выраженный максимум при энергии пиона около 200 Мэв. Совокупность этих довольно любопытных экспериментальных фактов можно объединить в одну фразу: «пион — нуклонная система имеет ( $T=3/2, P_{3/2}$ )-резонанс вблизи 200 Мэв». Другие данные свидетельствуют о том, что взаимодействие в  $P$ -состоянии с  $T=3/2$  представляет собой притяжение, в то время как в  $S$ -состоянии — отталкивание (последний факт выражают фразой «потенциал взаимодействия имеет твердую сердцевину»). Причины этого явления также остаются неясными. Короче говоря, крайне необходима теория, которая объяснила бы эти особенности сильного взаимодействия пионов с нуклонами и могла бы описать нуклон-нуклонное взаимодействие как взаимодействие посредством  $\pi$ -мезонов — частиц,

связывающих нуклоны между собой. В момент написания настоящей книги такой теории нет, несмотря на то, что делаются многочисленные попытки связать как-то концы с концами и строятся различные догадки.

Поскольку динамическая теория отсутствует, исследование возникающей в сильных взаимодействиях симметрии состояний в пространстве изотопического спина остается основным источником предсказаний и объяснения наблюдаемых на опыте отношений сечений. Приведем еще два примера таких отношений: отношение сечений реакций  $|n\rangle|p\rangle \rightarrow |\pi^0\rangle|d\rangle$  и  $|p\rangle|p\rangle \rightarrow |\pi^+\rangle|d\rangle$ , для которых  $T=1$  согласно условию сохранения изотопического спина,

$$\sigma(np \rightarrow \pi^0 d) : \sigma(pp \rightarrow \pi^+ d) = 1 : 2, \quad (29.45)$$

и реакций  $|p\rangle|d\rangle \rightarrow |\pi^+\rangle|He^3\rangle$  и  $|p\rangle|d\rangle \rightarrow |\pi^0\rangle|He^3\rangle$ , для которых

$$\sigma(pd \rightarrow \pi^+ He^3) : \sigma(pd \rightarrow \pi^0 He^3) = 2 : 1. \quad (29.46)$$

Сохранение изотопического спина может также приводить к строгим правилам отбора. Например, реакция

$$|d\rangle|d\rangle \rightarrow |\pi^0\rangle|He^4\rangle \quad (29.47)$$

строго запрещена законом сохранения изотопического спина  $T$ . Если когда-либо будет обнаружено, что эта реакция происходит, то это будет означать, что запрет снимается за счет какого-либо другого взаимодействия, в котором изоспин не сохраняется, например за счет электромагнитного взаимодействия. Для более детального знакомства мы отсылаем читателя к весьма обширной литературе по этому вопросу.

В соотношении (29.37), связывающем оператор электрического заряда  $Q$ , третью компоненту изотопического спина  $\hat{T}_3$  и число нуклонов  $A$ , отражен тот любопытный факт, что не существует отрицательно заряженного нуклона, т. е. что центр нуклонного зарядового дублета лежит при  $Q=1/2$ , в то время как пион может существовать в трех зарядовых состояниях с центром зарядового триплета при  $Q=0$ . Это соотношение может быть обобщено так, чтобы оно было справедливо и для антинуклонов, если ввести барионное число  $B$ , принимающее значение  $+1$  для нуклона,  $-1$  для антинуклона и  $0$  для бозона. При этом поскольку существуют два и только два антинуклона — антинейтрон  $\bar{n}$  ( $Q=0$ ) и антипротон  $\bar{p}$  ( $Q=-1$ ), — это соотношение можно записать в виде

$$Q - \hat{T}_3 - \frac{B}{2} = 0. \quad (29.48)$$

Здесь предполагается, что антинуклонам, так же как нуклонам и пионам, можно приписать квантовые числа  $T$  и  $T_3$  изоспина,

причем  $T_3$  приписываются значения, которые уменьшаются с уменьшением заряда  $Q$ . Таким образом, изоспиновые состояния антинейтрона и антипротона обозначаются

$$|\bar{n}\rangle = \left| T = \frac{1}{2}, T_3 = +\frac{1}{2} \right\rangle \quad \text{и} \quad |\bar{p}\rangle = \left| T = \frac{1}{2}, T_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle.$$

В 1953 г. Гелл-Манн и Нишиджима показали, что наблюдаемое на опыте среди так называемых «странных» гиперонов и  $K$ -мезонов загадочное смещение центров зарядовых мультиплетов можно объяснить, если ввести еще одну характеристику — «странность»  $S$ , определяемую выражением

$$S = 2 \left( Q - \hat{T}_3 - \frac{B}{2} \right). \quad (29.49)$$

Введение этой характеристики позволило построить знаменитую схему классификации барионов и тяжелых бозонов, приведенную в табл. 11. В этой схеме барионам приписывается барионный заряд  $+1$ , антибарионам  $-1$  и бозонам  $0$ .

Таблица 11

Схема Гелл-Манна и Нишиджимы

$T$	$S$						
	$T_3 \backslash$	-2	-1	0		+1	+2
0	0		$\Lambda^0$			$\bar{\Lambda}^0$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\Xi^0$	$\bar{K}^0$	$p$	$\bar{n}$	$K^+$	$\Xi^+$
	$-\frac{1}{2}$	$\Xi^-$	$K^-$	$n$	$\bar{p}$	$K^0$	$\Xi^0$
1	1		$\Sigma^+$		$\pi^+$	$\bar{\Sigma}^+$	
	0		$\Sigma^0$		$\pi^0$	$\bar{\Sigma}^0$	
	-1		$\Sigma^-$		$\pi^-$	$\bar{\Sigma}^-$	

В последние годы некоторую популярность завоевала другая схема классификации частиц, эквивалентная предыдущей, в которой вместо странности  $S$  вводится «гиперзаряд»  $Y$ , определяемый выражением

$$Y = S + B. \quad (29.50)$$

При этом частицы классифицируются по их изотопическому спину  $T$ , гиперзаряду  $Y$  и барионному числу  $B$ . Однако законы сохранения удобнее рассматривать на основе понятия странности, определяемой выражением (29.49).

Поскольку вся совокупность опытных данных свидетельствует о том, что электрический заряд  $Q$  и барионное число  $B$  в отдельности сохраняются во *всех* взаимодействиях, из факта сохранения изотопического спина в сильных взаимодействиях следует, что странность также сохраняется. *По причинам, пока совершенно непонятным*, эксперименты показывают, что странность (а следовательно, и  $T_3$ ) сохраняется во всех сильных взаимодействиях и не сохраняется в слабых взаимодействиях. Далее, существуют экспериментальные данные, свидетельствующие о зарядовой независимости (соответствующей сохранению как  $T$ , так и  $T_3$ ) всех сильных взаимодействий барионов с тяжелыми бозонами. Причина этого также пока не известна. Кроме того, имеются некоторые данные о том, что в слабых взаимодействиях, в которых изотопический спин не сохраняется, действуют два правила отбора, а именно  $|\Delta T_3| = 1$  и  $|\Delta T| = 1/2$ . Источник этих правил отбора также остается неясным.

Как отмечалось в гл. 20 и 21, существование закона сохранения заряда  $Q$  можно еще понять, исходя из принципа калибровочной инвариантности. Однако остается непонятным твердо установленный на опыте закон сохранения барионного числа  $B$ . При этом не ясно, является ли этот закон сохранения фактически некоторым правилом суперотбора, возникающим вследствие инвариантности системы относительно какой-либо антиунитарной операции симметрии, такой, как комбинированная инверсия  $\Sigma$  или обращение времени  $\Theta$ . Как уже было показано в гл. 17, инвариантность относительно последних операций симметрии приводит, по-видимому, к аналогичному закону сохранения для лептонов.

Чтобы решить этот вопрос, необходимо исследовать, как преобразуются изоспин  $\mathbf{T}$  и барионное число  $B$  под действием оператора инверсии координат  $\Pi$ , оператора обращения времени  $\Theta$  и особенно под действием оператора зарядового сопряжения  $\Gamma$ . Если мы примем изоспин и барионное число в качестве квантовых чисел, то полное представление каждого оператора будет прямым произведением представлений в разных подпространствах, необходимых для задания полного набора квантовых чисел. Например, оператор зарядового сопряжения для барионов будет представлять собой прямое произведение вида

$$\Gamma_{\text{барионы}} = \Gamma_D \times \Gamma_{SC} \times \Gamma_{IS} \times \Gamma_B, \quad (29.51)$$

где  $\Gamma_D$  — представление в пространстве импульсов и  $\Gamma_{SC}$  — представление в пространстве спин — спиральность, найденные в гл. 19, а  $\Gamma_{IS}$  и  $\Gamma_B$  — представления в изотопическом пространстве и в пространстве барионных чисел, которые будут найдены ниже.

Чтобы провести рассмотрение в тесной аналогии с проведенным в гл. 28 для лептонов, нуклонные и антинуклонные состояния будем описывать четырехмерными векторами, заданными в пространстве, образованном всеми возможными произведениями собственных векторов операторов  $T_3$  и  $B$ . Если в таком комбинированном пространстве в качестве базисных векторов выбрать векторы

$$|p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, |\bar{n}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |\bar{p}\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (29.52)$$

то для изотопического спина, барионного числа и электрического заряда получим следующие представления:

$$\hat{T}_1 = \frac{1}{2} \tau_1 \times I = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (29.53)$$

$$\hat{T}_2 = \frac{1}{2} \tau_2 \times I, \quad \hat{T}_3 = \frac{1}{2} \tau_3 \times I, \quad \hat{T}^2 = \frac{3}{4} I \times I;$$

$$B = I \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad (29.54)$$

$$Q = \hat{T}_3 + \frac{B}{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (29.55)$$

Легко видеть, что  $\Gamma$ ,  $B$  и  $Q$  коммутируют между собой, поскольку операторы  $\hat{T}_3$ ,  $\hat{T}^2$ ,  $B$  и  $Q$  все одновременно диагональны.

Оператор зарядового сопряжения  $\Gamma$ , обладающий по определению свойствами

$$\Gamma|p\rangle = |\bar{p}\rangle, \quad \Gamma|n\rangle = |\bar{n}\rangle, \quad \Gamma|\bar{n}\rangle = |n\rangle, \quad \Gamma|\bar{p}\rangle = |p\rangle, \quad (29.56)$$

в пространстве, заданном базисными векторами (29.52), имеет вид

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Gamma_{IS} \times \Gamma_B. \quad (29.57)$$

Как и в аналогичном случае системы, состоящей из лептонов и антилептонов, система нуклонов и антинуклонов с собственными значениями  $B \neq 0$  или  $Q \neq 0$  не может находиться в состоянии с определенной зарядовой четностью, поскольку  $\Gamma$  антикоммутирует как с  $B$ , так и с  $Q$ :

$$\Gamma B + B\Gamma = 0, \quad \Gamma Q + Q\Gamma = 0. \quad (29.58)$$

Если  $B=0$  и  $Q=0$ , как, например, в случае системы, состоящей из одного протона и одного антипротона, то система *может* находиться в состоянии с определенной зарядовой четностью, несмотря на то что оператор  $\Gamma$  может и не быть унитарным оператором [см. текст после выражения (15.53)]. Однако свойства барионов и лептонов относительно зарядового сопряжения различны, поскольку для барионов необходимой характеристикой является изотопический спин.

Дальнейшее рассмотрение зависит от того, является ли  $\Gamma$  унитарным или антиунитарным оператором.

*Предполагая, что  $\Gamma$  можно представить в виде унитарного оператора*, Ли и Янг в 1956 г. впервые проанализировали симметрию систем с отличным от нуля изотопическим спином относительно зарядового сопряжения. Ниже мы будем следовать их ходу рассуждений. Однако до тех пор, пока в конце этой главы не будут рассмотрены все следствия, к которым приводит представление  $\Gamma$  в виде антиунитарного оператора, к выводам этих авторов следует относиться с некоторой осторожностью.

Если унитарное представление  $\Gamma$  в комбинированном пространстве изотопического спина и барионного числа обозначить через  $\Gamma_U$ , то из (29.53) и (29.57) следуют коммутационные соотношения для  $\Gamma_U$ :

$$\Gamma_U \hat{T}_1 + \hat{T}_1 \Gamma_U = 0, \quad \Gamma_U \hat{T}_2 - \hat{T}_2 \Gamma_U = 0, \quad \Gamma_U \hat{T}_3 + \hat{T}_3 \Gamma_U = 0; \quad (29.59)$$

здесь предполагается, что в отличие от случая, когда  $\Gamma$  представляется антиунитарным оператором, в  $\Gamma_U$  не входит операция комплексного сопряжения. Таким образом, система, состоящая из барионов и антибарионов, никогда не может находиться в состоянии с одновременно определенными значениями  $\Gamma_U$ ,  $T$  и  $T_3$ . Например, собственные векторы операторов  $T$  и  $T_3$  для нук-

лон-антинуклонной пары имеют вид [фаза выбрана согласно (29.52)]

$$T = 1: \begin{cases} |1, 1\rangle = |p\rangle |\bar{n}\rangle, \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle |\bar{p}\rangle - |n\rangle |\bar{n}\rangle), \\ |1, -1\rangle = |n\rangle |\bar{p}\rangle; \end{cases} \quad (29.60)$$

$$T = 0: |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|p\rangle |\bar{p}\rangle + |n\rangle |\bar{n}\rangle). \quad (29.61)$$

Следовательно, собственные векторы оператора  $\Gamma_U$   $|p\rangle |\bar{p}\rangle$  и  $|n\rangle |\bar{n}\rangle$  являются суперпозициями состояний с  $T=0$  и  $T=1$ :

$$|p\rangle |\bar{p}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle + |1, 0\rangle), \quad |n\rangle |\bar{n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0, 0\rangle - |1, 0\rangle). \quad (29.62)$$

Поэтому собственными значениями оператора  $\Gamma_U$  нельзя характеризовать зарядовую четность состояний с данными квантовыми числами  $T$  и  $T_3$ . Однако Ли и Янг показали, что можно построить оператор, который включает в себя  $\Gamma$  и который можно использовать для этой цели, а именно оператор

$$G = \Gamma \exp(i\pi \hat{T}_2) = \Gamma_D \times \Gamma_{SC} \times \Gamma_U \exp(i\pi \hat{T}_2) = \Gamma_D \times \Gamma_{SC} \times G_U. \quad (29.63)$$

Этот оператор соответствует комбинации поворота на угол  $\pi$  вокруг оси 2 в изотопическом пространстве с операцией зарядового сопряжения. Оператор  $G$  обладает следующими коммутационными свойствами:

$$G\hat{T} - \hat{T}G = 0, \quad (29.64)$$

$$GB + BG = 0, \quad (29.65)$$

и, следовательно, может быть приведен к диагональному виду одновременно с операторами  $T$  и  $T_3$ . Собственным вектором оператора  $G$  может быть вектор состояния с  $B=0$ . Это состояние называют состоянием с определенной  $G$ -четностью.

Чтобы получить явный вид оператора  $G$  в пространстве, определяемом базисными векторами (29.52), нужно воспользоваться соотношениями, справедливыми для  $T=1/2$ :

$$\hat{T}_2^{2n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \hat{T}_2 \quad \text{и} \quad \hat{T}_2^{2n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n I, \quad (29.66)$$

которые следуют из (29.53). Тогда получим

$$\begin{aligned}
 G_U &= \Gamma_U \left( \cos \frac{\pi}{2} I + 2i \sin \frac{\pi}{2} \hat{T}_2 \right) = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29.67)
 \end{aligned}$$

Под действием оператора  $G$  векторы отдельных частиц преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 G_U |p\rangle &= -|\bar{n}\rangle, & G_U |n\rangle &= |\bar{p}\rangle, \\
 G_U |\bar{n}\rangle &= |p\rangle, & G_U |\bar{p}\rangle &= -|n\rangle.
 \end{aligned} \quad (29.68)$$

Оператор  $G_U$  по определению является унитарным и удовлетворяет соотношению

$$G_U^2 = -I \quad \text{для} \quad B = \pm 1. \quad (29.69)$$

Поскольку операторы  $T$  и  $B$  аддитивны, а оператор  $G$  является мультипликативным, то и в общем случае системы из многих частиц и античастиц имеют место следующие соотношения:

$$G\hat{T} - \hat{T}G = 0, \quad GB + BG = 0, \quad G^2 = C^2 G_U^2 = (-1)^B, \quad (29.70)$$

справедливые при условии, что  $C^2 = +1$ , где  $C$  — собственное значение оператора  $\Gamma_D \times \Gamma_{SC}$ , совпадающее с введенной в гл. 28 обычной зарядовой четностью.

Таким образом, состояниям с  $B=0$  можно приписать определенную  $G$ -четность. При этом компоненты одного и того же мультиплетта  $T$  в пространстве изотопического спина всегда имеют одну и ту же зарядовую четность  $G_U$ . Например, четность состояний пуклон-антипуклонной пары (29.60) и (29.61) непосредственно видна из (29.68); она приведена в табл. 12. Так как обычная зарядовая четность  $C$  состояний пуклон-антипуклонной пары определяется так же, как в случае позитрона (см. табл. 7), полная  $G$ -четность такой пары равна

$$G = CG_U = (-1)^{I+s} (-1)^T. \quad (29.71)$$



Таблица 12

 Зарядовая четность  $G_U$ -состояний  
 нуклон-антинуклонной пары

$T$	$T_3$	Состояние	$G_U$
1	1	$ p\rangle \bar{n}\rangle$	-1
	0	$(1/\sqrt{2})( p\rangle \bar{p}\rangle -  n\rangle \bar{n}\rangle)$	-1
	-1	$ n\rangle \bar{p}\rangle$	-1
0	0	$(1/\sqrt{2})( p\rangle \bar{p}\rangle +  \bar{n}\rangle \bar{n}\rangle)$	+1

Из инвариантности сильных взаимодействий относительно зарядового сопряжения и поворота в пространстве изотопического спина следует, что величина  $G$  сохраняется во всех процессах сильных взаимодействий. Так как понятие  $G$ -четности можно распространить на пионы и странные частицы, этот закон сохранения приводит к целому ряду интересных правил отбора. Чтобы получить некоторые из них, рассмотрим свойства пионов относительно зарядового сопряжения.

Поскольку  $\pi^0$  распадается на два фотона и предполагается, что взаимодействие, ответственное за этот распад, оставляет зарядовую четность  $C$  неизменной, из (28.14) следует, что состояние  $|\pi^0\rangle$  должно иметь положительную зарядовую четность:

$$\Gamma|\pi^0\rangle = +|\pi^0\rangle. \quad (29.72)$$

В данном случае нет необходимости различать  $\Gamma$  и  $\Gamma_U$ , поскольку пионы обладают нулевым спином и оператор  $\Gamma$  в координатном пространстве можно представить оператором тождественного преобразования. С другой стороны, заряженные пионы можно рассматривать как зарядово сопряженные друг другу, так что

$$\Gamma|\pi^+\rangle = |\pi^-\rangle \quad \text{и} \quad \Gamma|\pi^-\rangle = |\pi^+\rangle. \quad (29.73)$$

Отсюда следует, что в изотопическом пространстве, определяемом базисными векторами (29.31), оператор  $\Gamma$  может быть представлен в виде

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (29.74)$$

При этом коммутационные соотношения для  $\Gamma$  с операторами изотопического спина (29.32) и (29.33) имеют такой же вид,

как и в случае системы нуклон — антинуклон:

$$\begin{aligned} \Gamma \hat{T}_1 + \hat{T}_1 \Gamma &= 0, \\ \Gamma \hat{T}_2 - \hat{T}_2 \Gamma &= 0, \\ \Gamma \hat{T}_3 + \hat{T}_2 \Gamma &= 0, \end{aligned} \quad (29.75)$$

т. е. для пионов

$$\Gamma Q + Q \Gamma = 0.$$

Следовательно, для пионов также можно ввести оператор  $G$ , который определяется выражением (29.63) и удовлетворяет соотношениям (29.70). В силу соотношений

$$\hat{T}_2^{2n+1} = \hat{T}_2 \quad \text{для } n \geq 0, \quad \hat{T}_2^{2n} = \hat{T}_2^2 \quad \text{для } n \geq 1 \quad (29.76)$$

(справедливых для  $T=1$ ) оператор  $G$  в изотопическом пространстве пионов (29.31) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} G &= \Gamma \exp(i\pi \hat{T}_2) = \Gamma [I + i \sin \pi \hat{T}_2 + (\cos \pi - 1) \hat{T}_2^2] = \\ &= \Gamma \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (29.77)$$

Отсюда следует, что все пионные состояния являются собственными векторами оператора  $G$ , причем  $G$ -четность пиона отрицательна.

Если теперь  $G$  сохраняется, то из (29.71) следует ряд правил отбора, например:

I. В сильных взаимодействиях состояние  $|\bar{p}\rangle |n\rangle$ , отвечающее с необходимостью изотопическому спину  $T=1$ , не может распасться на  $\begin{pmatrix} \text{четное} \\ \text{нечетное} \end{pmatrix}$  число пионов, если оно является состоянием с  $\begin{pmatrix} \text{четным} \\ \text{нечетным} \end{pmatrix} (l+s)$ , т. е. одним из состояний

$$\begin{pmatrix} {}^1S_0, {}^3P_0, \dots \\ {}^3S_1, {}^1P_1, \dots \end{pmatrix}.$$

II. В сильных взаимодействиях четное число пионов не может превратиться в нечетное число, и наоборот.

Поскольку выражение (29.49) инвариантно относительно зарядового сопряжения, странность коммутирует с оператором

$\Gamma_U$ , и обобщение изложенных выше соображений на странные частицы состоит в учете дополнительного коммутационного соотношения

$$GS + SG = 0, \quad (29.78)$$

из которого следует

$$G^2 = (-1)^{B+S}. \quad (29.79)$$

Отсюда можно сделать вывод, что только системы с  $B=0$  и  $S=0$  могут находиться в состояниях с определенной  $G$ -четностью. Дальнейшие подробности можно найти в работе Голдхабера, Ли и Янга [10].

Проведенное выше рассмотрение свойств частиц, обладающих изотопическим спином, относительно зарядового сопряжения имеет существенный недостаток — в нем не учитывается, что оператор зарядового сопряжения частиц  $\Gamma$ , действуя на векторы фермионных состояний, удовлетворяющие уравнению Дирака, ведет себя как антиунитарный оператор (см. гл. 19). Следствия, к которым это приводит, еще никем не были выяснены, так как трансформационные свойства изотопического спина  $T$  под действием оператора зарядового сопряжения не известны с достаточной определенностью. Из инвариантности выражения (29.49) можно лишь заключить, что  $T_3$  должно менять знак под действием оператора  $\Gamma$ . Пусть, например, все компоненты изоспина антикоммутируют с истинным антиунитарным оператором зарядового сопряжения частиц, обозначаемым  $\Gamma_A$ :

$$\Gamma_A \hat{T} + \hat{T} \Gamma_A = 0. \quad (29.80)$$

Тогда по аналогии с антиунитарным оператором обращения времени  $\Theta$ , обладающим подобным же свойством (15.14) по отношению к обычному спину  $J$ , оператор  $\Gamma_A$  может быть представлен в пространстве изотопического спина в виде

$$(\Gamma_A)_{IS} = [\exp(i\pi \hat{T}_2)] K. \quad (29.81)$$

Приводит или нет инвариантность относительно  $\Gamma_A$  к некоторому правилу суперотбора, зависит от того, выполняется ли соотношение  $\Gamma_A^2 = -I$  или  $\Gamma_A^2 = +I$ . Для барионов оператор  $\Gamma_A$  равен прямому произведению представлений в координатном пространстве, в изопространстве и в пространстве спин — спиральность:

$$\Gamma_A = \Gamma_D \times \Gamma_{SC} \times \Gamma_{IS}. \quad (29.82)$$

Поскольку в соответствующем комбинированном пространстве, согласно (19.69),

$$(\Gamma_D \times \Gamma_{SC})^2 = +I \quad (29.83)$$

и так как по аналогии с представлением оператора обращения времени из (29.81) следует, что

$$[(\Gamma_A)_{IS}]^2 = \begin{cases} -I, & \text{если } T = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \\ +I, & \text{если } T = 0, 1, \dots, \end{cases} \quad (29.84)$$

мы заключаем, что

$$(\Gamma_A)^2 = \begin{cases} -I & \text{для нуклонов и } \Xi\text{-гиперонов,} \\ +I & \text{для } \Lambda\text{- и } \Sigma\text{-гиперонов.} \end{cases} \quad (29.85)$$

Это означает, что правило суперотбора, возникающее благодаря инвариантности относительно зарядового сопряжения, имеет место лишь для нуклонов и  $\Xi$ -гиперонов. Более того, поскольку инвариантность по отношению к  $\Gamma$  отсутствует в слабых взаимодействиях, величина, существование которой связано с этим дополнительным правилом отбора, будет сохраняться только в сильных взаимодействиях. Такой величиной является определяемый формулой (29.50) гиперзаряд  $Y$ , так как  $Y$  отличен от нуля только для нуклонов и  $\Xi$ -гиперонов и сохраняется только в сильных взаимодействиях. Следовательно, вполне разумно предположить, что сохранение гиперзаряда есть следствие правила суперотбора, возникающего в силу инвариантности по отношению к операции зарядового сопряжения частиц.

С другой стороны, в силу того, что для фермионов, согласно (19.71),

$$(\Sigma_D \times \Sigma_{SC})^2 = -I, \quad (29.86)$$

инвариантность относительно комбинированной инверсии  $\Sigma_A = \text{ПГ}_A$  приводит к правилу суперотбора только для  $\Lambda$ - и  $\Sigma$ -гиперонов, поскольку  $\Sigma_A = \Sigma_D \times \Sigma_{SC} \times \Sigma_{IS}$  удовлетворяет (в предположении, что в изопространстве  $\Pi^2 = +I$ ) соотношениям

$$(\Sigma_A)^2 = \begin{cases} +I & \text{для } T = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots, \\ -I & \text{для } T = 0, 1, \dots, \text{ т. е. для } \Lambda\text{- и } \Sigma\text{-гиперонов.} \end{cases} \quad (29.87)$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что  $\Lambda$ - и  $\Sigma$ -гипероны обладают некоторой характеристикой, которая не присуща остальным барионам. В силу правила суперотбора эта характеристика сохраняется во всех взаимодействиях, в которых сохраняется комбинированная четность; в частности, она, по-видимому, сохраняется в слабых взаимодействиях. Что представляет

собой эта характеристика, если она существует, остается пока неясным<sup>1)</sup>.

Во всяком случае, *сохранение барионного числа* (характеристики, свойственной всем барионам), справедливое для всех взаимодействий, *нельзя рассматривать как следствие некоторого правила суперотбора, возникающего в силу симметрии относительно зарядового сопряжения.*

Таким образом, единственной симметрией, которая может приводить к сохранению барионного числа благодаря существованию некоторого правила суперотбора, является инвариантность по отношению к обращению времени  $\Theta$ , как было предположено в конце гл. 15.

К счастью, выводы, которые были получены выше при рассмотрении правил отбора, следующих из сохранения  $G$ -четности в сильных взаимодействиях для систем с  $B=0$  и  $S=0$ , остаются справедливыми, если двумерное пространство барионных чисел

Таблица 13

**Список возможных характеристик, сохранение которых следует из правил суперотбора**

Операции симметрии, приводящие к правилам суперотбора	Действуют на	Сохраняющаяся характеристика	Область применимости
Обращение времени $\Theta$	Лептоны	Мюонное число $L_\mu$	} Все взаимодействия
	Барионы	Барионное число $B$	
Комбинированная инверсия $\Sigma=\Pi\Gamma$	Лептоны	Лептонное число $L$	} Все взаимодействия
	$\Lambda$ - и $\Sigma$ -гипероны	?	
Зарядовое сопряжение $\Gamma$	Нуклоны и $\Xi$ -гипероны	Гиперзаряд $Y = B + S$	Сильные взаимодействия
Слабое отражение $\Pi\Theta$	Фермионы	?	Сильные взаимодействия

отождествить с двумерным пространством реверсивности, построенным на векторах барионных состояний  $|B\rangle$  и соответствующих им обращенных во времени векторах  $\Theta|B\rangle$ . В частности,

<sup>1)</sup> Существует еще одна операция симметрии (только для сильных взаимодействий) — «слабое отражение»  $\Pi\Theta$ , которая антиунитарна и квадрат которой равен  $\gamma_4\gamma_1\gamma_2K\gamma_4\gamma_1\gamma_2K = -1$  для всех фермионов. Природа соответствующей этой операции симметрии характеристики, которая должна сохраняться в сильных взаимодействиях, согласно правилу отбора, также остается неясной.

по аналогии с представлением (15.44) представление (29.57) для оператора зарядового сопряжения можно рассматривать как прямое произведение представления в пространстве изотопического спина и в пространстве реверсивности:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{IS} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}_B. \quad (29.88)$$

Полученные здесь выводы относительно возможных правил суперотбора, возникающих вследствие инвариантности по отношению к антиунитарным операциям симметрии, и их интерпретации приведены в табл. 13.

### ПРИМЕЧАНИЯ

Необходимость рассматривать изотопический спин как настоящую характеристику стала ясна после работы Бракнера [1]. Окончательная разработка аппарата теории изотопического спина и применение последней к описанию нуклонов и пионов содержатся в статье Ферми [2], в которой приведены также ссылки на ранние работы в этом направлении. Анализ энергетических уровней гиперядер на основе представления об изоспине провел Моррисон [3].

Более подробные сведения относительно соотношений сечений реакций и правил отбора, возникающих вследствие сохранения изотопического спина, можно найти в конспекте лекций Сакураи [4]. Странность как квантовое число была введена Гелл-Манном [5] (см. также работу Нишиджимы [6]). На гиперзаряд, как на квантовую характеристику, обратили внимание д'Эспанья и Прентки [7]. Понятие о  $G$ -четности, хотя и использованное ранее Мишелем [8], было введено Ли и Янгом [9]. Подробный анализ правил отбора, возникающих вследствие симметрии относительно зарядового сопряжения, для систем с барионным числом  $B$ , равным нулю, содержится в статье Голдхабера и др. [10].

Робертсон [11] проанализировал ряд следствий, к которым приводит предположение, что антиунитарный оператор зарядового сопряжения антикоммутирует с оператором изотопического спина и что изоспин инвариантен относительно обращения времени.

### Литература

1. Brueckner K., Phys. Rev., 86, 106 (1952).
2. Fermi E., Nuovo Cimento, Suppl., 2, 18 (1955).
3. Morrison P., Lecture Notes, Canadian Association of Physicists Seminar, Edmonton, Alberta, 1957.

4. Sakurai J., в книге Brandeis Lectures in Theoretical Physics, 1961, Vol. 1, New York, 1962, p. 231.
5. Gell-Mann M., Phys. Rev., **92**, 833 (1953).
6. Nishijima K., Progr. Theor. Phys. (Kyoto), **12**, 107 (1954).
7. d'Espagnat B., Prentki J., Nucl. Phys., **1**, 33 (1956).
8. Michel L., Nuovo Cimento, **10**, 319 (1953).
9. Lee T. D., Yang C. N., Nuovo Cimento, **3**, 749 (1956).
10. Goldhaber M., Lee T. D., Yang C. N., Phys. Rev., **111**, 1796 (1958).
11. Robertson D. A., M. Sc. Thesis, Univ. British Columbia, Vancouver, 1963.

## Понятие квазичастиц

Одним из наиболее поразительных проявлений квантово-механических принципов, которым, очевидно, подчиняется весь реальный физический мир, является наличие у жидкостей и твердых тел при низких температурах особых *макроскопических* свойств, известных как «сверхтекучесть» и «сверхпроводимость». Эти свойства можно объяснить на основе принципа суперпозиции амплитуд вероятности с учетом симметрии векторов многочастичных состояний относительно перестановки частиц. Интересно, что теория явлений «сверхпереноса» могла бы быть создана сразу же после создания квантовой механики, поскольку Эйнштейн, открывший «эйпштейнговскую конденсацию» бозонов, дал ключ к решению задачи о сверхтекучести еще тогда, когда смысл принципа суперпозиции не был полностью осознан. Однако потребовалось более двадцати лет, прежде чем сформировались идеи, которые лежат в основе понимания этих явлений и получили в настоящее время всеобщее признание. Этот удивительный с современной точки зрения факт, по-видимому, объясняется тенденцией физиков того времени, воспитанных на классических представлениях о частицах, ограничить область применения квантовой механики лишь описанием микроскопических объектов.

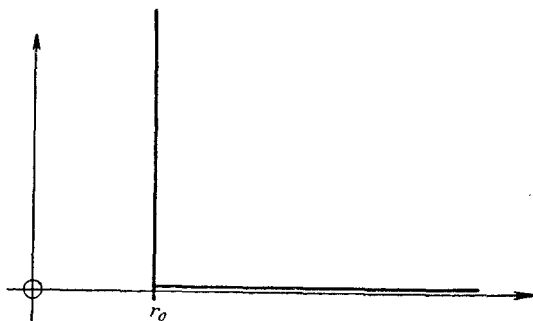
Явная необходимость учета квантовомеханических принципов при рассмотрении макроскопических объектов, состоящих из большого числа частиц и находящихся при низких температурах, казалось бы, следует из достаточно элементарных рассуждений. Рассмотрим, например, жидкость, состоящую из  $n$  бозонов, заключенных в объеме  $V$ . Чтобы не учитывать сжимаемость жидкости, которая, вообще говоря, мала, будем для простоты считать, что взаимодействие между любыми двумя бозонами описывается потенциалом типа «твердой сердцевины» (фиг. 38). В такой жидкости каждый бозон тесно окружен соседними частицами, так что на его долю приходится объем порядка  $(V/n) \sim r_0^3$ . Следовательно, каждый бозон в состоянии с наименьшей энергией будет обладать довольно большой «энергией



нулевых колебаний»

$$\varepsilon_0 \sim \frac{k_0^2}{2m} \sim \frac{1}{2mr_0^2} \approx \frac{1}{2m} \left( \frac{n}{V} \right)^{2/3}. \quad (30.1)$$

При этом расстояние между основным и первым возбужденным уровнями отдельного бозона будет величиной того же порядка, что и  $\varepsilon_0$ . Отсюда следует, что если температура жидкости меньше некоторой критической температуры порядка температуры



Фиг. 38. Потенциал «твердой сердцевины».

эйнштейновской конденсации (используется естественная система единиц, в которой постоянная Больцмана  $k$  равна единице), т. е. если

$$T < T_0 \sim \frac{1}{2m} \left( \frac{n}{V} \right)^{2/3}, \quad (30.2)$$

то в жидкости практически не будет одночастичных возбуждений. Подставив в выражение (30.2) известные значения плотности жидкого гелия и массы атома гелия, найдем, что  $T_0$  равно примерно  $3^\circ \text{K}$ .

На первый взгляд может показаться, что жидкости никаким способом нельзя передать энергию, меньшую  $T_0$ . Это должно приводить к практически нулевой удельной теплоемкости при температурах, меньших  $T_0$ . Однако при ближайшем рассмотрении выясняется, что такой способ есть, и он заключается в возбуждении *коллективных состояний*, какими являются, например, звуковые волны. Эти состояния можно описать квантовомеханически, используя *состояния отдельной частицы, являющиеся суперпозициями основного и возбужденных состояний*, в которых примесь возбужденных состояний мала, т. е. их амплитуды малы по сравнению с амплитудой основного состояния. Расстояния между энергетическими уровнями, которые соответ-

ствуют таким коллективным возбуждениям, определяются объемом  $V$  всей системы. Естественно, что это приводит к практически непрерывному спектру «фононов», подобно тому как излучение черного тела в объеме  $V$  характеризуется практически сплошным спектром фотонов. Если провести дальше аналогию с излучением черного тела, то следует ожидать, что удельная теплоемкость жидкости будет зависеть от температуры  $T$  и скорости звука  $c_0$  следующим образом:

$$\frac{dE}{dT} \sim \frac{T^3}{c_0^3}. \quad (30.3)$$

Эта зависимость была экспериментально подтверждена с высокой точностью для жидкого гелия при температурах ниже  $0,6^\circ \text{K}$ . Такая точность является несколько неожиданной, если принять во внимание сделанное выше грубое предположение относительно вида межмолекулярных сил.

Критическая температура  $T_0$  (30.2) интересна еще с той точки зрения, что при температурах  $T < T_0$  следует ожидать заметного проявления эффектов, связанных с перестановочной симметрией векторов состояния, описывающих  $n$  неразличимых частиц. Измерение числа частиц  $n$  в классическом смысле как числа пространственно разделенных объектов и измерение температуры  $T$  являются несовместимыми операциями при температурах  $T < T_0$  по следующей причине. Предположим, что мы хотим зафиксировать положение какой-нибудь частицы в объеме  $V$ , в котором находятся  $n$  частиц. Поскольку частицы мы считаем классическими пространственно разделенными объектами, на каждую частицу будет приходиться объем, меньший чем  $V/n$ . Это соответствует неопределенности измерения координаты частицы

$$\Delta q \leq \left(\frac{V}{n}\right)^{1/3} \quad (30.4)$$

и, согласно соотношению неопределенностей (10.5), неопределенности импульса частицы

$$\Delta p \geq \frac{1}{\Delta q} \geq \left(\frac{n}{V}\right)^{1/3}. \quad (30.5)$$

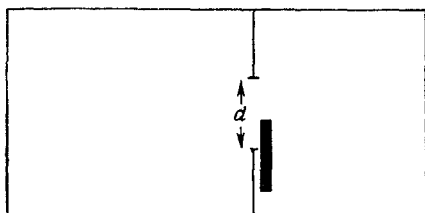
Таким образом, энергия каждой частицы будет известна с точностью

$$\Delta \epsilon \sim \frac{(\Delta p)^2}{2m} \geq \frac{1}{2m} \left(\frac{n}{V}\right)^{2/3}. \quad (30.6)$$

Это приводит к тому, что температура будет известна с точностью

$$\Delta T \sim \Delta \epsilon \geq T_0. \quad (30.7)$$

Весьма поучительно еще с одной стороны рассмотреть влияние квантовых эффектов на поведение макроскопических объектов при температурах  $T < T_0$ . Предположим, что существует исключительно понятливый помощник, известный под названием «демона Максвелла», и перед ним поставлена задача рассортировать частицы в газе, состоящем из  $n$  частиц, на быстрые и медленные, открывая и закрывая в нужные моменты дверцу диаметром  $d$  в перегородке, разделяющей объем  $V$  на две части (фиг. 39). Предполагается, что частицы в газе имеют обычное



Фиг. 39. Дверца в перегородке, которую закрывает и открывает демон Максвелла.

распределение по скоростям, так что средняя скорость частиц равна  $\bar{v}$ , а ширина распределения  $\sim (T/m)^{1/2}$ . Если нужно отделить частицы со скоростью  $v < \bar{v}$  от частиц со скоростью  $v > \bar{v}$ , то демон Максвелла должен знать скорость каждой частицы с неопределенностью, меньшей чем естественная ширина распределения по скоростям:

$$\left(\frac{T}{m}\right)^{1/2} \geq \Delta v. \quad (30.8)$$

Однако в силу соотношения неопределенностей для величины  $\Delta v$  существует некоторый нижний предел. На дверцу площадью  $d^2$  за время  $\tau$  будет попадать приблизительно  $(n/V)d^2\bar{v}\tau$  частиц. Если демон хочет пропустить одну из частиц в дверцу, то он не должен держать ее открытой дольше, чем среднее время  $\Delta\tau$ , разделяющее приход двух частиц:

$$\Delta\tau \sim \frac{V}{nd^2\bar{v}}, \quad (30.9)$$

При этом кинетическая энергия будет известна с точностью

$$\Delta\epsilon \geq \frac{1}{\Delta\tau} \sim \frac{nd^2\bar{v}}{V}, \quad (30.10)$$

а скорость соответственно с точностью

$$\Delta v \sim \frac{\Delta\epsilon}{mv} \geq \frac{nd^2}{mV}. \quad (30.11)$$

Сама дверца также вносит некоторую неопределенность, поскольку при прохождении частицы местоположение последней известно с точностью до диаметра дверцы  $d$ :

$$(\Delta v)_d \geq \frac{1}{md}. \quad (30.12)$$

Чтобы  $(\Delta v)_d$  было не больше, чем значение, определяемое выражением (30.11), диаметр  $d$  должен удовлетворять условию

$$d > \frac{1}{m \Delta v}. \quad (30.13)$$

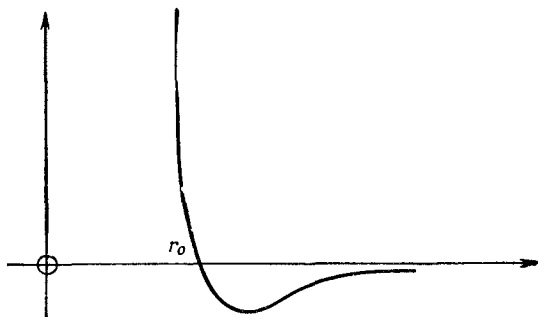
Подставляя (30.13) в (30.11), получаем неравенство

$$\Delta v \geq \frac{1}{m} \left( \frac{n}{V} \right)^{1/3}. \quad (30.14)$$

Тогда из неравенства (30.8) следует

$$T \geq \frac{1}{m} \left( \frac{n}{V} \right)^{2/3} \sim T_0. \quad (30.15)$$

Это означает, что демон Максвелла может успешно справиться с поставленной задачей только в том случае, если температура

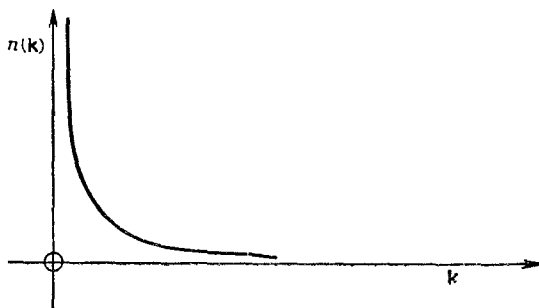


Фиг. 40. Потенциал взаимодействия между двумя бозонами с учетом сил притяжения.

газа по крайней мере равна характеристической температуре  $T_0$ . Если же  $T < T_0$ , то все его блестящие способности оказываются совершенно бесполезными из-за соотношения неопределенностей.

Предыдущие рассуждения качественно не изменятся, если мы заменим грубо приближенный потенциал «твердой сердцевины» на реальный потенциал, учитывающий притяжение между частицами, который показан на фиг. 40. Однако в одном отношении учет притяжения между двумя бозонами наряду с отталкива-

тельной сердцевиной должен привести к появлению нового важного свойства: состояние системы бозонов, каждый из которых находится в основном состоянии, не обязательно будет состоянием с наименьшей энергией<sup>1)</sup>. Наличие нескольких фононов может привести к уменьшению средней величины потенциальной энергии взаимодействия между частицами, так что это



Фиг. 41. Распределение бозонов по импульсам при абсолютном нуле температуры в случае потенциала взаимодействия, показанного на фиг. 40.

уменьшение более чем компенсирует увеличение средней кинетической энергии, которое связано с возникновением этих коллективных состояний. Таким образом, даже при абсолютном нуле температуры «эйнштейновская конденсация» в основное состояние, которое для идеального газа описывается  $\delta$ -функцией в пространстве импульсов, при использовании более реального потенциала взаимодействия будет происходить в состоянии, характеризующееся некоторым распределением такого типа, как показано на фиг. 41.

Предположение о том, что в отсутствие притяжения между частицами основное состояние системы в целом будет состоянием, в котором все частицы «сконденсированы» в состояние с импульсом  $k=0$  (здесь и в дальнейшем энергия отсчитывается от энергии нулевых колебаний), а учет слабого притяжения между частицами приводит к такому основному состоянию системы в целом, в котором теперь в одночастичном состоянии возникает примесь возбужденных состояний с  $k \neq 0$ , подтверждается

<sup>1)</sup> В системе взаимодействующих частиц понятие о состоянии отдельной частицы вообще лишено смысла. Последняя фраза текста означает, что при наличии взаимодействия (не обязательно притяжения) основному состоянию отвечает некоторая вероятность найти частицы с не равным нулю импульсом. Только в случае идеального газа можно говорить, что частица с нулевым импульсом находится в основном состоянии. — Прим. ред.

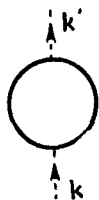
следующими более строгими аргументами, выдвинутыми Боголюбовым<sup>1)</sup>.

Систему слабо взаимодействующих бозонов, подчиняющуюся обычным законам сохранения и условию, что полное число частиц в ней постоянно, а все взаимодействия могут быть сведены к двухчастичным центральным силам, можно описать гамильтонианом

$$H = \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) b^+(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) + \sum_{\mathbf{k}'''} \sum_{\mathbf{k}''} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}''' - \mathbf{k}') \delta_{\mathbf{k}'''+\mathbf{k}'', \mathbf{k}'+\mathbf{k}} b^+(\mathbf{k}''') b^+(\mathbf{k}'') b(\mathbf{k}') b(\mathbf{k}). \quad (30.16)$$

Предполагается, что бозоны не имеют никаких внутренних характеристик и полностью описываются квантовыми числами импульса  $\mathbf{k}$ .

По-видимому, здесь имеет смысл несколько отвлечься и показать, как выполнение различных феноменологических условий,



Фиг. 42. Диаграмма, соответствующая выражению (30.17).

налагаемых на реальную систему, приводит к гамильтониану вида (30.16). Начав с системы невзаимодействующих бозонов, рассмотрим билинейную форму наиболее общего вида

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}', \mathbf{k}) b^+(\mathbf{k}') b(\mathbf{k}). \quad (30.17)$$

Этот оператор сохраняет число частиц, поскольку в нем каждому оператору уничтожения соответствует оператор рождения и матричные элементы, построенные на векторах состояний с разным числом частиц, обращаются в нуль. На языке диаграмм Фейнмана каждое слагаемое в  $H_0$  представляется в виде диаграммы, изображенной на фиг. 42. Если последовательно учиты-

<sup>1)</sup> К такому перераспределению частиц по импульсам приводит и отталкивательное взаимодействие, как это следует из полученных ниже результатов. Поэтому предположение о том, что для потенциала «твердой сердцевины» такое перераспределение отсутствует, а имеется лишь сдвиг энергии за счет нулевых колебаний, представляется крайне сомнительным. — *Прим. ред.*

вать все требования инвариантности, которым должен удовлетворять гамильтониан  $H_0$ , получим следующую совокупность условий, которые должны выполняться для функции  $\omega(\mathbf{k}', \mathbf{k})$ :

1) инвариантность относительно изменения направления движения на обратное требует, чтобы  $\omega(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \omega^*(-\mathbf{k}', -\mathbf{k})$ ;

2) инвариантность относительно инверсии координат требует, чтобы  $\omega(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \omega(-\mathbf{k}', -\mathbf{k})$ ;

3) инвариантность относительно сдвига во времени требует, чтобы  $\omega$  не содержало в явном виде  $t$ ;

4) инвариантность относительно сдвига в пространстве требует, чтобы  $\omega(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}', \mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}$ ;

5) инвариантность относительно вращения в пространстве требует, чтобы  $\omega(\mathbf{k}', \mathbf{k}) = \omega[(\mathbf{k}' \mathbf{k})]$ .

Учет этих условий приводит к обычному выражению для гамильтониана системы невзаимодействующих бозонов

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}} \omega[(\mathbf{k}' \mathbf{k})] \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}} b^+(\mathbf{k}') b(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) b^+(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}), \quad (30.18)$$

где  $\omega$  — действительная величина. Подобным же способом можно получить аналогичное выражение для гамильтониана системы невзаимодействующих фермионов.

Если все гамильтонианы, которые нельзя представить в виде (30.18), назвать «гамильтонианами взаимодействия», то все возможные гамильтонианы взаимодействия можно разделить на следующие две группы.

А. Гамильтонианы, сохраняющие число частиц, т. е. содержащие в каждом слагаемом равное число операторов рождения и операторов уничтожения частиц.

Б. Гамильтонианы, не сохраняющие число частиц, т. е. не удовлетворяющие условию пункта А.

Простым гамильтонианом взаимодействия типа Б, сохраняющим число фермионов, но не сохраняющим число бозонов, является гамильтониан, структура которого аналогична структуре выражения (23.6), используемого в квантовой электродинамике:

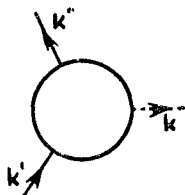
$$H'_{\text{вз}} = \sum_{\mathbf{k}''} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}} G(\mathbf{k}'', \mathbf{k}', \mathbf{k}) [a^+(\mathbf{k}'') a(\mathbf{k}') b^+(\mathbf{k}) + \text{эрмитово сопр.}]. \quad (30.19)$$

Этому гамильтониану соответствуют две диаграммы, показанные на фиг. 43 и 44. Требования инвариантности и в этом случае накладывают определенные условия на функцию  $G$ , а именно  $G$  должна иметь вид

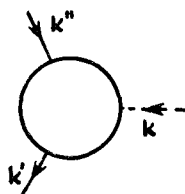
$$G(\mathbf{k}'', \mathbf{k}', \mathbf{k}) = g [(\mathbf{k}' - \mathbf{k})^2; \mathbf{k}^2] \delta_{\mathbf{k}'' + \mathbf{k}, \mathbf{k}'}. \quad (30.20)$$

Одной из основных идей в теории взаимодействий является представление всех прямых взаимодействий между частицами в

виде взаимодействия с обменом промежуточными бозонами. При этом все диаграммы рассматриваются как комбинации диаграмм, содержащих только трехчастичные вершины типа показанных на фиг. 43 и 44. Трудности, связанные с существованием



Фиг. 43. Первая диаграмма для потенциала взаимодействия (30.19).

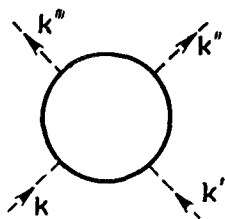


Фиг. 44. Вторая диаграмма для потенциала взаимодействия (30.19).

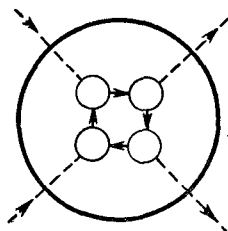
бесконечной иерархии вершинных диаграмм, отвечающих основному взаимодействию, продемонстрированы в гл. 25. В настоящей главе мы учтем это обстоятельство путем введения следующего гамильтониана взаимодействия, сохраняющего число бозонов:

$$H_{\text{вз}} = \sum_{k'''} \sum_{k''} \sum_{k'} \sum_k W(k''', k'', k', k) b^+(k''') b^+(k'') b(k') b(k). \quad (30.21)$$

Такому гамильтониану соответствует диаграмма, приведенная на фиг. 45. Мы не будем доказывать справедливость этого выражения, пытаюсь вывести его из другого, более фундаментального взаимодействия, такого, как (30.19), с помощью теории



Фиг. 45. Диаграмма для потенциала (30.21).



Фиг. 46. Возможное разбиение, диаграммы, показанной на фиг. 45, на диаграммы, представленные на фиг. 43 и 44.

возмущений или какого-либо другого метода. Дело в том, что условия, при которых из взаимодействия типа (30.19) можно получить выражение (30.21), не известны. Более того, остается открытым вопрос о том, существуют ли такие условия вообще.



Возможное разбиение диаграммы, показанной на фиг. 45, на диаграммы типа представленных на фиг. 43 и 44, приведено на фиг. 46. Очевидно, такое разбиение, например, эмпирически найденного взаимодействия между двумя атомами гелия в достаточной степени нереалистично, поскольку это взаимодействие является по своей природе чисто электромагнитным и задача его определения сводится к решению проблемы шести тел — двух ядер гелия и четырех электронов.

Оставляя в стороне вопросы, связанные с более подробным обоснованием выражения (30.21), мы заключаем, учитывая требование инвариантности относительно вращения и параллельного переноса, что  $W$  имеет вид

$$W(\mathbf{k}''', \mathbf{k}'', \mathbf{k}', \mathbf{k}) = F[(\mathbf{k}\mathbf{k}'); (\mathbf{k}\mathbf{k}''); (\mathbf{k}'\mathbf{k}'')] \delta_{\mathbf{k}'''+\mathbf{k}'', \mathbf{k}'+\mathbf{k}}. \quad (30.22)$$

В качестве скалярных параметров, от которых зависит функция  $F$ , вместо  $(\mathbf{k}\mathbf{k}')$ ,  $(\mathbf{k}\mathbf{k}'')$ ,  $(\mathbf{k}'\mathbf{k}'')$  можно выбрать энергию движения системы как целого  $(\mathbf{k}+\mathbf{k}')^2$  и два квадрата передаваемых импульсов  $(\mathbf{k}-\mathbf{k}'')^2$  и  $(\mathbf{k}'-\mathbf{k}'')^2$ . Если при этом считать, что  $F$  соответствует центрально-симметричному взаимодействию между любыми двумя бозонами, то отсюда следует выражение (30.16) для полного гамильтониана.

Предположим теперь, что в соответствии с изложенными выше качественными соображениями имеется  $n_0 = \bar{n}_0 + n'$  частиц, находящихся каждая в состоянии с  $\mathbf{k}=0$ , где  $\bar{n}_0$  — среднее число частиц в этом состоянии, а  $n'$  — отклонение от среднего числа частиц, такое, что  $\bar{n}'=0$  и  $|n'| \ll \bar{n}_0$ . Тогда число частиц в состояниях с  $\mathbf{k} \neq 0$  будет равно  $n_1 = n - \bar{n}_0 - n'$ . Следует ожидать, что векторы наимизших состояний системы  $n$  взаимодействующих бозонов  $|\tau(n)\rangle$  будут линейными суперпозициями векторов состояния  $|n_0, 0_1\rangle$ :

$$|\tau(n)\rangle = \sum_{n'} c_\tau(n_1) |n_0, 0_1\rangle = \sum_{n'} c_\tau(n - \bar{n}_0 - n') |\bar{n}_0 + n', 0_1\rangle, \quad (30.23)$$

где  $c_\tau(n_1)$  — соответствующим образом нормированная амплитуда, содержащая операторы  $b^+(\mathbf{k})$ , которые рожают  $n_1$  частиц из состояния  $|\dots, 0_1\rangle$ , и где

$$b^+(0) b(0) |n_0, 0_1\rangle = n_0 |n_0, 0_1\rangle. \quad (30.24)$$

Суммирование по  $n'$  в (30.23) производится по всем положительным и отрицательным значениям  $n'$ . Индекс  $\tau$  нумерует состояния системы: например  $\tau=0$  отвечает основному состоянию всей системы,  $\tau=1$  — первому возбужденному состоянию и т. д. Далее, согласно представлению (18.4) для операторов

рождения и уничтожения бозонов, имеем

$$b(0) | \tau(n) \rangle = \sum_n' \sqrt{\bar{n}_0} c_\tau(n_1) | n_0 - 1, 0_1 \rangle, \quad (30.25)$$

$$b^+(0) | \tau(n) \rangle = \sum_n' \sqrt{\bar{n}_0 + 1} c_\tau(n_1) | n_0 + 1, 0_1 \rangle, \quad (30.26)$$

$$\begin{aligned} b^+(0) b(0) | \tau(n) \rangle &= \sum_n' n_0 c_\tau(n_1) | n_0, 0_1 \rangle = \\ &= \sum_n' (\bar{n}_0 + n') c_\tau(n_1) | \bar{n}_0 + n', 0_1 \rangle. \end{aligned} \quad (30.27)$$

До сих пор мы не делали никаких приближений. Однако, поскольку  $|n'| \ll \bar{n}_0$ , вместо точного соотношения (30.27) для всех амплитуд  $c_\tau(n_1) = c_\tau(n - \bar{n}_0 - n')$ , вносящих основной вклад, приближенно можно положить

$$b^+(0) b(0) | \tau(n) \rangle = \bar{n}_0 | \tau(n) \rangle. \quad (30.27')$$

Если предполагать амплитуду  $c_\tau(n_1)$  слабо зависящей от точного значения полного числа частиц  $n$ , то по тем же соображениям можно приближенно положить <sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} b(0) | \tau(n) \rangle &= \sqrt{\bar{n}_0} \sum_n' c_\tau(n - \bar{n}_0 - n') | \bar{n}_0 + n' - 1, 0_1 \rangle = \\ &= \sqrt{\bar{n}_0} \sum_n' c_\tau [(n-1) - (\bar{n}_0 + n' - 1)] | \bar{n}_0 + n' - 1, 0_1 \rangle = \\ &= \sqrt{\bar{n}_0} | \tau(n-1) \rangle, \end{aligned} \quad (30.25')$$

$$b^+(0) | \tau(n) \rangle = \sqrt{\bar{n}_0} | \tau(n+1) \rangle. \quad (30.26')$$

Для того чтобы при действии гамильтонианом (30.16) на векторы рассматриваемых низших состояний (или на их линейные комбинации, если число  $n$  не фиксировано) пользоваться приближенными выражениями (30.25'), (30.26') и (30.27'), из  $H_{\text{вз}}$  удобно выделить члены с  $k \neq 0$ . Не делая пока никаких приближений, находим следующее точное выражение:

$$\begin{aligned} H_{\text{вз}} &= b^+(0) b^+(0) b(0) b(0) F(0) + \\ &+ 2b^+(0) b(0) \left[ F(0) \sum_k' b^+(k) b(k) + \sum_k' F(k) b^+(k) b(k) \right] + \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Приведенные соотношения означают просто, что в состоянии конденсата с  $k=0$ , где находится макроскопически большое число частиц  $n_0$ , соответствующие операторы рождения и уничтожения могут быть заменены  $c$ -числами  $\sqrt{\bar{n}_0}$ . Это следует прямо из факта малости коммутатора этих операторов по сравнению с их произведением. — *Прим. ред.*

$$\begin{aligned}
 &+ b(0) b(0) \sum'_{\mathbf{k}'} F(\mathbf{k}) b^+(\mathbf{k}) b^+(-\mathbf{k}) + \\
 &+ b^+(0) b^+(0) \sum'_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) b(-\mathbf{k}) + \\
 &+ b(0) \sum'_{\mathbf{k}'} \sum'_{\substack{\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \neq \mathbf{k}}} [F(\mathbf{k}) + F(\mathbf{k}' - \mathbf{k})] b^+(\mathbf{k}) b^+(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) b(\mathbf{k}') + \\
 &+ b^+(0) \sum'_{\mathbf{k}'} \sum'_{\substack{\mathbf{k} \\ \mathbf{k}' \neq \mathbf{k}}} [F(\mathbf{k}) + F(\mathbf{k}')] b^+(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) b(\mathbf{k}') b(\mathbf{k}) + \\
 &+ \sum'_{\substack{\mathbf{k}''' \\ \mathbf{k}'' \neq \mathbf{k}' + \mathbf{k}}} \sum'_{\mathbf{k}''} \sum'_{\mathbf{k}'} \sum'_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}''' - \mathbf{k}) \delta_{\mathbf{k}''' + \mathbf{k}'', \mathbf{k}' + \mathbf{k}} b^+(\mathbf{k}''') b^+(\mathbf{k}'') b(\mathbf{k}') b(\mathbf{k}).
 \end{aligned}
 \tag{30.28}$$

Здесь  $\sum'_{\mathbf{k}}$  означает суммирование по всем  $\mathbf{k} \neq 0$ . Поскольку этот гамильтониан будет действовать только на векторы низкоэнергетических состояний системы  $|\tau(n)\rangle$ , полный гамильтониан можно заменить приближенным, полагая всюду в соответствии с (30.25'), (30.26') и (30.27')

$$b^+(0) b(0) = b^+(0) b^+(0) = b(0) b(0) = \bar{n}_0$$

и пренебрегая членами более низкого порядка по  $b(0)$  и  $b^+(0)$ , поскольку последние пропорциональны  $\sqrt{\bar{n}_0}$ , и членами, вовсе не содержащими  $b(0)$  и  $b^+(0)$ , поскольку по порядку величины они равны 1 и, следовательно, малы по сравнению с членами, линейными по  $\bar{n}_0$ . Тогда находим

$$\begin{aligned}
 \tilde{H} = &\bar{n}_0 \omega(0) + \sum'_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}) b^+(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) + \bar{n}_0^2 F(0) + \\
 &+ 2\bar{n}_0 F(0) \sum'_{\mathbf{k}} b^+(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) + 2\bar{n}_0 \sum'_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) b^+(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) + \\
 &+ \bar{n}_0 \sum'_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) [b^+(\mathbf{k}) b^+(-\mathbf{k}) + b(\mathbf{k}) b(-\mathbf{k})].
 \end{aligned}
 \tag{30.29}$$

Этот гамильтониан применим даже в том случае, когда полное число частиц  $n$  не фиксировано и любое из низших состояний  $|\tau\rangle$  представляет собой линейную суперпозицию состояний с разными  $n$ :

$$|\tau\rangle = \sum_n d(n) |\tau(n)\rangle.$$

Однако если рассматриваются только векторы состояния, описывающие определенное число частиц  $n$ , то  $\bar{n}_0$  можно приближенно заменить на

$$n = b^+(0) b(0) + \sum'_{\mathbf{k}} b^+(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) = \bar{n}_0 + \sum'_{\mathbf{k}} b^+(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \tag{30.30}$$

и получить в этом приближении гамильтониан

$$\begin{aligned} \tilde{H} = n\omega(0) + n^2 F(0) + \sum_{\mathbf{k}}' [\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k})] b^{\dagger}(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) + \\ + n \sum_{\mathbf{k}}' F(\mathbf{k}) [b^{\dagger}(\mathbf{k}) b^{\dagger}(-\mathbf{k}) + b(\mathbf{k}) b(-\mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (30.31)$$

Этот гамильтониан не сохраняет число *возбужденных* частиц, что и не удивительно, поскольку развитое приближение фактически состоит в рассмотрении «конденсатного» состояния с  $\mathbf{k}=0$  как практически бесконечно емкого резервуара, из которого частицы благодаря взаимодействию могут подниматься в возбужденные состояния с  $\mathbf{k} \neq 0$ .

Чтобы привести этот гамильтониан к диагональному виду, Боголюбов ввел новые операторы

$$\begin{aligned} \tilde{b}(\mathbf{k}) &= u(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) - v(\mathbf{k}) b^{\dagger}(-\mathbf{k}), \\ \tilde{b}^{\dagger}(\mathbf{k}) &= u(\mathbf{k}) b^{\dagger}(\mathbf{k}) - v(\mathbf{k}) b(-\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (30.32)$$

где  $u(\mathbf{k})$  и  $v(\mathbf{k})$  — некоторые коэффициенты, принимающие действительные значения и удовлетворяющие соотношениям

$$u(-\mathbf{k}) = u(\mathbf{k}), \quad v(-\mathbf{k}) = v(\mathbf{k}), \quad u^2(\mathbf{k}) - v^2(\mathbf{k}) = 1. \quad (30.33)$$

Знак минус перед  $v$  в (30.32) поставлен из соображений удобства:  $v$  не обязательно должно иметь положительный знак. С учетом этих соотношений преобразование (30.32) является каноническим, т. е. операторы  $\tilde{b}$  и  $\tilde{b}^{\dagger}$  удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и  $b$  и  $b^{\dagger}$ . Действительно, из соотношений

$$\begin{aligned} [\tilde{b}(\mathbf{k}) \tilde{b}^{\dagger}(\mathbf{k}')] &= u(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}') [b(\mathbf{k}) b^{\dagger}(\mathbf{k}')] + \\ &+ v(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}') [b^{\dagger}(-\mathbf{k}) b(-\mathbf{k}')] - \\ &- u(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}') [b(\mathbf{k}) b(-\mathbf{k}')] - u(\mathbf{k}') v(\mathbf{k}) [b^{\dagger}(-\mathbf{k}) b^{\dagger}(\mathbf{k}')] = \\ &= \{u(\mathbf{k}) u(\mathbf{k}') - v(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}')\} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \begin{cases} u^2(\mathbf{k}) - v^2(\mathbf{k}) & \text{для } \mathbf{k} = \mathbf{k}', \\ 0 & \text{для } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}', \end{cases} \\ [\tilde{b}(\mathbf{k}) \tilde{b}(\mathbf{k}')] &= \\ &= -u(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}') [b(\mathbf{k}) b^{\dagger}(-\mathbf{k}')] - u(\mathbf{k}') v(\mathbf{k}) [b^{\dagger}(-\mathbf{k}) b(\mathbf{k}')] = \\ &= \{-u(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}') + u(\mathbf{k}') v(\mathbf{k})\} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} = \\ &= \begin{cases} -u(\mathbf{k}) v(-\mathbf{k}) + u(-\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) & \text{для } \mathbf{k} = -\mathbf{k}', \\ 0 & \text{для } \mathbf{k} \neq -\mathbf{k}', \end{cases} \end{aligned} \quad (30.34)$$

$$\begin{aligned} [\tilde{b}^{\dagger}(\mathbf{k}) \tilde{b}^{\dagger}(\mathbf{k}')] &= \{-u(\mathbf{k}') v(\mathbf{k}) + u(\mathbf{k}) v(\mathbf{k}')\} \delta_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}'} = \\ &= \begin{cases} -u(-\mathbf{k}) v(\mathbf{k}) + u(\mathbf{k}) v(-\mathbf{k}) & \text{для } \mathbf{k} = -\mathbf{k}', \\ 0 & \text{для } \mathbf{k} \neq \mathbf{k}' \end{cases} \end{aligned}$$

видно, что при выполнении условий (30.33) коммутационные соотношения для операторов  $\tilde{b}(\mathbf{k})$  и  $\tilde{b}^+(\mathbf{k})$  такие же, как для  $b(\mathbf{k})$  и  $b^+(\mathbf{k})$ .

Операторы  $\tilde{b}(\mathbf{k})$  и  $\tilde{b}^+(\mathbf{k})$  ниже будут рассматриваться как операторы рождения и уничтожения квазичастиц с импульсом  $\mathbf{k}$ . Гамильтониан  $H$  можно полностью записать в этих операторах, если, пользуясь соотношениями (30.32), выразить  $b$  и  $b^+$  через  $\tilde{b}$  и  $\tilde{b}^+$ :

$$\begin{aligned} b(\mathbf{k}) &= u(\mathbf{k})\tilde{b}(\mathbf{k}) + v(\mathbf{k})\tilde{b}^+(-\mathbf{k}), \\ b^+(\mathbf{k}) &= u(\mathbf{k})\tilde{b}^+(\mathbf{k}) + v(\mathbf{k})\tilde{b}(-\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (30.35)$$

так что

$$\begin{aligned} b^+(\mathbf{k})b(\mathbf{k}) &= v^2(\mathbf{k}) + u^2(\mathbf{k})\tilde{b}^+(\mathbf{k})\tilde{b}(\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k})\tilde{b}^+(-\mathbf{k})\tilde{b}(-\mathbf{k}) + \\ &+ u(\mathbf{k})v(\mathbf{k})[\tilde{b}^+(\mathbf{k})\tilde{b}^+(-\mathbf{k}) + \tilde{b}(\mathbf{k})\tilde{b}(-\mathbf{k})], \\ b^+(\mathbf{k})b^+(-\mathbf{k}) &= u(\mathbf{k})v(\mathbf{k}) + \\ &+ u(\mathbf{k})v(\mathbf{k})[\tilde{b}^+(\mathbf{k})\tilde{b}(\mathbf{k}) + \tilde{b}^+(-\mathbf{k})\tilde{b}(-\mathbf{k})] + \\ &+ u^2(\mathbf{k})\tilde{b}^+(\mathbf{k})\tilde{b}^+(-\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k})\tilde{b}(\mathbf{k})\tilde{b}(-\mathbf{k}), \quad (30.36) \\ b(\mathbf{k})b(-\mathbf{k}) &= u(\mathbf{k})v(\mathbf{k}) + \\ &+ u(\mathbf{k})v(\mathbf{k})[\tilde{b}^+(\mathbf{k})\tilde{b}(\mathbf{k}) + \tilde{b}^+(-\mathbf{k})\tilde{b}(-\mathbf{k})] + \\ &+ u^2(\mathbf{k})\tilde{b}(\mathbf{k})\tilde{b}(-\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k})\tilde{b}^+(\mathbf{k})\tilde{b}^+(-\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Используя далее тот факт, что  $\omega(-\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k})$  и  $F(-\mathbf{k}) = F(\mathbf{k})$ , находим

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \tilde{H}_1 + \tilde{H}_2, \quad (30.37)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= n\omega(0) + n^2F(0) + \sum_{\mathbf{k}}' \{[\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + \\ &+ 2nF(\mathbf{k})]v^2(\mathbf{k}) + 2nF(\mathbf{k})u(\mathbf{k})v(\mathbf{k})\}, \end{aligned} \quad (30.37a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_1 &= \sum_{\mathbf{k}}' \{[\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k})][u^2(\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k})] + \\ &+ 4nF(\mathbf{k})u(\mathbf{k})v(\mathbf{k})\}\tilde{b}^+(\mathbf{k})\tilde{b}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (30.37b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_2 &= \sum_{\mathbf{k}}' \{[\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k})]u(\mathbf{k})v(\mathbf{k}) + \\ &+ nF(\mathbf{k})[u^2(\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k})]\}\tilde{b}^+(\mathbf{k})\tilde{b}^+(-\mathbf{k}) + \tilde{b}(\mathbf{k})\tilde{b}(-\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (30.37b)$$

Рассматриваемый гамильтониан, очевидно, диагонален, если  $u(\mathbf{k})$  и  $v(\mathbf{k})$  выбраны так, что  $\tilde{H}_2 = 0$ . При таком выборе этих

коэффициентов гамильтониан принимает вид

$$\tilde{H} = \tilde{H}_0 + \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\omega}(\mathbf{k}) \tilde{b}^+(\mathbf{k}) \tilde{b}(\mathbf{k}), \quad (30.38)$$

где теперь

$$\tilde{\omega}(\mathbf{k}) = [\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k})][u^2(\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k})] + 4nF(\mathbf{k})u(\mathbf{k})v(\mathbf{k}). \quad (30.39)$$

Можно считать, что это выражение представляет собой энергию свободной квазичастицы с импульсом  $\mathbf{k}$ .

Условие исчезновения  $\tilde{H}_2$  имеет вид

$$[\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k})]u(\mathbf{k})v(\mathbf{k}) + nF(\mathbf{k})[u^2(\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k})] = 0. \quad (30.40)$$

Решение этого уравнения с учетом условий (30.33), которым удовлетворяют коэффициенты  $u$  и  $v$ , может быть найдено следующим образом. Условия (30.33) будут удовлетворены, если положить

$$u(\mathbf{k}) = \operatorname{ch} x, \quad v(\mathbf{k}) = \operatorname{sh} x. \quad (30.41)$$

Тогда, используя известные формулы

$$\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x, \quad \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x = \operatorname{ch} 2x,$$

находим

$$u(\mathbf{k})v(\mathbf{k}) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} 2x, \quad u^2(\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k}) = \operatorname{ch} 2x. \quad (30.42)$$

При этом уравнение (30.40) принимает следующий вид:

$$\operatorname{th} 2x = -\frac{2nF(\mathbf{k})}{\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k})}. \quad (30.43)$$

Из этого уравнения, принимая во внимание формулы

$$\operatorname{sh} x = \operatorname{th} x (1 - \operatorname{th}^2 x)^{-1/2}, \quad \operatorname{ch} x = (1 - \operatorname{th}^2 x)^{-1/2},$$

находим

$$u(\mathbf{k})v(\mathbf{k}) = -\frac{nF(\mathbf{k})}{\sqrt{[\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k})]^2 - 4n^2F^2(\mathbf{k})}}, \quad (30.44)$$

$$u^2(\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k}) = \frac{\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k})}{\sqrt{[\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k})]^2 - 4n^2F^2(\mathbf{k})}}. \quad (30.45)$$

Подставляя эти выражения в (30.39), немедленно получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\mathbf{k}) &= \sqrt{[\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k})]^2 - 4n^2F^2(\mathbf{k})} = \\ &= \sqrt{[\omega(\mathbf{k}) - \omega(0)]^2 + 4nF(\mathbf{k})[\omega(\mathbf{k}) - \omega(0)]}. \end{aligned} \quad (30.46)$$

Таким образом, зависимость энергии квазичастицы  $\tilde{\omega}$  от импульса  $\mathbf{k}$  определяется видом функции  $F(\mathbf{k})$  и в принципе может иметь характер, изображенный на фиг. 10, что, как было показано в гл. 11, приводит к явлению сверхтекучести<sup>1)</sup>.

Наинизшее энергетическое состояние системы  $|\tau=0\rangle$  теперь можно рассматривать как «квазичастичный вакуум»<sup>2)</sup>. Энергия этого состояния, согласно (30.38), равна

$$\tilde{H}_0 = n\omega(0) + n^2F(0) + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}}' [\tilde{\omega}(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}) + \omega(0) - 2nF(\mathbf{k})]. \quad (30.47)$$

Последнее выражение следует из (30.37а), если выполнить подстановку

$$\begin{aligned} v^2(\mathbf{k}) &= \frac{1}{2} [\operatorname{ch} 2x - 1] = \frac{\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k}) - \tilde{\omega}(\mathbf{k})}{2\tilde{\omega}(\mathbf{k})} = \\ &= \frac{2n^2F^2(\mathbf{k})}{\tilde{\omega}(\mathbf{k}) [\omega(\mathbf{k}) - \omega(0) + 2nF(\mathbf{k}) + \tilde{\omega}(\mathbf{k})]}. \end{aligned} \quad (30.48)$$

Этот результат подтверждает, что квазичастичный вакуум не совпадает с состоянием системы, в котором все обычные частицы находятся в основном состоянии. В самом деле, величина  $v^2(\mathbf{k})$  равна среднему числу обычных частиц в состоянии с импульсом  $\mathbf{k}$ , поскольку первое из соотношений (30.36) дает

$$\langle \tau=0 | b^+(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) | \tau=0 \rangle = \overline{n(\mathbf{k})} = v^2(\mathbf{k}). \quad (30.49)$$

При этом распределение частиц в общем имеет вид, показанный на фиг. 41.

Аналогичные результаты можно получить, если подобное рассмотрение провести для системы, состоящей из  $N$  фермионов. При этом состояние вакуума квазичастиц в зависимости от характера взаимодействия между фермионами будет отвечать некоторому «размытию» границы Ферми, связанному с перераспределением частиц по одночастичным состояниям из-за взаимодействия вблизи этой границы. Рассмотрим сначала систему не взаимодействующих фермионов, описываемую гамильтонианом

$$H_0 = \sum_{\mathbf{k}} \Omega(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \quad (30.50)$$

который сохраняет число частиц  $N = \langle | \hat{N} | \rangle = \langle | \sum_{\mathbf{k}} a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) | \rangle$ .

<sup>1)</sup> Подробнее см. [13\*]. — Прим. ред.

<sup>2)</sup> В этом состоянии квазичастиц нет по определению. Поэтому утверждение автора, содержащееся в подстрочном примечании к гл. 11, означает, по-видимому, что он отождествляет два разных понятия — квазичастиц и истинных частиц. Последние действительно приобретают за счет взаимодействия импульс  $\mathbf{k} \neq 0$  [см. (30.49)]. — Прим. ред.

В состоянии с наиминимизированной энергией все уровни такой системы с  $|\mathbf{k}| < |\mathbf{k}_F|$  ( $\mathbf{k}_F$  — граничный импульс Ферми) будут заполнены, а уровни с  $|\mathbf{k}| > |\mathbf{k}_F|$  будут пусты. Если интересоваться только слабо возбужденными состояниями системы, то ее следует описывать гамильтонианом

$$\tilde{H}_0 = H_0 - \Omega_F N = \sum_{\mathbf{k}} [\Omega(\mathbf{k}) - \Omega_F] a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}), \quad (30.51)$$

где  $\Omega_F \equiv \Omega(\mathbf{k}_F)$  — энергия Ферми, определяемая из условия

$$\langle |\tilde{N}| \rangle = N. \quad (30.52)$$

Чтобы определить собственные значения гамильтониана  $\tilde{H}_0$ , введем новые операторы

$$\tilde{a}(\mathbf{k}) = \begin{cases} a(\mathbf{k}) & \text{для } \Omega(\mathbf{k}) > \Omega_F, \\ a^+(-\mathbf{k}) & \text{для } \Omega(\mathbf{k}) < \Omega_F \end{cases} \quad (30.53)$$

(здесь  $\mathbf{k}$  может характеризовать как импульс частицы, так и проекцию ее спина), которые, как показано в гл. 17, удовлетворяют тем же антикоммутиационным соотношениям, что и операторы  $a(\mathbf{k})$ . Тогда, поскольку

$$a^+(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) = \begin{cases} \tilde{a}^+(\mathbf{k}) \tilde{a}(\mathbf{k}) & \text{для } \Omega(\mathbf{k}) > \Omega_F, \\ \tilde{a}(-\mathbf{k}) \tilde{a}^+(-\mathbf{k}) = 1 - \tilde{a}^+(-\mathbf{k}) \tilde{a}(-\mathbf{k}) & \text{для } \Omega(\mathbf{k}) < \Omega_F, \end{cases} \quad (30.54)$$

используя тот факт, что  $\Omega(-\mathbf{k}) = \Omega(\mathbf{k})$ , мы можем написать

$$\begin{aligned} \tilde{H}_0 &= \sum_{\mathbf{k}} [\Omega(\mathbf{k}) - \Omega_F] [1 - \tilde{a}^+(-\mathbf{k}) \tilde{a}(-\mathbf{k})] + \\ &+ \sum_{\mathbf{k}} [\Omega(\mathbf{k}) - \Omega_F] \tilde{a}^+(\mathbf{k}) \tilde{a}(\mathbf{k}) = \varepsilon_F + \sum_{\mathbf{k}} \tilde{\Omega}(\mathbf{k}) \tilde{a}^+(\mathbf{k}) \tilde{a}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (30.55)$$

где

$$\tilde{\Omega}(\mathbf{k}) = |\Omega(\mathbf{k}) - \Omega_F|, \quad \varepsilon_F = \sum_{\mathbf{k}} [\Omega(\mathbf{k}) - \Omega_F]. \quad (30.56)$$

Таким образом, мы перешли к представлению *квазичастиц*, операторами рождения и уничтожения которых являются  $\tilde{a}(\mathbf{k})$  и  $\tilde{a}^+(\mathbf{k})$ . При этом квазичастица с импульсом  $\mathbf{k}$  и энергией  $\Omega(\mathbf{k}) > \Omega_F$  совпадает с обычной частицей с импульсом  $\mathbf{k}$ , а квазичастица с импульсом  $\mathbf{k}$  и энергией  $\Omega(\mathbf{k}) < \Omega_F$  соответствует дырке с импульсом  $-\mathbf{k}$ . Вакуумная  $\psi$ -функция обычных частиц удовлетворяет уравнению

$$a(\mathbf{k}) |0\rangle = 0, \quad (30.57)$$



в то время как вакуумная  $\psi$ -функция квазичастиц удовлетворяет уравнению

$$\tilde{a}(\mathbf{k})|\tilde{0}\rangle = 0. \quad (30.58)$$

В отсутствие взаимодействия между частицами последняя совпадает с  $\psi$ -функцией основного состояния  $N$  обычных фермионов. Поскольку

$$\tilde{H}_0|\tilde{0}\rangle = \varepsilon_F|\tilde{0}\rangle \quad (30.59)$$

и

$$\tilde{H}_0\tilde{a}^+(\mathbf{k})|\tilde{0}\rangle = [\varepsilon_F + \tilde{\Omega}(\mathbf{k})]\tilde{a}^+(\mathbf{k})|\tilde{0}\rangle, \quad (30.60)$$

мы можем рассматривать  $\tilde{\Omega}(\mathbf{k})$  как энергию квазичастицы с импульсом  $\mathbf{k}$ . Среднее значение оператора числа исходных частиц

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}} a^+(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}} [1 - \tilde{a}^+(\mathbf{k})\tilde{a}(\mathbf{k})] + \sum_{\mathbf{k}} \tilde{a}^+(\mathbf{k})\tilde{a}(\mathbf{k}) \quad (30.61)$$

в состоянии, описываемом вакуумной  $\psi$ -функцией квазичастиц  $|\tilde{0}\rangle$ , совпадает, разумеется, с числом частиц:

$$\langle \tilde{0}|\hat{N}|\tilde{0}\rangle = \sum_{\mathbf{k}} 1 = N, \quad (30.62)$$

в то время как среднее значение оператора числа квазичастиц

$$\hat{N} = \sum_{\mathbf{k}} \tilde{a}^+(\mathbf{k})\tilde{a}(\mathbf{k}) \quad (30.63)$$

в том же состоянии равно нулю:

$$\langle \tilde{0}|\hat{N}|\tilde{0}\rangle = 0. \quad (30.64)$$

Как и в случае системы невзаимодействующих фермионов, гамильтониан системы слабо взаимодействующих фермионов удобно представить в таком виде, чтобы его собственные значения совпадали с энергией системы, отсчитываемой от энергии состояния, в котором все уровни энергии частиц вплоть до энергии  $\Omega_F$  заполнены:

$$\begin{aligned} H = & \sum_{\mathbf{k}} \sum_s [\Omega(k) - \Omega_F] a^+(\mathbf{k}, s) a(\mathbf{k}, s) + \\ & + \sum_{\mathbf{k}'''} \sum_{\mathbf{k}''} \sum_{\mathbf{k}'} \sum_{\mathbf{k}} \sum_{s'} \sum_s \langle \mathbf{k}'''\mathbf{k}'' | F | \mathbf{k}'\mathbf{k} \rangle \delta_{\mathbf{k}'''+\mathbf{k}'', \mathbf{k}'+\mathbf{k}} \times \\ & \times a^+(\mathbf{k}''', s) a^+(\mathbf{k}'', s') a(\mathbf{k}', s') a(\mathbf{k}, s). \end{aligned} \quad (30.65)$$

В этом выражении спиновые индексы выписаны в явном виде, причем взаимодействие между частицами предполагается независимым от спина.

Купер первый обратил внимание на то, что притяжение между частицами может привести к появлению особых корреляций между парами фермионов и изменить основное состояние системы так, что поверхность Ферми окажется размытой, и показал, что этот результат принципиально не может быть получен в рамках теории возмущений.

Справедливость качественной оценки Купера можно доказать строго, если, следуя Боголюбову, ввести операторы квазичастиц

$$\begin{aligned}\tilde{a}(\mathbf{k}, 1) &= u(\mathbf{k})a(\mathbf{k}, 1) - v(\mathbf{k})a^+(-\mathbf{k}, 2) \equiv \tilde{\alpha}(\mathbf{k}), \\ \tilde{a}(\mathbf{k}, 2) &= u(\mathbf{k})a(-\mathbf{k}, 2) + v(\mathbf{k})a^+(\mathbf{k}, 1) \equiv \tilde{\beta}(\mathbf{k}).\end{aligned}\quad (30.66)$$

Подобное преобразование является каноническим (см. Приложение 5), так как операторы  $\tilde{a}$  и  $\tilde{a}^+$  удовлетворяют обычным антикоммутиационным соотношениям для операторов фермионов

$$\{\tilde{a}(\mathbf{k}, s)\tilde{a}^+(\mathbf{k}', s')\} = \delta_{\mathbf{k}', \mathbf{k}}\delta_{s', s}; \quad \text{все другие } \{ \} = 0, \quad (30.67)$$

если коэффициенты  $u(\mathbf{k})$  и  $v(\mathbf{k})$  действительны и выбраны так, что удовлетворяют условиям

$$u(\mathbf{k}) = u(-\mathbf{k}), \quad v(\mathbf{k}) = v(-\mathbf{k}), \quad u^2(\mathbf{k}) + v^2(\mathbf{k}) = 1. \quad (30.68)$$

В частности, если

$$u(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases} \quad v(\mathbf{k}) = \begin{cases} 0 & \text{для } \Omega(k) > \Omega_F, \\ 1 & \text{для } \Omega(k) < \Omega_F, \end{cases} \quad (30.69)$$

то преобразование (30.66) сводится к преобразованию (30.53) для системы невзаимодействующих фермионов, а именно:

$$\begin{aligned}\tilde{a}(\mathbf{k}, 1) &= a(\mathbf{k}, 1), \quad \tilde{a}(\mathbf{k}, 2) = a(-\mathbf{k}, 2) \quad \text{для } \Omega(k) > \Omega_F, \\ \tilde{a}(\mathbf{k}, 1) &= -a^+(-\mathbf{k}, 2), \quad \tilde{a}(\mathbf{k}, 2) = a^+(\mathbf{k}, 1) \\ &\quad \text{для } \Omega(k) < \Omega_F.\end{aligned}\quad (30.70)$$

Таким образом, в этом случае можно рассматривать

$$\begin{aligned}\tilde{a}(\mathbf{k}, 1) &\text{ как оператор уничтожения } \left\{ \begin{array}{l} \text{частицы } (\mathbf{k}, 1) \text{ вне} \\ \text{дырки } (-\mathbf{k}, 2) \text{ внутри} \end{array} \right\} \text{ поверхности Ферми,} \\ \tilde{a}(\mathbf{k}, 2) &\text{ как оператор уничтожения } \left\{ \begin{array}{l} \text{частицы } (-\mathbf{k}, 2) \text{ вне} \\ \text{дырки } (\mathbf{k}, 1) \text{ внутри} \end{array} \right\} \text{ поверхности Ферми.}\end{aligned}$$

В общем случае, когда имеет место преобразование (30.66), оператор  $a$  является оператором рождения суперпозиции частицы и дырки.

Соотношения (30.66) можно разрешить относительно  $a(\mathbf{k}, 1)$  и  $a(-\mathbf{k}, 2)$ . При этом получим

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}, 1) &= u(\mathbf{k})\tilde{a}(\mathbf{k}, 1) + v(\mathbf{k})\tilde{a}^+(\mathbf{k}, 2) = u(\mathbf{k})\tilde{a}(\mathbf{k}) + v(\mathbf{k})\tilde{\beta}^+(\mathbf{k}), \\ a(-\mathbf{k}, 2) &= u(\mathbf{k})\tilde{a}(\mathbf{k}, 2) - v(\mathbf{k})\tilde{a}^+(\mathbf{k}, 1) = \\ &= u(\mathbf{k})\tilde{\beta}(\mathbf{k}) - v(\mathbf{k})\tilde{a}^+(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (30.71)$$

Используя свойства симметрии матричного элемента

$$\langle \mathbf{k}''\mathbf{k}'' | F | \mathbf{k}'\mathbf{k}' \rangle = \langle \mathbf{k}''\mathbf{k}''' | F | \mathbf{k}\mathbf{k}' \rangle = \langle -\mathbf{k}' - \mathbf{k} | F | -\mathbf{k}'' - \mathbf{k}'' \rangle \quad (30.72)$$

(последнее равенство следует из инвариантности относительно операции обращения времени) и подставляя выражения (30.71) в (30.65), путем соответствующего выбора коэффициентов  $u(\mathbf{k})$  и  $v(\mathbf{k})$  можно диагонализировать получающийся в результате такого преобразования гамильтониан, подобно тому как это сделано в аналогичной задаче для бозонов. Однако вычисления, которые при этом необходимо проделать, довольно громоздки, и поэтому за подробностями мы отсылаем читателя к работе Беляева [5].

Основной получающийся при этом результат состоит в подтверждении упомянутой выше теории Купера, носящей более качественный характер, и в том, что возникающий спектр возбуждений квазичастиц, как и в случае взаимодействующих бозонов, удовлетворяет установленному в гл. 11 критерию наличия явлений сверхпереноса.

Векторы основного и низших возбужденных состояний всей системы полезно представить с помощью вектора состояния вакуума и операторов рождения обычных частиц. Вектор состояния истинного вакуума определяется из уравнений

$$\begin{aligned} a(\mathbf{k}, s) | 0 \rangle &= 0, \quad \text{т. е.} \quad a(\mathbf{k}, 1) | 0 \rangle = \alpha(\mathbf{k}) | 0 \rangle = 0, \\ a(-\mathbf{k}, 2) | 0 \rangle &= \beta(\mathbf{k}) | 0 \rangle = 0, \end{aligned} \quad (30.73)$$

а вектор основного состояния («вакуум квазичастиц»)  $|\tilde{0}\rangle$  определяется из уравнений

$$\tilde{a}(\mathbf{k}, 1) |\tilde{0}\rangle = \tilde{\alpha}(\mathbf{k}) |\tilde{0}\rangle = 0, \quad \tilde{a}(\mathbf{k}, 2) |\tilde{0}\rangle = \tilde{\beta}(\mathbf{k}) |\tilde{0}\rangle = 0. \quad (30.74)$$

Уравнения (30.74) получаются из уравнений (30.73), если применить к последним унитарный оператор [см. выражение (П5.32)]

$$U_B = 1 - \sigma_0 [1 - u(\mathbf{k})] - i\sigma_2 v(\mathbf{k}), \quad (30.75)$$

где

$$\sigma_0 = 1 - \alpha^+ \alpha - \beta^+ \beta - 2\alpha^+ \alpha \beta^+ \beta, \quad \sigma_2 = i(\alpha^+ \beta^+ - \beta \alpha), \quad (30.76)$$

так что

$$\tilde{\alpha} = U_B \alpha U_B^+, \quad \tilde{\beta} = U_B \beta U_B^+, \quad |\tilde{0}\rangle = U_B |0\rangle, \quad (30.77)$$

$$\sigma_0 |0\rangle = |0\rangle, \quad \sigma_2 |0\rangle = i \alpha^+ \beta^+ |0\rangle, \quad (30.78)$$

откуда следует

$$|\tilde{0}\rangle = U_B |0\rangle = [u(\mathbf{k}) + v(\mathbf{k}) \alpha^+ \beta^+] |0\rangle, \quad (30.79)$$

или в общем случае

$$|\tilde{0}\rangle = \prod_{\mathbf{k}} [u(\mathbf{k}) + v(\mathbf{k}) a^+(\mathbf{k}, 1) a^+(-\mathbf{k}, 2)] |0\rangle. \quad (30.80)$$

Это выражение фактически является исходным в известной теории сверхпроводимости Бардина — Купера — Шриффера, в которой в соответствии с идеей Купера основное состояние рассматривается как содержащее коррелированные между собой пары электронов.

Метод построения векторов состояния, описывающих различные числа квазичастиц, аналогичен описанному выше: оператором  $U_B$  необходимо подействовать на вектор состояния соответствующего числа обычных частиц. Например, для данного  $\mathbf{k}$  имеем

$$|1_{\tilde{\alpha}(\mathbf{k})}\rangle = \tilde{\alpha}^+(\mathbf{k}) |\tilde{0}\rangle = U_B \alpha^+(\mathbf{k}) |0\rangle = U_B |1_{\alpha(\mathbf{k})}\rangle, \quad (30.81)$$

где

$$U_B = \prod_{\mathbf{k}'} \{1 - \sigma_0(\mathbf{k}') [1 - u(\mathbf{k}') - i \sigma_2(\mathbf{k}') v(\mathbf{k}')]\}. \quad (30.82)$$

Следует помнить, однако, что рассматриваемая в теории Бардина — Купера — Шриффера особая деформация распределения Ферми не является деформацией наиболее общего вида из тех, которые могут привести к понижению энергии всей системы по отношению к энергии состояния с недеформированным распределением Ферми. Используя самое общее преобразование, приведенное в Приложении 5, можно, например, рассмотреть нестационарные деформации, которые, по-видимому, могут привести к еще более эффективному уменьшению полной энергии системы. Такие более сложные квазичастичные возбуждения были рассмотрены Ландау в связи с теорией жидкого гелия-3; они, по-видимому, соответствуют колебаниям поверхности Ферми, известным как «пулевой звук». Во всяком случае, проблема взаимодействующих бозонов или фермионов еще далека от полного математического решения и представляет собой широкое поле для применения квантовомеханических представлений.

## ПРИМЕЧАНИЯ

Явление конденсации было открыто Эйнштейном [1] и теперь носит его имя. Возможная связь между перестановочной симметрией и макроскопическими свойствами жидкого гелия II была отмечена Лондоном [2]. На связь характеристической температуры эйнштейновской конденсации с несостоятельностью демона Максвелла при сортировке частиц в случае низких температур обратил внимание Кемпфер [3].

Теория систем слабо взаимодействующих бозонов была развита Боголюбовым [4] (см. также обзорную статью Беляева [5]). Теория слабо взаимодействующих фермионов была развита Боголюбовым и др. [6] (см. также работы Боголюбова [7] и Валатина [8]).

Окончательный вывод о невозможности учета корреляций между парами вблизи поверхности Ферми в рамках теории возмущений был сделан Купером [9]. Этот вывод лег в основу теории сверхпроводимости Бардина — Купера — Шриффера [10].

Теория ферми-жидкости была развита Ландау [11] (см. также обзорную статью Абрикосова и Халатникова [12]).

*Литература*

1. Einstein A., Berlin Ber., 22, 261 (1924).
2. London F., Phys. Rev., 54, 947 (1938).
3. Каемпфер F. A., Zs. Phys., 125, 395 (1948); 487 (1949).
4. Боголюбов Н. Н., Journ. Phys. USSR, 11, 23 (1947).
5. Beliaev S. T., в книге The Many Body Problem (C. de Witt, ed.), New York, 1959, p. 343.
6. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В., A New Method in the Theory of Superconductivity, Consultants Bureau, New York, 1959.
7. Боголюбов Н. Н., Nuovo Cimento, 7, 794 (1959).
8. Valatin J. G., Nuovo Cimento, 7, 843 (1958).
9. Cooper L. N., Phys. Rev., 104, 1189 (1956).
10. Bardeen J., Cooper L. N., Schrieffer J. R., Phys. Rev., 108, 1175 (1957).
11. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, 3, 920 (1957).
12. Абрикосов А. А., Халатников И. М., Rep. Progr. Phys., 22, 329 (1959).
- 13\*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1964.

## Собственные функции и собственные значения оператора момента количества движения

Проекции оператора момента количества движения, обозначаемые  $J_1, J_2, J_3$ , удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$J_1 J_2 - J_2 J_1 = i J_3 \quad (\text{с циклической перестановкой}) \quad (\text{П1.1})$$

и, следовательно, являются взаимно несовместимыми наблюдаемыми величинами. Оператор квадрата момента количества движения  $J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$  коммутирует со всеми проекциями  $J_k$ , например

$$\begin{aligned} J^2 J_3 - J_3 J^2 &= J_1^2 J_3 + J_2^2 J_3 - J_3 J_1^2 - J_3 J_2^2 = \\ &= J_1 (J_3 J_1 - i J_2) + J_2 (J_3 J_2 + i J_1) - (J_1 J_3 + i J_2) J_1 - \\ &\quad - (J_2 J_3 - i J_1) J_2 = 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.2})$$

Поэтому квадрат момента и одна из проекций момента могут иметь одновременно определенные значения. Найдем представление, в котором операторы  $J^2$  и  $J_3$  представляют собой диагональные матрицы.

Удобно ввести вспомогательные операторы

$$J_0 = J_1 + i J_2, \quad J_0^+ = J_1 - i J_2. \quad (\text{П1.3})$$

Как легко проверить, воспользовавшись соотношениями (П1.3) и (П1.1), они обладают следующими свойствами:

$$J_0 J_0^+ = J^2 + J_3 - J_3^2, \quad (\text{П1.4})$$

$$J_0^+ J_0 = J^2 - J_3 - J_3^2, \quad (\text{П1.5})$$

$$J_0^+ J_3 - J_3 J_0^+ = J_0^+, \quad (\text{П1.6})$$

$$J_0 J_3 - J_3 J_0 = -J_0. \quad (\text{П1.7})$$

Обозначим собственную функцию оператора  $J_3$ , отвечающую собственному значению  $m$ , через  $|, m\rangle$ , оставив место слева в

скобке для квантового числа, характеризующего величину  $J^2$  в этом состоянии, так что

$$J_3 |, m\rangle = m |, m\rangle. \quad (\text{П}1.8)$$

Если умножить это уравнение слева на  $J_0^+$

$$J_0^+ J_3 |, m\rangle = m J_0^+ |, m\rangle \quad (\text{П}1.9)$$

и учесть соотношение (П1.6), то получим

$$J_3 J_0^+ |, m\rangle = (m - 1) J_0^+ |, m\rangle. \quad (\text{П}1.10)$$

Таким образом, если  $|, m\rangle$  является собственной функцией оператора  $J_3$ , соответствующей собственному значению  $m$ , то  $J_0^+ |, m\rangle$  также есть собственная функция этого оператора, но соответствующая другому собственному значению  $(m-1)$ . Иными словами, состояние  $J_0^+ |, m\rangle$  с точностью до некоторого нормировочного множителя  $c$  совпадает с состоянием  $|, m-1\rangle$ :

$$J_0^+ |, m\rangle = c |, m-1\rangle. \quad (\text{П}1.11)$$

Аналогичным образом, умножая (П1.8) слева на  $J_0$  и используя (П1.7), получаем соотношение

$$J_3 J_0 |, m\rangle = (m + 1) J_0 |, m\rangle, \quad (\text{П}1.12)$$

которое позволяет считать (с точностью до нормировочного множителя  $d$ ), что состояние  $J_0 |, m\rangle$  совпадает с собственной функцией оператора  $J_3$ , имеющей собственное значение  $(m+1)$ :

$$J_0 |, m\rangle = d |, m+1\rangle. \quad (\text{П}1.13)$$

Таким образом, последовательное применение оператора  $J_0$  дает возрастающую последовательность собственных состояний  $|, m\rangle, |, m+1\rangle, \dots$ , в то время как применение оператора  $J_0^+$  приводит к убывающей последовательности  $|, m\rangle, |, m-1\rangle, \dots$ .

Каждая из этих последовательностей является ограниченной по следующей причине. Если  $|, m\rangle$  есть общая собственная функция операторов  $J_3$  и  $J^2$ , то как следствие соотношений (П1.4) и (П1.5) имеем

$$J_0 J_0^+ |, m\rangle = (J^2 + m - m^2) |, m\rangle \quad (\text{П}1.14)$$

и

$$J_0^+ J_0 |, m\rangle = (J^2 - m - m^2) |, m\rangle, \quad (\text{П}1.15)$$

где  $J^2$  может рассматриваться как число. Поскольку

$$\langle m | J_0 J_0^+ | m \rangle = \langle J_0^+ (, m) | J_0^+ (, m) \rangle = |c|^2 \langle m-1 | m-1 \rangle \geq 0, \quad (\text{П1.16})$$

причем это выражение равно нулю только в том случае, если

$$J_0^+ | m \rangle = c | m-1 \rangle = 0,$$

а также

$$\langle m | J_0^+ J_0 | m \rangle = \langle J_0 (, m) | J_0 (, m) \rangle = |d|^2 \langle m+1 | m+1 \rangle \geq 0, \quad (\text{П1.17})$$

причем знак равенства получается только тогда, когда

$$J_0 | m \rangle = d | m+1 \rangle = 0,$$

из уравнений (П1.14) и (П1.15) следует

$$J^2 + m - m^2 \geq 0, \quad (\text{П1.18})$$

$$J^2 - m - m^2 \geq 0. \quad (\text{П1.19})$$

Для данного значения  $J^2$  эти неравенства одновременно выполняются только в том случае, если убывающая последовательность обрывается при определенном значении  $m_{\text{мин}}$ , для которого

$$J^2 + m_{\text{мин}} - m_{\text{мин}}^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad m_{\text{мин}} = +\frac{1}{2} - \sqrt{J^2 + \frac{1}{4}} \quad \text{и} \\ |, m_{\text{мин}} - 1 \rangle = 0, \quad (\text{П1.20})$$

а возрастающая последовательность обрывается при  $m_{\text{макс}}$ , для которого

$$J^2 - m_{\text{макс}} - m_{\text{макс}}^2 = 0, \quad \text{т. е.} \quad m_{\text{макс}} = -\frac{1}{2} + \sqrt{J^2 + \frac{1}{4}} \quad \text{и} \\ |, m_{\text{макс}} + 1 \rangle = 0. \quad (\text{П1.21})$$

Поскольку  $m$  есть целое число, то разность между  $m_{\text{макс}}$  и  $m_{\text{мин}}$  также должна быть целым числом, положительным или равным нулю. Поэтому можно записать

$$m_{\text{макс}} - m_{\text{мин}} + 1 = 2 \sqrt{J^2 + \frac{1}{4}} = 2j + 1, \quad (\text{П1.22})$$



где  $j$  принимает только следующие значения:

$$j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots \quad (\text{П1.23})$$

Следовательно, возможные значения  $J^2$  равны

$$J^2 = j(j+1) \quad (\text{П1.24})$$

и для данного  $j$  число  $m$  может принимать  $(2j+1)$  значений, заключенных в интервале между

$$m_{\text{макс}} = +j \quad \text{и} \quad m_{\text{мин}} = -j. \quad (\text{П1.25})$$

Собственные функции операторов  $J^2$  и  $J_3$ , обозначаемые  $|j, m\rangle$ , удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle, \quad j = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \\ J_3 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, \quad m = -j, -j+1, \dots, +j, \end{aligned} \quad (\text{П1.26})$$

Если все функции  $|j, m\rangle$  нормированы, то множители  $c$  и  $d$  можно получить, возводя в квадрат (П1.11) и (П1.13). При этом получим

$$\begin{aligned} |c|^2 \langle j, m-1 | j, m-1 \rangle &= |c|^2 = \langle J_0^+ (j, m) | J_0^+ (j, m) \rangle = \\ &= J^2 + m - m^2 = j(j+1) - m(m-1), \end{aligned} \quad (\text{П1.27})$$

$$\begin{aligned} |d|^2 \langle j, m+1 | j, m+1 \rangle &= |d|^2 = \langle J_0^- (j, m) | J_0^- (j, m) \rangle = \\ &= J^2 - m - m^2 = j(j+1) - m(m+1). \end{aligned} \quad (\text{П1.28})$$

Поэтому уравнения (П1.11) и (П1.13) с точностью до произвольного фазового множителя можно переписать в виде

$$J_0^+ |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m-1)} |j, m-1\rangle, \quad (\text{П1.29})$$

$$J_0^- |j, m\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle. \quad (\text{П1.30})$$

Если  $\psi$ -функцию для данного значения  $j$  представить в виде единичного вектора, имеющего  $2j+1$  компоненту, то при обычном выборе фаз получим

$$|j, m=j\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |j, m=j-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{и т. д.} \quad (\text{П1.31})$$

Тогда, согласно (П1.29) и (П1.30), ненулевые матричные элементы операторов  $J_0^+$  и  $J_0$  для данного значения  $j$  равны

$$\begin{aligned} (J_0^+)_{m-1, m} &= \sqrt{j(j+1) - m(m-1)}, \\ (J_0)_{m+1, m} &= \sqrt{j(j+1) - m(m+1)}. \end{aligned} \quad (\text{П1.32})$$

В частности, для  $j = 1/2$  получаем

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad J_0^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ J_1 &= \frac{1}{2}(J_0^+ + J_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{i}{2}(J_0^+ - J_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ J_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J^2 = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (\text{П1.33})$$

а для  $j = 1$

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1, -1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ J_0^+ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ J_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ J_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J^2 = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П1.34})$$

Форма записи (П1.33) тождественна той, которая использована в гл. 1 и 2 для операторов спина и их  $\psi$ -функций, а именно:

$$\left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle = |a_+\rangle \quad \text{и} \quad \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = |a_-\rangle.$$

Если рассмотреть специальный случай *орбитального* момента  $\mathbf{L}$  частицы, координата и импульс которой равны  $\mathbf{Q}$  и  $\mathbf{P}$  соответственно, то при этом  $\mathbf{J} = \mathbf{L}$ , а  $\mathbf{L}$  в соответствии с (12.2) может

быть записано в виде

$$\mathbf{L} = [\mathbf{QP}]. \quad (\text{П1.35})$$

Переходя к координатному представлению, можно также получить уравнение (П1.26), но с одним отличием:  $j$  может принимать только целочисленные значения. Таким образом, любой момент количества движения, для которого  $j$  принимает полуцелые значения, должен быть, по крайней мере частично, обусловлен внутренним, или спиновым моментом, который нельзя записать в виде (П1.35).

Докажем это утверждение. Проще всего это сделать в координатном представлении, используя сферическую систему координат:

$$Q_1 = r \sin \theta \cos \varphi, \quad Q_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad Q_3 = r \cos \theta \quad (\text{П1.36})$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Q_1} &= \sin \theta \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \cos \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} - \sin \varphi \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial Q_2} &= \sin \theta \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} + \cos \theta \sin \varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \cos \varphi \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial}{\partial Q_3} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \sin \theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned} \quad (\text{П1.37})$$

Компоненты оператора момента количества движения можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_3 &= -i \frac{\partial}{\partial \varphi}, \\ L_0^+ &= L_1 - iL_2 = -e^{-i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} - i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L_0 &= L_1 + iL_2 = e^{i\varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} + i \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \right), \\ L^2 &= -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned} \quad (\text{П1.38})$$

Мы видим, что они не зависят явно от  $r$ . Поэтому целесообразно для данного значения орбитального момента  $j=l$  ввести  $\psi$ -функцию  $\langle \theta, \varphi | l, m \rangle$ , где  $|\theta, \varphi\rangle$  описывает состояние, в котором момент  $l$  ориентирован в направлении  $(\theta, \varphi)$ , и обозначить ее

$$Y_{l, m}(\theta, \varphi) = \langle \theta, \varphi | l, m \rangle. \quad (\text{П1.39})$$

Тогда

$$|\theta, \varphi\rangle = \sum_{l, m} |l, m\rangle \langle l, m | \theta, \varphi \rangle = \sum_{l, m} |l, m\rangle Y_{l, m}^*(\theta, \varphi) \quad (\text{П1.40})$$

и

$$|l, m\rangle = \int |\theta, \varphi\rangle d\Omega \langle \theta, \varphi | l, m\rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\theta, \varphi\rangle \sin \theta d\theta d\varphi Y_{l,m}(\theta, \varphi), \quad (\text{П1.41})$$

причем функции  $Y_{l,m}(\theta, \varphi)$  удовлетворяют условию нормировки

$$\langle l', m' | l, m\rangle = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{l',m'}^*(\theta, \varphi) Y_{l,m}(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (\text{П1.42})$$

Теперь уравнения (П1.26) можно записать как уравнения для собственных  $\psi$ -функций  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , если применить операторы (П1.38) к выражению (П1.41). Получаем

$$-i \frac{\partial}{\partial \varphi} Y_{l,m}(\theta, \varphi) = m Y_{l,m}(\theta, \varphi) \quad (\text{П1.43})$$

и

$$\left[ -\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{l,m}(\theta, \varphi) = l(l+1) Y_{l,m}(\theta, \varphi). \quad (\text{П1.44})$$

Из (П1.43) немедленно следует, что

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = F_{l,m}(\theta) e^{im\varphi}; \quad (\text{П1.45})$$

пока еще неопределенная функция  $F_{l,m}(\theta)$  в соответствии с (П1.44) должна удовлетворять условию

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial F_{l,m}}{\partial \theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] F_{l,m} = 0, \quad (\text{П1.46})$$

где

$$l \geq m \geq -l.$$

Если потребовать, чтобы решения  $F_{l,m}(\theta)$  для всех значений  $\theta$  в интервале  $0 \leq \theta \leq \pi$  были однозначными, конечными и дифференцируемыми, а также чтобы соблюдалось условие нормировки (П1.42)

$$\int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} |Y_{l,m}|^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi \int_{\theta=0}^{\pi} |F_{l,m}(\theta)|^2 \sin \theta d\theta = 1, \quad (\text{П1.47})$$

то общее решение уравнений (П1.43) и (П1.44) может быть записано в виде

$$\begin{aligned}
 Y_{l,m}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{2^l l!} \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} \frac{e^{im\varphi}}{\sin^m \theta} \times \\
 &\quad \times \underbrace{\left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left[ \dots \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin^{2l} \theta) \right] \right\}}_{\text{дифференцирование } l-m \text{ раз}} = \\
 &= \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \sim \\
 &\sim \sin^m \theta (\cos^{l-m} \theta + a \cos^{l-m-2} \theta + \dots) e^{im\varphi}, \quad (\text{П1.48})
 \end{aligned}$$

где  $l$  должно быть неотрицательным *целым числом*. Нецелые значения  $l$  не могут дать решений, удовлетворяющих всем указанным выше требованиям.

При  $l=0, l=1, l=2$  решения имеют вид

$$\begin{aligned}
 Y_{0,0}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \\
 Y_{1,1}(\theta, \varphi) &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\varphi}, \quad Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta, \\
 Y_{1,-1} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\varphi}, \\
 Y_{2,2} &= Y_{2,-2}^* = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\varphi}, \\
 Y_{2,1} &= Y_{2,-1}^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\varphi}, \\
 Y_{2,0} &= \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right).
 \end{aligned} \tag{П1.49}$$

Другое определение функции  $Y_{l,m}$ , часто встречающееся в литературе, отличается от принятого здесь на фазовый множитель; оно получается при умножении  $Y_{l,m}$  на  $(-1)^m$ , что дает

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}(\theta, \varphi). \tag{П1.50}$$

### ПРИМЕЧАНИЯ

Содержание данного приложения можно найти практически во всех учебниках квантовой механики. По этому вопросу имеются специальные монографии Эдмондса [1] Роуза [2] (см. также [3\*]. — *Ред.*).

### *Литература*

1. Edmonds A. R., Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton, New Jersey, 1957.
2. Rose M. E., The Elementary Theory of Angular Momentum, New York, 1957.
- 3\*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, М., 1963, гл. IV.

## Сложение двух моментов количества движения

Пусть заданы два оператора момента количества движения  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$ , каждый из которых удовлетворяет коммутационным соотношениям  $[\mathbf{J}_\alpha, \mathbf{J}_\alpha] = i\mathbf{J}_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ), так что существуют собственные функции  $|j_\alpha, m_\alpha\rangle$  операторов  $J_\alpha^2$  и  $J_{\alpha 3}$ , характеризующиеся собственными значениями

$$\begin{aligned} J_\alpha^2 |j_\alpha, m_\alpha\rangle &= j_\alpha(j_\alpha + 1)|j_\alpha, m_\alpha\rangle, & j_\alpha &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \\ J_{\alpha 3} |j_\alpha, m_\alpha\rangle &= m_\alpha |j_\alpha, m_\alpha\rangle, & j_\alpha &\geq m_\alpha \geq -j_\alpha \end{aligned} \quad (\text{П2.1})$$

( $\Delta m_\alpha$  — целое число).

Рассмотрим объект, оператор полного момента количества движения которого  $\mathbf{J}$  может быть представлен в виде векторной суммы операторов  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$  для двух частей, составляющих данный объект:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2, \quad (\text{П2.2})$$

так что  $\mathbf{J}$  удовлетворяет коммутационным соотношениям

$$[\mathbf{J}, \mathbf{J}] = i\mathbf{J}. \quad (\text{П2.3})$$

Тогда должны существовать собственные функции  $|j, m\rangle$  операторов  $J^2$  и  $J_3$ , обладающие следующими свойствами:

$$\begin{aligned} J^2 |j, m\rangle &= j(j + 1)|j, m\rangle, & j &= 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots, \\ J_3 |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, & j &\geq m \geq -j \end{aligned} \quad (\text{П2.4})$$

( $\Delta m$  — целое число).

Попытаемся теперь представить функцию  $|j, m\rangle$  в виде линейной комбинации прямых произведений  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ :

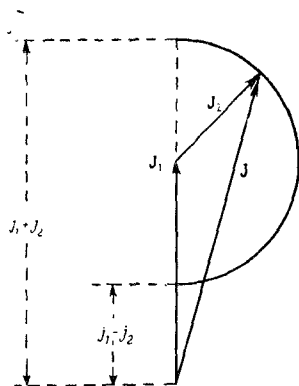
$$|j, m\rangle = \sum_{m_1 = -j_1}^{-j_1} \sum_{m_2 = -j_2}^{-j_2} C(j, j_1, j_2; m, m_1, m_2) |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle. \quad (\text{П2.5})$$

Коэффициенты  $C$  такого унитарного преобразования называются «коэффициентами Клебша — Гордана» или, реже, «коэффициентами Вигнера». Эта форма записи  $|j, m\rangle$  основывается на том факте, что имеет место вырождение состояний  $|j, m\rangle$  и  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$  по квантовым числам  $m$  и  $m_1, m_2$  соответственно. Таким образом, размерность пространства, отвечающего функции  $|j, m\rangle$ , такая же, как и размерность пространства, определяемого произведением функций  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$ .

Чтобы убедиться в этом, выберем моменты так, что  $j_1 \geq j_2$ . Полный момент  $j$  будет принимать любое из следующих значений:  $j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, j_1 - j_2 + 1, j_1 - j_2$ . Поскольку для каждого значения  $j$  степень вырождения составляет  $(2j + 1)$ , то суммарное вырождение, т. е. вырождение состояния  $|j, m\rangle$  по квантовому числу  $m$ , равно

$$\begin{aligned} & [2(j_1 + j_2) + 1] + [2(j_1 + j_2 - 1) + 1] + \dots \\ & \dots + [2(j_1 - j_2 + 1) + 1] + [2(j_1 - j_2) + 1] = \\ & = (2j_1 + 1)(\text{число скобок } [ \ ] ) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1), \quad (\text{П2.6}) \end{aligned}$$

что совпадает со степенью вырождения произведения состояний  $|j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle$  по квантовым числам  $m_1$  и  $m_2$ .



Фиг. 47. Векторное сложение двух моментов количества движения  $J_1$  и  $J_2$ .

Если заданы нормировочные множители и фазы  $\psi$ -функций  $|j_\alpha, m_\alpha\rangle$ , то коэффициенты  $C$  полностью определяются уравнениями (П2.4) и нормировкой  $|j, m\rangle$  с точностью до произвольного фазового множителя. Оказывается, что  $j_1$  и  $j_2$  складываются векторно (фиг. 47), в то время как  $m_1$  и  $m_2$  складываются



алгебраически, так что

$$m_1 = m - m_2, \quad (\text{П2.7})$$

и можно упростить выражение (П2.5), записав его в виде

$$|j, m\rangle = \sum_{m_1 = -j_1}^{-j_1} C(j, j_1, j_2; m_1, m - m_1) |j_1, m_1\rangle |j_2, m - m_1\rangle. \quad (\text{П2.8})$$

Для целей данной книги достаточно привести коэффициенты Клебша — Гордана, которые получаются при сложении момента  $j_2 = 1/2$  с произвольным моментом  $j_1$  (табл. 14) и момента  $j_2 = 1$  с произвольным моментом  $j_1$  (табл. 15).

Таблица 14

Четыре отличных от нуля коэффициента Клебша — Гордана

$$C\left(j, j_1, \frac{1}{2}; m, m_1, m_2\right)$$

	$m_1 = m - \frac{1}{2}$ $m_2 = \frac{1}{2}$	$m_1 = m + \frac{1}{2}$ $m_2 = -\frac{1}{2}$
$j = j_1 + \frac{1}{2}$	$\left(\frac{j_1 + m + \frac{1}{2}}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{j_1 - m + \frac{1}{2}}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$
$j = j_1 - \frac{1}{2}$	$-\left(\frac{j_1 - m + \frac{1}{2}}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$	$\left(\frac{j_1 + m + \frac{1}{2}}{2j_1 + 1}\right)^{1/2}$

Рассмотрим, например, объекты «1» и «2», каждый из которых имеет спин  $1/2$ . В соответствии с (П2.6) степень вырождения по квантовому числу  $m$  равна 4, а из (П2.8) и табл. 14 следует, что четыре спиновых состояния объекта, составленного из объектов «1» и «2», имеют вид

$$j=0: \quad |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 - \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2 \right), \quad (\text{П2.9})$$

$$j=1: \quad \left\{ \begin{array}{l} |1, 1\rangle = \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2, \\ |1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2 + \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle_2 \right), \\ |1, -1\rangle = \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_1 \left| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle_2. \end{array} \right.$$

Таблица 15  
 Девять отличных от нуля коэффициентов Клебша — Гордана  $S(j, l; m, m_1, m_2)$

	$m_1 = m-1$ $m_2 = 1$	$m_1 = m$ $m_2 = 0$	$m_1 = m+1$ $m_2 = -1$
$j = j_1 + 1$	$\left[ \frac{(j_1 + m)(j_1 + m + 1)^{1/2}}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(j_1 - m + 1)(j_1 + m + 1)^{1/2}}{(2j_1 + 1)(j_1 + 1)} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(j_1 - m)(j_1 - m + 1)^{1/2}}{(2j_1 + 1)(2j_1 + 2)} \right]^{1/2}$
$j = j_1$	$-\left[ \frac{(j_1 + m)(j_1 - m + 1)^{1/2}}{2j_1(j_1 + 1)} \right]^{1/2}$	$\frac{m}{[j_1(j_1 + 1)]^{1/2}}$	$\left[ \frac{(j_1 - m)(j_1 + m + 1)^{1/2}}{2j_1(j_1 + 1)} \right]^{1/2}$
$j = j_1 - 1$	$\left[ \frac{(j_1 - m)(j_1 - m + 1)^{1/2}}{2j_1(2j_1 + 1)} \right]^{1/2}$	$-\left[ \frac{(j_1 - m)(j_1 + m)^{1/2}}{j_1(2j_1 + 1)} \right]^{1/2}$	$\left[ \frac{(j_1 + m + 1)(j_1 + m)^{1/2}}{2j_1(2j_1 + 1)} \right]^{1/2}$

Важно подчеркнуть, что во всех случаях, когда значения  $j_1$  и  $j_2$  равны, следует указывать принадлежность каждого сомножителя в произведении состояний объекту «1» или «2». Это осуществляется введением нижних индексов  $| \rangle_1$  и  $| \rangle_2$ , на которые и действует оператор перестановки  $T_{12}$ , определенный в гл. 27.

Можно видеть, что синглетное состояние, отвечающее  $j=0$ , является антисимметричным собственным состоянием оператора  $T_{12}$ , а триплетные состояния с  $j=1$  представляют собой симметричные собственные состояния оператора  $T_{12}$ .

В качестве второго примера рассмотрим состояния, возникающие при сложении двух моментов  $j_1=1$  и  $j_2=1$ . В этом случае, используя соотношение (П2.8) и табл. 15, имеем

$$\begin{aligned}
 j=0: & |0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|1, 1\rangle_1|1, -1\rangle_2 - |1, 0\rangle_1|1, 0\rangle_2 + |1, -1\rangle_1|1, 1\rangle_2), \\
 j=1: & \left\{ \begin{aligned}
 |1, 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle_1|1, 0\rangle_2 - |1, 0\rangle_1|1, 1\rangle_2), \\
 |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle_1|1, -1\rangle_2 - |1, -1\rangle_1|1, 1\rangle_2), \\
 |1, -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle_1|1, -1\rangle_2 - |1, -1\rangle_1|1, 0\rangle_2),
 \end{aligned} \right. \quad (\text{П2.10}) \\
 j=2: & \left\{ \begin{aligned}
 |2, 2\rangle &= |1, 1\rangle_1|1, 1\rangle_2, \\
 |2, 1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 1\rangle_1|1, 0\rangle_2 + |1, 0\rangle_1|1, 1\rangle_2), \\
 |2, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{6}}(|1, 1\rangle_1|1, -1\rangle_2 + 2|1, 0\rangle_1|1, 0\rangle_2 + \\
 & \quad + |1, -1\rangle_1|1, 1\rangle_2), \\
 |2, -1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1, 0\rangle_1|1, -1\rangle_2 + |1, -1\rangle_1|1, 0\rangle_2), \\
 |2, -2\rangle &= |1, -1\rangle_1|1, -1\rangle_2.
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Вспоминая снова свойства преобразования спиновых состояний при применении оператора перестановки  $T_{12}$ , приходим к выводу: триплетные состояния, отвечающие  $j=1$ ; являются антисимметричными, а синглетное состояние с  $j=0$  и квинтет состояний с  $j=2$  являются симметричными.

#### ПРИМЕЧАНИЕ

Классический образец применения коэффициентов Клебша—Гордана имеется в книге Кондона и Шортли [1] (см. также [2\*]. — *Ред.*).

### ***Л и т е р а т у р а***

1. Condon E. U., Shortley G. H., Theory of Atomic Spectra, London and New York, 1957 (см. перевод 1-го изд.: Кондон Е., Шортли Г., Теория атомных спектров, ИЛ, 1949).
- 2\*. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Квантовая механика, М., 1963, гл. XIV.

## Векторные сферические функции

Положив в выражении (П2.5)  $j_1=l$  и  $j_2=s=1$ , мы найдем, что каждому значению  $j$  соответствует три состояния с разными орбитальными моментами количества движения:

$$|j, m; l, s=1\rangle = \sum_{m_l=+l}^{-l} \sum_{m_s=+1}^{-1} C(j, l, 1; m, m_l, m_s) |l, m_l\rangle |1, m_s\rangle, \quad (\text{П3.1})$$

где  $m=m_l+m_s$  отвечает трем различным значениям  $j=l+1$ ,  $l$ ,  $l-1$ , или  $l=j+1$ ,  $j$ ,  $j-1$ . Спиновые состояния с  $s=1$  могут быть описаны  $\psi$ -функциями, которые преобразуются как векторы, например собственные состояния  $s_3$  [см. выражение (18.68)]:  $\xi^1$ ,  $\xi^0$ ,  $\xi^{-1}$ . В то же время  $\psi$ -функции, отвечающие состояниям с определенным орбитальным моментом, могут быть представлены в виде сферических функций, зависящих от вектора  $\mathbf{n}$ , определяющего направление момента. Таким образом, полная  $\psi$ -функция, описывающая частицу со спином 1 и энергией  $\omega$ , должна быть линейной комбинацией трех векторных сферических функций:

$$\mathbf{Y}_{jlm}(\mathbf{n}) = \sum_{m_l=+l}^{-l} \sum_{m_s=+1}^{-1} C(j, l, 1; m, m_l, m_s) Y_{l, m_l}(\mathbf{n}) \xi^{m_s}, \quad m_l = m - m_s, \quad (\text{П3.2})$$

соответствующих трем возможным значениям  $l$ , а именно  $j+1$ ,  $j$ ,  $j-1$ , и поэтому может быть записана в виде

$$\mathbf{f}_{\omega jm}(\mathbf{n}) = \sum_{l=j-1}^{j+1} a_l(\omega) \mathbf{Y}_{jlm}(\mathbf{n}). \quad (\text{П3.3})$$

В случае фотонов на коэффициенты  $a_l(\omega)$  накладывается ограничение (18.72), связанное с поперечным характером их движения, которое здесь имеет вид

$$\mathbf{n} \mathbf{f}_{\omega jm}(\mathbf{n}) = 0. \quad (\text{П3.4})$$

Вектор  $\mathbf{n}$  может быть представлен своими компонентами  $n^\mu$ , определяемыми выражением

$$\mathbf{n} = \sum_{\mu=+1}^{-1} n^\mu \xi^\mu. \quad (\text{ПЗ.5})$$

Используя представления (18.68), находим, что компоненты  $n^\mu$ , выраженные через декартовы компоненты  $n_1 = \sin \theta \cos \varphi$ ,  $n_2 = \sin \theta \sin \varphi$ ,  $n_3 = \cos \theta$ , имеют вид

$$\begin{aligned} n^{+1} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 - in_2) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{-i\varphi}, \\ n^0 &= n_3 = \cos \theta, \\ n^{-1} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(n_1 + in_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta e^{i\varphi}. \end{aligned} \quad (\text{ПЗ.6})$$

Из трех векторов  $\mathbf{Y}_{jm}(\mathbf{n})$  можно образовать три линейно независимые комбинации (обозначим их  $\mathbf{Y}_{jm}^\lambda$ ,  $\lambda = +1, 0, -1$ ); из которых первые две — поперечны, т. е. удовлетворяют условию

$$\mathbf{n} \mathbf{Y}_{jm}^\lambda = 0 \quad \text{для } \lambda = +1, 0, \quad (\text{ПЗ.7})$$

а последняя является продольной, т. е. удовлетворяет условию

$$[\mathbf{n} \mathbf{Y}_{jm}^{-1}] = 0. \quad (\text{ПЗ.8})$$

Эти линейные комбинации, соответствующим образом нормированные, имеют следующий вид:

$$\mathbf{Y}_{jm}^{+1} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \mathbf{Y}_{j, j+1, m} + \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \mathbf{Y}_{j, j-1, m}, \quad (\text{ПЗ.9})$$

$$\mathbf{Y}_{jm}^0 = \mathbf{Y}_{j, j, m}, \quad (\text{ПЗ.10})$$

$$\mathbf{Y}_{jm}^{-1} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \mathbf{Y}_{j, j-1, m} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \mathbf{Y}_{j, j+1, m}. \quad (\text{ПЗ.11})$$

Решив эти уравнения относительно  $\mathbf{Y}_{j, l, m}$ , получим следующие разложения векторных сферических функций (ПЗ.2) на продольные и поперечные части:

$$\mathbf{Y}_{j, j+1, m} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (\sqrt{j} \mathbf{Y}_{jm}^{+1} - \sqrt{j+1} \mathbf{Y}_{jm}^{-1}), \quad (\text{ПЗ.12})$$

$$\mathbf{Y}_{j, j, m} = \mathbf{Y}_{jm}^0, \quad (\text{ПЗ.13})$$

$$\mathbf{Y}_{j, j-1, m} = \frac{1}{\sqrt{2j+1}} (\sqrt{j+1} \mathbf{Y}_{jm}^{+1} + \sqrt{j} \mathbf{Y}_{jm}^{-1}). \quad (\text{ПЗ.14})$$

Таким образом,  $\psi$ -функция, описывающая поперечный фотон с определенными значениями момента количества движения и

энергии, в общем случае будет линейной суперпозицией вида

$$\mathbf{f}_{jm} = a_1 \mathbf{Y}_{jm}^{+1} + a_0 \mathbf{Y}_{jm}^0, \quad (\text{П3.15})$$

где коэффициенты  $a_1$  и  $a_0$  удовлетворяют условию нормировки  $|a_1|^2 + |a_0|^2 = 1$  и зависят только от  $\omega$ :  $a_\lambda = a_\lambda(\omega)$ .

Произвол в выборе параметра  $\lambda$  устраняется, если потребовать, чтобы состояние фотона обладало определенной четностью. Из трансформационных свойств сферических функций  $Y_{l, m_l}(\mathbf{n})$  при инверсии координат

$$PY_{l, m_l}(\mathbf{n}) = (-1)^l Y_{l, m_l}(\mathbf{n}) = Y_{l, m_l}(-\mathbf{n}) \quad (\text{П3.16})$$

и векторной природы  $\xi$  в пространстве  $\mathbf{n}$

$$P\xi = -\xi \quad (\text{П3.17})$$

следует, что

$$PY_{jlm}(\mathbf{n}) = (-1)^{l+1} Y_{jlm}(\mathbf{n}) \quad (\text{П3.18})$$

и поперечная и продольная части преобразуются согласно

$$PY_{jm}^\lambda = (-1)^{j+1-\lambda} Y_{jm}^\lambda. \quad (\text{П3.19})$$

Поперечные фотонные состояния, отвечающие  $\lambda = +1$ , называются «электрическими мультипольными» состояниями и имеют четность  $(-1)^j$ , в то время как поперечные фотонные состояния с  $\lambda = 0$  носят название «магнитных мультипольных» состояний и обладают четностью  $(-1)^{j+1}$ . Состояния с  $j = 1, 2, 3$  и т. д. называются соответственно дипольным, квадрупольным, октупольным и т. д. Эта терминология возникла в связи с асимптотическим поведением соответствующих  $\psi$ -функций в координатном представлении, которое имеет сходство с поведением классических полей, создаваемых соответствующими мультиполями. Детали читатель может найти в литературе [1—3].

Легко заметить, что для  $j = 0$  существует только одна сферическая функция  $Y_{0, 1, 0} = -Y_{0, 0}^{-1}$ , которая является продольной. Это означает, что не существует ни одного поперечного фотонного состояния с полным моментом  $j$ , равным нулю.

Как показано в гл. 27, двухфотонные состояния отрицательной четности связаны с антисимметричными спиновыми состояниями (П2.10)  $|s=1; m_s\rangle$ , а состояния положительной четности отвечают симметричным спиновым состояниям  $|s=0, 2; m_s\rangle$ . Условие поперечности для каждого фотона накладывает следующие требования:

1) если спиновые состояния  $|s=1; m_s\rangle$  могут быть представлены с помощью векторной сферической функции, то эта функция должна быть продольной функцией  $\mathbf{Y}^{-1}$  и

2) состояния положительной четности должны представляться в виде линейных комбинаций спиновых состояний  $|s=0; 0\rangle$  и  $|s=2; m_s\rangle$ .

Поскольку векторы спина трехкомпонентны,  $\psi$ -функция описывающая состояние двух фотонов, может быть представлена тензором в спиновом пространстве, обозначаемым  $[f(\mathbf{x})]_{\alpha_1\alpha_2}$ , где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — спины отдельных фотонов, а  $\mathbf{x}$  — относительный импульс этих фотонов. В таких обозначениях условие поперечности для каждого фотона может быть записано в виде

$$(\mathbf{x})_{\alpha_1} [f(\mathbf{x})]_{\alpha_1\alpha_2} = [f(\mathbf{x})]_{\alpha_1\alpha_2} (\mathbf{x})_{\alpha_2} = 0. \quad (\text{ПЗ.20})$$

Для двухфотонного состояния отрицательной четности спиновые состояния антисимметричны. Это означает, что  $f_{\alpha_1\alpha_2}$  является антисимметричным тензором в трехмерном пространстве и поэтому может быть представлено в виде

$$f_{\alpha_1\alpha_2}^{\text{нечетн}} = \begin{pmatrix} 0 & A_3 & -A_2 \\ -A_3 & 0 & A_1 \\ A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ПЗ.21})$$

с аксиальным вектором  $\mathbf{A}$ , позволяющим записать условие поперечности в виде

$$[\mathbf{n}\mathbf{A}] = 0. \quad (\text{ПЗ.22})$$

Это означает, что вектор  $\mathbf{A}$ , описывающий антисимметричное спиновое состояние двух фотонов, должен быть продольным и поэтому для данных значений  $j$  и  $m$  в соответствии с (ПЗ.11)

$$\mathbf{A} = \mathbf{Y}_{jm}^{-1} = \sqrt{\frac{j}{2j+1}} \mathbf{Y}_{j, j-1, m} - \sqrt{\frac{j+1}{2j+1}} \mathbf{Y}_{j, j+1, m}. \quad (\text{ПЗ.23})$$

Эта функция имеет отрицательную четность только в том случае, когда  $j$  является четным числом. Следовательно, *двухфотонных состояний отрицательной четности не существует, если  $j$  — нечетное число*. Поэтому на языке правил отбора можно сказать, что частица, обладающая нечетным целочисленным моментом количества движения и отрицательной четностью, не может распасться на два фотона в соответствии с законами сохранения этих величин.

Для двухфотонных состояний положительной четности спиновые состояния являются симметричными. Это означает, что  $f_{\alpha_1\alpha_2}^{\text{четн}}$  — симметричный тензор в трехмерном пространстве, имеющий 6 линейно независимых компонент, соответствующих шести различным значениям  $l$ , которые возможны при данных  $j$  и  $m$ , а именно  $l=j, j\pm 1, j\pm 2$  для  $s=2$  и  $l=j$  для  $s=0$ . Поскольку,



однако, четность  $(-1)^l$  положительна, для четных значений  $j \geq 2$  могут существовать только четыре не равные нулю компоненты, а именно  $l=j, j \pm 2$  для  $s=2$  и  $l=j$  для  $s=0$ , в то время как для нечетных значений  $j \geq 3$  только две компоненты могут быть отличны от нуля, а именно  $l=j \pm 1$  для  $s=2$ . Особыми случаями являются значения  $j=0$ , когда существует только две компоненты, соответствующие  $l=2$  для  $s=2$  и  $l=0$  для  $s=0$ , и  $j=1$ , когда имеется только одна компонента, соответствующая  $l=2$  для  $s=2$ . Условие поперечности накладывает дополнительные ограничения. Для четных значений  $j \geq 2$  существует только два поперечных состояния, а для нечетных значений  $j \geq 3$  — только одно поперечное состояние. В особом случае  $j=0$  имеется только одно поперечное состояние, а для  $j=1$  не существует поперечных состояний.

Дальнейшие детали можно почерпнуть из работ [1—3].

### Л и т е р а т у р а

1. Ахнезер А. И., Берестецкий В. Б., Квантовая электродинамика, 2-е изд., М., 1959.
2. Blatt J. M., Weisskopf V. F., Theoretical Nuclear Physics, New York, 1952 (см. перевод: Блатт Дж., Вайскопф В., Теоретическая ядерная физика, ИЛ, 1954).
3. Rose M. E., Multipole Fields, New York, 1955 (см. перевод: Роуз М., Поля мультиполей, ИЛ, 1957).

## Инвариантность уравнения Дирака относительно преобразований Лоренца

Уравнение Дирака в импульсно-энергетическом представлении

$$(\gamma_4 \omega - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{k}) A = mA, \quad (\text{П4.1})$$

если ввести обозначения

$$A_\mu B_\mu = A_4 B_4 - \mathbf{AB}, \quad \omega = k_4, \quad (\text{П4.2})$$

может быть записано в виде

$$(\gamma_\nu k_\nu - m) A(k_\nu) = 0. \quad (\text{П4.3})$$

Потребуем, чтобы матрицы  $\gamma$  оставались одинаковыми во всех системах координат. Ковариантность уравнения Дирака означает, что если справедливо уравнение (П4.3), то должно также выполняться соотношение

$$(\gamma_\lambda k'_\lambda - m) A'(k'_\lambda) = 0. \quad (\text{П4.4})$$

Связь между  $A'(k'_\lambda)$  и  $A(k_\nu)$  устанавливается с помощью унитарного оператора  $U$  в пространстве спин — спиральность

$$A'(k'_\lambda) = UA(k_\nu), \quad A(k_\nu) = U^{-1}A'(k'_\lambda), \quad (\text{П4.5})$$

определяемого преобразованиями Лоренца

$$k'_\lambda = L_{\lambda\nu} k_\nu, \quad k_\nu = L_{\nu\lambda}^{-1} k'_\lambda, \quad (\text{П4.6})$$

которые оставляют выражение

$$k'_\lambda k'_\lambda = k_\nu k_\nu = m^2 \quad (\text{П4.7})$$

инвариантным. Отсюда следует, что

$$L_{\mu\lambda} L_{\nu\lambda} = \delta_{\mu\nu}, \quad L_{\mu\lambda} = L_{\lambda\mu}^{-1}, \quad L_{\mu\lambda} L_{\lambda\nu}^{-1} = \delta_{\mu\nu}. \quad (\text{П4.8})$$

Здесь введено обозначение

$$\delta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & \text{для } \mu = \nu = 1, 2, 3, \\ +1 & \text{для } \mu = \nu = 4, \\ 0 & \text{для остальных значений } \mu \text{ и } \nu, \end{cases} \quad (\text{П4.9})$$

так что  $A_\nu$  можно представить в виде  $A_\nu = A_\mu \delta_{\mu\nu}$ .

Запишем теперь уравнение (П4.3), используя соотношения (П4.4) и (П4.6) в виде

$$(\gamma_\nu L_{\nu\lambda}^{-1} k'_\lambda U^{-1} - m U^{-1}) A'(k'_\lambda) = 0, \quad (\text{П4.10})$$

т. е.

$$(L_{\lambda\nu} U \gamma_\nu U^{-1} k'_\lambda - m) A'(k'_\lambda) = 0.$$

Это уравнение совпадает с (П4.4) при условии, что

$$L_{\lambda\nu} U \gamma_\nu U^{-1} = \gamma_\lambda, \quad \text{или} \quad U^{-1} \gamma_\lambda U = L_{\lambda\nu} \gamma_\nu. \quad (\text{П4.11})$$

Последнее уравнение справедливо для *любых* преобразований Лоренца, в том числе для несобственных. Однако основной интерес представляют собственные преобразования Лоренца, для которых детерминант равен +1, а  $L_{44} > 0$ ; эти преобразования могут быть получены непрерывным образом из тождественного преобразования и не включают в себя преобразований, изменяющих знак энергии.

Рассмотрим теперь случай бесконечно малого преобразования

$$k'_\lambda = k_\lambda + \varepsilon_{\lambda\nu} k_\nu, \quad \text{где} \quad \varepsilon_{\lambda\nu} = -\varepsilon_{\nu\lambda}, \quad (\text{П4.12})$$

гарантирующего выполнение условия (П4.7). Имеем

$$L_{\lambda\nu} = \delta_{\lambda\nu} + \varepsilon_{\lambda\nu}$$

и

$$L_{\lambda\nu} L_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\nu} \delta_{\lambda\mu} + \delta_{\lambda\nu} \varepsilon_{\lambda\mu} + \delta_{\lambda\mu} \varepsilon_{\lambda\nu} = \delta_{\nu\mu} + \varepsilon_{\nu\mu} + \varepsilon_{\mu\nu} = \delta_{\nu\mu}. \quad (\text{П4.13})$$

Решение уравнения (П4.11) будем теперь искать, положив

$$U = I + \frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} M_{\mu\nu}, \quad \text{где} \quad M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}; \quad (\text{П4.14})$$

здесь  $M_{\mu\nu}$  является четырехрядной квадратной матрицей, характеризуемой парой индексов (т. е.  $M_{\mu\nu}$  не является матричным элементом). Очевидно, существует шесть независимых величин  $M_{\mu\nu}$ . Можно также записать

$$U = I + i \varepsilon_a S_a, \quad (\text{П4.15})$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 = \varepsilon_{23}, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{31}, \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{14}, \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_{24}, \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_{34}, \\ S_1 = M_{23}, \quad S_2 = M_{31}, \quad S_3 = M_{12}, \quad S_4 = M_{14}, \quad S_5 = M_{24}, \quad S_6 = M_{31}. \end{aligned} \quad (\text{П4.16})$$

Подставляя эти значения в уравнение (П4.11) и оставляя только члены, линейные по  $\varepsilon_{\mu\nu}$ , получаем

$$\frac{i}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\gamma_\lambda M_{\mu\nu} - M_{\mu\nu} \gamma_\lambda) = \varepsilon_{\lambda\nu} \gamma_\nu = \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu} (\delta_{\mu\lambda} \gamma_\nu - \delta_{\nu\lambda} \gamma_\mu). \quad (\text{П4.17})$$

Из последнего выражения видно, что с точностью до членов, коммутирующих со всеми  $\gamma_\lambda$ , величины  $M_{\mu\nu}$  должны удовлетворять уравнению

$$i(\gamma_\lambda M_{\mu\nu} - M_{\mu\nu} \gamma_\lambda) = \delta_{\mu\lambda} \gamma_\nu - \delta_{\nu\lambda} \gamma_\mu. \quad (\text{П4.18})$$

Решение, очевидно, имеет вид

$$M_{\mu\nu} = -\frac{i}{4}(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu) = \begin{cases} -\frac{i}{2} \gamma_\mu \gamma_\nu & \text{для } \mu \neq \nu, \\ 0 & \text{для } \mu = \nu. \end{cases} \quad (\text{П4.19})$$

Действительно,

$$\frac{1}{2}(\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda) = \frac{1}{2}(\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\nu - 2\delta_{\nu\lambda} \gamma_\mu) = \delta_{\mu\lambda} \gamma_\nu - \delta_{\nu\lambda} \gamma_\mu. \quad (\text{П4.20})$$

Коммутационные соотношения для  $M_{\mu\nu}$  теперь могут быть получены путем прямого вычисления:

$$[M_{\kappa\lambda}, M_{\mu\nu}] = i(\delta_{\kappa\mu} M_{\lambda\nu} + \delta_{\lambda\nu} M_{\kappa\mu} - \delta_{\lambda\mu} M_{\kappa\nu} - \delta_{\kappa\nu} M_{\lambda\mu}). \quad (\text{П4.21})$$

Записав (П4.21) в виде

$$[M_{\kappa\lambda}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2} C_{\kappa\lambda, \mu\nu, \rho\sigma} M_{\rho\sigma} \quad (\text{П4.22})$$

(множитель  $1/2$  необходим потому, что в суммах по  $\rho$  и  $\sigma$  каждый член учитывается дважды), получим для структурных коэффициентов  $C_{\kappa\lambda, \mu\nu, \rho\sigma}$  выражение

$$C_{\kappa\lambda, \mu\nu, \rho\sigma} = i(\delta_{\kappa\mu} \delta_{\rho\lambda} \delta_{\sigma\nu} + \delta_{\lambda\nu} \delta_{\rho\kappa} \delta_{\sigma\mu} - \delta_{\lambda\mu} \delta_{\rho\kappa} \delta_{\sigma\nu} - \delta_{\kappa\nu} \delta_{\rho\lambda} \delta_{\sigma\mu}). \quad (\text{П4.23})$$

Таким образом,

$$\text{Sp}(M_{\alpha\beta} M_{\gamma\delta}) = C_{\alpha\beta, \mu\nu, \rho\sigma} C_{\rho\sigma, \mu\nu, \gamma\delta} = 4(\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}). \quad (\text{П4.24})$$

### Л и т е р а т у р а

1. Pauli W., Die Allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik in книге Handbuch der Physik, Bd. V, 1, Berlin, 1958 (см. перевод издания 1933 г.: Паули В., Общие принципы волновой механики, М., 1947).

## Наиболее общее каноническое преобразование пары фермионных операторов

Любой оператор унитарного преобразования  $U$  может быть представлен в виде

$$U = e^{iS}, \quad S = S^\dagger, \quad (\text{П5.1})$$

так что произвольный оператор  $A$  преобразуется следующим образом:

$$\tilde{A} = e^{iS} A e^{-iS} = A + i[SA] + \frac{i^2}{2!} [S[SA]] + \dots \quad (\text{П5.2})$$

Рассмотрим теперь два фермионных оператора  $\alpha$  и  $\beta$ , которые вместе со своими эрмитово сопряженными операторами удовлетворяют антикоммутиационным соотношениям

$$\{\alpha^+ \alpha\} = I, \quad \{\beta^+ \beta\} = I, \quad \text{остальные } \{ \} = 0. \quad (\text{П5.3})$$

Для фермионов, которые полностью описываются импульсом  $\mathbf{k}$  и спином  $s$ , операторы  $\alpha$  и  $\beta$  могут быть, например, отождествлены с операторами уничтожения  $a(\mathbf{k}_1, s_1)$  и  $a(\mathbf{k}_2, s_2)$  при условии, что состояния  $(\mathbf{k}_1, s_1)$  и  $(\mathbf{k}_2, s_2)$  не являются идентичными. Антикоммутиационные свойства операторов  $\alpha$  и  $\beta$  позволяют образовать не более восьми следующих линейно независимых произведений четного порядка из операторов  $\alpha, \alpha^+, \beta, \beta^+$ , а именно:

$$I, \quad \mu^+ = \alpha^+ \beta^+, \quad \mu = \beta \alpha, \quad \nu^+ = \alpha^+ \beta, \quad \nu = \beta^+ \alpha, \\ n_\alpha = \alpha^+ \alpha, \quad n_\beta = \beta^+ \beta, \quad \rho = \alpha^+ \beta^+ \alpha \beta = -n_\alpha n_\beta = -\mu^+ \mu = \nu^+ \nu - n_\beta. \quad (\text{П5.4})$$

Составленные таким образом произведения операторов коммутируют с любыми другими такими же произведениями, образованными из операторов  $\alpha', \beta'$ , которые отвечают другим фермионным состояниям  $(\mathbf{k}', s')$ . Поэтому наиболее общий эрмитов оператор  $S$ , гарантирующий, что различные операторы  $U, U'$ , которые отвечают разным состояниям  $(\mathbf{k}, s), (\mathbf{k}', s')$ , коммутируют, имеет вид

$$S = c_0 + c_1 \mu^+ + c_2 \mu + c_3 \nu^+ + c_4 \nu + c_5 n_\alpha + c_6 n_\beta + c_7 \rho, \quad (\text{П5.5})$$

где коэффициенты  $c_i$  должны удовлетворять некоторым условиям, возникающим из-за того, что должно выполняться соотношение  $S^+ = S$ , как это требует (П5.1).

Это представление можно упростить, если ввести новые линейные комбинации. Это упрощение вытекает из следующей *теоремы Коппе и Мюльшлегеля*.

Пусть оператор  $A$  подчиняется условиям

$$A^2 = 0 \quad \text{и} \quad AA^+A = A. \quad (\text{П5.6})$$

Тогда операторы

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= A^+ + A, & \Sigma_2 &= i(A^+ - A), & \Sigma_3 &= AA^+ - A^+A, \\ \Sigma_0 &= A^+A + AA^+ \end{aligned} \quad (\text{П5.7})$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} \Sigma_i \Sigma_j &= i \Sigma_k \quad (\text{с циклической перестановкой } i, j, k), \\ \Sigma_i^2 &= \Sigma_0, & \Sigma_i \Sigma_0 &= \Sigma_0 \Sigma_i = \Sigma_i, & \Sigma_0^2 &= \Sigma_0. \end{aligned} \quad (\text{П5.8})$$

Операторы (П5.7) являются поэтому *изоморфными* по отношению к матрицам Паули и к единичной матрице. Заметим, однако, что оператор  $\Sigma_0$  не обязательно должен совпадать с единичным оператором  $I$ .

Исходные условия этой теоремы удовлетворяются при  $A = \mu$  и  $A = v$ . Поэтому следующие наборы операторов *в отдельности* удовлетворяют соотношениям (П5.8):

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mu^+ + \mu, \\ \sigma_2 &= i(\mu^+ - \mu), \\ \sigma_3 &= \mu\mu^+ - \mu^+\mu = I - n_\alpha - n_\beta, \\ \sigma_0 &= \mu^+\mu + \mu\mu^+ = I - n_\alpha - n_\beta + 2n_\alpha n_\beta; \end{aligned} \quad (\text{П5.9})$$

$$\begin{aligned} \tau_1 &= v^+ + v, \\ \tau_2 &= i(v^+ - v), \\ \tau_3 &= vv^+ - v^+v = n_\beta - n_\alpha, \\ \tau_0 &= v^+v + vv^+ = n_\alpha + n_\beta - 2n_\alpha n_\beta. \end{aligned} \quad (\text{П5.10})$$

Кроме того, имеем

$$\sigma_0 + \tau_0 = I, \quad \sigma_0 \tau_0 = \tau_0 \sigma_0 = 0. \quad (\text{П5.11})$$

Поэтому, учитывая соотношения (П5.8), получаем, что *все произведения операторов  $\sigma$  и  $\tau$  равны нулю*.

Таким образом, унитарный оператор имеет следующий наиболее общий вид:

$$U = e^{it_0\tau_0} e^{it\tau} e^{is_0\sigma_0} e^{is\sigma}, \quad (\text{П5.12})$$

где  $(t_0, t, s_0, s)$  — восемь действительных коэффициентов.

Коммутационные соотношения между операторами  $\sigma, \tau$  и выражения для различных произведений операторов  $\alpha, \beta, \alpha^+, \beta^+$  позволяют просуммировать в замкнутой форме ряд (П5.2) для различных преобразований. Затратив некоторые усилия, мы получим, например, следующие общие формулы преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} = & A_s A_t (D + 2iCn_\beta) \alpha - A_s B_t (D + 2iCn_\alpha) \beta - \\ & - B_s A_t (D^* - 2iCn_\alpha) \beta^+ - B_s B_t (D^* - 2iCn_\beta) \alpha^+, \end{aligned} \quad (\text{П5.13})$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} = & A_s B_t^* (D + 2iCn_\beta) \alpha + A_s A_t^* (D + 2iCn_\alpha) \beta - \\ & - B_s B_t^* (D^* - 2iCn_\alpha) \beta^+ + B_s A_t^* (D^* - 2iCn_\beta) \alpha^+, \end{aligned} \quad (\text{П5.14})$$

где

$$A_s = \cos |s| + \frac{is_3}{|s|} \sin |s| = A_{-s}^*, \quad (\text{П5.15})$$

$$B_s = i \frac{s_1 + is_2}{|s|} \sin |s| = -B_{-s}, \quad (\text{П5.16})$$

$$C = C(s_0 - t_0) = \sin(t_0 - s_0) = -C(t_0 - s_0), \quad (\text{П5.17})$$

$$D = D(s_0 - t_0) = e^{i(s_0 - t_0)} = D^*(t_0 - s_0). \quad (\text{П5.18})$$

Преобразование Боголюбова [см. гл. 30, выражения (30.66)] содержится в выражениях (П5.13) и (П5.14) как частный случай. Положив  $t=0, t_0=0, s_0=0, s_1=s_3=0$  и оставив только  $s_2 \neq 0$ , получим, что  $A_s = \cos(s_2), A_t = 1, B_s = -\sin(s_2), B_t = 0, C = 0, D = 1$ ; поэтому

$$\tilde{\alpha} = \cos(s_2) \alpha + \sin(s_2) \beta^+, \quad (\text{П5.19})$$

$$\tilde{\beta} = \cos(s_2) \beta - \sin(s_2) \alpha^+. \quad (\text{П5.20})$$

Полученное преобразование совпадает с преобразованием Боголюбова, если положить

$$\begin{aligned} \alpha &= a(\mathbf{k}, 1), & \beta &= a(-\mathbf{k}, 2), \\ u(\mathbf{k}) &= \cos(s_2), & v(\mathbf{k}) &= -\sin(s_2). \end{aligned} \quad (\text{П5.21})$$

При этом необходимо учитывать, что  $s_2$  зависит от  $|\mathbf{k}|$  только таким образом, что при этом удовлетворяются соотношения (30.68).

Другой частный случай, содержащийся в преобразованиях (П5.13) и (П5.14), представляет собой оператор (27.49) замены индексов частицы. Условия, сводящие эти преобразования к виду

$$\tilde{\alpha} = \beta \quad \text{и} \quad \tilde{\beta} = \alpha, \quad (\text{П5.22})$$

очевидно, имеют вид

$$\begin{aligned} C = 0, \quad D = 1, \quad B_s = 0, \quad A_t = 0, \\ -A_s B_t = A_s B_t^* = 1, \quad \text{или} \quad A_s = B_t = i. \end{aligned} \quad (\text{П5.23})$$

Последние соотношения будут выполняться, если положить

$$s_0 = t_0 = \pi, \quad s_1 = s_2 = 0, \quad s_3 = \frac{\pi}{2}, \quad t_1 = \frac{\pi}{2}, \quad t_2 = t_3 = 0. \quad (\text{П5.24})$$

Тогда, используя соотношения (П5.9) — (П5.11), получаем

$$\begin{aligned} U &= e^{i\pi\tau_0} e^{i\frac{\pi}{2}\tau_1} e^{i\pi\sigma_0} e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_3} = e^{i\pi(\tau_0 + \sigma_0)} e^{i\frac{\pi}{2}\tau_1} e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_3} = \\ &= -i \exp\left[i\frac{\pi}{2}(\alpha^+ \beta + \beta^+ \alpha)\right] \exp\left[i\frac{\pi}{2}(I - n_\alpha - n_\beta)\right], \end{aligned} \quad (\text{П5.25})$$

что совпадает с выражением для оператора  $T_{12}$  (27.50), если положить

$$a(1) = \alpha \quad \text{и} \quad a(2) = \beta. \quad (\text{П5.26})$$

Часто требуется иметь явное выражение для оператора  $U$ , которое можно найти, используя соотношения

$$\begin{aligned} (\mathbf{s}\sigma)^2 &= s^2\sigma_0, \quad \sigma_0\sigma = \sigma, \quad \sigma_0^2 = \sigma_0, \\ (\mathbf{t}\tau)^2 &= t^2\tau_0, \quad \tau_0\tau = \tau, \quad \tau_0^2 = \tau_0. \end{aligned} \quad (\text{П5.27})$$

Имеем

$$\begin{aligned} e^{i\mathbf{s}\sigma} &= 1 + \frac{i^2}{2!} s^2\sigma_0 + \frac{i^4}{4!} s^4\sigma_0 + \dots + i(\mathbf{s}\sigma) + \frac{i^3}{3!} s^2(\mathbf{s}\sigma) + \dots = \\ &= 1 - \sigma_0(1 - \cos|\mathbf{s}|) + i\frac{\mathbf{s}\sigma}{|\mathbf{s}|} \sin|\mathbf{s}| \end{aligned} \quad (\text{П5.28})$$

и

$$e^{i\mathbf{s}_0\sigma_0} = 1 + i\mathbf{s}_0\sigma_0 + \frac{i^2}{2!} s_0^2\sigma_0 + \dots = 1 - \sigma_0(1 - e^{i\mathbf{s}_0}), \quad (\text{П5.29})$$

а также совершенно аналогичные выражения для  $e^{i\mathbf{t}\tau}$  и  $e^{i\mathbf{t}_0\tau_0}$ , поэтому

$$\begin{aligned} U &= [1 - \tau_0(1 - e^{i\mathbf{t}_0})] \left[ 1 - \tau_0(1 - \cos|\mathbf{t}|) + i\frac{\mathbf{t}\tau}{|\mathbf{t}|} \sin|\mathbf{t}| \right] \times \\ &\times [1 - \sigma_0(1 - e^{i\mathbf{s}_0})] \left[ 1 - \sigma_0(1 - \cos|\mathbf{s}|) + i\frac{\mathbf{s}\sigma}{|\mathbf{s}|} \sin|\mathbf{s}| \right]. \end{aligned} \quad (\text{П5.30})$$



Преобразование Боголюбова получается отсюда как частный случай, если положить

$$-\sin(s_2) = v(k), \quad \cos(s_2) = u(k), \quad (\text{П5.31})$$

а все остальные величины  $s, t$  принять равными нулю:

$$U_B = 1 - \sigma_0 [1 - u(k)] - i\sigma_2 v(k). \quad (\text{П5.32})$$

### *Л и т е р а т у р а*

1. Корре Н., Mühlischlegel В., Zs. Phys., **151**, 613 (1958) (см. перевод в сборнике «Теория сверхпроводимости», ИЛ, 1960).

## Дельта-функция и ее применение

Дельта-функция  $\delta(\alpha)$  скалярного аргумента  $\alpha$  определяется как интеграл

$$\delta(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha t} dt. \quad (\text{П6.1})$$

Для наглядности (фиг. 48) ее можно представить в виде предела

$$\delta(\alpha) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^{+T} e^{i\alpha t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\sin(\alpha T)}{\pi \alpha}. \quad (\text{П6.2})$$

Дельта-функция обладает следующими свойствами:

$$g(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\alpha') \delta(\alpha - \alpha') d\alpha' \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\alpha) d\alpha = 1. \quad (\text{П6.3})$$

Ее можно представить также в виде (фиг. 49)

$$\delta(\alpha) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \left| \int_{-T/2}^{+T/2} e^{i\alpha t} dt \right|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{T}{2\pi} \left[ \frac{\sin(\alpha T/2)}{(\alpha T/2)} \right]^2. \quad (\text{П6.4})$$

Сравнивая выражения (П6.4) и (П6.2), получаем соотношение

$$[\delta(\alpha)]^2 = \frac{1}{2\pi} \delta(\alpha) \int_{-\infty}^{+\infty} dt. \quad (\text{П6.5})$$

Для 4-вектора  $P$   $\delta$ -функция определяется аналогичным образом:

$$\delta(P) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{iPx} d^4x = \delta(\mathbf{P}) \delta(P_0). \quad (\text{П6.6})$$

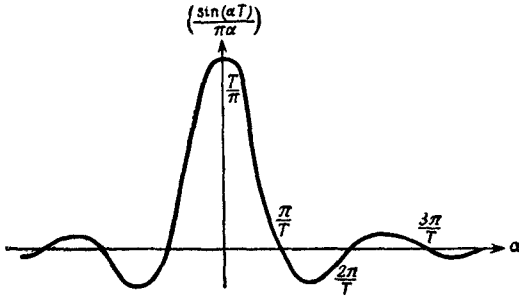
Кроме того, нетрудно показать, что

$$[\delta(P)]^2 = \frac{1}{(2\pi)^4} \delta(P) \int d^4x. \quad (\text{П6.7})$$

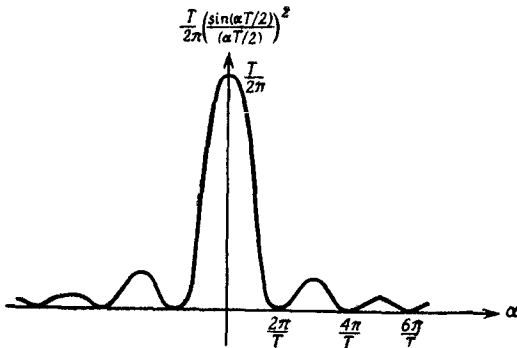
Использование  $\delta$ -функции особенно упрощает вычисления, если применить следующую общую формулу, где аргументом  $\delta$ -функции является произвольная функция  $f(\alpha)$ :

$$\delta[f(\alpha)] = \frac{\sum_r [\delta(\alpha - \alpha_r)]}{|df/d\alpha|}. \quad (\text{П6.8})$$

Здесь  $\alpha_r$  — простые корни уравнения  $f(\alpha) = 0$  в интервале изменения переменной  $\alpha$ .



Ф и г. 48. Функция  $\frac{\sin(\alpha T)}{\pi\alpha}$  для больших  $T$ .



Ф и г. 49. Функция  $\frac{T}{2\pi} \left( \frac{\sin(\alpha T/2)}{\alpha T/2} \right)^2$  для больших  $T$ .

Чтобы доказать эту формулу, разобьем интервал интегрирования на малые участки, в каждом из которых находится лишь один корень уравнения  $f(\alpha) = 0$ . Для произвольного корня  $\alpha_r$  выберем такой участок в пределах  $\alpha_r - \epsilon_r < \alpha < \alpha_r + \epsilon_r$ . Тогда, используя тот факт, что по определению  $f(\alpha_r) = 0$ , а  $f'(\alpha_r) \neq 0$ ,

поскольку  $\alpha_r$  является простым корнем, внутри выбранного участка имеем следующее разложение:

$$f(\alpha) = f(\alpha_r + \varepsilon) = f'(\alpha_r)\varepsilon + \frac{1}{2!}f''(\alpha_r)\varepsilon^2 + \dots \quad (\text{П6.9})$$

Таким образом, мы получаем

$$\int_{\alpha_r - \varepsilon_r}^{\alpha_r + \varepsilon_r} g(\alpha) \delta[f(\alpha)] d\alpha = \int_{-f'(\alpha_r)\varepsilon_r + \dots}^{+f'(\alpha_r)\varepsilon_r + \dots} g(\alpha) \frac{\delta(f) df}{df/d\alpha} =$$

$$= \begin{cases} \frac{g(\alpha_r)}{f'(\alpha_r)} & \text{для } f'(\alpha_r) > 0, \\ -\frac{g(\alpha_r)}{f'(\alpha_r)} & \text{для } f'(\alpha_r) < 0. \end{cases} = \frac{g(\alpha_r)}{|f'(\alpha_r)|}. \quad (\text{П6.10})$$

Суммируя по  $r$ , мы приходим к формуле (П6.8). В выражении (П6.10)  $\varepsilon_r$  выбирается таким образом, что знаки пределов интегрирования определяются членом, линейным по  $\varepsilon_r$ .

Если взять, например,  $f(\alpha) = \alpha^2 - c^2$ , так что имеются два корня уравнения  $f(\alpha) = 0$ ,  $\alpha = \pm c$ , то для этого частного случая получим

$$\delta(\alpha^2 - c^2) = \frac{1}{2|c|} [\delta(\alpha - c) + \delta(\alpha + c)]. \quad (\text{П6.11})$$

В качестве примера применения  $\delta$ -функции рассмотрим эффект Комптона. Будем описывать его в лабораторной системе координат, в которой в начальный момент имеются фотон с энергией  $\omega = |\boldsymbol{\kappa}|$  и покоящийся электрон ( $\mathbf{k} = 0$ ,  $\Omega = m$ ). Нормируем состояния одной частицы к единице объема  $V$ . Тогда  $w_{\tau'\tau}V$  будет представлять собой вероятность перехода в единицу времени, отнесенную к одному рассеивающему центру, где  $w_{\tau'\tau}$  определяется выражением (23.22). Интенсивность  $I$  фотонов, падающих на единицу площади в единицу времени, равна числу фотонов в единице объема (а именно  $1/V$  при выбранной выше нормировке), умноженному на скорость света (равную единице в естественной системе единиц), т. е.  $I = 1/V$ . Следовательно, сечение рассеяния на одном рассеивающем центре в фиксированное конечное состояние  $\tau'$  равно

$$w_{\tau'\tau} \frac{V}{I} = w_{\tau'\tau} V^2.$$

В любом реальном эксперименте чаще выделяется не одно фиксированное конечное состояние  $\tau'$ , а целый ряд конечных состояний с конечными импульсами электрона и фотона, лежащими в интервалах между  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}' + d\mathbf{k}'$  и  $\boldsymbol{\kappa}'$  и  $\boldsymbol{\kappa}' + d\boldsymbol{\kappa}'$  соответственно. Число таких состояний с определенным значением

спина и данной поляризацией фотона равно  $1$ )

$$dN = \frac{V^2}{(2\pi)^6} d\mathbf{k}' d\mathbf{x}'. \quad (\text{П6.12})$$

Следовательно, сечение рассеяния на одном рассеивающем центре в единицу времени в указанный интервал конечных состояний равно

$$d\sigma = w_{\tau'\tau} V^2 dN. \quad (\text{П6.13})$$

Если регистрирующая аппаратура детектирует только фотоны, рассеиваемые в телесный угол  $dS$  в направлении  $(\theta, \varphi)$ , то (П6.13) нужно проинтегрировать по  $d\mathbf{k}'$  и  $d\omega'$ , полагая  $\theta$  и  $\varphi$  постоянными. Поскольку  $d\mathbf{x}' = \omega'^2 d\omega' dS$ , находим, что дифференциальное сечение рассеяния фотонов в телесный угол  $dS$  одним рассеивающим центром составляет

$$\sigma dS = \frac{V^4 dS}{(2\pi)^6} \int \int w_{\tau'\tau} d\mathbf{k}' \omega'^2 d\omega'. \quad (\text{П6.14})$$

Так как выражение для  $w_{\tau'\tau}$  содержит  $\delta$ -функцию  $\delta(P' - P) = \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{x}' - \mathbf{x})$ , интегрирование по  $d\mathbf{k}'$  можно выполнить немедленно, проведя в соответствии с законом сохранения импульса замену

$$\mathbf{k}' = \mathbf{x} - \mathbf{x}'. \quad (\text{П6.15})$$

Как следствие этого, энергии  $\Omega, \Omega', \omega, \omega'$ , входящие в остающуюся часть  $\delta$ -функции

$$\delta(P'_0 - P_0) = \delta(\Omega' + \omega' - \Omega - \omega),$$

становятся взаимозависимыми. Это необходимо учитывать в дальнейшем при интегрировании по  $d\omega'$ . Введя обозначение

$$\Omega' + \omega' - \Omega - \omega = f(\omega') \quad (\text{П6.16})$$

и используя соотношение (П6.8), можно преобразовать выражение (П6.14), к следующему виду:

$$\begin{aligned} \sigma dS &= \frac{V^4 dS}{(2\pi)^{10}} \int \frac{|\langle \tau' | R | \tau \rangle|^2 \omega'^2 \delta(\omega' - \omega'_r) d\omega'}{|df(\omega')/d\omega'|} = \\ &= \frac{V^4 dS}{(2\pi)^{10}} \left( \frac{|\langle \tau' | R | \tau \rangle|^2 \omega'^2}{|df(\omega')/d\omega'|} \right)_{\omega' = \omega'_r}. \end{aligned} \quad (\text{П6.17})$$

<sup>1</sup>) Если  $V$  куб с линейным размером  $L$ , то возможные значения  $\mathbf{k}$  равны  $k_i = n_i(2\pi/L)$ , где  $n_i$  — целое число. Полное число таких целых чисел, которые соответствуют векторам  $\mathbf{k}$ , лежащим между значениями  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k} + d\mathbf{k}$ , составляет  $(L/2\pi)^3 dk_1 dk_2 dk_3 = [V/(2\pi)^3] d\mathbf{k}$ . Следовательно, любая сумма  $(1/V) \sum_{\mathbf{k}} \dots$  в пределе  $V \rightarrow \infty$  может быть заменена интегралом  $[1/(2\pi)^3] \int \dots d\mathbf{k}$ .

„Резонансное значение“  $\omega'_r$  величины  $\omega'$  находится из уравнения

$$\begin{aligned} [f(\omega')]_{\omega'=\omega'_r} &= \Omega' + \omega'_r - \Omega - \omega = \sqrt{m^2 + k'^2} + \omega'_r - m - \omega = \\ &= \sqrt{m^2 + \omega^2 + \omega_r'^2 - 2\omega\omega'_r \cos \theta} + \omega'_r - m - \omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{П6.18})$$

где  $\theta$  — угол рассеяния, составленный векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$ , причем  $k'^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2 = x^2 + x'^2 - 2xx' \cos \theta = \omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos \theta$ . В результате получаем

$$\omega'_r = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos \theta)}, \quad (\text{П6.19})$$

а также

$$\left| \frac{df(\omega')}{d\omega'} \right|_{\omega'=\omega'_r} = \left( \frac{\omega' - \omega \cos \theta}{\sqrt{m^2 + \omega^2 + \omega_r'^2 - 2\omega\omega'_r \cos \theta}} + 1 \right)_{\omega'=\omega'_r} = \frac{m\omega}{\Omega'_r \omega'_r}, \quad (\text{П6.20})$$

где  $\Omega'_r$  — энергия рассеянного электрона при резонансе:

$$\Omega'_r = (\sqrt{m^2 + k'^2})_{\omega'=\omega'_r} = \sqrt{m^2 + \omega^2 + \omega_r'^2 - 2\omega\omega'_r \cos \theta}. \quad (\text{П6.21})$$

Таким образом, окончательно выражение для дифференциального сечения рассеяния (П6.17) можно записать в виде

$$\sigma dS = \frac{V^4 dS}{(2\pi)^{10}} |\langle \tau' | R | \tau \rangle|^2 \frac{\omega_r'^3 \Omega_r'}{m\omega}. \quad (\text{П6.22})$$

При этом надо помнить, что матричный элемент оценивается по резонансному значению (П6.19) и (П6.21) для энергий в конечном состоянии при условии сохранения импульса (П6.15).

Наконец, если мишень и падающий пучок фотонов не поляризованы и если не измерять поляризации рассеянных электронов и фотонов, то полученное дифференциальное сечение рассеяния нужно усреднить по начальным спинам и направлениям поляризации и просуммировать по конечным спинам и направлениям поляризации. Это приводит к выражению

$$\langle \sigma dS \rangle_{\text{cp}} = \frac{1}{4} \sum_{r=1}^2 \sum_{S=1}^2 \sum_{r'=1}^2 \sum_{S'=1}^2 \sigma dS. \quad (\text{П6.23})$$

В этой форме записи не фигурируют никакие другие фотоны, кроме поперечных.

**ПРИМЕЧАНИЯ**

Дирак [1] ввел в физику  $\delta$ -функцию. Для более детального ознакомления со свойствами  $\delta$ -функций следует обратиться к книге Иваненко и Соколова [2].

Полное исследование эффекта Комптона проведено, например, в монографии Мандла [3].

***Литература***

1. Dirac P. A. M., Quantum Mechanics, 4th ed., London and New York, 1958, § 15 (см. перевод: Дирак П. А. М., Принципы квантовой механики, М., 1960).
2. Иваненко Д. Д., Соколов А. А., Классическая теория поля, М., 1951, гл. 1.
3. Mandl F., Introduction to Quantum Field Theory, New York, 1959, Ch. 15.

## Если бы Галилей знал квантовую механику

По-видимому, Галилей заинтересовался бы трансформационными свойствами зависящей от времени  $\psi$ -функции  $\Psi(\mathbf{q}, t)$ , описывающей движение свободной частицы массы  $m$  и удовлетворяющей уравнению

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial t} - \frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi = 0, \quad \mathbf{V} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \quad (\text{П7.1})$$

при общем преобразовании типа

$$\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q}' = R\mathbf{q} + \mathbf{V}t + \mathbf{a}, \quad t \rightarrow t' = t + b, \quad (\text{П7.2})$$

носящем его имя. В этом выражении  $R$  — постоянная ортогональная матрица, описывающая пространственное вращение,  $\mathbf{V}$  — постоянный вектор, отвечающий собственно преобразованию Галилея,  $\mathbf{a}$  — постоянный вектор сдвига начала координат в пространстве и, наконец,  $b$  — постоянная, характеризующая сдвиг начала отсчета времени.

Обозначая набор постоянных  $(R, \mathbf{V}, \mathbf{a}, b)$  через  $G$ , мы можем представить преобразование (П7.2) при помощи унитарного оператора  $U(G)$ , так что с точностью до некоторого фазового множителя  $|\mathbf{q}(t)'\rangle = U(G)|\mathbf{q}(t)\rangle = |\mathbf{q}'(t')\rangle$  описывает преобразованное состояние. Соответственно преобразованное состояние может быть охарактеризовано  $\psi$ -функцией  $\Psi'(\mathbf{q}, t)$ , которая отличается от непреобразованной  $\psi$ -функции, взятой в преобразованной точке, не более чем на фазовый множитель:

$$\Psi'(\mathbf{q}, t) = e^{if(\mathbf{q}', t')} \Psi(\mathbf{q}', t'). \quad (\text{П7.3})$$

Инвариантность по отношению к преобразованию Галилея означает, что  $\Psi'$  и  $\Psi$  должны удовлетворять одному и тому же уравнению Шредингера. Поэтому

$$i \frac{\partial \Psi'}{\partial t} - \frac{1}{2m} \nabla^2 \Psi' = 0. \quad (\text{П7.4})$$

Это уравнение накладывает определенные ограничения на фазовый множитель  $f$ . Используя соотношения, следующие из



(П7.2), и свойство ортогональности матрицы  $R$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'} + \mathbf{V}\mathbf{V}', \quad \mathbf{V} = R\mathbf{V}', \quad \text{так что } \nabla^2 = \nabla'^2, \quad (\text{П7.5})$$

и подставляя (П7.3) в (П7.4), можно найти

$$\left[ -\frac{\partial f}{\partial t'} - \mathbf{V}\mathbf{V}'f + \frac{1}{2m}(\mathbf{V}'f)^2 - \frac{i}{2m}\nabla'^2 f \right] e^{i\mathbf{V}'\Psi} + \\ + i\left(\mathbf{V} - \frac{1}{m}\mathbf{V}'f\right) e^{i\mathbf{V}'\Psi} + \left(i\frac{\partial\Psi}{\partial t'} - \frac{1}{2m}\nabla'^2\Psi\right) e^{i\mathbf{V}'\Psi} = 0. \quad (\text{П7.6})$$

Последний член равен нулю, если выполняется уравнение Шредингера (П7.1), которое должно быть справедливым при любых  $\mathbf{q}$  и  $t$ , и поскольку  $\Psi$  и  $\nabla'\Psi$  линейно независимы, получаем два условия:

$$\nabla'f = m\mathbf{V}, \quad (\text{П7.7})$$

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = -\mathbf{V}\mathbf{V}'f + \frac{1}{2m}(\mathbf{V}'f)^2 - \frac{i}{2m}\nabla'^2 f. \quad (\text{П7.8})$$

Подставляя (П7.7) в (П7.8) и учитывая, что  $\mathbf{V}$  — постоянный вектор, имеем

$$\frac{\partial f}{\partial t'} = -\frac{mV^2}{2}. \quad (\text{П7.9})$$

Уравнения (П7.7) и (П7.9) легко проинтегрировать и получить

$$f(\mathbf{q}', t') = m\mathbf{V}\mathbf{q}' - \frac{1}{2}mV^2t' + C, \quad (\text{П7.10})$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Из этого результата следует существенный вывод, состоящий в том, что фаза  $f$  не может быть, вообще говоря, исключена каким специальным выбором постоянной  $C$ . Это приводит к глубокому следствию, впервые сформулированному Баргманом:

*Не существует нерелятивистских квантовомеханических состояний, которые описываются линейными суперпозициями  $\psi$ -функций, отвечающих частицам различных масс. Это означает, что в нерелятивистской квантовой механике нельзя описывать состояния, в которых имеется спектр масс, или состояния, отвечающие нестабильным элементарным частицам<sup>1)</sup>.*

<sup>1)</sup> Нужно заметить, однако, что в нерелятивистской квантовой механике, где отсутствует прямая связь между массой и энергией, едва ли можно ставить в соответствие нестабильной частице суперпозицию состояний с разными массами; самый смысл этой суперпозиции представляется крайне неясным. — *Прим. ред.*

Чтобы показать это, рассмотрим линейную суперпозицию  $\psi$ -функций

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad (\text{П7.11})$$

где  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  преобразуются следующим образом [для простоты постоянная  $C$  в выражении (П7.10) для фазы положена равной нулю]:

$$\Psi'_\alpha(\mathbf{q}, t) = \exp \left[ im_\alpha \left( \mathbf{V}\mathbf{q}' - \frac{1}{2} V^2 t' \right) \right] \Psi_\alpha(\mathbf{q}', t'), \quad \alpha = 1, 2. \quad (\text{П7.12})$$

Теперь проведем следующее преобразование, равнозначное тождественному:

$$G_I = G_4 G_3 G_2 G_1 = (I, -\mathbf{V}, 0, 0)(I, 0, -\mathbf{a}, 0)(I, \mathbf{V}, 0, 0)(I, 0, \mathbf{a}, 0) = \\ = (I, 0, 0, 0), \quad (\text{П7.13})$$

которое соответствует такой последовательности координат и скоростей:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_4 = \mathbf{q}, \quad \mathbf{q}_3 = \mathbf{q} + \mathbf{V}t, \quad \mathbf{q}_2 = \mathbf{q} + \mathbf{V}t + \mathbf{a}, \quad \mathbf{q}_1 = \mathbf{q} + \mathbf{a}, \\ t_4 = t, \quad t_3 = t, \quad t_2 = t, \quad t_1 = t, \quad (\text{П7.14}) \\ \mathbf{V}_4 = -\mathbf{V}, \quad \mathbf{V}_3 = 0, \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}, \quad \mathbf{V}_1 = 0. \end{aligned}$$

Это дает для каждого значения  $m_\alpha$  сумму фаз

$$m_\alpha \sum_{j=1}^4 \left( \mathbf{V}_j \mathbf{q}_j - \frac{1}{2} V_j^2 t_j \right) = m_\alpha [\mathbf{V}(\mathbf{q}_2 - \mathbf{q}_4) - V^2 t] = m_\alpha \mathbf{V}\mathbf{a}. \quad (\text{П7.15})$$

Преобразованная  $\psi$ -функция имеет вид

$$\Psi^T = U(G_I) \Psi = e^{im_1 \mathbf{V}\mathbf{a}} \Psi_1 + e^{im_2 \mathbf{V}\mathbf{a}} \Psi_2. \quad (\text{П7.16})$$

Это означает, что преобразование, равнозначное тождественному, может влиять на норму суперпозиции (П7.11). Другими словами, относительная фаза  $\psi$ -функций, описывающих частицы с разными массами, является полностью неопределенной, если удовлетворяется принцип инвариантности Галилея. Чтобы избежать непоследовательности, мы должны заключить, что суперпозиция вида (П7.11) не имеет смысла и что не существует операторов, которые отвечают переходам между состояниями с разными массами  $m_1$  и  $m_2$ . Таким образом, *существует правило суперотбора, которое гарантирует, что масса частицы в нерелятивистской квантовой механике имеет строго фиксированное значение.*

Надо отметить, что в релятивистской квантовой механике такой вывод несправедлив<sup>1)</sup>. Рассмотрим, например, уравнение, которому удовлетворяет  $\psi$ -функция, описывающая частицу со спином, равным нулю:

$$\square^2\psi - m^2\psi = 0. \quad (\text{П7.17})$$

Это уравнение инвариантно по отношению к преобразованию Лоренца

$$x \rightarrow x' = Lx + u, \quad (\text{П7.18})$$

где  $L$  — постоянная матрица Лоренца, а  $u$  — постоянный 4-вектор. Потребовав, чтобы  $\psi$ -функция

$$\psi'(x) = e^{ig(x')} \psi(x') \quad (\text{П7.19})$$

удовлетворяла такому же уравнению

$$\square'^2\psi' - m^2\psi' = 0, \quad (\text{П7.20})$$

получим, поскольку

$$\square = L \square', \text{ так что } \square^2 = \square'^2, \quad (\text{П7.21})$$

уравнение

$$(i \square'^2 g - \square' g \square' g) e^{ig} \psi + 2i \square' g \square' \psi e^{ig} + (\square'^2 \psi - m^2 \psi) e^{ig} = 0. \quad (\text{П7.22})$$

Последний член равен нулю, если учесть (П7.17). Поэтому имеем два условия:

$$\square' g = 0, \quad i \square'^2 g - \square' g \square' g = 0, \quad (\text{П7.23})$$

<sup>1)</sup> Может возникнуть вопрос о причине такого разрыва между выводами нерелятивистской и релятивистской теорий, первая из которых является предельным (при  $c \rightarrow \infty$ ) случаем второй. Дело в том, что, совершая этот предельный переход, нужно дополнительно сдвинуть начало отсчета энергии на величину  $mc^2$ . Соответственно в фазе (П7.10) появится дополнительно слагаемое  $mc^2 \Delta t$ , где  $\Delta t$  — приращение времени при рассматриваемом преобразовании. В нерелятивистской механике эту величину следует положить строго равной нулю, поскольку  $\Delta t = 0$ . Однако при предельном переходе из релятивистской теории возникает неопределенность типа  $0 \cdot \infty$ . Раскрывая ее с помощью преобразований Лоренца, легко убедиться в том, что возникающее выражение в точности компенсирует фазу, входящую в (П7.10). Если использовать шуточную форму, в которой автор резюмирует содержание этого приложения, то можно сказать, что, зная квантовую механику, Галилей не только пришел бы к теореме Баргмана, но, потребовав однозначности представлений своей группы, убедился бы в определенной незамкнутости нерелятивистской механики и подошел бы к идее относительности времени. — *Прим ред.*

из которых следует

$$g = \text{const.} \quad (\text{П}7.24)$$

Пожалуй, здесь полезно провести альтернативное рассмотрение преобразования Галилея в импульсно-энергетическом представлении, в котором свободная частица с импульсом  $\mathbf{k}$  и энергией  $\omega$  описывается  $\psi$ -функцией:

$$\Phi(\mathbf{k}, \omega) = \int e^{i(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{q})} \Psi(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} dt, \quad (\text{П}7.25)$$

удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$\left(\omega - \frac{k^2}{2m}\right) \Phi(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (\text{П}7.26)$$

Преобразованная  $\psi$ -функция тогда имеет вид

$$\Phi'(\mathbf{k}, \omega) = \int e^{i(\omega' t' - \mathbf{k}'\mathbf{q}')} \Psi'(\mathbf{q}', t') d\mathbf{q}' dt'. \quad (\text{П}7.27)$$

Используя соотношение

$$\mathbf{q} = R^{-1}(\mathbf{q}' - \mathbf{V}t' + \mathbf{V}b - \mathbf{a}), \quad t = t' - b, \quad (\text{П}7.28)$$

и формулы преобразования (П7.3) и (П7.10), подынтегральную функцию можно записать таким образом, чтобы она зависела только от преобразованных координат  $\mathbf{q}'$  и  $t'$ :

$$\begin{aligned} \Phi'(\mathbf{k}, \omega) = \int \exp \left\{ i \left[ \omega(t' - b) - \mathbf{k}R^{-1}(\mathbf{q}' - \mathbf{V}t' + \mathbf{V}b - \mathbf{a}) + \right. \right. \\ \left. \left. + m\mathbf{V}\mathbf{q}' - \frac{1}{2} mV^2 t' + C \right] \right\} \Psi(\mathbf{q}', t') d\mathbf{q}' dt'. \end{aligned} \quad (\text{П}7.29)$$

Вынося члены, не содержащие  $\mathbf{q}'$ ,  $t'$ , из под интеграла, опуская штрихи в переменных интегрирования и используя ортогональность  $R$  (т. е. записав  $\mathbf{k}R^{-1}\mathbf{a} = R\mathbf{k}\mathbf{a}$ ), получаем

$$\begin{aligned} \Phi'(\mathbf{k}, \omega) = \exp [i(-\omega b + R\mathbf{k}\mathbf{a} - bR\mathbf{k}\mathbf{V} + C)] \times \\ \times \int \exp [i(\omega' t' - \mathbf{k}'\mathbf{q}')] \Psi(\mathbf{q}', t') d\mathbf{q}' dt', \end{aligned} \quad (\text{П}7.30)$$

где

$$\omega' = \omega + \mathbf{V}R\mathbf{k} + \frac{1}{2} mV^2, \quad \mathbf{k}' = R\mathbf{k} + m\mathbf{V}. \quad (\text{П}7.31)$$

Величины  $\omega'$  и  $\mathbf{k}'$  мы можем назвать преобразованными энергией и импульсом, поскольку они удовлетворяют соотношению

$$\omega'^2 - \frac{k'^2}{2m} = \omega^2 - \frac{k^2}{2m}. \quad (\text{П}7.32)$$

Выражая  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  через  $\omega'$  и  $\mathbf{k}'$ :

$$\omega = \omega' - \mathbf{V}\mathbf{k}' + \frac{1}{2}mV^2, \quad \mathbf{k} = R^{-1}(\mathbf{k}' - m\mathbf{V}), \quad (\text{П7.33})$$

можно записать формулу преобразования (П7.30) в следующем виде:

$$\Phi'(\mathbf{k}, \omega) = \exp\left[i\left(\frac{b}{2}mV^2 - m\mathbf{V}\mathbf{a} + C\right)\right] \exp[i(-b\omega' + \mathbf{a}\mathbf{k}')] \Phi(\mathbf{k}', \omega'). \quad (\text{П7.34})$$

Как и в случае координатного представления, фазовые множители не могут быть целиком исключены с помощью соответствующего выбора постоянной  $C$ . Последовательность преобразований (П7.13), соответствующих

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_4 = \mathbf{k}, \quad \mathbf{k}_3 = \mathbf{k} + m\mathbf{V}, \quad \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} + m\mathbf{V}, \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}, \\ \mathbf{a}_4 = 0, \quad \mathbf{a}_3 = -\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_2 = 0, \quad \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}, \quad (\text{П7.35}) \\ b_4 = 0, \quad b_3 = 0, \quad b_2 = 0, \quad b_1 = 0, \end{aligned}$$

дает снова для каждого значения  $m_\alpha$  изменение фазы

$$\sum_j \mathbf{a}_j \mathbf{k}_j = \mathbf{a}_1 \mathbf{k}_1 + \mathbf{a}_3 \mathbf{k}_3 = -m_\alpha \mathbf{a} \mathbf{V}, \quad (\text{П7.36})$$

вновь приводящее к правилу суперотбора Баргмана.

Представление для генератора  $\mathbf{u}$  чисто галилеевского преобразования характеризуется параметром  $\mathbf{V}$ , так что в импульсно-энергетическом представлении

$$|\mathbf{k}, \omega\rangle^T = |\mathbf{k}', \omega'\rangle = U(\mathbf{V})|\mathbf{k}, \omega\rangle = e^{i\mathbf{V}\mathbf{u}}|\mathbf{k}, \omega\rangle \quad (\text{П7.37})$$

можно получить в соответствии с (П7.31):

$$\mathbf{k}' = \langle \mathbf{k}', \omega' | \mathbf{P} | \mathbf{k}', \omega' \rangle = \langle \mathbf{k}, \omega | \mathbf{P} | \mathbf{k}, \omega \rangle + m\mathbf{V} = \mathbf{k} + m\mathbf{V} \quad (\text{П7.38})$$

и

$$\begin{aligned} \omega' = \langle \mathbf{k}', \omega' | H | \mathbf{k}', \omega' \rangle = \langle \mathbf{k}, \omega | H | \mathbf{k}, \omega \rangle + \langle \mathbf{k}, \omega | \mathbf{V}\mathbf{P} | \mathbf{k}, \omega \rangle + \\ + \frac{1}{2}mV^2 = \omega + \mathbf{V}\mathbf{k} + \frac{1}{2}mV^2. \quad (\text{П7.39}) \end{aligned}$$

Используя разложения

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{V}\mathbf{u}}\mathbf{P}e^{i\mathbf{V}\mathbf{u}} = \mathbf{P} - i(\mathbf{V}[\mathbf{u}]\mathbf{P}) + \dots, \\ e^{-i\mathbf{V}\mathbf{u}}He^{i\mathbf{V}\mathbf{u}} = H - i(\mathbf{V}[\mathbf{u}]H) + \frac{i^2}{2!}(\mathbf{V}[\mathbf{u}](\mathbf{V}[\mathbf{u}]H)) - \dots, \quad (\text{П7.40}) \end{aligned}$$

получаем следующие условия:

$$-i(\mathbf{V}[\mathbf{u}]\mathbf{P}) = m\mathbf{V}, \quad (\text{П7.41})$$

$$-i(\mathbf{V}[\mathbf{u}]H) = \mathbf{V}\mathbf{P}, \quad -\frac{i}{2}(\mathbf{V}[\mathbf{u}](\mathbf{V}\mathbf{P})) = \frac{1}{2}mV^2. \quad (\text{П7.42})$$

Последнее из уравнений (П7.42) тождественно выполняется, если справедливо уравнение (П7.41). Неизвестный оператор  $\mathbf{u}$  подчиняется коммутационным соотношениям

$$[u_j P_k] = im \delta_{jk}, \quad [\mathbf{u} H] = i\mathbf{P}, \quad (\text{П7.43})$$

которым можно удовлетворить, если положить

$$\mathbf{u} = im \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} + i\mathbf{P} \frac{\partial}{\partial H}. \quad (\text{П7.44})$$

Таким образом, наиболее общий вид преобразования Галилея связан со следующими десятью операторами:

$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} = [\mathbf{Q}\mathbf{P}] + \mathbf{S} = -i \left[ \mathbf{P} \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} \right] + \mathbf{S}$  — оператор полного момента количества движения, отвечающий вращениям  $R$ ;

$\mathbf{u} = im \frac{\partial}{\partial \mathbf{P}} + i\mathbf{P} \frac{\partial}{\partial H}$  — оператор, идентифицируемый как оператор координаты  $\mathbf{Q} = m\mathbf{u}$  и отвечающий собственно галилеевскому преобразованию  $\mathbf{V}$ ;

$\mathbf{P}$  — оператор импульса, отвечающий смещению в пространстве на отрезок  $\mathbf{a}$ ;

$H$  — оператор энергии, отвечающий сдвигу начала отсчета по временной шкале на  $b$ .

Эти операторы удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} [J_1 J_2] &= iJ_3^1), & [J_1, u_2] &= iu_3^1), \\ [J_1 P_2] &= iP_3^1), & [u_j u_k] &= 0, \\ [u_j P_k] &= im \delta_{jk}, & [J_k H] &= 0, \\ [P_j P_k] &= 0, & [u_k H] &= iP_k, \\ & & [P_k H] &= 0, \\ & & [HH] &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П7.45})$$

Интересно отметить, что алгебра, порожденная преобразованиями Галилея, имеет две инвариантные величины:

$$P^2 - 2mH = 2mE \quad \text{и} \quad (m\mathbf{J} - [\mathbf{u}\mathbf{P}])^2 = m^2 S^2 = m^2 s(s+1), \quad (\text{П7.46})$$

где  $E$  и  $S$  можно интерпретировать как *внутреннюю* энергию и *внутренний* момент количества движения рассматриваемой частицы. С этой точки зрения становится очевидной допустимость нерелятивистской квантовой механики частиц с массой  $m=0$ , которые характеризуются двумя инвариантными величинами:  $P^2$  и  $[\mathbf{u}\mathbf{P}]^2$ , где  $\mathbf{u} = i\mathbf{P}(\partial/\partial H)$ . Дальнейшие детали этого интересного аспекта инвариантности по отношению к преобразованиям Галилея можно найти в литературе [1—4].

<sup>1)</sup> С циклической перестановкой индексов.

### *Литература*

1. Bargmann V., Ann. Math., **59**, 1 (1954).
2. Wightman A. S., Nuovo Cimento Suppl., **14**, 86 (1959).
3. Hamermesh M., Ann. Phys., N. Y., **9**, 518 (1960).
4. Levy-Leblond J. M., Journ. Math. Phys., **4**, 776 (1963).

*Ф. Кемпфер*

**ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ  
КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ**

Редактор *Н. Л. ТЕЛЕСНИН*

Художник *В. П. Заикин*

Художественный редактор *П. Ф. Некунде*

Технический редактор *Е. С. Потаниenkova*

Сдано в производство 1/VI 1967 г.

Подписано к печати 6/XII 1967 г.

Бумага тип. № 2. 60×90<sup>1/16</sup>. 12,25 бум. л.  
24,5 печ. л.

Уч.-изд. л. 20,32 Изд. № 2/3970

Цена 1 р. 60 к. Зак. 746

Темплан изд-ва «Мир» 1967 г. пор. № 41.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»**

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой

Главполиграфпрома Комитета по печати

при Совете Министров СССР.

Измайловский проспект, 29.