

М. КЕНДАЛЛ, П. МОРАН

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Перевод с английского
Р. В. АМБАРЦУМЯНА

Под редакцией
Ю. В. ПРОХОРОВА



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1972

Геометрические вероятности. М. Кендалл, П. Моран, Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1972.

Геометрические вероятности — один из самых старых объектов исследования в теории вероятностей. На протяжении длительного времени в этой области наблюдался застой. Однако в последние десятилетия под влиянием приложений интерес к предмету значительно возрос. Вышедшая в 1963 г. книга известных статистиков М. Кендалла (Англия) и П. Морана (Австралия) дает обзор теории геометрических вероятностей и ее применений в физике, астрономии, биологии, кристаллографии, петрографии и т. д.

В русском переводе книга дополнена двумя обзорными статьями П. Морана (1966 и 1969 гг.) и дает законченную картину современного состояния предмета.

М. Кендалл, П. Моран

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

М., 1972 г., 192 стр. с илл.

Редактор *В. В. Абгарян*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректор *М. Л. Медведская*

Сдано в набор 16/III 1972 г. Подписано к печати 28/XI 1972 г. Бумага 84×108¹/₃₂. Физ. печ. л. 6. Условн. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 9,18. Тираж 15 000 экз. Цена книги 90 коп. Заказ № 53.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-72, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука», Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие авторов	6
Глава 1. Распределения геометрических элементов	7
Вероятностная мера геометрических элементов	7
Выбор вероятностной меры	12
Точки в n -мерном евклидовом пространстве	13
Прямые в двумерном пространстве	14
Прямые в трехмерном пространстве	16
Плоскости в трехмерном пространстве	21
Вращения	23
Аксиоматизация	23
Глава 2. Распределение точек в евклидовом пространстве	25
Теорема Крофтона для фиксированного числа точек	25
Теорема Крофтона о средних значениях	27
Распределение точек на прямой	29
Случайное подразделение интервалов	30
Некоторые частные задачи	34
Наибольший интервал на прямой	35
Критерий Колмогорова	39
Непересекающиеся интервалы на прямой	40
Плотность точек на плоскости	43
Распределение расстояния между двумя точками в круге	46
Задача Сильвестра	48
Непересекающиеся круги на плоскости	52
Случайные точки в трехмерном пространстве	54
Парадокс Ольберса	55
Задача Хольцмарка	56
Непересекающиеся сферы	61
Распределение двух точек внутри шара	62
Глава 3. Случайные прямые на плоскости и в пространстве	66
Области, определяемые случайными прямыми на плоскости	66
Выпуклые фигуры на плоскости	67
Теорема Крофтона о выпуклых фигурах	73
Вторая теорема Крофтона о выпуклых фигурах	76
Приложения в экологии	78
Задача Бюффона	82
Случайные прямые в трехмерном пространстве	87
Средняя длина секущих выпуклого тела	90

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 4. Случайные плоскости и случайные вращения	93
Случайные плоскости	93
Плоскости, пересекающие кривую	95
Плоскости, пересекающие выпуклую область	96
Теорема Минковского	97
Некоторые дальнейшие результаты	100
Распределение размеров частиц	103
Тонкие срезы	107
Фигуры в трехмерном пространстве	110
Случайные вращения	111
Приложение к кристаллографии	121
Глава 5. Задачи о покрытиях	122
Покрытия плоской решетки	122
Покрытия на прямой	122
Покрытие квадратной решетки прямоугольником	125
Случайные формы	131
Теорема Роббинса о случайных множествах	131
Задача из вирусологии	134
Случайные круги на квадрате	136
Задача о малых частицах	140
Задача Ланкастера	143
Приложение	145
Моран П. А. П. Заметка о последних исследованиях по геометрическим вероятностям	145
Моран П. А. П. Вторая заметка о последних исследованиях по геометрическим вероятностям	157
Библиография	175

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Большой интерес к геометрическим вероятностям обусловлен прежде всего широким диапазоном их применений в естествознании. К сожалению, в книжной литературе на русском языке тема геометрических вероятностей почти не нашла освещения. Имеется лишь книга Сантало «Введение в интегральную геометрию» (1956 г.), в которой не-математика может интересоваться лишь первая глава, трактующая инвариантную меру прямых и кинематическую меру на плоскости. Перевод предлагаемой книги предпринимался с надеждой хотя бы частично удовлетворить назревшую потребность в доступном обзоре областей и методов применения геометрических вероятностей; присоединение к основному тексту переводов двух более поздних обзорных статей Морана доводит обзор и библиографию до современного состояния предмета.

Одновременно нужно отметить и другую роль интегральной геометрии и геометрических вероятностей. Факты, доставляемые ими, ложатся в основу быстро развивающейся теории, которая занимается изучением геометрических объектов случайного характера (таких как случайные точечные поля, случайные мозаики и т. д.), инвариантных относительно групп преобразований пространства. В этой связи можно отметить, в частности, работы переводчика книги Р. В. Амбарцумяна.

Нам кажется, что некоторые недостатки книги, такие как фрагментарность изложения, неизбежная в книге небольшого объема, охватывающей чрезвычайно разнообразный материал, искупятся той практической пользой, которую она может принести читателю.

Ю. В. Прохоров

РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРОВ

Насколько нам известно, со времени появления маленькой брошюры Дельтейля «Геометрические вероятности» в 1926 г., на эту тему книг не публиковалось. Не только не существует такой книги на английском языке, но, более того, большинство учебников по теории вероятностей полностью игнорирует приложения в области геометрии. Причиной тому, как мы полагаем, является то, что к 1900 г. множество красивых результатов, полученных Морганом Крофтоном и другими, как казалось, полностью исчерпали предмет.

В последние двадцать лет возникло много новых проблем, которые для своего решения требуют значительно больше, чем было открыто относительно геометрических вероятностей в прошлом. Предмет по существу возродился. Набор примеров в настоящей книге иллюстрирует многообразие областей его приложений в настоящее время: вклад вносят астрономия, атомная физика, биология, кристаллография, петрография, теория выборов и т. д.

Мы поэтому надеемся, что настоящая книга, собрав воедино всю теорию, описав некоторые приложения и подняв новые нерешенные вопросы, сослужит хорошую службу ученым различных областей. Мы надеемся также, что книга привлечет внимание математиков к предмету большого интеллектуального очарования, который предоставляет захватывающие возможности дальнейших исследований.

Лондон, Англия,
Канберра, Австралия,
июнь, 1962 г.

М. Г. К.
П. А. П. М.

Вероятностная мера геометрических элементов

1.1 В теории вероятностей обычно рассматриваются случайные переменные, которые являются числами (или системами чисел) и которые принимают значения из некоторого множества, где определена неотрицательная мера. Выполнение определенных дополнительных условий позволяет истолковывать эту меру как вероятность. В теории геометрических вероятностей случайными элементами являются уже не числа, а геометрические объекты, такие как точки, линии и вращения. Способ приписания меры таким элементам не всегда совершенно очевиден. Так, нечеткость в определении самого множества элементов приводит к ряду «парадоксов». Хотя все такие парадоксы основаны на простом недоразумении, однако ознакомление с ними все же полезно для иллюстрации того, как следует определять геометрические вероятности.

1.2 Рассмотрим парадокс, принадлежащий Ж. Берtrandу (Bertrand, 1907). Задача состоит в нахождении вероятности того, что длина «случайной хорды» окружности единичного радиуса превзойдет $\sqrt{3}$, т. е. сторону равностороннего вписанного треугольника. Возможны следующие три решения задачи.

(1) Всякая хорда пересекает окружность в двух точках. Предположим, что обе точки распределены равномерно на окружности, причем их положения на окружности независимы. Не теряя общности, можно допустить, что одна из этих точек есть вершина вписанного равностороннего треугольника. В таком случае для второй точки остается ровно $1/3$ часть окружности, где она должна находиться с тем, чтобы длина возникающей хорды превосходила бы $\sqrt{3}$. Таким образом, искомая вероятность есть $1/3$.

(2) Длина хорды зависит от ее расстояния от центра окружности и не зависит от ее направления. Поэтому можно предположить, что хорда имеет фиксированное направление, перпендикулярное заданному диаметру, а точка пересечения хорды с диаметром имеет равномерное распределение на диаметре. Для того, чтобы хорда имела длину, большую $\sqrt{3}$, расстояние точки пересечения от центра должно быть меньше $1/2$, так что искомая вероятность равна $1/2$.

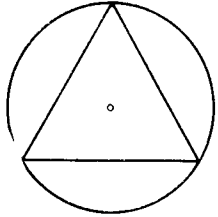


Рис. 1.1.

(3) Каждая хорда однозначно определяется основанием перпендикуляра, опущенного на нее из центра. Если эта точка распределена равномерно внутри круга, то вероятность принадлежности основания области площади A равна $A\pi^{-1}$, поскольку площадь круга равна π . Для того, чтобы хорда была длиннее $\sqrt{3}$, основание перпендикуляра должно лежать внутри круга радиуса $1/2$. Поэтому искомая вероятность равна $1/4$.

1.3 Все три решения верны, но в действительности они относятся к различным задачам. Во всех вопросах, связанных с геометрическими вероятностями, мы должны прежде всего определить, что понимается под словом «случайно». Если условиться задавать хорду ее расстоянием p от центра круга и углом θ , который она составляет с каким-то фиксированным направлением, то определение смысла слова «случайно» эквивалентно заданию совместной плотности вероятности для θ и p в области их изменения ($0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq p \leq 1$). Рассмотрим первое решение примера Бертрана. Пусть α и β — угловые координаты концов хорды, так что $0 \leq \alpha, \beta \leq 2\pi$ и их совместное распределение есть $(2\pi)^{-2} d\alpha d\beta$. В то же время имеем

$$\alpha, \beta = \theta \pm \arccos p.$$

Делая замену переменных*), устанавливаем, что совмест-

*) Следует иметь в виду, что паре (α, β) и паре (β, α) соответствует одна и та же пара (p, θ) . (Прим. ред.).

ное распределение θ и p задается плотностью

$$\frac{dp d\theta}{2\pi^2 \sqrt{1-p^2}}.$$

Аналогично этому во втором решении распределение p и θ задается плотностью

$$(2\pi)^{-1} dp d\theta,$$

а в третьем случае плотностью

$$\pi^{-1} p dp d\theta.$$

1.4 Вообще, для определения распределения геометрического объекта сначала нужно выбрать систему координат, которые определяют объект единственным образом, а затем определить вероятностное распределение в области изменения этих координат.

Рассмотрим следующие примеры таких координат:

(1) Точки в евклидовом пространстве одного, двух, трех или большего числа измерений могут определяться своими декартовыми координатами. Здесь параметрическое пространство совпадает с пространством самих элементов.

(2) Прямые в двумерном пространстве могут быть определены своими пересечениями с одной из осей и углом, который они составляют с этой осью, или же тем же углом и кратчайшим расстоянием от начала. Аналогично, прямые в трехмерном пространстве могут быть определены координатами их пересечения с данной плоскостью и их направлением. Поэтому для полного задания прямой требуются четыре координаты. Мы могли бы также определить прямую ее шестью плюккеровскими координатами. Однако такое представление не является единственным, поскольку прямая зависит только от отношений этих координат и вдобавок имеется уравнение, связывающее их. Это делает введение вероятностной меры в соответствующем случае более трудным. Почти всегда желательно представить геометрический объект в координатном пространстве так, чтобы (помимо наличия взаимно однозначного соответствия) размерность пространства, в котором лежит множество точек, соответствующих всем возможным объектам, совпадала бы с размерностью координатного пространства.

(3) Плоскость в трехмерном пространстве может быть определена коэффициентами (u, v, w) своего представления линейным уравнением в декартовых координатах

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

или, что чаще более удобно, своим расстоянием p от начала и полярными координатами θ, φ перпендикуляра, опущенного из начала на плоскость. В любом случае пространство координат должно быть трехмерным.

(4) Трансляция (сдвиг) в трехмерном пространстве может быть представлена тремя координатами (a, b, c) точки, которая принята за новое начало координат.

(5) Вращение в трехмерном пространстве также может быть представлено тремя координатами. Ими могут быть полярные координаты оси вращения θ, φ вместе с углом ψ поворота. Другой способ основывается на представлении вращения ортогональной матрицей. В качестве координат могут быть выбраны три любых независимых элемента матрицы, поскольку матрица определяется любой тройкой таких элементов.

1.5 Заметим, что во всех вышеприведенных примерах (за исключением вращения) множество всех возможных координат имеет бесконечную меру или объем. С другой стороны, если наложить дальнейшие ограничения на геометрические объекты, мы можем получить ограниченные множества в координатном пространстве. Так, например, координаты, отвечающие всем плоскостям в трехмерном пространстве, которые пересекают ограниченную фигуру, сами составляют ограниченное множество.

1.6 Если имеется определенное число геометрических элементов, то возможно определение их совместного вероятностного распределения в пространстве координат. Предположим, что (z_1, \dots, z_h) есть координаты, определяющие элемент в пространстве Ω , которое может быть как ограниченным, так и неограниченным. Представляя координаты вектором z , предположим, что имеется неотрицательная мера $P(E)$, определенная на аддитивном классе множеств E в пространстве Ω и такая, что

$$P(\Omega) = \int_{\Omega} dP = 1.$$

В большинстве случаев $P(E)$ будет интегралом Лебега от непрерывной или достаточно регулярной функции, взятым по множествам E , а в качестве аддитивного класса будут братья множества, измеримые по Лебегу.

1.7 Вероятностное распределение некоторого числа независимых геометрических элементов определяется после этого как произведение таких распределений. Нам также потребуется рассматривать случаи, когда само число элементов является случайной величиной. Наиболее естественно предполагать, что число элементов в каждом выделенном подмножестве E пространства Ω имеет пуассоновское распределение и не зависит от числа элементов в любом другом подмножестве, не пересекающемся с E , так что вероятность N элементов в E есть $e^{-\lambda} \lambda^N (N!)^{-1}$, где λ зависит от E .

1.8 Допустим, что мы определили меру $M(E)$ в пространстве всех возможных параметрических точек Ω . Эта мера, как правило, не будет ограниченной, т. е. $M(\Omega)$ может быть бесконечной, но будет σ -конечной. Это означает, что Ω может быть разложено на конечное или счетное число множеств E_1, E_2, \dots , таких, что

$$\Omega = E_1 + E_2 + \dots$$

и $M(E_i)$ конечна для каждого i . Рассмотрим, например, случайные точки на прямой. Предположим, что число их в каждом интервале длины l есть случайная величина, которая имеет распределение Пуассона со средним l и не зависит от происходящего вне этого интервала. Положим $M(E)$ равной мере Лебега для каждого измеримого по Лебегу множества E на прямой. Хотя $M(\Omega)$ (т. е. длина всей прямой) и бесконечна, однако Ω может быть представлена как счетная сумма интервалов конечной длины.

1.9 Пусть N — число геометрических элементов, со значениями параметров, лежащими в подмножестве E параметрического пространства. N есть случайная величина, имеющая распределение Пуассона со средним

$$\lambda = M(E) = \int_E dM$$

и производящей функцией

$$\exp \left\{ (z-1) \int_E dM \right\}.$$

Совместное распределение координат z_1, \dots, z_N этих элементов при условии, что их ровно N , таково:

$$\frac{dM(z_1) \dots dM(z_N)}{\left\{ \int_E dM(z) \right\}^N}. \quad (1.1)$$

Для $N=1$ мы получаем соотношение между мерой $M(E)$ и соответствующим образом индуцируемой $P(E)$. Когда $M(E)$ не является интегралом от своей производной, (1.1) получает аналогичное толкование после интегрирования по любому подмножеству G множества E . Тогда вероятность того, что координаты единственного элемента лежат в G , если известно, что они лежат в E , есть

$$p(G|E) = \frac{\int_{GE} dM(z)}{\int_E dM(z)}. \quad (1.2)$$

Здесь GE — пересечение множеств G и E . Отметим, что $p(G|E)$ есть функция от двух множеств E и G .

1.10 Таким образом, задача о геометрических вероятностях не является определенной до тех пор, пока не выбрана вероятностная мера $P(E)$ в случае определенного числа независимых распределенных элементов или мера $M(E)$ в случае случайного числа. Такой выбор, вообще говоря, совершенно произволен и именно непонимание этого обстоятельства ведет к «парадоксам». Тем не менее некоторые из таких мер более полезны и интуитивно более оправданы, чем другие; поэтому целесообразно рассмотреть какой-нибудь критерий выбора.

Выбор вероятностной меры

1.11 Большинство задач в теории геометрических вероятностей ставится для элементов в евклидовом пространстве и связано со свойствами, инвариантными относительно группы преобразований евклидова простран-

ства, включающей трансляции, вращения и отражения. Рассмотрим множество A геометрических объектов евклидова пространства. Мы получаем все трансляции, преобразуя координаты прибавлением констант, и все повороты и отражения, действуя на них ортогональными преобразованиями. Например, в трехмерном пространстве координаты x, y, z преобразуются в новые координаты x', y', z' по формулам

$$x' = x_0 + a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z,$$

$$y' = y_0 + a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z,$$

$$z' = z_0 + a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

где (a_{ij}) есть ортогональная матрица. При этом множество A преобразуется в множество A' . Пусть E есть множество параметрических точек, отвечающих A в параметрическом пространстве, E' есть множество, отвечающее A' (т. е. E' есть образ множества E относительно преобразования, индуцированного преобразованием евклидова пространства). Естественно налагать условия

$$P(E') = P(E) \text{ или } M(E') = M(E),$$

выполнение которых зависит от свойств сохранения меры данной группой преобразований.

В 1.12—1.20 рассматриваются в качестве частных примеров следующие пять случаев.

Точки в n -мерном евклидовом пространстве

1.12 Здесь параметрическое пространство совпадает с пространством элементов и в качестве меры, инвариантной относительно трансляций и поворотов, естественно выбирать меру Лебега. Если рассматривается конечное число точек, то множества бесконечной меры должны быть исключены и меру Лебега следует рассматривать в области пространства с ограниченной мерой (например, в кубе или сфере). Пусть R есть такая область, $m(R)$ — ее мера Лебега. Вероятность $P(E)$ того, что точка лежит в множестве E , полагаем равной

$$P(E) = \frac{m(E)}{m(R)}.$$

Если мы имеем дело со случайным числом точек, то предполагаем, что число таких точек, лежащих в множестве E конечной меры Лебега, есть пуассоновская переменная со средним $\lambda m(E) = M(E)$, где λ — постоянная. Условная вероятность того, что в каждом из подмножеств E_1, \dots, E_n множества E имеется по одной точке при условии, что в E находится ровно n точек, равна

$$\frac{m(E_1) \dots m(E_n)}{\{m(E)\}^n}.$$

Имеется в виду, что точки были предварительно помечены, так что они различимы.

Прямые в двумерном пространстве

1.13 Предположим, что прямые определяются уравнением вида

$$ux + vy + 1 = 0.$$

Будем рассматривать u и v как координаты прямой. Тогда параметрическое пространство есть двумерное пространство координат (u, v) с исключенной точкой $(0, 0)$. Такое представление исключает прямые, проходящие через начало координат, что, однако, не создает каких-либо трудностей. Трансляцию и поворот в двумерном пространстве можно представить алгебраическим преобразованием

$$X = a + x \cos \alpha - y \sin \alpha,$$

$$Y = b + x \sin \alpha + y \cos \alpha,$$

где a и b — произвольные постоянные и $0 \leq \alpha < 2\pi$. Положение прямой после преобразования задается уравнением

$$UX + VY + 1 = 0,$$

где

$$u = \frac{U \cos \alpha + V \sin \alpha}{aU + bV + 1}, \quad (1.3)$$

$$v = \frac{-U \sin \alpha + V \cos \alpha}{aU + bV + 1}. \quad (1.4)$$

В новом положении прямая опять не проходит через начало, поскольку в противном случае знаменатель в (1.3) и (1.4) исчезал бы. Предположим, что мы ищем меру $M(E)$ в виде интеграла

$$\iint_E F(u, v) du dv,$$

который мы хотим приравнять к интегралу

$$\iint_{E'} F(U, V) dU dV.$$

Первый интеграл равен

$$\iint_{E'} F(u, v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(U, V)} dU dV,$$

где положено

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(U, V)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial U} & \frac{\partial u}{\partial V} \\ \frac{\partial v}{\partial U} & \frac{\partial v}{\partial V} \end{vmatrix}. \quad (1.5)$$

Поскольку равенство должно выполняться для всех множеств E' , то должно иметь место равенство

$$F(U, V) = F(u, v) \frac{\partial(u, v)}{\partial(U, V)}. \quad (1.6)$$

Прямым вычислением якобиана (1.5) получаем

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(U, V)} = (aU + bV + 1)^{-3}.$$

Возводя в квадрат (1.3) и (1.4) и складывая, получаем

$$(aU + bV + 1)^{-3} = (u^2 + v^2)^{3/2} (U^2 + V^2)^{-3/2}.$$

Таким образом, (1.6) будет выполняться, если взять $F(u, v)$ пропорциональной $(u^2 + v^2)^{-3/2}$ и, следовательно,

$$M(E) = \iint_E \frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}. \quad (1.7)$$

Отметим, что мы существенно использовали то обстоятельство, что якобиан имеет форму $\varphi(u, v) \varphi(U, V)^{-1}$.

После нахождения $M(E)$ мы можем найти и распределение $P(E)$ для одной прямой во всех случаях,

когда координаты u и v лежат вне некоторой окружности с центром в точке $(0, 0)$ на плоскости (u, v) . Это обеспечивает сходимость интеграла (1.7).

1.14 Во многих приложениях более удобно представлять прямую полярными координатами точки пересечения этой прямой с перпендикуляром, опущенным на нее из начала. Если (p, θ) — такие координаты, то уравнение прямой можно записать в виде

$$\frac{x \cos \theta}{-p} + \frac{y \sin \theta}{-p} + 1 = 0.$$

Дифференциальный элемент $\frac{du dv}{(u^2 + v^2)^{3/2}}$ переходит в

$$dp d\theta, \quad (1.8)$$

поскольку можно положить

$$u = -p^{-1} \cos \theta, \quad v = -p^{-1} \sin \theta,$$

так что

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(p, \theta)} = p^3 \quad \text{и} \quad (u^2 + v^2)^{3/2} = p^3.$$

Заметим, что (1.8) соответствует второму решению парадокса Бертрана. Более того, (1.8) почти очевидно представляется естественной мерой, инвариантной относительно трансляций, вращений и отражений. Пуанкаре (Poincaré, 1912) показал, что (1.8) является единственным дифференциальным элементом, который остается инвариантным относительно группы трансляций и вращений.

Прямые в трехмерном пространстве

1.15 Такие линии составляют четырехмерное многообразие и поэтому требуют четырех параметров. Удобно представлять их уравнениями

$$\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Таким образом, (a, b, p, q) — параметры прямой и сама прямая может быть представлена точкой четырехмерного пространства. Множество всех прямых, параллельных плоскости $z=0$, нами не рассматривается (это

не вызовет трудностей, так как окажется, что оно имеет меру нуль). Мы могли бы теперь поступить точно так же, как и ранее, рассматривая воздействие на эти параметры всех трансляций и ортогональных преобразований. Однако интересно на данном примере проиллюстрировать метод нахождения инвариантных мер, основанный на изучении инфинитезимальных преобразований.

1.16 Пусть в пространстве n переменных (x_1, \dots, x_n) задана непрерывная группа преобразований, которая определяется r параметрами. Мы ищем интеграл

$$J = \int \dots \int F(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n,$$

который остается инвариантным относительно преобразований группы. Поэтому, в частности, он должен быть инвариантным относительно любого инфинитезимального преобразования группы*).

Предположим, что преобразования группы представляются в виде

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n), \quad i = 1, \dots, n.$$

Одно из возможных инфинитезимальных преобразований будет иметь вид

$$x'_i = x_i + \xi_i(x_1, \dots, x_n) \delta t, \quad (1.10)$$

где δt — малая первого порядка, а ξ_i подлежат определению. Это преобразование имеет якобиан

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} \delta t & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_2} \delta t & \dots & \frac{\partial \xi_1}{\partial x_n} \delta t \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x_1} \delta t & 1 + \frac{\partial \xi_2}{\partial x_2} \delta t & \dots & \frac{\partial \xi_2}{\partial x_n} \delta t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \xi_n}{\partial x_1} \delta t & \frac{\partial \xi_n}{\partial x_2} \delta t & \dots & 1 + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \delta t \end{vmatrix} =$$

$$= 1 + \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial \xi_n}{\partial x_n} \right) \delta t + O(\delta t^2)$$

* Дельтейль (Deltheil, 1926) дает более широкое обсуждение инфинитезимальных групп и их инфинитезимальных генераторов. См. Сантало (Santaló, 1953).

и переводит F в $F + \delta F$, где

$$\delta F = \sum_i \xi_i \frac{\partial F}{\partial x_i} \delta t.$$

Таким образом, J превращается в

$$\int \dots \int \{F + \delta F\} \left\{1 + \delta t \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i}\right\} dx_1 \dots dx_n.$$

Если J остается инвариантным относительно всех таких преобразований, то должно выполняться соотношение

$$\delta F + F \delta t \sum \frac{\partial \xi_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1.11)$$

Подставляя значение F , получаем уравнение

$$\delta t \left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (F \xi_i) \right\} = 0,$$

которое должно быть верным при всех t . Следовательно,

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (F \xi_i) = 0.$$

Параметрам a_1, \dots, a_r соответствуют r независимых инфинитезимальных преобразований. Поэтому имеются r наборов функций ξ_i , которые будем обозначать $(\xi_{1j}, \dots, \xi_{nj})$, ($j=1, \dots, r$). Так мы получаем r независимых уравнений

$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} (F \xi_{ij}) = 0, \quad (1.12)$$

которых, вообще говоря, достаточно для определения F .

1.17 Перейдем к случайным прямым в трехмерном пространстве. Каждая прямая имеет четыре координаты (a, b, p, q) . Мы хотим найти такую функцию F , чтобы интеграл

$$J = \iiint F(a, b, p, q) da db dp dq$$

был инвариантным относительно трансляций, вращений

и отражений. Группа преобразований имеет шесть параметров и в качестве инфинитезимальных преобразований можно взять инфинитезимальные трансляции вдоль осей x, y и z и инфинитезимальные вращения около этих осей. Необходимо изучить действие каждого такого преобразования на коэффициенты a, b, p и q .

Из (1.9) видно, что трансляция $x' = x + \delta t$ приводит к

$$a' = a, \quad (1.13)$$

$$p' = p - \delta t.$$

Подобно этому $y' = y + \delta t$ приводит к

$$b' = b, \quad (1.14)$$

$$q' = q - \delta t.$$

Трансляция $z' = z + \delta t$ имеет двойное действие:

$$\begin{aligned} a' &= a, & p' &= p + a \delta t, \\ b' &= b, & q' &= q + b \delta t. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Вращение δt вокруг оси z приводит к

$$\begin{aligned} x' &= x - y \delta t = az + p, \\ y' &= y + x \delta t = bz + q. \end{aligned}$$

Из этих совместных уравнений относительно x и y , игнорируя члены порядка $o(\delta t)$ находим:

$$\begin{aligned} x &= (a + b \delta t)z + p + q \delta t, \\ y &= (b - a \delta t)z + q - p \delta t, \end{aligned}$$

так что индуцированными преобразованиями являются

$$\begin{aligned} a' &= a + b \delta t, \\ b' &= b - a \delta t, \\ p' &= p + q \delta t, \\ q' &= q - p \delta t. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Вращение вокруг оси x , заданное посредством

$$\delta y = -z \delta t, \quad \delta z = y \delta t,$$

приводит к паре уравнений

$$\begin{aligned} x &= a(z + y \delta t) + p, \\ y - z \delta t &= b(z + y \delta t) + q. \end{aligned}$$

Действие этого вращения на параметры поэтому таково:

$$\begin{aligned} a' &= a + ab \delta t, \\ b' &= b + (1 + b^2) \delta t, \\ p' &= p + aq \delta t, \\ q' &= q + bq \delta t, \end{aligned} \quad (1.17)$$

что получается преобразованием пар совместных уравнений к стандартной форме и опусканием членов порядка $o(\delta t)$. Подобно этому вращение вокруг оси y дает

$$\begin{aligned} a' &= a + (1 + a^2) \delta t, \\ b' &= b + ab \delta t, \\ p' &= p + ap \delta t, \\ q' &= q + bp \delta t. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Уравнения (1.13)–(1.18) дают значения ξ_{ij} в (1.11) для каждого из шести преобразований. Например, из (1.13) и (1.10) мы получаем, что для первого преобразования из четырех значений ξ , отвечающих a , b , p и q (нумерация соответствует этому порядку), три равны нулю, а $\xi_3 = -1$. Уравнение (1.12) дает $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$; аналогично, $\frac{\partial F}{\partial q} = 0$. Отсюда следует, что F не зависит от p и q . Тогда (1.15) приводит к

$$\frac{\partial}{\partial p}(aF) + \frac{\partial}{\partial q}(bF) = 0,$$

что выполняется тождественно. Четвертое уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial a}(bF) - \frac{\partial}{\partial b}(aF) = b \frac{\partial F}{\partial a} - a \frac{\partial F}{\partial b} = 0.$$

Из этого непосредственно следует, что F является функцией только от $a^2 + b^2$, поскольку она не меняется при любом изменении a и b , оставляющем $a^2 + b^2$ постоянным. Так что $F = \varphi(a^2 + b^2)$, а пятое и шестое уравнения оба эквивалентны уравнению

$$(1 + a^2 + b^2) \varphi'(a^2 + b^2) + 2\varphi(a^2 + b^2) = 0, \quad (1.19)$$

откуда

$$F = (1 + a^2 + b^2)^{-2}$$

с точностью до коэффициента пропорциональности.

Отсюда следует, как мы могли ожидать заранее, что все точки на плоскости $z=0$ являются равновероятными (при условии, что мы рассматриваем ограниченную область) и что все направления также равновероятны.

Плоскости в трехмерном пространстве

1.18 Такие плоскости можно определять посредством задания полярных координат и длин перпендикуляров, опущенных на них из начала координат; так что в декартовых координатах имеем

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta = p,$$

где $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq p < \infty$. Тогда (как подсказывает интуиция) инвариантная относительно всех трансляций и вращений мера окажется такой, что все значения p и все направления перпендикуляров будут иметь одну и ту же вероятность. Это означает, что элемент меры по аналогии с прямыми на плоскости будет задаваться как

$$dJ = \sin \theta \, d\theta \, dp \, d\varphi. \quad (1.20)$$

Будем рассматривать представление плоскостей в декартовых координатах

$$ux + vy + wz + 1 = 0 \quad (1.21)$$

и

$$J = \iiint F(u, v, w) \, du \, dv \, dw.$$

Трансляция $x' = x + \delta t$ дает уравнение

$$ux + vy + wz + 1 + u \delta t = 0.$$

После приведения его к форме (1.21) находим действие трансляции на параметры

$$\begin{aligned} u' &= u - u^2 \delta t, \\ v' &= v - uv \delta t, \\ w' &= w - uw \delta t. \end{aligned}$$

Параллельные результаты справедливы для оставшихся

двух трансляций по y и z , и уравнения (1.12) принимают вид

$$\begin{aligned} \left(u^2 \frac{\partial}{\partial u} + uv \frac{\partial}{\partial v} + uw \frac{\partial}{\partial w}\right) F &= 0, \\ \left(uv \frac{\partial}{\partial u} + v^2 \frac{\partial}{\partial v} + vw \frac{\partial}{\partial w}\right) F &= 0, \\ \left(uv \frac{\partial}{\partial u} + vw \frac{\partial}{\partial v} + w^2 \frac{\partial}{\partial w}\right) F &= 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Аналогичным образом находим, что три инфинитезимальных поворота приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} \left(w \frac{\partial}{\partial v} - v \frac{\partial}{\partial w}\right) F &= 0, \\ \left(u \frac{\partial}{\partial w} - w \frac{\partial}{\partial u}\right) F &= 0, \\ \left(v \frac{\partial}{\partial u} - u \frac{\partial}{\partial v}\right) F &= 0. \end{aligned}$$

Интегрируя (1.23), получаем

$$u^{-1} \frac{\partial F}{\partial u} = v^{-1} \frac{\partial F}{\partial v} = w^{-1} \frac{\partial F}{\partial w} = 0. \quad (1.23)$$

Интегрируя (1.23), получаем

$$F = \varphi(u^2 + v^2 + w^2).$$

В свою очередь условия (1.22) дают

$$2\varphi(u^2 + v^2 + w^2) + (u^2 + v^2 + w^2) \varphi'(u^2 + v^2 + w^2) = 0,$$

откуда следует

$$dJ = \frac{du \, dv \, dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^2}. \quad (1.24)$$

Возвращаясь к полярным координатам, находим (как и предполагалось)

$$dJ = \sin \theta \, d\theta \, dp \, d\varphi.$$

Отметим схожесть формы (1.7), (1.19) и (1.24). Пойа (Pólya, 1917) показал, что (1.20) является единственным дифференциальным элементом, который инвариантен относительно группы всех трансляций и поворотов.

Вращения

1.19 Рассмотрим вращения вокруг фиксированной точки. В двух измерениях теория проста. Вращение определяется углом θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) и сумма двух вращений задается суммой соответствующих углов, взятой по модулю 2π . Параметрическое пространство здесь ограничено, и естественно определять на нем меру заданием вероятностного распределения на $(0, 2\pi)$. Группой, относительно которой мера должна оставаться инвариантной, естественно выбрать саму группу вращений. Это приводит к распределению, равномерному на $(0, 2\pi)$.

1.20 Вращения в трехмерном пространстве несколько более сложны. Они определяются либо выбором оси вращения и угла, на который поворачивается пространство или объект, либо же выбором ортогональной матрицы, представляющей вращение. Здесь опять параметрическое пространство ограничено и естественная группа преобразований — сама группа вращений.

Подробнее вопрос будет освещен в главе 4.

1.21 Таким способом можно рассмотреть и другие классы геометрических объектов при условии существования непрерывной группы, которая являлась бы «транзитивной» в том смысле, что всегда найдется элемент группы, переводящий любой объект (из множества объектов) в любой другой объект (этого же множества). Пример отсутствия «транзитивности» дается множеством всех кругов на плоскости вместе с евклидовой группой трансляций и вращений. Для такого множества невозможно сконструировать инвариантную меру, поскольку невозможно преобразовать круг в круг с другим радиусом.

Аксиоматизация

1.22 Коль скоро вероятностная мера геометрических множеств установлена, решение частных задач протекает без возникновения парадоксов или других трудностей, затрагивающих аксиоматизацию. Тем не менее, для тех, кого больше интересуют основания, мы отметим, заканчивая эту главу, что А. Реньи (Rényi, 1955) и А. Чазар (Csaszar, 1955) построили аксиоматическую теорию

вероятностей, которая особо уместна в задачах о геометрических вероятностях. Она опирается на аксиоматику Колмогорова в комбинации с идеей условных вероятностей, свойства которых и постулируются.

Пусть в пространстве определено σ -поле \mathcal{A} множеств A, B, \dots и \mathcal{B} — подмножество \mathcal{A} . Условная вероятность $P(A|B)$ определяется как числовая функция двух множеств (A и B), которая удовлетворяет следующим трем аксиомам:

Аксиома I. $P(A|B) \geq 0$; $P(B|B) = 1$, если B принадлежит \mathcal{B} .

Аксиома II. $P(A|B)$ является мерой для каждого фиксированного B .

Аксиома III. Если A и B принадлежит \mathcal{A} , а C и BC принадлежат \mathcal{B} , то $P(A|BC)P(B|C) = P(AB|C)$.

Тогда при широких условиях можно показать, что $P(A|B)$ может быть представлена в форме

$$P(A|B) = \frac{Q(AB)}{Q(B)},$$

где $Q(A)$ — неотрицательная мера на σ -поле \mathcal{A} , и $Q(B) > 0$.

1.23 Это как раз то, что нужно в теории геометрических вероятностей, где мы хотим заниматься такими вопросами, как «чему равна вероятность того, что точка лежит внутри фигуры K_1 , если известно, что она лежит внутри фигуры K_2 » или «чему равна вероятность того, что прямая пересекает фигуру K_1 , если она пересекает K_2 ». Здесь подходящая мера для случайных точек или прямых по необходимости бесконечна для всего пространства и поэтому не годится для употребления как вероятности. В вопросах, затрагивающих условные вероятности, $M(E)$ соответствует мере Реньи $Q(B)$, а с ее помощью получают требуемые условные вероятностные распределения

$$P(E_1|E) = \int_{E_1 \cap E} dM(z) / \int_E dM(z),$$

как в (1.2). Сходная ситуация имеет место в приложениях теории вероятностей в теории чисел.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОЧЕК В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

2.1 Как было показано в предыдущей главе, для распределения точек в евклидовом пространстве естественно использовать меру Лебега. Таким образом, если точки распределены в n -мерном евклидовом пространстве, $M(E)$ есть n -мерная мера Лебега. Если число точек должно быть случайным, мы предполагаем, что число их в любом измеримом множестве E есть случайная величина с распределением Пуассона со средним $\lambda M(E)$, где λ — некоторая константа; если число точек фиксировано, мы предполагаем, что вероятность попадания точки в множество E_1 , если дано, что она попала в $E \supset E_1$, равна

$$\frac{m(E E_1)}{m(E)}.$$

Почти все интересные задачи возникают, когда $n = 1, 2$ или 3 , но прежде чем перейти к их рассмотрению, здесь удобно доказать одну общую формулу, принадлежащую Крофту (Crofton, 1885), которая касается задач с фиксированным числом точек.

Теорема Крофтона для фиксированного числа точек

2.2 Пусть N точек независимо распределены в области D n -мерного пространства. Мера всего Nn -мерного выборочного пространства для совместного распределения равна, следовательно, $\{m(D)\}^N$. Предположим, мы хотим вычислить вероятность того, что фигура F , образованная N точками, обладает определенным свойством, определяемым так, что оно зависит только от взаимного расположения точек (значит, свойство должно быть инвариантным относительно трансляций и вращений), но не от области D или положения F относительно D . Например, такое свойство определяется требованием,

что никакие две точки не удалены друг от друга на расстояние, превышающее некоторое заданное. Тогда вероятность того, что фигура F удовлетворяет условию, равна

$$P = \frac{m^*(E)}{\{m(D)\}^N},$$

где $m^*(E)$ есть мера Лебега в Nn -мерном пространстве, а E есть множество точек этого пространства, в которых фигура F обладает требуемым свойством.

Положим $V = m(D)$ и пусть D_1 — другая область, содержащая D , для которой

$$m(D_1) = V + \Delta V.$$

Пусть соответствующее множество Nn -мерного пространства есть $E_1 \supset E$ и положим:

$$m^*(E) = U, \quad m^*(E_1) = U_1 = U + \Delta U.$$

Тогда вероятность того, что F обладает требуемым свойством для случайных точек в D_1 , есть

$$P_1 = P + \Delta P = \frac{U + \Delta U}{\{V + \Delta V\}^N}. \quad (2.1)$$

Рассмотрим множество E_1 . Оно может быть разделено на $N+1$ множеств E_{1j} ($j=0, 1, \dots, N$), где E_{1j} есть подмножество E_1 , для которого j точек лежат в $D_1 - D$, а $N-j$ точек — в D . Пусть P_j — вероятности того, что фигура F , содержащая j точек из $D_1 - D$ и $N-j$ точек из D , обладает требуемым свойством (т.е. соответствующая ей в $\{D_1\}^N$ точка принадлежит E_{1j}). Тогда

$$U_1 = U + \Delta U = U + \sum_{j=1}^N \binom{N}{j} P_j V^{N-j} (\Delta V)^j.$$

Из (2.1) заключаем, что

$$(P + \Delta P) (V + \Delta V)^N = P V^N + \sum_{j=1}^N \binom{N}{j} P_j V^{N-j} (\Delta V)^j,$$

так что

$$\Delta P (V + \Delta V)^N = \sum_{j=1}^N \binom{N}{j} (P_j - P) V^{N-j} (\Delta V)^j.$$

Теперь пусть ΔV становится малым. Записывая малые

приращения в виде δP и δV и сохраняя только члены первого порядка, находим

$$\delta P = N(P_1 - P) V^{-1} \delta V. \quad (2.2)$$

Это и есть формула Крофтона. С ее помощью можно решить ряд непростых задач, поскольку если мы можем вычислить P_1 (что обычно значительно проще), то можно написать дифференциальное уравнение в терминах некоторого параметра, который изменяет объем V области D .

2.3 Приведем очень простой пример применения этого метода. Пусть A и B — случайные точки на интервале длины a . Найдем распределение расстояния $x = |AB|$.

Обозначим через $F(u, a)$ вероятность события $x < u$. Пусть длина интервала получает приращение δa . Тогда из (2.2) получаем

$$\delta F(u, a) = 2(F_1(u, a) - F(u, a)) a^{-1} \delta a, \quad (2.3)$$

где $F_1(u, a)$ есть вероятность события $x < u$, когда B находится на конце интервала. Очевидно, $F_1(u, a) = ua^{-1}$. Подставляя в (2.3) и допуская, что F имеет производную по a , получаем

$$\frac{dF(u, a)}{da} + 2a^{-1} F(u, a) = 2ua^{-2},$$

так что

$$\frac{d}{da} (a^2 F(u, a)) = 2u$$

и

$$a^2 F(u, a) = 2au + \text{const}.$$

При $a = u$ должны иметь $F = 1$, так что $\text{const} = -u^2$, что дает

$$F(u, a) = a^{-2} \{2au - u^2\}.$$

Теорема Крофтона о средних значениях

2.4 Дальнейшие примеры на этот метод появятся позже. Он может быть применен также для нахождения средних значений некоторых числовых функций Y фигуры F . Y есть функция N наборов координат в простран-

стве параметров. Пусть μ есть среднее значение Y . Тогда

$$\mu = \mathcal{W}V^{-N},$$

где $V = m(D)$, а \mathcal{W} есть интеграл от Y по всему Nn -мерному произведению пространств.

Действуя, как и ранее, получаем

$$(\mu + \Delta\mu)(V + \Delta V)^N = \mathcal{W} + \mathcal{W}_1 + \dots + \mathcal{W}_N,$$

где \mathcal{W}_k есть интеграл, взятый по множеству, для которого k точек лежат в $D_1 - D$, а $(N - k)$ точек — в D . Полагая $m(D_1 - D) \rightarrow 0$ получаем, что асимптотически

$$\mathcal{W}_1 = N\mu_1 V^{N-1} \Delta V,$$

когда $\Delta V \rightarrow 0$, тогда как $\mathcal{W}_2, \dots, \mathcal{W}_N$ суть $o(\Delta V)$. Здесь μ_1 есть среднее значение Y , когда одна из точек заключена в области $D_1 - D$. Отсюда находим, что

$$\delta\mu = N(\mu_1 - \mu)V^{-1}\delta V. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.2) можно рассматривать как частный случай (2.4), когда за Y взята функция, принимающая значения 1 либо 0 в зависимости от того, удовлетворяет ли F требуемому условию или нет.

2.5 В качестве примера опять рассмотрим две случайные точки A и B на интервале длины a . Найдем среднее значение $x^p = |AB|^p$, $p > 0$.

Если B находится на конце интервала, то среднее значение x^p есть

$$\mu_1 = a^{-1} \int_0^a x^p dx = (p+1)^{-1} a^p$$

и (2.4) принимает вид

$$\delta\mu = 2\{(p+1)^{-1}a^p - \mu\}a^{-1}\delta a.$$

После интегрирования получаем

$$\mu = \frac{2a^p}{(p+1)(p+2)},$$

что можно было получить и непосредственно из предшествующего результата.

Формулы Крофтона (2.2) и (2.4) были получены для случайных точек. Однако та же техника может быть использована и для более сложных случайных элементов.

Распределение точек на прямой

2.6 Теперь рассмотрим случайные точки на бесконечной прямой. Из сказанного выше следует, что для любого набора непересекающихся интервалов I_1, I_2, \dots естественно требовать, чтобы числа случайных точек в каждом из них были бы независимыми пуассоновскими случайными величинами со средними $\lambda|I_1|, \lambda|I_2|, \dots$, (λ — константа, известная как плотность распределения точек на прямой). Так, если задана точка P , то вероятность того, что в интервале длины a , содержащем P или простирающемся от P направо или налево, не будет случайных точек, есть $e^{-\lambda a}$. Поэтому если P — какая-либо точка на прямой, и в частности, одна из случайных точек, то вероятностное распределение расстояния x до ближайшей случайной точки справа (слева) есть

$$dF = \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

На языке статистической теории то же самое можно выразить, сказав, что $2\lambda x$ имеет распределение χ^2 с двумя степенями свободы*).

2.7 Мы можем также рассматривать случайные точки на прямой как реализацию «пуассоновского процесса». Предположим, что $N(a, b)$ есть число точек в интервале (a, b) и что оно имеет распределение $P_n(a, b)$, $n = 0, 1, \dots$. Используя принятые выше допущения, можно вывести дифференциальные уравнения для $P_n(a, b)$, рассматривая, что может произойти в интервале $(a, b + \delta)$, когда δ мало. Действительно,

$$P_n(a, b + \delta) = P_n(a, b)(1 - \lambda\delta) + P_{n-1}(a, b)\lambda\delta + o(\delta).$$

Здесь $P_n = 0$ для $n < 0$, и мы приняли, что вероятность обнаружить точку в интервале $(b, b + \delta)$ есть $\lambda\delta + o(\delta)$ независимо от того, что происходит в других местах. Тогда $P_n(a, b)$ оказывается дифференцируемой по b , и мы получаем

$$\frac{d}{db} P_n(a, b) = -\lambda P_n(a, b) + \lambda P_{n-1}(a, b).$$

* Мы полагаем здесь и далее, что читатель знаком с элементарными распределениями статистик и характеристикой таких распределений их моментами. См. Кендалл и Стюарт (Kendall and Stuart, vol. I, 1958).

Решая эти уравнения последовательно для $n=0, 1, 2, \dots$, находим

$$P_n(a, b) = \{\lambda(b-a)\}^n e^{-\lambda(b-a)} (n!)^{-1}.$$

Случайное подразделение интервалов

2.8 Более интересная ситуация возникает, когда имеется фиксированное число случайных точек в интервале, длину которого можно полагать равной единице. Такие точки разделяют интервал на $n+1$ случайных интервалов. Эти случайные интервалы (так же, как и их длины) будем обозначать в порядке их следования вдоль прямой через I_1, I_2, \dots, I_{n+1} . Пусть интервал $(0,1)$ делится n случайными точками X_1, \dots, X_n , координаты которых независимы и имеют равномерное распределение на $(0,1)$. Тогда их совместное распределение записывается так:

$$dX_1 \dots dX_n \quad (0 \leq X_i \leq 1).$$

Его можно рассматривать как совместное равномерное распределение в n -мерном кубе. Величины X_1, \dots, X_n , записанные в возрастающем порядке, будем обозначать через Y_1, \dots, Y_n :

$$0 \leq Y_1 \leq Y_2 \leq \dots \leq Y_n \leq 1.$$

Куб распадается на $n!$ равных областей, внутри которых плотность равномерна, и совместное распределение случайных величин Y_i равно

$$n! dY_1 \dots dY_n \quad (0 \leq Y_1 \leq \dots \leq Y_n \leq 1). \quad (2.5)$$

Имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_1, \\ I_2 &= Y_2 - Y_1, \\ \dots & \dots \dots \dots \\ I_n &= Y_n - Y_{n-1}, \\ I_{n+1} &= 1 - Y_n. \end{aligned}$$

Совместное распределение I_1, \dots, I_{n+1} сингулярно, поскольку $\sum I_i = 1$; но мы можем, подсчитывая якобиан, определить совместное распределение I_1, \dots, I_n . Оно

равно

$$n! dI_1 \dots dI_n \quad \left(\sum_{i=1}^n I_i \leq 1 \right). \quad (2.6)$$

Поэтому каждый из интервалов сам по себе имеет одно и то же распределение. Это можно установить также, замечая, что $n+1$ интервалов совместно распределены таким же образом, как $n+1$ интервалов на окружности единичной длины, когда на нее случайно помещаются $n+1$ точек.

2.9 Для определения распределения длины отдельного интервала рассмотрим $I_{k+1} = Y_{k+1} - Y_k$. Интегрируя (2.5) по всем возможным значениям $Y_1, \dots, Y_{k-1}, Y_{k+2}, \dots, Y_n$, получаем совместное распределение Y_k и Y_{k+1} :

$$\frac{n! Y_k^{k-1} (1 - Y_{k+1})^{n-k-1}}{(k-1)! (n-k-1)!} dY_k dY_{k+1} \quad (0 \leq Y_k \leq Y_{k+1} \leq 1).$$

Отсюда для распределения I_{k+1} получаем

$$\begin{aligned} dI_{k+1} & \frac{n!}{(k-1)! (n-k-1)!} \int_0^{1-I_{k+1}} x^{k-1} (1-I_{k+1}-x)^{n-k-1} dx = \\ & = dI_{k+1} \frac{n! (1-I_{k+1})^{n-1}}{(k-1)! (n-k-1)!} \int_0^1 \omega^{k-1} (1-\omega)^{n-k-1} d\omega = \\ & = n (1-I_{k+1})^{n-1} dI_{k+1}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Это выражение не зависит от k и его можно было получить прямо, заметив, что все интервалы I_k имеют одно и то же распределение, а (2.7), очевидно, есть распределение I_1 .

2.10 Распределение n точек на интервале можно двумя способами связать с пуассоновским процессом. Сначала предположим, что имеется пуассоновский процесс, начинающийся в нуле и такой, что события происходят в моменты Y_1, \dots, Y_n ($0 \leq Y < \infty$). Мы рассмотрим условное распределение Y_1, \dots, Y_n при условии, что $Y_n < 1, Y_{n+1} > 1$, и покажем, что в таких обстоятельствах n точек Y_1, \dots, Y_n суть n случайных точек на $(0,1)$, записанных в порядке возрастания.

Вероятность того, что Y_1, \dots, Y_n принимают заданные значения, причем $Y_n < 1, Y_{n+1} > 1$, задается так:

$$\prod_1^n \lambda e^{-\lambda I_i} dI_i \exp \left\{ -\lambda \left(1 - \sum_1^n I_i \right) \right\} = \lambda^n e^{-\lambda} \prod_1^n dI_i,$$

где I_i имеют тот же смысл, что и ранее. Условная вероятность получится делением этого выражения на вероятность того, что в $(0,1)$ попадает ровно n точек пуассоновского процесса, которая равна

$$(n!)^{-1} \lambda^n e^{-\lambda}.$$

Поэтому совместное распределение случайных величин I_i равно

$$n! dI_1 \dots dI_n \quad (\sum I_i \leq 1)$$

и совместное распределение величин Y_i есть

$$n! dY_1 \dots dY_n,$$

а это доказывает, что точки Y_1, \dots, Y_n могут рассматриваться как n случайных точек на интервале $(0,1)$.

2.11 Можно получить и другое представление, которое в некоторых задачах более полезно. Рассмотрим опять пуассоновский процесс с событиями, происходящими в моменты Y_1, \dots, Y_n, Y_{n+1} , и положим

$$Z_1 = Y_1 Y_{n+1}^{-1},$$

$$Z_2 = Y_2 Y_{n+1}^{-1},$$

$$\dots$$

$$Z_n = Y_n Y_{n+1}^{-1}.$$

Тогда $0 \leq Z_i \leq 1$ и Z_1, \dots, Z_n распределены на интервале $(0,1)$ как упорядоченный набор n случайных точек. Чтобы показать это, заметим, что совместное распределение случайных величин Y_1, \dots, Y_{n+1} ($Y_1 \leq \dots \leq Y_{n+1}$) равно

$$\lambda^{n+1} \exp(-\lambda Y_{n+1}) dY_1 \dots dY_{n+1},$$

в то время как распределение Y_{n+1} само по себе есть

$$(n!)^{-1} Y_{n+1}^n \lambda^{n+1} \exp(-\lambda Y_{n+1}) dY_{n+1}.$$

Поэтому условное распределение величин Y_1, \dots, Y_n при данном Y_{n+1} равно

$$n! Y_{n+1}^{-n} dY_1 \dots dY_n.$$

Переходя к величинам Z , получаем

$$n! dZ_1 \dots dZ_n.$$

Полезным бывает и другое представление. Поскольку величина $Y_i - Y_{i-1}$ распределена как $(2\lambda)^{-1} \chi^2$ с двумя степенями свободы, то совместное распределение величин I_1, \dots, I_{n+1} совпадает с совместным распределением величин

$$(x_{2i-1}^2 + x_{2i}^2) \left(\sum_{s=1}^{2n+2} x_s^2 \right)^{-1}, \quad i=1, \dots, n+1, \quad (2.8)$$

где x_i — независимые случайные величины, распределенные нормально с нулевым средним и одним и тем же стандартным отклонением.

2.12 Поскольку совместное распределение интервалов Y_1, \dots, Y_{n+1} совпадает с совместным распределением величин, скажем,

$$W_1 (W_1 + \dots + W_{n+1})^{-1}, \dots, W_{n+1} (W_1 + \dots + W_{n+1})^{-1},$$

где W_i независимы и обладают одним и тем же экспоненциальным распределением, мы можем дать другую геометрическую интерпретацию совместному распределению величин I_i . Будем рассматривать (W_1, \dots, W_{n+1}) как точку в $(n+1)$ -мерном пространстве. Величины I_i зависят только от отношений величин W_i и, следовательно, можно полагать $\sum W_i = \text{const}$. Эта плоскость пересекает положительную часть пространства по регулярному симплексу, который является n -мерным обобщением равностороннего треугольника, правильного тетраэдра и т. д. Если выбрать $\text{const} = 1$, то совместное распределение I_1, \dots, I_{n+1} совпадает с совместным распределением длин перпендикуляров, опущенных из случайной точки внутри симплекса на координатные плоскости. Если же const выбрать так, что расстояние от каждой вершины симплекса до противоположной стороны равно единице, то I_1, \dots, I_{n+1} окажутся равными длинам $(n+1)$ -мерных

перпендикуляров из случайной точки внутри симплекса на его $n+1$ стороны.

Преимуществом такого представления является то, что иногда удается получить явные формулы для вероятностей, используя геометрию симплекса. С другой стороны, преимущество (2.8) в том, что оно упрощает вычисление моментов. Для иллюстрации рассмотрим одну из величин (2.8):

$$\frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2 + \dots + x_{2n}^2} = \frac{A}{B}.$$

Распределение A/B зависит только от отношений величин x_i . Поскольку совместное распределение x_1, \dots, x_{2n} сферически симметрично, то случайные величины A/B и B независимы и поэтому

$$E \left\{ \left(\frac{A}{B} \right)^n B^n \right\} = E(A^n),$$

т. е.

$$E \left(\frac{A}{B} \right)^n = \frac{E(A^n)}{E(B^n)} \quad (n > 0). \quad (2.9)$$

Это значительно упрощает вычисления.

Некоторые частные задачи

2.13 Теперь можно было бы рассмотреть много задач, в основном очень частного характера. Так, например, пусть единичный интервал делится на три части двумя случайными точками и спрашивается, чему равна вероятность того, что из получившихся отрезков можно построить треугольник. Эта вероятность равна вероятности того, что ни один из отрезков не превосходит суммы двух других. Используем симплекциальное представление

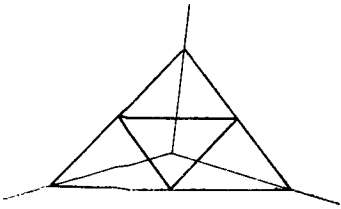


Рис. 2.1.

(в данном случае симплекс есть треугольник). Для того чтобы из отрезков можно было построить треугольник, точка, представляющая отрезки, должна лежать внутри треугольника, который получается соединением

середин противоположных сторон симплекса (как это указано на рис. 2.1). Он имеет площадь, равную одной четверти площади большого треугольника, и, следовательно, вероятность равна $1/4$.

Наибольший интервал на прямой

2.14 Более интересная задача состоит в отыскании распределения длины наибольшего из n интервалов, на которые разбивает единичный интервал $n-1$ случайная точка. Событие «наибольший интервал превосходит x » есть дополнение к событию «ни один из интервалов не превосходит x ». Мы займемся более общим вопросом, именно отысканием вероятности того, что ровно k интервалов превосходят x , $k=0, 1, \dots$ и $kx \leq 1$. В упрощенной форме эта задача имеется у Витворта (Whitworth, 1901; задача 667, стр. 361), но, по-видимому, возникла еще раньше. Мы покажем, что эта вероятность равна

$$P_{[k]} \binom{n}{k} \left\{ (1-kx)^{n-1} - \binom{n-1}{1} (1-(k+1)x)^{n-1} + \dots \right. \\ \left. \dots + (-1)^s \binom{n-k}{s} (1-(k+s)x)^{n-1} \right\}. \quad (2.10)$$

Ряд прерывается после последнего члена, для которого величина $1-(k+s)x$ еще положительна.

Пусть интервалы занумерованы как I_1, \dots, I_n и через $P_{ij \dots k}$ будем обозначать вероятность события $I_i > x, I_j > x, \dots, I_k > x$ безотносительно к длине других интервалов. Пусть S_m есть сумма вероятностей $P_{ij \dots k}$ по всем возможным способам выбора m интервалов из общего числа n . По известной комбинаторной лемме вероятность того, что имеет место ровно k из событий $I_1 > x, \dots, I_n > x$, равна

$$P_{[k]} = S_k - \binom{k+1}{k} S_{k+1} + \binom{k+2}{k} S_{k+2} - \dots$$

Этот факт может быть просто установлен с использованием индикаторных переменных (которые равны 1 или 0 согласно тому, происходит или нет событие), или по индукции (Феллер (Feller, 1950)).

Очевидно, что S_m в $\binom{n}{m}$ раз превосходит вероятность события $I_1 > x, \dots, I_m > x$. Используя представление I_i как длин перпендикуляров на стороны из случайной точки $(n-1)$ -мерного симплекса, мы находим, что эта вероятность пропорциональна объему правильного симплекса, все стороны которого укорочены в отношении $(1-mx)$. Поэтому S_m равна $\binom{n}{m}(1-mx)^{n-1}$ при $0 < mx < 1$ и нулю в противном случае. Поэтому $P_{[k]}$ имеет вид

$$\sum_{s=0}^k \binom{k+s}{s} (-1)^s \binom{n}{s} (1-sx)^{n-1},$$

что и равно (2.10).

Полагая здесь $k=0$, получаем распределение наибольшего интервала, поскольку $P_{[0]}$ есть вероятность того, что наибольший интервал меньше x . Она равна

$$P_{[0]} = 1 - \binom{n}{1}(1-x)^{n-1} + \binom{n}{2}(1-2x)^{n-1} - \dots$$

Вероятность того, что наибольший интервал превосходит x , равна

$$1 - P_{[0]} = \binom{n}{1}(1-x)^{n-1} - \binom{n}{2}(1-2x)^{n-1} + \dots \quad (2.11)$$

2.15 Эти результаты были получены также Фишером (Fisher, 1929, 1940) и были применены им для построения критериев значимости в гармоническом анализе. Обе эти работы воспроизведены с дополнениями в собрании его трудов. В первом дополнении дается таблица 5% и 1% точек для (2.11) для $n=5$ (1) 50. Во второй работе он привел также таблицу 5% точек второго наибольшего интервала для $n=3$ (1) 10 (5) 50. У Дейвиса (Davis, 1941) имеется таблица для $nx=0,1$ (0,1) 10,0, $n=10$ (10) 70 и для $nx=5,1$ (0,1) 10,0, $n=80$ (10) 300.

Полученные формулы применялись Гарвудом (Garwood, 1940) для описания одной схемы управления движением транспорта.

Задача обсуждалась также Батиклем (Baticle, 1933a, 1933b, 1935) и Леви (Lévy, 1939).

2.16 Стевенс (Stevens, 1939) рассмотрел геометрическую задачу, по видимости отличающуюся от рассмот-

ренной, но в действительности, как это показал Фишер (Fisher, 1940), эквивалентную ей.

На окружности единичной длины случайно помещаются n дуг длины x , и ищется вероятность того, что окружность будет полностью покрыта. Положим, что положение дуг определяется их последней точкой, если двигаться по часовой стрелке. Эти концы определяют n интервалов, чье совместное распределение совпадает с распределением $n-1$ интервалов, которые порождены $n-1$ случайными точками на интервале единичной длины.

Все точки окружности оказываются покрытыми тогда и только тогда, когда длина ни одного из этих интервалов не превышает x . Стевенс дал доказательство результата в этой форме. Молдон (Mauldon, 1951) дал точное распределение суммы длин m наибольших интервалов, $m=2, 3, \dots$

2.17 Задача Стевенса касается случайных интервалов на окружности. Аналог этой задачи в трехмерном пространстве состоит в нахождении вероятности того, что поверхность сферы будет полностью покрыта набором случайно расположенных кружков. Ее точное решение неизвестно, но эта задача и приводящие к ней биологические задачи будут обсуждены в главе 5.

2.18 Некоторый интерес представляет также распределение $\sum I_n^2$. Эта величина вначале была предложена в качестве критерия значимости при изучении инфекционных заболеваний М. Гринвудом (Greenwood, 1946). Точное распределение (подобно распределению в 2.14) задается различными формулами на различных участках и известно точно лишь для $n=2, 3$ и 4. Моменты и асимптотическая форма даны Мораном (Moran, 1947), а решение для $n=4$ Гарднером (Gardner, 1952) (см. также Моран (Moran, 1951, 1953)). Моменты легко находятся с помощью либо представления (2.9), либо теоремы Дирихле (Уиттекер и Ватсон (Whittaker and Watson, 1935), стр. 258).

Если $f(x)$ интегрируема на $(0,1)$ и $a_r > 0$ ($r=1, \dots, n$), то интеграл

$$\int \dots \int f(x_1 + \dots + x_n) x_1^{a_1-1} \dots x_n^{a_n-1} dx_1 \dots dx_n, \quad (2.12)$$

взятый по области $x_i > 0$, $\sum x_i \leq 1$, равен

$$\frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \int_0^1 f(t) t^{\sum \alpha_i - 1} dt.$$

В частности, для $f(t) = 1$ интеграл (2.12) равен

$$\frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + 1)}. \quad (2.13)$$

Если интеграл берется по области $0 \leq \sum x_i \leq C$, то (2.13) умножается на $C^{\sum \alpha_i}$. Дифференцируя по C , находим, что интеграл от $x_1^{\alpha_1 - 1} \dots x_n^{\alpha_n - 1}$ по $(n-1)$ -мерной области, определяемой неравенствами $x_i \geq 0$, $\sum x_i = 1$, равен

$$\frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}.$$

Полагая $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$, находим, что объем этой области равен $[\Gamma(n)]^{-1}$. Представляя n интервалов, образованных $n-1$ случайной точкой, как однородные координаты точек внутри симплекса, находим

$$E(I_1^{\alpha_1 - 1} \dots I_n^{\alpha_n - 1}) = \frac{\Gamma(n) \Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)}.$$

Этот результат был впервые получен в слегка отличном виде Витвортом (Whitworth, 1901) (Предложение LVII). Применяя его к сумме $T = \sum_1^n I_i^2$, получаем

$$E(T) = nE(I_1^2) = 2(n+1)^{-1},$$

$$E(T^2) = nE(I_1^4) + n(n-1)E(I_1^2 I_2^2) = \\ = 4(n+5) \{(n+1)(n+2)(n+3)\}^{-1}$$

и т. д.

2.19 Оба рассмотренных выше распределения могут быть использованы для построения критериев для гипотезы, состоящей в том, что $n-1$ точек распределены случайно. Другой такой критерий предложен Бартлеттом при обсуждении работы Гринвуда (Greenwood, 1946, стр. 108). Поскольку выше мы показали, что I_1, \dots, I_n распределены

как $W_i (W_1 + \dots + W_n)^{-1}$, $i=1, \dots, n$, где W_i суть независимые случайные величины, распределенные как χ^2 с двумя степенями свободы, мы могли бы использовать любой критерий однородности дисперсий. В частности, критерий отношения правдоподобия должен быть основан на неко-

торой функции от $\frac{\prod_{i=1}^n I_i^{1/n}}{n \sum_{i=1}^n I_i}$. Распределение этой вели-

чины неоднократно исследовалось (см., например, Кендалл и Стюарт (Kendall and Stuart, 1958)).

Критерий Колмогорова

2.20 Теория распределения случайных точек в интервале связана также с другой классической задачей математической статистики, именно с задачей проверки согласованности выборки с постулированным теоретическим вероятностным распределением. Предположим, что $F(x)$ есть непрерывная функция распределения (дискретная компонента отсутствует). Если x_1, \dots, x_n — выборка из этого распределения, расположенная в порядке возрастания, то выборочная функция распределения определяется так:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_1, \\ kn^{-1}, & x_h < x \leq x_{h+1}, \\ 1, & x_n < x. \end{cases}$$

В качестве меры расхождения с теоретическим распределением принимаем

$$D_n = \min \sup |F_n(x) - F(x)|.$$

Преимущество такого выбора меры расхождения между $F(x)$ и $F_n(x)$ состоит в том, что она остается инвариантной при любом непрерывном монотонном преобразовании x . Поэтому можно предполагать, что

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Тогда выборка представляет собой n случайных точек на интервале и в старых обозначениях

$$D_n = \max_{1 < i < n} \max \{|Y_i - in^{-1}|, |Y_i - (i-1)n^{-1}|\}.$$

Колмогоровым (Kolmogoroff, 1933) было показано, что для $x > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{n^{1/2}D_n \leq x\} = 1 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^{v-1} e^{-2v^2x^2}. \quad (2.14)$$

В правой части стоит тета-функция Якоби. Существует обширная литература об этом распределении, поскольку D_n широко используется в качестве критерия согласия. Следует отметить, однако, что (2.14) не имеет места для распределений, найденных по выборке с помощью оценки параметра (см. Кендалл и Стюарт (Kendall and Stuart, vol. II, 1961)). Другие распределения, которые были рассмотрены нами, также могли бы быть использованы для критерия согласия, но в отличие от критерия Колмогорова эти критерии требуют перехода к прямоугольному распределению до их применения.

2.21 Сравнительная ценность таких критериев значимости зависит от имеющейся альтернативной гипотезы. Так, для эпидемиологической задачи, рассмотренной Гринвудом, Моран (Moran, 1951) показал, что относительно вполне приемлемой альтернативы метод Бартлетта, использующий критерий однородности дисперсии, лучше метода, использующего $\sum |I_i|^2$. Особенно ценный и интересный обзор этого и других критериев и их мощности содержится у Кокса (Cox, 1955).

Непересекающиеся интервалы на прямой

2.22 Ранее мы рассматривали случайные точки. Далее будет сделана попытка определить на прямой случайные непересекающиеся интервалы. Сначала рассмотрим случай бесконечной прямой.

Появление непересекающихся интервалов мы свяжем с реализациями случайного процесса с временной координатой t , меняющейся от $-\infty$ до ∞ . Если точка t не покрыта интервалом, можно предполагать, что расстояние

(обозначим его через T_1) до ближайшего интервала справа имеет экспоненциальное распределение $\lambda e^{-\lambda T_1} dT_1$ со средним λ^{-1} независимо от того, что происходит слева от t . Если интервал, который в этом месте начинается, имеет постоянную длину δ , то прямая окажется снова непокрытой в точке $t + T_1 + \delta$, а расстояние до начала следующего интервала есть не зависящая от T_1 случайная величина T_2 , имеющая опять экспоненциальное распределение со средним λ^{-1} . Продолжая таким образом, мы определяем некоторый случайный процесс.

Модель такого типа встречается в ряде практических ситуаций. Так, она может применяться для представления расположения автомобилей вдоль дороги или описания прохождения автомобилей мимо данной точки. Если принять длину автомобиля равной δ , то в этом случае модель, по-видимому, является удовлетворительной лишь при малых интенсивностях движения. Результаты улучшаются, если δ выбрать большим, чем длина автомобиля.

Эта модель может также представлять интервалы, в течение которых ведется телефонный разговор на линии, исходящей от одиночного абонента, при условии отсутствия всякой блокировки и постоянства длины разговора, равной δ .

Наконец, модель представляет последовательность интервалов, в течение которых счетчик, регистрирующий последовательные события, оказывается запертым. Событиями могут быть прохождения частиц космических лучей, и счетчик после регистрации прохождения частицы теряет чувствительность на период продолжительности δ .

Каждой из трех тем посвящена обширная литература, которая в действительности не имеет отношения к геометрическим вероятностям. Мы рассмотрим одну задачу, которая возникает в этой модели.

2.23 Предположим, что момент $t=0$ не накрывается интервалом. Нас интересует распределение общего числа интервалов, которые лежат в $(0, T)$. Легче найти вероятность того, что в $(0, T)$ содержится n или больше интервалов. Конец n -го интервала находится в точке $n\delta + T_1 + \dots + T_n$, где T_i независимы и распределены как $(2\lambda)^{-1}\chi^2$ с двумя степенями свободы. Следовательно, в $(0, T)$ содержится n или более интервалов, если

$T_1 + \dots + T_n \leq T - n\delta$. Вероятность этого события поэтому равна

$$P \{ \chi_{(2n)}^2 \leq 2\lambda(T - n\delta) \} = 2^{-n} (\Gamma(n))^{-1} \int_0^{2\lambda(T - n\delta)} e^{-\frac{1}{2}x} x^{n-1} dx.$$

Очевидно, не может появиться более чем $[T(n\delta)^{-1}]$ интервалов, где $[x]$ есть целая часть x (см. Френкель (Frenkel, 1946), стр. 128).

2.24 Если мы хотим иметь ровно n интервалов на $(0, T)$, то совместное распределение их положений может быть определено различными способами. Предположим, что интервалы имеют длину δ , и их всего n . Они оставят непокрытыми $n+1$ интервалов I_1, \dots, I_{n+1} , и можно предполагать, что они имеют совместное распределение, совпадающее с распределением случайных интервалов, которые порождаются n точками, помещенными случайно на интервал длины $T - n\delta$. Из (2.6) находим, что это совместное распределение есть

$$(T - n\delta)^{-n} (n+1)! dI_1 \dots dI_n \quad \left(\sum_1^n I_i \leq 1 \right).$$

Другое (неэквивалентное) определение получается, если предположить, что интервалы длины δ помещаются на $(0, T)$ последовательно, причем на каждом шагу все допустимые положения являются равновероятными. В этом случае всегда возможно поместить n интервалов в $(0, T)$, причем n равно $[T(2\delta)^{-1}]$, если $[T\delta^{-1}]$ четно, и $[T(2\delta)^{-1}] + 1$, если $[T\delta^{-1}]$ нечетно.

Однако при надлежащем выборе положений можно поместить до $[T\delta^{-1}]$ интервалов. Поэтому, если мы продолжаем помещать интервалы до тех пор, когда уже невозможно будет добавить еще один, общее число помещенных интервалов будет случайным, и его распределение зависит от T . Нахождение этого распределения представляет некоторые трудности (см. Реньи (Renyi, 1958)). Дискретный аналог этой задачи был рассмотрен Е. С. Пейджем (Page, 1959) (см. также Даунтон (Down-ton, 1961)). Двумерное обобщение имеет некоторые интересные физические приложения.

Плотность точек на плоскости

2.25 Рассмотрим теперь случайные точки на плоскости. Будем полагать, что число их в каждой области площади A имеет распределение Пуассона, со средним λA ; λ может тогда называться «плотностью» точек.

Пусть P — любая точка плоскости, и r_1, r_2, \dots — расстояния до ближайшей случайной точки, второй ближайшей точки и т. д. Распределение r_1 , очевидно, имеет вид

$$2\lambda\pi r_1 \exp\{-\lambda\pi r_1^2\} dr_1. \quad (2.15)$$

Таким образом, $2\lambda\pi r_1^2$ распределено как χ^2 с двумя степенями свободы. Аналогично, r_s имеет распределение

$$2(\lambda\pi)^s ((s-1)!)^{-1} \exp\{-\lambda\pi r_s^2\} \cdot r_s^{2s-1} dr_s,$$

так что $2\lambda\pi r_s^2$ распределено как χ^2 с $2s$ степенями свободы. В действительности совместное распределение случайных величин $r_1^2, r_2^2, r_3^2, \dots$ совпадает с распределением расстояний до ближайшей, второй ближайшей, ... точки на прямой, на которой появляются случайные точки с плотностью $\lambda\pi$. Эта эквивалентность видна непосредственно.

2.26 Эти результаты могут быть использованы для оценки плотности точек на плоскости путем выбора случайных точек и измерения расстояний до s -го ближайшего соседа. Среднее значение r_s^2 равно $s(\lambda\pi)^{-1}$, и если мы собираемся использовать некоторое число таких измерений, то лучше складывать их и брать среднее в качестве оценки для λ^{-1} , чем складывать смещенные оценки для λ . Предположим, что y_1, \dots, y_n — n значений r_1^2 и $Y = n^{-1}(y_1 + \dots + y_n)$. Тогда математическое ожидание Y есть $(\lambda\pi)^{-1}$, так что πY есть несмещенная оценка для λ^{-1} и ее дисперсия равна $(n\lambda^2)^{-1}$. В качестве оценки для λ можно взять поэтому $\lambda_1 = (\pi Y)^{-1}$, и для больших n она будет иметь дисперсию $\lambda^2 n^{-1}$. Более того, случайная величина $2\lambda\pi Y$ распределена как χ^2 с $2n$ степенями свободы, так что доверительные границы для λ находятся просто.

На практике вместо использования πr_1^2 для оценки λ^{-1} используется $2r_1$ для оценки $\lambda^{-1/2}$. Из (2.15) ясно,

что среднее значение $2r_1$ есть $\lambda^{-1/2}$ и его дисперсия равна $\pi^{-1}(4-\pi)\lambda^{-1}$. Эффективность процедуры, использующей сумму величин $2r_1$ для оценки λ по сравнению с использованием r_1^2 , поэтому равна $\pi\{4(4-\pi)\}^{-1}=0,9149$.

2.27 Этот результат, а также его различные модификации использовались для оценки плотности растений и деревьев, и читатель, которого интересуют практические аспекты, может обратиться к Грейг-Смит (Greig-Smith, 1957), Мур (Moore, 1954), Котам (Cottam, 1947), Котам и Куртис (Cottam and Curtis, 1949, 1955, 1956), Котам, Куртис и Хал (Cottam, Curtis and Hale, 1953), Морисита (Morisita, 1954), Кларк и Эванс (Klark and Evans, 1954, 1955), Шанкс (Shanks, 1954).

2.28 Некоторые из этих работ плохо демонстрируют те очень простые идеи, на которых основана вся теория. Было предложено множество модификаций таких методов без исчерпывающего теоретического анализа.

Для иллюстрации того, как может применяться теория геометрических вероятностей, в дополнение к изложенному методу, который известен как «метод ближайшей особи», мы кратко рассмотрим четыре других.

(1) Вместо того чтобы выбирать точку P не совпадающей с заданными точками случайного множества (которые, скажем, являются деревьями), мы выбираем случайно одну из точек этого множества и измеряем расстояние до ее ближайшего соседа. Распределение в этом случае такое же, как и раньше.

(2) Как и в первом методе, выбирается независимо от заданных точек некоторая случайная точка P . Пусть Q_1 — ближайший сосед, а Q_2 — ближайший сосед точки Q_1 . Расстояние Q_1Q_2 используется для оценивания λ . Несколько раз утверждалось, что это расстояние имеет то же распределение, что и расстояние в предыдущем случае, однако это совершенно неверно. Мы рассчитаем это распределение для того, чтобы проиллюстрировать методы, которые применяются в таких задачах.

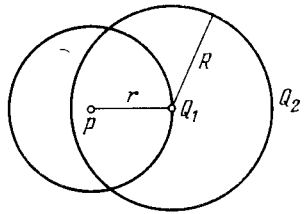


Рис. 2.2.

Пусть r есть расстояние PQ_1 и R — радиус окружности с центром в Q_1 (рис. 2.2). Тогда r имеет распределение

$$2\lambda\pi r e^{-\lambda\pi r^2} dr.$$

Условная вероятность того, что в круге радиуса R с центром в точке Q_1 не окажется случайных точек при условии r , равна

$$e^{-\lambda A(r,R)},$$

где $A(r,R)$ есть площадь области внутри круга с центром Q_1 , лежащей вне окружности с центром в P . Поэтому распределение расстояния x от Q_1 до ближайшего соседа равно

$$2\lambda\pi dx \int_0^\infty r \frac{d}{dx} e^{-\lambda\pi r^2 - \lambda A(r,R)} dr.$$

Этот интеграл трудно вычислить явно, однако среднее значение Q_1Q_2 найти легко. Оно равно

$$2\lambda\pi \int_0^\infty \int_0^\infty rx \frac{d}{dx} e^{-\lambda\pi r^2 - \lambda A(r,R)} dr dx. \quad (2.16)$$

В то же время

$$A = \pi R^2 - r^2 \{\theta - \sin \theta \cos \theta\} - R^2 \{\varphi - \sin \varphi \cos \varphi\},$$

где

$$\theta = \arccos(1 - R^2(2r^2)^{-1}),$$

$$\varphi = \arccos(R(2r)^{-1}).$$

Интегрируя по частям, приводим (2.16) к виду:

$$\lambda^{-1/2} \int_0^\infty \frac{dy}{\{1 + \pi^{-1}A(1, y)\}^{3/2}}. \quad (2.17)$$

Численное интегрирование (2.17) дает 1,191 $\lambda^{-1/2}$. Таким образом, 0,8396 r есть несмещенная оценка для $\lambda^{-1/2}$; ее дисперсия может быть найдена аналогично.

(3) Выбирается точка P и ближайшая к ней точка Q_1 из числа случайных точек. Измеряется расстояние r до ближайшей к Q_1 точки Q_2 , лежащей по другую сторону прямой, проходящей через P перпендикулярно PQ_1 .

(рис. 2.3). Среднее распределение расстояния Q_1Q_2 может быть найдено из тех же соображений, что и в предыдущем примере, однако вычисления окажутся несколько более трудными.

(4) Точка P выбирается случайно и через нее проводятся две взаимно перпендикулярные прямые в направлениях, фиксированных заранее. Измеряются расстояния y_1, y_2, y_3, y_4 от P до ближайших случайных точек в каж-

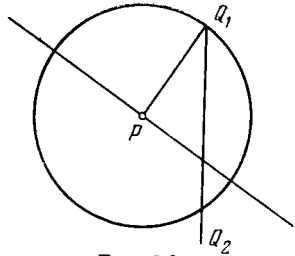


Рис. 2.3.

дом из четырех квадратов. Из сказанного выше следует, что случайные величины $\frac{1}{2} \lambda \pi y_i^2$ ($i=1, 2, 3, 4$) независимы и распределены как χ^2 с двумя степенями свободы. Поэтому

$$\frac{1}{16} \pi (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2)$$

является несмещенной оценкой для λ^{-1} с дисперсией $\frac{1}{4} \lambda^{-2}$. Доверительные границы устанавливаются, как выше. В экологической литературе обычно пользуются средними значениями расстояний, а не их квадратов, что, как было показано, неэффективно.

2.29 Остается неясной причина, почему было предложено и использовано так много методов. Методы (2) и (3) математически осложнены, их стандартные ошибки не подсчитаны и они требуют большего труда. По-видимому, лучшей является процедура, при которой исходная точка выбирается случайно и измеряется расстояние до ближайшего или s -го ближайшего соседа. Если распределение точек на плоскости не является чисто случайным, то все эти методы дадут смещение. Теория подобных распределений не затрагивается в этой книге.

Распределение расстояния между двумя точками в круге

2.30 В качестве одной из задач, содержащей фиксированное число точек, рассмотрим распределение расстояния между двумя точками, взятыми внутри круга. Оно

было получено различными авторами и простейший путь состоит в использовании теоремы Крофтона. Мы сначала найдем среднее расстояние между точками P и Q , каждая из которых распределена равномерно внутри круга радиуса R (рис. 2.4).

Пусть A — точка на границе круга, и AOB есть диаметр. Точки, удаленные на расстояние x от A , занимают внутри элементарной дуги элемент площади, равный $(2x \arccos \frac{x}{2R}) dx$, и поэтому среднее удаление от A задается

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2R} 2x^2 \arccos \frac{x}{2R} dx &= \\ = \frac{16R}{\pi} \int_0^{\pi/2} \theta \cos^2 \sin \theta d\theta &= \frac{32R}{9\pi}. \end{aligned}$$

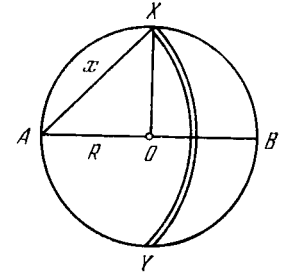


Рис. 2.4.

Пусть $M(R)$ есть среднее расстояние. Тогда, используя (2.4), имеем

$$\frac{dM(R)}{dR} = 2 \left\{ \frac{32R}{9\pi} - M(R) \right\} \frac{2}{R}.$$

Умножая на R^4 и интегрируя, получаем:

$$M(R) R^4 = \frac{128}{45} R^5 + \text{const},$$

а так как $M(0) = 0$, то $\text{const} = 0$, и получаем

$$M(R) = \frac{128}{45} R.$$

Пусть теперь $p(x, R) dx$ есть вероятность того, что PQ лежит в интервале $(x, x+dx)$. Та же плотность для случая, когда P лежит на границе, равна

$$2 \theta x (\pi R^2)^{-1},$$

где $\theta = \arccos x(2R)^{-1}$. Для фиксированного x имеем

$$tg \theta d\theta = R^{-1} dR,$$

так что (2.2) принимает вид

$$\frac{dp}{d\theta} + 4p \operatorname{tg} \theta = \frac{32\theta}{\pi x} \sin \theta \cos \theta.$$

Общий интеграл этого уравнения есть

$$p = \frac{16}{\pi x} (\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin \theta \cos^3 \theta + \theta \cos^4 \theta) + \lambda \cos^4 \theta,$$

где λ является константой. Поскольку $p=0$ при $\theta=0$, имеем

$$p = \frac{16}{\pi x} (\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \sin \theta \cos^3 \theta + \theta \cos^4 \theta) = \\ = \frac{8}{\pi R} (\theta \sin^2 \theta \cos \theta - \sin \theta \cos^2 \theta + \theta \cos^3 \theta).$$

Интегрированием получаем

$$p(x, R) = \\ = \frac{1}{\pi R^2} \left\{ \pi x^2 + (R^2 - x^2)(\pi - 2\alpha) - \frac{1}{2} (2R^2 + x^2) \sin 2\alpha \right\},$$

где $x = 2R \cos \alpha$.

Тот же результат мог быть получен прямым вычислением. Такие вычисления были проделаны Борелем (Borel, 1925), который рассмотрел аналогичную задачу, когда P и Q суть случайные точки внутри треугольников, квадратов и многоугольников вообще. Очевидно, что распределение расстояния PQ и его моменты могут рассматриваться лишь как некоторые из величин, которые можно использовать для характеристики выпуклых областей на плоскости (и, по аналогии, выпуклых областей в многомерных пространствах).

Задача Сильвестра

2.31 Несколько более сложная задача носит название задачи Сильвестра. Она состоит в нахождении вероятности того, что четыре точки A, B, C и D , взятые случайно внутри выпуклой области, составляют выпуклый четырехугольник; это означает, что ни одна из точек не попадает в треугольник, образованный тремя другими.

Рассмотрим вероятность дополнения к этому событию, т. е. вероятность того, что четыре точки не образуют выпуклого четырехугольника. Это может случиться четырьмя различными способами, согласно тому, какая из четы-

рех точек попадает в треугольник, образованный тремя другими. Если область имеет площадь S , а средняя площадь треугольника равна T , то вероятность получить выпуклый многоугольник равна $1 - 4TS^{-1}$.

Поскольку P не зависит от выбора единицы масштаба, то предполагая, что данная выпуклая область включена в выпуклую область большего размера, но той же формы и ориентации, получаем $dP=0$. Из (2.2) заключаем поэтому что $P=P_1$, где P есть вероятность выпуклого четырехугольника, когда одна из точек расположена в бесконечно малой присоединенной области. Рассуждение, аналогичное предшествующему, дает

$$P_1 = 1 - 3T_1S^{-1},$$

где T_1 есть средняя площадь треугольника, одна из точек которого лежит на границе. Имеется в виду, что относительно положения точки на границе усреднение производится с весом, пропорциональным приращению площади вблизи данной точки границы. Множитель 3 появляется вместо 4 потому, что внутри области случайно выбираются теперь лишь три вершины.

Следующее рассуждение проходит непосредственно для любой выпуклой фигуры. Однако ради простоты мы будем придерживаться традиционного изложения в терминах выпуклого многоугольника, одной из фиксированных вершин которого является точка A . Пусть всего имеется n вершин; соединяя A с остальными $n-1$ вершинами, получаем $n-1$ треугольников. Их площади обозначим через S_1, \dots, S_{n-1} (рис. 2.5).

Пусть T_{ij} есть средняя площадь треугольника, из трех вершин которого одной является A , а две другие выбираются случайно в i -м и j -м треугольниках ($i=j$, либо $i \neq j$). Тогда

$$\left(\sum_{i=1}^{n-1} S_i \right)^2 T_1 = \sum_{i=1}^{n-1} S_i^2 T_{ii} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n-1} S_i S_j T_{ij}. \quad (2.18)$$

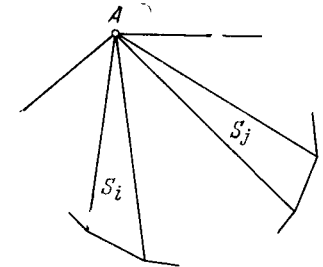


Рис. 2.5.

Предположим сначала, что $i \neq j$, B есть случайная точка в S_i , а C есть случайная точка в S_j . Если B фиксировано, то средняя площадь треугольника ABC , очевидно, равна ABG_j , где G_j есть центр тяжести треугольника j . Варьируя затем B , получаем, что среднее значение ABC есть AG_1G_j .

Если $i=j$, то мы сначала замечаем, что T_{ii} должно иметь форму λS_i , где λ не зависит от размеров и формы S_i . Это следует из того, что всегда возможно преобразовать данный треугольник в любой другой перпендикулярным проектированием треугольника с одной плоскости на другую с последовательным изменением масштаба. При этом площади S_i и ABC умножаются на один и тот же множитель и вероятности попадания точек в соответствующие области остаются неизменными. Если AXY есть некоторый треугольник, W — середина стороны XY , G_1 и G_2 — центры тяжести AXW и AWY , а S — площадь AXY , то мы имеем

$$S^2 \lambda S = 2 \left(\frac{1}{2} S \right)^2 \lambda \frac{1}{2} S + \frac{1}{2} S^2 (AG_1G_2). \quad (2.19)$$

Легко видеть, что площадь AG_1G_2 равна $\frac{2}{9} S$. Поэтому решая (2.19) относительно λ , находим $\lambda = \frac{4}{27}$. Таким образом,

$$T_{ii} = \frac{4}{27} S_i.$$

2.32 Для всякой выпуклой области сумма (2.18) переходом к пределу может быть превращена в интеграл. Предположим, что A есть точка на границе области, а сама область определяется функцией $p(\theta)$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), где $p(\theta)$ есть расстояние от границы до A вдоль прямой, составляющей с касательной в A угол θ (рис. 2.6). Тогда (2.18) переходит в интеграл

$$S^2 T_1 = \frac{1}{18} \int_0^\pi \int_0^\pi p^3(\theta) p^3(\varphi) \sin |\theta - \varphi| d\theta d\varphi.$$

С помощью этой формулы можно оценить T_1 для каждого частного случая.

2.33 Сначала рассмотрим треугольник AXY . Предположим, что его площадь увеличивается передвижением стороны XY параллельно самой себе. Пусть W есть точка на XY на расстоянии x от X . Мы должны оценить T , когда W служит фиксированной вершиной случайного треугольника, а затем усреднить по всем положениям W , принимая, что x равномерно распределена на XY (рис. 2.7).

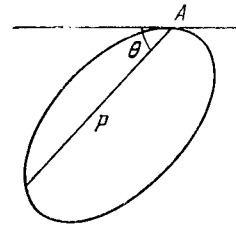


Рис. 2.6.

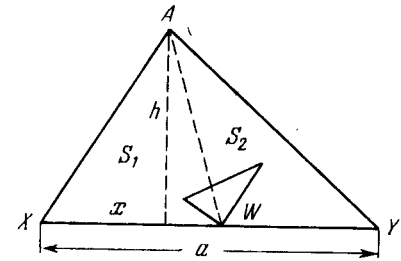


Рис. 2.7.

Пусть S_1 и S_2 — площади AXW и AWY и $S = (S_1 + S_2)$ — площадь AXY . Если $XY = a$, а высота треугольника равна h , то $S = \frac{1}{2} ah$, $S_1 = \frac{1}{2} xh$, $S_2 = \frac{1}{2} (a-x)h$ и, в старых обозначениях,

$$S^2 T = S_1^2 T_{11} + S_2^2 T_{22} + 2S_1 S_2 T_{12}.$$

Подставляя значения всех T , получаем

$$T = \frac{h}{2a^2} \left\{ \frac{4}{27} x^3 + \frac{4}{27} (a-x)^3 + \frac{2}{9} ax(a-x) \right\}.$$

Далее имеем

$$T_1 = h(2a^3)^{-1} \int_0^a \left\{ \frac{4}{27} x^3 + \frac{4}{27} (a-x)^3 + \frac{2}{9} ax(a-x) \right\} dx = \frac{1}{18} ah = \frac{1}{9} S.$$

Таким образом,

$$P = 1 - 3T_1 S^{-1} = \frac{2}{3} = 0,6667.$$

2.34 В случае окружности можно представлять себе, что расширенная область есть концентрическая окружность. Все положения фиксированной точки на границе тогда равновероятны и вследствие симметрии нет нужды в усреднении. Пусть a есть радиус окружности. Тогда $P = 1 - 3T_1(\pi a^2)^{-1}$. Используя точку A на границе в качестве центра полярных координат, измеряем (как делали ранее) углы от касательной в точке A . Получаем

$$T_1 = \frac{32a^3}{9\pi^2} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \sin^3 \varphi \sin |\theta - \varphi| d\theta d\varphi = \frac{35a^3}{36\pi}.$$

Тогда

$$P = 1 - 35(12\pi^2)^{-1} = 0,7045\dots$$

Дельтейль (Deltheil, 1926) выполнил аналогичные вычисления для общего выпуклого четырехугольника. Для частного случая параллелограмма или прямоугольника $P = \frac{25}{36} = 0,6944$. Можно показать, что значение P для каждого выпуклого четырехугольника лежит между этим значением и 0,6667, значением, отвечающим треугольникам.

Для правильного шестиугольника $P = \frac{683}{972} = 0,7029$, а для восьмиугольника

$$P = \frac{2851 + 2013 \sqrt{2}}{4032 + 2880 \sqrt{2}} = 0,7030.$$

Таким образом, P есть характеристическое число выпуклой области, которое зависит от ее формы, но не от размеров. Дельтейлем показано, что для любой выпуклой фигуры P не меньше, чем ее значение для треугольника. Им высказано предположение, что для всех выпуклых фигур P не превосходит своего значения для окружности (эллипса). Это предположение не доказано.

Непересекающиеся круги на плоскости

2.35 По аналогии со схемой случайных непересекающихся интервалов на прямой было бы желательно определить случайные непересекающиеся круги на плоскости. Такого определения не существует и здесь возникают

большие трудности, что вытекает из следующих соображений. Предположим, что все круги имеют диаметр d и один из них имеет центр в точке P . На расстоянии от P меньшем, чем $2d$, не могут находиться центры других окружностей. Однако вероятность иметь центр круга на малом участке dS , отстоящем от P на расстояние $R > 2d$, не пропорциональна только R и, вообще говоря, она не есть монотонная функция от R . Это можно увидеть при рассмотрении предельного случая, когда плотность кругов становится настолько высокой, что они расположены почти как в случае «плотнейшей упаковки» (т. е. их центры лежат почти на вершинах решетки из равносторонних треугольников). В этом случае вероятность того, что в области dS , удаленной от центра заданного круга на R , лежит центр, есть функция от R с ярко выраженными пиками.

2.36 Другой подход к проблеме (для случая n непересекающихся кругов внутри области D) мог бы состоять в том, что круги помещаются в область один за другим, причем на каждом шагу все подходящие положения считаются равновероятными (аналогичный метод мы обсуждали выше для интервалов на прямой). Однако нетрудно видеть, что распределения положений различны для различных кругов, так как они зависят от порядкового номера круга в последовательности их помещения в область.

Аналогичные трудности возникают в случае случайных непересекающихся шаров в пространстве, на чем мы остановимся позднее.

2.37 Если плотность кругов низка, то не возникнет большой ошибки, если их центры рассматривать как точки, распределенные на плоскости случайным образом, поскольку вероятность того, что два центра будут удалены на расстояние меньше, чем $2d$, оказывается малой. Интересное применение этой модели встречается в лесоводстве (Биттерлик (Bitterlick, 1948, стр. 148), Гроссенбах (Grosenbaugh, 1952a, 1952b) и Шанкс (Shanks, 1954)). Предположим, что круги, представляющие стволы деревьев, распределены случайно и достаточно просторно, чтобы можно было пользоваться указанной аппроксимацией. Пусть ожидаемое число стволов на любой площади dS равно λdS , и предположим, что вероятностное рас-

пределение диаметров d стволов есть $f(d)$. Тогда средняя площадь, покрываемая стволами деревьев, равна

$$\frac{1}{4} \pi \lambda \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx.$$

Предположим, что выбрана случайная точка P и подсчитывается число N тех деревьев, стволы которых из точки P видны под углом, большим чем α . Такой подсчет легко произвести при надлежащем выборе α с использованием инструментов, которые сконструированы для этой цели. При этом данное дерево учитывается, если

$$d > 2R \sin \alpha.$$

Среднее число подсчитанных деревьев с диаметрами стволов, лежащими в пределах $(d, d+dx)$, поэтому равно

$$\pi \lambda f(d) \left(\frac{d}{2 \sin \alpha} \right)^2 dx.$$

Усредняя по всем значениям d , находим, что среднее число подсчитанных деревьев равно

$$\frac{\pi \lambda}{4 \sin^2 \alpha} \int_0^{\infty} x^2 f(x) dx = (\text{средняя площадь стволов на единицу площади}) \cdot (\sin^2 \alpha)^{-1}.$$

На практике α можно выбрать равным $1^\circ 44'$ и тогда десять раз взятое число подсчитанных стволов даст оценку числа квадратных футов площади стволов, приходящихся на акр.

Случайные точки в трехмерном пространстве

2.38 Теперь мы рассмотрим точки в трехмерном пространстве. Будем опять предполагать, что число точек, появляющихся во всякой области объема V , есть пуассоновская случайная величина со средним λV . Пусть P есть фиксированная точка и r_1, r_2, \dots — расстояния до ближайшей случайной точки, второй ближайшей случайной точки и т. д. Вероятность того, что в шаре радиуса r с

центром в точке P не окажется случайной точки, равна

$$\exp \left\{ -\frac{4}{3} \lambda \pi r^3 \right\}.$$

Следовательно, распределение r_1 таково, что $\frac{4}{3} \lambda \pi r_1^3$ имеет экспоненциальное распределение, т. е. имеет вид

$$4 \lambda \pi r_1^2 \exp \left\{ -\frac{4}{3} \lambda \pi r_1^3 \right\} dr_1.$$

Этот же факт можно выразить, говоря, что $\frac{8}{3} \lambda \pi r_1^3$ имеет распределение χ^2 с двумя степенями свободы. Аналогично, распределение r_s есть

$$3 \left(\frac{4}{3} \lambda \pi \right)^s (\Gamma(s))^{-1} \exp \left\{ -\frac{4}{3} \lambda \pi r_s^3 \right\} \cdot r_s^{3s-1} dr_s.$$

Вероятность того, что точка окажется в сферической области $(r, r+dr)$, равна $4 \lambda \pi r^2 dr + o(dr)$; следовательно, случайные величины

$$\frac{4}{3} \lambda \pi r_1^3, \quad \frac{4}{3} \lambda \pi (r_2^3 - r_1^3), \dots$$

распределены, как расположенные справа от фиксированной точки на прямой интервалы, концы которых суть последовательные случайные точки, появляющиеся с единичной плотностью.

Эти распределения известны уже давно, но многократно переоткрывались (см., например, Герц (Hertz, 1909), Пеппер (Pepper, 1929)). Имеются интересные применения в астрономии, два из которых мы кратко рассмотрим.

Парадокс Ольберса

2.39 Первый парадокс Ольберса касается яркости ночного неба (Бонди (Bondi, 1952)). Этот парадокс возникает, когда принимается, что существует бесконечное число звезд, равномерно и случайно распределенных в бесконечном пространстве. Воспринимаемая глазом яркость звезды, поделенная на покрываемый звездой телесный угол, не зависит от размеров и положения звезды при

условии, что последняя имеет на своей поверхности постоянную яркость. Для простоты предположим, что все звезды имеют одинаковый диаметр δ и одинаковую поверхностную яркость, и пусть λ — среднее число звезд в единичном объеме. Если диски звезд, лежащих на расстояниях от точки наблюдения, не превышающих R , покрывают долю Y полного телесного угла 4π , то телесный угол, равный $4\pi(1-Y)$, оказался бы темным, если за R не было бы других звезд. Ожидаемое число звезд в области $(R, R+dR)$ равно $4\lambda\pi R^2 dR$ и они покрывают общий телесный угол, равный $\lambda\pi^2\delta^2 dR$, из которого в среднем доля Y будет экранирована ближними звездами. Поэтому приращение телесного угла, освещенного звездами в $(R, R+dR)$, будет составлять $\lambda(1-Y)\pi^2\delta^2 dR$, и мы получаем

$$\frac{dY}{dR} = \lambda(1-Y)\pi^2\delta^2 dR.$$

Таким образом,

$$\log(1-Y) = \text{const} - \lambda(1-Y)\pi^2\delta^2 R$$

и поэтому $Y \rightarrow 1$ при $R \rightarrow \infty$. То же рассуждение применимо к любому частному телесному углу с вершиной в P и поэтому ночное небо должно было бы быть равномерно ярким, что противоречит наблюдениям.

Читателю понятно, что если бы существовала равномерно распределенная межзвездная пыль, которая действовала бы как экран, то предыдущий вывод не имел бы места. Однако это объяснение парадокса неприемлемо, так как пыль должна была бы переизлучать ту энергию, которую она получает. У Бонди имеется обширное обсуждение различных физических теорий, которые были предложены для объяснения этого результата.

Задача Хольцмарка

2.40 Более трудная задача, решенная Хольцмарком (Holtzmark, 1919a, 1919b, 1924) (см. также Чандрасекар (Chandrasekhar, 1943a, 1943b, 1944a, 1944b)), состоит в нахождении распределения гравитационной силы в некоторой точке пространства, возникающей при случайном распределении звезд. Записывая силу в виде вектора

$\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$, будем обозначать это распределение так:

$$W(\mathbf{F}) dF_1 dF_2 dF_3.$$

Пусть звезды распределены по Пуассону так, что ожидаемое число их в объеме V равно λV . Если в шаре радиуса R с центром в точке O имеется N звезд, то в точке O сила будет равна

$$\mathbf{F} = G \sum_{i=1}^N \frac{M_i}{|\mathbf{r}_i|^3} \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i,$$

где M_i — масса i -й звезды, а $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ есть вектор из O в центр звезды. Мы получим требуемое распределение, полагая, что N звезд занимают случайное положение внутри шара и устремляя затем R и N к бесконечности таким образом, что

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \lambda = N.$$

Распределение силы \mathbf{F}_0 , вызванной N звездами в точке O , задается выражением

$$\begin{aligned} W_N(\mathbf{F}_0) dF_1 dF_2 dF_3 = \\ = dF_1 dF_2 dF_3 \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{0}\cdot\mathbf{F}} A_N(\boldsymbol{\rho}) d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ — вектор, а $A_N(\boldsymbol{\rho})$ — характеристическая функция распределения случайного вектора \mathbf{F} . Поскольку \mathbf{F} есть векторная сумма N сил, вызванных каждой из N звезд, то эта характеристическая функция будет произведением характеристических функций распределений сил, вызываемых отдельными звездами; поэтому она имеет вид

$$\prod_{i=1}^N \int_0^{\infty} dM_i \int_{|\mathbf{r}_i|=0}^R \int e^{i\mathbf{0}\cdot\mathbf{F}\tau(M)} dx_i dy_i dz_i.$$

Здесь произведено усреднение по распределению масс отдельных звезд, причем предполагается, что массы звезд не зависят от положений и $\tau(M)$ — плотность вероятности.

Поэтому $A_N(\rho)$ можно переписать в виде

$$\left\{ \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^\infty dM \int_{|r|=0}^R \int \tau(M) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varphi}} dx dy dz \right\}^N,$$

где $\boldsymbol{\varphi} = GM \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$.

Устремляя R и N к бесконечности, получаем

$$W(\mathbf{F}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{i\mathbf{q} \cdot \mathbf{F}} A(\rho) d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3,$$

где

$$A(\rho) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^\infty dM \int_{|r|=0}^R \int \tau(M) e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varphi}} dx dy dz \right\}^{\frac{4\pi R^3 \lambda}{3}}$$

По определению

$$\frac{3}{4\pi R^3} \int_0^\infty dM \int_{|r|=0}^R \int \tau(M) dx dy dz = 1.$$

На этом основании запишем $A(\rho)$ в виде

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^\infty dM \int_{|r|=0}^R \int \tau(M) \{1 - e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varphi}}\} dx dy dz \right\}^{\frac{4\pi R^3 \lambda}{3}}.$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi}$ есть величина порядка $O(|\mathbf{r}|^{-2})$, но поскольку интеграл по шару есть интеграл от нечетной функции аргументов x, y и z , то интегрируется в действительности функция порядка $O(|\mathbf{r}|^{-4})$. Следовательно, если интеграл распространить на все пространство, он будет абсолютно сходящимся. Мы можем написать поэтому

$A(\rho) =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^\infty dM \int_{|r|=0}^\infty \int \tau(M) \{1 - e^{i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varphi}}\} dx dy dz \right\}^{\frac{4\pi R^3 \lambda}{3}} = \\ &= \exp\{-\lambda C(\rho)\}, \end{aligned}$$

где

$$C(\rho) = \int_0^\infty dM \int_{|r|=0}^\infty \int \tau(M) \{1 - \exp(i\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\varphi})\} dx dy dz.$$

Пусть вектор $\boldsymbol{\varphi}$ имеет компоненты $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Заменим переменные интегрирования x, y, z на $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Вычислением якобиана нетрудно установить, что

$$dx dy dz = -\frac{1}{2} (GM)^{3/2} |\boldsymbol{\varphi}|^{-9/2} d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3.$$

Таким образом,

$$C(\rho) = \frac{1}{2} G^{3/2} \int_0^\infty M^{3/2} \tau(M) dM \times$$

$$\times \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \{1 - \exp(i\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\varphi})\} |\boldsymbol{\varphi}|^{-9/2} d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3 =$$

$$= \frac{1}{2} G^{3/2} \mu_{3/2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \{1 - \exp(i\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\varphi})\} = |\boldsymbol{\varphi}|^{-9/2} d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3,$$

где $\mu_{3/2}$ есть ожидаемое значение $M^{3/2}$. Подынтегральная функция не меняется при замене $\boldsymbol{\varphi}$ на $-\boldsymbol{\varphi}$, так что мы можем записать ее как

$$\frac{1}{2} G^{3/2} \mu_{3/2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \{1 - \cos \boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\varphi}\} |\boldsymbol{\varphi}|^{-9/2} d\varphi_1 d\varphi_2 d\varphi_3.$$

Введем теперь трехмерные полярные координаты, взяв $\boldsymbol{\rho}$ в качестве направления оси z . $C(\rho)$ переходит тогда в

$$\frac{1}{2} G^{3/2} \mu_{3/2} |\boldsymbol{\rho}|^{3/2} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \{1 - \cos(zt)\} z^{-5/2} d\omega dt dz,$$

где $0 \leq \omega \leq 2\pi$, $-1 \leq t \leq 1$ и $0 \leq z < \infty$. Интегрируя по ω и t , получаем

$$2\pi G^{3/2} \mu_{3/2} |\boldsymbol{\rho}|^{3/2} \int_0^\infty (z - \sin z) z^{-7/2} dz = \frac{4}{15} (2\pi G)^{3/2} \mu_{3/2} |\boldsymbol{\rho}|^{3/2}.$$

Полагая $a = \frac{4}{15} (2\pi b)^{3/2} \mu_{3/2}$, получаем

$$W(\mathbf{F}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\boldsymbol{\rho} \cdot \mathbf{F} - a|\boldsymbol{\rho}|^{3/2}) d\rho_1 d\rho_2 d\rho_3.$$

Для оценки этого интеграла опять заменим полярные координаты, используя \mathbf{F} как главную ось, и получим

$$\begin{aligned} W(\mathbf{F}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \int_{-1}^1 \exp(-i|\boldsymbol{\rho}||\mathbf{F}|t - a|\boldsymbol{\rho}|^{3/2}) |\boldsymbol{\rho}|^2 dt d|\boldsymbol{\rho}| = \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} |\mathbf{F}|^{-1} \exp(-a|\boldsymbol{\rho}|^{3/2}) |\boldsymbol{\rho}| \sin(|\boldsymbol{\rho}||\mathbf{F}|) d|\boldsymbol{\rho}| = \\ &= \frac{1}{2\pi |\mathbf{F}|^3} \int_0^{\infty} \exp(-ax^{3/2} |\mathbf{F}|^{-3/2}) x \sin x dx. \end{aligned}$$

Величина $a^{2/3}$ имеет размерность силы и, приняв эту величину за единицу, так что $|\mathbf{F}| = \beta a^{2/3}$, получаем, что распределение $|\mathbf{F}|$ имеет вид

$$W(\mathbf{F}) = H(\beta) / 4\pi a^2 \beta^2,$$

где

$$H(\beta) = \frac{2}{\pi \beta} \int_0^{\infty} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{3/2}\right) x \sin x dx.$$

В своей работе 1943 г. Чандрасекар приводит таблицы функции $H(\beta)$ для

$$\beta = 0(0,1) 3,0(0,2) 3,4(1,0) 4,4(0,2) 10,0(5,0) 50,0(10,0) 100,0.$$

2.41 В действительности это распределение лишь незначительно отличается от распределения силы притяжения в нуле, вызванной одной лишь ближайшей звездой. Используя предыдущие результаты, нетрудно найти, что это распределение равно

$$\begin{aligned} W(|\mathbf{F}|) d|\mathbf{F}| &= \\ &= \exp\left(-4\pi(GM)^{3/2} \frac{\lambda}{3} |\mathbf{F}|^{3/2}\right) \cdot 2\pi(GM)^{3/2} \lambda |\mathbf{F}|^{-5/2} d|\mathbf{F}| \end{aligned}$$

Его нетрудно табулировать. Ни от одного из этих результатов нельзя ожидать большой точности при больших значениях \mathbf{F} , поскольку звезды имеют ненулевой объем и их центры не могут сближаться на сколь угодно малые расстояния.

2.42 Те же распределения имеют приложения и в случае, когда имеют дело с электрическим полем в точке внутри газа, состоящего из простых ионов. Более трудные вопросы (в обеих физических задачах) связаны с изучением \mathbf{F} , когда она рассматривается как переменная случайного процесса, являющегося результатом движения звезд (ионов) в пространстве. Они обсуждаются в больших подробностях у Чандрасекара и фон Неймана (Chandrasekhar and von Neumann, 1942, 1943).

Непересекающиеся сферы

2.43 При выводе распределения Хольцмарка мы полагаем, что диаметры звезд настолько малы по сравнению со средним расстоянием до ближайшего соседа, что гипотеза пуассоновского распределения дает удовлетворительное приближение. Здесь опять, как и в случае непересекающихся кругов, кажется невозможным дать простое определение случайного распределения непересекающихся сфер. Такое определение представляло бы большой интерес в теории жидкостей (Гильдебранд (Hildebrand, 1944), Френкель (Frenkel, 1946)).

2.44 Пусть O — центр сферы и все сферы имеют один и тот же диаметр d . Другие сферы не могут иметь центры на расстояниях от O , меньших чем d . Если среднее число сфер в единичном объеме равно λ и если игнорировать эффект ненулевых диаметров, то среднее число сфер, центры которых лежат на расстоянии в интервале $(r, r+dr)$, равно $4\lambda\pi r^2 dr$. Отклонение от идеального состояния может затем быть учтено введением множителя $W(r)$, так что ожидаемое число есть

$$4\lambda\pi W(r) r^2 dr.$$

На практике для расстояний между молекулами в жидкостях путем рентгеновского анализа этот множитель может быть определен. Однако вывести его теоретически

чрезвычайно трудно (Кирквуд и Боггс (Kirkwood and Boggs, 1942)).

2.45 Интересная экспериментальная попытка определить $W(r)$ в ситуации с возможными приложениями была сделана Гильдебрандом и Моррелем (Hildebrand and Morrell, 1936). Некоторое количество желатиновых шаров, в числе которых было несколько окрашенных, было помещено в кубический стеклянный сосуд, содержащий желатиновый раствор той же плотности и того же индекса рефракции. Сосуд многократно встряхивался в двух взаимно перпендикулярных направлениях, так что можно было измерить положения окрашенных шаров. Таким способом была проведена приблизительная оценка $W(r)$ методом Монте-Карло.

2.46 По мере увеличения плотности шаров их распределение стремится к дискретному распределению, которое получается, когда берется множество расстояний от центра одной сферы до ее ближайших соседей при «плотнейшей упаковке» сфер. Оно получается, когда сферы укладываются последовательными слоями, в каждом из которых центры составляют шестиугольную решетку, так что каждый последовательный слой лежит в углублениях предыдущего слоя.

Любопытно, что хотя этот способ и считается уже долгое время плотнейшей упаковкой шаров, однако строгого доказательства этого утверждения до сих пор не предложено.

Распределение двух точек внутри шара

2.47 Нетрудно придумать задачи о фиксированном числе точек в трехмерных областях, аналогичные уже рассмотренным двумерным задачам. Мы рассмотрим только задачу нахождения вероятностного распределения расстояния между двумя точками, взятыми наудачу внутри сферы. Удобно, однако, рассматривать более общую задачу о распределении расстояния между двумя точками внутри гиперсферы n измерений. Эта задача решена Дельтейлем (Deltheil, 1926) с помощью теоремы Крофтона и прямой интеграцией Хаммерсли (Hammersley, 1950). Мы

последуем методу Лорда (Lord, 1954), использовавшего характеристические функции.

2.48 Пусть две точки P и Q внутри гиперсферы определяются векторами \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Найдем распределение $(r_1 - r_2)$ при равномерном распределении P и Q внутри гиперсферы; оно совпадает с распределением $|\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2|$.

Пусть вектор \mathbf{r} определяет точку, имеющую равномерное распределение внутри шара. Обозначим через $P(r)dr$ вероятность того, что $r < |\mathbf{r}| < r + dr$. Если $\rho = (\rho_1, \rho_2, \rho_3)$ — произвольный вектор, то

$$E(e^{i\rho \cdot \mathbf{r}})$$

является характеристической функцией r . Для сферического распределения она есть функция только от $|\rho|$, так что характеристическая функция случайной величины $r = |\mathbf{r}|$ равна

$$\Phi(\rho) = \int_0^{\infty} P(r) \Lambda_{\frac{1}{2}n-1}(r\rho) dr,$$

где $\rho = |\rho|$ и

$$\Lambda_x(x) = \Gamma(1 + \alpha) \left(\frac{1}{2}x\right)^{-\alpha} I_\alpha(x).$$

Формулой обращения является

$$P(r) = 2^{1-\frac{1}{2}n} \left\{ \Gamma\left(\frac{1}{2}n\right) \right\}^{-1} \int_0^{\infty} (r\rho)^{\frac{1}{2}n} I_{\frac{1}{2}n-1}(r\rho) \Phi(\rho) d\rho.$$

Поскольку $I_\alpha(x)$ являются функциями Бесселя, эти формулы соответствуют преобразованиям Ханкеля.

Для равномерного распределения внутри гиперсферы радиуса a имеем

$$P(r) = \begin{cases} nr^{n-1} a^{-n}, & 0 \leq r \leq a, \\ 0, & r > a. \end{cases}$$

Характеристическая функция поэтому равна

$$\Phi(\rho) = \int_0^{\infty} nr^{n-1} a^{-n} \Lambda_{\frac{1}{2}n-1}(r\rho) dr = \Lambda_{\frac{1}{2}n-1}(a\rho).$$

Характеристическая функция $|r| = |r_1 + r_2|$ равна ее квадрату. Поэтому

$$P(r) = n\Gamma\left(1 + \frac{1}{2}n\right) \left(\frac{2r}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}n} \int_0^{\infty} \rho^{-\frac{1}{2}n} I_{\frac{1}{2}n}^2(a\rho) I_{\frac{1}{2}n-1}(r\rho) d\rho.$$

Подставляя в стандартную формулу (Ватсон (Watson, 1944, стр. 411)), находим

$$P(r) = \frac{n\Gamma\left(\frac{1}{2}n + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} r^{n-1} a^{-n} \int_A^{\pi} \cos^2 \frac{1}{2}\varphi d\varphi, \quad (2.20)$$

где $0 \leq A \leq \pi$ и $\sin \frac{1}{2}A = \frac{r}{2a}$.

Положив $t = \cos^2 \frac{1}{2}\varphi$, приводим (2.20) к виду

$$P(r) = nr^{n-1} a^{-n} I_{\mu}\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

где $\mu = 1 - r^2(4a^2)^{-1}$, а $I_x(p, q)$ есть неполная бета-функция:

$$I_x(p, q) = \frac{\Gamma(p+q)}{\Gamma(p)\Gamma(q)} \int_0^x t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt. \quad (2.21)$$

Полагая $2ay = r$, получаем для $n = 1, 2$ и 3 :

$$\begin{aligned} P(r) &= 2(1-y), \\ P(r) &= \frac{16}{\pi} y \arccos\left\{-y(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\right\}, \\ P(r) &= 12y^2(1-y)^2(2+y), \end{aligned} \quad (2.22)$$

что соответствует случаям сегмента, круга и трехмерного шара. В частности, (2.22) есть лишь другой способ записать ранее полученного результата для круга.

2.49 Из (2.21) можно получить значения моментов: r -й момент PQ для сферы радиуса a в n -мерном пространстве равен

$$\frac{n\Gamma(n+1)\Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}\right)(2a)^r}{\Gamma\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}\right)(n+r)\Gamma\left(n + \frac{1}{2}r + 1\right)}.$$

Можно показать, что при возрастании n распределение PQ стремится к нормальному со средним $a^2 2^{1/2}$ и дисперсией $a^2(2n)^{-1}$. Относительно других результатов по этой задаче см. Ватсон (Watson, 1959).

Очевидно, такую же задачу можно поставить и для других областей и в случае цилиндра результаты имеют практическое применение (см. Хаммерсли (Hammersley, 1951a, 1951b, 1952)).

Тем же путем можно получить распределение расстояния между двумя точками, лежащими на поверхности сферы.

СЛУЧАЙНЫЕ ПРЯМЫЕ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Области, определяемые случайными прямыми на плоскости

3.1 Как мы уже видели в главе 1, наиболее естественными координатами для описания прямых на плоскости являются полярные координаты (p, θ) основания перпендикуляра, опущенного из начала на прямую. В этом представлении элемент площади параметрического пространства, инвариантный относительно евклидовых преобразований, есть $dp d\theta$.

Здесь мы предполагаем, что прямые линии распределены случайно в том смысле, что в параметрическом пространстве имеется пуассоновское поле точек с плотностью $\lambda dp d\theta$. Прямые, принадлежащие такому полю, подразделяют плоскость на бесконечное число многоугольных областей, как это показано на рис. 3.1.

3.2 Очень большой интерес представляет вероятностное распределение площади таких областей, однако его аналитическая форма точно неизвестна. Некоторые сведения о нем все же известны (Гоудсмит (Goudsmit, 1945)). Один из подходов состоит в рассмотрении пересечения большого числа случайных хорд круга. Более эlegantен метод (Гоудсмит), состоящий в том, что это распределение рассматривается как предел распределения площадей областей на поверхности

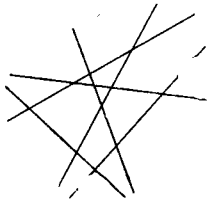


Рис. 3.1.

сферы, когда области образуются большим числом случайных «больших кругов» (кругов, которые получаются при пересечении сферы плоскостями, проходящими через ее центр). Такой круг может быть определен координатами одного из его «полюсов» на поверхности сферы.

Можно предполагать, что каждый из этих полюсов распределен равномерно на поверхности сферы.

3.3 Предположим, что сфера имеет единичный радиус, и пусть n — число больших кругов. Для $n=1$ число различных областей равно 2, для $n=2$ оно равно 4, для $n=3$ оно равно 8, и по индукции легко видеть, что вообще число областей равно $2+n(n-1)$, поскольку, когда мы переходим от n к $n+1$, добавляется $2n$ новых областей. Аналогично, для $n=2, 3, 4$ число сторон (принятое равным числу сегментов больших кругов) равно 4, 12 и 24 соответственно. Для любого n оно равно $2n(n-1)$. Поэтому, когда n возрастает, средняя площадь асимптотически равна $4\pi n^{-2}$, в то время как среднее число сторон квазимоногоугольных областей будет равно пределу величины $\frac{4n(n-1)}{2+n(n-1)}$, т. е. 4. (Числитель равен $4n(n-1)$, а не $2n(n-1)$, потому что каждый сегмент большого круга служит стороной для двух многоугольников и должен подсчитываться дважды.) Общий периметр $2+n(n-1)$ областей равен удвоенной длине больших кругов, т. е. $4\pi n$. Отсюда средний периметр области асимптотически равен $4\pi n^{-1}$ и средняя длина каждой стороны равна πn^{-1} .

3.4 Теперь предположим, что n очень велико, и рассмотрим распределение областей в малом круге радиуса r на поверхности сферы. Число больших кругов, пересекающих этот малый круг, асимптотически равно $\pi n r$. Переходя к пределу и приближенно рассматривая область внутри малого круга как плоский круг, по изменению масштаба находим, что средняя площадь областей на плоскости, образованных пуассоновским полем с плотностью $\lambda dp d\theta$, равна $(\pi\lambda^2)^{-1}$. В своей неопубликованной работе Д. Кендалл нашел также и второй момент площади, однако точное распределение до сих пор неизвестно. Аналогичное рассуждение можно провести для областей, образованных случайными плоскостями в пространстве, как это мы увидим в следующей главе.

Выпуклые фигуры на плоскости

3.5 Значительное число интересных задач в теории геометрических вероятностей связано с выпуклыми фигурами. В большинстве своем в их формулировке участвуют

пересекающие случайные прямые, обычно одна или две. Возникающие тут теории тесно связаны с обширной общей теорией выпуклых фигур, подробный обзор которой дан Боннесеном и Фенхелем (Bonnesen and Fenchel, 1948) и который покрывает литературу до 1933 г. (относительно дальнейших работ см. Хадвигер (Hadwiger, 1955)). Теория выпуклых фигур в связи с подсчетом геометрических вероятностей в основном создана Барбье (Barbier, 1860), Крофтоном (Crofton, 1869, 1877, 1885) и Сильвестром (Sylvester, 1891).

3.6 Выпуклая фигура на плоскости есть такое множество на плоскости (обычно замкнутое), что если две точки P_1 и P_2 принадлежат фигуре, то и все точки интервала P_1P_2 также принадлежат ей. Если множество ограничено, то ее граница есть замкнутая кривая, обладающая почти всюду касательной. Граница может быть определена парой периодических функций $\{x(t), y(t)\}$ (скажем, $0 \leq t \leq 1$), которые задают координаты точки на границе, причем $x(1) = x(0)$, $y(1) = y(0)$. Во многих обстоятельствах более удобно определять границу заданием «опорной функции» по отношению к началу O . Эта функция $H(\theta)$

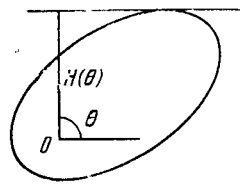


Рис. 3.2.

может быть определена как расстояние от O до касательной, перпендикулярной к лучу, исходящему из точки O в направлении θ (рис. 3.2). Точка O берется обычно внутри выпуклой фигуры, однако если она взята снаружи, то необходимо лишь небольшое изменение определения. $H(\theta)$ — периодическая функция θ с периодом 2π ; функция $H(\theta) + H(\pi + \theta)$

есть длина интервала, равного проекции выпуклой фигуры на любую прямую с направлением θ . Эта длина называется также толщиной фигуры в направлении θ .

3.7 Поскольку мы выбрали $\lambda dp d\theta$ в качестве элемента меры в множестве всех прямых на плоскости, то мера множества всех прямых, пересекающих выпуклую фигуру C , будет равна

$$\lambda \int_0^\pi \{H(\theta) + H(\theta + \pi)\} d\theta = \lambda \int_0^{2\pi} H(\theta) d\theta.$$

Мы покажем, что это выражение равно λL — длине контура C . Это сразу следует из замечания, что когда θ испытывает приращение $d\theta$, соответствующий элемент длины равен $dL = H(\theta) d\theta$. Поэтому можно написать

$$\int_C dp d\theta = L, \quad (3.1)$$

где интеграл берется по той области (p, θ) , для которой прямая пересекает фигуру. Отсюда непосредственно следует, что если выпуклая фигура C_2 длины L_2 содержится в выпуклой фигуре C_1 длины L_1 , то вероятность того, что случайная хорда фигуры C_1 пересекает C_2 , равна $L_2 L_1^{-1}$. Заметим, что эта вероятность не зависит от расположения C_2 относительно C_1 . Далее можно допустить, что C_2 состоит из прямолинейного сегмента

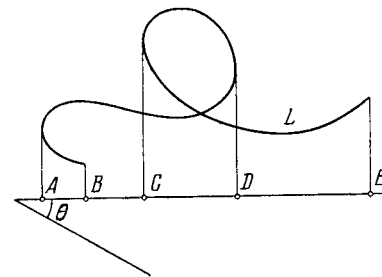


Рис. 3.3.

длины l . Таковой может рассматриваться как предел выпуклой области с длиной периметра, сходящейся в $2l$. Поэтому вероятность того, что случайная хорда C_1 пересекает сегмент, равна $2l L_1^{-1}$.

3.8 На все это можно взглянуть и с другой точки зрения. Рассмотрим отрезок прямой длины l и его проекцию на прямую, направленную под углом θ к отрезку. Длина проекции есть $P(\theta) = l |\cos \theta|$ и среднее значение $P(\theta)$ равно

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} l |\cos \theta| d\theta = \frac{2l}{\pi}. \quad (3.2)$$

Эта формула принадлежит Коши и использовалась Штейнгаузом (Steinhaus, 1930) как основа метода измерения длины кривой, наблюдаемой под микроскопом.

Предположим (рис. 3.3), что кривая L имеет длину L и ее проекция в направлении θ измеряется так, что каждый подынтеграл проекции подсчитывается столько раз, сколько точек на кривой проектируется в него. Так, в слу-

чае, показанном на рисунке, проекция должна браться равной

$$P(\theta) = 2AB + BC + 3CD + DE.$$

Складывая вклады каждого малого элемента кривой, находим

$$L = \frac{\pi}{2} \bar{P},$$

где \bar{P} есть среднее значение $P(\theta)$, взятое по всем направлениям. Для каждого заданного направления $\bar{P}(\theta)$ легко находится, если микроскоп имеет калиброванный подвижный предметный столик.

Для нахождения \bar{P} такие измерения должны быть сделаны для n значений θ , идущих с шагом $2\pi n^{-1}$. Если n нечетно, то это то же самое, что взять среднее по $2n$ наблюдений с шагом πn^{-1} , так что мы рассматриваем только случай, когда $2n$ наблюдений берутся с шагом $2\pi(2n)^{-1}$. Точная верхняя граница ошибки тогда легко находится применением элементарного векторного анализа, поскольку если \bar{P}_{2n} есть среднее, основанное на $2n$ наблюдениях, то

$$\pi \cos \frac{\pi}{2n} \left(2n \sin \frac{\pi}{2n}\right)^{-1} \leq \bar{P}_{2n} \bar{P}^{-1} \leq \pi \left(2n \sin \frac{\pi}{2n}\right)^{-1}.$$

3.9 Теперь вместо предположения, что фигура C_2 лежит внутри C_1 , предположим, что она целиком лежит вне

C_1 . Опять найдем вероятность того, что случайная хорда C_1 пересекает C_2 . Проведем четыре общие касательные AB, CD, EG и FH , причем последние две пересекаются в точке O между контурами (рис. 3.4). По определению, выпуклые фигуры Γ_1 и Γ_2 состоят из фигур C_1 и C_2 вместе с областями,

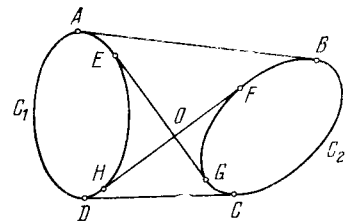


Рис. 3.4.

лежащими внутри касательных из O к каждой из них, так что Γ_1 есть $AEOHD$ и Γ_2 есть $BFOGC$. Пусть L_{12} и L'_{12} — длины шнуров, туго натянутых вокруг C_1 и C_2 , один из которых имеет самопересечение в точке O ,

а другой — нет. Можно написать:

$$\begin{aligned} & (\text{Мера хорд } \Gamma_1) + (\text{Мера хорд } \Gamma_2) = \\ & = (\text{Мера всех прямых, которые пересекают } \Gamma_1 \text{ либо } \Gamma_2) + \\ & + (\text{Мера всех прямых, которые пересекают как } \Gamma_1, \\ & \text{ так и } \Gamma_2). \end{aligned}$$

Из сказанного выше следует, что левая сторона этого уравнения равна сумме периметров Γ_1 и Γ_2 , т. е. L'_{12} (положено $\lambda=1$). Мера прямых, которые пересекают либо Γ_1 , либо Γ_2 , либо обе фигуры вместе, равна L_{12} . Поэтому мера прямых, которые пересекают их одновременно, равна $L'_{12} - L_{12}$, и поскольку мера всех прямых, пересекающих C_1 , есть L_1 , то искомая вероятность равна

$$(L'_{12} - L_{12}) L_1^{-1} \quad (3.3).$$

3.10. Аналогично можно рассмотреть две пересекающиеся выпуклые фигуры. Число пересечений между двумя границами может быть любым четным числом, но с помощью рассуждения, подобного предыдущему, можно установить, что вероятность пересечения фигуры C_2 случайной хордой фигуры C_1 равна

$$(L_1 + L_2 - L_{12}) L_1^{-1},$$

где L_1 и L_2 — периметры C_1 и C_2 , а L_{12} — длина шнура, туго натянутого вокруг фигур (другими словами, длина периметра «наименьшей выпуклой оболочки» фигур C_1 и C_2).

3.11 Теперь рассмотрим пары прямых, пересекающих выпуклую фигуру C длины L . Поскольку мера каждого множества равна L и прямые полагаются независимыми, то подходящей мерой для пары является L^2 *). Для получения вероятности того, что две случайные хорды C пересекутся внутри C , мы должны найти меру всех пар прямых, удовлетворяющих этому условию. Вообще, рассмотрим другую выпуклую фигуру C_1 , лежащую в C (возможно, совпадающую с C), и определим вероятность того, что две случайные хорды C пересекутся внутри C_1 . Пусть AB есть хорда C , пересекающая C_1 , и рассмотрим

*) Дельтейль берет $\frac{1}{2}L^2$, поскольку он считает, что прямые различимы. Несколько ясней различать прямые, считая при этом каждую конфигурацию дважды.

меру хорд C , которые пересекают AB внутри C_1 . Если x есть длина пересечения AB с C_1 , то мера равна $2x$ и вероятность того, что случайная хорда C пересечет это пересечение, равна $2xL_1^{-1}$. Если (p, θ) суть координаты прямой, порождающей хорду AB , то вероятностный элемент, связанный с этой прямой, есть $L_1^{-1} dp d\theta$, откуда полная вероятность того, что две хорды пересекаются в C_1 , есть

$$P = \frac{1}{2} \int \int 2xL_1^{-2} dp d\theta \quad (-\infty < p < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

где интеграл берется по всем положительным и отрицательным значениям p и по всем значениям θ , по которым прямая пересекает C_1 . Интегрируя сначала по p , находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dp = A_1 \quad (\text{т. е. площади } C_1).$$

Таким образом,

$$P = 2\pi A_1 L_1^{-2}. \quad (3.4)$$

В частности, можно допустить, что C и C_1 совпадают, так что

$$P = 2\pi A L_1^{-2}.$$

Для окружности $P = \frac{1}{2}$.

Поскольку $P \leq 1$, то $2\pi A < L_1^2$. Это есть более слабое утверждение, чем классическое изопериметрическое неравенство, которое утверждает, что для каждой замкнутой кривой без самопересечений периметра L , покрывающей площадь A , выполняется

$$4\pi A < L^2.$$

Отсюда следует, что вероятность пересечения двух случайных хорд выпуклой фигуры не превышает $1/2$ (значение для круга).

3.12 Интересно, что эта вероятность (как вытекает из (3.4)), зависит только от площади C_1 , а не ее положения или формы. Поэтому если мы имеем большое количество хорд, их пересечения распределены по фигуре равномерно с «плотностью» 2π .

3.13 С помощью (3.4) можно получить другое доказательство результата Гоудсмита. Для простоты возьмем круг единичного радиуса и предположим, что он имеет n случайных хорд. Если мы добавляем новую хорду, то ожидаемое число ее пересечений с другими хордами есть $\frac{1}{2}n$.

Если учитывать участки, имеющие кусок окружности в составе своей границы, то число новых областей, когда имеет место N пересечений, есть $N+1$, поэтому среднее число областей, когда имеются две хорды, есть

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{n+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n+1)(n+2).$$

Число областей с криволинейными участками границы есть $O(n)$ и поэтому не имеет значения, считаем мы их или нет. Асимптотическое число областей есть $\frac{1}{4}n^2$. Отсюда можно вывести полученный ранее результат о том, что пуассоновское поле прямых с элементом плотности $\lambda dp d\theta$ делит плоскость на области со средней площадью $(\pi\lambda^2)^{-1}$.

Теорема Крофтона о выпуклых фигурах

3.14 Рассмотрим плотность пересечений хорд выпуклой фигуры вне ее. Для этого определим сначала вероятность того, что две случайные хорды C_1 пересекутся внутри выпуклой фигуры C_2 (вне C_1), которая обладает малой площадью и размерами (рис. 3.5).

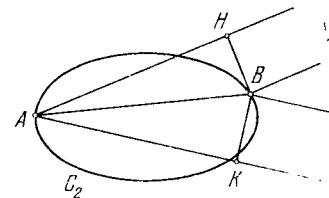


Рис. 3.5.

Пусть AB есть пересечение некоторой хорды C_1 с C_2 . Из A и B проведем касательные к C_1 . Из (3.3) следует, что мера всех хорд C_1 , которые пересекают также AB , есть разность между длинами шнуров, натянутых вокруг C_1 и AB , один из которых имеет самопересечение, а другой не имеет. Поскольку фигура C_2 исчезающе мала, касательные из A и B попарно параллельны. Пусть BK и BH суть перпендикуляры из B на

касательные, проходящие через A . Искомая мера тогда есть $2AB - AH - AK$. Пусть $\theta, \theta_1, \theta_2$ — направления AB, AK и AH , так что

$$2AB - AH - AK = AB [2 - \cos(\theta - \theta_1) - \cos(\theta - \theta_2)].$$

Интегрируя по всем возможным значениям параметров, определяющих прямую AB , получаем

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \int AB \{2 - \cos(\theta - \theta_1) - \cos(\theta - \theta_2)\} dp d\theta.$$

Интегрируя по p , получаем

$$\int AB dp = \text{площадь } C_2.$$

Так что «плотность» пересечений пар хорд фигуры C_1 равна

$$\delta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \{2 - \cos(\theta - \theta_1) - \cos(\theta - \theta_2)\} d\theta = \\ = 2\{(\theta_1 - \theta_2) - \sin(\theta_1 - \theta_2)\}.$$

Мера всех пар хорд фигуры C_1 , которые пересекаются внутри области D вне C_1 , задается поэтому интегралом

$$2 \iint_D (\alpha - \sin \alpha) dx dy,$$

где α — угол, под которым видна фигура C_1 из точки (x, y) . В этой формуле в качестве D можно взять всю плоскость вне C_1 . Поскольку мера всех хорд C_1 есть L^2 , имеем

$$2 \iint_{\Omega - C_1} (\alpha - \sin \alpha) dx dy = L^2 - 2\pi A_1 \geq 0, \quad (3.5)$$

где Ω — вся плоскость. Это есть первая теорема Крофтона о выпуклых фигурах.

3.15 Лебег (Lebesgue, 1912) дал другой вывод (3.5). Рассмотрим прямые l и l' (мы будем требовать, чтобы они принадлежали определенным множествам прямых E и E') и допустим, что их уравнения записываются как

$$(l) \quad x \cos \theta + y \sin \theta = p, \\ (l') \quad x \cos \theta' + y \sin \theta' = p'.$$

Мера точек их пересечения тогда равна

$$\iint_E \iint_{E'} dp d\theta dp' d\theta'.$$

Считая θ и θ' постоянными, мы можем рассматривать p и p' как функции от (x, y) , координат пересечения l и l' . Якобиан преобразования равен

$$\left| \frac{\partial(p, p')}{\partial(x, y)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \theta' & \sin \theta' \end{vmatrix} = |\sin(\theta' - \theta)|$$

и интеграл принимает вид

$$\iint \left\{ \iint |\sin(\theta' - \theta)| d\theta d\theta' \right\} dx dy,$$

так что «плотность» пересечений в точке (x, y) есть интеграл

$$\iint |\sin(\theta' - \theta)| d\theta d\theta',$$

взятый по соответствующей области значений θ и θ' . Когда E и E' состоят из прямых, пересекающих выпуклую область C , оба угла θ и θ' меняются в пределах от θ_0 до $\theta_0 + \alpha$. Поскольку интеграл не зависит от θ_0 , мы можем считать θ_0 нулем. Тогда получаем

$$\int_0^\alpha d\theta' \left\{ \int_0^{\theta'} \sin(\theta' - \theta) d\theta - \int_0^\alpha \sin(\theta' - \theta) d\theta \right\} = \\ = \int_0^\alpha \{1 - \cos \theta' - \cos(\alpha - \theta') + 1\} d\theta' = 2\alpha - 2\sin \alpha,$$

что мы и имели выше.

3.16 В методе доказательств «первой» теоремы Крофтона о выпуклых фигурах, принадлежащем Лебегу, использовалась мера в пространстве пар прямых на плоскости. Пусть две точки P и P' с координатами (x, y) и (x', y') лежат в множествах E и E' (возможно, совпадающих). Естественной мерой пар (P, P') является

$$\iint_E \iint_{E'} dx dy dx' dy'. \quad (3.6)$$

Пусть

$$x \cos \theta + y \sin \theta = p, \quad x \sin \theta - y \cos \theta = 0$$

— уравнения прямой PP' и перпендикуляра на PP' из начала координат. Если (ξ, η) есть точка на плоскости, то ее расстояние от прямой $x \sin \theta - y \cos \theta = 0$ задается выражением $\xi \sin \theta - \eta \cos \theta$ (при подходящем соглашении о знаке расстояния). Поэтому набор координат (x, y, x', y') пары P, P' можно заменить координатами $(\rho, \theta, \rho', \theta')$, где

$$\begin{aligned}x &= \rho \sin \theta + \rho' \cos \theta, \\y &= -\rho \cos \theta + \rho' \sin \theta, \\x' &= \rho' \sin \theta + \rho \cos \theta, \\y' &= -\rho' \cos \theta + \rho \sin \theta.\end{aligned}$$

Легко найти, что якобиан равен $\rho' - \rho$. Интеграл (3.6) переходит в

$$\iiint |\rho' - \rho| d\rho d\rho' d\theta.$$

Соответствующая область интегрирования часто проще, чем первоначальная.

Вторая теорема Крофтона о выпуклых фигурах

3.17 Чтобы показать это, рассмотрим выпуклую фигуру C площади A . Мера всех пар точек внутри фигуры равна A^2 , считая каждую пару (в геометрическом смысле) дважды. Относительная плотность пар точек на хорде AB дается интегралом

$$\iint |\rho' - \rho| d\rho d\rho',$$

где пары имеют соответствующие значения координат (ρ, ρ') . Легко установить, что этот интеграл равен $\frac{1}{3} l_{AB}^3$, где l_{AB} — длина хорды AB . Поэтому интеграл, представляющий меру всех пар точек в C , может быть записан как

$$\frac{1}{3} \iint l_{AB}^3 d\rho d\theta,$$

где l_{AB} есть длина хорды, отсекаемой у прямой с полярными координатами (ρ, θ) . Мы уже показали, что эта

мера равна S^2 ; итак, мы получаем равенство

$$\iint l_{AB}^3 d\rho d\theta = 3S^2,$$

которое и является «второй» теоремой Крофтона.

В частности, отметим, что размерность формулы верна, так как правая и левая части являются четвертой степенью длины.

3.18 Этот результат легко обобщить и получить среднее значение n -й степени расстояния между двумя точками, выбранными случайно внутри выпуклого контура. Действуя, как и раньше, находим, что это среднее есть

$$\begin{aligned}A^{-2} \iint \left\{ \int |\rho - \rho'|^{n+1} d\rho d\rho' \right\} d\rho d\theta &= A^{-2} \times \\ \times \iint \left[\int_0^{l_{AB}} d\rho' \left\{ \int_0^{\rho'} |\rho' - \rho|^{n+1} d\rho + \int_{\rho'}^{l_{AB}} |\rho' - \rho|^{n+1} d\rho \right\} \right] d\rho d\theta &= \\ &= A^{-2} \int \frac{2}{(n+2)(n+3)} l_{AB}^{n+3} d\rho d\theta.\end{aligned}$$

Для круга среднее расстояние между двумя точками

$$\text{равно } \frac{1}{6\pi^2 R^4} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R 16(R^2 - \rho^2)^2 d\rho = \frac{128R}{45\pi}, \quad \text{что совпа-}$$

дает с полученным ранее. Аналогично можно получить характеристическую функцию расстояния между двумя точками.

3.19 Крофтоном (Crofton, 1877) даны и другие теоремы о средних значениях, из которых следующая является типичной. Рассмотрим выпуклую фигуру C с центром O . Это значит, что $H(\theta) = H(\theta + \pi)$ относительно O , и каждая хорда, проходящая через O , делится точкой O пополам. Пусть θ — направление такой хорды и G — центр тяжести одной из двух половин, на которые фигура делится хордой. Мы покажем, что среднее расстояние точек фигуры от O равно одной четвертой длины кривой, очерчиваемой G при изменении θ от нуля до 2π .

Пусть $X\bar{Y}$ — хорда, проходящая через O , а \bar{x}, \bar{y} — координаты G по отношению к $O\bar{Y}$, взятой в качестве

оси x . Если XOY поворачивается на малый угол θ в новое положение $X'O'Y'$, то новое положение G в старых осях задается соотношением

$$\bar{x}' = \bar{x} + d\bar{x} = A^{-1} \left\{ A\bar{x} + \frac{2}{3}aw + \frac{2}{3}aw \right\},$$

где A — площадь половины фигуры, a — расстояние $OX=OY$, w — «вес», связанный с областями XOX' и YOY' . Очевидно,

$$w = \frac{1}{2} a^2 d\theta \quad \text{и} \quad A = \int_0^\pi \frac{1}{2} a^2 d\theta.$$

Аналогично

$$\bar{y}' = \bar{y} + d\bar{y} = \bar{y}.$$

Итак, G смещается параллельно XOY и, обозначая через ds элемент длины его пути, получаем

$$ds = d\bar{x} = \frac{2}{3} a^3 A^{-1} d\theta,$$

так что радиус кривизны этого пути есть

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{2}{3} a^3 A^{-1} = \frac{1}{6} l^3(\theta) A^{-1},$$

где $l(\theta)$ есть длина $X'Y=2a$. Длина пути, пробегаемого G , есть

$$M = \int ds = (6A)^{-1} \int l^3(\theta) d\theta,$$

в то время как среднее расстояние точек фигуры от O равно

$$\frac{A^{-1}}{3} \int a^3(\theta) d\theta = \frac{1}{4} M.$$

Этот результат может быть также получен вычислением двумя различными путями вероятности такого расположения случайной хорды и случайной точки фигуры, что центр фигуры и случайная точка лежат по разные стороны хорды.

Приложения в экологии

3.20 Теория пересечения случайных прямых с выпуклыми или другими фигурами была приложена Макинтайром (McIntyre, 1953) к оценке растительного покрова или плотности ареала в экологии. Фигуры могут иметь

общую форму, либо быть выпуклыми, либо кругами, и чем сильнее предположения, которые разумно принять, тем сильнее заключения, к которым можно прийти. Используется метод помещения на исследуемый участок случайной прямой длины L , называемой секущей (transect), после чего и измеряются пересечения с областями, которые, например, могут являться пятнами растительности определенного вида.

Предположим сначала, что подлежащие оценке области имеют произвольную форму и в среднем занимают часть P общей площади, предполагаемой настолько большой, что граничными эффектами можно пренебречь. Области, которые взаимно не пересекаются, не предполагаются расположенными «случайно» в каком-либо смысле. Предположим, что они пересекают секущую в интервалах длины $l_i (i=1, 2, \dots)$. Тогда

$$L^{-1} \sum l_i$$

является несмещенной оценкой для P . Действительно, рассмотрим какой-нибудь элемент dx секущей. Вероятность того, что этот элемент попадает в какую-нибудь область, равна P , и поскольку математическое ожидание суммы случайных величин равняется сумме математических ожиданий, то математическое ожидание суммы $\sum l_i$ равно LP . Оценка дисперсии получаемой оценки может быть получена путем повторения процесса несколько раз и вычисления выборочной дисперсии.

3.21 Более интересно оценить число областей, входящих на единицу площади всего участка. Это, однако, не может быть сделано без дальнейших предположений о форме областей. Предположим, что они являются кругами, диаметры которых $2R$ случайны и имеют плотность распределения $\phi(2R)$, а ожидаемое число кругов в большой области A с диаметрами, заключенными в пределах $(2R, 2(R+dR))$, равно

$$2\lambda\phi(2R)dR.$$

Ожидаемое общее число кругов в A есть, таким образом, λA .

3.22 Секущая образует хорду или часть хорды в каждом круге, который она пересекает. Мы предположим сначала, что учитываются только те участки секущей, которые являются полными хордами или частью хорды на одном выделенном конце секущей. Пусть таким образом возникают интервалы l'_1, l'_2, \dots . Центры кругов диаметра D , которые могут порождать интервалы

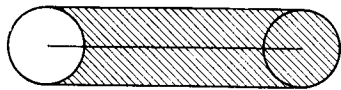


Рис. 3.6.

при таком подсчете, должны лежать в области (типа той, которая заштрихована на рис. 3.6) площади $2RL$.

Вероятность того, что секущая пересечет заданный круг, возрастает вместе с размером круга, и поэтому вероятностное распределение диаметра $2R$ для кругов, которые пересекаются с секущей, будет отличным от $2\varphi(2R)dR$. В действительности ожидаемое число пересечений секущей с кругами, диаметры которых лежат в пределах $(2R, 2(R+dR))$, будет

$$4LR\lambda\varphi(2R)dR,$$

что мы будем записывать как $2f(2R)dR$. Эта величина не является вероятностью, но пропорциональна ей. Коэффициент пропорциональности получается интеграцией, так что вероятностное распределение имеет вид

$$\frac{f(2R)dR}{\int_0^{\infty} f(2R)dR} = \frac{R\varphi(2R)dR}{\int R\varphi(2R)dR}.$$

3.23 Теперь удобно опять изменить правило подсчета пересечений. Теперь будем учитывать все полные хорды, опускать части хорд на одном из концов секущей и дополнять до полной хорды любую часть хорды на ее другом конце. Возникающий набор интервалов обозначим через l_1, l_2, \dots . Математическое ожидание $\sum l_i$ равно

$$E(\sum l_i) = 2\pi L \int_0^{\infty} R^2\varphi(2R)dR = \pi \int_0^{\infty} Rf(2R)dR,$$

поскольку средняя длина пересечения с кругом радиуса R

равна $\frac{1}{2}\pi R$. Мы не знаем $\varphi(2R)$ или $f(2R)$, однако последнее выражение может быть переписано в виде

$$\frac{\lambda\pi L \int_0^{\infty} Rf(2R)dR}{\int_0^{\infty} f(2R)dR} \left\{ \frac{\int_0^{\infty} R^{-1}f(2R)dR}{\int_0^{\infty} f(2R)dR} \right\}^{-1},$$

поскольку

$$\int_0^{\infty} R^{-1}f(2R)dR = 2L\lambda \int_0^{\infty} \varphi(2R)dR = L\lambda.$$

Поэтому

$$E(l_i) = \lambda\pi L E_f(R) \{E_f(R^{-1})\}^{-1},$$

где E_f означает математическое ожидание по отношению к распределению диаметров тех кругов, которые действительно пересекают секущую.

$E_f(R)$ и $E_f(R^{-1})$ могут быть оценены величинами $N^{-1} \sum D_i$ и $N^{-1} \sum D_i^{-1}$, где N есть число пересечений с секущей, D_1, D_2, \dots (измеренные) диаметры кругов, которые дают пересечения l_1, l_2, \dots . Оценка λ (смещенная) будет даваться выражением

$$(\sum l_i) (\sum D_i^{-1}) \left\{ \frac{1}{4} \pi L \sum D_i \right\}^{-1}.$$

3.24 Это выражение может быть в действительности заменено даже более простым выражением, использующим только длины пересечений l_i . Если прямая пересекает круг радиуса R , то распределение длины пересечения l задается формулой

$$\frac{l dl}{2R(4R^2 - l^2)^{1/2}}.$$

Отсюда мы находим

$$E(l_i^{-1}) = \frac{1}{4} \pi R^{-1}$$

$$E(l_i) = \frac{1}{2} \pi R.$$

Поэтому предыдущую оценку можно заменить на

$$\frac{(\sum l_i'')}{L} \frac{2\pi^{-1} \sum (l_i'')^{-1}}{\sum l_i''} = 2\pi^{-1} L^{-1} \sum (l_i'')^{-1}.$$

Эти оценки зависят от предположения, что области круговые.

В частности, всякая оценка, основанная на таких выражениях, как $\sum (l_i'')^{-1}$, будет несостоятельной для областей, имеющих углы. Различные видоизменения этой техники, позволяющие обращаться с областями, не слишком отличающимися от окружностей, рассматриваются Макинтайром.

3.25 Укажем, что эта теория может быть распространена для оценки распределения $2\phi(2R)dR$ по распределению частот l_i' . Мы подробно рассмотрим такую задачу в следующей главе в связи с оценкой распределения радиусов множества сфер в трехмерном пространстве по наблюдаемым диаметрам их пересечений со случайными прямыми.

Задача Бюффона

3.26 Мы закончим обсуждение случайных прямых на плоскости тем, что рассмотрим классическую задачу, которая положила начало этой теории — задачу Бюффона об игле (Бюффон (Buffon, 1777)).

Игла длины L помещается случайно на плоскость, на которой начерчены параллельные прямые на единичном расстоянии друг от друга. Требуется найти вероятность того, что игла пересечет эти прямые. Предположим, что возможно только одно пересечение ($L < 1$). Пусть θ — угол, составляемый иглой с направлением прямых, и x — расстояние от центра иглы до одной из них. Тогда, так как x распределена равномерно на $(-1/2, 1/2)$, а θ распределена равномерно на $(0, 2\pi)$, искомая вероятность есть

$$P = (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} L |\sin \theta| d\theta = 2\pi^{-1} L.$$

Если L больше единицы, то рассмотрим вероятность хотя бы одного пересечения. Она равна

$$P = \frac{1}{\pi} \int_0^{\arcsin L^{-1}} (1 - L |\sin \theta|) d\theta = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arcsin L^{-1} + L - \sqrt{L^2 - 1} \right\}. \quad (3.7)$$

Если игла бросается N раз и при R бросках получается хотя бы одно пересечение, то $\hat{P} = RN^{-1}$ есть несмещенная оценка для P с дисперсией $N^{-1}P(1-P)$. Поэтому имеется возможность экспериментами такого рода оценить π . Таких экспериментов было проделано много. Они подытожены и обсуждены в очень интересной работе Гриджемана (Gridgeman, 1960). Таблица 3.1 приводит некоторые подробности экспериментов, причем в ней длина иглы задается как доля расстояния между линиями.

Таблица 3.1

Экспериментатор	Длина иглы	Число бросков	Число попаданий	Оценка
Вольф, 1850	0,8	5000	2532	3,1596
Смит, 1855	0,6	3204	1218,5	3,1553
Де Морган, 1860	1,0	600	382,5	3,137
Фокс, 1884	0,75	1030	489	8,1595
Лаззери, 1901	0,83	3408	1808	3,1415929
Рейна, 1925	0,5419	2520	859	3,1795
Гриджеман, 1960	0,7857	2	1	3,143

3.27 Превосходные результаты опытов в основном обязаны искусной остановке опытов в наиболее благоприятный момент вместе с большой удачей в случае Лаззери, когда оценкой числа π оказалось $355(113)^{-1}$, хорошо известное приближение к π , открытое Цу-Чунгши. Если бы точное значение π было бы неизвестно до эксперимента, так что остановка в благоприятный момент не могла бы быть использована, то оценка π с помощью измерения лентой большого деревянного круга дала бы лучшие результаты.

3.28 Задачу Бюффона можно рассматривать с различных точек зрения. Некоторые из рассмотренных обобщений проливают свет на ряд других вероятностных проблем. Например, предположим, что фигура, которая представляет собой скрученный определенным образом отрезок длины L , бросается на множество параллельных прямых с единичным промежутком. Тогда ожидаемое число пересечений есть $2\pi^{-1}L$ независимо от формы. Это в действительности есть вариант результата 3.4.

3.29 Задачу Бюффона для $L < 1$ можно трактовать, используя предыдущие результаты о выпуклых фигурах. Предположим, что игла заключена в окружность единичного диаметра с центром в середине иглы. Эта окружность всегда пересекается одной из прямых и ее пересечение с кругом будет случайной хордой. Из доказанного ранее следует, что вероятность пересечения иглы хордой равна $2L\pi^{-1}$.

3.30 Несмотря на то что π обычно находится методами, совершенно отличными от экспериментальной реализации задачи Бюффона, такие методы Монте-Карло часто необходимы в других задачах. Для иллюстрации важной техники «антитетических переменных» Хаммерсли и Мортон (Hammersley and Morton, 1956) обсуждают одно видоизменение задачи, которое представляет большой интерес ввиду возможных применений аналогичных методов в других приложениях.

3.31 Пусть игла имеет единичную длину и (для простоты) расстояние между соседними прямыми настолько мало, что подсчет числа пересечений эквивалентен измерению длины проекции иглы в направлении параллельных прямых. Таким образом, мы наблюдаем случайную величину $X = |\sin \theta|$, где угол θ распределен равномерно на $(0, 2\pi)$. Тогда X является несмещенной оценкой для $2\pi^{-1}$ с коэффициентом вариации, равным $\sqrt{\frac{1}{8}\pi^2 - 1} = 0,4834$.

3.32 Если T есть случайная величина, используемая в качестве оценки в методе Монте-Карло, то «антитетическая переменная» T' есть зависящая от T случайная величина с тем же математическим ожиданием, причем T' велика, когда T мала, и наоборот. Складывая T и T' ,

можно надеяться на значительное улучшение оценки. Хаммерсли и Мортон иллюстрируют этот принцип, рассматривая проекцию другой иглы той же длины, закрепленной под прямым углом к первой.

Тогда в качестве несмещенной оценки для $2\pi^{-1}$ имеем

$$X' = \frac{1}{2} \{|\sin \theta| + |\cos \theta|\}.$$

Можно установить, что ее коэффициент вариации равен $\sqrt{\frac{1}{16}\pi^2 + \frac{1}{8}\pi - 1} = 0,0977$. Поэтому, хотя при каждом броске во втором методе возникает в два раза больше работы, эффективность (по сравнению с первым методом) возрастает в 12,2 раз.

Идея получает дальнейшее развитие, когда используются n игл в форме звезды с углами πn^{-1} между последовательными иглами. Можно показать, что коэффициент вариации средней проекции равен

$$\pi^2 (12n^2 \sqrt{5})^{-1} \{1 + o(n^{-2})\}.$$

3.33 Этот метод годится и тогда, когда расстояние между параллельными линиями не настолько мало, чтобы принятое выше приближение было оправданным, однако расчеты становятся значительно сложнее; мы опишем здесь только классический случай одной иглы.

Пусть, как и ранее, единицей является расстояние между параллельными линиями, а длина иглы равна $L > 1$. Обозначим через P_0, P_1, P_2, \dots вероятности 0, 1, 2, ... пересечений. P_0 найдено в (3.7). Предположим, что $L = n + l$, где $l < 1$. Тогда возможны 0, 1, ..., $n + 1$ пересечений. Определим углы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ равенствами

$$L \sin \alpha_1 = 1, \quad L \sin \alpha_2 = 2, \quad \dots, \quad L \sin \alpha_n = n.$$

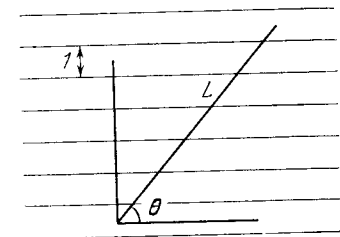


Рис. 3.7.

Рассмотрим P_{n+1} . Для того чтобы получилось $n+1$ пересечений, угол θ должен лежать между α_n и $\pi/2$ (рис. 3.7).

Рассматривая два возможных положения конца иглы, мы видим, что при фиксированном θ вероятность $n+1$ пересечений есть $L \sin \theta - n$. Поэтому

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_n}^{\pi/2} (L \sin \theta - n) d\theta = \\ &= 2L\pi^{-1} \cos \alpha_n + 2n\pi^{-1} (\alpha_n - \pi/2). \end{aligned}$$

Для того чтобы произошло k ($0 < k < n+1$) пересечений, необходимо, чтобы θ лежало в пределах $(\alpha_{k-1}, \alpha_{k+1})$. Случаи $(\alpha_{k-1} < \theta \leq \alpha_k)$ и $(\alpha_k < \theta \leq \alpha_{k+1})$ должны быть рассмотрены по отдельности. В первом случае условная вероятность k пересечений равна $L \sin \theta - (k-1)$, а во втором случае она равна $(k+1) - L \sin \theta$. Поэтому полная вероятность есть

$$\begin{aligned} P_k &= \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} \{L \sin \theta - (k-1)\} d\theta + \\ &+ \frac{2}{\pi} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \{k+1 - L \sin \theta\} d\theta = \frac{2}{\pi} \{(k+1)\alpha_{k+1} - 2k\alpha_k + \\ &+ (k-1)\alpha_{k-1}\} + \frac{2L}{\pi} \{\cos \alpha_{k+1} - 2\cos \alpha_k + \cos \alpha_{k-1}\}, \end{aligned}$$

исключая случай $k=n$, где следует положить $\alpha_{k+1} = \pi/2$.

3.34 Можно рассматривать также вероятность того, что брошенная случайно игла пересечет прямую из двух множеств параллельных линий, пересекающих друг друга под прямым углом. Если они разделены промежутками a и b и $L < a$, $L < b$, то вероятность того, что игла пересечет по крайней мере одну прямую, равна

$$\frac{2L}{\pi} \{a^{-1} + b^{-1} - 2L(ab)^{-1}\}.$$

Этот и многие похожие результаты получаются без труда (среди прочих, см. Дельтейль (Deltheil, 1926), Мантель (Mantel, 1953)).

Случайные прямые в трехмерном пространстве

3.35 Теория случайных прямых в трехмерном пространстве приводит к ряду задач, некоторые из которых аналогичны вышерассмотренным. Мы уже видели в главе 1, что если прямые представлены четырьмя координатами (a, b, p, q) с помощью уравнений

$$\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q, \end{aligned}$$

то подходящая для использования мера определяется элементом

$$(1+a^2+b^2)^{-2} da db dp dq. \quad (3.8)$$

Выбор этого дифференциального элемента приводит к следующему: если предположить, что прямые определяются своими пересечениями P с некоторой плоскостью, то точка P оказывается равномерно распределенной на плоскости и (независимо от P) все направления равновероятными. Рассмотрим меру всех прямых, которые пересекают определенное измеримое множество E , лежащее на некоторой плоскости (скажем, $z=0$). Мера множества всех таких прямых оказывается равной мере E , помноженной на интеграл

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{da db}{(1+a^2+b^2)^2} = \pi.$$

Поэтому мера всех прямых, пересекающих плоскую область площади A , равна πA . Поскольку почти каждая прямая пересекает поверхность трехмерной выпуклой области в двух точках, то мера всех прямых, пересекающихся с такой фигурой, равна $\frac{1}{2} \pi S$, S — площадь поверхности фигуры.

Это можно толковать и иначе. Пусть $P(\mathbf{n})$ есть площадь проекции выпуклой области на плоскость с нормалью \mathbf{n} , так что \bar{P} (среднее по \mathbf{n} значение площади проекции) равно

$$\bar{P} = (4\pi)^{-1} \int P(\mathbf{n}) d\omega, \quad (3.9)$$

где $d\omega$ есть элемент телесного угла, отвечающего \mathbf{n} .

Мера всех прямых, пересекающих выпуклую область, равна $2\pi P$, так как каждая прямая (независимо от направления) учитывается только один раз, а возможные направления заполняют телесный угол величины 2π . Приравнявая это выражение к предыдущему, получаем $S=4P$. Это — «формула Коши» для площади поверхности выпуклого тела. Она дает полезный практический метод оценивания площади поверхности малых выпуклых тел (таких, как камни). Этот метод является трехмерным аналогом метода Штейнгауза, описанного в начале этой главы. Как и в том случае, можно установить ряд неравенств для конечных приближений (Моран (Moran, 1944)). В действительности, если \bar{P} — истинное значение, задаваемое (3.9), а P_1 и P_2 — средние значения проекций выпуклого тела на стороны додекаэдра и икосаэдра (соответственно), то

$$\begin{aligned} 0,91758 \leq P_1 \bar{P}^{-1} \leq 1,07869, \\ 0,9560 \leq P_2 \bar{P}^{-1} \leq 1,0472. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Десятичные знаки указанных границ совпадают с соответствующими десятичными знаками наилучших границ.

3.36 Изопифаническая теорема утверждает, что в трехмерном пространстве из всех замкнутых, топологически эквивалентных сфере областей, для которых может быть определена площадь поверхности, отношение S^3V^{-2} (V — объем) минимально для сферы. В общем случае доказать эту теорему очень трудно; однако она сравнительно проста, если ограничиться классом выпуклых поверхностей. В этом случае ей можно придать форму утверждения, что \bar{P}^3V^{-2} минимально для сферы. Для каждой замкнутой поверхности $S \geq 4\bar{P}$, где \bar{P} — средняя площадь проекции на случайную плоскость (каждая точка проекции учитывается только один раз, если даже в нее проектируется больше чем две точки поверхности). Можно предположить, что в классе множеств E в пространстве, для которых проекция $P(\mathbf{n}, E)$ в направлении \mathbf{n} обладает измеримой по \mathbf{n} площадью, отношение \bar{P}^3V^{-2} достигает минимума на сфере. Здесь \bar{P} есть среднее значение $P(\mathbf{n}, E)$ по всем направлениям, а V есть трехмерная мера Лебега множества E . Это предположение не доказано.

3.37 Второй момент (или, лучше, дисперсия) $P(\mathbf{n})$ для выпуклого тела также является числом, которое характеризует выпуклое тело. Она, очевидно, равна нулю для сферы, а для кругового цилиндра и прямоугольного параллелепипеда она вычислена Вальтерсом (Walters, 1947).

3.38 Укажем еще одно следствие полученных результатов. Пусть K_1 является выпуклой областью, содержащейся в выпуклой области K_2 , и S_1, S_2 — площади поверхностей K_1 и K_2 . Тогда вероятность того, что случайная секущая области K_2 пересечет K_1 , равна $S_1S_2^{-1}$. В частности, вероятность того, что случайная хорда сферы пересечет данную диаметрально плоскость внутри сферы, есть $2\pi(4\pi)^{-1} = 1/2$, поскольку круговая площадка, образованная диаметральной плоскостью, может рассматриваться как плоская выпуклая область с площадью поверхности, равной 2π (радиус принят за единицу).

3.39 С помощью вероятностного элемента (3.8) мы по существу определили прямую точкой ее пересечения с фиксированной плоскостью и направлением. Из предыдущего заключаем, что, по-видимому, полезно определить прямую, сначала задавая ее направление, а затем точку ее пересечения с некоторой плоскостью, перпендикулярной этому направлению. Это представление аналогично использованию полярных координат прямой на плоскости. Рассмотрим плоскость

$$ax + by + z = 0,$$

которая перпендикулярна прямой, задаваемой уравнениями

$$\begin{aligned} x &= az + p, \\ y &= bz + q. \end{aligned}$$

Направляющие косинусы этой прямой таковы:

$$\begin{aligned} l &= a(1 + a^2 + b^2)^{-1/2}, \quad m = b(1 + a^2 + b^2)^{-1/2}, \\ n &= (1 + a^2 + b^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

При фиксированном направлении элемент площади на этой плоскости получается варьированием p и q

и имеет вид

$$dS = (1 + a^2 + b^2)^{1/2} dp dq = n^{-1} dp dq.$$

Для получения элемента телесного угла запишем

$$\begin{aligned} l &= \sin \theta \cos \varphi, \\ m &= \sin \theta \sin \varphi, \\ n &= \cos \theta, \end{aligned}$$

так что элемент телесного угла есть

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{\cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{n_1}.$$

Якобиан l и m по отношению к θ и φ равен

$$\frac{\partial(l, m)}{\partial(\theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = \cos \theta \sin \theta,$$

так что элемент телесного угла равен $n^{-1} dl dm$. Беря якобиан l и m по a и b , получаем

$$n^{-3} da db = \frac{da db}{(1 + a^2 + b^2)^{3/2}}.$$

Поэтому $dS d\Omega$, где $d\Omega$ есть элемент телесного угла, равно (3.8).

Средняя длина секущих выпуклого тела

3.40 Рассмотрим теперь среднюю длину секущих выпуклого тела. Пусть K — тело, а $K(\mathbf{n})$ — его двумерная проекция в направлении \mathbf{n} . Интеграл от длины секущей в направлении \mathbf{n} , взятый по $K(\mathbf{n})$, равен объему K , а средняя длина равна $V[P(\mathbf{n})]^{-1}$, где $P(\mathbf{n})$ есть площадь $K(\mathbf{n})$.

Интегрируя с весом $P(\mathbf{n})$ по всем направлениям, получаем V . Но мера всех секущих есть интеграл от $P(\mathbf{n})$ по всем направлениям, который равен $\frac{1}{4}S$. Поэтому средняя длина секущей равна $4VS^{-1}$.

3.41 Этот результат как задающий средний свободный пробег в комнате имеет некоторые применения в архитектурной акустике (Бейтс и Пиллоу (Bates and

Pillow, 1947)). Будем считать, что звуковые волны распространяются по прямым линиям до встречи со стенами, где они обычным способом отражаются. Пусть P — точка внутри комнаты, испускающая звуковые волны равномерно во всех направлениях. Выбрав одно из этих направлений и полагая, что путь звуковой волны достаточно велик, получим (делением его длины на число отражений) средний свободный пробег в заданном направлении из точки P . Усреднением по всем направлениям получаем средний свободный пробег из точки P . Вообще говоря, он зависит от точки P . Бейтс и Пиллоу показали, что для комнаты в форме прямоугольного параллелепипеда средний свободный пробег не зависит от P и равен $4VS^{-1}$, средней длине секущей. Для шара радиуса a и точки P , находящейся на расстоянии b от центра, средний свободный пробег равен

$$4b \left\{ \ln \frac{a+b}{a-b} \right\}^{-1}.$$

Усреднение с постоянной плотностью в шаре опять дает $4VS^{-1}$. Для цилиндра средний свободный пробег также зависит от P , но после усреднения получаем результат $4VS^{-1}$. Таким образом, совпадение среднего свободного пробега при повторных отражениях со средней длиной случайной секущей тела кажется общим правилом, однако в общем случае это не доказано.

3.42 Задачу Бюффона можно обобщить, помещая случайно «иглу» длины L в пространство с бесконечным множеством плоскостей на единичном расстоянии друг от друга. Сначала предположим, что $L < 1$. Направив ось координат перпендикулярно плоскостям, будем использовать полярные координаты для направления иглы. В обычных обозначениях вероятностным элементом является

$$(4\pi)^{-1} \sin \theta d\theta d\varphi.$$

После интегрирования по φ его можно записать как $\frac{1}{2} d(\cos \theta)$. Поэтому длина l проекции иглы на прямую, перпендикулярную плоскостям, имеет равномерное распределение на $(0, L)$. Поскольку положение проекции случайно, то вероятность пересечения для всякой

данной ориентации равна l , что (после усреднения по распределению ориентаций) дает для полной вероятности пересечения значение $\frac{1}{2}L$. Аналогично легко найти распределение числа пересечений для $L > 1$. Очевидно, что во всех случаях математическое ожидание числа пересечений равно $\frac{1}{2}L$.

3.43 Как и в случае случайных прямых на плоскости, пересекающих выпуклые фигуры, можно построить теорию пересечений выпуклых областей случайными прямыми в трехмерном пространстве, которая дает возможность делать заключение о выпуклых областях на основе знания пересечений. Однако ее удобнее затронуть в следующей главе, в связи с теорией пересечения случайных плоскостей с выпуклыми фигурами.

СЛУЧАЙНЫЕ ПЛОСКОСТИ И СЛУЧАЙНЫЕ ВРАЩЕНИЯ

Случайные плоскости

4.1 В главе 1 мы видели, что удовлетворительным элементом меры для плоскостей, определяемых полярным уравнением

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta = p,$$

является

$$\sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dp.$$

Если же мы используем представление

$$ux + vy + wz + 1 = 0,$$

то соответствующим элементом меры является

$$\frac{du \, dv \, dw}{(u^2 + v^2 + w^2)^{3/2}}.$$

Используя эти результаты, можно получить меры множеств плоскостей, удовлетворяющих различным условиям. Так, рассмотрим множество всех плоскостей, которые пересекают прямолинейный сегмент длины L . Выберем этот сегмент вдоль оси z и перейдем к полярным координатам. Тогда p окажется равномерно распределенной между 0 и $L \cos \theta$. Мера множества плоскостей будет, таким образом, равна

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \int_0^{L \cos \theta} dp \, d\theta = \pi L. \quad (4.1)$$

Этот результат можно обобщить на кривую длины L . Пусть $N(\theta, \varphi, p)$ есть число пересечений плоскости с координатами (θ, φ, p) с кривой. Разбивая кривую на ряд почти линейных элементов и складывая, находим

$$\iiint N(\theta, \varphi, p) \, d\theta \, d\varphi \, dp = \pi L. \quad (4.2)$$

4.2 Уравнению (4.2) можно придать другую интерпретацию. Рассмотрим проекцию кривой на плоскость, перпендикулярную вектору \mathbf{n} , и предположим, что она имеет длину $L(\mathbf{n})$. Пусть \bar{L} есть усредненное по всем направлениям значение $L(\mathbf{n})$, т. е.

$$\bar{L} = \frac{1}{4\pi} \iint L(\mathbf{n}) d\omega,$$

где $d\omega$ является элементом телесного угла. Разбивая кривую на малые участки, которые приблизительно линейны, находим

$$\bar{L} = (2\pi)^{-1} L.$$

Этот результат можно получить и из (4.2). Рассмотрим проекцию кривой на плоскость, перпендикулярную \mathbf{n} . Вследствие (4.2) ее длина $L(\mathbf{n})$ равна умноженному на $1/2\pi$ среднему числу пересечений кривой со случайными плоскостями, перпендикулярными плоскости проекции. После интегрирования по всем направлениям \mathbf{n} получаем

$$\bar{L} = (4\pi)^{-1} \int L(\mathbf{n}) d\omega = (2\pi)^{-1} L,$$

поскольку при интегрировании мы считали каждую плоскость дважды, что дает множитель 2π .

4.3 Этот результат аналогичен результату Штейнгауза (глава 3) и любопытно, что (как это показано Сантало (Santaló, 1946)) возможно указать неравенства, аналогичные (3.10) для средней длины проекций на стороны додекаэдра и икосаэдра. Пусть \bar{L}_1 и \bar{L}_2 обозначают средние значения проекций для этих двух случаев. Тогда, как и в (3.10),

$$\begin{aligned} 0,91758 \leq \bar{L}_1(\bar{L})^{-1} &\leq 1,07869, \\ 0,9560 \leq \bar{L}_2(\bar{L})^{-1} &\leq 1,0472. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Для обоснования неравенств, очевидно, достаточно доказать их для случая, когда кривая является прямой линией. Таковую можно заменить тонким цилиндром малого диаметра d . С небольшим поправочным членом площади проекций и площадь поверхности этого цилиндра

ра пропорциональны длине, и результат следует из теоремы, которая была ранее. Однако в этом случае неравенства (4.3) не самые лучшие. Лучшие неравенства не установлены.

Плоскости, пересекающие кривую

4.4 Рассмотрим сначала меру множества всех прямых, которые пересекают замкнутую выпуклую кривую C с периметром L , лежащую на фиксированной плоскости. Поскольку каждая пересекающая эту кривую плоскость имеет с ней две общие точки, то из (4.2) следует, что мера таких плоскостей равна $\frac{1}{2} \pi L$.

4.5 Перед тем как начать рассматривать меру всех плоскостей, пересекающих выпуклые фигуры вообще, опишем другой результат, принадлежащий Барбье (Barbier, 1860), который легче обобщить.

Вместо меры всех плоскостей, пересекающих плоские выпуклые фигуры, рассмотрим интеграл по множеству плоскостей от длин пересечения. Предположим, что плоскость задается уравнением

$$x \sin \theta \cos \varphi + y \sin \theta \sin \varphi + z \cos \theta = p$$

и что фиксированной плоскостью является $z=0$. Прямая пересечения с этой плоскостью задается так:

$$z=0, \quad x \cos \varphi + y \sin \varphi = p / \sin \theta.$$

Пусть C — длина хорды, образуемой этой прямой, так что $\int \frac{C dp}{\sin \theta} = S$ (т. е. площади выпуклой фигуры).

Отсюда получаем полный интеграл по всем пересекающимся плоскостям

$$\begin{aligned} \iiint C \sin \theta dp d\theta d\varphi &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta \int \frac{C dp}{\sin \theta} = \\ &= 2\pi S \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \pi^2 S. \end{aligned} \quad (4.4)$$

При таком подходе каждой плоскости приписывается

вес, равный длине ее пересечения с плоской выпуклой фигурой.

Если мы имеем в пространстве какую-нибудь достаточно регулярную поверхность конечной площади и $L(\theta, \varphi, \rho)$ — длина кривой пересечения с плоскостью, то интеграл от L по множеству всех пересекающих плоскостей равен площади поверхности, помноженной $1/2 \pi^2$.

Плоскости, пересекающие выпуклую область

4.6 Рассмотрим меру всех плоскостей, которые пересекают выпуклую область K в пространстве. При фиксированных θ и φ интеграл равен длине проекции фигуры на прямую, имеющую направление (θ, φ) . Эта длина может быть названа «толщиной» (thickness, *e'paisseur*, *Breite*) фигуры в направлении (θ, φ) . Мера всех плоскостей, пересекающих K , равна, таким образом,

$$J = \frac{1}{2} \int \int T(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi,$$

где $T(\theta, \varphi)$ есть толщина в направлении (θ, φ) , а интеграл берется по всем направлениям. Если K заменить на выпуклую фигуру на плоскости, то мы уже видели, что J равно $1/2 \pi L$, где L — периметр выпуклой фигуры. По аналогии с этим случаем Э. Картан (Cartan, 1896) предложил называть величину $2\pi^{-1}J$ «периметром» выпуклой фигуры K . Минковский (Minkowski, 1903) показал (мы покажем это ниже), что

$$J = M = \frac{1}{2} \int \int (\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1}) dS. \quad (4.5)$$

Предполагается, что K достаточно регулярна, так что два главных радиуса кривизны существуют и интегрируемы. В (4.5) dS есть элемент площади поверхности, а интеграл берется по всей поверхности. Итак, при известном M средняя длина периметра пересечения K случайной плоскостью равна $1/2 \pi^2 S M^{-1}$. Поскольку объем V области K можно получить, интегрируя площадь пересечения по всем возможным плоскостям и умножая на $(2\pi)^{-1}$, то средняя площадь пересечения равна

$$2\pi V M^{-1}. \quad (4.6)$$

Теорема Минковского

4.7 Докажем (4.5) методом, предложенным Дельтейлем. Выберем начало полярных координат внутри K и запишем направляющие косинусы вектора, исходящего из начала, в виде

$$\alpha = \sin \theta \cos \varphi, \quad \beta = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma = \cos \theta.$$

Касательная или опорная плоскость задается уравнением

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = H(\theta, \varphi), \quad (4.7)$$

где $H(\theta, \varphi)$ является опорной функцией, так что J является интегралом от H по всем направлениям.

Предположим, что касательная плоскость всегда касается поверхности только в одной точке M (если это не так, то результат можно получить с помощью перехода к пределу). Координаты точки M можно получить в терминах θ, φ , решая совместно (4.7) и два уравнения, которые получаются из (4.7) дифференцированием по θ и по φ . Так, мы получаем

$$x = H \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial H}{\partial \theta} \cos \theta \cos \varphi - \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\sin \theta},$$

$$y = H \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial H}{\partial \theta} \cos \theta \sin \varphi + \frac{\partial H}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\cos \theta},$$

$$z = H \cos \theta - \frac{\partial H}{\partial \theta} \sin \theta.$$

Форма этих уравнений позволяет предполагать, что отрезок прямой из начала координат, перпендикулярный опорной плоскости, имеет компоненты

$$H, \quad \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad (\sin \theta)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \varphi}$$

по отношению к ортогональной системе координат с направляющими косинусами

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, \gamma) &= (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta), \\ (\alpha', \beta', \gamma') &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta), \\ (\alpha'', \beta'', \gamma'') &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0). \end{aligned} \quad (4.8)$$

В точке касания M существуют две линии кривизны, каждая из которых обладает своим главным радиусом

кривизны. Пусть ρ — один из них. Согласно стандартной формуле дифференциальной геометрии, для смещения вдоль соответствующей линии кривизны имеем

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{dy}{d\beta} = \frac{dz}{d\gamma} = -\rho.$$

Поэтому вдоль этой линии кривизны φ является функцией от θ такой, что

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial \alpha}{\partial \theta}}{\frac{\partial x}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial \beta}{\partial \theta}}{\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial \beta}{\partial \varphi}} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}}{\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \rho \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}}. \quad (4.9)$$

Вектор (α, β, γ) направлен перпендикулярно опорной плоскости и поэтому составляет прямые углы с бесконечно малыми смещениями P при изменении θ, φ . Отсюда

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial \theta} + \beta \frac{\partial y}{\partial \theta} + \gamma \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0,$$

$$\alpha \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \beta \frac{\partial y}{\partial \varphi} + \gamma \frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0.$$

Дифференцируя эти уравнения по θ и φ и используя (4.8), находим

$$\begin{aligned} 0 &= \sum \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + \sum \alpha' \frac{\partial x}{\partial \theta} = \sum \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \theta^2} + R, \\ 0 &= \sum \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial \varphi} + \sin \theta \sum \alpha'' \frac{\partial x}{\partial \theta} = \sum \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial \varphi} + \\ &\quad + S \sin \theta = \sum \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \theta \partial \varphi} + \sum \alpha' \frac{\partial x}{\partial \varphi}, \\ 0 &= \sum \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + \sin \theta \sum \alpha'' \frac{\partial x}{\partial \varphi} = \sum \alpha \frac{\partial^2 x}{\partial \varphi^2} + T \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Помножая в последних трех отношениях в (4.9) числитель и знаменатель на α, β, γ (или α', β', γ') и складывая, находим

$$\frac{R - \rho}{S \sin \theta} = \frac{S}{(T - \rho) \sin \theta},$$

откуда получаем квадратное уравнение

$$\rho^2 - (R + T)\rho + RT - S^2 = 0.$$

Для того чтобы найти R, T и S в терминах θ и φ , дифференцируем (4.7) по θ , оставляя x, y и z фиксированными, а затем опять по θ , разрешая x, y и z изменяться. Это дает

$$R = \sum \alpha' \frac{\partial x}{\partial \theta} = H + \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2}.$$

Дифференцированием по φ с изменяющимися x, y и z получаем

$$S = (\sin \theta)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta \partial \varphi} - \cos \theta (\sin \theta)^{-2} \frac{\partial H}{\partial \varphi}.$$

Дифференцируя (4.6) по φ , получаем $\sum \alpha'' x = (\sin \theta)^{-1} \frac{\partial H}{\partial \varphi}$.

Опять дифференцируя при изменяющихся x, y и z , получаем

$$T \sin \theta - x \cos \varphi - y \sin \varphi = (\sin \theta)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2},$$

и поэтому

$$T = H + \frac{\partial H}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + (\sin \theta)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1}) &= (RT - S^2)^{-1} \left\{ H + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} (\sin \theta)^{-2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \right\}. \end{aligned}$$

Линии кривизны ортогональны и, если $d\sigma$ представляет собой элемент площади вокруг точки M , то

$$d\sigma = (\rho_1 \rho_2)^{-1} d\Omega,$$

где $d\Omega$ есть элемент телесного угла в направлении (θ, φ) . Теорема Минковского принимает форму

$$\begin{aligned} \iint H \sin \theta d\theta d\varphi &= \frac{1}{2} \iint (\rho_1^{-1} + \rho_2^{-1}) d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} \iint (\rho_1 + \rho_2) \sin \theta d\theta d\varphi = \iint \frac{1}{2} (R + T) \sin \theta d\theta d\varphi = \\ &= \iint \left\{ H + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} (\sin \theta)^{-2} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} \right\} \sin \theta d\theta d\varphi, \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Для доказательства теоремы теперь достаточно показать, что

$$A = \iint (\sin \theta)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial \varphi^2} d\theta d\varphi = 0$$

и

$$B = \iint \left\{ \cos \theta \frac{\partial H}{\partial \theta} + \sin \theta \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} \right\} d\theta d\varphi = 0.$$

Действительно, $A=0$, поскольку после интегрирования по φ получаем $\frac{\partial H}{\partial \varphi}$, т. е. периодическую функцию. В случае B мы интегрируем сначала по θ и получаем

$$\sin \theta \frac{\partial H}{\partial \theta},$$

что обращается в нуль при $\theta=0$, т. Тем самым формула Минковского доказана.

4.8 Пусть K_1 — выпуклое тело, лежащее внутри K , а M_{K_1} и M_K соответствующие интегралы (4.6). Тогда вероятность того, что случайная плоскость, пересекающая K , пересечет также K_1 , равна

$$M_{K_1} M_K^{-1}.$$

Это есть пространственный аналог результата для плоских фигур, вытекающего из формулы (3.1).

Некоторые дальнейшие результаты

4.9 Тем же путем можно получить ряд других средних и вероятностей (Хостинский (Hostinsky, 1925)). Например, мы уже говорили (ср. (4.4)), что если L есть длина периметра пересечения некоторой плоскости с K , то интеграл от L по всем пересекающим плоскостям равен $\frac{1}{2} \pi^2 S$. Поэтому средний периметр равен

$$\frac{1}{2} \pi^2 S M^{-1}.$$

Аналогично, поскольку интеграл от площади пересечения по всем пересекающим плоскостям равен $2\pi V$, где V есть

объем K , то средняя площадь пересечения равна $2\pi V M^{-1}$.

4.10 Теперь рассмотрим две независимые случайные плоскости, каждая из которых пересекает K . Мера всех таких пар плоскостей (плоскости в паре различимы) равна M^2 . Для нахождения вероятности того, что линия их пересечения пересекает K , следует найти меру всех пар, удовлетворяющих этому требованию.

Предположим, что одна из них фиксирована и имеет пересечение с K с периметром, равным L . Мера всех плоскостей, которые пересекают это пересечение, равна $\frac{1}{2} \pi L$ (см. (4.1)). С другой стороны, мы видели, что интеграл от L по всем пересекающим плоскостям равен $\frac{1}{2} \pi^2 S$, так что мера всех пар плоскостей, пересечение которых пересекает K , равна $\frac{1}{4} \pi^3 S$. Таким образом, вероятность того, что две плоскости, которые пересекают K , обладают пересечением, также пересекающим K , равна

$$\frac{\pi^3 S}{4M}.$$

4.11 Рассмотрим вероятность того, что общая точка трех плоскостей, пересекающих K , лежит внутри K . Мера всех троек плоскостей, пересекающих K , равна M^3 (плоскости рассматриваются как различимые, так что каждая геометрическая тройка учитывается шесть раз). Предположим, что две из этих плоскостей пересекаются внутри K . Мера всех плоскостей, пересекающих это пересечение, равна πC , где C — длина пересечения. Интеграл от C по всем положениям одной из плоскостей равен $\frac{1}{2} \pi^2 S$, где S — площадь пересечения с другой плоскостью. В свою очередь, интеграл от S равен $2\pi V$. Поэтому мера всех таких троек равна

$$\frac{\pi^4 V}{M^3}.$$

4.12 Мы уже видели, что среднее значение длины хорды случайной прямой, пересекающей K , есть $4VS^{-1}$. Обозначим через C длину случайной хорды. Оказывается

возможным найти некоторые из высших моментов C . Хостинский (Hostinsky, 1925) получил четвертый момент.

Рассмотрим внутри K две точки A_1 и A_2 с координатами (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) . Тогда

$$V^2 = \iiint \iiint dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2.$$

Зафиксируем пока A_1 . Пусть C — длина хорды, проходящей через A_1 , так что A_1 находится на расстоянии r от одного конца хорды и $C - r$ — от другого.

Предположим, что A_1 является вершиной конуса малого телесного угла $d\Omega$, окружающего хорду. Интегрируя по (x_2, y_2, z_2) внутри этого конуса, получаем

$$\frac{1}{3} \{r^3 + (C - r)^3\} d\Omega.$$

Мы можем выбрать систему координат так, что одна ось отвечает направлению хорды, а две другие оси перпендикулярны хорде и составляют элемент площади dQ . Тогда

$$\begin{aligned} V^2 &= \frac{1}{3} \iiint \iiint \int_0^C \{r^3 + (C - r)^3\} dr \, dQ d\Omega = \\ &= \frac{1}{6} \iiint \iiint C^4 dQ d\Omega. \end{aligned}$$

Из предыдущих результатов усматриваем, что

$$\iiint \iiint dQ d\Omega = \frac{1}{2} \pi S.$$

Отсюда следует, что среднее значение C^4 равно

$$12 V^2 (\pi S)^{-1}.$$

4.13 Хостинский рассматривает некоторые другие средние такого же рода, а также трехмерный аналог задачи Сильвестра о четырехугольнике: пять точек случайно выбираются внутри выпуклого тела K ; найти вероятность того, что ни одна из них не лежит внутри тетраэдра, образованного другими четырьмя.

Распределение размеров частиц

4.14 Рассмотрим задачу определения распределения размеров частиц, погруженных в непрозрачную среду, по измерениям фигур или сегментов, которые получают при пересечении частиц случайными плоскостями или случайными прямыми. Эта задача имеет приложения в различных областях естествознания и рассматривалась рядом авторов (часто независимо друг от друга): Викаселл (Wicksell, 1925, 1926), Шейл (Scheil, 1931), Фулман (Fullman, 1953), Рейд (Reid, 1955), Сантало (Santaló, 1955), Крумбейн и Петтиджон (Krumbein and Pettijohn, 1938).

4.15 Сначала предположим, что частицы являются сферами и они распределены в пространстве таким образом, что среднее число центров в единице объема равно λ . Несмотря на то что сферы предполагаются непесекающимися, можно считать, что центры составляют пуассоновское поле, так как сама пересекающаяся плоскость выбирается случайно. Пусть вероятностное распределение диаметров имеет плотность $F(r)$ (r обозначает диаметр), так что $\int_0^a F(r) dr$ представляет вероятность того, что случайно выбранная сфера имеет диаметр, меньше чем a .

Ожидаемое на единице площади число сфер, диаметры пересечений которых с произвольной плоскостью лежат в пределах $(r, r+dr)$, равно $\lambda r F(r) dr$. Поэтому плотностью распределения диаметров сфер, пересекающих плоскость, будет

$$f(r) = \frac{rF(r)}{\int_0^{\infty} rF(r) dr} = \frac{rF(r)}{r_0},$$

где r_0 есть средний диаметр сферы, выбранной наудачу.

Если сфера диаметра r действительно пересекает плоскость, то вероятность того, что ее центр лежит на расстоянии y от плоскости, есть $2r^{-1} dy$ ($0 \leq y \leq \frac{1}{2} r$). В этом случае диаметр x круга пересечения равен $(r^2 - 4y^2)^{1/2}$. Следовательно, ожидаемое на единице

площади число сфер, имеющих диаметр в $(r, r+dr)$ и пересекающих плоскость по кругу диаметра x , равно

$$\lambda r_0^{-1} F(r) (r^2 - x^2)^{-1/2} dr dx.$$

Поэтому распределение диаметров кругов пересечения при условии, что сферы действительно пересекают плоскость, имеет вид

$$\varphi(x) dx = \frac{x}{r_0} \int_x^\infty \frac{F(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr dx. \quad (4.10)$$

Поскольку $\varphi(x)$ может быть найдено из наблюдений, мы должны найти $F(r)$ из интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \frac{x}{r_0} \int_x^\infty \frac{F(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr dx. \quad (4.11)$$

Полагая $F(r) = rF_1(r^2)$, получаем

$$\varphi(x) = \frac{x}{2r_0} \int_{x^2}^\infty \frac{F_1(z) dz}{\sqrt{z - x^2}},$$

т. е. интегральное уравнение типа Абеля (Курант и Гильберт (Courant and Hilbert, 1931), стр. 134), решением которого является

$$F_1(z) = -2\pi^{-1} \int_x^\infty (x^2 - z)^{-1/2} r_0 \frac{d}{dx} (x^{-1} \varphi(x)) x dx,$$

откуда получаем

$$F(r) = -\frac{2rr_0}{\pi} \int_{x^2}^\infty (x^2 - r^2)^{-1/2} \frac{d}{dx} (x^{-1} \varphi(x)) dx. \quad (4.12)$$

Если известны диаметры кругов, мы можем оценить распределение $\varphi(x)$ и с помощью (4.12) вычислить $F(x)$.

Возможно, что для численных расчетов лучше сначала проинтегрировать (4.12) по частям, для того чтобы избежать оценивания производной.

4.16 $F(r)$ и $\varphi(x)$ — плотности вероятностных распределений, и представляет интерес выразить моменты одного распределения через моменты другого.

Пусть M_n и m_n — эти моменты, т. е.

$$M_n = \int_0^\infty r^n F(r) dr, \quad m_n = \int_0^\infty x^n \varphi(x) dx.$$

Используя (4.10), получаем

$$m_n = \int_0^\infty x^n \varphi(x) dx = r_0^{-1} \int_0^\infty x^{n+1} \int_x^\infty (r^2 - x^2)^{-1/2} F(r) dr dx.$$

Меняя (что можно обосновать) порядок интегрирования, получаем

$$m_n = r_0^{-1} \int_0^\infty r^{n+1} F(r) dr \int_0^r \omega^{n+1} (1 - \omega^2)^{-1/2} d\omega.$$

Второй интеграл имеет форму

$$J_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n-1}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot n}, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n-1}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot n} \frac{\pi}{2}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

Итак,

$$m_n = r_0^{-1} J_{n+1} M_{n+1} = J_{n+1} M_1^{-1} M_{n+1},$$

поскольку $r_0 = M_1$. Это дает нам другой метод определения распределения, поскольку, если мы можем оценить m_1, m_2, \dots по наблюдениям, то мы в состоянии найти $M_2 \cdot M_1^{-1}, M_3 \cdot M_1^{-1} \dots$. Остается только найти $M_1 = r_0$.

Для этого можно использовать тот факт, что r_0 (средний диаметр сфер) равен умноженному на $\frac{1}{2} \pi$ гармоническому среднему наблюдаемых диаметров. Действительно, $r_0 \cdot \{\text{гармоническое среднее наблюдаемых диаметров}\} =$

$$\begin{aligned} &= r_0 \int_0^\infty \varphi(x) x^{-1} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty (r^2 - x^2)^{-1/2} F(r) dr dx = \\ &= \int_0^\infty dr \int_0^r F(r) (r^2 - x^2)^{-1/2} dx = \frac{1}{2} \pi \int_0^\infty F(r) dr = \frac{1}{2} \pi. \end{aligned}$$

Интересно также заметить, что не исключено совпадение распределений истинного и наблюдаемого диаметров, т. е. равенство $\varphi(x) = F(x)$. Это имеет место, когда

$$F(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right),$$

ибо тогда

$$r_0 = \sigma \left(\frac{1}{2} \pi\right)^{1/2},$$

и, подставляя в (4.11), находим

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{x}{\sigma \left(\frac{1}{2} \pi\right)^{1/2}} \int_x^\infty \frac{x}{\sigma^2} (r^2 - x^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{r^2}{2\sigma^2}\right) dr = \\ &= \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Уравнение (4.11) также появляется в теории «задачи глобулярного скопления» в астрономии (Викселл (Wicksell, 1925)). Глобулярное скопление представляет собой собрание звезд, расположенных вокруг общего центра сферическими слоями постоянной плотности. Соотношение между плотностями в этих слоях (как функций радиального расстояния) и плотностью в кольцах в проекции на плоскость также задается интегральным уравнением вида (4.11).

4.17 Очевидно, что аналогичная теория может быть построена для кругов на плоскости, пересекаемых случайными прямыми. Она примыкает к исследованиям Макинтайра, описанным в главе 3. Возникающее интегральное уравнение абелева типа (полученное Рейдом (Reid, 1955)) может быть решено теми же методами.

4.18 Викселлом (Wicksell, 1926) рассмотрен случай эллипсоидальных частиц. Предположим, что все они одного размера и одной формы и что одна из частиц пересекается некоторой плоскостью. В пересечении получается эллипс; в качестве «диаметра» этого эллипса берем величину $x = \sqrt{\xi_1 \xi_2}$, где ξ_1 и ξ_2 — большая и малая оси эллипса соответственно.

Обозначим через σ_1 и σ_2 большую и малую оси эллиптического сечения, проходящего через центр тела,

а через $\rho = \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$ — «диаметр» этого сечения. Тогда если y есть удвоенное расстояние секущей плоскости от центра тела, а h — расстояние между двумя касательными плоскостями, параллельными сечению, имеем

$$\frac{y}{h} = \frac{\sqrt{\rho^2 - x^2}}{\rho}.$$

Отсюда следует выражение для вероятностного распределения «диаметров» наблюдаемых сечений:

$$\varphi(x) = x \int_x^\infty f(\rho) \frac{d\rho}{\rho \sqrt{\rho^2 - x^2}}, \quad (4.13)$$

где $f(\rho)$ есть вероятностное распределение «диаметров» ρ центральных сечений тех частиц, которые в действительности пересекают плоскость (причем эти значения ρ измеряются в плоскости, проходящей через центр параллельно сечению частицы). Основная задача тут состоит в том, чтобы связать $f(\rho)$ с распределением размеров и формы частиц. Это не так просто сделать, поскольку (если частица не сферическая) распределение ρ не совпадает с распределением диаметра эллипса, образованного случайной проходящей через центр частицы плоскостью. Это можно легко усмотреть, рассматривая эллипсоиды, имеющие одну ось значительно более длинную, чем две другие. В этом случае более вероятно, что плоскость пересечет частицу «перпендикулярно» направлению длинной оси. Как следствие, анализ, выполненный Викселлом, оказывается весьма сложным.

Тонкие срезы

4.19 Крумбейном (Krumbein, 1935) (см. также Крумбейн и Петтиджон (Krumbein and Pettijohn, 1938)) предыдущая теория была применена для анализа тонких срезов осадков в петрографии, в предположении, что включения имеют форму шара. Развита им теория игнорировала тот факт, что большие шары имеют большую вероятность попасть в срез.

Им получено хорошее согласие между распределением размеров частиц в двух пробах песка, вычисленным на

основе простой и неточной теории с использованием среза, и распределением, полученным прямым измерением размеров частиц после разделения. Причина этого неясна и может быть связана с тем, что в действительности частицы не являлись шарами. В более поздних работах [Гринман (Greenman, 1951a, 1951b), Розенфельд, Якобсон и Ферм (Rosenfeld, Jacobson and Ferm, 1953), Паккам (Packham, 1955)] также использовалось неверное уравнение, но тем не менее получалось хорошее согласие с распределением, получаемым при просеивании.

4.20 Если опустить допущение о шарообразности, то стоит выяснить, что может, а что не может быть установлено исследованием плоских сечений.

Предположим, что в среднем число включенных тел в единичном объеме есть λ , что их средний объем равен v и что их средняя площадь поверхности равна a . Тогда без дальнейших допущений не представляется возможным оценить λ .

Пусть λ_p , A_p и L_p обозначают среднее число пересечений на единицу площади случайной плоскости, среднюю площадь этих пересечений и их средний периметр; аналогично, пусть λ_l , L_l обозначают среднее число пересечений на единицу длины случайной прямой и их среднюю длину. Эти пять величин могут быть с помощью повторных выборок оценены сколь угодно точно. Очевидно, что

$$\lambda_p A_p = \lambda_l L_l = \lambda v,$$

т. е. мы можем оценить долю занимаемого частицами объема как из пересечения плоскостью, так и из пересечения прямой. Величина $\lambda_p L_p$ есть средняя сумма периметров всех пересечений, приходящихся на единицу площади случайной плоскости; согласно (3.2), она равна $2\pi^{-1}\lambda_l \times$ (единица длины). С другой стороны, согласно выводимой из (3.9) формуле Коши, $4\lambda_l$ единиц площади равны средней общей поверхности частиц в единичном объеме. Отсюда можно найти общую площадь поверхности частиц.

4.21 Мы рассмотрим здесь (хотя эта тема и относится к предыдущей главе) задачу отыскания распределения

интервалов, образуемых при пересечении случайными прямыми выпуклых фигур, помещенных в некоторый объем.

Мы рассмотрим только случай, когда фигуры являются шарами со случайными диаметрами; $F(r)$ — плотность распределения диаметров. Пусть l — длина пересечения, $g(l)$ — плотность распределения таких длин.

Вероятность того, что сфера диаметра r пересечет случайную прямую, пропорциональна $\frac{1}{4}\pi r^2$. Следовательно, плотность распределения r для тех сфер, которые действительно пересекаются случайной прямой, имеет вид

$$f_1(r) = \frac{r^2 F(r)}{\int_0^\infty r^2 F(r) dr} = \frac{r^2 F(r)}{r_2^2},$$

где r_2 есть второй момент (относительно начала) распределения r в случайно выбранной сфере.

Пусть x — расстояние центра сферы от прямой. Распределение x при условии, что пересечение имеет место, имеет вид

$$8xr^{-2}dx \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}r\right).$$

Для заданного значения x длина пересечения равна

$$l = \sqrt{r^2 - 4x^2}.$$

Отсюда следует, что распределение l есть

$$2r^{-2} dl \quad (0 \leq l \leq r).$$

Полное распределение l имеет плотность вероятности

$$g(l) = 2 \int_l^\infty l r_2^{-1} F(r) dr = 2l r_2^{-1} \int_l^\infty F(r) dr. \quad (4.14)$$

Решение этого уравнения сразу находится в виде

$$F(r) = \frac{1}{2} r_2 \frac{d}{dr} \left\{ \frac{g(r)}{r} \right\}.$$

По-видимому, r_2 лучше всего получить, оценивая предел $2l[g(l)]^{-1}$ при $l \rightarrow 0$, поскольку он равен r_2 . Как и в

предыдущей теории, здесь также возможно установить уравнения, связывающие моменты распределений $g(l)$ и $F(r)$. Попытки обобщить (4.14) на случай, когда тела не являются шарами, не привели к успеху.

Фигуры в трехмерном пространстве

4.22 Ряд авторов рассматривали плоские фигуры и конечные прямолинейные отрезки, случайно распределенные в пространстве, а также проекции прямолинейных отрезков на фиксированную плоскость.

Предположим, что в пространстве случайно распределены круговые диски диаметра r и их пересечения случайной плоскостью имеют случайную длину x . Пусть $F(r)$ — плотность вероятности распределения r , а $\varphi(x)$ — плотность вероятности распределения длин x . Вероятность того, что данный диск пересекается плоскостью, очевидно, пропорциональна r ; поэтому, если $f(r)$ есть плотность вероятности распределения диаметров дисков, которые действительно пересекают плоскость, то

$$f(x) = \frac{rF(r)}{\int_0^{\infty} rF(r) dr} = rr_0^{-1}F(r),$$

где r_0 есть средний диаметр диска, выбранного наудачу. Если плоскость пересекает диск диаметра r на расстоянии y от его центра, то распределение y есть $2r^{-1}dy$ ($0 \leq y \leq \frac{1}{2}r$), а распределение x (длины пересечения) равно $\frac{x dx}{r \sqrt{r^2 - x^2}}$. Отсюда получаем

$$\varphi(x) = r_0^{-1} \int_x^{\infty} \frac{x F(r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} dr,$$

что совпадает с уравнением (4.10) и может быть решено теми же методами.

4.23 Теперь рассмотрим проекции отрезков и плоских фигур. Пусть прямолинейные случайно направленные отрезки случайной длины l распределены в пространстве с плотностью вероятности $F(l)$. Пусть x — длина проекции

отрезка на случайную прямую. Угол θ между отрезком и нормалью к плоскости имеет распределение $\frac{1}{2} \sin \theta d\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$). При данном l условным распределением проекции $x = l \sin \theta$ будет

$$xl^{-1}(l^2 - x^2)^{-1/2} dx \quad (0 \leq x \leq l).$$

Плотность вероятности $\varphi(x)$ распределения проекций x будет задаваться уравнением

$$x^{-1}\varphi(x) = \int_x^{\infty} \frac{F(l) dl}{l(l^2 - x^2)^{1/2}}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением (4.13), которое рассматривал Вискелл. Оно может быть сведено к уравнению абелева типа, обладающему решением

$$F(l) = -\frac{2l^2}{\pi} \int_l^{\infty} \frac{d}{dx} \left(\frac{\varphi(x)}{x} \right) \frac{dx}{(x^2 - l^2)^{1/2}}.$$

4.24 Пусть имеются плоские фигуры случайной площади a , распределенные в пространстве со случайной ориентацией ($F(a)$ — плотность вероятности распределения a). Рассмотрим площади α их проекцией на фиксированную плоскость. Предположим, что α имеет распределение с плоскостью вероятности $\varphi(\alpha)$. Имеем $\alpha = a |\cos \theta|$, и $|\cos \theta|$ распределен равномерно в пределах $0 \leq |\cos \theta| \leq 1$, так что получаем

$$\varphi(\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{F(a)}{a} da,$$

откуда следует решение

$$F(a) = a\varphi'(a).$$

Случайные вращения

4.25 Теперь рассмотрим случайные вращения в евклидовом пространстве. В случае двух измерений поворот полностью описывается величиной угла, на который поворачивается тело или фигура. Единственным естественным критерием геометрической случайности

служит условие, что все измеримые множества θ должны иметь вероятность, инвариантную относительно поворотов. Очевидно, что единственная вероятностная мера, которая удовлетворяет этому условию, такова, что вероятность каждого множества значений θ равна его лебеговской мере, поделенной на 2π .

4.26 В случае трех измерений ситуация значительно более сложная. Мы можем описать вращения либо задавая элементы ортогональной матрицы, соответствующей вращению, либо же задавая направляющие косинусы (скажем, α, β, γ) оси поворота вместе с углом (скажем, V), на который поворачивается тело. В обоих случаях имеются лишь три существенно независимые координаты, и пространство всех вращений трехмерно.

По-прежнему, естественным условием, которое нужно наложить на вероятностную меру, является ее инвариантность относительно произвольных вращений. Для того чтобы это имело место, кажется естественным предположить, что все оси вращения должны быть равновероятными (в смысле предыдущих глав), а угол поворота должен быть распределен равномерно на $(0, 2\pi)$. Первое из этих условий, очевидно, есть необходимое следствие требования инвариантности, однако второе является неверным. Следуя Дельтейлю (Deitheil, 1926), мы определим верное распределение V с помощью инфинитезимальных преобразований.

4.27 Выберем прямоугольные оси координат, проходящие через фиксированную точку тела, начальное расположение которого будем обозначать через S_0 . Определим «вектор вращения», отвечающий данному вращению, как вектор с направляющими косинусами (α, β, γ) — направляющими косинусами оси вращения — и длины $\operatorname{tg} \frac{1}{2} V$, где V — угол поворота. Компонентами этого вектора служат

$$l = \alpha \operatorname{tg} \frac{1}{2} V,$$

$$m = \beta \operatorname{tg} \frac{1}{2} V,$$

$$n = \gamma \operatorname{tg} \frac{1}{2} V.$$

Элементарная вероятность, подлежащая нахождению, есть

$$F(l, m, n) dl dm dn.$$

Удобно преобразовать (l, m, n) в однородные координаты, определяемые следующим образом:

$$\lambda = \alpha \sin \frac{1}{2} V,$$

$$\mu = \beta \sin \frac{1}{2} V,$$

$$\nu = \gamma \sin \frac{1}{2} V,$$

$$\rho = \cos \frac{1}{2} V.$$

Теперь допустим, что положение S_1 получается из S_0 преобразованием $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1)$, положение S_2 получается из S_1 преобразованием $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2)$, а S_2 из S_0 — преобразованием $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3, \rho_3)$. Эти вращения назовем соответственно R_1, R_2 и R_3 . Первой нашей целью является выразить $(\lambda_3, \mu_3, \nu_3, \rho_3)$ через $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1)$ и $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2)$. Для этого сначала рассмотрим частный случай, когда R_1 и R_2 являются вращениями на угол π . Такие вращения называются «симметриями» (рис. 4.1).

Пусть (a_1, b_1, c_1) и (a_2, b_2, c_2) — направляющие косинусы осей R_1 и R_2 .

Результирующее вращение R_3 имеет ось, перпендикулярную OR_1 и OR_2 . Рассмотрим начальную точку A_0 , которую R_1 преобразует в A_1 и пусть R_2 преобразует A_1 в A_2 . Можно выбрать A_0 в плоскости R_1OR_2 , и тогда общий угол, на который она поворачивается, есть A_0OR_2 , обозначим его через V . Тогда угол $\frac{1}{2}V = \text{угол } I_1OI_2$, где I_1, I_2 — перпендикуляры из A_0 и A_1 на оси OR_1 и

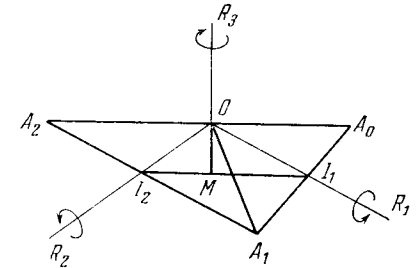


Рис. 4.1.

OR_2 . Из предшествовавшего определения имеем

$$\cos \frac{1}{2} V = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

Поскольку OR_3 перпендикулярна к OR_1 и OR_2 , то ее направляющие косинусы пропорциональны компонентам

$$\begin{aligned} b_1 c_1 - b_2 c_1, \\ c_1 a_2 - c_2 a_1, \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{aligned}$$

векторного произведения OI_2 на OI_1 . Длина этого векторного произведения равна $\sin \frac{1}{2} V$, поскольку $\frac{1}{2} V$ есть угол между OI_1 и OI_2 , и поэтому

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= b_1 c_2 - b_2 c_1, \\ \mu_3 &= c_1 a_2 - c_2 a_1, \\ \nu_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1, \end{aligned}$$

а также

$$\rho_3 = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

Этот результат имеет место только для вращений на π . Теперь рассмотрим вращения на произвольные углы. Обращаясь опять к рис. 4.1 и оставляя в силе условие, что A_0 лежит в плоскости, проходящей через O перпендикулярно OR_3 , мы видим, что всякое вращение вокруг OR_3 может быть заменено произведением двух вращений на π вокруг двух осей (скажем, OS_1 и OS_2), перпендикулярных OR_3 . Более того, это может быть сделано бесконечным множеством способов, поскольку в качестве OS_1 можно взять всякую ось, перпендикулярную к OR_3 , а затем выбрать OS_2 под углом $\frac{1}{2} V$ к OS_1 , где V есть требуемый угол вращения.

Возвращаясь к общему случаю, когда $R_3 = (\lambda_3, \mu_3, \nu_3, \rho_3)$ является результатом последовательного применения $R_1 = (\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1)$ и $R_2 = (\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2)$, мы разлагаем R_1 на две симметрии T_1 и T'_1 , а R_2 — на симметрии T_2 и T'_2 , так что R_3 есть результат последовательного применения T_1, T', T_2 и T'_2 . Из произвольности разложения вращения на симметрии следует, что T и T_2 могут быть выбраны

вращениями вокруг одной и той же оси, перпендикулярной к R_1 и R_2 . Их совместное действие не меняет положения твердого тела, так что R_3 сводится к применению сначала T_1 , а затем T'_2 .

Пусть ось T_1 имеет направляющие косинусы (a_1, b_1, c_1) , T_2 и $T'_1 = (a, b, c)$, а $T'_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Тогда R_1 имеет однородные координаты

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= b_1 c - b c_1, \\ \mu_1 &= c_1 a - c a_1, \\ \nu_1 &= a_1 b - a b_1, \\ \rho_1 &= a a_1 + b b_1 + c c_1, \end{aligned} \quad (4.15)$$

R_2 имеет координаты

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= b c_2 - b_2 c, \\ \mu_2 &= c a_2 - c_2 a, \\ \nu_2 &= a b_2 - a_2 b, \\ \rho_2 &= a a_2 + b b_2 + c c_2, \end{aligned} \quad (4.16)$$

R_3 имеет координаты

$$\begin{aligned} \lambda_3 &= b_1 c_2 - b_2 c_1, \\ \mu_3 &= c_1 a_2 - c_2 a_1, \\ \nu_3 &= a_1 b_2 - a_2 b_1, \\ \rho_3 &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Мы хотим выразить последние координаты через первые. Используя (4.15), мы находим (a_1, b_1, c_1) в терминах $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1, \rho_1)$ и (a, b, c) ; из (4.16) мы находим (a_2, b_2, c_2) в терминах $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2, \rho_2)$ и (a, b, c) . В результате получаем

$$\begin{aligned} a_1 &= a \rho_1 + b \nu_1 - c \mu_1, \\ b_1 &= -a \nu_1 + b \rho_1 + c \lambda_1, \\ c_1 &= a \mu_1 - b \lambda_1 + c \rho_1, \\ a_2 &= a \rho_2 - b \nu_2 + c \mu_2, \\ b_2 &= a \nu_2 + b \rho_2 - c \lambda_2, \\ c_2 &= -a \mu_2 + b \lambda_2 + c \rho_2. \end{aligned} \quad (4.18)$$

В то же время выполняются тождества

$$\begin{aligned} d_1 &= a \lambda_1 + b \mu_1 + c \nu_1 = 0, \\ d_2 &= a \lambda_2 + b \mu_2 + c \nu_2 = 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Подставляя (4.18) в (4.17) и используя (4.19), получаем

$$\begin{aligned}\lambda_3 &= b_1 c_2 - c_1 b_2 + a_1 d_2 + d_1 a_2 = \lambda_2 \rho_1 + \mu_2 \nu_1 - \nu_2 \mu_1 + \rho_2 \lambda_1, \\ \mu_3 &= c_1 a_2 - a_1 c_2 + b_1 d_2 + d_1 b_2 = -\lambda_2 \nu_1 + \mu_2 \rho_1 + \nu_2 \lambda_1 + \rho_2 \mu_1, \\ \nu_3 &= a_1 b_2 - b_1 a_2 + c_1 d_2 + d_1 c_2 = \lambda_2 \mu_1 - \mu_2 \lambda_1 + \nu_2 \rho_1 + \rho_2 \nu_1, \\ \rho_3 &= a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2 = -\lambda_2 \lambda_1 - \mu_2 \mu_1 - \nu_2 \nu_1 + \rho_2 \rho_1.\end{aligned}$$

Это и есть нужные нам уравнения, которые дают композицию двух вращений. Возвратимся к начальным координатам, обозначая их (l_1, m_1, n_1) для R_1 , (l_2, m_2, n_2) для R_2 и (l_3, m_3, n_3) для $R_1 R_2$. Получаем

$$\begin{aligned}l_3 &= \frac{l_1 + l_2 + m_2 n_1 - m_1 n_2}{1 - l_1 l_2 - m_1 m_2 - n_1 n_2}, \\ m_3 &= \frac{m_1 + m_2 + n_2 l_1 - n_1 l_2}{1 - l_1 l_2 - m_1 m_2 - n_1 n_2}, \\ n_3 &= \frac{n_1 + n_2 + l_2 m_1 - m_2 l_1}{1 - l_1 l_2 - m_1 m_2 - n_1 n_2}.\end{aligned}$$

Рассматривая главные значения $(l_3 - l_2, m_3 - m_2, n_3 - n_2)$, когда l_1, m_1, n_1 стремятся к нулю, мы выводим уравнения для инфинитезимального преобразования. Обозначая через (l, m, n) общее значение (l_2, m_2, n_2) и (l_3, m_3, n_3) , получаем таким путем

$$\begin{aligned}\delta l &= (1 + l^2) l_1 + (lm - n) m_1 + (ln + m) n_1, \\ \delta m &= (ml + n) l_1 + (1 + m^2) m_1 + (mn - l) n_1, \\ \delta n &= (ln - m) l_1 + (mn + l) m_1 + (1 + n^2) n_1,\end{aligned}$$

где l_1, m_1, n_1 малы.

Применяя способ рассуждений, использованный в главе 1, получаем следующие уравнения для плотности

$$\begin{aligned}(1 + l^2) \frac{\partial F}{\partial l} + (lm + n) \frac{\partial F}{\partial m} + (ln - m) \frac{\partial F}{\partial n} + 4lF &= 0, \\ (lm - n) \frac{\partial F}{\partial l} + (1 + m^2) \frac{\partial F}{\partial m} + (mn + l) \frac{\partial F}{\partial n} + 4mF &= 0 \\ (ln + m) \frac{\partial F}{\partial l} + (mn - l) \frac{\partial F}{\partial m} + (1 + n^2) \frac{\partial F}{\partial n} + 4nF &= 0.\end{aligned}$$

Помножая эти уравнения на $l, -n$ и m соответственно

и складывая, получаем

$$(1 + l^2 + m^2 + n^2) \frac{\partial F}{\partial l} + 4lF = 0.$$

Из двух других аналогичных уравнений получаем

$$\frac{dF}{F} + \frac{4(l dl + m dm + n dn)}{(1 + l^2 + m^2 + n^2)} = 0.$$

Следовательно, F пропорциональна

$$(1 + l^2 + m^2 + n^2)^{-2}.$$

С помощью уравнений

$$l = \operatorname{tg} \frac{1}{2} V \sin \theta \cos \varphi,$$

$$m = \operatorname{tg} \frac{1}{2} V \sin \theta \sin \varphi,$$

$$n = \operatorname{tg} \frac{1}{2} V \cos \theta$$

переходим к полярным координатам. Тогда

$$1 + l^2 + m^2 + n^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} V = \left(\cos \frac{1}{2} V \right)^{-2}$$

и

$$dl dm dn = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} V \left(\cos \frac{1}{2} V \right)^{-4} \sin \theta dV d\theta d\varphi,$$

так что элемент в параметрическом пространстве должен иметь вид

$$dJ = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{1}{2} V \sin \theta dV d\theta d\varphi. \quad (4.20)$$

Областью изменения параметров является $0 \leq V \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, так что для того, чтобы эта мера стала вероятностной, мы должны помножить dJ на $\frac{1}{2} \pi^{-2}$.

Тогда получим

$$dP = \frac{1}{4} \pi^{-2} \sin^2 \frac{1}{2} V \sin \theta dV d\theta d\varphi.$$

Наше первоначальное предположение состояло в том, что мы должны были случайно выбрать ось вращения,

а затем выбрать угол вращения с равномерным распределением на $(0, 2\pi)$. Это дало бы

$$dP = \frac{1}{8} \pi^{-2} \sin \theta dV d\theta d\varphi,$$

что, как мы видим, неверно.

4.28 При другом подходе к этой задаче случайное ортогональное преобразование выбирается путем выбора трех независимых случайных векторов с их последующей ортогонализацией. Так, мы могли бы взять случайный единичный вектор x_1 , выбирая его направляющие косинусы пропорциональными трем независимым случайным величинам с нормальным распределением.

Пусть x_2 — другой такой единичный вектор, а y — единичный вектор, параллельный той компоненте x_2 , которая перпендикулярна к x_1 , т. е. вектору $x_2 - x_1(x_1 \cdot x_2)$. Третий вектор z определяется как векторное произведение $x_1 \times y$, и (x_1, y, z) могут быть взяты в качестве единичных векторов новой системы координат. Их представление в терминах единичных векторов первоначальной

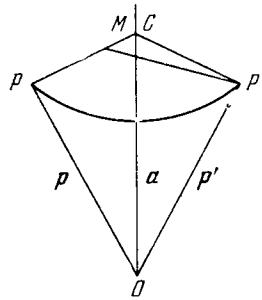


Рис. 4.2.

координатной системы как раз и дает нужную ортогональную матрицу. То, что это верно, является почти очевидным, однако мы покажем это более подробно.

Для этого мы сначала рассмотрим представление первоначального вектора вращения в терминах ортогональной матрицы при преобразовании Эйлера. Предположим, что имело место вращение на угол V вокруг оси с направляющими косинусами $(l,$

$m, n)$. Пусть O есть начало координат, а a — единичный вектор (l, m, n) , направленный по оси вращения (рис. 4.2). Предположим, что некоторая точка тела P вращением переводится в положение P' . Обозначим векторы \overline{OP} и $\overline{OP'}$ через p и p' , \overline{PC} перпендикулярно к a , а M является основанием перпендикуляра из P' на \overline{PC} . Тогда

$$\overline{p'} = \overline{OC} + \overline{CP'} = \overline{OC} + \overline{CM} + \overline{MP'}.$$

Здесь

$$\overline{OC} = (p \cdot a) a,$$

$$\overline{CM} = \overline{CP} \cos V = (p - (p \cdot a) a) \cos V,$$

$$\overline{MP'} = (a \times p) \frac{|\overline{CP'}| \sin V}{|p| \sin \alpha},$$

где α — угол между OP и OC . Так как

$$|\overline{CP'}| = |\overline{CP}| = |p| \sin \alpha,$$

то

$$\overline{MP'} = (a \times p) \sin V.$$

Таким образом,

$$p' = p \cos V + (a \times p) \sin V + (p \cdot a) a (1 - \cos V).$$

Представляя это преобразование матрицей, получаем

$$\begin{bmatrix} \cos V + l^2(1 - \cos V) & lm(1 - \cos V) - n \sin V & ln(1 - \cos V) + m \sin V \\ lm(1 - \cos V) + n \sin V & \cos V + m^2(1 - \cos V) & mn(1 - \cos V) - l \sin V \\ ln(1 - \cos V) - m \sin V & mn(1 - \cos V) + l \sin V & \cos V + n^2(1 - \cos V) \end{bmatrix}$$

Это есть матричное представление преобразования координат точки при данном повороте. Воздействие на координатные оси задается матрицей той же формы с заменой V на $-V$. Отметим, в частности, что след матрицы равен $1 + 2 \cos V$ и зависит только от V .

4.29 Теперь вернемся к случайной ортогональной матрице, которую будем строить несколько иным способом. Возьмем случайные величины ξ и φ , равномерно распределенные на $(-1, 1)$ и $(-\pi, \pi)$ соответственно, и в первой строке матрицы запишем

$$\{\xi, (1 - \xi^2)^{1/2} \cos \varphi, (1 - \xi^2)^{1/2} \sin \varphi\}.$$

Очевидно, что это есть координаты единичного вектора случайного направления.

Теперь построим единичные векторы A и B :

$$A = \{(1 - \xi^2)^{1/2}, -\xi \cos \varphi, -\xi \sin \varphi\},$$

$$B = \{0, \sin \varphi, -\cos \varphi\}.$$

Они являются единичными векторами, ортогональными

друг другу и первому вектору. Запишем

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{A} \cos \alpha + \mathbf{B} \sin \alpha, \\ \mathbf{D} &= -\mathbf{A} \sin \alpha + \mathbf{B} \cos \alpha, \end{aligned}$$

где α — случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(-\pi, \pi)$. \mathbf{C} и \mathbf{D} могут быть выбраны в качестве двух других осей новой системы координат. Случайная ортогональная матрица при этом имеет вид

$$\begin{bmatrix} \xi & (1 - \xi^2)^{1/2} \cos \varphi & (1 - \xi^2)^{1/2} \sin \varphi \\ (1 - \xi^2)^{1/2} \cos \alpha & -\xi \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha & -\xi \sin \varphi \cos \alpha - \cos \varphi \cos \alpha \\ -(1 - \xi^2)^{1/2} \sin \alpha & \xi \cos \varphi \sin \alpha + \sin \varphi \cos \alpha & \xi \sin \varphi \sin \alpha - \cos \varphi \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Ее мы идентифицируем с ранее данной матрицей. След равен

$$\begin{aligned} \xi - \xi \cos \varphi \cos \alpha + \sin \varphi \sin \alpha + \xi \sin \varphi \sin \alpha - \cos \varphi \cos \alpha = \\ = \xi \{1 - \cos(\varphi + \alpha)\} - \cos(\varphi + \alpha). \end{aligned}$$

След, который мы идентифицируем с $1 + 2 \cos V$, распределен как

$$\xi (1 - \cos \psi) - \cos \psi,$$

где ξ распределена равномерно на $(-1, 1)$, а ψ распределена равномерно на $(0, \pi)$. Следовательно, $\cos V$ распределена как

$$\xi \sin^2 \frac{1}{2} \psi - \cos^2 \frac{1}{2} \psi.$$

Если положить $w = \cos V$ и фиксировать ψ , то величина w распределена равномерно на $(-1, -\cos \psi)$. Плотность вероятности w пропорциональна

$$\begin{aligned} f(w) dw &= dw \int_{\pi - \arccos w}^{\pi} \left(2 \sin^2 \frac{1}{2} \psi\right)^{-1} d\psi = \\ &= \operatorname{tg} \frac{1}{2} (\arccos w) dw = 2 \sin^2 \frac{1}{2} V dV; \end{aligned}$$

это согласуется с предыдущим результатом (4.20), если полагать, что положительные и отрицательные значения V

имеют равную вероятность. Итак, мы показали, что выбор случайного вращения эквивалентен выбору случайной трехмерной ортогональной матрицы, вероятностное распределение которой инвариантно относительно ортогональных преобразований. Это распределение является инвариантной мерой, и поскольку выборка n значений из нормального распределения с нулевым средним может быть представлена в n -мерном пространстве вектором, имеющим сферически симметричное распределение, то естественно, что эти идеи смогли найти применение в статистической теории, в особенности в связи с многомерным анализом. Это подробно обсуждалось Джеймсом (James, 1954), который применил теорию инвариантной меры в пространстве всех ортогональных $n \times n$ матриц при выводе многих стандартных распределений многомерного анализа.

4.30 Можно было бы доказать аналог «центральной предельной теоремы», состоящий в том, что общее действие повторных случайных вращений, каждое из которых обладает определенным распределением θ, φ и V , сходится к рассмотренному выше распределению. Вероятно, что требование существования точки $(\theta_0, \varphi_0, V_0)$ такой, что в ее некоторой окрестности совместное вероятностное распределение θ, φ и V дифференцируемо по θ, φ и V , является достаточным условием для этого.

Приложение к кристаллографии

4.31 Другое интересное приложение, связанное с кристаллографией, рассматривалось Маккензи и Томсоном (Mackenzie and Thomson, 1957). Случайное вращение рассмотренного выше типа применяется к кубу. Требуется найти наименьший угол, на который должен быть повернут куб после этого, для того чтобы придать ему первоначальную ориентацию, т. е. чтобы его грани были бы параллельны граням в начальном положении (совпадение положений необязательно).

Маккензи и Томсон изучили эту задачу методами Монте-Карло, однако позднее Хандскомб (Handscomb, 1958) и Маккензи (Mackenzie, 1958) получили точное распределение.

ЗАДАЧИ О ПОКРЫТИЯХ

Покрывтия плоской решетки

5.1 В этой главе рассматриваются задачи вычисления вероятностей того, что определенные фиксированные геометрические фигуры или множества на плоскости оказываются покрытыми другими фигурами, положение которых в каком-то смысле случайно. Мы начнем с одного класса задач, связанных с заданной плоской решеткой точек (необязательно прямоугольной). Исследуется вероятностное распределение числа точек решетки, попадающих в некоторую геометрическую фигуру (например, в круг), расположение которой на плоскости случайно. Подобная ситуация возникает на практике, когда пробный круговой обруч случайно бросается на поле, центры растений на котором составляют регулярную решетку.

5.2 Решетка может состоять из всех точек на плоскости с целыми координатами (квадратная решетка) или же из точек, являющихся вершинами плотно упакованных равносторонних треугольников, или же иметь более общий вид. Мы в основном рассматриваем только квадратную решетку.

При бросании на квадратную решетку фигуры определенной формы и, возможно, фиксированной ориентации, число точек, покрываемых ею, есть случайная величина со средним, равным площади фигуры (если квадраты имеют единичную сторону).

Это интуитивно очевидно, но может быть и показано, как это сделано ниже.

Покрывтия на прямой

5.3 Оценка дисперсии представляет собой значительную более сложную проблему даже для фигур простой формы, таких, как круг. Для иллюстрации некоторых принципов мы начнем со значительно более простой за-

дачи о числе точек одномерной решетки, попадающих в случайный интервал на прямой.

Предполагается, что решетка состоит из точек $0, \pm 1, \pm 2, \dots$, а интервал имеет длину l и случайное расположение.

Вместо того чтобы брать интервал случайным и фиксировать решетку, мы можем фиксировать интервал и придавать случайное расположение решетке. Предположим, что фиксированным интервалом является $(-\frac{1}{2}l, \frac{1}{2}l)$ и положим

$$f(x) = \begin{cases} l^{-1}, & -\frac{1}{2}l \leq x \leq \frac{1}{2}l, \\ 0 & \text{в остальных местах.} \end{cases}$$

Решетка пусть состоит из точек $T, T \pm 1, T \pm 2, \dots$, где T есть случайная величина, равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$. Тогда число точек решетки, попадающих в интервал, оказывается равным

$$N(T) = l \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(T+n). \tag{5.1}$$

Среднее число, очевидно, равно

$$l \int_{-\infty}^{\infty} f(u) du = l. \tag{5.2}$$

Дисперсия величины $N(T)$ равна

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \sum_{n,s} f(T+n) f(T+s) dt - l^2 = \\ & = l^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(T) f(T+n) dT - l^2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Интеграл в (5.3) равен $l^{-2}(l - |n|)$, если $|n| \leq l$, и нулю в противном случае. Поэтому дисперсия равна

$$\sum (l - |n|) - l^2. \tag{5.4}$$

Если $l = p + q$, где p — целое число и $0 \leq q < 1$, то (5.4) равно

$$q - q^2. \tag{5.5}$$

5.4 Мы можем подойти к этой задаче и иначе. Сумма в выражении для $N(T)$ в (5.1), будучи рассмотрена как функция от T , периодична с периодом 1 и может быть разложена в сходящийся ряд Фурье

$$N(T) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp(-2\pi imt),$$

где

$$C_m = \int_0^1 N(t) \exp(2\pi imt) dt = l \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(2\pi imt) dt = \\ = l \sqrt{2\pi} \varphi(2\pi im),$$

где $\varphi(u)$ есть преобразование Фурье:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{iut} dt.$$

Теорема Парсеваля дает

$$\int_0^1 |N(t)|^2 dt = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_m|^2.$$

Поскольку $|C_0|^2 = l^2$, то получаем

$$\text{var } [N(T)] = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} |\varphi(2\pi m)|^2,$$

где сумма берется по всем целым значениям m , исключая $m=0$. Подставляя значение $f(t)$, получаем

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} t^{-1} e^{iut} dt = \\ = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin \frac{1}{2} lu}{\frac{1}{2} lu} & \text{для } u \neq 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{для } u = 0. \end{cases}$$

Используя эту формулу, находим

$$\text{var } [N(t)] = \frac{2}{l^2 \pi^2} \sum_1^{\infty} \frac{\sin^2 n l \pi}{n^2}. \quad (5.6)$$

Вид этого выражения совершенно отличен от (5.2) и (5.3). Равенство между (5.5) и (5.6) является следствием формулы Пуассона (Титчмарш (Titchmarsh, 1937, стр. 61)).

Покрывание квадратной решетки прямоугольником

5.5 Отсюда легко вывести результат для прямоугольника со сторонами, параллельными направлениям плоской решетки, положение центра которого на решетке случайно. Действительно, число точек решетки в таком прямоугольнике может рассматриваться как произведение двух независимых случайных величин, каждая из которых равна числу точек линейной решетки, покрываемых сторонами прямоугольника. Дисперсия числа покрытых точек меняется сложным образом. Если стороны равны l и m , где $l=p+q$, $m=P+Q$ ($0 \leq q, Q < 1$), то дисперсия равна

$$q(1-q)Q(1-Q) + l^2 Q(1-Q) + m^2 q(1-q).$$

Эта задача в предположении, что ориентация прямоугольника является случайной, не изучалась.

5.6 Д. Г. Кендалл (Kendall, 1948) и Р. А. Ранкин (Rankin, 1953) рассмотрели аналогичную, но более трудную задачу определения дисперсии числа точек решетки внутри случайно расположенного круга радиуса R .

Пусть решетка состоит из точек (i, j) , $i, j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и через N обозначим число таковых в круге $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$. Если $\alpha, \beta=0$, то определение N как функции от R является классической задачей аналитической теории чисел. Известно, что

$$N - \pi R^2 = O\left(R^{\frac{13}{20} + \epsilon}\right) \text{ для любого } \epsilon > 0.$$

Харди высказано предположение, что

$$N - \pi R^2 = O\left(R^{\frac{1}{2} + \epsilon}\right)$$

для каждого $\varepsilon > 0$. Если предполагать расположение круга случайным, то задача упрощается в том смысле, что можно показать, что средний квадрат разности $N - \pi R^2$ имеет порядок $O(R)$.

Для доказательства мы должны оценить дисперсию N при фиксированном R и независимых α и β , распределенных равномерно на $(0, 1)$. Из сказанного выше следует, что $E(N) = \pi R^2$. Величина же $E(N^2)$ может быть найдена двумя способами.

Пусть $A(R, \alpha, \beta)$ обозначает число точек решетки в круге радиуса R с центром (α, β) . Это есть дважды периодическая функция по α и β и, следовательно, может быть (по крайней мере формально) разложена в двойной ряд Фурье, так что $A(R, \alpha, \beta) \sim \sum_{m,n} a_{mn} \exp 2\pi i (m\alpha + n\beta)$.

По определению, $C(u, v)$ равна единице или нулю в соответствии с тем, лежит ли точка (u, v) в круге $u^2 + v^2 \leq R^2$ или нет. Тогда

$$A(R, \alpha, \beta) = \sum_{i,j} C(i - \alpha, j - \beta),$$

где i, j меняются по всем точкам решетки. Поэтому

$$\begin{aligned} Q_{mn} &= \int_0^1 \int_0^1 A(R, \alpha, \beta) \exp \{-2\pi i (m\alpha + n\beta)\} d\alpha d\beta = \\ &= \sum_{ij} \int_{i-1}^i \int_{j-1}^j C(u, v) e^{2\pi i (mu + nv)} du dv = \\ &= \int_{u^2+v^2 \leq R^2} \cos(2\pi mu) \cos(2\pi nu) du dv = \\ &= R (m^2 + n^2)^{-1/2} J_1 \{2\pi R (m^2 + n^2)^{1/2}\}, \end{aligned}$$

где $m^2 + n^2 > 0$. Для случая $m = n = 0$ получаем $Q_{00} = \pi R^2$. Мы не нуждаемся в сходимости двойного ряда Фурье. Нам требуется только аналог равенства Парсеваля, которое дает

$$\begin{aligned} E(N^2) &= \int_0^1 \int_0^1 A(R, \alpha, \beta)^2 d\alpha d\beta = \\ &= \pi^2 R^4 + R^2 \sum \sum' (m^2 + n^2)^{-1} J_1^2 \{2\pi R (m^2 + n^2)^{1/2}\}, \end{aligned}$$

где двойная сумма $\sum \sum'$ берется по всем значениям m и n , исключая $m = n = 0$. Пусть $r(l)$ есть число представлений целого числа l в виде суммы двух квадратов. Мы можем записать тогда

$$E(N^2) = \pi^2 R^4 + R^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1} r(l) J_1^2 \{2\pi R l^{1/2}\}.$$

Этот ряд сходится, потому что при некотором $c > 0$ и всех $z > 0$

$$|J_1(z)| < cz^{-1/2} \quad \text{и} \quad r(l) = O(l^{\delta})$$

для каждого $\delta > 0$. Таким образом, дисперсия величины N равна

$$\text{var } N = R^2 \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1} r(l) J_1^2 \{2\pi R l^{1/2}\}. \quad (5.7)$$

Используя приведенные выше оценки, получаем

$$\text{var } N = O(R),$$

так что стандартная ошибка возрастает не быстрее $R^{1/2}$, т. е. квадратного корня из масштабного множителя для круга. Это резко отличается от рассмотренного выше случая случайного прямоугольника со сторонами, параллельными направлениям решетки. Используя асимптотическую формулу для функции Бесселя

$$J_1(z) \sim \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{3}{4}\pi\right),$$

получаем

$$\text{var } N = R\pi^{-2} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-3/2} r(l) \cos^2\left[2\pi R l^{1/2} - \frac{3}{4}\pi\right] + o(1).$$

Отсюда видно, что при $R \rightarrow \infty$ величина $R^{-1} \text{var } N$ не стремится к пределу, но имеет верхний и нижний пределы определенности, которые совпадают с таковыми для выражения

$$\frac{1}{2} \pi^{-2} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-3/2} r(l) \{1 - \sin(4\pi R l^{1/2})\}.$$

Они в свою очередь лежат между нулем и

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{2} \pi^{-2} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-3/2} r(l) = 2\pi^{-2} \zeta\left(\frac{3}{2}\right) L\left(\frac{3}{2}\right) = \\ &= (0,676497)^2 = 0,457648. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Здесь $\zeta(z)$ — дзета-функция Римана, и

$$L(s) = 1^{-s} - 3^{-s} + 5^{-s} - 7^{-s} + \dots$$

5.7 В случае одномерной задачи дисперсия была получена нами в двух различных формах и было показано, что равенство этих выражений является примером формулы Пуассона. То же самое можно проделать и здесь.

Обозначим через S_N квадрат с центром в начале координат со сторонами длины $2N+1$, параллельными осям координат. Его площадь равна $(2N+1)^2$ и он содержит $(2N+1)^2$ точек решетки. Вокруг каждой точки решетки внутри S_n мы строим круг радиуса R . Если центры двух кругов удалены на расстояние L , не превосходящее $2R$, то их пересечение есть область (которую мы будем называть лункой) площади

$$\begin{aligned} V(R, t) &= 2R^2 \int_0^{\arccos(t/2R)} \sin^2 \theta d\theta = \\ &= R^2 \{ \arccos t (2R)^{-1} - t (2R)^{-1} [1 - t^2 (4R^2)^{-1}]^{1/2} \}. \end{aligned}$$

Пусть P — точка внутри квадрата S_N и предположим, что она покрыта n кругами. Каждому кругу мы приписываем плотность $\frac{1}{2}(n-1)$ в точке P , если число других кругов, покрывающих P , равно $n-1$. Если проинтегрировать эту плотность по всему кругу, то получим сумму площадей всех лунок, образованных данным кругом и каждым из остальных $(2N+1)^2-1$ кругов. Полная плотность в точке P , равная сумме плотностей каждого из кругов, покрывающих P , равна $\frac{1}{2}n(n-1)$, т. е. общему числу различных лунок, образованных парами кругов, покрывающими P . Поэтому интеграл от полной плотности по квадрату S_N равен сумме содержимого всех лунок (или частей лунок), которые лежат в S_N . Обозначим ее

через M . Через $p_n(N)$ обозначим вероятность того, что точка, выбранная случайно в квадрате S_N , покрывается n кругами. Это есть доля площади квадрата, покрытой n кругами. Тогда

$$M = (2N+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} n(n-1) p_n(N).$$

Ряд в правой части является, конечно, обрывающимся. При $N \rightarrow \infty$ $p_n(N)$ стремится к постоянной p_n , доле общей площади, которая покрывается n кругами.

5.8 Теперь найдем M иным способом. Пусть \mathbf{m} — вектор, проведенный из начала координат в точку решетки, $|\mathbf{m}|$ — его длина. При фиксированном R имеется лишь конечное число различных размеров лунок. Их образуют те окружности, для которых $0 \leq t = |\mathbf{m}| \leq 2R$. Обозначим через $P(t)$, $t > 0$, число различных значений \mathbf{m} , для которых $|\mathbf{m}| = t$. Каждый круг содержит $P(t)$ лунок, соответствующих значениям $t \leq 2R$, и полное содержимое всех лунок в круге равно

$$\sum_{0 < t < 2R} P(t) V(R, t) = \sum_{\mathbf{m}} V(R, |\mathbf{m}|),$$

где последняя сумма берется по всем точкам решетки, исключая $(0, 0)$, и принято соглашение о том, что $V(R, |\mathbf{m}|) = 0$ для $|\mathbf{m}| > 2R$. Всего имеется $(2N+1)^2$ кругов с центрами в S_N и каждая лунка определяется двумя кругами, так что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (2N+1)^{-2} M = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{m}} V(R, |\mathbf{m}|) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} n(n-1) p_n. \quad (5.9)$$

С другой стороны, обозначая через M' сумму площадей всех полных кругов или частей кругов, лежащих внутри S_N , имеем

$$\pi R^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M'}{(2N+1)^2}.$$

Это в свою очередь равно интегралу по S_N от n (числа

кругов, покрывающих точку P), что дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \pi R^2 = V(R, \mathbf{0}).$$

Таким образом, (5.9) можно записать как

$$\sum_1^{\infty} n^2 p_n = \sum_m V(R, |\mathbf{m}|),$$

где сумма берется по всем точкам решетки, включая начало.

Рассмотрим точку (α, β) , где $0 \leq \alpha \leq 1$, $0 \leq \beta \leq 1$. Число точек решетки, содержащихся в круге радиуса R с центром в этой точке, равно числу кругов радиуса R с центрами в точках решетки, которые покрывают точку (α, β) , т. е. значению n в этой точке. Поэтому распределение числа точек решетки в случайном круге радиуса R равно распределению n , когда (α, β) выбирается случайно в единичном квадрате. Поэтому дисперсия равна

$$\begin{aligned} \text{var } N &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 p_n - \left(\sum_{n=0}^{\infty} n p_n \right)^2 = \sum_m V(R, |\mathbf{m}|) - \pi^2 R^4 = \\ &= \pi R^2 (1 - \pi R^2) + \sum_m' V(R, |\mathbf{m}|). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Это также должно быть равным (5.7); так мы получаем уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{\infty} l^{-1} r(l) J_1^2 \{2\pi R l^{1/2}\} &= \pi (1 - \pi R^2) + \sum_{0 < n \leq x} r(n) \times \\ &\times \{ \arccos n^{1/2} (2R)^{-1} - n^{1/2} (2R)^{-1} [1 - n (4R^2)^{-1}]^{1/2} \}, \end{aligned}$$

которое является любопытным и неожиданным примером формулы Пуассона.

5.9 Необычность этих результатов состоит в том, что $\text{var } N$ является резко колеблющейся функцией от R . В практических задачах мы должны поэтому вычислять ее точно (что лучше всего делать, используя конечный ряд (5.10), либо же использовать верхнюю границу Ra^2 , задаваемую (5.8)). Некоторые обобщения этих результатов

для овалов, гиперсфер и гиперэллипсов были получены Кендаллом и Ранкином, которые рассматривали также гексагональную решетку. Результаты для овалов расширяют наши знания о методе «считающих квадратов» при графическом интегрировании, а результаты, относящиеся к кругам, бросаемым на гексагональную решетку, полезны в теории кожной чувствительности. Эти результаты также представляют интерес в связи с оценкой числа растений на данной площади методом бросания обруча (очерчиванием случайного круга) в случаях, когда растения распределены не по Пуассону, а расположены более или менее регулярным образом.

Случайные формы

5.10 Выше мы рассмотрели пример случайного множества (круга), имеющего фиксированную форму и покрывающего фиксированное множество (точки решетки). Обширный класс задач другого типа возникает при рассмотрении множеств, для которых случайным является не только их расположение, но случайна также и их геометрическая форма. Следующие два примера поясняют о чем идет речь. В первом мы рассматриваем n интервалов единичной длины на прямой $-\infty < x < \infty$, центры x_i которых распределены независимо, согласно функции распределения $F(x)$. Множество точек, покрытых одним или большим числом интервалов, является случайным множеством.

В другом примере рассматривается n кругов единичного радиуса, центры которых брошены случайно в прямоугольнике. Случайное множество теперь состоит из всех тех точек прямоугольника, которые покрываются одним или большим числом кругов. В обоих случаях желательно определить распределение меры случайного множества.

Теорема Роббинса о случайных множествах

5.11 Роббинсу (Robbins, 1944, 1945) (см. также Такач (Takacs, 1958)) принадлежит общая теорема, с помощью которой можно находить моменты. Эта теорема, по существу, содержится в более ранних результатах:

Колмогорова (Kolmogoroff, 1950) об условных математических ожиданиях, но здесь мы последуем изложению Роббинса как имеющему прямое отношение к геометрической задаче.

Мы рассматриваем измеримые по Лебегу множества X в n -мерном евклидовом пространстве R_n . Предполагается, что в пространстве T всех таких множеств имеется вероятностная мера, которая обозначается через $\rho(X)$. Таким образом, можно записать

$$P\{X \text{ лежит в } S\} = \int_T C_S(X) d\rho(X), \quad (5.11)$$

где S есть ρ -измеримый класс множеств X , а $C_S(X)$ есть функция множества X , равная единице, если X лежит в множестве S , и нулю для всех остальных X . Во всех случаях, которые мы рассматриваем, множество X определяется некоторым числом параметров, так что в качестве T можно взять евклидово пространство с r координатами $\theta_1, \dots, \theta_r$. В таком случае интеграл (5.11) оказывается интегралом Лебега — Стильтьеса по этому пространству.

В вышеприведенных примерах можно принять, что пространство T определяется n координатами центров интервалов (в первом случае) и $2n$ координатами центров окружностей (во втором случае). Следует помнить, что имеется $n!$ точек в пространстве параметров, которые отвечают одной и той же геометрической конфигурации.

Определим функцию $g(x, X)$ от точки x из R_n и множества X из T , полагая

$$g(x, X) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ принадлежит } X, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда при фиксированном X интеграл Лебега от $g(x, X)$ по R_n равен лебеговской мере X . При фиксированном значении x вероятность того, что x покроется множеством X , дается интегралом от $g(x, X)$ по пространству T .

Обозначим через $\mu(X)$ меру Лебега множества X и предположим, что $g(x, X)$ измерима по отношению к произведению мер в произведении пространств $R_n \times T$.

Это имеет место во всех вопросах, связанных с приложениями.

Дифференциальный элемент произведения мер обозначим $d\mu\rho(x, X)$. Используя теорему Фубини, получаем

$$\int_{R_n \times T} g(x, X) d\mu\rho(x, X) = \int_{R_n} \left\{ \int_T g(x, X) d\rho(X) \right\} d\mu(x).$$

Внутренний интеграл справа является вероятностью того, что случайное множество X покрывает данную точку x , т. е. равен $P(x \in X)$.

Еще раз используя теорему Фубини, получаем

$$\begin{aligned} \int_{R_n \times T} g(x, X) d\mu\rho(x, X) &= \int_T \left\{ \int_{R_n} g(x, X) d\mu(x) \right\} d\rho(X) = \\ &= \int_T \mu(X) d\rho(X), \end{aligned}$$

так что

$$\int_T \mu(X) d\rho(X) = \int_{R_n} P(x \in X) d\mu(x).$$

Это означает, что ожидаемое значение меры X равно интегралу по R_n от вероятности $P(x \in X)$. Этот результат легко объяснить и интуитивно. Если пространство R_n может быть разделено на большое число равных элементов настолько малых, что относительно каждого из них можно сказать, принадлежит он X или нет, то ожидаемая мера X равна ожидаемому числу элементов, которые лежат в X , помноженному на общую меру элементов. Поскольку ожидание суммы равно сумме ожиданий даже в том случае, когда рассматриваются зависимые случайные величины, то ожидаемое число элементов, лежащих в X , равно сумме вероятностей того, что элемент лежит в X , взятой по всем элементам.

5.12 Важно расширить полученный результат так, чтобы можно было находить высшие моменты меры $\mu(X)$. Для этого введем $\rho(x_1, \dots, x_m)$ — вероятность того, что все точки x_1, \dots, x_m принадлежат X . Тогда

$$\begin{aligned} \int_{R_n} \rho(x_1, \dots, x_m) d\mu(x_1, \dots, x_m) &= \int_T [\mu(X)]^m d\rho(X) = \\ &= E\{[\mu(X)]^m\}. \end{aligned}$$

5.13 Эти результаты можно применить к различным примерам, из которых простейший касается случайных интервалов на прямой. Возьмем, следуя Роббинсу (Robbins, 1944), фиксированный интервал $(0, 1)$ и N случайных интервалов длины $a < 1$, центры которых равномерно распределены на интервале $\left(-\frac{1}{2}a, 1 + \frac{1}{2}a\right)$.

X определяется как общая часть интервала $(0, 1)$ с теоретико-множественным объединением N интервалов. Вероятность того, что любая точка x из $(0, 1)$ покрывается каким-нибудь данным интервалом, равна $p = \frac{a}{1+a}$.

Если $\mu(X)$ есть мера X , то имеем

$$E\{\mu(X)\} = \int_0^1 p(x) dx = \int_0^1 \{1 - (1-p)^N\} dx = 1 - (1-p)^N.$$

Аналогично может быть найдено $E\{[\mu(X)]^2\}$, по соответствующее выражение значительно сложнее.

Аналогичная задача была рассмотрена Вотто (Votaw, 1946). В ней опять рассматриваются N интервалов, центры которых равномерно распределены на некотором интервале, и X определяется как теоретико-множественное объединение всех этих интервалов. В этом случае возможно найти распределение для $\mu(X)$. Вот также найдена вероятность того, что X полностью содержит «основной» интервал. Получается довольно сложное выражение, которое меняет свою форму в ряде точек и очень походит на решение уравнения Стивенса и Фишера (см. (2.11)). В последнем, однако, основной интервал, на котором распределены центры, свернут в окружность. Поэтому мы имеем N случайных дуг фиксированной длины, распределенных по периферии круга. Теорема Роббинса вновь может быть применена для вычисления моментов общей длины частей окружности, покрываемых дугами.

Задача из вирусологии

5.14 Значительно более трудная задача из вирусологии принадлежит профессору Фажекашу де Ст. Гроту. Вирусная частица, которую можно считать шаром (с ради-

усом около 50 μ), подвергается атаке со стороны антител. Последние в первом приближении можно считать цилиндрами (длины 37 μ), толщиной которых можно пренебречь. Антитела прилепляются к вирусной частице, стоя перпендикулярно к ее поверхности.

Предположим, что N таких антител жестко прилипают к сфере, причем точки их прилипания распределены равномерно по поверхности сферы и независимы. Одно антитело, закрепленное на вирусе, исключает прилипание вируса к плоской поверхности клетки точками, которые оно затеняет. Такие точки составляют круговую шапку, угловой радиус которой равен 55° . Такие шапки, отвечающие отдельным антителам, распределены равномерно и независимо по сфере, причем пересечения не исключены. При заданном N (в более общей постановке, при заданном распределении N) требуется найти вероятность того, что вся поверхность затенена.

5.15 Точное решение этой задачи неизвестно. Известно даже наименьшее значение N (как функции от θ), при котором сфера может быть полностью покрыта круговыми шапками углового радиуса θ (для отдельных значений θ это число известно).

Хотя нахождение аналитического выражения для вероятности того, что каждая точка сферы будет покрыта, представляется невозможным, возможно найти первый и второй моменты непокрытой площади при фиксированном N и при N , распределенном по Пуассону.

Предположим, что A есть сферическая площадь, забираемая шапкой; полную поверхность сферы положим равной 4π . Используя теорему Роббинса, устанавливаем, что ожидаемая непокрытая площадь равна

$$4\pi(1 - A(4\pi)^{-1})^N.$$

Выражение второго момента, более сложное (поскольку требуется найти вероятность того, что две точки, находящиеся на угловом расстоянии ϕ друг от друга, не покрываются), находится аналогично. Последняя вероятность находится без особого труда. Сделав некоторые дальнейшие предположения, использующие эти два момента, можно найти приближенные выражения для вероятности того, что сфера покрывается полностью.

Предполагается в дальнейшем опубликовать подробное обсуждение этой задачи (сравнить Фажекаш и Моран, *Биометрика* (1962) 49).

5.16 Обобщения результатов Роббинса для случайных интервалов получены самим Роббинсом (Robbins, 1945), Броновским и Нейманом (Bronowski and Neuman, 1945), Гарвудом (Garwood, 1947) и Сантало (Santaló, 1947). Первые четыре автора рассматривали фиксированный прямоугольник со сторонами a и b и случайные параллельные прямоугольники со сторонами α , β , центры которых случайно бросаются в прямоугольник, концентричный фиксированному, со сторонами $a+\alpha$ и $b+\beta$. Они находят среднее значение и дисперсию меры множества, общего для фиксированного прямоугольника и теоретико-множественной суммы случайных прямоугольников. Роббинсом также получено n -мерное обобщение этой задачи, а Сантало рассматривает случай, когда случайные прямоугольники имеют также случайную ориентацию.

Случайные круги на квадрате

5.17 В качестве следующего примера рассмотрим круги C , брошенные случайно в квадрат (Гарвуд (Garwood, 1947)).

Предположим, что имеется N кругов радиуса a и что их центры независимо и равномерно распределены по области T , состоящей из всех точек плоскости, расстояние которых от единичного квадрата (назовем его A) не превышает a . Площадь T равна $1+4a+\pi a^2$, а площадь каждого C равна πa^2 . Вероятность того, что любая точка внутри A покрывается по крайней мере одним кругом, равна

$$1 - \left(\frac{1+4a}{1+4a+\pi a^2} \right)^N,$$

что равно среднему значению покрытой площади. Для получения второго момента рассмотрим внутри A две точки P_1 и P_2 . В подходящей системе координат представим их как (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , где $0 \leq x_1, y_1, x_2, y_2 \leq 1$.

Вероятность того, что ни одна из этих точек не окажется покрытой, равна $q^N(r)$, где $q(r)$ есть доля T , лежащая вне объединения кругов радиуса a с центрами в P_1 и P_2 . Поскольку P_1 и P_2 лежат в A , эта доля зависит только от r (расстояния между P_1 и P_2). Максимальное значение r равно $\sqrt{2}$ и, если $\varphi(r)$ есть вероятностное распределение r , то

$$E(Y^2) = \int_0^{\sqrt{2}} q^N(r) \varphi(r) dr. \quad (5.12)$$

Обозначим через $\Omega(r)$ площадь пересечения двух кругов радиуса a , центры которых разделяет расстояние r . Тогда

$$\Omega(r) = \begin{cases} 0, & \text{если } r \geq 2a, \\ 2a^2(\theta - \sin \theta \cos \theta), & \text{если } r < 2a, \end{cases} \quad (5.13)$$

где

$$\theta = \arccos r(2a)^{-1}.$$

Тогда

$$q(r) = \frac{1+4a-\pi a^2+\Omega(r)}{1+4a+\pi a^2}. \quad (5.14)$$

Теперь нам нужно найти $\varphi(r)$. Имеем

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Случайная величина $\xi = |x_1 - x_2|$, очевидно, имеет распределение с плотностью вероятности $2(1-\xi)$ при $0 \leq \xi \leq 1$. Поэтому $u = (x_1 - x_2)^2 = \xi^2$ имеет распределение

$$\frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} du.$$

Случайная величина $v = (y_1 - y_2)^2$ имеет такое же распределение. Распределение $r = \sqrt{u+v}$ находится интегрированием совместной плотности.

$$\frac{(1-\sqrt{u})(1-\sqrt{v})}{\sqrt{uv}}$$

по той части области $r^2 < u+v < (r+dr)^2$, которая

находится в единичном квадрате. Так мы находим, что

$$\varphi(r) = \begin{cases} 2r(\pi - 4r + r^2) & \text{для } 0 < r < 1, \\ 2r\{4\arcsin r^{-1} + 4\sqrt{r^2 - 1} - r^2 - \pi - 2\} & \text{для } 1 \leq r \leq 2^{1/2}. \end{cases} \quad (5.15)$$

Подставляя (5.14) и (5.15) в (5.12), получаем $E(Y^2)$ с помощью численного интегрирования.

5.18 Аналогично можно рассмотреть случайные круги на фиксированном круге. При этом фиксируется круг A единичного радиуса и предполагается, что центры N случайных кругов диаметров r ($r < 1$) распределены внутри круга радиуса $1+r$, концентричного с A . Второй момент имеет форму

$$E(Y^2) = \int_0^1 q^N(r) \varphi(r) dr,$$

где $q(r)$ определяется с помощью (5.13), а $\varphi(r)$ есть плотность распределения расстояния между двумя точками, взятыми случайно внутри круга A . Это распределение уже было получено в главе 2.

Если N — случайная величина, имеющая некоторое дискретное распределение, то первый и второй моменты могут быть получены простым усреднением по N . В частности, если N имеет распределение Пуассона, то можно представить себе круги, распределенные на плоскости по пуассоновскому закону с некоторой плотностью. Если они затрагивают A , то их центры должны лежать внутри T с равномерным распределением по T . Это оправдывает выбранную нами частную форму T (независимо от того, что при этом и результат получается простейшим).

Роббинс (Robbins, 1945) и Гарвуд (Garwood, 1947) решили задачу о случайных кругах на прямоугольнике, а ее обобщение на n -мерное пространство рассмотрено Сантало (Santaló, 1947).

5.19 Несколько иной класс задач возникает, когда предполагают, что случайное покрывающее множество имеет в некоторой области распределение, отличное от равномерного. Пример (см. Моргенталлер (Morgenthaler, 1961) и Соломон (Solomon, 1958)) — круг радиуса R ,

центр которого имеет круговое нормальное распределение вокруг начала O . Случайное множество определяется как общая часть этого случайного круга и круга радиуса r с центром в O .

Если $A(x, y)$ — площадь пересечения кругов, когда первый круг имеет центром точку (x, y) , а сама эта точка имеет круговое нормальное распределение со стандартным отклонением σ , то ожидаемая общая площадь равна

$$E = (2\pi\sigma^2)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(x, y) \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 + y^2)\right\} dx dy.$$

Поскольку $A(x, y)$ зависит только от $x^2 + y^2$, то E можно получить численным интегрированием. Однако E можно выразить в терминах нецентрального χ распределения*) $p(R, r)$. Функция $p(R, r)$ определяется как интеграл от кругового нормального распределения с единичным стандартным отклонением по кругу радиуса R , центр которого отстоит от среднего значения распределения на расстояние r , т. е.

$$p(R, r) = (2\pi)^{-1} \int_{x^2 + y^2 < R^2} \exp\left[-\frac{1}{2}\{(x+a)^2 + (y+b)^2\}\right] dx dy,$$

где $a^2 + b^2 = r^2$. Мы можем переписать это как

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^R u \exp\left\{-\frac{1}{2}(r^2 + u^2 - 2ru \cos \theta)\right\} d\theta = \\ = \int_0^R u e^{-\frac{1}{2}(r^2 + u^2)} I_0(ru) du, \end{aligned}$$

где $I_0(z)$ есть модифицированная функция Бесселя нулевого порядка первого рода. Используя тот факт, что

$$I_0'(z) = I_1(z), \quad I_1(z) + zI_1'(z) = zI_0(z),$$

где $I_1(z)$ есть аналогичная функция первого порядка,

*) В подлиннике «offset circular probability function». (Прим. ред.)

мы можем преобразовать верхний интеграл в

$$1 - e^{-\frac{1}{2}R^2} - R \int_0^R e^{-\frac{1}{2}(R^2+u^2)} I_1(Ru) du = 1 - q(R, r).$$

Таблицы функции $q(R, r)$ составлены корпорацией РАНД *).

Задача о малых частицах

5.20 Один чрезвычайно интересный класс задач о перекрытиях рассмотрен Армитажем (Armitage, 1949) и Макком (Mask, 1954). Они возникают при подсчете частиц на пластинке. Их число на заданной площадке может оказаться недооцененным из-за перекрытия частиц, и хотелось бы вычислить ожидаемое число «куч» различных размеров («кучу» составляют несколько перекрывающихся частиц).

Общая теория, которую мы рассмотрим сначала, принадлежит Макку. Предполагается, что каждая частица представляется выпуклой фигурой, случайно помещенной в область A . Пусть площадь a и периметр s каждой фигуры имеют некоторое совместное распределение и пусть фигуры составляют пуассоновское поле плотности λ . Удобнее всего точно сформулировать последнее условие — это выбрать внутри каждой фигуры точку, которую назовем «центром», и предположить, что центры составляют пуассоновское поле.

5.21 Для простоты мы рассмотрим не случайное число фигур, а N фигур, центры которых случайно распределены в A . Из этих фигур N_r имеют площади a_r и периметры s_r ($r=1, 2, \dots, k$), где $N = \sum N_r$. Мы рассмотрим число куч, составленных фигурами, центры которых лежат на площади a в A . Предыдущая задача решается устремлением A к ∞ при фиксированном $\lambda A^{-1} = \lambda$.

Куча состоит по определению из i пересекающихся фигур, причем больше не существует фигур, их пересекающих ($i=1, 2, \dots$). Таким образом, одиночные фигу-

*) Ср. также Л. Н. Болышев, Н. В. Смирнов, Таблицы математической статистики, «Наука», 1965.

ры также составляют кучу. Пусть C — ожидаемое общее число куч, а C_i — ожидаемое число куч из i фигур. Тогда

$$\sum C_i = C,$$

$$\sum_i C_i = NA^{-1}.$$

Покажем, что при больших $A\alpha^{-1}$ и N выполняется

$$C = \alpha A^{-1} \sum N_r \exp\left(-\frac{1}{2} \sum N_u b_{ur}\right), \quad (5.16)$$

$$C_1 = \alpha A^{-1} \sum N_r \exp\left(-\sum N_u b_{ur}\right), \quad (5.17)$$

$$\beta = \alpha \exp\left(-\sum N_u a_u A^{-1}\right), \quad (5.18)$$

где $Ab_{ur} = a_u + a_r + s_u s_r (2\pi)^{-1}$, а β есть ожидаемая площадь части α , не покрытой фигурами.

Ожидаемое число фигур с центрами в некоторой малой области δa , которые оказываются не покрытыми другими фигурами, равно $p_{11}\delta a$, где p_{11} есть вероятность того, что данная фигура не будет покрыта другими фигурами. Поскольку математическое ожидание суммы есть сумма математических ожиданий, то ожидаемое число одиночных фигур в α есть $p_{11}\alpha$. Нам нужно поэтому оценить p_{11} .

Будем говорить, что фигура имеет тип i , если она имеет площадь α_i и периметр s_i . Пусть ее опорная функция по отношению к некоторому центру и оси, закрепленной внутри фигуры, есть $H_i(\theta)$. Предположим, что φ_1 — ориентация этой оси. Тогда ее опорная функция есть $H_i(\theta + \varphi_1)$, где φ_1 — случайная величина с равномерным распределением на интервале $(0, 2\pi)$. При фиксированном φ_1 рассмотрим вероятность того, что выделенная фигура типа j с опорной функцией $H_j(\theta)$ и ориентацией φ_2 не перекрывается с первой фигурой. Эта вероятность равна $1 - A_{ij}A^{-1}$, где A_{ij} есть площадь фигуры, опорная функция которой равна

$$H_i(\theta + \varphi_1) + H_j(\theta + \varphi_2).$$

Известно, что периметр и площадь выпуклой фигуры с опорной функцией $h(\theta)$ равны соответственно

$$\int_0^{2\pi} h(\theta) d(\theta) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{h^2(\theta) - h'^2(\theta)\} d\theta. \text{ Следовательно, мате-}$$

матическое ожидание площади A_{ij} равно

$$(8\pi^2)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \{[H_i(\theta + \varphi_1) + H_j(\theta + \varphi_2)]^2 -$$

$$- [H'_i(\theta + \varphi_1) + H'_j(\theta + \varphi_2)]^2\} d\theta d\varphi_1 d\varphi_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{H_i^2(\theta) - H_i'^2(\theta) + H_j^2(\theta) - H_j'^2(\theta)\} d\theta +$$

$$+ (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H_i(\theta_1) H_j(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$+ (2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} H'_i(\theta_1) + H'_j(\theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

Последний член, очевидно, равен нулю, так что $E(A_{ij}) = a_i + a_j + (2\pi)^{-1} s_i s_j$. Поэтому

$$C_1 = \alpha A^{-1} \sum_i N_i (1 - b_{ii})^{N_i - 1} \pi (1 - b_{ij})^{N_j} \quad (j \neq i).$$

Отсюда переходом к пределу получаем (5.17).

5.22. Для вычисления C мы свяжем с каждой кучей точку P ; будем брать тот центр фигур, который лежит правее всех других. Такая точка P называется правосторонним центром. Вероятность того, что правосторонний центр попадает в малую область площади $\delta\alpha$, равна $p_1 \delta\alpha + o(\delta\alpha)$, где p_1 подлежит определению. Эта вероятность равна вероятности того, что некоторая фигура имеет центр в малой области, и центр любой фигуры, перекрывающейся с правой, не лежит правее центра первой.

Пусть F_L — математическое ожидание площади области справа от P , в которую запрещается попадать центрам других фигур. F_R определяется аналогично для левосторонних центров. Тогда $F_L = F_R$ и $F_L + F_R = E(A_{ij})$, откуда следует (5.16). Формула (5.18) может быть выведена непосредственно из теоремы Роббинса.

Армитаж (Armitage, 1949) рассмотрел эту задачу другим методом (в частных случаях, когда фигуры являются прямоугольниками и кругами) и получил приближенные формулы. Его результаты могут быть получены из результатов Макка подстановкой частных значений a_i и s_i .

Задача Ланкастера

5.23 Другая задача о скоплениях была рассмотрена Ланкастером (Lancaster, 1950). Подсчитываются красные кровяные клетки в суспензии. Для этого тонкая пленка крови наносится на стеклянную пластинку, разделенную на квадраты, и подсчитывается число красных клеток в каждом квадрате. Если клетки распределены независимо и равномерно по пластинке, то число клеток в каждом квадрате должно подчиняться распределению Пуассона. Это можно проверить, сравнивая дисперсию числа клеток в квадратах с его средним, поскольку для пуассоновского распределения они совпадают. На практике дисперсия имеет тенденцию быть меньше, чем среднее, причем отклонение их отношения от единицы возрастает при увеличении среднего. Причиной этому может быть то, что клетки, первоначально попадающие в «более населенные» квадраты, выталкиваются в «менее населенные» квадраты. Примем, что клетки являются гладкими круглыми дисками, которые выпадают из суспензии на стеклянную пластинку. Те клетки, которые без препятствия оседают на пластинку, остаются на месте, а всякая другая клетка, которая опускается на клетку, уже паходящуюся на стекле, соскальзывает в сторону вдоль радиуса первой клетки до попадания на стекло.

Используя эту модель, можно подсчитать вероятность того, что клетка, выпадающая из суспензии в данный квадрат, выталкивается через границу в другой квадрат. Отсюда можно получить приближение к истинной дисперсии числа клеток в квадратах.

5.24 Один класс задач, который рассмотрел Макк (Mask, 1948, 1949, 1953), а также Берг (Berg, 1945), также тесно связан с теорией покрытий. Предположим,

что n точек равномерно и независимо распределены внутри области, которая может быть одно-, дву-, трехмерной. По отношению к фигуре определенных размеров, формы и ориентации k -агрегат определяют как множество k точек, которые могут быть покрыты фигурой без затрагивания других точек. Макком получено математическое ожидание таких агрегатов в одномерном случае, когда покрывающая фигура — интервал, и в двумерном случае, когда покрывающие фигуры суть квадраты, параллелограммы, треугольники, круги. Некоторые из этих результатов обобщены им на три измерения.

- 5.25 Очевидно, что можно поставить ряд дальнейших задач о покрытиях. В математическом отношении они не являются простыми и для их решения может потребоваться метод статистических испытаний. Интерес к этой теме возник сравнительно недавно. Вероятно, что накопление практических задач того типа, который мы рассмотрели, даст толчок его дальнейшему развитию.

ЗАМЕТКА О ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ВЕРОЯТНОСТЯМ

П. А. П. МОРАН

Австралийский Национальный Университет*)

1. Введение. Теория геометрических вероятностей в последнее время оживает, что происходит отчасти из-за привлекательности многих нерешенных задач, а отчасти из-за все расширяющейся области приложений. Эти применения настолько разнообразны и так рассеяны по литературе различных отраслей науки, что когда Кендалл и я опубликовали монографию по этому предмету в 1963 г., многие интересные работы оказались незамеченными.

С тех пор появились также и новые работы, и цель настоящей статьи — дать краткий обзор той части исследований, которая не отражена в книге. По существу, прилагаемая библиография, содержащая 94 названия, не пересекается с библиографией, приведенной в совместной монографии.

В нашей книге задачи о геометрических вероятностях были разделены на пять основных категорий: задачи о случайном распределении точек, прямых, плоскостей, о случайных вращениях и задачи о покрытиях. Той же грубой классификации мы следуем и здесь.

2. Задачи о случайных точках. Изучая распределение расстояний при поездках внутри города, Феарторн (Fairthorne, 1964) пришел к рассмотрению распределения расстояния между двумя точками P и Q , когда P распределена равномерно в круге радиуса a , а Q неза-

*) *J. Appl. Prob.* 3, 453—463 (1966).

висимо равномерно распределена внутри концентрической окружности радиуса b . Плотность этого распределения может быть получена непосредственным интегрированием, а среднее расстояние выражается через эллиптические интегралы.

Различные результаты по распределению пар точек внутри одного и того же круга применялись к изучению видимого на фотографиях расположения хромосом в ядрах клеток.

В нормальной человеческой клетке хромосомы появляются парами и могут быть довольно точно опознаны. Бартон, Дейвид и Фикс (Barton, David and Fix, 1963) с этой целью использовали хорошо известное распределение расстояния между двумя точками, независимо и равномерно распределенными внутри одного и того же круга (дано Кендалл и Моран (Kandall and Moran, 1963)). Для случая, когда имеется n пар хромосом, ими вычислена сумма квадратов n расстояний и использовано нормальное приближение к распределению этой суммы, для построения критерия случайности распределения точек.

В качестве альтернативы к гипотезе независимости членов каждой пары авторы предлагают гипотезу о наличии «силы» притяжения (либо отталкивания), что дает эффект взвешивания распределения расстояния r множителем r^a ($a > -2$). С использованием этого приема ими получены первые четыре момента суммы квадратов расстояний. Рассмотрены также те изменения, которые необходимо внести при переходе от круга к эллипсу. Этот и близкие критерии применялись к различным типам клеток в серии работ: Бартон и Дейвид (Barton and David, 1961, 1962, 1963), Бартон, Дейвид и Меррингтон (Barton, David and Merrington, 1963), Дейвид и Мур (David and Moore, 1957).

В своей другой работе Дейвид и Фикс (David and Fix, 1964) построили тест для ориентации прямых, соединяющих подобные пары хромосом, и для числа пересечений таких прямых между собой.

При различных определениях случайной хорды ими вычислены моменты числа пересечений, а в одном случае, который представляет независимый интерес с точки зре-

ния комбинаторики, получено точное распределение пересечений для чисел пар, равных 2, 3...7.

Применение этих моделей к парам хромосом в ядре клетки показало, что в среднем наблюдаемое число пересечений существенно выше ожидаемого. Возможно, что это происходит потому, что авторы игнорировали трехмерный характер распределения точек.

Если точки выбираются равномерно внутри сферы, их проекции на плоскость распределены не равномерно внутри круга, являющегося проекцией сферы, но стремятся группироваться вокруг центра. Это повышает ожидаемое число пересечений. То же возражение применимо и к использованию теста, основанного на распределении суммы квадратов расстояний между парами, когда принимается, что точки распределены равномерно в круге.

Однако эта трудность не возникает для других тестов, предложенных этими авторами, которые основываются на случайном объединении хромосом в пары, когда их положения остаются фиксированными.

Ценность большинства таких тестов должна зависеть от того, что именно происходит с клетками в процессе их подготовки к кариотипированию, а это, как будто, пока неизвестно.

В главе 2 нашей книги приводится ряд ссылок на работы по применению теории случайного распределения точек на плоскости к оценке плотностей расположения деревьев и других растений. Когда распределение центров растений не определяется однородным пуассоновским полем, распределение их расстояний от случайной точки видоизменяется, и оценка плотности оказывается смещенной. Поэтому представляет интерес определение распределения расстояния от случайной точки до ближайшего соседа в поле, отличным от пуассоновского. Это сделано для квадратной решетки Перссоном (Persson, 1964) и Холгейтом (Holgate, 1965) для решетки из правильных треугольников. См. также Матерн (Matern, 1959), Коулз, Овер и де Вит (Kouls, Over and De Wit, 1969) и Уоррен (Warren, 1962).

Одна задача о плотности распределения точек в пространстве («задача о шаровых скоплениях звезд»), не

являющаяся в строгом смысле задачей о геометрических вероятностях, была впервые рассмотрена Вискселлом (Wicksell, 1925) (см. нашу книгу, стр. 106).

Шаровое скопление есть собрание звезд, группирующихся вокруг общего центра концентрическими слоями постоянной плотности, которая меняется с радиусом. Желательно оценить зависимость плотности от радиуса, зная аналогичную плотность в круговых кольцах на плоскости, на которую проектируются звезды. Аналогичная задача о взаимоотношении между круговой плотностью на плоскости и плотностью проекции его на прямую возникает в связи с некоторыми другими научными вопросами. О дальнейшей работе в этом направлении см. Филип (Philip, *Australian Journal of Physics*, в печати), а также приведенные там ссылки.

Другая задача геометрического характера, возникающая при выборе точек на плоскости, рассмотрена Далениусом, Хайеком и Зубржицким (Dalenius, Hajek and Zubrzycki, 1961). Предположим, что имеется изотропный стационарный процесс на плоскости с конечной дисперсией, и мы выбираем его значения в регулярно расположенных внутри большого круга точках. Желательно выбрать способ расположения точек таким образом, чтобы среднее из наблюдаемых значений являлось бы возможно более точной оценкой истинного среднего. Можно показать, что не существует способа, который оптимален для всевозможных типов корреляционных функций, но что для определенного класса этих функций оптимальное расположение достигается, когда окружности с центрами в выбранных точках пересекаются, в определенном смысле, минимально.

3. Задачи о случайных прямых. В нашей книге (стр. 90) обсуждалась задача, которая первоначально возникла при изучении «среднего свободного пути» звуковой волны при ее повторных отражениях от стен комнаты.

Пусть K — замкнутая ограниченная выпуклая область в трехмерном пространстве, такая, что каждая ее граничная точка имеет единственную касательную плоскость (в примерах, которые следуют ниже, это свойство нарушается на множестве точек поверхностной меры нуль,

но это не меняет теории). Через V и S обозначим объем и площадь поверхности области K . Пусть P — внутренняя точка, а u направляющий вектор луча, исходящего из P . В точке пересечения этого луча с K строится его отражение, и этот процесс продолжается бесконечно. Пусть L — суммарный путь, пройденный до n -го отражения. Тогда средний свободный путь (если таковой существует) определяется как

$$\lambda(P, u) = \lim Ln^{-1}.$$

Бейт и Пиллоу (Bate and Pillow, 1947, *Pros. Phys. Soc.* 59, 535—541) рассмотрели этот предел для различных простых геометрических тел. Для прямоугольного параллелепипеда они усредняют $\lambda^{-1}(P, u)$ (равномерно) по всем направлениям и получают $\frac{1}{4}SV^{-1}$, независимо от P . Для сферы и цилиндра они находят, что усредненное по всем u значение $\lambda^{-1}(P, u)$ зависит от P , однако после дальнейшего усреднения по P (относительно равномерного распределения в K), по-прежнему, получается $\frac{1}{4}SV^{-1}$.

В своем далеко идущем анализе Кингман (Kingman, 1965) подошел к этой задаче с другой стороны. Он предполагает, что начальный сегмент (направления u) распределен согласно ограниченной мере, индуцируемой в пространстве всех хорд той (неограниченной) мерой на множестве прямых в трехмерном пространстве, которая инвариантна относительно евклидовой группы. Легко видеть, что средняя длина такого сегмента равна $4VS^{-1}$. Далее им показано, что операция отражения сегмента на границе сохраняет меру. Отсюда следует, что среднее значение $\lambda(P, u)$ равно $4VS^{-1}$, если P и u усредняют способом, при котором начальный сегмент приобретает вышеупомянутое распределение. С другой стороны, если $\lambda(P, u)$ равномерно усредняется по u , а затем по P с равномерным распределением в K , то получаемый результат, вообще говоря превосходит $4VS^{-1}$. Это имеет место, в частности, для прямоугольного параллелепипеда и сферы. Причина расхождения этого результата с результатом Бейта и Пиллоу в том, что ими берется гармоническое среднее от $\lambda(P, u)$, в то время как Кингман рассматривает среднее арифме-

тическое. Некоторые другие результаты о случайных путях в простых геометрических телах дают Горовиц (Hogowitz, 1965) и Костен (Kosten, 1960).

4. Случайное разбиение пространства. Один из способов разбиения пространства на выпуклые области описан в нашей книге (стр. 66). При этом если речь идет о плоскости, берется однородное пуассоновское поле случайных прямых на плоскости, а в случае пространства — однородное пуассоновское поле случайных плоскостей. Можно показать, что когда число прямых с параметрами, лежащими во множестве E из параметрического пространства (p, θ) ($0 \leq p < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$), полагается распределенным по Пуассону со средним, равным некоторой константе $\lambda > 0$, умноженной на лебеговскую меру E , возникает однородное пуассоновское поле прямых. Считается, что эти числа для непересекающихся множеств независимы.

Возникающее поле инвариантно относительно евклидовых преобразований. Множество прямых делит плоскость на бесконечное число выпуклых многоугольных областей. Можно показать, что средняя площадь этих областей равна $(\pi\lambda^2)^{-1}$, однако точное распределение площадей неизвестно, хотя второй момент и был найден Д. Дж. Кендаллом. Аналогично довольно просто найти средний объем выпуклых многогранников, образуемых случайными плоскостями в трех измерениях. Это можно сделать, используя результаты главы 4 нашей книги для получения среднего числа пересечений между n случайными плоскостями, о которых известно, что они пересекают данную сферу.

Майлз (Miles, 1964, 1964b) и Ричардз (Richards, 1964) получили дальнейшие результаты по случайному разбиению пространства в двумерном случае. В частности, ими дано распределение диаметра наибольшего круга, содержащегося в случайном многоугольнике такого рода, некоторые моменты и смешанные моменты площади, параметра, числа сторон и ряд аналогичных результатов. В неопубликованной работе Майлза получены также аналогичные моменты и для трехмерного случая.

Совершенно отличный способ разбиения пространства изучал Мейеринг (Meijering, 1953). Сначала рассмотрим

трехмерный случай, который имеет отношение к изучению кристаллов при их случайном зарождении.

Рассмотрим пуассоновское поле точек со средним числом в единичном объеме, равным n . Для каждой точки поля определим связанную с ней область, которая состоит из всех тех точек пространства, которые расположены к данной точке поля ближе, чем к любой другой. Очевидно, каждая такая область выпукла. Мейеринг показал, что средняя площадь поверхности такой области равна

$$\left(\frac{256\pi}{3}\right)^{1/3} n^{-2/3} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) = 5,821n^{-2/3}.$$

Им вычислены также средняя длина ребра и средние числа вершин, ребер и граней.

Интересная альтернативная модель (модель Джонсона — Мела) строится на основе простого «процесса рождения». Предположим, что в момент $t=0$ точки в пространстве отсутствуют. В каждый последующий интервал времени $(t, t+dt)$ с вероятностью $a dV dt$ в каждом малом объеме dV , удаленном по меньшей мере на расстояние $v dt$ от всех точек, которые появлялись за время $(0, t)$, может появиться новая точка. Здесь v следует рассматривать как нормальную скорость, с которой расширяется поверхность кристалла до момента встречи с другим кристаллом. При этом каждая из точек и является ядром кристалла, который растет вплоть до остановки. Этот процесс опять порождает выпуклые области, однако «границы» здесь могут быть уже не плоскими.

Есть возможность в каждый момент t подсчитать долю пространства, еще не заполненного кристаллами, и среднее число кристаллов в каждом единичном объеме после того, как кристаллизация заканчивается. Мейеринг находит также среднюю площадь, среднюю длину ребра и среднее число вершин. Все эти характеристики отличны от характеристик предыдущей модели. Среднее число ребер и граней неизвестно.

Можно рассматривать аналогичные модели в одном или двух измерениях. В одномерном случае распределение длин областей может быть точно вычислено в обеих моделях.

Джильберт (Gilbert, 1962) продолжил работу Майеринга и получил дисперсии объемов выпуклых областей в обеих трехмерных моделях, а также нашел оценки для их распределений и дисперсии, связанные с линейными или плоскими сечениями таких конфигураций. Другие результаты по этой теме могут быть найдены у Джонсона и Мела (Johnson and Mehl, 1939), Эванса (Evans, 1945), Смита (Smith, 1952, 1953) и Кренгеля (Krengel, в печати).

5. Размещение и упаковка. Одна задача размещения в одном измерении, кратко отмеченная в нашей книге (стр. 41) и привлекая недавно значительное внимание, носит название «задачи о стоянке автомобилей». Пусть $(0, x)$ — интервал, $x > 1$. На него случайно поместим подынтервал $(t, t+1)$ (т. е. выберем t случайно, с равномерным распределением на $(0, x-1)$). При этом два интервала остаются непокрытыми. С ними поступают точно так же, при условии, что их длина больше единицы. Процедура многократно повторяется по отношению к остающимся интервалам до тех пор, пока не остается непокрытых интервалов, превосходящих по длине единицу. Тогда $n(x)$ определяется как случайная величина, равная числу размещенных интервалов (число автомобилей на стоянке).

Моменты и асимптотическое поведение $n(x)$ являлись объектом и исследования в ряде работ, начиная от Реньи (Rényi, 1958) (см. ссылку в нашей книге); им получены первый и второй моменты. Дворецкий и Роббинс (Dvoretzky and Robbins, 1964) и Манион (Mannion, 1964) показали, что будучи надлежащим образом нормированным, распределение $n(x)$ сходится к нормальному, в то время как последним автором продолжено исследование дисперсии и представлены результаты эксперимента по методу Монте-Карло.

Другие аспекты этой задачи обсуждались в работах Амбарцумяна (Ambartsumian, 1963), Банкови (Bankovi, 1962), Гриффитса (Griffiths, 1962), Нея (Neu, 1962), Смоли (Smalley, 1962) и Соломона (Solomon, 1966). Многомерный аналог этой задачи состоит в случайном размещении непересекающихся кругов на плоской области или же сфер в некоторой области пространства. Кое-что сказано об этом в нашей книге и сам предмет про-

должает вызывать интерес. Круги или сферы могут быть помещаемы случайно в дву- или трехмерное пространство последовательно до тех пор, пока для новых уже не остается места. В этом случае они с вероятностью 1 не касаются друг друга. Таким образом, это есть изотропный аналог задачи Палашти.

Можно предположить также, что сферы размещаются на плоскости или в пространстве случайно, но касаясь друг друга. Здесь лучше говорить о случайной «упаковке», а не о случайном «размещении», однако в этом случае трудно дать строгое математическое определение случайности. Об эмпирических и теоретических результатах в этой области см. Бернал (Bernal, 1959, 1960, 1964), Бернал и Майзон (Bernal and Mason, 1960), Бердийк (Boerdijk, 1952), Коксетер (Coxeter, 1958, 1961), Хигути (Higuti, 1961), Хогендийк (Hogendijk, 1963), Мацке (Matzke, 1950), Скотт (Scott, 1962), Соломон (Solomon, 1966) и Уайз (Wise, 1952).

Как кратко отмечается в нашей книге (стр. 41), эти задачи имеют важные дискретные аналоги. Особенно интересны двумерные аналоги. Например, можно предположить, что пары смежных (вертикально или горизонтально) узлов прямоугольной решетки выбирают последовательно и случайно. При этом считается, что входящие в пары точки «заняты» и не могут быть снова выбраны позднее. Представляет интерес доля незанятых точек решетки, когда выбор новых пар становится невозможным.

Более сложные задачи рассматривались в задачах адсорбции на металлических поверхностях. По-видимому вопросы подобного рода не поддаются численному анализу и, вероятно, лучшие ответы здесь дают эксперименты по методу Монте-Карло.

Например, Соломон (Solomon, 1966) описывает эксперименты на дискретной решетке, в которых выбираются группы из четырех смежных квадратов до тех пор, пока возможности дальнейшего выбора не исчерпываются. Это есть дискретный аналог задачи Палашти, и результаты Соломона находятся в согласии с гипотезой Палашти о том, что плотность теснейшей упаковки квадратов на квадратной решетке равна квадрату известной теоретической плотности для одномерной решетки

(последняя равна 0,8646). См. также Джексон и Монтролл (Jackson and Montroll, 1958).

6. Задачи о покрытиях. Даниелс (Daniels, 1952) рассмотрел распределение радиуса и центра наименьшего круга, который покрывает все точки (x_i, y_i) ($i=1, \dots, n$), представляющих собой выборку из кругового нормального распределения с центром в начале координат. Им получен замечательный результат, состоящий в том, что распределение радиуса совпадает с распределением радиуса наименьшего круга с центром в начале координат, который содержит все эти точки, кроме одной.

Интересно также рассмотреть распределение площади минимальной выпуклой оболочки точек (Реньи и Суланке (Rényi and Sulanke 1963, 1964)). Предположим сначала, что n точек равномерно распределены внутри ограниченной выпуклой области K . Если K — многоугольник, то ожидаемое число сторон у минимальной выпуклой оболочки возрастает пропорционально $\log n$; если же граница K имеет гладко поворачивающуюся касательную, то эта величина растет как $n^{1/2}$.

Реньи и Суланке показывают также, что число сторон у наименьшей выпуклой оболочки точек, распределенных нормально на плоскости, возрастает как $\sqrt{\log n}$. Во второй работе ими подробно исследуется сходимость периметра и площади минимальной выпуклой оболочки как в общем, так и в частных случаях (см. также Эфрон (Efron, 1965)).

Задача о нахождении распределения числа точек решетки, покрытых случайным множеством, рассмотрена далее де Брейном (de Bruijn, 1965), который исследовал асимптотическое распределение для большого прямоугольника, и Расселом и Джозефсоном (Russell and Josephson, 1965).

Другая задача о покрытии, кратко отмеченная в нашей книге, состоит в нахождении вероятности покрытия сферы круговыми шляпками углового радиуса α , когда шляпки независимо и равномерно распределены по поверхности сферы. Разумеется, в этом смысле перекрытия не запрещены. Точный ответ известен для $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ (Уендел (Wendel, 1962), Силвермен (Silverman, 1964)).

Вероятность покрытия сферы N случайно выбранными (замкнутыми) полусферами равна

$$1 - 2^{-N} (N^2 - N + 2).$$

Этот результат может быть обобщен на случай большего числа измерений.

При $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ аналитическое решение не известно, однако имеется проверенное методом Монте-Карло приближенное решение, полученное Мораном и Фажекашем (Moran and Fazekas, 1962). Дальнейшее исследование задачи было проведено Джильбертом (Gilbert, 1965); им даны некоторые точные границы для вероятности.

7. Оценка форм и размеров. В главе 4 нашей книги были рассмотрены методы оценки площадей и объемов плоских дисков и выпуклых тел, погруженных в твердую среду, по их пересечениям с плоскостями и прямыми. Дальнейшие исследования по этим задачам могут быть найдены в работах Чейз (Chayes, 1956), Корсин (Corssin, 1955), Хазофер (Hazofer, 1963), Смит и Гутман (Smith and Guttman, 1953), Драпел — Хоралик, и Резны (Drápel, Horálek and Reszny, 1957).

Связанная с этим задача встречается в экологии растений. Здесь требуется изучить угол наклона листьев растения к горизонту. Это достигается внедрением в листву под фиксированным углом «иглы» и подсчетом числа пересечений с листьями. Изучая изменение этой частоты в зависимости от угла, есть возможность решением определенного интегрального уравнения найти частотное распределение наклонов листьев. Подробное описание предмета может быть найдено у Миллера (Miller, 1964), Филипа (Philip, 1966), Уоррена Вильсона (Warren Wilson, 1960).

Изучение форм и размеров малых частиц имеет важные научные приложения. Интересные работы об этом проделаны Хоксли (Hawksley, 1954) и Филипсом (Phillips, 1954).

8. Заключительные замечания. Еще несколько замечаний, дополняющих нашу книгу, могут быть полезны для тех, кто ищет литературу по соответствующим вопросам.

Гипотеза Дельтейля (Кендалл и Моран (Kendall and Moran, стр. 52)) о том, что в классе всех выпуклых фигур характеристическое число P в задаче Сильвестра максимизируется кругами и эллипсами, была доказана Бляшке (Blascke, 1923, стр. 55).

Идеи геометрических вероятностей применялись в теории поиска (например, Гутер (Guter, 1964), Гячаускас (Gyachauskas, 1964a).

Дальнейшие работы по скучиванию были выполнены Эглтон и Кермак (Eggleton and Kermaek, 1944), Наус (Naus, 1965a, 1965b).

Вероятностная мера для случайных вращений была вновь рассмотрена Майлзом (Miles, 1965).

Библиография к данной статье содержит только ссылки, не содержащиеся в нашей книге, так как те из них, которые потребовались в настоящей статье, были приведены в тексте.

ВТОРАЯ ЗАМЕТКА О ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЯХ ПО ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ ВЕРОЯТНОСТЯМ

П. А. П. МОРАН

Австралийский Национальный Университет*)

1. Введение. В монографии, написанной мною совместно с профессором М. Г. Кендаллом, содержался обзор ряда задач о геометрических вероятностях. В 1966 г. мною опубликована в *J. Appl. Prob.* 3 заметка, в которой описывались те исследования, которые либо были проведены после выхода упомянутой книги, либо же не были замечены нами.

В настоящей статье делается попытка пополнить остающиеся пробелы в описании исследований по геометрическим вероятностям, причем последние можно грубо классифицировать по тематике так: теория точек, прямых, плоскостей, оценка площади и длины и задачи покрытия.

Как указывалось в нашей книге, слово «случайный» в применении к геометрическим элементам (таким, как точки, прямые и плоскости) означает, что мы рассматриваем такие меры в параметрических пространствах этих объектов, которые инвариантны относительно преобразований пространства (в котором сами объекты лежат), принадлежащих евклидовой или какой-либо другой подходящей группе.

Исследования о возникающих при этом группах Ли исчерпывающе описаны в книге Стока (Stoka, 1967) по интегральной геометрии и в его работах (ссылки на которые имеются в его книге, обладающей обширной библиографией).

*) *Adv. Appl. Prob.* 1, 73—89 (1969).

2. Задачи о случайных точках. Число рассмотренных задач, связанных с распределением величин, зависящих от случайных точек внутри геометрических фигур, незначительно.

Любопытную задачу о случайных точках в треугольнике, которая возникает при изучении роста кристаллов (см. Мейеринг, (Meijering, 1953)), рассмотрел Кренгель (Krengel, 1967). Рассмотрим n точек (x_i, y_i) , равномерно и независимо распределенных в треугольнике с вершинами $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$. Скажем, что точка (x_i, y_i) «покрыта», если существует другая точка (x_j, y_j) такая, что $|x_i - x_j| < y_j - y_i$, $y_j - y_i > 0$. Если точка (x_i, y_i) не покрыта, то она называется «угловой точкой». Рекурсивно получается среднее, дисперсия и распределение числа угловых точек. В кристаллографическом аналоге рассматривается рост кристаллов вдоль одномерного провода. Новые кристаллы начинают расти в случайных точках и в случайные моменты времени и растут с постоянной скоростью до тех пор, пока не встречаются других кристаллов. Число получающихся в конце концов кристаллов равно числу угловых точек. Аналогичная задача с квадратом вместо треугольника приводит к комбинаторной проблеме.

Другую частную задачу рассмотрел Бурсин (Boursin, 1964). Берутся n точек, равномерно и независимо распределенных внутри плоской выпуклой фигуры. Показано, что при $n \rightarrow \infty$, $h \rightarrow 0$ число наборов таких троек точек, которые могут быть заключены между двумя параллельными прямыми, лежащими друг от друга на расстоянии h , асимптотически имеет пуассоновское распределение. В той же работе рассматривается покрытие (случайно выбираемыми сферами) случайных точек, независимо распределенных в пространстве согласно сферическому нормальному закону.

Ряд вопросов о случайном распределении точек в кругах был изучен с целью построить критерии случайности в наблюдаемом на фотографиях ядер клеток расположенном хромосоме. О них писалось в моем предыдущем обзоре. Бартон, Девид, Фикс и Меррингтон (Barton, David, Fix and Merrington, 1967) составили подробный обзор этой темы, содержащий несколько более сильные результаты по сравнению с предыдущими статьями.

Обычная в экологии процедура оценки плотности деревьев в лесу (или других растений) состоит в том, что берутся случайные точки в лесу и измеряется расстояние от них до ближайших деревьев. Исчерпывающий обзор работ по этой теме дал Персон (Persson) в 1964 г. Он рассмотрел два случая: первый, когда растения распределены случайно (порождающая поле Пуассона), и второй, когда они расположены в узлах квадратной решетки. В этой работе имеется обширная библиография. В своей второй работе Персон (Persson, 1965) рассматривает точки, случайно распределенные в вершинах равносторонних треугольников, составляющих решетку на плоскости, а также приводит обзор опубликованных после его первой статьи работ.

Интересен также родственный метод «подсчета углов», первые работы по которому описаны в нашей книге (стр. 53). Здесь цель состоит в оценке уже не числа деревьев на единицу площади, а доли площади, которая покрывается основаниями деревьев. В ряде случайно (или систематически) выбранных точек леса подсчитывается число деревьев, стволы которых видны под углом, большим 2α (α — фиксированный угол). По умножению этого числа на фиксированную постоянную получается оценка площади оснований.

О технике выполнения этой процедуры пишет Кузела (Kuusela, 1966).

Соответствующая математическая теория подробно исследована Холгейтом (Holgate, 1967). Сначала предполагается, что центры деревьев имеют равномерное пуассоновское распределение (при этом фактом, что основания деревьев имеют ненулевую площадь, пренебрегают). Тогда если N — число учтенных деревьев, величина $N \sin^2 \alpha$ является несмещенной оценкой для b , суммарной площади оснований на единицу площади леса. Дисперсия оценки равна $b \sin^2 \alpha$. То обстоятельство, что число учтенных деревьев должно быть пуассоновской случайной величиной, дает возможность проверить модель. Холгейт сравнивает точность предлагаемого метода с методом, основанным на непосредственном замере площадей оснований деревьев на пробном участке леса круговой формы. При этом относительная эффективность зависит от частотного распределения площади оснований деревьев. Холгейт

рассматривает также эффект наличия «скрытых» деревьев, а также эффект замены предположения о пуассоновском распределении оснований деревьев предположением об их расположении в узлах квадратной решетки. Теоретическое обсуждение этих задач дается также Охотомо (Ohotomo, 1966).

Имеются также работы по теории поиска точек в определенных областях. Но этот предмет, по существу, относится к покрытиям и будет рассмотрен ниже.

3. Задачи о случайных прямых. Некоторое число работ было написано по традиционным задачам о взаимоотношениях между случайными прямыми и геометрическими фигурами. Так, в качестве добавления к классической задаче Бертрана о «длине случайной хорды круга», Гарвуд и Холройд (Garwood and Holroyd, 1966) рассмотрели вероятностное распределение длины перпендикуляра, опущенного из центра круга на случайную хорду, когда последняя определяется как прямая, проходящая через две точки, независимо (с равномерным распределением) бросаемые на окружность.

Утверждается, что эта задача возникает при теоретическом изучении передвижений в городе.

Мортон (Morton, 1966) рассматривал распределение углов пересечения, которые возникают, когда друг на друга накладываются два множества линий (прямых или кривых). Найдено, что θ (меньший из двух углов в точке пересечения) имеет вероятностное распределение с плотностью $\sin \theta$ ($0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$), т. е. отнюдь не равномерно как это можно было бы ожидать на первый взгляд. Интуитивная причина этого ясна. Достаточно взять два малых, почти прямых элемента и рассмотреть угол между ними при условии, что они пересекаются. Последний, очевидно, распределен равномерно, однако при заданных направлениях элементов вероятность их пересечения пропорциональна синусу угла между ними, откуда и следует результат. Для получения результата необходимо предположить, что множество линий имеет конечную длину. О пуассоновских полях случайных прямых на плоскости говорилось в нашей книге. Интересно, что они применяются для построения двумерного случайного процесса (т. е.

для процесса переменной t , меняющейся на плоскости), обладающего марковским свойством. Вопрос о существовании таких процессов возник после критики Бартлетом (Bartlett, 1964) одной работы Пьелоу (Pielou, 1964). Пьелоу рассматривала статистический критерий для распределения элементов картины популяции на данной площади. Например, эта площадь может быть разбита на «белые» и «черные» области, причем способ разбиения в каком-то смысле случаен. Пьелоу было предположено, что существует стационарный случайный процесс на плоскости, который определяет такое разбиение и который обладает тем свойством, что вдоль всякой прямой чередование цветов составляет марковскую цепь из двух состояний с непрерывным временем. Если это имеет место, то пространственная корреляция между двумя точками, удаленными на расстояние r друг от друга, должна иметь вид e^{-ar} . Бартлетом было указано, что не известно примера простого процесса, удовлетворяющего последнему условию.

Тем не менее Свитцер (Switzer, 1965) построил как раз подобный простой процесс. За основу им принято пуассоновское поле прямых линий на плоскости. Такое поле разбивает плоскость на выпуклые фигуры. Мы приписываем этим фигурам черную или белую окраску независимо, с вероятностями p и $1-p$. Возникающий процесс, как показывает Свитцер, обладает марковским свойством вдоль любой прямой. Действительно, это легко следует из того, что расстояния между последовательными пересечениями заданной прямой с прямыми случайного поля суть независимые случайные величины с экспоненциальным распределением.

Хотя этот процесс и является марковским, когда мы рассматриваем его значение вдоль любой прямой на плоскости t , он не является марковским в более общем смысле.

Предположим, что $X(t)$ — некоторый случайный процесс, определенный для точек плоскости. В этом случае можно было бы определить марковское свойство следующим образом.

Пусть C — любая простая гладкая замкнутая кривая на плоскости t , у которой имеется внутренность и внешность. Можно было бы говорить, что процесс $X(t)$ —

«марковский», если условные распределения значений $X(t)$ снаружи и внутри кривой независимы, при условии, что заданы значения $X(t)$ на кривой S . Очевидно, что процесс Свитцера не обладает таким свойством.

Эта модель используется в более поздней работе Свитцера (Switzer, 1967), где в действительности случайные прямые не рассматриваются, но о которой, однако, удобнее сказать здесь. Автор рассматривает задачу восстановления «случайных картин» (random patterns) в пространстве двух или большего числа измерений по наблюдениям, сделанным в отдельных точках, разбросанных случайно либо систематически по всему полю. Под «случайной картиной» понимается разбиение пространства на конечное число измеримых по Лебегу множеств A_1, A_2, \dots , причем предполагается, что разбиение производится в некотором смысле случайно. Для простоты рассмотрим разбиение только на два множества, которые будем называть «черным» и «белым». Множество точек P_i выбирается в пространстве случайно либо систематически, и предполагается, что известно, какому из множеств A_j принадлежит каждая из точек P_i . На основе такой информации желательно восстановить картину множеств A_i с возможно большей точностью. Один из путей к этому («правило ближайшей точки») состоит в приписывании каждой точке P цвета того множества A_j , в которой лежит ближайшая к P точка из множества точек P_i . Это правило однозначно приписывает цвета всем точкам плоскости, за исключением тех, для которых «ближайший сосед» не является единственным; мера последних, однако, равна нулю.

В этих моделях имеется два случайных элемента — картина и множество выборочных точек. Для обсуждения свойств различных методов восстановления картины необходимо ввести некоторую функцию убытков. Наиболее естественно предполагать, что убыток пропорционален мере тех точек, которым цвет был приписан неверно. При таком определении убытка Свитцер получил выражение для математического ожидания убытка в различных случаях. Автор интересуется возможными определениями понятия «случайной картины» и предлагает различные модели, одна из которых — отмеченное выше разбиение

с помощью случайных прямых. Однако представляют интерес и другие модели. Например, можно предположить наличие в данной области пуассоновского поля точек, и всем точкам области, удаленным хотя бы от одной из точек поля на расстояние не большее чем r , можно приписать черный цвет. Если белые точки составляют все, что остается, то, очевидно, белый и черный цвета входят несимметрично. Эта модель может оказаться полезной в задачах, связанных с бомбометанием.

Для построения моделей, в которых черный и белый цвета (или большее число цветов) играют симметричную роль, достаточно использовать какой-либо метод разбиения пространства на случайные области, а затем приписать каждой области белый или черный цвета с данными вероятностями. Один из способов такого разбиения — взять пуассоновское поле и определить каждую область как состоящую из всех точек, которые лежат ближе к данной точке пуассоновского поля, чем к какой-либо другой его точке. Существуют и другие аналогичные модели.

Хорошо известная задача о нахождении вероятности того, что две случайные прямые, пересекающие выпуклую фигуру K на плоскости, пересекаются внутри K , обсуждалась в нашей книге. Если A — площадь K , а L — ее периметр, то эта вероятность равна $2\pi AL^{-2}$. Эта задача была несколько обобщена Суланке (Sulanke, 1965). Предположим, что вместо двух берутся три случайные хорды. Суланке находит явные выражения для вероятностей того, что из возникающих точек пересечений 0, 1, 2 или 3 окажутся внутри K . Эти вероятности выражаются через умеренной сложности функционалы от формы K . Выписать явное решение для числа хорд, большего чем три, по-видимому, слишком сложно. Однако среднее число пересечений, лежащих внутри K , очевидно, равно $n(n-1)\pi A l^{-2}$, а второй момент числа таких пересечений может быть найден с использованием результата для трех хорд, полученного Суланке. Им указана также верхняя граница вероятности того, что все пересечения для n прямых лежат в K .

Перейдем к задачам со случайными прямыми в пространстве.

Интересное обсуждение распределения размеров областей в пространстве между случайно расположенными прямолинейными сегментами конечной длины дал Огстон (Ogston, 1959). Размер этих областей определяется как наибольший радиус сферы, центр которой выбирается случайно и которая не задевает волокон. Предположим, что длина каждого волокна равна $2L$ и что плотность центров волокон на единицу объема равна ν . Пусть P есть вероятность того события, что сфера со случайным центром радиуса D не пересекается ни одним волокном. Тогда

$$P = \int_0^{\infty} (4\pi\nu Lx + 4\pi\nu x^2) \exp \left[- \left(2\pi\nu Lx^2 + \frac{4}{3} \pi x^3 \right) \right] dx = \\ = \exp \left[- \left(2\pi\nu LD^2 + \frac{4}{3} \pi\nu D^3 \right) \right]. \quad (1)$$

Если теперь устремить L к бесконечности и пренебречь случаями, когда концы волокон лежат внутри сферы, мы должны одновременно полагать, что $\nu \rightarrow 0$ так, что величина νL остается постоянной, скажем, равной μ . Тогда второй член в показателе исчезает и вероятность оказывается равной

$$\exp \left[- (2\pi\mu D^2) \right]. \quad (2)$$

Этот более простой результат можно было найти непосредственно с помощью теории, изложенной в нашей книге.

Еще одна задача, связанная с распределением плоскостей в пространстве, была изучена в связи с металлургией (Скривен и Уильямс (Scriven and Williams, 1965), Мортон (Morton, 1967), Хильярд (Hilliard, 1962)). Грани металлических кристаллов являются плоскими областями конечной протяженности, а направления нормалей к ним часто распределены не изотропно, причем обычно анизотропия симметрична относительно некоторого заданного направления. Для нахождения этих распределений берутся плоские сечения, параллельные оси симметрии, и измеряются углы (в плоскости сечения) пересечения граней кристалла с осью симметрии.

Используя некоторую весьма непростую технику, отсюда можно восстановить пространственное распределение нормалей. Похожая задача возникает в ботанике, когда пытаются оценить частотное распределение ориентаций листьев, вставляя в листовку под различными углами «иглы». Ссылки на работы по этой теме были даны в предыдущем обзоре Морана (Moran, 1966); кроме того, имеются работы Миллера (Miller, 1967), Филипа (Philip, 1966) и Уоррена Вильсона (Warren Wilson, 1963, 1965).

4. Случайное разбиение пространства. Более ранние работы по случайному разбиению пространства были описаны в нашей книге и Мораном (Moran, 1966). Простейшим разбиением является разбиение плоскости на выпуклые области пуассоновским полем прямых, а в случае трехмерного пространства — его разбиение пуассоновским полем плоскостей. Исчерпывающее изложение соответствующей теории дает Майлз в серии работ, которые он собирает опубликовать. Следует отметить, однако, и другие работы.

С рассматриваемыми задачами тесно связаны вопросы пересечения сферы (или гиперсферы) плоскостями, проходящими через ее центр. Так, рассмотрим сферу в трехмерном пространстве и те области на ее поверхности, которые высекаются N плоскостями, проходящими через центр, в предположении, что их нормальные векторы независимы и распределены равномерно по всем направлениям. Число таких областей, как это нетрудно установить, равно $N^2 - N + 2$. При возрастающем N мы рассматриваем все меньшие и меньшие участки сферы, что приводит к ситуации, в которой имеется пуассоновское поле прямых на плоскости. Таким путем можно рассчитать среднее значение площади возникающих выпуклых областей, а также ряд других их свойств. Та же аргументация может быть использована и в пространствах высшего числа измерений. Ковер и Эфрон (Cover and Efron, 1967) провели детальное изучение разбиения n -мерного пространства N -гиперплоскостями (размерности N), проходящими через начало, с нормальными векторами, распределенными равномерно по всем направлениям. Как показал Шефли (Schäfli), число областей, на которые пространство

разбивается N такими гиперплоскостями, равно

$$C(N, n) = 2 \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i}. \quad (3)$$

Эти области являются выпуклыми конусами. Ковер и Эфрон продолжают анализ и находят общее число k -мерных граней этих конусов для каждого значения k . Таким путем можно вычислить среднюю площадь области, которую высекает такой случайный конус на единичной сфере, а также среднее число k -мерных ребер такой области. Беря число гиперплоскостей большим и рассматривая уменьшающиеся участки $(n-1)$ -мерной поверхности единичной сферы, мы приближаемся к ситуации, когда $(n-1)$ -мерное евклидово пространство разбивается на случайные полиэдры пуассоновским полем $(n-2)$ -мерных гиперплоскостей. Впервые эту процедуру использовал Гоудсмит (Goudsmit), когда рассмотрел случайные большие круги на поверхности сферы, с тем чтобы получить результаты для многоугольников, порождаемых пуассоновским полем прямых на плоскости. Результаты Ковера и Эфрона тесно связаны с результатом Вендела (Wendel, 1962) о том, что вероятность покрытия сферы N случайно выбранными замкнутыми полусферами равна

$$1 - 2^{-N} (N^2 - N + 2), \quad (4)$$

и с соответствующими обобщениями на случай большего числа измерений. Результаты Ковера и Эфрона были применены в теории распознавания образов Ковером (Cover, 1965).

Вышеупомянутая задача о точном распределении объемов выпуклых областей, порождаемых пуассоновским полем $(n-1)$ -мерных гиперплоскостей в n -мерном пространстве, остается нерешенной, однако некоторые шаги в этом направлении все же сделаны. Сантало (Santaló, 1948) получил дисперсию объемов для пуассоновского поля двумерных плоскостей в трехмерном пространстве. Сантало (Santaló, 1966) обобщил эту задачу на пуассоновские поля «случайных прямых» на гиперболической плоскости и получил дисперсию площади получающихся областей, среднее число сторон и средний периметр. В работе Корте и Ллойда (Corte and Lloyd, 1965) результаты

о прямых на евклидовой плоскости предложено использовать для создания грубой модели расположения волокон в последовательных слоях бумаги. Однако здесь встречаются различные теоретические трудности, в том числе обусловленные тем фактом, что волокна имеют ненулевую толщину. Корте и Ллойд предлагают теоретическую модель бумаги, в которой предполагается, что последовательные слои волокон образуют прямоугольные системы, в которых волокна лежат параллельно двум ортогональным осям и разделены расстояниями с одним и тем же экспоненциальным распределением.

Так обходится факт ненулевой толщины волокон. Показано, что логарифм квадратного корня непокрытых площадей имеет приблизительно логарифмически нормальное распределение.

Как уже отмечалось выше, существует и другой способ разбиения пространства: взять пуассоновское поле точек и связать с каждой точкой этого поля выпуклый многогранник, состоящий из тех точек пространства, которые лежат ближе к данной точке пуассоновского поля, чем к любой другой точке поля. Возникающие области известны как многогранники (или многоугольники) Вороного и изучались Мейерингом (Meijering, 1953) в трех измерениях, Кренгелем (Krengel, 1967) в одном измерении и Джильбертом (Gilbert, 1962). Кiang (Kiang, 1966) выполнил несколько экспериментальных выборок в двух- и трехмерном случаях. Им высказано предположение, что распределения мер многоугольников и многогранников Вороного суть нормированные распределения χ^2 с четырьмя и шестью степенями свободы соответственно. Однако полученные Джильбертом (Gilbert, 1962) точные выражения для дисперсий показывают, что это предположение не может быть верным.

В ряде работ Майлза, которые сейчас публикуются (и первая из которых появится в следующем выпуске этого журнала), обе эти модели изучены значительно более подробно, но многочисленные результаты, им полученные, не могут быть здесь подытожены.

Пена порождает другое разбиение пространства, которое не случайно в прежнем смысле, однако представляет значительный интерес само по себе и было, по-видимому,

впервые исследовано Кельвином (Kelvin, 1887, 1888). Предположим, что все пузырьки, формирующие пену, имеют одинаковые объемы. Тогда поверхностные пленки между ними должны быть либо плоскими, либо поверхностями постоянной «средней» кривизны (т. е. сумма двух главных кривизн должна быть постоянной). Далее, края поверхностей должны пересекаться вдоль кривых линий так, что локальные углы между смежными касательными плоскостями оказываются равными. Далее можно показать, что встреча более чем трех плоскостей вдоль одной прямой — явление неустойчивое, а углы между последовательными касательными плоскостями должны быть равны 120° . Оказывается, что пространство можно заполнить правильными идентичными многогранниками с выполнением этих условий, и единственный пригодный для этого многогранник — ромбический додекаэдр. Однако при таком заполнении в каждой вершине встречаются двенадцать плоских граней. Известно, что такая ситуация физически неустойчива. Поэтому в действительной пене как ребра, так и «границы» должны быть искривлены.

Кельвин решил задачу о разбиении (с устойчивыми углами) пространства на конгруэнтные области, такие, что при заданном объеме достигается минимум площади поверхности. Эти области — 14-сторонние фигуры (тетракайдекаэдры), которые представляют собой почти многогранники, со слегка искривленными гранями. Эти фигуры имеют 8 почти шестиугольных и 6 почти четырехугольных сторон (см. также Уильямс (Williams, 1968)).

В двух работах, содержащих интересные исторические ссылки об изучении пены, Мацке (Matzke, 1946) описывает некоторые экспериментальные исследования на пенах, состоящих из мыльных пузырьков. Им найдено, что большинство пузырьков (исключая пузырьки на поверхности) имеют 14 «граней» и большинство последних — пятиугольны. По-видимому, фигуры Кельвина не реализуются в реальных пенах. См. также Мацке и Нестлер (Matzke and Nestler, 1946), где рассмотрены пены с неравновеликими пузырьками.

5. Измерение длины и площади. Некоторое число работ написано об измерении длин кривых в двух и трех из-

мерениях. Предположим, что имеется плоская кривая длины L , и рассмотрим ее проекцию на прямую линию, составляющую угол θ с некоторым фиксированным направлением. Пусть $L(\theta)$ — мера этой проекции, вычисленная с условием, что точка, в которую проектируется k точек кривой подсчитывается k раз. Тогда легко доказать, что длина L равна умноженной на $\frac{1}{2}\pi$ средней величине проекции (среднее берется по всем направлениям). На этом результате основывается практический метод оценки длины путем измерения проекции в различных направлениях (например, с помощью траверсирующего микроскопа), либо же путем подсчета числа пересечений кривой с прозрачной квадратной решеткой. Если последняя имеет шаг d и имеется всего N пересечений с вертикальными и горизонтальными линиями решетки, то нетрудно видеть, что N есть несмещенная оценка для $4\pi^{-1}L$. Очевидно, налицо два источника ошибок: случайная ориентация решетки и ее грубость как инструмента. Теоретическая величина ожидаемых ошибок из каждого источника была исследована Мораном (Moran, 1966) и, независимо от него, рядом авторов: Ньюменом (Newman, 1966), Олсоном (Olson, 1950), Матерном (Matern (см. фон Зегебаден (von Segebaden, 1964))). Теоретическое исследование этой идеи было выполнено Перкелем (Perkel) в работах, мне недоступных (см. ссылки в некрологе, написанном Лукашевичем (Lukaszewicz, 1967)).

Возможно оценить и длину кривых в трех измерениях, подсчитывая число пересечений со случайно расположенными плоскими областями известного размера. Такая задача возникает, например, когда желательно найти общую длину волокнистого корня некоторого растения в каждом кубическом дюйме почвы. Иногда вместо того, чтобы отмыть почву, прижать корень к плоскости и использовать описанные выше методы, удобнее заморозить образец почвы, или вызвать его затвердение с помощью химикатов, а затем рассекать образец. Если на сечении площади A найдено n срезов корней, то $2nA^{-1}$ служит несмещенной оценкой для LV^{-1} , отношения общей длины L корня к объему V массы почвы, в которой проводятся случайные сечения.

Для доказательства рассмотрим математическое ожидание величины n . Возьмем малый элемент сечения площади dA и рассмотрим вероятность того, что он пересечется малым прямолинейным элементом длины dL одной из множества кривых, лежащих в рассматриваемом объеме. Если dt и dL малы по сравнению с выбранным объемом, то эта вероятность равна

$$\frac{\cos \theta dA dL}{V}, \quad (5)$$

где θ есть угол между нормалью к поверхности элемента dA и направляющим вектором элемента dL . Среднее по всем θ в пространстве значение $|\cos \theta|$ равно $1/2$. Интегрируя по площади и по длине, находим, что ожидаемое число пересечений L с C равно $\frac{1}{2}LAV^{-1}$, откуда и следует несмещенный характер оценки.

Вычисление стандартной ошибки этого метода невозможно, поскольку дисперсия зависит от формы кривой. На практике обычно делается несколько таких оценок, и дисперсия их среднего оценивается по эмпирической дисперсии. Этот метод использовали для измерения длины корня Мельхиш и Ленг (Melhuish and Lang, 1968).

Общепринятый способ измерения площади на карте состоит в том, что на нее накладывается прозрачная квадратная решетка и подсчитывается число квадратов, содержащихся в области, причем обычно принимается какое-то соглашение о квадратах, лишь часть которых попадает в область. Почти эквивалентной процедурой является подсчет числа узлов решетки, попадающих в область, с тем преимуществом, что для случайно расположенной решетки это дает несмещенную оценку площади. Теоретические исследования дисперсии этой оценки, приведенные Кендаллом и другими, описаны в нашей книге. Некоторые дальнейшие результаты для такого типа задач в случае выпуклых тел в многомерных пространствах получила Главка (Hlawka, 1950). Другой способ измерения площади плоской области состоит в наложении на нее множества параллельных прямых с постоянным шагом d . Сумма длин высекаемых хорд, помноженная на d , является несмещенной оценкой для площади. Уилкинсон (Wilkin-

son) разработал быстродействующий фотоэлектрический планиметр, работающий на этом принципе, который применяется для быстрого измерения площади листьев. Теоретическое исследование дисперсии этой оценки дано Мораном (Moran, 1968). Теория очень схожа с теорией дисперсии числа узловых точек решетки, лежащих в данной области.

6. Размещение и упаковка. Несколько новых работ написано о статистических задачах упаковки предметов фиксированных размеров в заданной области. Добо и Сайг (Dobo and Szajcz, 1965) рассматривали задачи о последовательном размещении интервалов на прямой согласно различным довольно сложным законам; их модель отличается от ныне хорошо известной модели (задачи о «стоянке автомобилей»), где единичные интервалы последовательно занимают случайные непересекающиеся положения в интервале длины $L > 1$. Их задачи больше связаны с проблемами покрытия, которые мы рассматриваем ниже.

Для сфер в трех измерениях задача «упаковки» рассматривалась лишь эмпирическим методом (Соломон (Solomon, 1967)). «Случайная упаковка», при которой сферы располагаются вплотную некоторым случайным способом, который трудно описать математически, представляет интерес в теории жидкостей. Ссылки на ранние работы по этому вопросу были даны в предыдущем обзоре; к этому следует добавить статью Финни и Бернала (Finney and Bernal, 1967).

7. Покрытия, скучивание и задачи поиска. Несколько работ по задаче о покрытиях было написано уже после появления нашей книги и предыдущего обзора. Типичной задачей такого рода является определение моментов меры той части заданного множества, которая оказывается покрытой объединением некоторого числа случайных множеств (или той части, которая оказывается непокрытой).

Общая теория мер такого типа построена Эйлемом (Ailam, 1966, 1968). Им установлена интересная теорема двойственности, которая может быть пояснена следующим примером. Рассмотрим сферу единичной поверхности, на которую помещаются n круговых шляпок площади A , независимо бросаемых на сферу с равномерным

распределением. Пусть X — мера части поверхности, не покрытой ни одной из шляпок, и пусть P_1, \dots, P_k — k точек, независимо брошенных на сферу с равномерным распределением.

Положим $I(C_i, P_j)$ равны единице, если круговая шляпка C_i не покрывает точку P_j , и нулю в противном случае. Тогда площадь, не покрытая шляпками, равна

$$X = \int \prod_{P_i, i} I(C_i, P_i), \quad (6)$$

а X^k равно

$$\prod_j \int_{P_j} \prod_i I(C_i, P_j), \quad (7)$$

так что

$$E(X^k) = \int \prod_{C_i} \int \prod_{P_j} \prod_i I(C_i, P_j), \quad (8)$$

где внешний интеграл берется по всем положениям n круговых шляпок. Этот интеграл может быть записан в виде

$$\int \prod_{P_j} \int_{C_i} \prod_i I(C_i, P_j), \quad (9)$$

что в свою очередь равно $E(Y^n)$, где Y есть относительная мера (в вероятностном пространстве сферических шляпок) множества положений шляпок, при которых данные k точек на сфере оказываются непокрытыми. Этот результат обобщает результат Роббинса и применяется автором для решения ряда вероятностных задач, некоторые из которых не являются геометрическими.

Особый класс задач покрытия, связанных с бомбометанием, рассмотрел Джиллиленд (Gilliland, 1966). Пусть T — «целевое» множество в n -мерном пространстве и пусть $P(T)$ есть интеграл по этому множеству от сферически симметричной нормальной плотности с центром A и единичной дисперсией. Задача состоит в выборе A таким образом, чтобы максимизировать $P(T)$. Например, если T состоит из двух равных непересекающихся гиперсфер, то $P(T)$ максимизируется выбором в качестве A середины интервала, соединяющего их центры. Решаются и другие, более сложные задачи о трех и четырех гиперсферах, но ряд задач остается нерешенным.

Интересное применение теории покрытий встречается при изучении лунных кратеров (Кросс и Фишер (Cross and Fisher, 1968)).

Реньи и Суланке (Renyi and Sulanke, 1964) рассмотрели асимптотические свойства выпуклого многоугольника, который является минимальной выпуклой оболочкой n точек, независимо бросаемых во внутренность данной выпуклой фигуры на плоскости. Недавно ими рассмотрена в некотором смысле двойственная задача (Реньи и Суланке (Renyi and Sulanke, 1968)). Предположим, что K и B — выпуклые плоские фигуры и что K содержит B . Пусть g_1, \dots, g_n — n случайных прямых, независимо выбранных согласно обычной мере для прямых на плоскости, но с условием, что они пересекают K , но не пересекают B . Они образуют выпуклый многоугольник τ_n с X_n сторонами. Изучается асимптотическое поведение $E(X_n)$ при различных предположениях относительно B . Шмидт (Schmidt, 1968) рассмотрел асимптотическое поведение аналогичных величин в многомерных пространствах.

Наряду с рассмотрением выпуклой оболочки множества точек, бросаемых с равномерным распределением во внутрь выпуклого тела, интересно изучить также выпуклую оболочку множеств точек в n -мерном пространстве, которые независимо распределены согласно одному и тому же n -мерному нормальному распределению. Некоторые результаты в этом направлении получены Жеффруа (Geffroy, 1959, 1961) и Рейно (Raynaud, 1965). К тому же кругу идей относится оценка формы кривой $y=f(x)$ по выборке точек, лежащих под кривой (Жеффруа (Geffroy, 1964)).

Как в предыдущем обзоре, так и выше внимание привлекалось к задаче определения вероятности покрытия сферы N круговыми шляпками углового радиуса α (шляпки бросаются независимо с равномерным распределением). Для $\alpha < \frac{1}{2}\pi$ известно лишь приближенное решение, а для $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ — точное. В работе, находящейся в печати, Майлз (Miles) нашел точное решение для случая $\frac{1}{2}\pi < \alpha < \pi$, т. е. для шляпок больших, чем полушарие.

Беря дополнения к таким шляпкам, мы видим, что это дает нам дополнение к вероятности того, что N сферических шляпок углового радиуса $\pi - \alpha$ имеют по крайней мере одну общую точку.

В нашей книге дано описание работ по исследованию скученности случайно помещаемых выпуклых фигур на плоскости, со ссылками на работы Макка. В другой своей работе, которая тогда ускользнула от нашего внимания, Макк (Mask, 1956) дал поправку к одной формуле своей предыдущей работы и рассмотрел некоторые дальнейшие вопросы. Для случайно помещаемых выпуклых фигур в трехмерном пространстве им получены выражения для среднего числа одиночных тел, для математического ожидания объема, не занятого телами, а также неравенство для ожидаемого числа куч в терминах распределения объема тел и их средней опорной функции. Хильярд (Hilliard, 1962a) использовал результат Макка в металлографических исследованиях.

Робертс (Roberts, 1967) проделал изучение методом Монте-Карло куч кругов (равных радиусов), центры которых образуют пуассоновское поле на плоскости. Число кругов, входящих в скопление, случайно, и для достаточно высокого значения параметра будет иметь бесконечное математическое ожидание. При больших значениях параметра могут образовываться бесконечные скопления. Измерением средних размеров наблюдаемых скоплений, получаемых методом Монте-Карло, найдена оценка критического значения параметра. Позднее (Roberts, 1968) эти результаты он распространил на трехмерный случай.

Гячаускас (Gjajauskas, 1968) использовал геометрические вероятности в теории поиска. Предположим, что H — круг, содержащий выпуклую область K . Пусть K есть прямолинейный сегмент длины L , распределенный равномерно внутри H . K рассматривается как линия поиска цели K_0 . Автором найдена вероятность того, что K пересекает K_0 , а также найдена средняя длина пересечения. Вероятность перекрытия и средняя площадь пересечения найдены и тогда, когда K является кругом известного радиуса. В следующей работе (Gjajauskas, 1966a) им найдено соответствующее выражение для аналогичной трехмерной задачи.

К основному тексту книги
Кендалла и Морана
«Геометрические вероятности»

- ApSimon, H. G. Note 2754. A repeated integral. *Math. Gaz.*, 42 (1958), 52.
- Armitage, P. An overlap problem arising in particle counting. *Biometrika*, 36 (1949), 257—266.
- Barbier, S. Note sur le probleme de l'aiguille et jeu du joint couvert. *J. Math. pures et appl.* (2), 5 (1860), 273—286.
- Bates, A. E., and Pillow, M. E. Mean free path of sound in an auditorium. *Proc. Phys. Soc.*, 59 (1947), 535—541.
- Baticle, M. Le problème de la répartition. *Comptes Rendus*, Paris, 196 (1933), 1945—1946; 197 (1933), 632—634; 201 (1935), 862—864.
- Berg, W. F. Aggregates in one and two-dimensional random distributions. *Phil. Mag.* (Series 7), 36 (1945), 337—346.
- Bertrand, J. Calcul des Probabilités. Paris (1907).
- Bitterlick, W. Die Winkelzählprobe. *Allg. Forst- u. Holzw. Ztg.*, 59 (1948), 4—5.
- Blaschke, W. Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises. *Math. Zeit.*, 1 (1918), 52—57.
- Blaschke, W. Vorlesungen über Differential-geometrie. II. Affine Differential-geometrie. Berlin (1923).
- Blaschke, W. Integral-geometrie. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, No. 252. Hermann et Cie, Paris (1935).
- Bondi, H. *Cosmology*. Cambridge (1952).
- Bonnesen, T., and Fenchel, W. *Theorie der konvexen Körper. Ergebnisse der Math.* Springer, Berlin (1934). (Chelsea Reprint, 1948).
- Borel, E. *Principes et formules classiques du Calcul des Probabilités. Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications*. Paris, Gauthier-Villars (1925).
- Bronowski, J., and Neyman, J. The variance of the measure of a two-dimensional random set. *Ann. Math. Stat.*, 16 (1945), 330—341.
- Buffon, G. *Essai d'arithmétique morale. Supplément à l'Histoire Naturelle*, Vol. 4 (1777).
- Burnside, W. *Theory of Probability* (1928). (Dover reprint, 1959).

- Cartan, E. Le principe de dualité et certaines intégrales multiples d'espace tangentiel et de l'espace réglé. *Bull. Soc. Math. France*, **24** (1896), 140—177.
- Cauchy, A. Mémoire sur la rectification des courbes et de la quadrature des surfaces courbes. *Mém. Acad. Sci. Paris*, **22** (1850), 3. (Oeuvres complètes (1). Vol. 1 (1908)).
- Chalkley H., Cornfield J., and Park H. A. method for estimating volume-surface ratios, *Science*, **110** (1949), 295—297.
- Chandrasekhar, S., and v. Neumann, J. The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. I. *Astrophys. J.*, **95** (1942), 489—531. II. *Ibid.*, **97** (1943), 1—27.
- Chandrasekhar, S. Stochastic Problems in Physics and Astronomy. *Reviews of Modern Physics*, **15** (1943), 1—89.
- Chandrasekhar, S. The statistics of the gravitational field arising from a random distribution of stars. III. *Astrophys. J.*, **99** (1944), 25—46. IV. *Ibid.*, **99** (1944), 47—58.
- Clark, A. L. Buffon's Needle Problem. *Canadian J. Research*, **9** (1933), 402 and **11** (1934), 658.
- Clark, P. J., and Evans, F. C. Distance to nearest neighbour as a measure of spatial relationships in populations. *Ecology*, **35** (1954), 445—453.
- Clark, P. J., and Evans, F. C. On some aspects of spatial patterns in biological populations. *Science*, **121** (1955), 397—398.
- Cornfield, J., and Chalkley, H. W. A problem in geometric probability. *J. Wash. Acad. Sci.*, **41** (1951), 226—229.
- Cottam, G. A point method for making rapid surveys of woodlands. *Bull. Ecol. Soc. Amer.*, **28** (1947), 60.
- Cottam, G., and Curtis, J. T. A method for making rapid surveys of woodlands by means of pairs of randomly selected trees. *Ecology*, **30** (1949), 101—104.
- Cottam, G., and Curtis, J. T. Correction for various exclusion angles in the random pairs method. *Ecology*, **36** (1955), 767.
- Cottam, G., and Curtis, J. T. The use of distance measures in phytosociological sampling. *Ecology*, **37** (1956), 451—460.
- Cottam, G., Curtis, J. T., and Hale, B. W. Some sampling characteristics of a population of randomly dispersed individuals. *Ecology*, **34** (1953), 741—757.
- Courant, R., and Hilbert, D. *Methoden der Mathematischen Physik*. I. (1931). Springer. (Reprint 1943 by Interscience, New York).
- Cox, D. R. Some statistical methods connected with series of events. *J. Roy. Stat. Soc.*, **B**, **17** (1955), 129—164.
- Crofton, M. W. Sur quelques théorèmes de calcul intégral. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **68** (1869), 1469—1470.
- Crofton, M. W. On the theory of local probability, etc. *Phil. Trans.*, **158** (1869), 181—199.
- Crofton, M. W. Geometrical theorems relating to mean values. *Proc. London Math. Soc.*, **8** (1877), 304—309.
- Crofton, M. W. Article «Probability». *Encyclopaedia Britannica*, 9th ed. (1885).

- Csaszar, A. Sur la structure des espaces de probabilité conditionnelle. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 337—361.
- Czuber, E. Zur theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. *S.—B. Akad. Wiss. Wien*, **90** (1884), 719—742.
- Czuber, E. Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte, Leipzig (1884).
- Czuber, E. Wahrscheinlichkeiten und ihre Anwendung auf Fehlerausgleichung, Statistik, und Lebensversicherung. 2. vols, Leipzig (1908—1910).
- Davis, H. T., The Analysis of Economic Time Series. Principia Press. Bloomington, Indiana (1941).
- Deltheil, R. Sur la théorie des probabilités géométriques. Thèse. *Annales de la Fac. de Toulouse*, **11** (1919), 1—65.
- Deltheil, R. Probabilités Géométriques. Traite du calcul des probabilités et de ses applications. Gauthier-Villars, Paris (1926).
- Domb, C. The problem of random intervals on a line. *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **43** (1947), 329—341.
- Downton, F. A note on vacancies on a line. *J. Roy. Stat. Soc.*, **B**, **23** (1961), 207—214.
- Dunn, C. C. Probability method applied to the analysis of recrystallization data. *Phys. Rev.*, (2), **66** (1944), 215—220.
- Fejes Toth, L., and Hadwiger, H. Mittlere Trefferzahlen und geometrische Wahrscheinlichkeiten. *Experientia*, **3** (1947), 366—369.
- Feller, W. An Introduction to Probability. Theory and its Applications. Wiley, New York (1950).
- Fisher, R. A. Tests of significance in harmonic analysis. *Proc. Roy. Soc.*, (a), **125** (1929), 54—59.
- Fisher, R. A. On the similarity of the distributions found for the test of significance in harmonic analysis, and in Stevens' problem in geometrical probability. *Ann. Eugenics*, **10** (1940), 14—17.
- Frenkel, J. Kinetic Theory of Liquids. Oxford U.P. (1946).
- Fullman, R. L. Measurement of particle sizes in opaque bodies. *J. Metals*, **5** (1953), 447—452.
- Fullman, R. L. Measurement of approximately cylindrical particles in opaque samples. *J. Metals*, **5** (1953), 1267—1268.
- Gardner, A. Greenwood's «Problem of Intervals». An exact solution for $n=3$. *J. Roy. Stat. Soc.*, **B**, **14** (1952), 135—139.
- Garwood, F. The variance of the overlap of geometrical figures with reference to a bombing problem. *Biometrika*, **34** (1947), 1—17.
- Garwood, F. An application of the theory of probability to vehicular-controlled traffic. *J. Roy. Stat. Soc.*, Suppl., **7** (1960), 65—77.
- Garwood, F., and Tanner, J. C. Note 2800. On note 2754—a repeated integral. *Math. Gaz.*, **52** (1958), 292—293.
- Ghosh, B. Random distances within a rectangle, and between two rectangles. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, **43** (1951), 17—24.
- Gilbert, E. N. Random subdivisions of space into crystals. *Ann. Math. Stat.*, **33** (1962), 958.
- Goudsmit, S. Random distribution of lines in a plane. *Reviews of Mod. Phys.*, **17** (1945), 321—322.
- Greenman, N. N., On the bias of grain size measurements made in thin section: a discussion. *J. Geology*, **59** (1951), 268—274.

- Greenman, N. N. The mechanical analysis of sediments from thin section data. *J. Geology*, **59** (1951), 447—462.
- Greenwood, M. The statistical study of infectious diseases. *J. Roy. Stat. Soc.*, **109** (1946), 85—103.
- Greig-Smith, P. Quantitative Plant Ecology, Butterworth, London (1957).
- Griggeman, N. T. Geometric probability and the number π . *Scripta Mathematica*, **25** (1960), 183—195.
- Grosenbaugh, L. R. Shortcuts for cruisers and scalers. *Occ. Pap. Sth. For. Exper. Station*, **126** (1952), 1—24.
- Grosenbaugh, L. R. Plotless timber estimates — new, fast, easy. *J. For.*, **50** (1952), 32—37.
- Guenther, W. C. Circular probability problems. *Amer. Math. Monthly*, **68** (1961), 541—544.
- Hadwiger, H. *Altes und Neues über konvexe Körper*. Burkhauser, Basel (1955).
- Hall, A. On an experimental determination of π . *Messenger of Math.*, **2**, (1873), 113—114.
- Halperin, M. Some asymptotic results for a coverage problem. *Ann. Math. Stat.*, **31** (1960), 1063—1076.
- Hammersley, J. M. The distribution of distance in a hypersphere. *Ann. Math. Stat.*, **21** (1950), 447—452.
- Hammersley, J. M. A theorem on multiple integrals. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **47** (1951), 274—278.
- Hammersley, J. M. On a certain type of integral associated with circular cylinders *Proc. Roy. Soc.*, (A), **210** (1951), 98—110.
- Hammersley, J. M. Lagrangian integration coefficients for distance functions taken over right circular cylinders. *J. Math. and Phys.*, **31** (1952), 139—150.
- Hammersley, J. M. Note 2936. On note 2871. *Math. Gazette*, **44** (1960), 287—288.
- Hammersley, J. M. and Morton, K. W. A new Monte Carlo technique: antithetic variates. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **52** (1956), 449—475.
- Handscomb, D. C. On the random disorientation of two cubes. *Canadian J. Math.*, **10** (1958), 85—88.
- Hartman, P. and Wintner, A. On the needle problem of Laplace and its generalisations. *Bol. Mat.*, **14** (1941), 260—263.
- Hertz, P. Über die gegenseitigen Durchschnittlichen Abstand von Punkten, die mit bekannter mittlerer Dichte im Raum Angeordnet sind. *Math. Ann.*, **67** (1909), 387—398.
- Hildebrand, J. H. The liquid state. *Proc. Phys. Soc.*, **56** (1944), 221—239.
- Hildebrand, J. H., and Morrell, M. E. The distribution of molecules in a model liquid. *J. Chem. Phys.*, **4** (1936), 224.
- Holtmark, W. Über die Verbreiterung von Spektrallinien. *Phys. Zeit.*, **20** (1919), 162—168; **25** (1924), 73—84.
- Horálek, V. A contribution to the study of the structure of materials. (Czech.) *Aplik. Mat.*, **3** (1958), 376—383.
- Hostinsky, B. A new solution of Buffon's needle problem. (Czech.) *Rospravy České Akademie*, Classe II **26** (1917).

- Hostinsky, B. Sur une nouvelle solution du problème de l'aiguille. *Bull. Soc. Math.*, 2^e série, **44** (1920), 126—136.
- Hostinsky, B. Sur les probabilités géométriques. *Pub. Fac. Sci. Univ. Masaryk. Brno* (1925).
- Hostinsky, B. Sur les probabilités relatives à la position d'une sphère à centre fixe. *J. math. pures et appl.*, 9^e série, **8** (1929), 35—43.
- James, A. T. Normal multivariate analysis and the orthogonal group. *Annals of Math. Stat.*, **25** (1954), 40—75.
- Kahan, B. C. A practical demonstration of a needle experiment to give a number of concurrent estimates of π . *Journ. Roy. Stat. Soc.*, **A**, **124** (1961), 227—239.
- Kendall, D. G. On the number of lattice points inside a random oval. *Q. J. Math.*, (2), **19** (1948), 1—26.
- Kendall, D. G. and Rankin, R. A. On the number of points of a given lattice in a random hypersphere. *Q. J. Math.*, (2), **4** (1953), 178—189.
- Kendall, M. G. and Stuart, A. *The Advanced Theory of Statistics*, Vols I and II. London, Charles Griffin (1958, 1961).
- Kirkwood, J. G. and Boggs, E. M. The radial distribution function in liquids. *J. Chem. Phys.*, **10** (1942), 394.
- Kolmogoroff, A. N. Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione. *Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari*, **4** (1933), 83—91.
- Kolmogoroff, A. N. Foundations of the theory of probability. Trans. by N. Morrison. Chelsea, New York, 1950.
- Krumbein, W. C. Thin section mechanical analysis of indurated sediments. *J. Geology*, **43** (1935), 482—496.
- Krumbein, W. C., and Pettijohn, F. J. *Manual of Sedimentary Petrography*. New York (1938).
- Lancaster, H. O. Statistical Control in Haematology. *J. Hygiene*, **48** (1950), 402—417.
- Laurent, A. C. Bombing problems. *Operations Research*, **5** (1957), 75—89.
- Lazzerini, M. *Periodico di Mathematica*, **4** (1901), 140.
- Lebesgue, H. Exposition d'un mémoire de Crofton. *Nouvelles Annales de Math.*, (4) **12** (1912), 481—502.
- Lévy, E. B. The point methods of pasture analysis. *New Zealand J. of Agriculture*, **46** (1933).
- Lévy, P. Sur la division d'un segment par les points choisis au hasard. *Comptes Rendus*, Paris, **208** (1939), 147.
- Lidwell, O. M. A simple analysis of the effect of overcrowding on culture plates. *Spec. Rep. Ser. Med. Res. Com. London*. No. 262, 341—342.
- Lord, R. D. The distribution of distance in a hypersphere. *Ann. Math. Stat.*, **25** (1954), 794—798.
- Lyche, R. Tams. Die Ausdehnung des Schattens, der von einer homogener Kugelschar auf eine Ebene geworfen ist. *Norske Vid. Selsk., Forh.*, **4** (1931), 55—57.
- McCracken, D. D. The Monte Carlo Method. *Scientific American*, **192** (May 1955), 90—96.

- McIntyre, G. A. Estimation of plant density using line transects. *Ecology*, **41** (1953), 319—330.
- Mack, C. An exact formula for $Q_k(n)$, the probable number of k -aggregates in a random distribution of n points. *Phil. Mag.* (Seventh series), **39** (1948), 778—790.
- Mack, C. The expected number of aggregates in a random distribution of points. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **46** (1949), 285—292.
- Mack, C. The effect of overlapping in bacterial counts of incubated colonies. *Biometrika*, **40** (1953), 220—222.
- Mack, C. The expected number of clumps when convex laminae are placed at random and with random orientation on a plane area. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **50** (1954), 581—585.
- Mackenzie, J. K., and Thomson, M. J. Some statistics associated with the random disorientation of cubes. *Biometrika*, **44** (1957), 205—210.
- Mackenzie, J. K. Second paper on statistics associated with the random disorientation of cubes. *Biometrika*, **45** (1958), 229—240.
- Mackenzie, J. K. Sequential filling of a line by intervals placed at random and its application to linear adsorption. *J. Chemical Physics*, **37**, (1962), 723.
- Maníel, L. An extension of the Buffon needle problem. *Ann. Math. Stat.*, **22** (1951), 314—315; **24** (1953), 674—677.
- Mauldon, J. C. Random division of an interval. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **47** (1951), 331—336.
- Minkowski, H. Volumen und Oberfläche. *Math. Ann.*, **57** (1903), 447—495.
- Moore, P. G. Spacing in plant populations. *Ecology*, **35** (1954), 222—227.
- Moran, P. A. P. Measuring the surface area of a convex body. *Ann. of Math*, **45** (1944), 783—789.
- Moran, P. A. P. The random division of an interval. I. *J. Roy. Stat. Soc.*, Suppl., **9** (1947), 92—98. II. *Ibid.*, **B**, **13** (1951), 147—150. III. *Ibid.*, **B**, **15** (1953), 77—80.
- Moran, P. A. P. Numerical integration by systematic sampling. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **46** (1950), 111—115.
- Morgenthaler, G. W. Some circular coverage problems. *Biometrika*, **48** (1961), 313—324.
- Morisita, M. Estimation of population density by spacing method. *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*, ser. E, **1** (1954), 187—197.
- Oberg, E. N. Approximate formulas for the radii of circles which include a specified fraction of normal bivariate distribution. *Ann. Math. Stat.*, **18** (1947), 442—447.
- Olbers, W. Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraums. *Bode's Astronomische Jahrbuch* (1826), 110—121. (Edinburgh, *New Philosophical Journal*, **1** (1826), 141—150).
- Packham, G. H. Volume, weight, and number frequency analysis of sediments from thin section data. *J. Geology*, **63** (1955), 50—58.
- Page, E. S. The distribution of vacancies on a line. *J. Roy. Stat. Soc.*, (B), **21** (1959), 364—374.
- Pepper, E. D. On density distributions in stellar space. *Proc. London Math. Soc.* (2), **29** (1929), 98—110.

- Poincaré, H. *Calcul des Probabilités*. 2nd edn., Paris (1912).
- Pólya, G. Über geometrische Wahrscheinlichkeiten an konvexen Körpern. *Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig*, **69** (1917), 457—458.
- Pólya, G. Über geometrische Wahrscheinlichkeiten. *S-B. Akad. Wiss. Wien*, **126** (1917), 319—328.
- Pólya, G. *Arch. Math. Phys.*, **27** (1918), 135—142.
- Radhakrishna Rao, C. On the volume of a prismoid in n -space and some problems in continuous probability. *Math. Student*, **10** (1942), 68—74.
- Raimondi, E. On a problem of geometrical probabilities. *Revista Union Mat. Argentina*, **7** (1941), 106—109.
- Raimondi, E. On the pairs of secants of a polygon. *Revista Union Mat. Argentina*, **7** (1941), 133—134.
- Reid, W. P. Distribution of sizes of spheres in a solid from a study of slices of the solid. *J. Math. Phys.*, **34** (1955), 95—102.
- Rényi, A. On a new axiomatic theory of probability. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **6** (1955), 285—335.
- Rényi, A. On a one-dimensional problem concerning random place filling. (In Hungarian.) *Mag. Tud. Akad. Kül. Mat. Intézet Közleményei* (1958), 109—127.
- Rey Pastor, J., and Santaló Sors, L. A. *Geometria Integral*. Buenos Aires, 1951.
- Robbins, H. E. On the measure of a random set. I. *Ann. Math. Stat.*, **15** (1944), 70—74, *Ibid.*, **16** (1945), 342—347.
- Robbins, H. E. Acknowledgement of priority. *Ann. Math. Stat.*, **18** (1947), 297.
- Rosenfeld, M. A., Jacobson, L. and Ferm, J. C. A comparison of sieve and thin section technique for size analysis. *J. Geology*, **61** (1953), 114—132.
- Santaló, L. A. Sur quelques problèmes de probabilités géométriques. *Tohoku Math. J.*, **47** (1940), 159—171.
- Santaló, L. A. Integral geometry 31. On mean values and geometrical probabilities. *Abh. Math. Sem. Hansischen Univ.*, **13** (1940), 284—294.
- Santaló, L. A. Generalisation of a problem of geometrical probabilities. *Rev. Union Mat. Argentina*, **7** (1941), 129—132.
- Santaló, L. A. The mean value of the number of parts into which a convex domain is divided by n arbitrary straight lines. *Rev. Union Mat. Argentina*, **7** (1941), 33—37.
- Santaló, L. A. On the probable distribution of corpuscles in a body, derived from their distribution in its cross-sections, and similar problems. *Rev. Union Mat. Argentina*, **9** (1943), 145—164.
- Santaló, L. A. Mean value of the number of regions into which a body is divided by n arbitrary planes. *Rev. Union Mat. Argentina*, **10** (1945), 101—108.
- Santaló, L. A. Las probabilidades geométricas y la geometría integral. *Bol. Fac. Ingenieria Montevideo*, **3**, No. 1 (1945), 91—113.
- Santaló, L. A. On the length of a space curve as mean value of the length of its orthogonal projections. (In Spanish.) *Math. Notae*, **6** (1946), 158—166.

- Santaló, L. A. On the first two moments of the measure of a random set. *Ann. Math. Stat.*, 18 (1947), 37—49.
- Santaló, L. A. Probability in geometrical constructions. (In Spanish.) *An. Soc. Ci. Argentina*, 152 (1951), 203—229.
- Santaló, L. A. Introduction to Integral Geometry. *Actualités Scientifiques et Industrielles*, No. 1198. Hermann, Paris (1953).
- Santaló, L. A. Sobre la distribución de las tamaños de corpúsculas contenidos en un cuerpo a partir de la distribución en sus secciones a proyecciones. *Trabajos de Estadística* 6 (1955), 181—196.
- Scheil, E. Die Berechnung der Anzahl und Größenverteilung kugelförmiger Körpern mit Hilfe der durch ebenen Schnitt erhaltenen Schnittkreise. *Zeit. anorg. allgem. Chem.*, 201 (1931), 259—264.
- Serret, I. A. Sur un problème de calcul intégral. *Ann. Ecole norm.*, 6 (1869), 177—185.
- Shanks, R. E. Plotless sampling trials in Appalachian forest types. *Ecology*, 35 (1954), 237—244.
- Sibirani, F. Alcune probabilità geometriche. *Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna Cl. Sci. Fis.*, (10), 1 (1944), 113—123.
- Silberstein, L. Aggregates in random distributions of points. *Phil. Mag. (Series, 7)*, 36 (1945), 319—336.
- Skellam, J. G. The mathematical foundations underlying the use of line transects in animal ecology. *Biometrics*, 14 (1958), 385—400.
- Solomon, H. A coverage distribution. *Ann. Math. Stat.*, 21 (1950), 139—140.
- Solomon, H. Distribution of the measure of a random two-dimensional set. *Ann. Math. Stat.*, 24 (1953), 650—656.
- Steinhaus, H. *Akad. d. wiss. Leipzig, Ber.*, 82 (1930), 120—130.
- Stevens, W. L. Solution to a geometrical problem in probability. *Ann. Eugenics*, 9 (1939), 315—320.
- Sylvester, J. J. Report of the British Association, 35 (1865), 8—9.
- Sylvester, J. J. On Buffon's problem of the needle. *Acta Mathematica*, 14 (1891), 185—205.
- Takacs, L. On the probability distribution of the measure of the union of random sets placed in a Euclidean space. *Ann. Univ. Sci. Budapest, Eotvos Sect. Math.*, 1 (1958), 89—95.
- Thompson, H. R. Distribution of distance to n^{th} neighbour in a population of randomly distributed individuals. *Ecology*, 37 (1956), 391—394.
- Thompson, W. R. General aspects of projectometry. *Biometrika*, 24 (1932), 21—26.
- Titchmarsh, E. C. *Theory of Fourier Integrals*. Oxford (1937).
- Varga, O. Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum. *Math. Zeit.*, 40 (1936), 387—405.
- Ventikos, G. P. On the mean value of a straight segment in a plane convex region. *Bull. Soc. Math. Grèce*, 22 (1946), 195—197.
- Votaw, D. E. The probability distribution of the measure of a random linear set. *Ann. Math. Stat.*, 17 (1946), 240—244.
- Walsh, J. E. Optimum ammunition properties for salvos. *Operations Research*, 4 (1960), 204—212.
- Walters, A. G. The distribution of projected areas of fragments. *Proc. Cam. Phil. Soc.*, 43 (1947), 342—347.

- Watson, G. N. *Theory of Bessel Functions*. Cambridge (1944).
- Watson, G. N. Note 2871. A quadruple integral. *Math. Gazette*, 43 (1959), 280—283.
- Whittaker, E. T., and Watson, G. N. *A course of Modern Analysis*. Cambridge (1935).
- Whitworth, W. A. *Choice and Chance* (1901). Republished by Hafner, New York (1959).
- Wicksell, S. D. The corpuscle problem, Part I. *Biometrika*, 17 (1925), 84—99. Part II. *Ibid.*, 18 (1926), 151—172.
- Wolfowitz, J. The distribution of plane angles of contact. *Q. J. of Applied Math.*, 7 (1949), 117—120.
- Zubrzycki, S. Les inégalités entre les moments des variables aléatoires équivalentes. *Studia Math.*, 14 (1954), 232—242.

к 1-й статье Морана
(приложение к книге Кендалла и Морана
«Геометрические вероятности»)

- Ambartsumian, R. (1963) *Proceedings of the 7th All-Union Conference on Mathematical Statistics and Probability*, Tbilisi.
- Bankovi, G. (1962) On gaps generated by a random space filling procedure. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.* 7, 395—407.
- Barton, D. E. and David, F. N. (1961) The analysis of chromosome patterns in the normal cell. *Ann. Hum. Genet.* 25, 323—329.
- Barton, D. E. and David, F. N. (1962) Randomization bases for multivariate tests. I. The bivariate case. Randomness of N points in a plane. *Bull. Inst. Internat. Statist.*, 39, 2^e livraison, 455—463.
- Barton, D. E., and David, F. N. (1963) The analysis of chromosome patterns in the abnormal cell. *Ann. Hum. Genet.*, 26, 347—348.
- Barton, D. E., David, F. N. and Fix, E. (1963) Random points in a circle and the analysis of chromosome patterns, *Biometrika*, 50, 23—29.
- Barton, D. E., David, F. N. and Merrington, M. (1963) Numerical analysis of chromosome patterns. *Ann. Hum. Genet.*, 26, 349—353.
- Bernal, J. D. (1959) A geometrical approach to the structure of fluids. *Nature*, 183, 141—147.
- Bernal, J. D. (1960) Geometry of the structure of monatomic liquids. *Nature*, 185, 68—70.
- Bernal, J. D. (1964) The structure of liquids, *Proc. Roy. Soc. A.*, 280, 299—322.
- Bernal, J. D. and Mason, J. (1960) Coordination of randomly packed spheres. *Nature*, 188, 910—911.
- Blaschke, W. (1923) *Vorlesungen über Differential-geometrie. II. Affine. Differential-geometrie*. Springer, Berlin.
- Boerdijk, A. H. (1952) Some remarks concerning close packing of equal spheres. *Philips Research Reports*, 7, 303—313.
- Chayes, F. (1956) *Petrographic Model Analysis*. Wiley, New York.
- Chernoff, H. and Daly, J. F., (1957) The distribution of shadows. *J. Math. Mech.*, 6, 567—584.
- Corsini, S. (1955) A measure of the area of a homogeneous random surface in space. *Quart. Appl. Math.*, 12, 404—408.

- Cover, T. and Efron, B. The division of space by hyperplanes with applications to geometric probability. *Canad. J. Math.* (to appear).
- Coxeter, H. S. M. (1958) Close-packing and froth. *Illinois J. Math.*, **2**, 746—758.
- Coxeter, H. S. M. (1961) *An Introduction to Geometry*, Wiley. New York & London.
- Dalenius, T., Hájek, J. and Zubryzcki, S. (1961) On plane sampling and related geometrical problems. *Proc. Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, **1**, 125—150.
- Daniels, H. E. (1952) The covering circle of a sample from a circular distribution. *Biometrika*, **39**, 137—143.
- David, F. N. and Fix E. (1946) Intersections of random chords of a circle. *Biometrika*, **51**, 373—379.
- David, F. N. and Moore, P. T. (1957) A bivariate test for the clumping of supposedly random individuals. *Ann. Bot.*, **21** (N. S.), 315—320.
- de Bruin, N. G. (1965) Asymptotic distribution of lattice points in a rectangle. *SIAM Review.*, **7**, 274—275.
- Drápel, S., Horálek, V. and Reszny, Z. (1957) Quantitative metallographic lattice analysis. *Hutnické Listy*, **12**, 485—491.
- Dvoretzky, A. and Robbins, H. (1964) On the «parking» problem. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **9**, A, 209—226.
- Efron, B. (1965) The convex hull of a random set of points. *Biometrika*, **52**, 331—343.
- Efron, B. Gaussian distributions for random hyperplanes (to appear).
- Eggleton, P. and Kermack, W. O. (1944) A problem in the random distribution of particles. *Proc. Roy. Soc. Edin. A*, **62**, 103—115.
- Evans, U. R. (1945) The laws of expanding circles and spheres in relation to the lateral growth of surface films and the grain size of metals. *Trans. Faraday Soc.*, **41**, 365—374.
- Fairthorne, D. (1964) The distance between random points in two concentric circles. *Biometrika*, **51**, 275—277.
- Gilbert, E. N. (1962) Random subdivision of space into crystals. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 958—72.
- Gilbert, E. N. (1963) Random minimal trees. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **13**, 376—387.
- Gilbert, E. N. (1965) The probability of covering a sphere with n circular caps. *Biometrika*, **52**, 323—330.
- Griffiths, J. S. (1962) Packing of equal O -spheres. *Nature*, **196**, 764.
- Guter, R. S. (1964) On the problem of detecting a region by a linear search. *Theor. Probability Appl.*, **9**, 331—333.
- Gyachauskas, E. (1964a) Search by an oval, *Theor. Probability Appl.*, **9**, 634—637.
- Gyachauskas, E. (1964b) On statistical quadratures. *Theor. Probability Appl.*, **9**, 637—640.
- Hasofer, A. M. (1963). On the reliability of the point-counter method in petrography. *Aust. J. Appl. Sci.*, **14**, 168—179.
- Hawksley, P. G. W. (1954) Theory of particle sizing and counting by track scanning. *The Physics of Particle Size Analysis. Brit. Jour. Appl. Physics. Suppl. No. 3.*

- Higuti, U. (1961) A statistical study of random packing of unequal spheres. *Ann. Inst. Statist. Math.*, **12**, 257—271.
- Hogendijk, M. J. (1963) Random dense packing of spheres with a discrete distribution of the radii. *Phillips Research Reports*, **18**, 109—126.
- Holgate, P. (1965) Tests of randomness based on distance methods. *Biometrika*, **52**, 345—353.
- Holgate, P. (1965) The distance from a random point to the nearest point of a closely packed lattice. *Biometrika*, **52**, 261—263.
- Horowitz, M. (1965) Probability of random paths across elementary geometrical shapes. *J. Appl. Prob.*, **2**, 169—177.
- Jackson, J. L. and Montroll, E. W. (1958) Free radical statistics. *J. Chem. Phys.*, **28**, 1101—1109.
- Johnson, W. A. and Mehl, R. E. (1939) Reaction kinetics in processes of nucleation and growth. *Trans. Amer. Inst. Min. Met. Eng.*, **135**, 416—458.
- Kendall, M. G. and Moran, P. A. P. (1963) *Geometrical Probability. Griffin's Statistical Monographs and Courses. No. 5* London. C. Griffin.
- Keuls, M. Over, H. J. and de Wit, C. T. (1963) The distance method for estimating densities. *Stat. Neerl.*, **17**, 71—91.
- Kingman, J. F. C. (1965) Mean free paths in a convex reflecting region. *J. Appl. Prob.*, **2**, 162—168.
- Kosten, C. W. (1960) The mean free path in room acoustics. *Acustica*, **10**, 245—250.
- Krengel, U. A problem on random points in a triangle. *Amer. Math. Monthly* (to appear).
- Mannion, D. (1964) Random space-filling in one dimension. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **9** (A) 143—154.
- Matern, B. (1959) Några tillämpningar av teorin för geometriska sannolikheter. *Svenska skogsvårdsforeningens tidskr.*, **3**, 452—458.
- Matzke, E. B. (1950) In the twinkling of an eye. *Bull. Torrey Botanical Club*, **77**, 222—227.
- Meijering, J. L. (1953) Interface area, edge length, and number of vertices in crystal aggregates with random nucleation. *Phillips Research Reports.*, **8**, 270—290.
- Miles, R. E. A wide class of distributions in geometric probability (to appear).
- Miles, R. E. (1964a) Random polygons determined by random lines in a plane. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **52**, 902—907.
- Miles, R. E. (1964b) Random polygons determined by random lines in a plane. II. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **52**, 1157—1160.
- Miles, R. E. (1965) On random rotations in R^3 . *Biometrika*, **52**, 636—639.
- Miller, J. B. (1964) An integral equation from phytology. *J. Aust. Math. Soc.*, **4**, 397—402.
- Moon, J. W. (1965) On the distribution of crossings in random complete graphs. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **13**, 506—510.
- Moran, P. A. P. Measuring the length of a curve. *Biometrika* (to appear).

- Moran, P. A. P., Fazekas de St. Groth, S. (1962) Random circles on a sphere. *Biometrika*, **49**, 389—396.
- Mountford, M. D. (1961) On E. C. Pielou's Index of non-randomness. *J. Ecol.*, **49**, 271—275.
- Naus, J. I. (1965a) The distribution of the size of the maximum cluster of points on a line. *J. Amer. Statist. Ass.*, **60**, 523—538.
- Naus, J. I. (1965b) Clustering of random points in two dimensions. *Biometrika*, **52**, 263—267.
- Ney, P. E. (1962) A random interval filling problem. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 702—718.
- Palasti, I. (1960) On some random space filling problems. *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **5**, 353—360.
- Persson, O. (1964) Distance methods. *Studia Forestalia Suecica*, No. 15.
- Philip, J. The recovery of radial distributions. *Aust. J. Phys.* (to appear).
- Philip, J. Some integral equations in geometric probability. *Biometrika* (to appear).
- Philip, J. (1966) The distribution of foliage density with foliage angle estimated from inclined point quadrat observations. *Aust. J. Bot.*, **13**, 357—66.
- Philip, J. R. (1965) The distribution of foliage density on single plants. *Aust. J. Bot.*, **13**, 411—418.
- Phillips, J. W. (1954) Some fundamental aspects of particle counting and sizing by line scans. The Physics of Particles Size Analysis. *Brit. J. Appl. Physics. Suppl.* No. 3.
- Rényi, A. and Sulanke, R. (1963) Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **2**, 75—84.
- Rényi, A., and Sulanke, R. (1964) Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **3**, 138—147.
- Richards, R. I. (1964) Averages for polygons formed by random lines. *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **52**, 1160—1164.
- Russell, A. M. and Josephson, N. S. (1965) Measurement of area by counting. *J. Appl. Prob.*, **2**, 339—351.
- Scott, G. D. (1962) Radial distribution of the random close packing of equal spheres. *Nature*, **194**, 956—958.
- Silverman, D. L. (1964) Problem E1658. *Amer. Math. Monthly*, **71**, 1135—1136.
- Smalley, I. J. (1962) Packing of O -spheres. *Nature*, **194**, 1271.
- Smith, C. A. B. (1957) Relazione fra i valori reali e quelli osservati di cellule a forma di sferoide. *La Ricerca Scientifica*. Supplemento, **27**.
- Smith, C. S. (1952) Grain shape and other metallurgical applications of topology. Metal Interfaces. *Amer. Soc. for Metals, Cleveland* 65—108.
- Smith, C. S. (1953) Further notes on the shape of metal grains: space-filling polyhedra with unlimited sharing of corners and faces. *Acta Metallurgica*, **1**, 259—300.
- Smith, C. S. and Guttman, L. (1953) Measurement of internal boundaries in three dimensional structure by random sectioning. *J. Metals*, **5**, 81—87.

- Solomon, H. (1966) Random packing density. *Proc. Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. University of California Press (to appear).
- Ulam, S. (1961) Monte Carlo calculations in problems of mathematical physics. *Modern Mathematics for the Engineer* (ed. E. F. Beckenbach). Second Series. McGraw Hill.
- Warren, W. G. (1962) Contributions to the Study of Spatial Processes. Ph. D. Thesis Univ. of North Carolina.
- Warren Wilson, J. (1960) Inclined point quadrats. *New Phytologist*, **59**, 1—8.
- Wendel, J. G. (1962) A problem in geometric probability. *Math. Scand.*, **11**, 109—111.
- Wise, M. E. (1952) Dense random packing of unequal spheres. *Philips Research Reports*, **7**, 321—343.
- Wright, G. H. (1954) A geometrical factor in the variability of sensations of warmth evoked by radiation. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **50**, 474—484.
- Yerazunis, S., Cornell, S. W. and Wintner, B. (1965) Dense random packing of binary mixtures of spheres. *Nature*, **207**, 835—837.

ко 2-й статье Морана*)
(приложение к книге Кендалла и Морана
«Геометрические вероятности»)

(A)

- Gilbert, E. N. (1962) Random subdivision of space into crystals. *Ann. Math. Statist.*, **33**, 958—972.
- Kendall, M. G. and Moran, P. A. P. (1963) *Geometrical Probability*. Griffin's Statistical Monographs and Courses. No. 5. C. Griffin, London.
- Meijering, J. L. (1953) Interface area, edge length, and number of vertices in crystal aggregates with random nucleation. *Philips Research Reports*, **8**, 270—290.
- Rényi, A. and Sulanke, R. (1964) Über die konvexe Hülle von n zufällig gewählten Punkten. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie*, **2**, 75—84.
- Solomon, H. (1967) Random packing density. *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. and Prob.* Vol. III. 119—134. University of California Press.

(B)

- Ailam, G. (1966) Moments of coverage and coverage spaces. *J. Appl. Prob.*, **3**, 550—555.
- Ailam, G. (1968) On probability properties of measures of random sets and the asymptotic behaviour of empirical distribution functions. *J. Appl. Prob.*, **5**, 196—202.

*) Библиография делится на две части. Первая (A) содержит ссылки на работы, которые упоминались в настоящем обзоре и которые имелись в двух предыдущих библиографиях. Вторая часть (B) содержит 105 ссылок, которые либо появились после выхода первых библиографий, либо не были в них учтены. Сюда входят несколько работ, ссылки на которые были неполными.

- Backman, A. (1934) Bestämning av cellulosahalten i papper genom mätning av filbertätheten. *Pappers och Trävarutidskrift för Finland*, **16**, 302—308.
- Barlett, M. S. (1964) A note on spatial patterns. *Biometrics*, **20**, 891—892.
- Barton, D. E., David, F. N., Fix, E. and Merrington, M. (1967) A review of analysis of karyographs of the human cell in mitosis. *Proc. Fifth Berkeley Sump. Math. Statist. and Prob.* Vol. IV, 349—366. University of California Press.
- Bauersachs, F. (1942) Bestandesmassenaufnahme nach dem Mitfelstammverfahren des zweitkleinsten Stammabstandes. *Forstw. Zentralblatt*, **64**, 182—186.
- Boursin, J. L. (1964) Sur quelques problèmes de géométrie aléatoire. *Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse* (4), **28**, 9—100.
- Boursin, J. L. (1966) Etude d'ovales en probabilité géométrique. *International Congress of Mathematicians*, Moscow. Section 11, 6.
- Corrsin, S. and Phillips, O. M. (1961) Contour length and surface area of multiple valued random variables. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **9**, 395—404.
- Corte, H. K. and Lloyd, E. H. (1965) Fluid flow through paper and sheet structure. «Consolidation of the Paper Web». *Transactions of the Cambridge Symposium 1965*. British Paper and Board Makers Association, London.
- Cover, T. (1965) Geometrical and statistical properties of systems of linear inequalities with applications to pattern recognition. *Trans. Elect. Comp. IEEE*. **EC-14**, 326—334.
- Cover, T. M. and Efron, B. (1967) Geometrical probability and random points on a hypersphere. *Ann. Math. Statist.*, **38**, 212—220.
- Cross, C. A. and Fisher, D. L. (1968) The computer simulation of lunar craters. *Monthly Not. R. Astr. Soc.*, **139**, 261—272.
- de Rennae Souza, C. (1967) Two dimensional collision in parallel paths. *Operat. Res.*, **15**, 32—38.
- Dobo, A. and Szajcz, S. (1965) On problems of random placement. *Magy. Tud. Akad. Mat. Fiz. Oszt. Közl.*, **15**, 389—409.
- Drapal, S. and Horalek, V. (1959) Some relations between parameters of structure in the plane of metallographic specimen surface and in the space of metal specimen. *Acta Tech.*, **6** (in English).
- Duncan, R. L. (1967) A variation of the Buffon needle problem. *Math. Mag.*, **40**, 36—38.
- Essed, F. E. (1956) A quick, simple and at the same time accurate method for estimating the total volume and the incremental percent of evenaged stands. *Indian Forester*, **82**, 260—263.
- Finney, J. L. and Bernal, J. D. (1967) Random close packing and the heats of fusion of simple liquids. *Nature*, **213**, 1079—1082.
- Garwood, F. and Holroyd, E. M. (1966) The distance of a «random chord» of a circle from the centre. *Math. Gaz.*, **50**, 283—286.
- Geffroy, J. (1959) Contribution a la théorie des valeurs extrêmes. II. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, **8**, 3—65.
- Geffroy, J. (1961) Localisation asymptotique du polyèdre d'appui d'un échantillon Laplacien à k dimensions. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **10**, 213—218.

- Geffroy, J. (1964) Sur un problème d'estimation géométrique. *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris*, **13**, 191—210.
- Gilbert, E. N. (1961) Random plane networks. *J. Soc. Indust. Appl. Math.*, **9**, 533—543.
- Gilliland, D. C. (1966) Some bombing problems. *Amer. Math. Monthly*, **73**, 713—716.
- Gjajauskas, E. (1965) On linear and plane searches. *Litovsk. Mat. Sb.*, **5**, 227—231.
- Gjajauskas, E. (1966a) Uniform scan in space. *Litovsk. Mat. Sb.*, **6**, 37—40.
- Gjajauskas, E. P. (1966b) Distribution of the distance between two points in an oval. *Litovsk. Mat. Sb.*, **6**, 245—248.
- Halperin, M. (1960) Some asymptotic results for a coverage problem. *Ann. Math. Statist.*, **31**, 1063—1076.
- Hemmer, P. C. (1959) A problem of geometrical probabilities. *Det. Kong. Nors. Vid. Selsk. Forh. Trondheim*, **32**, 117—120.
- Hilliard, J. E. (1962a) The counting and sizing of particles in transmission microscopy. *Trans. Metallurgical Soc. A. I. M. E.*, **224**, 906—117.
- Hilliard, J. E. (1962b) Specification and measurement of microstructural anisotropy. *Trans. Metallurgical Soc. A. I. M. E.*, **224**, 1201—1211.
- Hlawka, E. (1950) Über Integrale auf konvexen Körpern. I. *Monatsh. Math.* **54**, 1—36.
- Holgate, P. (1967) The angle-count method. *Biometrika*, **54**, 615—623.
- Kallmes, O. and Corte, H. (1960) The structure of paper. I. The statistical geometry of an ideal two dimensional fiber network. *Tappi*, **43**, 737—752. (errata, **44**, 448).
- Kane, M. W. (1956) The determination of average fibre length. *Tappi*, **39**, 478—480.
- Kelvin, Lord (Sir W. Thompson) (1887) On the division of space with minimal partitional area. *Phil. Mag.* 5th series, **24**, 503—514. (Reprinted in *Acta Math.*, **11**, (1888) 121—134).
- Kiang, T. (1966) Random fragmentation in two and three dimensions. *Z. Astrophys.*, **64**, 433—439.
- Kilpper, W. (1949) Entwicklung einer Schnellmethode zur Bestimmung der Faserlänge von Fasergemischen für betriebliche Zwecke. *Wochenblatt für Papierfabrikation*, **75**, 160—164.
- Krengel, U. (1967) A problem on random points in a triangle. *Amer. Math. Monthly*, **74**, 8—14.
- Kuusela, K. (1966) A basal mean area tree method in forest inventory. *Comm. Inst. For. Fenn.*, **61**, No. 2.
- Lukasiewicz, J. (1967) Obituary notice. J. Perkal. *Colloq. Math.* **17**, 147—159.
- Mack, C. (1956) On clumps formed when convex laminae are placed at random in two or three dimensions. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **52**, 246—250.
- Marks, E. S. (1948) A lower bound for the expected travel among m random points. *Ann. Math. Statist.*, **19**, 419—422.

- Masuyama, M. (1953) A rapid method of estimating basal area in timber survey — an application of integral geometry to areal sampling problems. *Sankhya*, 12, 291—302.
- Masuyama, M. and Sengupta, J. M. (1955) On a bias a crop-cutting experiment (application of integral geometry to areal sampling problems — part V). *Sankhya*, 15, 373—376.
- Matern, B. (1964) A method of estimating the total lengths of roads by means of a line survey. *Studia Forestalia Suecica*, 18, 68—70. (Appendix to von Segebaden (1964)).
- Matern, B. On the geometry of the cross-section of a stem. *Meddelanden fran statens skogsforskningsinstitut*, 46, No. 11.
- Matern, B. Maximum distance between the seedlings in scarified spots. *Meddelanden fran statens skogsforskningsinstitut*, 52, No. 4, 237—239, 259—261.
- Matern, B. and Persson, O. (1965) On the extremum properties of the equilateral triangular lattice and the regular hexagonal network. *Research Note No. 7*. Dept of Forest Biometry, Royal College of Forestry, Stockholm.
- Matzke, E. B. (1945) The three dimensional shapes of bubbles in foams. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 31, 281—289.
- Matzke, E. B. (1946) The three dimensional shape of bubbles in foam — an analysis of the role of surface forces in three dimensional cell shape determination. *Amer. J. Bot.*, 33, 58—80.
- Matzke, E. B. and Nestler, J. (1946) Volume-shape relationships in variant foams. A further study of the role of surface forces in three dimensional cell shape determination. *Amer. J. Bot.*, 33, 130—144.
- Melhuish, F. M. and Lang, A. R. G. (1968) Length and diameters of cotton roots in a clay-loam soil by analysis of surface-ground blocks of resin-impregnated soil. *Soil Science*, 106, 16—22.
- Miles, R. E. (1969) Poisson flats in Euclidean space. *Adv. Appl. Prob.*, 1 (to appear).
- Miller, J. B. (1967) A formula for average foliage density. *Aust. J. Bot.*, 15, 141—144.
- Moran, P. A. P. (1968) Statistical theory of a high-speed photoelectric planimeter. *Biometrika*, 55, 419—422.
- Moran, P. A. P. (1966) A note on recent research in geometric probability. *J. Appl. Prob.*, 3, 453—463.
- Morisita, M. (1957) A new method for the estimation of density by the spacing method applicable to non-randomly distributed populations. *Physiology and Ecology*, 7, 134—144.
- Morton, R. R. A. (1966) The expected number and angle of intersections between random curves in a plane. *J. Appl. Prob.*, 3, 559—562.
- Morton, V. M. (1967) The determination of angular distribution of planes in space. *Proc. Roy. Soc. (A)*, 302, 51—68.
- Newman, E. I. (1966) A method of estimating the total length of root in a sample. *J. Appl. Ecol.*, 3, 139—145.
- Ogston, A. G. (1959) The spaces in a uniform random suspension of fibres. *Faraday Soc.*, 54, 1754—1757.
- Ohtomo, E. (1966) A study on angle count method. *Proc. Inst. Statist. Math.* 14, 3—15.

- Olson, F. C. W. (1950) Quantitative estimates of filamentous algae. *Trans. Amer. Micros. Soc.*, 69, 272—279.
- Persson, O. (1965) Distance Methods. II. *Research Note No. 6*. Dept Forest Biometry, Royal College of Forestry, Stockholm.
- Philip, J. R. (1966) The use of poin quadrats, with special reference to stem-like organs. *Aust. J. Bot.*, 14, 105—125.
- Pielou, E. C. (1959) The use of plant-to-plant distances in the study of pattern of plant populations. *J. Ecology*, 47, 603—613.
- Pielou, E. C. (1960) A single mechanism to account for regular random and aggregated populations. *J. Ecology*, 48, 575—584.
- Pielou, E. C. (1964) The spatial pattern of two-phase patchworks of vegetation. *Biometrics*, 20, 156—167.
- Raynaud, H. (1965) Sur le comportement asymptotique de l'enveloppe convexe d'une image de points tirés au hasard dans R^h . *C. R. Acad. Sci. Paris*, 261, 627—629.
- Rényi, A. and Sulanke, R. (1968) Zufällige konvexe Polygone in einem Ringgebiet. *Z. Wahrscheinlichkeitst.*, 9, 146—157.
- Roberts, F. D. K. (1967) A Monte Carlo solution of a two-dimensional unstructured cluster problem. *Biometrika*, 54, 625—628.
- Roberts, F. D. K. (1968) Random minimal trees. *Biometrika*, 55, 255—258.
- Roberts, F. D. K. and Storey, S. H. (1968) A three dimensional cluster problem. *Biometrika*, 55, 258—260.
- Russel, A. M. (1956) Statistical approach to spatial measurement. *Amer. J. Phys.*, 24, 562—567.
- Santaló, L. A. (1936a) Integralgeometrie. 5. Über das kinematische Mass im Raum. *Actuutilitès Sci. Indust.* No. 357. Hermann, Paris.
- Santaló, L. A. (1936b) A problem requiring geometric probability. *Rev. Mat. Hisp.-Amer.* (2), 11, 87—97 (Spanish).
- Santaló, L. A. (1936c) Integral geometry 4. On the kinematic measure in the plane. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 11, 222—236.
- Santaló, L. A. (1936d) Integral geometry 7. New applications of the concept of kinematic measure in the plane and in space. *Rev. Acad. Ci. Madrid*, 33, 451—477, 481—504 (Spanish).
- Santaló, L. A. (1937) Integral geometry 15. Fundamental formulae for kinematic measure for cylinders and parallel planes. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 12 (Spanish).
- Santaló, L. A. (1939) Integral geometry of unbounded figures. *Publ. Inst. Mat. Univ. Nac. Litoral*, 1, No. 2 50 pp. (Spanish).
- Santaló, L. A. (1940a) Integral geometry 32. Some integral formulae in the plane and in space. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 13, 344—356. (Frensh).
- Santaló, L. A. (1940b). Integral geometry 31. On mean values and geometric probabilities. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 13, 284—294 (Spanish).
- Santaló, L. A. (1941) A system of mean values in the theory of geometric probabilities. *Rev. Ci. Lima*, 43, 147—154 (Spanish).
- Santaló, L. A. (1948) Sobre la distribución de planos en el espacio. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 13, 120—124.

- Santaló, L. A. (1950) On some integral formulae and mean values concerning movable convex figures in the plane. *Univ. Buenos Aires. Contrib. Ci. Ser. A*, **1**, 23—45. (Spanish).
- Santaló, L. A. (1952) Some mean values on the hemisphere. *Math. Notae* **12—13**, 32—37.
- Santaló, L. A. (1966) Valores medios para poligonos formados por rectas al azar en el plano hiperbolico. *Universidad Nat. de Tucuman. Revista Ser. A*, **16**, 29—43.
- Schmidt, W. M. (1968) Some results in probabilistic geometry. *Z. Wahrscheinlichkeitsths.*, **9**, 158—162.
- Scriven, R. A. and Williams, H. D. (1965) The derivation of angular distributions of planes by sectioning methods. *Trans. Metall. Soc. A. I. M. E.*, **233**, 1593—1602.
- Stoffels, A. (1955) Die Genauigkeit der Bestimmung der Stammzahl pro Hektar durch Messung von Stammabständen. *Forstw. Zentralblatt*, **74**, 211—218.
- Stoka, M. L. (1967) *Geometrie Integrala*, Editure Acad. Repub. Soc. Romania.
- Strand, L. (1954) Mål for forderlingen av individuer over ett område. *Medd. fra det norske skogsforsoksvesen*, **12**, 191—207.
- Sulanke, R. (1961) Der Verteilung der Sehnenlängen an ebenen und räumlichen Figuren. *Math. Nachr.*, **23**, 51—74.
- Sulanke, R. (1965) Schnittpunkte zufälliger Geraden. *Arch. Math.*, **16**, 320. 324.
- Sutherland, D. N. (1966) Comments on Vold's simulation of floc formation. *J. Colloid Interface Science*, **22**, 300—302.
- Sutherland, D. N. (1967) A theoretical model of floc structure. *J. Colloid Interface Science*, **25**, 373—380.
- Switzer, P. (1967) Reconstructing patterns from sample data. *Ann. Math. Statist.*, **38**, 138—154.
- Switzer, P. (1965) A random set process in the plane with a Markovian property. *Ann. Math. Statist.*, **36**, 1859—1863.
- Vold, M. J. (1963) Computer simulation of floc formation in a colloidal suspension. *J. Colloid. Sci.*, **18**, 684—695.
- von Segebaden, G. (1964) Studies of cross country transport distances and road net extension. *Studia Forestalia Suecia*. No. **18** Stockholm.
- Warren Wilson, J. (1963) Estimation of foliage denseness and foliage angle by inclined point quadrats. *Aust. J. Bot.*, **11**, 95—105.
- Warren Wilson, J. (1965) Point quadrat analysis of foliage distribution for plants growing singly or in rows. *Aust. J. Bot.*, **13**, 405—409.
- Williams, R. E. (1968) Space-filling polyhedron: its relation to aggregates of soap bubbles, plant cells, and metal crystalites. *Science*, **161**, 276—277.