АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Г. КИРХГОФ

МЕХАНИКА

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

*

ПЕРЕВОД С ЧЕТВЕРТОГО НЕМЕЦКОГО ИЗДАНИЯ
ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. Т. ГРИГОРЬЯНА и Л. С. ПОЛАКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва 1962

Лекции по механике Г. Кирхгофа (1824—1887) являются одним из классических произведений, посвященных теоретической механике. Несмотря на то, что эта книга была впервые издана почти 90 лет назад, своеобразный подход автора к проблеме основ механики и широкий охват материала делают ее интересной и полезной и в настоящее время. Поэтому при переводе представлялось существенно важным по возможности сохранить стиль и характер книги, что заставило сохранить некоторые из тех терминов и выражений, которые устарели или не привились в науке. Так как книга вследствие своей трудности и сжатости изложения доступна лишь для читателей, уже достаточно сведущих в механике, и отнюдь не может служить для первоначального изучения механики, то пояснительные примечания даны только в тех случаях, когда это казалось существенно необходимым. В книге не приводятся указания на современное состояние проблем, разбираемых в лекциях, так как это значительно увеличило бы размер книги и могло бы изменить ее характер.

В конце книги приведены краткий биографический очерк Г. Кирхгофа, примечания и библиография его научных трудов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Публикуемые лекции содержат почти всю область *чистой механики*, т. е. учения о тех явлениях, при рассмотрении которых имеют в виду исключительно *движение*, как, например, движение материальной точки, неизменяемых жидких или упругих твердых тел. Мы исходим из предположения, что материя непрерывно заполняет пространство, и не касаемся никаких теорий, основывающихся на молекулярной гипотезе.

В настоящих лекциях исходное положение — определение механики,— отличается от общепринятого. Обычно механику определяют как науку о *силах*, и силы рассматривают как *причины*, которые или производят движение или *стремятся* его произвести. Несомненно, что это определение оказалось чрезвычайно полезным при развитии механики; оно полезно и при изучении этой науки, когда она поясняется примерами сил, взятыми из опыта обыденной жизни. Однако это определение приводит ко многим неясностям, от которых не могут освободиться понятия причины и цели. Эти неясности проявляются, например, в различии взглядов на то, можно ли законы инерции и параллелограмма сил рассматривать как результаты опыта (как аксиомы) или как законы, которые могут и должны быть логически доказаны. По моему мнению, желательно, при той строгости, которую, вообще говоря, допускает механика, удалить подобные неясности, даже если бы пришлось ограничить при этом задачу механики. Исходя из этого, я считаю, что задача механики сводится к описанию происходящих в природе движений, а именно, к описанию их в наиболее полном и простом виде. Я хочу этим сказать, что все сводится только к тому, чтобы раскрыть происходящие явления, а не к тому, чтобы доискиваться их *причин*. Если мы будем исходить из этого воззрения и введем представления о пространстве, времени и материи, то чисто математическим путем придем к общим уравнениям механики. Но при этом нам не обойтись без понятия силы, которому мы не в состоянии дать исчерпывающее определение. Однако эта неполнота определения понятия силы не приводит к неясности. В самом деле, введение сил является здесь только средством упростить изложение, а именно, выразить в кратких словах уравнения, которые без этого термина трудно поддаются словесному выражению. Чтобы устранить всякую неясность, достаточно так определить силу, чтобы каждое предложение механики, в котором идет речь о силах, могло быть выражено уравнениями; это и будет иметь место при избранном нами методе изложения.

При большом количестве материала, помещенном в относительно малом объеме книги, нельзя ожидать, чтобы предмет механики был исчерпан; желательно только, чтобы выбранный метод был признан целесообразным.

Берлин, январь 1876 г.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание моих лекций по механике, которое вышло в относительно короткое время после выхода первого, есть перепечатка без существенных изменений первого издания. Были исправлены только некоторые незначительные промахи, которые встречаются в первом издании и частью были указаны моими учеными друзьями.

Берлин, ноябрь 1876 г.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Третье издание этой книги также есть простая перепечатка прежних; я постарался только исправить небольшие ошибки и недостатки, которые там имелись.

Берлин, сентябрь 1883 г.

Автор

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Четвертое издание механики Кирхгофа,— первое, которое автор уже не мог обработать сам. Естественно, что в произведении столь выдающейся оригинальности никакие существенные изменения не должны были быть допущены. Поэтому я ограничился здесь лишь несущественными исправлениями, которые частично были указаны мне коллегами, частично же были намечены в рукописи, оставленной автором. Все изменения против третьего издания даны в примечаниях.

Аахен, январь 1897 г.

В. Вин.

ЛЕКЦИЯ ПЕРВАЯ

(Задача механики. Определение материальной точки. Скорость. Ускорение или ускоряющая сила. Движение тяжелой точки. Движение планеты вокруг Солнца. Правила параллелограмма сил. Дифференциальные уравнения задачи трех тел)

§ 1

Механика есть наука о движении; мы охарактеризуем ее задачу так: описать *полно* и *простейшим образом* происходящее в природе движение.

Движение — это изменение положения со временем; то, что движется, есть материя. Для понимания движения необходимы и достаточны представления о пространстве, времени и материи. Опираясь на эти представления, механика должна стремиться достигнуть своей цели и создать необходимые ей вспомогательные понятия, например понятия силы и массы.

Описание движения должно быть *полным*. Значение этого требования совершенно ясно: не должно быть ни одного вопроса, относящегося к движению, который остался бы без ответа. Не столь ясно значение второго требования, состоящего в том, что описание должно быть *простейшим*. Здесь, возможно, возникнет сомнение, какое же из описаний известного явления будет проще; мыслимо также, что какое-нибудь описание некоторого явления, которое в данный момент является простейшим, впоследствии, при дальнейшем развитии знаний, будет заменено еще более простым. История механики дает тому многочисленные примеры.

§ 2

Движение тела, т. е. части материи, всегда представляется нам очень сложным явлением. Брошенное твердое тело вращается во время своего движения то в одном, то в другом направлении; жидкость, выливаемая из сосуда, меняет свою форму во время падения самыми разнообразными способами. Такие вращения или изменения формы происходят при всяком движении тела, но в менее резком виде. Мы начнем с рассмотрения простейшего случая, когда все размеры тела *бесконечно малы*; такое тело называется *материальной точкой*.

Материальная точка также будет, вообще говоря, во время движения вращаться и изменять свою форму; при этом, так как она бесконечно мала, то ее положение в каждый момент можно обозначать геометрической точкой. Мы ограничимся тем, что будем исследовать изменение ее положения, оставляя без рассмотрения ее вращение и изменение формы.

Обозначим через x, y, z координаты некоторой материальной точки в ее движении, отнесенном к некоторой неизменяемой прямоугольной системе координат, в момент времени t. Тогда x, y, z будут функциями t и притом функциями однозначными и непрерывными для всего промежутка времени t, соответствующего продолжительности движения. Если они заданы, то и движение, подлежащее рассмотрению, будет вполне определено. Эти функции зависят от выбранной системы координат. Введем другую также прямоугольную и неизменяемую систему координат, и в этой системе обозначим через x', y', z' координаты точки, которые раньше были обозначены через x, y, z; тогда, как известно, будет

$$\begin{aligned} x' &= a + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ y' &= b + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ z' &= c + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \tag{1}$$

где $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ — постоянные величины, зависящие от взаимного расположения обеих систем; здесь a, b, c — значения x', y', z' при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, и

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \cos(x', x), \quad \alpha_2 = \cos(x', y), \quad \alpha_3 = \cos(x', z), \\ &\beta_1 = \cos(y', x), \quad \beta_2 = \cos(y', y), \quad \beta_3 = \cos(y', z), \\ &\gamma_1 = \cos(z', x), \quad \gamma_2 = \cos(z', y), \quad \gamma_3 = \cos(z', z), \end{aligned} \tag{2}$$

где (x', x) — любой из двух дополнительных до 2π углов, которые образуют между собой направления осей x и x'; остальные обозначения аналогичны.

§ 3

Движение точки может быть описано также другими способами, менее непосредственными, но часто более простыми, чем изложенный. Это достигается заданием значений x, y, z для *некоторого* значения t, например для $t = 0$, и значений $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ для всех t. При этом производные могут быть заданы как функции t, или как функции x, y, z, или в самом общем случае как функции x, y, z и t; каждый раз, однако, эти функции должны быть однозначны для всех систем значений, принимаемых аргументами при движении точки. Пусть при $t = 0$

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0.$$

и для любого t

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w, \tag{3}$$

где x_0, y_0, z_0 — данные постоянные; u, v, w — данные функции x, y, z и t; тогда x, y, z будут, вообще говоря, однозначно определены для каждого значения t, как это следует из теории дифференциальных уравнений. Чтобы найти x, y, z, надо интегрировать дифференциальные уравнения (3) и получающиеся при этом три произвольные постоянные определить из условий при $t = 0$.

Определенные из уравнений (3) величины u, v, w называются *компонентами скорости* точки по осям x, y, z для времени t. Сама скорость получает при этом определенную величину и направление. Чтобы найти ее, будем рассматривать u, v, w как прямоугольные координаты точки относительно некоторой системы координат, начало которой произвольно, а оси соответственно параллельны осям x, y, z. Тогда направление скорости есть направление прямой, идущей от начала этой новой системы координат до точки (u, v, w), а величина скорости — длина прямой. Эти определения равнозначны следующим: величина скорости равна положительному значению корня

$$\sqrt{u^2+v^2+w^2},$$

а ее направление есть направление линии, образующей с осями координат углы, косинусы которых суть

$$\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}, \quad \frac{w}{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}. \tag{4}$$

Легко видеть, что скорость точки зависит единственно от ее движения, но не от системы координат, выбранной для его исследования. Можно убедиться в справедливости этого утверждения, если одно и то же движение отнести сначала к одной, а потом к другой системе координат и в обоих случаях найти скорость согласно установленному определению.

Пусть в новой системе x', y'; z' — координаты той точки, которая в старой системе имела координаты x, y, z; тогда эти величины связаны уравнениями (1). Дифференцируя эти уравнения и обозначая, по аналогии с (3),

$$\frac{dx'}{dt} = u', \quad \frac{dy'}{dt} = v', \quad \frac{dz'}{dt} = w',$$

где u', v', w' — компоненты скорости точки по осям x', y', z', получим:

$$u' = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w,$$
$$v' = \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w,$$
$$w' = \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w.$$

Эти уравнения показывают, что u, v, w и u', v', w' — координаты одной и той же точки в двух системах координат, имеющих общее начало, причем в одной системе они параллельны осям x, y, z, а в другой — осям x', y', z'. Прямая линия, проведенная из общего начала в эту точку, определяет по величине и направлению скорость, о которой идет речь; при этом безразлично, пользоваться ли системой координат x, y, z, или x', y', z'.

Обозначим через ds бесконечно малый линейный элемент, который точка проходит в бесконечно малый промежуток времени; тогда

$$\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2} = ds$$

и, следовательно,

$$\sqrt{u^2+v^2+w^2} = \frac{ds}{dt},$$

т. е. величина скорости равна бесконечно малому линейному элементу, который точка проходит в некоторый элемент времени, деленному на этот элемент. Введя ds, выразим через $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ данные в (4) косинусы углов, образуемых направлением скорости с осями координат; тогда получим косинусы углов, образуемых с осями координат касательной к траектории, проведенной в точке (x, y, z) в направлении движения точки. Таким образом, направление этой касательной и есть направление скорости.

Простейшим случаем движения будет такой, когда u, v, w постоянны. При этом интегрирование дифференциальных уравнений (3) даст

$$x = x_0 + ut, \quad y = y_0 + vt, \quad z = z_0 + wt.$$

В этом случае траектория есть прямая, уравнения которой

$$\frac{x-x_0}{u}=\frac{y-y_0}{v}=\frac{z-z_0}{w},$$

т. е. прямая, проведенная в направлении постоянной скорости через точку (x_0, y_0, z_0). Такое движение точки называется равномерным.

§ 4

Движение материальной точки, вообще говоря, также вполне определено, если для $t=0$ заданы положение и скорость, а для каждого значения t — значения производных $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$. Пусть для $t=0$

$$x=x_0, \quad y=y_0, \quad z=z_0,$$

$$\frac{dx}{dt}=u_0, \quad \frac{dy}{dt}=v_0, \quad \frac{dz}{dt}=w_0,$$

и для любого t

$$\frac{d^2x}{dt^2}=X, \quad \frac{d^2y}{dt^2}=Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2}=Z, \tag{5}$$

где величины с индексом 0 суть постоянные, а X, Y, Z обозначают данные функции от x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ и t, однозначные для всякой системы значений аргументов.

Интегрируя дифференциальные уравнения (5) и выбрав вводимые при этом шесть произвольных постоянных так, чтобы были удовлетворены условия при $t=0$, мы найдем x, y, z как функции от t. Определяемые из уравнений (5) величины X, Y, Z называются *компонентами* по осям координат *ускорения* точки или *ускоряющей силы*, действующей на точку.

Выражения «ускорение» и «ускоряющая сила» будем сначала считать вполне равнозначными и пользоваться при описании движения то одним, то другим. До введения так называемой движущей силы для краткости будем опускать слово «ускоряющая», постоянно подразумевая его.

Ускорение имеет величину и направление; его величина равна

$$\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

а направление образует с осями координат углы, косинусы которых суть

$$\frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}.$$

Другими словами: если рассматривать X, Y, Z как прямоугольные координаты некоторой точки в системе координат, оси которой параллельны осям x, y, z, то длина прямой, проведенной из начала координат в эту точку, определит величину, а направление ее — направление ускорения.

Данное определение ускорения вполне соответствует введенному в предыдущем параграфе для скорости. К этому можно добавить исследование, подобное проведенному в § 3. Наряду с системой координат x, y, z введем систему x', y', z'. Дифференцируя дважды уравнения (1), которые здесь опять имеют место, найдем:

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \alpha_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2z}{dt^2},$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = \beta_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2z}{dt^2}, \tag{6}$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = \gamma_1 \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2y}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2z}{dt^2},$$

или, при помощи уравнений (5) и им соответственных со штрихами, получим:

$$X' = \alpha_1 X + \alpha_2 Y + \alpha_3 Z,$$

$$Y' = \beta_1 X + \beta_2 Y + \beta_3 Z, \tag{7}$$

$$Z' = \gamma_1 X + \gamma_2 Y + \gamma_3 Z.$$

Отсюда следует, что величина и направление ускорения, так же как величина и направление скорости, не зависят от системы координат, к которой отнесено движение.

В этом параграфе, подобно предыдущему, мы ввели первые и вторые производные координат движущейся точки по времени; но мы могли бы ввести производную третьего и более высоких порядков. Однако опытом установлено, что представление встречающихся в природе движений не выиграло бы от этого в простоте, а напротив, проиграло бы. Причина этого заключается в том, что, как можно заключить из наблюдений, во всех встречающихся движениях вторые производные координат материальной точки по времени сами есть функции только координат и не зависят от начальных значений координат и компонент скоростей.

§ 5

На основании введенных определений мы в состоянии теперь очень простым способом и с большой степенью точности провести описание одного класса движений, происходящих на Земле, а именно, движения падающих и брошенных тел, поскольку они могут быть рассматриваемы как материальные точки и размеры их траекторий малы по сравнению с размерами Земли, а влияние воздуха, как и движение Земли, незаметно. При этих условиях названное движение может быть описано с помощью следующего утверждения: на тело действует направленная по вертикали вниз постоянная сила, называемая *силой тяжести.*

Возьмем ось z, направленную по вертикали вниз, и обозначим тяжесть буквой g; тогда запишем дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = g.$$

Их интегралы суть

$$x = a + a't,$$

$$y = b + b't,$$

$$z = c + c't + \frac{g}{2} t^2,$$

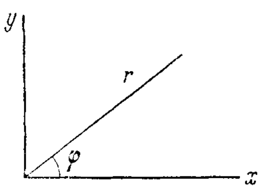
где a, b, c и a', b', c' — шесть произвольных постоянных, из которых три первые дают координаты положения, а три последние — компоненты скорости в момент $t = 0$.

Между величинами x и y, исключив t, можно найти линейную зависимость; тело движется в вертикальной плоскости. Примем ее за плоскость y, z, т. е. положим $x = 0$, и, исключая время t из второго и третьего уравнений, получим уравнение между y и z, в которое y войдет как в первой, так и во второй степени, а z — только в первой степени. Следовательно, траекторией движения является парабола, ось которой параллельна оси z, т. е. вертикальна. При $b' = 0$ парабола вырождается в вертикальную прямую.

§ 6

Другой пример, показывающий, какое упрощение описания существующего в природе движения получается при введении понятия силы, представляет движение планеты вокруг Солнца. Оно может быть с известной степенью точности описано посредством так называемых законов Кеплера; мы сможем объединить их в один закон, отличающийся большой простотой.

По первому закону Кеплера планета движется так, что ее радиус-вектор, проведенный от Солнца, описывает в равные времена равные площади; по второму закону траектория планеты есть эллипс, в фокусе которого находится Солнце.



Фиг. 1

Примем плоскость траектории за плоскость xOy, т. е. положим $z = 0$; если мы теперь обозначим через X, Y, Z компоненты действующей на планету силы, то $Z = 0$, т. е. сила параллельна плоскости траектории. Затем поместим начало координат в Солнце и положим

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \tag{8}$$

причем r будем считать положительным. Здесь r — длина радиуса-вектора, проведенного от Солнца к планете в момент t, и φ — угол, который этот радиус образует с осью x (фиг. 1); при этом за положительное направление вращения радиуса-вектора мы примем то, в котором надо повернуть на прямой угол ось x, чтобы она совпала с положительным направлением оси y. Предположим оси x и y выбранными так, что φ возрастает со временем.

Удвоенная площадь треугольника равна произведению двух сторон, заключающих угол, на синус этого угла. Если этот угол бесконечно мал, то синус можно заменить самим углом, при условии, что угловая единица равна $\frac{180^\circ}{\pi}$. Эту единицу мы введем раз навсегда. Следовательно, удвоенная площадь треугольника, описываемого радиусом-вектором планеты за время dt, есть $r^2 d\varphi$; мы положим

$$r^2 d\varphi = c dt. \tag{9}$$

По первому закону Кеплера c постоянное и притом, вследствие сделанного выбора осей, положительное. Дифференцируя уравнения (8), получим

$$dx = \cos \varphi \, dr - r \sin \varphi \, d\varphi,$$

$$dy = \sin \varphi \, dr + r \cos \varphi \, d\varphi;$$

перемножая их надлежащим образом с уравнениями (8) и вычитая одно из другого, будем иметь

$$x \, dy - y \, dx = r^2 d\varphi.$$

Следовательно, в силу (9)

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c, \tag{10}$$

откуда, приняв во внимание уравнения (5), получим

$$X : Y = x : y.$$

Эта пропорция показывает, что действующая на планету сила либо направлена к Солнцу, либо имеет противоположное направление: другими словами, сила, исходящая от Солнца, — притягивающая или отталкивательная. Вследствие этого можно положить

$$X = -R\frac{x}{r}, \quad Y = -R\frac{y}{r},$$

причем абсолютная величина R определяет величину силы, и при положительном R сила будет притягивающей, а при R отрицательном — отталкивающей. Умножая эти уравнения на dx, dy и складывая их, приняв во внимание соотношение

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

а следовательно, и соотношение

$$x\,dx + y\,dy = r\,dr, \tag{11}$$

получим

$$X\,dx + Y\,dy = -R\,dr.$$

Левая часть этого уравнения на основании (5) будет

$$\frac{1}{2}\,d\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] \text{ или } \frac{1}{2}\,d\,(v^2),$$

если обозначить через v скорость планеты.

Далее, из уравнений (10) и (11), если их возвести в квадрат и сложить, умножив предварительно (10) на dt, получим

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{c^2}{r^2}.$$

Отсюда следует:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{c^2}{r^3} - R. \tag{12}$$

Это уравнение мы сопоставим с другим, получающимся из второго закона Кеплера. Пусть a — половина большой оси, e — эксцентриситет эллиптической траектории, причем a и e — положительные величины и e меньше единицы. Направим ось x по большой оси эллипса к перигелию, т. е. к точке траектории, наиболее близкой к Солнцу. Тогда уравнение траектории будет

$$(x + ea)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = a^2,$$

или

$$(x + ea)^2 + \frac{r^2 - x^2}{1 - e^2} = a^2,$$

или

$$r^2 = [a\,(1 - e^2) - ex]^2.$$

Извлечем корень, принимая во внимание, что r существенно положительно; тогда получим

$$r = a\,(1 - e^2) - ex. \tag{13}$$

Из этого следует

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -e\,\frac{d^2x}{dt^2} = -eX = R\,\frac{ex}{r},$$

или, в силу (13),

$$\frac{d^2r}{dt^2} = R\left[\frac{a(1-e^2)}{r} - 1\right]$$

и, в силу (12),

$$R = \frac{e^2}{a(1-e^2)} \frac{1}{r^2}. \qquad (14)$$

Это выражение положительно, следовательно, действующая на планету сила, исходящая от Солнца, есть сила притяжения; она обратно пропорциональна квадрату расстояния от Солнца.

Мы преобразуем теперь найденное для этой силы выражение, чтобы ввести время обращения планеты. Обозначим его через T. Тогда $c\,dt$ по (9) есть двойная площадь, описываемая радиусом-вектором планеты за время dt, следовательно, cT есть двойная площадь, ограниченная эллиптической траекторией, т. е.

$$cT = a^2\sqrt{1-e^2}\, 2\pi,$$

поэтому из (14) имеем

$$R = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \frac{1}{r^2}.$$

Но по *третьему* закону Кеплера отношение $a^3 : T^2$ для всех планет имеет одно и то же значение; из этого следует, что для любой из планет

$$R = \frac{M}{r^2},$$

где M для всех планет имеет одно и то же постоянное значение, или словами: Солнце притягивает все планеты с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния.

Эта теорема принадлежит Ньютону. Из нее можно посредством вычисления, обратным путем, вывести законы Кеплера, следовательно, теорема Ньютона выражает то же, что и законы Кеплера, но более просто. Однако большая простота — не единственное и не важнейшее преимущество теоремы Ньютона перед законами Кеплера. Основное достоинство теоремы заключается в том, что Ньютон смог прийти, опираясь на нее, к открытию более общего положения, чем сама эта теорема и законы Кеплера, а именно к закону, который точно представляет движение *всех* небесных тел, если эти тела рассматривать как материальные точки. Таким образом обогащается наше знание.

§ 7

Чтобы выразить закон Ньютона, мы должны ввести понятие силы более общее, сравнительно с тем, которое было дано выше. В предыдущих параграфах мы употребляли термины *сила* и *ускорение* как вполне равнозначащие, но после обобщения понятия силы мы будем их различать. До сих пор мы употребляли выражение: на точку действует всегда *одна* сила; теперь же будем говорить: на точку действует одновременно *много* сил, или действует *система* сил. При этом каждую силу мы будем, как и раньше, определять непосредственно компонентами по осям координат. Таким образом, если $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots$ — компоненты сил, действующих на точку (x, y, z), то величина и направление этих сил определяются прямыми, проведенными из начала к точкам, координаты которых суть $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \ldots$. Утверждение, что данная система сил действует на точку, должно быть равнозначно с

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X_1 + X_2 + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y_1 + Y_2 + \ldots, \qquad (15)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = Z_1 + Z_2 + \ldots$$

Система сил, действующих на точку, всегда равносильна единственной силе, которая называется *равнодействующей* системы. Пусть X, Y, Z — компоненты по осям координат равнодействующей данной системы; тогда в силу (15) и (5), имеем

$$X = X_1 + X_2 + \ldots,$$

$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots,$$

$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots$$

Это те же уравнения, которые в случае, когда система состоит только из двух сил, представляют аналитическое выражение так называемого *правила параллелограмма сил*. Очевидно, что если определенное движение точки происходит под действием нескольких сил, то однозначно определена лишь их равнодействующая; каждую же из сил в отдельности, кроме *одной*, можно взять произвольной, а эту одну всегда можно выбрать так, чтобы равнодействующая сделалась равной ускорению.

Только из движения, по нашему мнению, механика может черпать определения понятий, с которыми она имеет дело. Из этого следует, что после введения системы сил вместо простых сил механика не в состоянии дать исчерпывающего понятия силы.

Однако введение системы сил весьма важно, так как опыт показал, что в движениях, встречающихся в природе, всегда можно отыскать такие системы, отдельные силы которых могут быть легче найдены, чем их равнодействующая.

§ 8

Пример этому дает движение небесных тел. Пусть 1, 2, ... — индексы рассматриваемых тел; m_1, m_2, ... — постоянные, относящиеся к каждому из этих тел; r_{12} r_{13}, ... — расстояния между двумя из них в момент времени t; их движение можно представить себе происходящим под действием сил, с которыми каждое тело действует на все остальные так, что, например, тело 1 притягивает тело 2 с силой, равной $\frac{m_1}{r_{12}^2}$. Это и есть закон Ньютона.

Предположим, что мы имеем только три небесных тела. Обозначим координаты их индексами 1, 2, 3; тогда уравнения их движения запишутся в следующем виде:

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = m_2\frac{x_2 - x_1}{r_{12}^3} + m_3\frac{x_3 - x_1}{r_{13}^3},$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = m_2\frac{y_2 - y_1}{r_{12}^3} + m_3\frac{y_3 - y_1}{r_{13}^3},$$

$$\frac{d^2z_1}{dt^2} = m_2\frac{z_2 - z_1}{r_{12}^3} + m_3\frac{z_3 - z_1}{r_{13}^3},$$

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} = m_3\frac{x_3 - x_2}{r_{23}^3} + m_1\frac{x_1 - x_2}{r_{21}^3},$$

$$\frac{d^2y_2}{dt^2} = m_3\frac{y_3 - y_2}{r_{23}^3} + m_1\frac{y_1 - y_2}{r_{21}^3},$$

$$\frac{d^2z_2}{dt^2} = m_3\frac{z_3 - z_2}{r_{23}^3} + m_1\frac{z_1 - z_2}{r_{21}^3},$$

$$\frac{d^2x_3}{dt^2} = m_1\frac{x_1 - x_3}{r_{31}^3} + m_2\frac{x_2 - x_3}{r_{32}^3},$$

$$\frac{d^2y_3}{dt^2} = m_1\frac{y_1 - y_3}{r_{31}^3} + m_2\frac{y_2 - y_3}{r_{32}^3},$$

$$\frac{d^2z_3}{dt^2} = m_1\frac{z_1 - z_3}{r_{31}^3} + m_2\frac{z_2 - z_3}{r_{32}^3}.$$

Задача интегрирования этих дифференциальных уравнений называется задачей трех тел. Эта задача до сих пор строго не решена. Еще более трудная задача возникает для нашей планетной системы, так как число тел, входящих в нее, больше трех.

Однако астрономы убедились, что движения в нашей планетной системе очень точно следуют закону Ньютона, так как сила взаимодействия между каждой планетой и Солнцем, между каждым спутником и его планетой значительно превышает все остальные действующие на них силы.

ЛЕКЦИЯ ВТОРАЯ

(Движение несвободной материальной точки. Простой маятник. Движение системы точек, для которой имеют место уравнения связей. Масса материальной точки. Движущая сила. Лагранжевы уравнения механики)

§ 1

Введение системы сил, действующей на точку, вместо одной силы оказывает существенную помощь также и в случае, который мы сейчас рассмотрим. В этом случае заранее известно уравнение или только между координатами точки, или между ними и временем. Этот случай, например, имеет место для точки, лежащей на поверхности известной формы, по которой точка движется так, что остается с ней в соприкосновении. Если поверхность неподвижна, то ее уравнение и есть уравнение между координатами точки; если поверхность движется какимлибо образом, то мы имеем уравнение между ее координатами и временем. Напишем это уравнение так:

$$\varphi(x,\ y,\ z,\ t) = c \tag{1}$$

или, короче, $\varphi = c$, причем через c мы обозначаем постоянное. Назовем это уравнение *уравнением связи* и скажем: точка *несвободна*, но *вынуждена* двигаться сообразно данному условию. Однако мы не связываем с этим предложением никакого иного представления, кроме того, что уравнение (1) *действительно* существует.

В приведенном случае представим движение точки, обусловленное двумя силами; именно, положим

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= X + X_1, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= Y + Y_1, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= Z + Z_1. \end{aligned} \tag{2}$$

Компоненты первой силы X, Y, Z должны быть заданы полностью, но для компонент второй силы X_1, Y_1, Z_1 будут установлены только выражения, содержащие еще одну неизвестную величину, которую мы обозначим через λ. Эта величина определится из уравнения связи. А именно, из него следует, что для каждого значения t

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0,$$

и также

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0,\text{ т. е. }\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{d^2z}{dt^2}+$$
$$+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+$$
$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z}\frac{dy}{dt}\frac{dz}{dt}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\frac{dz}{dt}\frac{dx}{dt}+ \qquad (3)$$
$$+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}\frac{dx}{dt}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial t}\frac{dy}{dt}+2\frac{d^2\varphi}{\partial z\,\partial t}\frac{dz}{dt}=0.$$

Подставим в последнее уравнение вместо $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ их значения из (2); тогда мы получим уравнение, из которого можно будет выразить λ через x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ и t. Каждую из компонент X_1, Y_1, Z_1 мы положим равной величине λ, умноженной на некоторый не зависящий от λ множитель; тогда уравнение для λ будет линейным, т. е. λ и X_1, Y_1, Z_1, а также $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ будут из него однозначно определены как конечные величины, если предположим, что коэффициент при λ в названном уравнении не обращается в нуль. Все движение таким образом вполне определено, если еще заданы начальные значения координат и компонент скорости. В основание этих выводов положено предположение, которое мы сделали в § 4 первой лекции относительно компонент силы и которое мы всегда будем считать имеющим место, — предположение, что эти компоненты в общем случае суть однозначные функции от x, y, z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ и t. Такими функциями должны быть X, Y, Z и множители при λ в выражениях X_1, Y_1, Z_1. В остальном названные выше множители могут быть выбраны произвольно; в таком случае описание движения всегда будет полным[1]. Но мы сделаем совершенно специальный выбор, а именно, положим

$$X_1=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad Y_1=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad Z_1=\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z};$$

при этом уравнения (2) примут вид

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=X+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=Y+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y},\\ \frac{d^2z}{dt^2}&=Z+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}.\end{aligned}\qquad (4)$$

Целесообразность этого выбора основана на двух свойствах уравнений (4).

Первое из них состоит в том, что уравнения сохраняют свой вид при перемене системы координат. Чтобы убедиться в этом, обозначим через φ' функцию x', y', z', t, в которую перейдет φ, если подставить в нее вместо x, y, z их выражения через x', y', z' из уравнений (1) первой лекции, так что

$$\varphi'=\varphi,$$

принимая во внимание, что уравнение (1) есть тождество.

После решения этих уравнений получим:

$$\frac{\partial x}{\partial x'}=\alpha_1,\quad \frac{\partial y}{\partial x'}=\alpha_2,\quad \frac{\partial z}{\partial x'}=\alpha_3,$$

[1] Компоненты X_1, Y_1, Z_1 подлежат ограничению: именно, если они не зависят от скорости, то должны давать равнодействующую, перпендикулярную к поверхности $\varphi=c$, так как в противном случае точка могла бы прийти в движение, если бы X_1, Y_1, Z были равны нулю. Если же они содержат скорость в качестве множителя, то компонента, параллельная поверхности $\varphi=c$, должна быть противоположна такой же компоненте силы X, Y, Z, как это, например, имеет место при трении (В. Вин.)

$$\frac{\partial x}{\partial y'} = \beta_1, \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = \beta_2, \quad \frac{\partial z}{\partial y'} = \beta_3,$$

$$\frac{\partial x}{\partial z'} = \gamma_1, \quad \frac{\partial y}{\partial z'} = \gamma_2, \quad \frac{\partial z}{\partial z'} = \gamma_3;$$

отсюда следует, что

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi'}{\partial x'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\alpha_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\alpha_3, \\
\frac{\partial \varphi'}{\partial y'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\beta_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\beta_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\beta_3, \\
\frac{\partial \varphi'}{\partial z'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}\gamma_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\gamma_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\gamma_3.
\end{aligned} \tag{5}$$

Умножая уравнения (4) на α_1, α_2, α_3, или на β_1, β_2, β_3, или на γ_1, γ_2, γ_3 и складывая каждый раз то, что получится, на основании установленных в первой лекции уравнений (6) и (7) найдем

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X' + \lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial x'},$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = Y' + \lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial y'},$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = Z' + \lambda \frac{\partial \varphi'}{\partial z'}.$$

Второе свойство уравнений (4) — это то, что они удовлетворяются при произвольном изменении формы уравнения связи

$$F = C,$$

где F — произвольная функция от φ, и C — значение, принимаемое ею при $\varphi = c$. Тогда вместо уравнений (4) получим

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= X + L\frac{\partial F}{\partial x}, \\
\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + L\frac{\partial F}{\partial y}, \\
\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + L\frac{\partial F}{\partial z},
\end{aligned} \tag{6}$$

где L — новая неизвестная величина, которая определяется из уравнения $F = C$ или, что то же самое, из уравнения $\varphi = c$.

Но так как

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

то уравнения (6) будут тождественны уравнениям (4), если положить

$$L\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \lambda.$$

Уравнения (4) и уравнение $\varphi = c$ можно выразить словами следующим образом: на рассматриваемую материальную точку действует сила, компоненты которой суть X, Y, Z; в то же время ее движение подчинено условию $\varphi = c$.

Мы будем считать силу, компоненты которой суть $\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, следствием того, что точка вынуждена двигаться соответственно связи $\varphi = c$. Направление этой силы перпендикулярно к поверхности, уравнение которой при фиксированном значении t есть

$$\varphi = c;$$

следовательно, если обозначить через n нормаль к этой поверхности, то, как известно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz)$$

и величина этой силы равна абсолютному значению выражения

$$\lambda\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Не исключена возможность, что уравнения (4) будут не единственными обладающими двумя указанными выше свойствами — выполняться для каждой системы координат и всякой формы уравнения связи, — если силы (X, Y, Z) даны по величине и направлению. Этими же свойствами обладают уравнения

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} &= X + \lambda\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x} + h\frac{dx}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\right],\\
\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + \lambda\left[\frac{\partial\varphi}{\partial y} + h\frac{dy}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\right],\\
\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + \lambda\left[\frac{\partial\varphi}{\partial z} + h\frac{dz}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}\right],
\end{aligned} \tag{7}$$

если h является постоянной или произвольно заданной функцией от

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Эти уравнения, взятые вместо уравнений (4), действительно годятся для описания некоторого движения, именно такого движения, при котором, как принято говорить, делается заметным трение. Мы удержим уравнения (4) вследствие их большой простоты.

§ 2

Изложенным в предыдущем параграфе методом мы воспользуемся для описания движения *простого маятника*. Такой маятник получается, если тело, подвешенное нитью к неподвижной точке, рассматривают как материальную точку. При этом предполагают нить нерастяжимой и в остальном ее влиянием пренебрегают. Пусть тело надлежащим образом приведено в движение; тогда оно движется так, что остается на шаровой поверхности, описываемой радиусом, равным длине нити, вокруг точки привеса. Допустим еще, что выполнены предположения, которые были изложены в § 5 первой лекции при исследовании движения свободно брошенного тела; тогда движение маятника будет описано с помощью выражения, показывающего, что на него действует сила тяжести, причем он вынужден оставаться на указанной шаровой поверхности.

Введем систему координат, начало которой поместим в точке подвеса и ось z которой направлена вертикально вниз, и обозначим через l длину нити; тогда это утверждение будет выражено следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \lambda x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \lambda y, \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g + \lambda z, \\ x^2 + y^2 + z^2 &= l^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Из последнего уравнения следует:

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0,$$

а из трех первых, умножив их на dx, dy, dz, сложив и интегрируя, получим

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (2gz + h)\,dt^2, \tag{9}$$

где h обозначает произвольное постоянное.

Умножив два первых из уравнений (8) на $(-y)$ и $(+x)$, складывая и интегрируя, получим еще

$$x\,dy - y\,dx = c\,dt, \tag{10}$$

где через c обозначено второе произвольное постоянное.

Введем теперь вместо прямоугольных координат полярные и положим

$$\begin{aligned} x &= l \sin\vartheta \cos w, \\ y &= l \sin\vartheta \sin w, \\ z &= l \cos\vartheta; \end{aligned} \tag{11}$$

отсюда следует

$$\begin{aligned} dx &= l\cos\vartheta\cos w\,d\vartheta - l\sin\vartheta\sin w\,dw, \\ dy &= l\cos\vartheta\sin w\,d\vartheta + l\sin\vartheta\cos w\,dw, \\ dz &= -\,l\sin\vartheta\,d\vartheta. \end{aligned}$$

Из этих уравнений имеем

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = l^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,dw^2),$$

$$x\,dy - y\,dx = l^2\sin^2\vartheta\,dw,$$

и вместо уравнений (9)—(10) получим

$$\begin{aligned} l^2\,(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,dw^2) &= (2gl\cos\vartheta + h)\,dt^2, \\ l^2\sin^2\vartheta\,dw &= c\,dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Отсюда следует

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}\cos\vartheta + \frac{h}{l^2} - \frac{c^2}{l^4\sin^2\vartheta}.$$

Интегрируя это уравнение, мы получим ϑ как эллиптическую функцию t. Пусть ϑ найдено; тогда, интегрируя второе уравнение (12), получим w.

Если $c = 0$, то из второго уравнения (12) следует, что $w = \text{const}$, и из (11) найдем, что движение происходит в вертикальной плоскости, и по первому из уравнений (12) имеем

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}\cos\vartheta + \frac{h}{l^2}. \tag{13}$$

В зависимости от значения h движение, представляемое этим уравнением, таково, что или абсолютное значение ϑ безгранично возрастает со временем, или изменяется между некоторым минимумом и максимумом. Мы исследуем только второй случай, когда маятник совершает *колебания.* Обозначим амплитуду колебаний, т. е. наибольшее значение ϑ, через α; тогда $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ для $\vartheta = \alpha$; следовательно, в силу (13)

$$0 = 2\frac{g}{l}\cos\alpha + \frac{h}{l^2}.$$

Вычтем это уравнение из (13), получим

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = 2\frac{g}{l}(\cos\vartheta - \cos\alpha) = 4\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right).$$

Положим

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi;$$

тогда

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi}}.$$

Пусть T — продолжительность одного простого колебания; тогда T найдется интегрированием этого уравнения между пределами от $\vartheta = -\alpha$ до $\vartheta = +\alpha$, т. е. от $\psi = -\frac{\pi}{2}$ до $\psi = +\frac{\pi}{2}$; таким образом,

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}}\,2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi}}.$$

Пусть α мало; тогда, пренебрегая его четвертыми степенями, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi}} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi;$$

далее, так как

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi\, d\psi = \frac{\pi}{4},$$

то

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right),$$

или

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\alpha^2}{16} \right).$$

Если α бесконечно мало, то

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Случай бесконечно малых колебаний легко разобрать и без предположения, что они плоские.

Если колебания, т. е. x и y, бесконечно малы, то $l-z$ также бесконечно мало; а именно, оно будет второго порядка, когда x и y первого порядка малости, как это вытекает из (8), уравнение четвертое. Третье из этих уравнений выражает, что с точностью до величин второго порядка

$$\lambda = -\frac{g}{l},$$

и два первых дают

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l} x, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{g}{l} y.$$

Общие интегралы этих дифференциальных уравнений:

$$x = a \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + a' \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

$$y = b \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t + b' \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t,$$

где a, b, a', b' — произвольные постоянные. Исключим t из этих двух уравнений, решив их относительно синуса и косинуса и приравняв единице сумму квадратов найденных значений; тогда найдем, что уравнение траектории тяжелой точки есть уравнение эллипса. Из выражений для x и y следует, что продолжительнсть одного оборота

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

§ 3

Рассмотрим теперь наиболее общий случай, встречающийся в механике материальной точки. Именно, рассмотрим систему материальных точек 1, 2, ... Обозначим буквами x, y, z с индексами 1, 2, ... их координаты в момент t. Между этими координатами и временем должны быть известны n независимых между собой уравнений, которые мы напишем так:

$$\varphi = c, \quad \psi = e, \ldots \tag{14}$$

причем под $\varphi, \psi, \ldots$ мы подразумеваем функции координат точек, а под $c, e, \ldots$ постоянные. Мы дадим дифференциальным уравнениям движения точек форму, соответствующую той, в которой были представлены в § 1 дифференциальные уравнения для *одной* точки, движение которой подчинено *одной* связи. Движение каждой из точек мы представим как обусловленное $n+1$ силами, причем из всех рассматриваемых сил одна для каждой точки должна быть задана полностью, для остальных должны быть установлены выражения, которые содержат n неизвестных величин. Именно, мы положим

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + \frac{\lambda}{m_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\mu}{m_1}\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \ldots, \\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_1 + \frac{\lambda}{m_1}\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \frac{\mu}{m_1}\frac{\partial\psi}{\partial y_1} + \ldots, \\
\frac{d^2z_1}{dt^2} &= Z_1 + \frac{\lambda}{m_1}\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} + \frac{\mu}{m_1}\frac{\partial\psi}{\partial z_1} + \ldots, \\
\frac{d^2x_2}{dt^2} &= X_2 + \frac{\lambda}{m_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\mu}{m_2}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Здесь X_1, Y_1, Z_1 $X_2, \ldots$ — компоненты сил, которые в каждом случае применения уравнений должны быть заданы как функции координат и компонент скорости точек и времени; m_1, $m_2, \ldots$ — положительные постоянные, которые также должны быть даны; $\lambda, \mu, \ldots$ — n неизвестных, которые будут однозначно определены из n линейных по отношению к ним уравнений

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = 0, \ldots,$$

которые должны быть развернуты по образцу уравнения (3).

Уравнения (15) имеют место для каждой прямоугольной системы координат, если положить, что силы (X_1, Y_1, Z_1), $(X_2, Y_2, Z_2), \ldots$ не зависят по величине и направлению от системы координат. Доказательство этого предложения надо вести таким же образом, как было доказано аналогичное предложение в § 1; именно, следует умножить уравнения, относящиеся к каждой точке системы, на α_1, α_2, α_3, или β_1, β_2, β_3, или γ_1, γ_2, γ_3 и в каждом случае, соответственно, сложить их.

Уравнения (15) получим для каждой формы уравнений связи, если мы по-прежнему будем так называть уравнения (14), но они имеют место также и тогда, когда мы уравнения (14) заменим:

$$F = C, \; G = E, \ldots,$$

где F, $G, \ldots$ — n независимых между собой функций от φ, $\psi, \ldots$, и C, $E, \ldots$ — постоянные значения, которые эти функции принимают при $\varphi = c$, $\psi = e, \ldots$ Величины λ, $\mu, \ldots$ должны быть заменены другими, которые мы обозначим через L, $M, \ldots$ и которые определяются из уравнений

$$
\begin{aligned}
\lambda &= L\frac{\partial F}{\partial\varphi} + M\frac{\partial G}{\partial\varphi} + \ldots, \\
\mu &= L\frac{\partial F}{\partial\psi} + M\frac{\partial G}{\partial\psi} + \ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Мы убедимся в правильности этого положения, если, обозначив через x какую-нибудь из величин x_1, y_1, z_1, x_2, $y_2, \ldots$, заметим, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \ldots,$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial G}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial \psi}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \ldots,$$

. . . .

следовательно, если имеют место уравнения (16), то

$$L\frac{\partial F}{\partial x} + M\frac{\partial G}{\partial x} + \ldots = \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial \psi}{\partial x} + \ldots$$

Заметим, что уравнения (15) перестали бы быть годными для каждой системы координат или для каждой формы уравнений связи, если бы равные множители $\frac{1}{m_1}$, входящие в уравнения, относящиеся к первой точке, мы заменили бы различными множителями из какой-нибудь вертикальной или горизонтальной строки. Кроме того, нетрудно убедиться, что уравнения (15) не единственные, которые обладают только что доказанными свойствами; такие уравнения легко составить по образцу уравнений (7); уравнения (15) не теряют значения также и в том случае, если рассматривать m_1, $m_2, \ldots$ не как постоянные, но как произвольные переменные величины. Однако опыт учит, что при таком обобщении уравнений (15) мы не выиграли бы в простоте описания встречающихся в природе движений.

Количества m_1, $m_2, \ldots$ мы назовем *массами* материальных точек 1,2,...

Изменим форму и обозначения уравнений (15). Умножим уравнения (15) соответственно на m_1, $m_2, \ldots$; при этом появятся произведения m_1X_1, $m_1Y_1, m_1Z_1, m_2X_2, m_2Y_2, \ldots$; эти произведения мы обозначим опять через $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, \ldots$ и будем называть их компонентами по осям координат *движущей силы*, действующей на массы $m_1, m_2, \ldots$ или на материальные точки 1, 2, ... Относительно введенного здесь понятия *движущая сила* мы можем сказать следующее: она всегда соответствует ускоряющей силе и имеет определенную величину и направление; направление обеих одно и то же; величина движущей силы равна величине ускоряющей, умноженной на массу, на которую она действует; движущие силы, действующие одновременно на точку, складываются совершенно так же, как ускоряющие. До сих пор речь шла исключительно об ускоряющих силах; теперь мы будем говорить только о силах движущих, и ради краткости опускать слово *движущая*.

Если на систему точек, массы которых $m_1, m_2, \ldots$, подчиненную связям $\varphi = c$, $\psi = e, \ldots$, действуют силы, компоненты которых суть X_1, Y_1, Z_1, X_2, $Y_2, \ldots$, то это означает, что движение точек удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}
m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} &= X_1 + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x_1} + \ldots,\\
m_1\frac{d^2y_1}{dt^2} &= Y_1 + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_1} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y_1} + \ldots,\\
m_1\frac{d^2z_1}{dt^2} &= Z_1 + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z_1} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial z_1} + \ldots,\\
m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} &= X_2 + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x_2} + \ldots,\\
m_2\frac{d^2y_2}{dt^2} &= Y_2 + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y_2} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y_2} + \ldots,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi = c,\ &\psi = e, \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Это и есть основные уравнения механики материальных точек, которые были впервые установлены Лагранжем в его «Аналитической механике».

Величины $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_1}$, $\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_1}$ — компоненты силы, действующей на точку 1; эта сила по величине и направлению не зависит от принятой системы координат, что следует из рассмотрения, аналогичного проведенному в § 1.

Эти силы являются следствием того факта, что точка 1 вынуждена двигаться сообразно условию $\varphi = c$.

Рассмотрим следующий пример:

$$\varphi = \frac{1}{2}\left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right];$$

это уравнение показывает, что точки 1 и 2 неизменно связаны между собой. Вследствие этой связи, как сказано выше, на точки 1 и 2 действуют силы, компоненты которых суть

$$\lambda (x_1 - x_2),\ \lambda (y_1 - y_2),\ \lambda (z_1 - z_2).$$

и

$$\lambda (x_2 - x_1),\ \lambda (y_2 - y_1),\ \lambda (z_2 - z_1);$$

таким образом эти силы одинаковы по величине, и обе направлены вдоль линии, соединяющей точки 1 и 2.

ЛЕКЦИЯ ТРЕТЬЯ

(Принцип Даламбера. Работа. Принцип Гамильтона. Потенциал, или силовая функция. Равновесие. Принцип возможных перемещений)

§ 1

Данные в предыдущей лекции дифференциальные уравнения (17) для движения системы материальных точек предполагают введение прямоугольной системы координат, которую можно выбрать произвольно. Эти уравнения можно привести, как мы теперь покажем, к такой форме, при которой они уже не будут связаны с выбором какой-либо определенной системы координат.

Рассмотрим положение точек, соответствующее некоторому определенному значению t, и представим себе, что этим точкам сообщено бесконечно малое отклонение из этого положения. При этом координаты x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, $z_2, \ldots$ получат приращение, соответственно δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, $\delta y_2, \ldots$ Эти *компоненты перемещения*, кроме того, что они бесконечно малы, должны еще удовлетворять условию быть совместными с уравнениями связей $\varphi = c, \psi = e, \ldots$ или, что то же самое, должны удовлетворять уравнениям

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x} \delta x = 0, \qquad \sum \frac{\partial \psi}{\partial x} \delta x = 0, \ldots, \tag{1}$$

в которых x означает какую-нибудь из величин x_1, y_1, z_1, x_2, $y_2, \ldots$ и знак Σ выражает, что сумма распространяется на все эти величины. Подобные перемещения называются *возможными* в противоположность действительным, настоящим, которые имеют место в некоторый элемент времени dt. Время может входить явно в уравнения связей $\varphi = c$, $\psi = c, \ldots$, что не будет исключением; в этом случае выражение: *перемещения должны быть совместными с уравнениями связей* не имеет определенного значения; его значение прежде всего определяется уравнениями (1). Возможные перемещения будут при этом соответствовать уравнениям связей, в которых время рассматривается как постоянное. Например, пусть точка будет вынуждена оставаться на шаровой поверхности, движущейся с данной скоростью; тогда возможным перемещением будет перемещение, отнесенное к неподвижному шару.

Умножим дифференциальные уравнения (17) предыдущей лекции на δx_1, δy_1, δz_1, δx_2, $\delta y_2, \ldots$ и сложим их; тогда с помощью уравнений (1) получим

$$0 = \sum \left(m \frac{d^2 x}{dt^2} - X\right) \delta x + \left(m \frac{d^2 y}{dt^2} - Y\right) \delta y + \left(m \frac{d^2 z}{dt^2} - Z\right) \delta z, \tag{2}$$

где сумма распространяется на всю систему точек.

Это уравнение, если прибавить, что оно пригодно для всех возможных перемещений, вполне равносильно с уравнениями (17). Мы получим уравнение (2) из (17), если выведем (17) из (2), т. е. если покажем, что величины λ, $\mu, \ldots$, входящие в уравнение (17), для всех значений δx удовлетворяют уравнениям (1). Это вытекает из исследования, относящегося к теории линейных функций.

Выражаемая уравнением (2) теорема носит название *принципа Даламбера.*

§ 2

Преобразуем еще уравнение (2).

Выражение

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

называется *работой* силы (X, Y, Z) на перемещении $(\delta x, \delta y, \delta z)$ ее точки приложения; если ввести в рассмотрение величину силы и перемещения, то это выражение равно произведению силы на перемещение и на косинус угла между ними. Оно не зависит от системы координат и положительно или отрицательно в зависимости от знака косинуса. Пусть будет дана система сил, действующих на различные точки или имеющих общую точку приложения; тогда распространенная на все силы сумма

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

называется работой системы сил для рассматриваемых перемещений. Если силы имеют общую точку приложения, то работа их равна работе их равнодействующей, так как компоненты равнодействующей по осям координат равны суммам соответствующих компонент отдельных сил.

§ 3

Положим в уравнении (2)

$$\sum(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) = U', \tag{3}$$

т. е. U' обозначает работу сил (X, Y, Z) для рассматриваемых перемещений.

Величины x, y, z суть функции времени; также и величины δx, δy, δz мы можем и будем рассматривать как функции времени, которые только должны быть бесконечно малы и удовлетворять уравнениям (1).

Тогда получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}\delta x = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\delta x\right) - \frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dt}. \tag{4}$$

Если при данном, остающемся неизменным, значении t величина x изменяется на δx, то изменяется также $\frac{dx}{dt}$; мы обозначим приращение $\frac{dx}{dt}$ через $\delta\frac{dx}{dt}$. Из этого определения следует:

$$\delta\frac{dx}{dt} = \frac{d(x+\delta x)}{dt} - \frac{dx}{dt} = \frac{d\delta x}{dt}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{dx}{dt}\frac{d\delta x}{dx} = \frac{dx}{dt}\delta\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2,$$

если обозначить через δ вообще изменение, которое получает поставленное за этим значком выражение, когда x, y, z изменяются на δx, δy, δz.

Поэтому вместо (4) получим

$$\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x\right)-\frac{1}{2}\,\delta\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

Вместо x сюда могут быть подставлены также y или z. Далее, если обозначаемое значком δ изменение назовем вариацией, то, так как вариация суммы равна сумме вариаций частей, получим

$$\sum m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\,\delta x+\frac{d^2y}{dt^2}\,\delta y+\frac{d^2z}{dt^2}\,\delta z\right)=$$

$$=\frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x+\frac{dy}{dt}\,\delta y+\frac{dz}{dt}\,\delta z\right)-\delta\sum\frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right). \tag{5}$$

Входящую в последний член предыдущего уравнения сумму назовем *живой силой* системы и обозначим ее через T; тогда будем иметь

$$T=\frac{1}{2}\sum mv^2, \tag{6}$$

где через v обозначена скорость.

Поэтому, приняв во внимание уравнение (3), вместо уравнения (2), получим

$$\frac{d}{dt}\sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x+\frac{dy}{dt}\,\delta y+\frac{dz}{dt}\,\delta z\right)=\delta T+U'. \tag{7}$$

Правая часть этого уравнения не зависит от системы координат; но и в левой эта зависимость только кажущаяся, так как выражение

$$\frac{dx}{dt}\,\delta x+\frac{dy}{dt}\,\delta y+\frac{dz}{dt}\,\delta z$$

представляет произведение скорости v на перемещение (δx, δy, δz) и на косинус угла между ними.

Преобразуем еще уравнение (7), умножим его на dt и проинтегрируем между двумя произвольно выбранными значениями t, которые обозначим через t_0 и t_1. Тогда получим

$$\left[\sum m\left(\frac{dx}{dt}\,\delta x+\frac{dy}{dt}\,\delta y+\frac{dz}{dt}\,\delta z\right)\right]_{t_0}^{t_1}=\int_{t_0}^{t_1}dt\,(\delta T+U'), \tag{8}$$

где поставленные в левой части значки обозначают разность значений, стоящих в прямых скобках, для $t=t_1$ и $t=t_0$. Наложим на вариации δx, δy, δz новое ограничение, положив, что для $t=t_0$ и $t=t_1$ они все обращаются в нуль; тогда будем иметь:

$$0=\int_{t_0}^{t_1}dt\,(\delta T+U'). \tag{9}$$

Принципом Гамильтона называется следующее утверждение: уравнение (9) имеет место для всех бесконечно малых вариаций положения точек, совместимых со связями, которым подчинено их движение, и обращающихся в нуль для $t=t_0$ и $t=t_1$. Мы вывели принцип Гамильтона из принципа Даламбера, т. е. из уравнения (2); покажем теперь, что можно поступать также и наоборот.

Воспользовавшись данными в (3) и (6) определениями и тождеством (5), мы приведем уравнение (9) к виду

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum \left(m \frac{d^2 x}{dt^2} - X\right) \delta x + \left(m \frac{d^2 y}{dt^2} - Y\right) \delta y + \\ + \left(m \frac{d^2 z}{dt^2} - Z\right) \delta z.$$

Теперь заметим, что значения δx, δy, δz могут быть положены равными нулю для всех элементов времени, которые лежат в интервале от $t = t_0$ до $t = t_1$, за исключением одного, а для этого элемента равными некоторому произвольному перемещению; тогда очевидно, что для этого элемента времени уравнение (2) имеет место; но так как этот элемент времени может быть выбран произвольно, то оно всегда имеет место.

Принцип Гамильтона, Даламбера и лагранжевы дифференциальные уравнения (17) предыдущего параграфа оказываются, таким образом, вполне равносильными.

§ 4

Большое преимущество принципа Гамильтона заключается в том, что с помощью его в дифференциальных уравнениях движения системы материальных точек можно относительно легко заменить прямоугольные координаты другими переменными.

Пусть p_1, p_2, ... будут какие-нибудь величины, определяющие положения точек, т. е., иными словами, все x, y, z могут быть выражены в функции только этих переменных.

Если x есть какая-нибудь прямоугольная координата некоторой точки, то

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial p_1} \frac{dp_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial p_2} \frac{dp_2}{dt} + \ldots$$

и

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial p_1} \delta p_1 + \frac{\partial x}{\partial p_2} \delta p_2 + \ldots ,$$

где производные $\frac{\partial x}{\partial p_1}, \frac{\partial x}{\partial p_2}, \ldots$ рассматриваются как функции от p_1, p_2, .. Компоненты силы X, Y, Z, входящие в выражение (3) для U', которые, вообще, являются функциями величин x, $\frac{dx}{dt}$ и t, после введения p будут функциями величин p, $\frac{dp}{dt}$ и t; само U' становится при этом однородной линейной функцией от δp с коэффициентами, зависящими от p, $\frac{dp}{dt}$ и t. Далее, T — однородная функция второй степени величин $\frac{dp}{dt}$, коэффициенты которой зависят от p; δT — однородная линейная функция δp и $\delta \frac{dp}{dt}$, коэффициенты которой содержат величины p и $\frac{dp}{dt}$. Поэтому выражение $\delta T + U'$ имеет вид

$$\sum \left(P \delta p + Q \frac{d \delta p}{dt}\right), \tag{10}$$

где сумма распространена на все δp и где P и Q — функции величин p, $\frac{dp}{dt}$ и t.

Величины p не должны необходимо быть независимыми между собой; между ними и временем могут существовать уравнения связей. Уравнение (9) тогда должно выполняться только для возможных перемещений δp, т. е. таких, которые удовлетворяют уравнениям связей, если рассматривать в них время как постоянное. Величины δp могут быть представлены в виде однородных линейных функций независимых между собой бесконечно малых величин, которые обозначим через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$; число этих величин равно разности между числом величин p и числом существующих между ними уравнений связей; в этих функциях коэффициенты при величинах ε зависят от p и времени.

Продифференцируем по t уравнения, представляющие указанным выше образом δp; тогда величины $\frac{d\delta p}{dt}$ выражаются линейными однородными функциями величин ε и $\frac{d\varepsilon}{dt}$, коэффициенты которых содержат p, $\frac{dp}{dt}$ и t.

Следствием этого является следующее выражение для $\delta T + U'$ взамен (10):

$$\sum\left(R\varepsilon + S\frac{d\varepsilon}{dt}\right),$$

где сумма распространена на все ε и величины R и S — функции p, $\frac{dp}{dt}$ и t. Отсюда вместо (9) получим

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum\left(R\varepsilon + S\frac{d\varepsilon}{dt}\right) \tag{11}$$

для любых бесконечно малых величин ε, которые только должны удовлетворять условию обращаться в нуль для $t = t_0$ и $t = t_1$. Но так как

$$S\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d}{dt}(S\varepsilon) - \frac{dS}{dt}\varepsilon,$$

то вместо (11) получим

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt \sum\left(R - \frac{dS}{dt}\right)\varepsilon.$$

Так как величины ε могут быть выбраны совершенно произвольно при одном лишь условии, чтобы они обращались в нуль на пределах интегрирования, то из этого следует (из рассуждения, аналогичного примененному при выводе принципа Даламбера из принципа Гамильтона), что коэффициенты при каждом ε должны обращаться в нуль, и таким образом дифференциальными уравнениями движения будут уравнения

$$\frac{dS}{dt} = R.$$

§ 5

В одном случае, часто встречающемся при исследовании, уравнение (9), выражающее принцип Гамильтона, может быть представлено в более простой форме. Это будет тогда, когда определяемая уравнением (3) работа U' равна вариации (соответствующей возможному перемещению) некоторой функции величин, определяющих положение точек, и времени. Такая функция, если она существует, называется потенциалом сил, или *силовой функцией*. Обозначим ее через U; тогда будем иметь

$$U' = \delta U, \tag{12}$$

и уравнение (9) можно будет написать так:

$$0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} dt\,(T + U). \tag{13}$$

Обозначим через Ω интеграл, вариация которого по (13) обращается в нуль; тогда это уравнение есть необходимое условие того, чтобы Ω имело максимум или минимум. В самом деле, обозначим через x прямоугольную координату какой-нибудь точки; если бы $\delta\Omega$ не было равно нулю для некоторой системы возможных вариаций δx, то, изменив все знаки, можно было бы получить вторую систему вариаций, а именно систему, для которой $\delta\Omega$ имело бы противоположный знак. Следовательно, Ω при изменении величин δx могло бы быть как увеличено, так и уменьшено, т. е. оно не имело бы ни максимума, ни минимума.

Однако уравнение (13) не есть достаточное условие того, чтобы Ω имело непременно максимум или минимум.

Пусть x опять будет координата некоторой точки и X — соответственная компонента действующей на точку силы; тогда, согласно (12) и (3),

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}. \tag{14}$$

Из этого выражения видно, что если существует потенциал, то силы, как и потенциал, могут зависеть только от координат и времени, но не от скорости.

Из (14) также следует, что если действуют совместно две системы сил, каждая из которых имеет потенциал, то для них также существует потенциал, равный сумме потенциалов отдельных систем.

Пусть силы будут вполне заданы как однозначные функции координат и времени; тогда потенциал, если он существует, найдется интегрированием по координатам; при этом появится добавочная произвольная постоянная. Таким образом, потенциал определен только до аддитивной постоянной, не зависящей от координат, которая может быть выбрана произвольно. При этом может также случиться, что потенциал будет многозначной функцией.

Некоторые примеры, в которых существует потенциал, мы уже рассматривали.

Для одной точки массы m, на которую действует сила тяжести g, если ось z направлена по вертикали вниз, мы имеем

$$X = 0,\ Y = 0,\ Z = mg.$$

Эти уравнения могут быть соединены в одно:

$$U = mgz.$$

Для силы, с которой какая-либо планета притягивается к Солнцу, имеем

$$X = -mM\frac{x}{r^3},\ Y = -mM\frac{y}{r^3},\ Z = -mM\frac{z}{r^3},$$

где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$; m — масса планеты; M — масса Солнца при подходящем выборе единиц измерения массы; начало координат находится в

Солнце, рассматриваемом в состоянии покоя. Положим

$$U = \frac{mM}{r}.$$

Для произвольного числа небесных тел, которые действуют друг на друга по закону Ньютона, имеет место выражение (если воспользоваться обозначениями, которые были применены в конце первой лекции)

$$U = \sum \frac{m_1 m_2}{r_{12}},$$

где сумма взята по всем комбинациям из каждых двух масс m_1, m_2, ..

§ 6

Покой есть частный случай движения. Та часть механики, которая его рассматривает, называется *статикой*. Для перехода к случаю покоя мы должны предположить, что начальные скорости равны нулю, что связи $\varphi = c$, $\psi = e, \ldots$ не зависят от времени и что действующие силы таковы, что вызываемые ими ускорения обращаются в нуль. О таких силах говорят, что они находятся в равновесии. Как условие равновесия найдем из уравнений Лагранжа (17) второй лекции:

$$0 = X_1 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \ldots,$$

$$0 = Y_1 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial y_1} + \ldots,$$

$$0 = Z_1 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z_1} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial z_1} + \ldots,$$

$$0 = X_2 + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\varphi = c, \ \psi = e, \ldots$$

Согласно принципу Даламбера, т. е. уравнению (2), это условие состоит в том, что для всех виртуальных перемещений

$$0 = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

т. е. работа всех соответствующих сил равна нулю. Теорема, утверждающая, что это выражение есть условие равновесия, носит название *принципа возможных перемещений* (или также скоростей). Если силы имеют потенциал U, то условие их равновесия состоит в том, что для каждого виртуального перемещения точки

$$\delta U = 0.$$

Это уравнение имеет место, когда значение U есть минимум или максимум, однако если это уравнение выполняется, то оно не обязательно дает минимум или максимум для функции U.

ЛЕКЦИЯ ЧЕТВЕРТАЯ

(Теорема живой силы. Устойчивость равновесия. Теоремы о движении центра тяжести. Движение системы вокруг ее центра тяжести. Теоремы площадей Моменты вращения)

§ 1

Из общих уравнений движения материальных точек, которые мы рассматривали в двух последних лекциях, мы, при определенных допущениях, сделаем теперь некоторые выводы относительно условий, которым подчиняется движение.

Связи не содержат времени, это — первое предположение, которое мы примем. Пусть смещения, получаемые точками при их движении за элемент времени dt, суть виртуальные смещения, которые определены уравнением (1) третьей лекции. Поэтому в производимых в третьей лекции вычислениях можно всюду вместо знака δ поставить знак d, который означает, что речь идет об изменениях, происходящих в действительном движении за элемент времени dt. Проделав это в уравнении (2) и проинтегрировав его, найдем

$$T_1 - T_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz), \tag{1}$$

где T_0 и T_1 — значения живой силы в произвольно выбранные моменты времени t_0 и t_1. Понятие работы, введенное уравнением (3) третьей лекции, до сих пор определено только для бесконечно малых смещений. Теперь мы обобщим это понятие и будем говорить также о работе сил при конечных перемещениях точек их приложения, понимая под этим сумму значений работ при бесконечно малых смещениях, равных в сумме конечным смещениям. Уравнение (1) показывает, что приращение, получаемое живой силой системы в некоторый интервал времени, равно работе действующей силы при смещениях, которые претерпевают точки. Эта теорема называется *теоремой живой силы.*

Пусть действующие силы имеют потенциал U, и он не содержит времени; в этом случае правая часть уравнения (1) представляет собой разность значений, которые принимает U при $t = t_1$ и $t = t_0$; уравнение можно поэтому записать в виде

$$T = U + h, \tag{2}$$

где $h = \text{const}$. Пусть U — однозначная функция, тогда, если все точки системы вернуть в исходное положение, то живая сила также примет значение, которое она имела прежде. Эта теорема известна под названием *теоремы о сохранении живой силы.*

В случае, если на систему не действует никакая сила или если действующие силы находятся в равновесии, то живая сила постоянна.

§ 2

Теперь мы применим уравнение (2) к теории равновесия, которую дал Дирихле (Crelle's Journal, Bd. 32, стр. 85). В предыдущей лекции при определении равновесия уже упоминалось, что речь идет только о таком случае, когда связи не зависят от времени, а следовательно, выполняется предположение, лежащее в основе настоящего изложения. Кроме этого, чтобы можно было применить уравнение (2), положим, что действующие силы имеют потенциал U, который также не содержит времени. По замечанию, сделанному в конце предыдущей лекции, равновесие между силами имеет место в положении системы, когда U достигает максимума. В таком положении равновесие обладает замечательным свойством — устойчивостью. Это свойство не сохраняется, если в положении равновесия U имеет минимум или не имеет ни минимума, ни максимума. Чтобы пояснить это свойство, представим себе систему в момент времени $t = 0$ в положении, которое бесконечно мало отличается от упомянутого положения равновесия, и примем также, что все точки имеют бесконечно малые скорости. Пусть U_m — максимальное значение U, которое, следовательно, соответствует положению равновесия. Тогда по уравнению (2) $T + (U_m - U)$ — константа, а именно. бесконечно малая константа, так как при $t = 0$ и T и $U_m - U$ — бесконечно малые величины. Поскольку T — положительная величина, то можно заключить, что $U_m - U$ никогда не принимает положительного конечного значения. Переведем затем систему из положения равновесия (или бесконечно близкого к нему) в некоторое отличное от него положение, тогда, как следует из понятия максимума, $U_m - U$ — конечная положительная величина. Отсюда следует, что при сделанных предположениях система только бесконечно мало отклоняется от положения равновесия. При этом T в каждой точке остается бесконечно малым, как и в положении равновесия.

§ 3

Примем теперь, что связи, которым подчинено движение точек, такого вида, что они допускают смещение точек в направлении оси x без изменения их относительного положения. К такому смещению (которое мы обозначим через u') можно применить уравнение (2) третьей лекции, выражающее принцип Даламбера. Тогда мы должны положить в этом уравнении

$$\delta x = u', \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0;$$

отсюда получим, опуская множитель u',

$$\sum m \frac{dx^2}{dt^2} = \sum X. \tag{3}$$

Мы замечаем, что работа действующей силы для этого смещения равна

$$u' \sum X. \tag{4}$$

Пусть возможны также смещения системы в направлении оси y и оси z без изменения относительного расположения точек; тогда находим аналогично

$$\sum m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum Y \quad \text{и} \quad \sum m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum Z. \tag{5}$$

Преобразуем эти уравнения, введя некоторые новые обозначения. Положим

$$M = \sum m,$$

$$M\xi = \sum mx, \quad M\eta = \sum my, \quad M\zeta = \sum mz; \tag{6}$$

M называют *массой системы*, ξ, η, ζ — координатами ее *центра тяжести*. Очевидно, что по этому определению центр тяжести системы не зависит от выбора системы координат. В самом деле, введем наряду с системой x, y, z, вторую систему x', y'. z', как мы это уже неоднократно делали; умножим уравнения (1) первой лекции (которые в этом случае имеют место) на m, просуммируем их по всем точкам системы и получим аналогично уравнениям (6)

$$M\xi' = \sum mx', \; M\eta' = \sum my', \; M\zeta' = \sum mz';$$

разделив на M, имеем

$$\xi' = a + \alpha_1\xi + \alpha_2\eta + \alpha_3\zeta,$$

$$\eta' = b + \beta_1\xi + \beta_2\eta + \beta_3\zeta,$$

$$\zeta' = c + \gamma_1\xi + \gamma_2\eta + \gamma_3\zeta,$$

т. е. уравнения, которые означают, что ξ', η', ζ' и ξ, η, ζ являются координатами *одной и той же* точки в двух системах координат.

Так как массы — положительные величины, то центром тяжести системы точек является определенная *средняя* точка; это значит, что каждая координата центра тяжести заключена между наибольшим и наименьшим значениями соответствующих координат отдельных точек системы.

Полезно отметить, что при вычислении положения центра тяжести данных масс произвольные группы их могут быть представлены сконцентрированными в их центрах тяжести и что центр тяжести масс, лежащих на одной прямой, находится на этой же прямой. Правильность первого утверждения следует непосредственно из уравнений (6), содержащих определение; правильность второго очевидна, если принять прямую, на которой должны лежать массы, за ось x; в таком случае $y = 0$, $z = 0$ и, следовательно, $\eta = 0$ и $\zeta = 0$.

Употребляя введенные обозначения, можно записать уравнения (3) и (5) в виде

$$M\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum X, \quad M\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum Y, \quad M\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum Z; \tag{7}$$

эти формулы выражают так называемые *теоремы движения центра тяжести*. Их можно свести в одну теорему: центр тяжести системы масс движется так, как если бы в нем была сосредоточена вся масса системы и на него действовали бы все силы. При этом движение системы может быть подчинено произвольным связям; они должны только допускать смещения в трех взаимно перпендикулярных направлениях без изменения относительного расположения точек.

Пусть действующие силы таковы, что при смещении, параллельном оси x, их работа равна нулю; тогда по уравнению (4) $\Sigma X = 0$; это уравнение, а также оба аналогичных — для осей y и z — выполняются, если силы имеют потенциал, зависящий только от относительного положения точек. В действительности потенциал не изменяется, если все соответственные координаты точек изменяются на одну и ту же величину. В качестве примера можно привести нашу планетную систему, если пренебречь влиянием неподвижных звезд. Тогда уравнения (7) дают

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0;$$

т. е. центр тяжести движется прямолинейно с постоянной скоростью. Эту теорему называют *теоремой сохранения движения центра тяжести*.

Пусть на точки системы не действуют никакие силы, кроме силы тяготения, тогда уравнения (7) (если принять ось z направленной вертикально вниз) имеют вид

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\eta}{dt^2}=0,\ \frac{d^2\zeta}{dt^2}=g; \tag{8}$$

это значит, что центр тяжести движется по параболе, как отдельная тяжелая материальная точка. Примером является жесткое тяжелое тело, которое можно рассматривать как систему жестко соединенных друг с другом материальных точек; что их бесконечно много — в данном случае несущественно.

§ 4

Приведенные примеры показывают, что иногда в особо простых случаях можно указать движение центра тяжести системы материальных точек. Рекомендуется относить движение точек не к неподвижной в пространстве системе координат, а к системе, начало координат которой совпадает с движущимся центром тяжести, а оси имеют постоянные направления. Но при такой координатной системе нельзя непосредственно использовать уравнения, которые мы установили для неподвижных систем.

Введем наряду с неподвижной в пространстве системой координат x, y, z вторую, подвижную — x', y', z', в которой для каждой точки имеют место соотношения

$$x=\xi+x',\quad y=\eta+y',\quad z=\zeta+z',$$

где ξ, η, ζ — данные функции времени. В новых координатах уравнение (2) третьей лекции, выражающее принцип Даламбера, имеет следующий вид:

$$0=\sum\left(m\frac{d^2x'}{dt^2}+m\frac{d^2\xi}{dt^2}-X\right)\delta x'+$$
$$+\left(m\frac{d^2y'}{dt^2}+m\frac{d^2\eta}{dt^2}-Y\right)\delta y'+$$
$$+\left(m\frac{d^2z'}{dt^2}+m\frac{d^2\zeta}{dt^2}-Z\right)\delta z',$$

и это уравнение должно выполняться для всех возможных вариаций $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$; т. е. принцип Даламбера можно применять в одной и той же форме как в движущейся, так и в покоящейся системах координат, если только к каждой силе (X, Y, Z) добавлять силу, компоненты которой

$$-m\frac{d^2\xi}{dt^2},\quad -m\frac{d^2\eta}{dt^2},\quad -m\frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Если точка (ξ, η, ζ) является центром тяжести системы масс, для которых выполняется теорема сохранения движения центра тяжести (например, центр тяжести нашей системы планет), то эти дополнительные силы равны нулю; массы движутся вокруг центра тяжести так, как будто он неподвижен.

Если (ξ, η, ζ) — центр тяжести системы материальных точек, на которые действует только сила тяжести и которые связаны друг с другом так, что в направлениях осей координат возможны перемещения без изменения их относительного расположения, то будут иметь место уравнения (8) (если по-прежнему ось z направлена вертикально вниз); и одновременно

$$X=0,\quad Y=0,\quad Z=mg.$$

Отсюда следует, что точки движутся вокруг центра тяжести так, как если бы они не подвергались действию сил и их центр тяжести находился бы в покое.

§ 5

Наконец, предположим, что связи точек системы таковы, что они допускают вращение вокруг оси z без изменения относительного положения точек. Положим

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta,$$

тогда бесконечно малому вращению вокруг оси z соответствует увеличение всех углов ϑ, относящихся к отдельным точкам системы, на такую же бесконечно малую величину, которую мы обозначим r'; отсюда имеем для такого вращения

$$\begin{aligned} \delta x &= -\rho \sin \vartheta \, r' = -yr', \\ \delta y &= \rho \cos \vartheta \, r' = xr', \\ \delta z &= 0; \end{aligned}$$

при сделанном предположении эти величины можно подставить как виртуальные смещения в уравнение (2) третьей лекции. По сокращении множителя r' получаем

$$\sum m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX). \tag{9}$$

Мы отмечаем, что работа действующей силы для упомянутого вращения равна

$$r' \sum (xY - yX); \tag{10}$$

множитель при r' в этом выражении, или правую часть уравнения (9), называют *моментом вращения* действующей силы относительно оси z.

Как мы уже видели при рассмотрении первого закона Кеплера в первой лекции,

$$x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\rho^2 \frac{d\vartheta}{dt} \right)$$

и $\rho^2 d\vartheta$ — удвоенная площадь, которую радиус-вектор ρ описывает при возрастании ϑ за элемент времени dt. Поэтому уравнение (9) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \sum m \rho^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \sum (xY - yX). \tag{11}$$

Это уравнение выражает так называемую *теорему площадей* для плоскости xy.

Если момент вращения силы относительно оси z равен нулю, то уравнение (11) интегрируемо и дает

$$\sum m \rho^2 \frac{d\vartheta}{dt} = \text{const}.$$

Выраженную этим уравнением теорему называют *теоремой сохранения площадей* для плоскости xOy.

Рассуждения, которые мы провели для оси z, будут справедливыми для осей x и y, если соответствующим образом заменить x, y, z.

Если силы имеют потенциал, который зависит только от относительного расположения точек, то он не изменяется при вращении системы вокруг какой-либо оси координат; поэтому момент вращения сил относительно каждой оси координат равен нулю; если связи точек допускают вращение вокруг каждой оси координат, то теорема сохранения площадей имеет место для каждой координатной плоскости. Примером этого является наша планетная система.

ЛЕКЦИЯ ПЯТАЯ

(Определение положения твердого тела. Бесконечно малое смещение твердого тела. Винтовое движение. Зависимость момента вращения системы сил от осей координат. Главный момент вращения)

§ 1

В предыдущей лекции, чтобы сделать выводы из принципа Даламбера, мы рассматривали специальные бесконечно малые смещения, которые могут происходить с системой материальных точек, жестко связанных между собой, а именно, смещение в определенном направлении и вращение вокруг определенной оси. Теперь мы рассмотрим произвольные бесконечно малые смещения, возможные для таких систем.

Введем две прямоугольные системы координат, одна из которых связана с упомянутой системой или *телом* (можно называть его как угодно), другая задана в пространстве. Пусть x, y, z — координаты точки тела в первой системе, ξ, η, ζ — координаты той же самой точки — во второй; тогда

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \\ \eta &= \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \\ \zeta &= \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \end{aligned} \tag{1}$$

где двенадцать величин α, β, γ зависят от относительного расположения систем координат, т. е. от положения движущегося тела. Величины α, β, γ без индексов — это значения ξ, η, ζ для $x=0$, $y=0$, $z=0$, а девять остальных являются косинусами углов, которые оси x, y, z образуют с осями ξ, η, ζ. Из этого геометрического смысла названных величин следует, что, наоборот,

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1(\xi-\alpha) + \beta_1(\eta-\beta) + \gamma_1(\zeta-\gamma), \\ y &= \alpha_2(\xi-\alpha) + \beta_2(\eta-\beta) + \gamma_2(\zeta-\gamma), \\ z &= \alpha_3(\xi-\alpha) + \beta_3(\eta-\beta) + \gamma_3(\zeta-\gamma). \end{aligned} \tag{2}$$

На основании уравнений (1) и (2) уравнение

$$(\xi-\alpha^2) + (\eta-\beta)^2 + (\zeta-\gamma)^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

превращается в тождество. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} &\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \qquad && \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0, \\ &\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, && \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0, \\ &\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1, && \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

и

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1,\quad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0,$$
$$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1,\quad \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0, \tag{4}$$
$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1,\quad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0,$$

т. е. получим шесть независимых друг от друга соотношений между девятью косинусами углов в двух различных формах. Из них вытекают и другие соотношения, которые понадобятся нам в дальнейшем. Если разрешить уравнения (1) относительно x, y, z, то получатся выражения, совпадающие с уравнениями (2). Отсюда, если положить

$$\Delta=\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+\beta_1(\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2)+\gamma_1(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2), \tag{5}$$

следует

$$\alpha_1=\frac{\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2}{\Delta},$$
$$\beta_1=\frac{\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2}{\Delta},$$
$$\gamma_1=\frac{\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2}{\Delta}.$$

Возведем в квадрат эти уравнения и сложим их; принимая во внимание уравнения (3), получим

$$\Delta^2=1,$$

отсюда

$$(\alpha_2^2+\beta_2^2+\gamma_2^2)(\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2)-(\alpha_2\alpha_3+\beta_2\beta_3+\gamma_2\gamma_3)^2=1,$$

что равносильно

$$(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)^2+(\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2)^2+(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)^2=1.$$

Δ может иметь значения $+1$ или -1, но при движении тела не может изменяться скачками от одного значения к другому. Представим себе, что тело находится в положении, при котором совпадают направления осей x и ξ, осей y и η, тогда $\alpha_1=1$, $\beta_2=1$, $\gamma_3=+1$ или -1, в то время как другие шесть косинусов обращаются в нуль, как это следует из уравнений (3) и (4); это означает, что ось z имеет то же самое направление, что и ось ξ, или противоположное. В первом случае, как показывает уравнение (5), $\Delta=+1$, во втором $\Delta=-1$. Системы координат x, y, z и ξ, η, ζ должны быть выбраны так, что первый случай имеет место, если они, как говорят, *конгруентны*. Тогда

$$\alpha_1=\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2,$$
$$\beta_1=\gamma_2\alpha_3-\gamma_3\alpha_2, \tag{6}$$
$$\gamma_1=\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2.$$

Уравнения (1) остаются неизменными, если в них одновременно произвести циклическую перестановку индексов 1, 2, 3 и букв x, y, z; при такой замене Δ также не изменяется; аналогичной заменой в уравнениях (6) получим

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \beta_3\gamma_1 - \beta_1\gamma_3, & \alpha_3 &= \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1,\\
\beta_2 &= \gamma_3\alpha_1 - \gamma_1\alpha_3, & \beta_3 &= \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1,\\
\gamma_2 &= \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, & \gamma_3 &= \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1.
\end{aligned} \tag{7}$$

Между девятью косинусами α, β, γ существует шесть независимых друг от друга соотношений; поэтому косинусы должны выражаться через три независимых величины. Выразим их следующим образом.

Между α_3, β_3, γ_3 существует одно уравнение

$$\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1;$$

эти величины мы можем выразить через две независимые величины ϑ и φ, положив

$$\alpha_3 = \cos\varphi\cdot\sin\vartheta,$$

$$\beta_3 = \sin\varphi\cdot\sin\vartheta,$$

$$\gamma_3 = \cos\vartheta,$$

но тогда будет выполняться приведенное уравнение. Через ϑ и φ величины α_3, β_3, γ_3 определяются однозначно; обратное, однако, не имеет места. Кроме того, что ϑ и φ могут быть увеличены на произвольный угол, кратный 2π, знак ϑ может быть выбран произвольно, если заданы α_3, β_3, γ_3. Знак ϑ можно изменить на противоположный, нужно только увеличить при этом φ на π. В каждом отдельном положении тела значения ϑ и φ должны выбираться произвольно, насколько допускают приведенные выше соображения. Для каждого нового положения, которое непрерывно следует из данного, эта неопределенность в выборе значения ϑ и φ увеличивается вследствие предположения, что они непрерывно изменяются с изменением положения тела. ϑ и φ имеют простой геометрический смысл; ϑ — угол, который образуют друг с другом оси z и ζ; φ — угол, который описывает плоскость, проходящая через ось ζ, если из положения, при котором плоскость параллельна оси ζ, она переходит в положение, параллельное оси z; поворот при этом осуществляется в том направлении, в каком плоскость должна быть повернута на прямой угол, чтобы стать параллельной оси η. Величины ϑ и φ — полярные координаты точки на сферической поверхности, соотнесенной оси z; полюсы поверхности соответствуют направлению оси ξ. Угол φ отсчитывается по большому кругу, образуемому плоскостью ζ, ξ.

Между косинусами γ_1, γ_2, γ_3 существует соотношение

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1;$$

мы выполним это условие, если положим

$$\gamma_1 = \cos f \sin\vartheta, \quad \gamma_2 = \sin f\cdot\sin\vartheta, \quad \gamma_3 = \cos\vartheta.$$

Если даны γ_1, γ_2, γ_3, то тем самым определяется f с точностью до слагаемого, кратного 2π, так как ϑ уже определено; ϑ — угол, который описывает плоскость, проходящая через ось z, если из положения, при котором она параллельна оси x, плоскость переходит в положение, при котором она параллельна оси ζ. При этом поворот происходит в направлении, в каком плоскость должна быть повернута на прямой угол, чтобы стать параллельной оси y. Величины ϑ и f — полярные координаты той точки на сферической поверхности, которая задается направлением оси ζ, полюс поверхности определяется направлением оси z, а большой круг, по которому отсчитывается угол f, параллелен плоскости zx.

Зная пять величин: α_3, β_3, γ_3, γ_1, γ_2, можно теперь с помощью уравнений (6) и (7) однозначно вычислить четыре другие величины $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$; взяв те из этих уравнений, которые выражают α_1 и β_2, получим

$$\alpha_1(1-\gamma_3^2) = -\alpha_3\gamma_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_2,$$

$$\beta_2(1-\gamma_3^2) = -\alpha_3\gamma_1 - \beta_3\gamma_2\gamma_3,$$

а взяв уравнения, которые выражают α_2 и β_1, найдем

$$\alpha_2(1-\gamma_3^2) = -\alpha_3\gamma_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_1,$$

$$\beta_1(1-\gamma_3^2) = \alpha_3\gamma_2 - \beta_3\gamma_1\gamma_3.$$

Подставляем сюда значения α_3, β_3, γ_3, γ_1, γ_2, тогда множитель $1-\gamma_3^2$ сокращается, т. е. уничтожается $\sin^2\vartheta$; отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\cos\varphi\cdot\cos f\cdot\cos\vartheta - \sin\varphi\cdot\sin f,\\
\beta_1 &= -\sin\varphi\cdot\cos f\cdot\cos\vartheta + \cos\varphi\cdot\sin f,\\
\gamma_1 &= \cos f\cdot\sin\vartheta,\\
\alpha_2 &= -\cos\varphi\cdot\sin f\cdot\cos\vartheta + \sin\varphi\cdot\cos f,\\
\beta_2 &= -\sin\varphi\cdot\sin f\cdot\cos\vartheta - \cos\varphi\cdot\cos f,\\
\gamma_2 &= \sin f\cdot\sin\vartheta,\\
\alpha_3 &= \cos\varphi\cdot\sin\vartheta,\\
\beta_3 &= \sin\varphi\cdot\sin\vartheta,\\
\gamma_3 &= \cos\vartheta.
\end{aligned}\tag{8}$$

§ 2

Рассмотрим теперь бесконечно малое смещение, которое получает тело, а вместе с ним и система координат x, y, z. Изменение, которое испытывают некоторые рассматриваемые величины, обозначим через δ. Тогда из уравнения (1) следует

$$\begin{aligned}
\delta\xi &= \delta\alpha + x\delta\alpha_1 + y\delta\alpha_2 + z\delta\alpha_3,\\
\delta\eta &= \delta\beta + x\delta\beta_1 + y\delta\beta_2 + z\delta\beta_3,\\
\delta\zeta &= \delta\gamma + x\delta\gamma_1 + y\delta\gamma_2 + z\delta\gamma_3.
\end{aligned}\tag{9}$$

Три величины $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ могут быть выбраны произвольно, но это не относится к девяти величинам $\delta\alpha_1, \delta\beta_1, \ldots$; они могут быть выражены через три независимые величины, например через $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, δf, с помощью уравнений (8). Выберем вместо $\delta\vartheta$, $\delta\varphi$, δf, чтобы сохранить симметрию формул, три другие бесконечно малые величины, которые обозначим через π', χ', ρ', и определим их следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
\pi' &= \beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 + \beta_3\delta\gamma_3,\\
\chi' &= \gamma_1\delta\alpha_1 + \gamma_2\delta\alpha_2 + \gamma_3\delta\alpha_3,\\
\rho' &= \alpha_1\delta\beta_1 + \alpha_2\delta\beta_2 + \alpha_3\delta\beta_3.
\end{aligned}\tag{10}$$

Объединив эти уравнения с теми, которые получаются из уравнений (4), именно с уравнениями

$$
\begin{aligned}
0 &= \alpha_1\delta\alpha_1 + \alpha_2\delta\alpha_2 + \alpha_3\delta\alpha_3,\\
0 &= \beta_1\delta\beta_1 + \beta_2\delta\beta_2 + \beta_3\delta\beta_3,\\
0 &= \gamma_1\delta\gamma_1 + \gamma_2\delta\gamma_2 + \gamma_3\delta\gamma_3,\\
-\pi' &= \gamma_1\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\beta_3,\\
-\chi' &= \alpha_1\delta\gamma_1 + \alpha_2\delta\gamma_2 + \alpha_3\delta\gamma_3,\\
-\rho' &= \beta_1\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\alpha_3,
\end{aligned}
$$

можно выразить девять величин $\delta\alpha_1$, $\delta\beta_1, \ldots$ через π', χ', ρ'. Найдем, принимая во внимание уравнения (3):

$$
\begin{aligned}
&\delta\alpha_1 = \gamma_1\chi' - \beta_1\rho', \quad \delta\beta_1 = \alpha_1\rho' - \gamma_1\pi', \quad \delta\gamma_1 = \beta_1\pi' - \alpha_1\chi',\\
&\delta\alpha_2 = \gamma_2\chi' - \beta_2\rho', \quad \delta\beta_2 = \alpha_2\rho' - \gamma_2\pi', \quad \delta\gamma_2 = \beta_2\pi' - \alpha_2\chi',\\
&\delta\alpha_3 = \gamma_3\chi' - \beta_3\rho', \quad \delta\beta_3 = \alpha_3\rho' - \gamma_3\pi', \quad \delta\gamma_3 = \beta_3\pi' - \alpha_3\chi'.
\end{aligned} \tag{11}
$$

Уравнения (9) вследствие (11) имеют вид

$$
\begin{aligned}
\delta\xi &= \delta\alpha + (\zeta - \gamma)\chi' - (\eta - \beta)\rho',\\
\delta\eta &= \delta\beta + (\xi - \alpha)\rho' - (\zeta - \gamma)\pi',\\
\delta\zeta &= \delta\gamma + (\eta - \beta)\pi' - (\xi - \alpha)\chi'
\end{aligned} \tag{12}
$$

или

$$
\begin{aligned}
\delta\xi &= \delta\alpha - \gamma\chi' + \beta\rho' + \zeta\chi' - \eta\rho',\\
\delta\eta &= \delta\beta - \alpha\rho' + \gamma\pi' - \xi\rho' - \zeta\pi',\\
\delta\zeta &= \delta\gamma - \beta\pi' + \alpha\chi' + \eta\pi' - \xi\chi'.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Введем следующее определение. Назовем бесконечно малое смещение какой-либо системы материальных точек составленным из нескольких бесконечно малых смещений системы, если изменение координат каждой точки равно сумме изменений координат соответственных слагающих смещений. Это определение относится к ортогональной системе координат, которую нужно ввести; но формулы преобразования ортогональной системы координат, которые мы уже неоднократно употребляли, показывают, что смещение, которое можно считать составленным из нескольких других, является таким же относительно любой другой системы координат. Они показывают также, что два смещения точки складываются как две силы, действующие на точку, а именно, согласно теореме о параллелограмме.

Смещение нашего тела, представленное уравнениями (12), может поэтому считаться составленным из шести смещений, а именно, из таких, которые имеют место, если шесть величин $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, π', χ', ρ' отличны от нуля.

Пусть только $\delta\gamma$ отлично от нуля, т. е. $\delta\xi = 0$, $\delta\eta = 0$, $\delta\zeta = \delta\gamma$; это означает, что тело претерпевает сдвиг на $\delta\gamma$ в направлении оси ζ, при котором все линии в нем остаются параллельными себе. Пусть только $\delta\alpha$ или только $\delta\beta$ отлично от нуля, тогда тело претерпевает такой же сдвиг в направлении оси ξ на $\delta\alpha$ или в направлении оси η на $\delta\beta$. Пусть $\pi' = 0$,

$\chi' = 0$, $\rho' = 0$, тогда тело испытывает аналогичный сдвиг в направлении и на длину линии, проекции которой на оси ξ, η, ζ равны $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$.

Пусть только ρ' отлично от нуля, тогда уравнения (12) будут

$$\delta\xi = -(\eta - \beta)\rho', \quad \delta\eta = (\xi - \alpha)\rho', \quad \delta\zeta = 0.$$

При движении, определенном таким образом, точки линии $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$ остаются на своих местах; такое движение называют *вращением* вокруг данной линии, как вокруг оси. Точка вне оси проходит при таком движении расстояние

$$\sqrt{\delta\xi^2 + \delta\eta^2} = \rho'\sqrt{(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2},$$

вернее — расстояние равно абсолютному значению этого выражения. Оно равно абсолютному значению ρ', если $(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = 1$; следовательно, абсолютное значение ρ' есть *угол вращения*. Если ρ' положительно, то для точек тела, для которых $\xi - \alpha$ положительно, $\delta\eta$ тоже положительно. Таким образом тело вращается в том направлении, в каком должна вращаться некоторая его прямая линия, чтобы, описав прямой угол, перейти из положения, при котором она параллельна оси ξ, в положение, при котором прямая параллельна оси η. Если ρ' отрицательно, то вращение происходит в противоположном направлении.

Пусть π' или χ' отлично от нуля, тогда тело вращается вокруг прямой $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$ или вокруг прямой $\zeta = \gamma$, $\xi = \alpha$ на расстоянии, равном абсолютному значению π' или χ'; направление вращения определяют по только что сформулированному правилу, если при этом изменить по циклу буквы ξ, η, ζ и π', χ', ρ'.

Посмотрим теперь, как складываются три таких вращения, если они одновременно имеют место. Уравнения (12) дают тогда

$$\delta\xi = (\zeta - \gamma)\chi' - (\eta - \beta)\rho',$$
$$\delta\eta = (\xi - \alpha)\rho' - (\zeta - \gamma)\pi',$$
$$\delta\zeta = (\eta - \beta)\pi' - (\xi - \alpha)\chi'.$$

Проследим за точкой тела, для которой

$$(\xi - \alpha) : (\eta - \beta) : (\zeta - \gamma) = \pi' : \chi' : \rho', \tag{14}$$

а поэтому для нее

$$\delta\xi = 0, \quad \delta\eta = 0, \quad \delta\zeta = 0;$$

это означает, что рассматриваемое движение — вращение, ось которого задана уравнениями (14). Квадрат расстояния, которое пробегает какая-либо точка, т. е. $\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2$, легко может быть приведен к форме

$$(\pi'^2 + \chi'^2 + \rho'^2)((\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + (\zeta - \gamma)^2) -$$
$$-(\pi'(\xi - \alpha) + \chi'(\eta - \beta) + \rho'(\zeta - \gamma))^2.$$

Выберем теперь точку (ξ, η, ζ) так, чтобы

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 + (\zeta - \gamma)^2 = 1$$

и

$$\pi'(\xi - \alpha) + \chi'(\eta - \beta) + \rho'(\zeta - \gamma) = 0,$$

т. е. так, что линия, которая соединяет ее с точкой $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$, имеет длину, равную единице, и перпендикулярна к оси вращения (проходящей через точку); тогда пробегаемое расстояние $\sqrt{\pi'^2+\chi'^2+\rho'^2}$ определяет угол поворота.

Определим теперь направление вращения. Для этой цели установим для оси вращения некоторое направление, одно из двух противоположных, которые мы можем выбрать согласно уравнениям (14); а именно, положим косинусы углов, образованных осью вращения с осями координат, равными

$$\frac{\pi'}{\sqrt{\pi'^2+\chi'^2+\rho'^2}}, \quad \frac{\chi'}{\sqrt{\pi'^2+\chi'^2+\rho'^2}}, \quad \frac{\rho'}{\sqrt{\pi'^2+\chi'^2+\rho'^2}}, \tag{15}$$

где квадратные корни берутся с положительным знаком. Мы будем считать вращение вокруг определенной оси положительным или отрицательным, смотря по тому, в каком из двух противоположных направлений оно происходит; установим также, что знак вращения не переходит в противоположный, если ось вращения меняется вследствие непрерывного изменения π', χ', ρ' (π', χ', ρ' не обращаются в нуль одновременно). Мы можем и впредь считать положительным вращение, определенное некоторыми значениями π', χ', ρ', вокруг определенной оси, заданной выражениями (15). Пусть $\pi'=0$, $\chi'=0$, тогда имеем положительное вращение вокруг оси, направленной так же как ось ζ, или противоположно ей, смотря по тому, положительно или отрицательно $\frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2}}$. Поэтому положительное вращение вокруг оси ζ получим в *том* направлении, в котором некоторая прямая линия должна повернуться на прямой угол, чтобы из положения, когда она параллельна оси ξ, прямая перешла в положение, при котором она параллельна оси η. Чтобы пояснить представление о положительном вращении вокруг некоторой оси, заметим еще следующее.

Выберем систему координат следующим образом. Пусть фигура человека расположена так, что линия, проведенная от ног к голове, параллельна оси ζ, и человек смотрит в направлении оси η, тогда ось ξ будет направлена вдоль правой вытянутой руки. Положительное вращение фигуры переместит ее правую сторону вперед. Положительное вращение вокруг некоторой оси также переместит правую сторону фигуры вперед в случае, если фигура человека расположена так, что ось вращения идет от ног к голове.

После проведенного рассуждения мы будем рассматривать π', χ', ρ' как координаты точки в системе координат ξ, η, ζ, тогда направление линии, проведенной от начала координат к этой точке, дает нам такое направление оси вращения, которое имеет место при положительном вращении вокруг нее.

Легко заключить поэтому, что значения π', χ', ρ', соответствующие определенному вращению, изменяются с системой координат; они изменяются как компоненты скорости или силы — их называют также компонентами вращения по координатным осям.

Необходимо заметить, что каждое бесконечно малое смещение тела (представленное уравнениями (12)) можно рассматривать как составленное из вращения вокруг известной оси, проходящей через произвольно выбранную точку $\xi=\alpha$, $\eta=\beta$, $\zeta=\gamma$, и из сдвига, когда все линии тела остаются параллельными себе.

Рассуждения, совершенно аналогичные проведенным при рассмотрении уравнений (12), можно провести с уравнениями (13). Положим

$$\begin{aligned} \delta\alpha-\gamma\chi'+\beta\rho' &= \lambda', \\ \delta\beta-\alpha\rho'+\gamma\pi' &= \mu', \\ \delta\gamma-\beta\pi'+\alpha\chi' &= \nu'; \end{aligned} \tag{16}$$

это дает

$$\begin{aligned}\delta\xi &= \lambda' + \zeta\chi' - \eta\rho',\\ \delta\eta &= \mu' + \xi\rho' - \zeta\pi',\\ \delta\zeta &= \nu' + \eta\pi' - \xi\chi'.\end{aligned} \tag{17}$$

Отсюда можно заключить, что упомянутое смещение тела может рассматриваться как составленное из вращения вокруг оси, проходящей через начало координат ξ, η, ζ (компоненты этого вращения π', χ', ρ'), и из сдвига, компоненты которого λ', μ', ν'. Компоненты вращения те же, как если бы была взята ось вращения, проходящая через точку $\xi = \alpha$, $\eta = \beta$, $\zeta = \gamma$, но компоненты сдвига отличны от тех, которые даны уравнениями (12).

Уравнения (17) действительны для любой системы координат; выберем ее подходящим образом в зависимости от рассматриваемого смещения. В этом случае возможно значительное упрощение. Полагаем ось ζ параллельной оси вращения, которое оказывается некоторой частью смещения при этой системе координат; в таком случае имеем $\pi' = 0$, $\chi' = 0$ и уравнения (17) примут вид

$$\begin{aligned}\delta\xi &= \lambda' - \eta\rho',\\ \delta\eta &= \mu' + \xi\rho',\\ \delta\zeta &= \nu'.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что имеется такая прямая линия, а именно линия, параллельная оси ζ, для точек которой $\delta\xi = 0$ и $\delta\eta = 0$. Уравнения этой линии

$$\lambda' - \eta\rho' = 0, \quad \mu' + \xi\rho' = 0.$$

Совместим с ней ось ξ; тогда $\lambda' = 0$ и $\mu' = 0$, следовательно,

$$\begin{aligned}\delta\xi &= -\eta\rho',\\ \delta\eta &= \xi\rho',\\ \delta\zeta &= \nu'.\end{aligned}$$

Представленное этими уравнениями движение называют *винтовым движением*, а ось ζ — его осью; оно составлено из вращения вокруг оси и сдвига в ее направлении. Таким образом, самое общее бесконечно малое движение системы точек, жестко соединенных между собой, является винтовым движением.

§ 3

Смещения всех точек рассматриваемой системы или тела мы выразим уравнениями (17) посредством шести взаимно независимых бесконечно малых величин λ', μ', ν', π', χ', ρ', которые относятся к системе координат ξ, η, ζ. Смещение тела состоит здесь из вращения вокруг оси, проходящей через точку $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ и сдвига; λ', μ', ν' являются компонентами сдвига; π', χ', ρ' — компонентами вращения по осям ξ, η, ζ. Подобным образом смещения всех точек можно выразить шестью другими независимыми друг от друга величинами, определяющими положение системы координат x, y, z перед смещением тела. Назовем эти шесть величин u', v', w', p', q', r' и определим их следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} u' &= \alpha_1\delta\alpha + \beta_1\delta\beta + \gamma_1\delta\gamma, \\ v' &= \alpha_2\delta\alpha + \beta_2\delta\beta + \gamma_2\delta\gamma, \\ w' &= \alpha_3\delta\alpha + \beta_3\delta\beta + \gamma_3\delta\gamma, \end{aligned} \tag{18}$$

и

$$\begin{aligned} p' &= \alpha_3\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\gamma_2, \\ q' &= \alpha_1\delta\alpha_3 + \beta_1\delta\beta_3 + \gamma_1\delta\gamma_3, \\ r' &= \alpha_2\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\gamma_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Если соединить три последних уравнения с теми, которые получаются вариацией уравнений (3), т. е. с уравнениями

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1\delta\alpha_1 + \beta_1\delta\beta_1 + \gamma_1\delta\gamma_1, \\ 0 &= \alpha_2\delta\alpha_2 + \beta_2\delta\beta_2 + \gamma_2\delta\gamma_2, \\ 0 &= \alpha_3\delta\alpha_3 + \beta_3\delta\beta_3 + \gamma_3\delta\gamma_3, \\ -p' &= \alpha_2\delta\alpha_3 + \beta_2\delta\beta_3 + \gamma_2\delta\gamma_3, \\ -q' &= \alpha_3\delta\alpha_1 + \beta_3\delta\beta_1 + \gamma_3\delta\gamma_1, \\ -r' &= \alpha_1\delta\alpha_2 + \beta_1\delta\beta_2 + \gamma_1\delta\gamma_2, \end{aligned}$$

то найдем, принимая во внимание уравнения (4),

$$\begin{aligned} &\delta\alpha_1 = \alpha_2 r' - \alpha_3 q', \quad \delta\alpha_2 = \alpha_3 p' - \alpha_1 r', \quad \delta\alpha_3 = \alpha_1 q' - \alpha_2 p', \\ &\delta\beta_1 = \beta_2 r' - \beta_3 q', \quad \delta\beta_2 = \beta_3 p' - \beta_1 r', \quad \delta\beta_3 = \beta_1 q' - \beta_2 p', \\ &\delta\gamma_1 = \gamma_2 r' - \gamma_3 q', \quad \delta\gamma_2 = \gamma_3 p' - \gamma_1 r', \quad \delta\gamma_3 = \gamma_1 q' - \gamma_2 p'. \end{aligned} \tag{20}$$

Составим компоненты смещения точки (x, y, z) или, что то же самое, точки (ξ, η, ζ) по осям x, y, z, т. е. подсчитаем значения выражений

$$\begin{aligned} &\alpha_1\delta\xi + \beta_1\delta\eta + \gamma_1\delta\zeta, \\ &\alpha_2\delta\xi + \beta_2\delta\eta + \gamma_2\delta\zeta, \\ &\alpha_3\delta\xi + \beta_3\delta\eta + \gamma_3\delta\zeta; \end{aligned}$$

находим тогда из уравнений (9), с помощью (18) и (20)

$$\begin{aligned} &u' + zq' - yr', \\ &v' + xr' - zp', \\ &w' + yp' - xq'. \end{aligned} \tag{21}$$

Эти выражения имеют ту же форму, что и уравнения (17) для $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\zeta$; из них следует, что смещение, о котором идет речь, может рассматриваться как составленное из вращения вокруг оси, проходящей через точку $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, и сдвига, компоненты которых по осям x, y, z равны соответственно p', q', r' и u', v', w'.

Поскольку p', q', r' и π', χ', ρ' являются компонентами одного и того же вращения по осям x, y, z и по осям ξ, η, ζ, то согласно сделанному нами на стр. 43 замечанию, должно быть

$$
\begin{aligned}
p' &= \alpha_1\pi' + \beta_1\chi' + \gamma_1\rho', \\
q' &= \alpha_2\pi' + \beta_2\chi' + \gamma_2\rho', \\
r' &= \alpha_3\pi' + \beta_3\chi' + \gamma_3\rho'.
\end{aligned} \tag{22}
$$

Эти уравнения легко получаются из (19) и (11), если принять во внимание (6) и (7).

Более сложны уравнения, которые выражают u', v', w' через λ', μ', ν', π', χ', ρ'; они получаются из (18) и (16):

$$
\begin{aligned}
u' &= \alpha_1\lambda' + \beta_1\mu' + \gamma_1\nu' + (\gamma_1\beta - \beta_1\gamma)\pi' + (\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha)\chi' + (\beta_1\alpha - \alpha_1\beta)\rho', \\
v' &= \alpha_2\lambda' + \beta_2\mu' + \gamma_2\nu' + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma)\pi' + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha)\chi' + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta)\rho', \\
w' &= \alpha_3\lambda' + \beta_3\mu' + \gamma_3\nu' + (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma)\pi' + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha)\chi' + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta)\rho'.
\end{aligned} \tag{23}
$$

§ 4

Дополним эти объяснения еще следующими замечаниями.

По определениям работы и составного бесконечно малого смещения работа сил, действующих на систему материальных точек при каком-то бесконечно малом смещении системы, которое может рассматриваться как состоящее из нескольких, равна сумме работ тех же сил на слагающих смещениях. Пусть смещение таково, что относительное расположение точек остается при нем неизменным; тогда работа при таком смещении может быть представлена как

$$
Xu' + Yv' + Zw' + M_xp' + M_yq' + M_zr' \tag{24}
$$

или также

$$
\Xi\lambda' + H\mu' + Q\nu' + M_\xi\pi' + M_\eta\chi' + M_\zeta\rho', \tag{25}
$$

причем X, Y, Z, Ξ, H, Q означают суммы компонент сил по осям x, y, z и ξ, η, ζ; M_x, M_y, M_z, M_ξ, M_η, M_ζ — моменты вращения сил относительно осей x, y, z и ξ, η, ζ; это следует из замечаний, которые были сделаны в прошлой лекции о сумме компонент и моментах вращения системы сил. Оба выражения, установленные для работы, должны быть равны друг другу, поскольку выполняются уравнения (22) и (23). Подставляя в них значения u', v', w', p', q', r' и приравнивая коэффициенты при λ', μ', ν', π', χ', ρ', получим

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \alpha_1X + \alpha_2Y + \alpha_3Z, \\
H &= \beta_1X + \beta_2Y + \beta_3Z, \\
Q &= \gamma_1X + \gamma_2Y + \gamma_3Z,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_\xi &= (\gamma_1\beta - \beta_1\gamma)X + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma)Y + (\gamma_2\beta - \beta_3\gamma)Z + \\
&\quad + \alpha_1M_x + \alpha_2M_y + \alpha_3M_z, \\
M_\eta &= (\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha)X + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha)Y + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha)Z + \\
&\quad + \beta_1M_x + \beta_2M_y + \beta_3M_z, \\
M_\zeta &= (\beta_1\alpha - \alpha_1\beta)X + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta)Y + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta)Z + \\
&\quad + \gamma_1M_x + \gamma_2M_y + \gamma_3M_z.
\end{aligned}
$$

Эти уравнения показывают, как изменяются суммы компонент и моменты вращения системы сил при переходе от одной ортогональной системы координат к другой. Три последних из этих уравнений существенно упрощаются, если обе системы имеют общее начало координат; это означает, что $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; уравнения тогда примут вид

$$M_\xi = \alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z,$$

$$M_\eta = \beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z,$$

$$M_\zeta = \gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z,$$

или также

$$M_x = \alpha_1 M_\xi + \beta_1 M_\eta + \gamma_1 M_\zeta,$$

$$M_y = \alpha_2 M_\xi + \beta_2 M_\eta + \gamma_2 M_\zeta,$$

$$M_z = \alpha_3 M_\xi + \beta_3 M_\eta + \gamma_3 M_\zeta,$$

и они показывают, что если M_x, M_y, M_z рассматриваются как ортогональные координаты точки в системе x, y, z, то положение этой точки не зависит от направления осей координат. Момент вращения относительно той *оси*, которая проходит через эту точку и начало координат, называется *главным моментом вращения.*

Если вместо системы сил имеется одна сила, компоненты которой X, Y, Z и точка приложения которой имеет координаты x, y, z, то по определению момента вращения, данному формулой (10) прошлой лекции,

$$M_x = yZ - zY, \quad M_y = zX - xZ, \quad M_z = xY - yX.$$

В таком случае ось главного момента вращения перпендикулярна к направлению силы и линии, которая соединяет начало координат и точку (x, y, z); тогда

$$XM_x + YM_y + ZM_z = 0$$

и

$$xM_x + yM_y + zM_z = 0.$$

Главный момент вращения равен

$$\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2},$$

или

$$\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) - (xX + yY + zZ)^2}\ ;$$

это означает, что он равен абсолютному значению произведения расстояния точки (x, y, z) от начала координат на величину силы и на синус угла, который направление силы образует с линией, соединяющей начало координат с точкой (x, y, z).

ЛЕКЦИЯ ШЕСТАЯ

(Живая сила движущегося твердого тела. Моменты инерции. Главные оси. Дифференциальные уравнения движения твердого тела для случая, когда оно свободно, и для случая, когда одна его точка закреплена)

§ 1

Если система жестко соединенных материальных точек движется, то смещение, которое она претерпевает за элемент времени dt, нам известно из прошлой лекции. Поэтому мы можем во всех выведенных в пятой лекции формулах вместо δ поставить d, т. е. показать, что смещение происходит за элемент времени dt. Тогда все бесконечно малые величины, обозначенные буквами со штрихами, должны быть пропорциональными dt; каждую из них мы представим в виде произведения dt на соответствующую величину, обозначенную буквой без штриха. Буква со штрихом обозначает компоненты сдвига или вращения, без штриха — соответствующие компоненты скорости или скорости вращения в момент времени t.

Согласно выражениям (21) пятой лекции,

$$\begin{aligned} &u + zq - yr, \\ &v + xr - zp, \\ &w + yp - xq \end{aligned} \tag{1}$$

являются компонентами скорости точки по осям x, y, z в момент времени t движение можно считать состоящим из вращения вокруг оси, проходящей через точку $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, и сдвига; p, q, r — компоненты скорости вращения; u, v, w — компоненты скорости сдвига.

Из выражений (1) возведением в квадрат и сложением находим квадрат скорости точки (x, y, z); обозначим ее массу через m, а живую силу системы через T; тогда

$$2T = \Sigma m \{(u + zq - yz)^2 + (v + xr - zp)^2 + (w + yp - xq)^2\},$$

где сумма берется по всем материальным точкам системы. Это уравнение в развернутом виде выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} 2T = {} & (u^2 + v^2 + w^2)\,\Sigma m + 2(vr - wq)\,\Sigma mx + \\ & + 2(wp - ur)\,\Sigma my + 2(uq - vp)\,\Sigma mz + \\ & + p^2\,\Sigma m(y^2 + z^2) + q^2\,\Sigma m(z^2 + x^2) + r^2\,\Sigma m(x^2 + y^2) - \\ & - 2qr\,\Sigma myz - 2rp\,\Sigma mzx - 2pq\,\Sigma mxy; \end{aligned} \tag{2}$$

оно показывает, что T — однородная функция второй степени шести аргументов u, v, w, p, q, r, коэффициенты которой зависят от масс точек, их относительного расположения и положения осей x, y, z. Общая однородная функция второй степени шести переменных содержит 21 независимый друг от друга коэффициент; T содержит их только 10, и это число подходящим выбором системы осей можно свести до четырех.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим прежде всего движение, при котором $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, и, следовательно, тело (опять назовем так нашу систему) вращается вокруг точки $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Тогда

$$2T = p^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + q^2 \Sigma m (z^2 + x^2) + r^2 \Sigma m (x^2 + y^2) -$$

$$- 2qr \Sigma myz - 2rp \Sigma mzx - 2pq \Sigma mxy,$$

и тело вращается вокруг оси, совпадающей с линией, которая может быть проведена от точки $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ к точке $x = p$, $y = q$, $z = r$, со скоростью вращения, равной длине этой линии. Положим $T = \frac{1}{2}$, тогда точка (p, q, r) лежит на поверхности

$$1 = p^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + q^2 \Sigma m (z^2 + x^2) + r^2 \Sigma m (x^2 + y^2) -$$

$$- 2qr \Sigma myz - 2rp \Sigma mzx - 2pq \Sigma mxy, \tag{3}$$

т. е. на поверхности второго порядка, центр которой совпадает с началом координат x, y, z. Каждый проведенный из этой точки радиус-вектор поверхности равен скорости вращения, которую должно иметь тело, если оно вращается вокруг радиуса-вектора и обладает живой силой, равной $\frac{1}{2}$. Из этой характеристики поверхности следует, что она не зависит от направления осей x, y, z; если совместить их с главными осями поверхности, то члены с множителями pr, rq, pq должны исчезнуть; следовательно,

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mzx = 0, \quad \Sigma mxy = 0$$

и

$$1 = p^2 \Sigma m (y^2 + z^2) + q^2 \Sigma m (z^2 + x^2) + r^2 \Sigma m (x^2 + y^2)$$

уравнение поверхности. Из того, что коэффициенты при p^2, q^2, r^2 в этом уравнении являются положительными, можно заключить, что поверхность — эллипсоид. Главные оси эллипсоида называют также главными осями тела для начала координат x, y, z.

При произвольных направлениях осей координат выражение $\Sigma m (x^2 + y^2)$ называют *моментом инерции* тела относительно оси z; он равен квадрату радиуса-вектора эллипсоида (3), который совпадает с осью z. Положив $p = 0$ и $q = 0$, получим r равным длине этого радиуса-вектора, а из уравнения (3) имеем

$$\Sigma m (x^2 + y^2) = \frac{1}{r^2}.$$

Моменты инерции относительно главных осей эллипсоида (3) называют *главными моментами инерции* тела для начала координат x, y, z; они равны обратным квадратам его полуосей.

Момент инерции тела относительно оси данного направления изменяется, если эта ось переместится параллельно самой себе. Каково будет это изменение, легко увидеть, если наряду с системой координат x, y, z ввести другую — x_1, y_1, z_1. Пусть x, y, z и x_1, y_1, z_1 — координаты одной и той же точки; тогда

$$x_1 = a + x, \; y_1 = b + y, \; z_1 = c + z,$$

где a, b, c — постоянные; поэтому

$$\Sigma m(x_1^2+y_1^2)=\Sigma m(x^2+y^2)+(a^2+b^2)\Sigma m+2a\Sigma mx+2b\Sigma my.$$

Встречающиеся здесь суммы Σmx и Σmy являются координатами x и y центра тяжести тела, умноженными на массу тела; поэтому если поместить начало координат x, y, z в центр тяжести, то эти суммы исчезнут, и мы будем иметь

$$\Sigma m(x_1^2+y_1^2)=\Sigma m(x^2+y^2)+(a^2+b^2)\Sigma m.$$

Так как ось z может иметь произвольное направление, то это уравнение выражает следующую теорему; момент инерции тела относительно произвольной оси равен моменту инерции его относительно оси, которая параллельна данной и проходит через центр тяжести тела, плюс произведение массы тела на квадрат расстояния центра тяжести от данной оси.

После сделанного разъяснения легко определить положение, которое должна иметь система координат, чтобы выражение для живой силы T, данное уравнением (2), было приведено к наиболее простой форме. Для этой цели за начало координат x, y, z выбирается центр тяжести тела и в качестве осей x, y, z — главные оси для центра тяжести. Тогда уравнение (2) примет вид

$$2T=(u^2+v^2+w^2)\Sigma m+p^2\Sigma m(y^2+z^2)+$$
$$+q^2\Sigma m(z^2+x^2)+r^2\Sigma m(x^2+y^2).$$

§ 2

Теперь выведем дифференциальные уравнения движения свободного твердого тела из принципа Гамильтона, а следовательно, получим уравнение (9) третьей лекции. Для этого необходимо составить вариацию живой силы δT и выражение работы действующих сил U' для какого-либо изменения положения тела и преобразовать сумму $\delta T+U'$ к форме

$$\Sigma\left(R\varepsilon+S\frac{d\varepsilon}{dt}\right),$$

где величины ε бесконечно малы и не зависят друг от друга (они вызваны изменением положения тела). Дифференциальными уравнениями движения будут

$$\frac{dS}{dt}=R. \tag{4}$$

Мы вновь примем обозначения предыдущей лекции; для ε мы можем выбрать обозначения либо u', v', w', p', q', r', либо λ', μ', ν', π', χ', ρ'; таким образом, мы получим искомые дифференциальные уравнения в двух формах, каждая из которых имеет свои преимущества. Работа U' в требуемой форме в первом случае дается выражением (24), во втором — выражением (25) предыдущей лекции.

Но необходимы некоторые вычисления, чтобы составить выражение для δT.

Как мы уже доказали, T зависит только от u, v, w, p, q, r и постоянных, следовательно,

$$\delta T=\frac{\partial T}{\partial u}\delta u+\frac{\partial T}{\partial v}\delta v+\frac{\partial T}{\partial w}\delta w+\frac{\partial T}{\partial p}\delta p+\frac{\partial T}{\partial q}\delta q+\frac{\partial T}{\partial r}\delta r. \tag{5}$$

Прежде всего выразим шесть вариаций δu, δv, δw, δp, δq, δr через u', v', w', p', q', r'. Этого мы достигнем, вспомнив, что вариация производной функции равна производной вариации функции.

По уравнению (18) предыдущей лекции

$$\delta\alpha = \alpha_1 u' + \alpha_2 v' + \alpha_3 w'$$

и по замечанию, сделанному в начале этой лекции,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w.$$

Составим теперь уравнение

$$\frac{d\delta\alpha}{dt} = \delta\frac{d\alpha}{dt},$$

и так как по уравнению (20) прошлой лекции

$$\delta\alpha_1 = \alpha_2 r' - \alpha_3 q', \quad \delta\alpha_2 = \alpha_3 p' - \alpha_1 r', \quad \delta\alpha_3 = \alpha_1 q' - \alpha_2 p', \tag{6}$$

а также

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q, \quad \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r, \quad \frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p, \tag{7}$$

то получается

$$\begin{aligned} 0 = \alpha_1 &\left(\frac{du'}{dt} - \delta u + vr' - v'r + w'q - wq'\right) + \\ + \alpha_2 &\left(\frac{dv'}{dt} - \delta v + wp' - w'p + u'r - ur'\right) + \\ + \alpha_3 &\left(\frac{dw'}{dt} - \delta w + uq' - u'q + v'p - vp'\right). \end{aligned}$$

Обратим внимание на то, что вычисления, которые привели нас к этому результату, верны и в том случае, если в них вместо α подставить β или γ; найденное уравнение остается справедливым и при таком изменении. Из сказанного и из уравнений (3) прошлой лекции следует:

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{du'}{dt} + vr' - v'r + w'q - wq', \\ \delta v &= \frac{dv'}{dt} + wp' - w'p + u'r - ur', \\ \delta w &= \frac{dw'}{dt} + u'q - u'q + v'p - vp'. \end{aligned} \tag{8}$$

Чтобы найти δp, δq, δr, развернем уравнение

$$\frac{d\delta\alpha_1}{dt} = \delta\frac{d\alpha_1}{dt},$$

используя (6) и (7); таким образом,

$$0 = \alpha_2\left(\frac{dr'}{dt} - \delta r + pq' - p'q\right) - \alpha_3\left(\frac{dq'}{dt} - \delta q + rp' - r'p\right).$$

Это уравнение остается правильным, если вместо α подставить β или γ, а также если одновременно изменить по циклу индексы 1, 2, 3 и буквы p,

q, r. Отсюда и из уравнений (3) прошлой лекции следует:

$$\delta p = \frac{dp'}{dt} + qr' - q'r,$$

$$\delta q = \frac{dq'}{dt} + rp' - r'p, \tag{9}$$

$$\delta r = \frac{dr'}{dt} + pq' - p'q.$$

Выразим теперь δu, δv, δw, δp, δq, δr через λ', μ', ν', π', χ', ρ'; для этой цели используем уравнения

$$\frac{d\alpha}{dt} = \alpha_1 u + \alpha_2 v + \alpha_3 w, \quad \delta\alpha = \lambda' + \gamma\chi' - \beta\rho',$$

второе из которых входит в уравнения (16) предыдущей лекции. По уравнениям (11) предыдущей лекции имеем

$$\delta\alpha_1 = \gamma_1\chi' - \beta_1\rho', \quad \delta\alpha_2 = \gamma_2\chi' - \beta_2\rho', \quad \delta\alpha_3 = \gamma_3\chi' - \beta_3\rho'$$

и, кроме того,

$$\frac{d\beta}{dt} = \beta_1 u + \beta_2 v + \beta_3 w, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1 u + \gamma_2 v = \gamma_3 w.$$

После этого уравнение $\delta\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\delta\alpha}{dt}$ переходит в $\alpha_1\delta u + \alpha_2\delta v + \alpha_3\delta w = \frac{d\lambda'}{dt} + \gamma\frac{d\chi'}{dt} - \beta\frac{d\rho'}{dt}$.

Можно теперь одновременно изменить по циклу буквы

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,$$

$$\lambda,\ \mu,\ \nu,$$

$$\pi,\ \chi,\ \rho;$$

поэтому также

$$\beta_1\delta u + \beta_2\delta v + \beta_3\delta w = \frac{d\mu'}{dt} + \alpha\frac{d\rho'}{dt} - \gamma\frac{d\pi'}{dt},$$

$$\gamma_1\delta u + \gamma_2\delta v + \gamma_3\delta w = \frac{d\nu'}{dt} + \beta\frac{d\pi'}{dt} - \alpha\frac{d\chi'}{dt},$$

откуда следует (по уравнениям (3) предыдущей лекции):

$$\delta u = \alpha_1\frac{d\lambda'}{dt} + \beta_1\frac{d\mu'}{dt} + \gamma_1\frac{d\nu'}{dt} +$$

$$+ (\gamma_1\beta - \beta_1\gamma)\frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha)\frac{d\chi'}{dt} + (\beta_1\alpha - \alpha_1\beta)\frac{d\rho'}{dt},$$

$$\delta v = \alpha_2\frac{d\lambda'}{dt} + \beta_2\frac{d\mu'}{dt} + \gamma_2\frac{d\nu'}{dt} + \tag{10}$$

$$+ (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma)\frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha)\frac{d\chi'}{dt} + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta)\frac{d\rho'}{dt},$$

$$\delta w = \alpha_3 \frac{d\lambda'}{dt} + \beta_3 \frac{d\mu'}{dt} + \gamma_3 \frac{d\nu'}{dt} +$$

$$+ (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma) \frac{d\pi'}{dt} + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha) \frac{d\chi'}{dt} + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta) \frac{d\rho'}{dt} .$$

Чтобы найти δp, δq, δr, развернем уравнение

$$\delta \frac{d\alpha_1}{dt} = \frac{d\delta\alpha_1}{dt} ,$$

подставив в него

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q, \quad \delta\alpha_1 = \gamma_1 \chi' - \beta_1 \rho',$$

а также приняв во внимание

$$\delta\alpha_2 = \gamma_2 \chi' - \beta_2 \rho', \quad \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q;$$

$$\delta\alpha_3 = \gamma_3 \chi' - \beta_3 \rho', \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q,$$

получим

$$\alpha_2 \delta r - \alpha_3 \delta q = \gamma_1 \frac{d\chi'}{dt} - \beta_1 \frac{d\rho'}{dt} .$$

Отсюда следует при циклической перестановке букв α, β, γ и π, χ, ρ

$$\beta_2 \delta r - \beta_3 \delta q = \alpha_1 \frac{d\rho'}{dt} - \gamma_1 \frac{d\pi'}{dt} ,$$

$$\gamma_2 \delta r - \gamma_3 \delta q = \beta_1 \frac{d\pi'}{dt} - \alpha_1 \frac{d\chi'}{dt} .$$

Эти три уравнения дают вместе с уравнениями (6) и (7) предыдущей лекции

$$\delta q = \alpha_2 \frac{d\pi'}{dt} + \beta_2 \frac{d\chi'}{dt} + \gamma_2 \frac{d\rho'}{dt} ,$$

$$\delta r = \alpha_3 \frac{d\pi'}{dt} + \beta_3 \frac{d\chi'}{dt} + \gamma_3 \frac{d\rho'}{dt} , \tag{10a}$$

из чего при замене индексов 1, 2, 3 и букв p, q, r также следует

$$\delta p = \alpha_1 \frac{d\pi'}{dt} + \beta_1 \frac{d\chi'}{dt} + \gamma_1 \frac{d\rho'}{dt} . \tag{11}$$

Подставим теперь данные уравнениями (8) и (9) выражения для δu, δv, δw, δp, δq, δr в уравнение (5) для δT, вместо U' подставим выражение (24) предыдущей лекции и преобразуем уравнение (4), расположив ряд для ε по степеням u', v', w', p', q', r'. Получаем таким образом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w} + X, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u} + Y, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial u} + Z, \end{aligned} \tag{12}$$

и

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + M_x,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + M_y,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} + M_z.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Используем выражения для δu, δv, δw, δp, δq, δr из уравнений (10) и (11) а для U' — выражение (25) предыдущей лекции и преобразуем уравнение (4), расположив ряд для ε по степеням λ', μ', ν', π', χ', ρ'; получаем в этом случае

$$
\begin{aligned}
\Xi &= \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial w}\right),\\
H &= \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial w}\right),\\
Z &= \frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial w}\right),
\end{aligned} \tag{14}
$$

и

$$
\begin{aligned}
M_\xi &= \frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}(\gamma_1\beta - \beta_1\gamma)\dfrac{\partial T}{\partial u} + (\gamma_2\beta - \beta_2\gamma)\dfrac{\partial T}{\partial v} + (\gamma_3\beta - \beta_3\gamma)\dfrac{\partial T}{\partial w} + \\ + \alpha_1\dfrac{\partial T}{\partial p} \qquad + \alpha_2\dfrac{\partial T}{\partial q} \qquad + \alpha_3\dfrac{\partial T}{\partial r}\end{matrix}\right\},\\
M_\eta &= \frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}(\alpha_1\gamma - \gamma_1\alpha)\dfrac{\partial T}{\partial u} + (\alpha_2\gamma - \gamma_2\alpha)\dfrac{\partial T}{\partial v} + (\alpha_3\gamma - \gamma_3\alpha)\dfrac{\partial T}{\partial w} + \\ + \beta_1\dfrac{\partial T}{\partial p} \qquad + \beta_2\dfrac{\partial T}{\partial q} \qquad + \beta_3\dfrac{\partial T}{\partial r}\end{matrix}\right\},\\
M_\zeta &= \frac{d}{dt}\left\{\begin{matrix}(\beta_1\alpha - \alpha_1\beta)\dfrac{\partial T}{\partial u} + (\beta_2\alpha - \alpha_2\beta)\dfrac{\partial T}{\partial v} + (\beta_3\alpha - \alpha_3\beta)\dfrac{\partial T}{\partial w} + \\ + \gamma_1\dfrac{\partial T}{\partial p} \qquad + \gamma_2\dfrac{\partial T}{\partial q} \qquad + \gamma_3\dfrac{\partial T}{\partial r}\end{matrix}\right\}.
\end{aligned} \tag{15}
$$

Пусть на тело не действуют силы, тогда уравнения (12) и (13) не содержат никаких других неизвестных функций, кроме u, v, w, p, q, r, а уравнения (14) и (15) допускают непосредственное интегрирование. Уравнения (14) выражают теоремы о движении центра тяжести, уравнения (15) — теоремы площадей для случая, который мы рассматриваем.

§ 3

В полученных формулах предполагалось, что тело *свободно*; положим теперь, что одна его точка закреплена, и выберем ее за начало координат систем x, y, z и ξ, η, ζ. Тогда

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0;$$

но также обращаются в нуль и u', v', w' и λ', μ', ν' и поэтому лишаются смысла уравнения (12) и (14), которые мы получили из принципа Гамильтона, приравняв нулю коэффициенты при этих величинах. Уравнения (13) примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} + M_x,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + M_y,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q} + M_z
\end{aligned} \tag{16}$$

и уравнения (15) при принятом ограничении $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ превратятся в

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= M_\xi,\\
\frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= M_\eta,\\
\frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= M_\zeta.
\end{aligned} \tag{17}$$

ЛЕКЦИЯ СЕДЬМАЯ

(Интегрирование дифференциальных уравнений движения твердого тела, которое вращается вокруг закрепленной точки и на которое не действуют никакие силы. Устойчивость вращения вокруг оси наибольшего и наименьшего моментов инерции. Случай равенства двух из трех главных моментов инерции. Вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Интегрирование полученных дифференциальных уравнений при некоторых предположениях)

§ 1

Дифференциальные уравнения движения твердого тела вокруг неподвижной точки, полученные в предыдущей лекции, т. е. уравнения (16) и (17), можно проинтегрировать в специальных случаях. Первый случай тот, когда не действуют никакие силы. В этом случае уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p}, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q}, \end{aligned} \tag{1}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0, \\ \frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

По замечанию, сделанному в конце § 4 четвертой лекции, они имеют место также при движении свободного тяжелого тела вокруг центра тяжести.

По объяснению, данному в предыдущей лекции, T — однородная функция второй степени переменных p, q, r; допустим, что оси x, y, z совпадают с направлением главных осей тела для начала координат, и обозначим через P, Q, R моменты инерции тела относительно этих осей; тогда

$$2T = Pp^2 + Qq^2 + Rr^2, \tag{3}$$

а следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial p} = Pp, \quad \frac{\partial T}{\partial q} = Qq, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = Rr.$$

Уравнения (1) примут при этом вид

$$P\frac{dp}{dt}=(Q-R)qr,$$
$$Q\frac{dq}{dt}=(R-P)rp, \tag{4}$$
$$R\frac{dr}{\partial t}=(P-Q)pq.$$

Чтобы найти их интегралы, сравним их с другими известными дифференциальными уравнениями, которые мы получим. Обозначим через u и ψ две действительные переменные, связанные уравнением

$$u=\int\limits_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}},$$

в котором $\varkappa$ обозначет действительную правильную дробь и квадратный корень взят с положительным знаком. Тогда u — однозначная непрерывная функция ψ и наоборот, так как производная $\frac{du}{d\psi}$ всегда имеет конечное положительное значение. Кроме того, u пробегает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, когда их пробегает ψ. В таком случае ψ называют амплитудой u по модулю x и записывают так: $\psi=\operatorname{am}u$.

Ради краткости положим в дальнейшем

$$\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\psi}=\Delta\psi,$$

где $\Delta\psi$ — непрерывная положительная величина и $\frac{d\psi}{du}=\Delta\psi$. При этом способе обозначения имеем тождественные уравнения

$$\frac{d\cos\psi}{du}=-\sin\psi\Delta\psi,$$
$$\frac{d\sin\psi}{du}=\cos\psi\Delta\psi,$$
$$\frac{d\Delta\psi}{du}=-\varkappa^2\sin\psi\cos\psi.$$

Положим в них

$$u=\lambda t+\mu,\quad p=a\cos\psi,\quad q=b\sin\psi,\quad r=c\Delta\psi, \tag{5}$$

где под λ, μ, a, b, c подразумеваются действительные постоянные. Тогда получим

$$\frac{dp}{dt}=-\frac{a\lambda}{bc}qr,$$
$$\frac{dq}{dt}=\frac{b\lambda}{ca}rp,$$
$$\frac{dr}{dt}=-\varkappa^2\frac{c\lambda}{ab}pq.$$

Эти уравнения той же формы, что и уравнения (4); они тождественны уравнениям (4), если

$$\frac{Q-R}{P}=-\frac{a\lambda}{bc},$$
$$\frac{R-P}{Q}=\frac{b\lambda}{ca}, \tag{6}$$
$$\frac{P-Q}{R}=-\varkappa^2\frac{c\lambda}{ab}.$$

Пусть шесть постоянных $\varkappa$, λ, μ, a, b, c определены согласно этим уравнениям и так, что все они действительные и $\varkappa^2$ меньше единицы, тогда в уравнениях (5) мы имеем интегралы уравнения (4), а именно общие интегралы, так как из шести названных постоянных только три определены уравнениями (6), а три другие остаются произвольными. Они должны определяться по значениям, которые переменные p, q, r принимают при $t=0$; обозначим их через p_0, q_0, r_0.

Чтобы найти значения, которые приписываются постоянным $\varkappa$, λ, μ, a, b, c, мы исходим из двух интегралов уравнений (4), которые легко получаются. Именно, умножим эти уравнения на p, q, r (или на Pp, Qq, Rr) и сложим их; тогда после интегрирования получим

$$Pp^2+Qq^2+Rr^2=\text{const}$$

и

$$P^2p^2+Q^2q^2+R^2r^2=\text{const}.$$

В момент времени, в который ψ или, что то же, $\operatorname{am}(\lambda t+\mu)$ равно кратному 2π, $\cos\psi=1$, $\sin\psi=0$, $\Delta\psi=1$; поэтому из этих уравнений следует

$$Pa^2+Rc^2=Pp_0^2+Qq_0^2+Rr_0^2,$$
$$P^2a^2+R^2c^2=P^2p_0^2+Q^2q_0^2+R^2r_0^2$$

или

$$P(P-R)a^2=P(P-R)p_0^2+Q(Q-R)q_0^2, \tag{7}$$
$$R(P-R)c^2=Q(P-Q)q_0^2+R(P-R)r_0^2.$$

Эти уравнения дают значения для a^2 и c^2, а именно — положительные значения, если, как мы это теперь примем, Q по своей величине есть *среднее* трех моментов инерции P, Q, R. Определяем затем из уравнений (6) b^2, λ^2 и $\varkappa^2$; делением и умножением первых двух и затем делением первого уравнения на третье получаем

$$b^2=a^2\frac{P(P-R)}{Q(Q-R)},$$
$$\lambda^2=c^2\frac{(P-R)(Q-R)}{PQ}, \tag{8}$$
$$\varkappa^2=\frac{a^2}{c^2}\frac{P(P-Q)}{R(Q-R)},$$

При сделанном относительно момента инерции Q предположении b^2, λ^2, $\varkappa^2$ — положительные величины; но не всегда $\varkappa^2$ меньше единицы. Пусть последнее условие не выполняется, тогда, чтобы выполнить его, достаточно поменять ось x и ось z или (если хотят, чтобы новая и старая системы координат были конгруентными) считают, что новая ось x направлена, как прежняя ось z, а новая ось z направлена противоположно прежней оси x. При этом меняются значения P и R и одновременно значения p_0^2 и r_0^2, а поэтому также и значения a^2 и c^2 уравнений (7) и, следовательно, значение $\varkappa^2$, данное уравнением (8), превращается в обратную величину.

Уравнения (8) не заменяют полностью уравнений (6), из которых они выведены. Однако пусть это сделано; тогда нужно рассмотреть еще одно из них, например первое, и взять одинаковыми знаки обеих его частей. По этому уравнению будут определены знаки величин a, b, c, λ, если знаки других установлены. Мы возьмем λ положительным; первое уравнение (6) определяет тогда знак b, если известны знаки a и c. Поэтому нужно выбрать знак c определенным образом из уравнений

$$p_0 = a\cos\operatorname{am}\mu,\quad q_0 = b\sin\operatorname{am}\mu,\quad r_0 = c\,\Delta\operatorname{am}\mu, \tag{9}$$

которые имеют место вследствие уравнений (5), и это последние уравнения, которым мы должны еще удовлетворить. Из третьего уравнения следует, что если μ действительно (каким оно и должно быть), то c должно иметь тот же знак, что и r_0, тогда $\Delta\operatorname{am}\mu$ положительно. Знак a мы можем выбрать произвольно, мы примем его равным p_0; тогда знак b определяется первым уравнением (6).

Уравнения (9) служат для определения последней из введенных шести постоянных — величины μ. Из первого уравнения находим два значения для $\operatorname{am}\mu$, если мы установим (что мы и хотим сделать), что эта величина лежит между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$, так как вследствие уравнений (7) a^2 больше, чем p_0^2. Второе уравнение снимает остающуюся при этом двузначность, поскольку оно показывает, что $\operatorname{am}\mu$ заключена между $-\frac{\pi}{2}$ и нулем или между нулем и $\frac{\pi}{2}$, в зависимости от того, противоположны или одинаковы знаки q_0 и b.

Из найденных действительных значений μ или ψ следует затем, согласно сделанному ранее замечанию, только *одно* действительное значение μ. Этим доказано, что уравнение (5) есть интеграл уравнения (4) и входящие в него постоянные определены однозначно. Остается еще установить угол, который определяет положение тела в пространстве неподвижных координат ξ, η, ζ в каждый момент времени.

Для этой цели обратимся к уравнению (2), из которого получаем, интегрируя и используя значение T, данное в (3):

$$\begin{aligned} \alpha_1 Pp + \alpha_2 Qq + \alpha_3 Rr &= A,\\ \beta_1 Pp + \beta_2 Qq + \beta_3 Rr &= B,\\ \gamma_1 Pp + \gamma_2 Qq + \gamma_3 Rr &= C, \end{aligned} \tag{10}$$

где A, B, C — постоянные. Между этими и введенными ранее постоянными существует некоторое соотношение; возводя в квадрат и складывая уравнения (10), получаем

$$P^2p^2 + Q^2q^2 + R^2r^2 = A^2 + B^2 + C^2;$$

отсюда следует

$$A^2 + B^2 + C^2 = P^2a^2 + R^2c^2. \tag{11}$$

Если рассматривать Pp, Qq, Rr как прямоугольные координаты точки в системе x, y, z, то уравнения (10) показывают, что A, B, C являются координатами этой же точки в системе координат ξ, η, ζ. Эта точка не изменяется со временем, так как A, B, C являются постоянными; отсюда прямую, проведенную через эту точку из начала координат, можно принять за ось ζ. Пусть это сделано, тогда $A=0$, $B=0$ и, согласно (11)

$$C=\sqrt{P^2a^2+R^2c^2},$$

где величина корня берется положительной. После этого получают из уравнений (10), если их умножить на α_1, β_1, γ_1, или α_2, β_2, γ_2, или α_3, β_3, γ_3 и каждый раз складывать:

$$\gamma_1=\frac{Pp}{\sqrt{P^2a^2+R^2c^2}},\quad \gamma_2=\frac{Qq}{\sqrt{P^2a^2+R^2c^2}},\quad \gamma_3=\frac{Rr}{\sqrt{P^2a^2+R^2c^2}}. \tag{12}$$

Введем в уравнения (8) пятой лекции определенные углы ϑ, f, φ, которые определяют положение тела в каждый момент. Устанавливаем сначала ϑ из уравнения

$$\gamma_3=\cos\vartheta;$$

для некоторого положения тела можно при этом выбрать ϑ между $-\pi$ и $+\pi$, или, как отмечено при рассмотрении уравнений (8) пятой лекции, можно выбрать ϑ произвольно между нулем и π. Последнее из уравнений (5) показывает, что r^2 не может быть больше, чем c^2; по последнему уравнению (12) γ_3^2 или $\cos^2\vartheta$ не достигают значения единицы, и таким образом ϑ не переходит границ 0 и π. Можно отметить, что ϑ не превосходит также значения $\frac{\pi}{2}$, так как r не может обратиться в нуль.

Для определения f имеем

$$\gamma_1=\cos f\cdot\sin\vartheta,\quad \gamma_2=\sin f\cdot\sin\vartheta$$

и два первых уравнения (12). Этим самым для одного положения тела f определено однозначно, если еще установить, что для него f лежит между нулем и 2π; решение, что f изменяется непрерывно с изменением положения тела, определяет тогда f однозначно также для каждого другого положения, которое принимает тело при движении. Остается еще выяснить значение φ. Имеем, таким образом,

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\beta_3}{\alpha_3},$$

откуда следует

$$\cos^2\varphi=\frac{\alpha_3^2}{1-\gamma_3^2}$$

и поэтому

$$d\varphi=\frac{\alpha_3 d\beta_3-\beta_3 d\alpha_3}{1-\gamma_3^2}.$$

Но из уравнений (20) пятой лекции

$$d\beta_3=(\beta_1 q-\beta_2 p)\,dt,\quad d\alpha_3=(\alpha_1 q-\alpha_2 p)\,dt,$$

следовательно, принимая во внимание уравнения (6) и (7) пятой лекции,

$$d\varphi=\frac{\gamma_1 p+\gamma_2 q}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\,dt. \tag{13}$$

Поэтому как следствие уравнения (12) получаем

$$d\varphi = \sqrt{P^2a^2 + R^2c^2}\,\frac{Pp^2 + Qq^2}{P^2p^2 + Q^2q^2}\,dt.$$

Вспомним об интеграле уравнений (4), из которых выводятся уравнения (7); тогда мы можем записать

$$d\varphi = \sqrt{P^2a^2 + R^2c^2}\,\frac{Pa^2 + Rc^2 - Rr^2}{P^2a^2 + R^2c^2 - R^2r^2}\,dt$$

или, если подставить значение r из (5),

$$d\varphi = \sqrt{P^2a^2 + R^2c^2}\,\frac{Pa^2 + Rc^2\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(\lambda t + \mu)}{P^2a^2 + R^2c^2\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(\lambda t + \mu)}\,dt. \tag{14}$$

Интегрирование этого уравнения приводит к эллиптическому интегралу третьего рода.

§ 2

Интегралы задачи вращения тел, на которое не действуют никакие силы, вокруг неподвижной точки интересно применить к случаю, при котором модуль эллиптической функции, встречающейся в этих интегралах, т. е. $\varkappa$, есть нуль или бесконечно малая величина. Эллиптические функции сводятся тогда к тригонометрическим.

Данное в (8) выражение для $\varkappa^2$ показывает, что $\varkappa$ бесконечно мало, если a — бесконечно мало, c — конечно и P, Q, R — какие-нибудь величины, не принимающие только значений, для которых множитель $\frac{a^2}{c^2}$ в выражении для $\varkappa^2$ становится бесконечно большим. По первому уравнению (8) b также будет бесконечно малым. Уравнения (7) показывают, что a бесконечно мало, если таковы p_0 и q_0, что мы и предположим. Уравнения (5) дают тогда, если пренебречь бесконечно малыми величинами высших порядков:

$$p = a\cos(\lambda t + \mu), \quad q = b\sin(\lambda t + \mu), \quad r = c\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2(\lambda t + \mu)}.$$

Что касается значений ϑ, f, φ, то последнее из этих уравнений дает совместно с последним уравнением (12) (если подставить $\varkappa^2$ его значение и пренебречь бесконечно малыми величинами высших порядков)

$$\sin^2\vartheta = \frac{Pa^2}{Rc^2}\left(\frac{P}{R} + \frac{P - Q}{Q - R}\sin^2(\lambda t + \mu)\right). \tag{15}$$

Поэтому $\sin\vartheta$ — бесконечно малая величина. Пусть, как мы теперь примем, ось z выбрана так, что r или (что то же) c положительно, следовательно, положителен $\cos\vartheta$, поэтому и по общему предположению, сделанному относительно ϑ, ϑ само бесконечно мало и при этом положительно, т. е. уравнение однозначно определяет ϑ.

Далее имеем

$$\operatorname{tg} f = \frac{Qb}{Pa}\operatorname{tg}(\lambda t + \mu).$$

Угол φ, который вместе с ϑ определяет положение оси z, легче всего найти следующим путем. Рассуждением, аналогичным тому, которым мы вывели уравнение (13), получаем

$$\operatorname{tg} f = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad \cos^2 f = \frac{\gamma_1^2}{\gamma_1^2+\gamma_2^2},$$

$$df = \frac{\gamma_1 d\gamma_2 - \gamma_2 d\gamma_1}{\gamma_1^2+\gamma_2^2} = \frac{\gamma_1(\gamma_3 p - \gamma_1 r) - \gamma_2(\gamma_2 r - \gamma_3 q)}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\, dt =$$

$$= \frac{\gamma_3(\gamma_1 p + \gamma_2 q) - (\gamma_1^2+\gamma_2^2) r}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\, dt.$$

Вследствие уравнения (13) отсюда получаем

$$df = \cos\vartheta\, d\varphi - r\, dt. \tag{16}$$

Так как при нашем выборе ϑ бесконечно мало и r бесконечно мало отличается от c, то, пренебрегая бесконечно малыми величинами, имеем

$$\varphi = f + ct + \text{const},$$

где постоянная интегрирования определяется по начальному значению φ.

Вследствие предположения, которое сделано при выводе уравнений (8), осью z может быть ось наибольшего или наименьшего, но не среднего главного момента инерции. Проведенные вычисления показывают, что если мгновенная ось вращения при $t = 0$ бесконечно мало отклонена от оси наибольшего или наименьшего главного момента инерции, то она всегда остается бесконечно близкой к этой оси. Поэтому говорят, что вращение тела вокруг оси наибольшего и вокруг оси наименьшего главных моментов инерции *устойчиво*. Пусть тело может вращаться также вокруг оси среднего главного момента инерции, тогда уравнения (4) выполняются, если предположить $p = 0$, $q = 0$, $r = \text{const}$; но это вращение неустойчиво, т. е. если бесконечно мало отклонить мгновенную ось вращения при $t = 0$ от рассматриваемой главной оси, то это отклонение станет конечным с течением времени (хотя бы по истечении бесконечно большого промежутка времени). Именно, пусть p_0 и q_0 бесконечно малы, т. е. в силу уравнений (7) и (8) $\varkappa^2$ бесконечно мало отличается от единицы, эллиптические функции f, которые входят в уравнение (5), превращаются в показательные функции, и обсуждение этого случая приводит к высказанной теореме, что, однако, не должно здесь рассматриваться.

§ 3

Последнее из уравнений (8) показывает, что $\varkappa$ обращается в нуль, если $P = 0$; мы рассмотрим теперь этот случай, т. е. случай равенства двух главных моментов инерции. Уравнения (7) дают:

$$a^2 = p_0^2 + q_0^2, \quad c = r_0.$$

Уравнениям (6) (которые выражают то же, что и уравнения (8), но снимают неопределенность относительно знака, которую оставляют эти уравнения) удовлетворяют, полагая

$$b = a, \quad \lambda = r_0 \frac{R-P}{P}.$$

при этом уравнения (5) примут следующий вид:

$$p = \sqrt{p_0^2+q_0^2}\cos(\lambda t + \mu), \qquad q = \sqrt{p_0^2+q_0^2}\sin(\lambda t + \mu), \quad r = r_0.$$

Уравнения (12) дают

$$\cos\vartheta = \frac{Rr_0}{\sqrt{P^2(p_0^2+q_0^2)+R^2r_0^2}}$$

и, следовательно, $\cos\vartheta = \mathrm{const}$ и

$$\operatorname{tg} f = \operatorname{tg}(\lambda t + \mu),$$

что значит

$$f = \lambda t + \mu + n\pi,$$

где n — целое число. Из уравнения (16) следует, наконец,

$$\cos\vartheta\cdot\varphi = f + r_0 t + \mathrm{const} = (\lambda + r_0)t + \mathrm{const},$$

или, если для λ и $\cos\vartheta$ подставить их значения,

$$\varphi = \frac{\sqrt{P^2(p_0^2+q_0^2)+R^2r_0^2}}{P}\, t + \mathrm{const},$$

что еще проще, чем уравнение (14).

§ 4

Рассмотрим теперь вращение *тяжелого* твердого тела вокруг неподвижной точки. Рассуждения четвертой лекции приводят к способу нахождения двух интегралов дифференциальных уравнений, относящихся к этой задаче; теорема о живой силе дает один интеграл, теорема площадей относительно горизонтальной плоскости — второй. Примем ось ζ направленной вертикально вниз, обозначим координаты центра тяжести тела через ξ, η, ζ, массу — m и силу тяжести — g. При обозначениях, употребляемых в уравнениях (16) и (17) шестой лекции, имеем тогда по формулам, установленным в конце пятой лекции,

$$M_\xi = mg\eta, \quad M_\eta = -mg\xi, \quad M_\zeta = 0.$$

Если ось z проходит через центр тяжести, а s обозначает расстояние ее от неподвижной точки и при этом

$$\xi = \alpha_3 s, \quad \eta = \beta_3 s, \quad \zeta = \gamma_3 s,$$

то получим

$$M_x = -mgs\gamma_2, \quad M_y = mgs\gamma_1, \quad M_z = 0.$$

Отсюда уравнения (17) шестой лекции дают

$$\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r} = C, \tag{16a}$$

где C — постоянная. Это уравнение выражает теорему сохранения площадей для плоскости $\xi O\eta$.

Уравнения (16) шестой лекции примут вид

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} &= r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r} - mgs\gamma_2,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} &= p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p} + mgs\gamma_1,\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} &= q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Умножим их на p, q, r и сложим, чтобы интегрированием получить уравнение, которое выражает теорему о живой силе. Так как T — однородная функция второй степени переменных p, q, r, то

$$2T = p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r};$$

поэтому

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{dT}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt},$$

откуда следует

$$\frac{dT}{dt} = p\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Приняв во внимание, что

$$\gamma_1 q - \gamma_2 p = \frac{d\gamma_3}{dt}, \tag{18}$$

найдем

$$T = mgs\gamma_3 + H, \tag{19}$$

где H — постоянная.

Найти третий общий интеграл рассматриваемых дифференциальных уравнений не удается. Мы упростим нашу проблему, прежде всего предположив, что ось z, т. е. линия, проходящая через неподвижную точку и центр тяжести тела, есть главная ось для неподвижной точки. Можно затем так выбрать оси x и y, чтобы они являлись двумя другими главными осями, так что имеет место данное уравнением (3) выражение для T. Примем теперь, кроме того, что $P = Q$; в таком случае последнее уравнение (17) интегрируемо и дает

$$r = \text{const}.$$

Одновременно уравнения (16а) и (19) превращаются в

$$\left.\begin{aligned} P(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Rr\gamma_3 &= C, \\ P(p^2 + q^2) + Rr^2 &= 2mgs\gamma_3 + 2H. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Введем теперь снова углы ϑ, φ, f, определяемые уравнениями (8) пятой лекции. Тогда уравнение (18) можно записать в виде

$$\sin\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma_2 p - \gamma_1 q, \tag{21}$$

а уравнение (13) в виде

$$\sin^2\vartheta\,\frac{d\vartheta}{dt} = \gamma_1 p + \gamma_2 q. \tag{21a}$$

Возведя в квадрат и сложив эти уравнения, получим

$$(p^2 + q^2)\,dt^2 = d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2.$$

Поэтому уравнения (20) преобразуются в следующие:

$$\begin{gathered} P\sin^2\vartheta\,d\varphi = (C - Rr\cos\vartheta)\,dt, \\ P(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\,d\varphi^2) = (2mgs\cos\vartheta + 2H - Rr^2)\,dt^2. \end{gathered} \tag{22}$$

Так как в них не входят сами переменные φ и t, а только их дифференциалы, то, интегрируя эти уравнения, можно представить φ и t как функции переменной ϑ, а также ϑ и φ как функции t; после того как это сделано, уравнения (16) позволяют вычислить также f как функцию t. Функции, к которым мы придем таким образом, являются эллиптическими функциями.

§ 5

Мы проведем приведенные выше вычисления только для некоторых специальных случаев. Примем прежде всего, что p и q при $t=0$ обращаются в нуль, т. е. что в момент времени $t=0$ мгновенная ось вращения есть ось z. Уравнения (21) показывают, что тогда при $t=0$ обращаются в нуль также и $\frac{d\vartheta}{dt}$, и $\frac{d\varphi}{dt}$. Пусть ϑ_0 — значение ϑ при $t=0$, тогда по уравнениям (22)

$$0 = C - Rr\cos\vartheta_0$$

и

$$0 = 2mgs\cos\vartheta_0 + 2H - Rr^2.$$

Эти же уравнения, следовательно, примут вид

$$\begin{aligned} &P\sin^2\vartheta\, d\varphi = Rr(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta)\,dt, \\ &P(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2) = 2mgs(\cos\vartheta - \cos\vartheta_0)\,dt^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Исключаем из них $d\varphi$ и вводим вместо ϑ_0 и ϑ половины этих углов; получаем тогда

$$\begin{aligned} &P^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta^2 = \\ &\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\left\{4mgsP\sin^2\frac{\vartheta}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2} - \right. \\ &\left. - R^2r^2\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\right\}dt^2. \end{aligned} \tag{24}$$

Положим теперь

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - M^2\cos^2\psi, \tag{25}$$

где M — постоянная.

Отсюда найдем

$$\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta = 2M^2\sin\psi\cdot\cos\psi\,d\psi.$$

Уравнение (24) приобретает поэтому множитель $M^2\cos^2\psi$ и по сокращении его дает

$$\begin{aligned} &4P^2M^2\sin^2\psi d\psi^2 = \\ &= \left\{4mgsP\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - M^2\cos^2\psi\right)\left(\cos^2\frac{\vartheta_0}{2} + M^2\cos^2\psi\right) - R^2r^2M^2\cos^2\psi\right\}dt^2. \end{aligned}$$

Множитель при dt^2 представляет собой функцию второй степени относительно $\cos^2\psi$, а также и относительно $\sin^2\psi$; определим величину M так, чтобы член этого множителя, не зависящий от $\sin^2\psi$, обращался в нуль;

тогда делением на $\sin^2\psi$ это уравнение приводится к форме

$$d\psi^2 = \lambda^2(1 - \varkappa^2 \sin^2\psi)\,dt^2, \tag{26}$$

где λ и $\varkappa$ — известные постоянные. Пусть затем M^2 должно быть определено из квадратного уравнения

$$4mgsp\left(\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - M^2\right)\left(\cos^2\frac{\vartheta}{2} + M^2\right) - R^2r^2M^2 = 0$$

и пусть

$$\lambda^2 = \frac{4mgs\,P\,(2M^2 + \cos\vartheta_0) + R^2r^2}{4P^2},$$

$$\varkappa^2 = \frac{4mgsPM^2}{4mgsP\,(2M^2 + \cos\vartheta_0) + R^2r^2}.$$

Квадратное уравнение для M^2 можно записать так:

$$M^4 + M^2\left(\frac{R^2r^2}{4mgsP} + \cos\vartheta_0\right) - \frac{1}{4}\sin^2\vartheta_0 = 0,$$

и один его корень положителен, другой отрицателен; мы выберем положительный, т. е. мы положим

$$M^2 = \frac{1}{2}\left\{-\frac{R^2r^2}{4mgsP} - \cos\vartheta_0 + \sqrt{\left(\frac{R^2r^2}{4mgsP} + \cos\vartheta_0\right)^2 + \sin^2\vartheta_0}\right\},$$

где корень берется с положительным знаком. Поэтому

$$\lambda^2 = \frac{mgs}{P}\sqrt{\left(\frac{R^2r^2}{4mgsP} + \cos\vartheta_0\right)^2 + \sin^2\vartheta_0},$$

$$1 - 2\varkappa^2 = \frac{\dfrac{R^2r^2}{4mgsP} + \cos\vartheta_0}{\sqrt{\left(\dfrac{R^2r^2}{4mgsP} + \cos\vartheta_0\right)^2 + \sin^2\vartheta_0}}.$$

Полученное для $1 - 2\varkappa^2$ выражение заключено между -1 и $+1$, $\varkappa^2$ заключено поэтому между 0 и 1; λ^2 положительно. Отсюда мы можем записать интеграл уравнения (26)

$$\psi = \mathrm{am}(\lambda t + \mu), \qquad \mathrm{Mod}\,\varkappa,$$

где μ — произвольная постоянная интегрирования.

Мы исследуем далее случай, когда r может считаться бесконечно большим. Тогда $\varkappa = 0$, и, следовательно,

$$\psi = \lambda t + \mu \tag{27}$$

и по (25)

$$\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \sin^2\frac{\vartheta_0}{2} - M^2\cos^2(\lambda t + \mu),$$

кроме того,

$$M^2 = \frac{mgsP}{R^2r^2}\sin^2\vartheta_0,$$

$$\lambda = \frac{Rr}{2P}.$$

Поэтому ϑ колеблется с бесконечно коротким периодом между двумя бесконечно близкими границами. Интегрирование первого из уравнений (23) облегчено тем, что в левую часть его вместо ϑ можно подставить ϑ_0; тогда это уравнение, принимая во внимание (25) и (27), имеет вид

$$P \sin^2\vartheta_0 \, d\varphi = -\frac{2RrM^2}{\lambda} \cos^2\psi \, d\varphi,$$

или после подстановки значения M^2

$$d\varphi = -\frac{2mgs}{Rr\lambda} \cos^2\psi \, d\psi.$$

Так как

$$\int \cos^2 \varphi \, d\psi = \frac{\psi}{2} + \frac{\sin 2\psi}{4},$$

то отсюда следует при использовании (27)

$$\varphi = -\frac{mgs}{Rr}\left(t + \frac{1}{2\lambda} \sin 2\psi\right) + \text{const}$$

или, так как λ бесконечно велико по сравнению с r, то, пренебрегая бесконечно малыми членами,

$$\varphi = -\frac{mgs}{Rr} t + \text{const}.$$

Угол f, наконец, легко получается из (16), если подставить туда ϑ_0 вместо ϑ; находим

$$f = \varphi \cos \vartheta_0 - rt + \text{const},$$

или

$$f = -\left(r + \frac{mgs}{Rr} \cos \vartheta_0\right) t + \text{const}.$$

§ 6

Вместо предположения, которому мы следовали в предыдущем параграфе, именно, что p и q исчезают при $t = 0$, мы примем теперь, что при $t = 0$ всегда $r = 0$. Тогда уравнения (22) примут следующий вид:

$$P \sin^2 \vartheta \, d\varphi = C dt,$$

$$P (d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) = 2 (mgs \cos \vartheta + H) dt^2. \tag{28}$$

Они с точностью до обозначений тождественны уравнениям (12) второй лекции, из чего следует, что в рассматриваемом здесь случае прямая линия, проходящая через неподвижную точку и центр тяжести тела, движется так, как простой маятник известной длины. Эта длина l определяется уравнением

$$l = \frac{P}{ms}.$$

Пусть постоянная C в уравнениях (22) или, что то же, постоянная c

в уравнениях (12) второй лекции равна нулю, тогда

$$\varphi = \mathrm{const}$$

$$\left(\frac{d\frac{\vartheta}{2}}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l}\left(h - \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right), \tag{29}$$

где h — произвольная постоянная. Она должна быть положительной, так как положительна левая часть уравнения (29), но она может иметь любое значение между нулем и $+\infty$. Пусть $h < 1$, тогда можно положить $h = \sin^2\frac{\alpha}{2}$, считая приблизительно, что α лежит между нулем и π. Пусть α — амплитуда упомянутого выше колебания, которое совершает тело или маятник; возьмем

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\psi,$$

тогда, как уже многократно отмечалось,

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\psi}}$$

и, следовательно,

$$\psi = \mathrm{am}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + \mu\right), \quad \mathrm{Mod}\ \sin\frac{\alpha}{2},$$

где μ — произвольная постоянная, или

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\mathrm{am}\left(t\sqrt{\frac{g}{l}} + \mu\right), \qquad \mathrm{Mod}\ \sin\frac{\alpha}{2}$$

Пусть, однако, в уравнении (29) $h > 1$, тогда можно положить

$$h = \frac{1}{\varkappa^2},$$

где $\varkappa$ — действительная правильная дробь; таким образом получаем

$$\left(\frac{d\frac{\vartheta}{2}}{dt}\right)^2 = \frac{g}{l\varkappa^2}\left(1 - \varkappa^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)$$

или

$$\frac{\vartheta}{2} = \mathrm{am}\left(\frac{t}{\varkappa}\sqrt{\frac{g}{l}} + \mu\right), \qquad \mathrm{Mod}\ \varkappa,$$

где μ также означает произвольную постоянную и где $\varkappa$ может считаться положительным или отрицательным в зависимости от того, увеличивается или уменьшается ϑ при возрастании t.

ЛЕКЦИЯ ВОСЬМАЯ

(Измерение силы тяжести. Маятник. Маятник, соответствующий простому. Оборотный маятник. Опыты Бесселя с маятником. Влияние воздуха. Изменения силы тяжести с высотой и географической широтой)

§ 1

Мы уже многократно рассматривали как примеры для объяснения общих понятий и законов механики те движения, причиной которых считают *силу тяжести*; рассмотрим эти движения подробнее и вначале разъясним, как *измеряется* сила тяжести. Для этого нам послужит наблюдение колебаний тяжелого тела, которое способно вращаться вокруг горизонтальной оси. Такое приспособление называют *маятником*, а именно *сложным маятником* — в противоположность простому маятнику, о котором мы уже говорили. Допустим, что сила тяжести — постоянная ускоряющая сила. Рассмотрим маятник как твердое тело и пренебрежем влиянием воздуха, движением Земли и трением оси вращения; тогда мы сможем очень легко вычислить движение такого маятника. Положение последнего в некоторый момент определено *одной* переменной; выберем в качестве ее угол ϑ, образованный плоскостью, проходящей через ось вращения и центр тяжести маятника, и вертикальной плоскостью, проходящей через ось вращения. Согласно § 5 четвертой лекции, имеем теорему площадей относительно плоскости, перпендикулярной к оси вращения, так как связи точек маятника допускают вращение вокруг нее; эта теорема дает дифференциальное уравнение для такого угла. Обозначим величину силы тяжести — g, массу маятника — m, расстояние от его центра тяжести до оси вращения — s, момент инерции маятника относительно этой оси — k; таким образом получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -g\frac{ms}{K}\sin\vartheta.$$

Согласно § 2 второй лекции, оно совпадает с теми уравнениями, которые имеют место для плоских колебаний *простого* маятника в случае, если длина l этого маятника удовлетворяет уравнению

$$l = \frac{K}{ms}. \qquad (1)$$

Этот простой маятник называют *соответствующим* данному; при одинаковой амплитуде он имеет тот же период колебания маятника, что и данный. Если l определено по (1) с помощью измерения частей маятника и период колебания маятника T, соответствующий бесконечно малой амплитуде, установлен наблюдением, то g находят из уравнения

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Несколько простых примеров могли бы пояснить способ, каким может быть найдено l.

Предположим, маятник состоит из однородного шара и нити, массой которой можно пренебречь. Центром тяжести шара, как и центром тяжести каждого однородного тела, является центральная точка; итак, s равно расстоянию центра шара от начала координат.

Определение момента инерции требует немного больше расчета.

Пусть dm — элемент массы тела, который имеет координаты x, y, z; тогда момент инерции тела относительно оси z равен

$$\int dm\,(x^2+y^2).$$

Предположим теперь, что тело имеет постоянную плотность μ и является телом вращения, ось вращения которого — ось x. Положим:

$$y = r\cos\varphi, \qquad z = r\sin\varphi;$$

тогда этот момент инерции будет равен

$$\mu\iiint dx\,r dr\,d\varphi\,(x^2+r^2\cos^2\varphi),$$

или, так как интегрируем по φ от нуля до 2π и так как

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi = \pi,$$

то момент инерции равен

$$2\pi\mu\iint dx\,r\,dr\left(x^2+\frac{r^2}{2}\right). \tag{2}$$

Здесь x и r представляют прямоугольные координаты точки поверхности, которая возникла при вращении тела.

Допустим, что тело является шаром радиуса R и начало координат — его центр. Тогда указанная поверхность является плоскостью большого круга. Положим

$$x = \rho\cos\psi, \qquad r = \rho\sin\psi,$$

тогда интеграл (2) преобразуется в интеграл по ρ от нуля до R и по ψ — от нуля до π, и вместо $dx\,dr$ можно подставить $\rho d\rho d\psi$; отсюда

$$\pi\mu\int_0^R\int_0^\pi \rho^4 d\rho\,(1+\cos^2\psi)\sin\psi\,d\psi = \frac{8}{15}\pi\mu R^5$$

или, если m обозначает массу шара $m=\frac{4}{3}\pi\mu R^3$, то интеграл равен $\frac{2}{5}mR^2$. По теореме, введенной в § 1 шестой лекции, момент инерции шара маятника относительно оси вращения маятника равен

$$m\left(s^2+\frac{2}{5}R^2\right)$$

и из уравнения (1) длина соответствующего простого маятника равна

$$s+\frac{2}{5}\frac{R^2}{s}.$$

Вычислим теперь момент инерции цилиндра с плотностью μ, длиной L и радиусом R относительно оси, которая перпендикулярна к оси цилиндра и проходит через ее центр. Этот момент, данный выражением (2), равен

$$2\pi\mu \int\limits_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \int\limits_0^R dx r\, dr \left(x^2 + \frac{r^2}{2} \right),$$

отсюда получим

$$\frac{\pi\mu L R^2}{12}(L^2 + 3R^2)$$

или, если опять обозначить массу через m, то

$$m = \pi\mu L R^2,$$

т. е. момент инерции равен

$$m\left(\frac{L^2}{12} + \frac{R^2}{4}\right).$$

Пусть цилиндр — тонкая, длинная проволока, тогда без значительных ошибок можно оставить только одно слагаемое

$$\frac{mL^2}{12}.$$

После этого мы можем вычислить длину l простого маятника, который соответствует маятнику, состоящему из шара и проволоки. Пусть m_2 и m_1 — массы шара и проволоки, s_1 и s_2 — расстояния их центров тяжести от точки подвеса, R_1 — радиус шара, L_2 — длина проволоки; тогда

$$s_1 = R_1 + L_2, \quad s_2 = \frac{L_2}{2}.$$

Пусть опять m — масса всего маятника и s — расстояние центра тяжести от точки подвеса, тогда, согласно теореме о центре тяжести системы масс, приведенной в § 3 четвертой лекции, имеем

$$ms = m_1 s_1 + m_2 s_2.$$

Пусть, кроме того, момент инерции относительно оси вращения маятника для шара

$$m_1\left(s_1^2 + \frac{2}{5}R_1^2\right)$$

и для проволоки

$$m_2 \frac{L_2^2}{3}.$$

Отсюда по (1)

$$l = \frac{s_1^2 + \frac{2}{5}R_1^2 + \frac{m_2}{m_1}\frac{L_2^2}{3}}{s_1 + \frac{m_2}{m_1}\frac{L_2}{2}}.$$

Пусть R_1 и L_2 измерены и определено отношение $\frac{m_2}{m_1}$, тогда можно, следовательно, вычислить l.

§ 2

Подобным образом поступают и в случае, если различают в маятнике более двух частей; однако всегда нужно предполагать, что каждая отдельная часть маятника однородна. Метод для измерения тяжести, который свободен от такого сомнительного предположения, основан на применении так называемого *оборотного маятника.*

Он состоит из жесткого стержня, который несет две параллельные призмы, перпендикулярные к направлению стержня; их острия направлены противоположно друг другу. На стержне укреплен один или более грузов. Каждая призма может служить осью вращения маятника. Вообще длины соответствующих простых маятников будут различными в зависимости от того, на какой призме колеблется оборотный маятник; подходящим выбором положения груза или грузов можно достичь того, что для обеих призм период колебаний при одинаковых амплитудах будет одним и тем же; это значит, что простые маятники, соответствующие обеим призмам, имеют одну и ту же длину l. В этом случае по (1) имеем

$$l = \frac{ms_1^2 + k}{ms_1},$$

$$l = \frac{ms_2^2 + k}{ms_2},$$

где m — масса маятника, k — его момент инерции относительно оси, которая параллельна обеим призмам и проходит через центр тяжести, и s_1, s_2 — расстояния центра тяжести от соответствующих призм. Из этих уравнений следует:

$$l(s_1 - s_2) = s_1^2 - s_2^2$$

или, предполагая, что s_1 не равно s_2,

$$l = s_1 + s_2.$$

Пусть теперь выполняется еще *то* условие, что центр тяжести лежит в плоскости обеих призм, тогда $s_1 + s_2$ — расстояние между призмами, и измерением этого расстояния можно получить длину соответствующего простого маятника без разделения массы на части.

§ 3

Другой путь избрал Бессель в своих известных «Исследованиях о длине простого секундного маятника» *, чтобы освободиться от предположения об однородности частей маятника и одновременно исключить другую причину ошибок, которая состоит в следующем. Ось вращения маятника образуется обычно призмой, которая покоится на горизонтальной подставке. Но острие призмы представляет не математическую линию, а узкую часть цилиндрической поверхности очень большой кривизны; это означает, что ось вращения маятника лежит не точно в плоскости, которая несет призму, и определяется неточно. Аналогичная ненадежность остается при любом другом способе подвешивания маятника. Бессель использовал два маятника, которые были образованы одним и тем же шаром, одной и той же призмой и двумя стержнями, разность длин которых измерялась с предельно возможной точностью.

* Abhandlungen der Berliner Akademie für das Jahr 1826.

Отсюда и из времени колебаний обоих маятников можно было вычислить длину каждого соответствующего простого маятника без предположения, что шар однороден и острие призмы — математическая линия.

§ 4

При опытах с маятником не надо упускать из виду влияние, которое оказывает воздух на движение маятника. Разрешение этой задачи относится целиком к гидродинамике, так как это влияние нельзя выяснить без определения движения, в которое воздух приводится маятником. Здесь уместно привести некоторые исторические сведения.

Если тело покоится в воздухе, то воздух оказывает на его поверхность давление, равнодействующая которого направлена вертикально вверх, равна весу вытесненного воздуха и имеет точкой приложения центр тяжести вытесненного воздуха. Можно принять, что при колеблющемся маятнике силы давления вытесненного воздуха имеют ту же величину, что и при покоящемся маятнике, тогда влияние воздуха на время колебания легко могло бы быть определено. Обозначим через m' массу вытесненного воздуха, через s' — расстояние ее центра тяжести от оси вращения маятника, и предположим ради простоты, что этот центр тяжести лежит в одной плоскости с центром тяжести маятника и его осью вращения; тогда момент вращения, который влияет на маятник, был бы

$$-(ms - m's')g\sin\vartheta,$$

и следовательно, дифференциальное уравнение движения маятника

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -(ms - m's')g\sin\vartheta$$

и длина l соответствующего простого маятника равна

$$\frac{K}{ms - m's'}.$$

Это уравнение не исчерпывает влияния воздуха на время колебания маятника. Говорят, что маятник увлекает за собой некоторую массу воздуха и что поэтому момент инерции маятника возрастает. Как это и должно быть, можно подставить

$$l = \frac{K + m's'^2\lambda}{ms - m's'}, \tag{3}$$

где λ — неизвестное число, зависящее от формы маятника и его периода колебания, а также от свойств воздуха, но *не* от массы маятника и подразделения его на части. Бессель определял λ экспериментально; для этого он использовал два маятника одинаковой формы с близкими периодами колебания, но с различными массами.

При оборотном маятнике влияние воздуха на период колебания снимается, если маятник симметричен относительно обеих призм. Это условие может быть выполнено, только если распределение массы несимметрично относительно обеих призм, потому что в противном случае было бы $s_1 = s_2$ — такой случай мы можем исключить. Достигают этой цели, рассматривая, например, две одинаковые линзы, расположенные симметрично относительно стержня маятника, из которых одна полая, а вторая сплошная.

При ранее употреблявшихся обозначениях, если имеет место равенство периодов колебания для обеих призм, то по (3)

$$l=\frac{k+ms_1^2+m's'^2\lambda}{ms_1-m's'}$$

и

$$l=\frac{k+ms_2^2+m's'^2\lambda}{ms_2-m's'}, \qquad (4)$$

откуда следует

$$l=s_1+s_2,$$

точно так же, как в случае если бы воздух не оказывал никакого влияния. Предположение относительно симметрии формы маятника, которое мы сделали для этого заключения, существенно; если бы это было не так, то s' и λ имели бы различные значения в обоих уравнениях (4).

§ 5

Опыты с маятником, которые производились в различных местах, показали, что сила тяжести не одинакова на поверхности Земли и над ней; например, если подниматься вверх, то тяжесть уменьшается. Это изменение силы тяжести становится понятным, если исходить из учения Ньютона, что тяжесть есть следствие притяжения.

Две массы m и m_1, которые находятся одна от другой на расстоянии r_1, действуют друг на друга по законам гравитации с силой, потенциал которой при подходящем выборе единицы массы равен $\frac{mm_1}{r_1}$. Пусть действует несколько масс m_1, притягивающихся к массе m, тогда эта сила имеет потенциал

$$m\sum\frac{m_1}{r_1}.$$

Вычислим потенциал для случая, когда массы m_1 — части Земли, при предположении, что Земля — шар и ее плотность одинакова на равных расстояниях от центра. Представим себе массу, которая имеет постоянную плотность μ и заполняет пространство между двумя концентрическими шаровыми поверхностями с радиусами R и $R+dR$. Потенциал этой массы относительно единицы массы, которая находится на расстоянии r от центра шаровой поверхности, т. е. потенциал силы, с которой масса действует на единицу массы, равен

$$\mu R^2\,dR\iint\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta\,dw}{\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\vartheta}}, \qquad (5)$$

где корень берется с положительным знаком и интегрирование ведется по w от нуля до 2π, по ϑ — от нуля до π. Первое интегрирование непосредственно выполнимо, второе возможно, если вместо переменной ϑ ввести

$$\rho=\sqrt{R^2+r^2-2Rr\cos\vartheta}.$$

Так как тогда

$$\rho\,d\rho=Rr\sin\vartheta\,d\vartheta,$$

то если обозначить через ρ'' наибольшее, а через ρ' — наименьшее значения ρ, выражение (5) в этом случае принимает вид

$$\mu\frac{2\pi R\,dR}{r}(\rho''-\rho').$$

Но

$$\rho'' = R + r,$$

и ρ' равна той из величин $R - r$ и $r - R$, которая является положительной; это значит, что $\rho' = r - R$, если точка, к которой относится потенциал, лежит вне шарового слоя, и $\rho' = R - r$, если она находится внутри его. Поэтому в первом случае выражение (5) равно

$$\mu \frac{4\pi R^2 \, dR}{r},$$

во втором

$$\mu \, 4\pi R \, dR.$$

Таким образом доказано, что потенциал, о котором шла речь, для каждой внутренней точки — постоянная величина, а для каждой внешней имеет такую величину, как если бы масса шарового слоя была сконцентрирована в его центре.

При сделанных относительно Земли предположениях ее потенциал относительно тела, которое находится вне Земли, имеет такую величину, как если бы в ее центре была сконцентрирована вся масса, а притяжение к Земле, которое испытывает тело, обратно пропорционально квадрату его расстояния от центра Земли. С этим согласуется результат опыта с маятником — уменьшение веса тела при увеличении высоты подъема.

Согласно опытам с маятником вес изменяется также на поверхности Земли или, что то же, на уровне моря. Очень приближенно можно сказать, что он независим от географической долготы места наблюдения, но изменяется географической широтой. Обозначив ее через ψ и взяв за единицу времени секунду, имеем на основании опытов с маятником с большой точностью

$$g = 9^m,\ 8309 \left(1 - \frac{\cos^2\psi}{191}\right). \tag{6}$$

Тот факт, что вес изменяется с географической широтой места исследования, рассматривается как следствие вращения Земли — это должно быть показано в следующих лекциях.

ЛЕКЦИЯ ДЕВЯТАЯ

(Влияние вращения Земли на движение тел на ее поверхности. Центробежная сила. Отклонение свободно падающего тела от отвесной линии. Опыт с маятником Фуко)

§ 1

При исследовании движения тяжелых тел мы использовали систему координат, которая связана с Землей, и все-таки применяли те же дифференциальные уравнения движения в пространстве неподвижной системы координат. Поскольку Земля движется, то здесь заключается неточность, которую мы теперь найдем и устраним. С этой целью мы должны рассмотреть, каковы будут изменения в дифференциальных уравнениях движения, если они даны в подвижной системе координат вместо покоящейся. В особом случае мы разрешили эту задачу уже в § 4 четвертой лекции, а именно, в случае, когда оси системы координат при их движении сохраняют свое направление; и мы показали, что если при этом система координат движется с постоянной скоростью и в одном направлении, то мы получим те же самые дифференциальные уравнения, что и при покоящейся системе координат. Центр Земли движется по своей орбите вокруг Солнца так близко к движению с равномерной скоростью в неизменном направлении, что к движению на Земле в системе координат, начало которой есть центр Земли и оси которой имеют постоянные направления, без заметных ошибок можно применить дифференциальные уравнения, которые имеют место в подвижной системе координат.

Но иначе, нежели с поступательным движением Земли, обстоит дело с движением ее вокруг оси, которое оказывает заметное влияние на движения тел относительно Земли. Чтобы найти это влияние, представим себе систему материальных точек, на которые действуют произвольные силы и которые подчинены любым уравнениям связей; рассмотрим положения, которые имеют эти точки в момент времени t одновременно в двух системах координат, из которых одна покоится в пространстве, другая движется. Пусть m — масса одной из точек; x, y, z — ее координаты: X, Y, Z — составляющие действующей на нее силы в момент времени t в покоящейся системе координат; x', y', z', X', Y', Z' — эти же величины в движущейся системе координат; наконец, δx, δy, δz — виртуальные изменения x, y, z и $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$ — соответствующие вариации x', y', z'. Тогда по принципу Даламбера

$$0=\sum\left(m\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\delta x+\left(m\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\delta y+\left(m\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\delta z. \qquad (1)$$

Введем в это уравнение буквы со штрихами вместо букв без штрихов. При этом мы используем то, что

$$X\,\delta x+Y\,\delta y+Z\,\delta z=X'\,\delta x'+Y'\,\delta y'+Z'\,\delta z'.$$

так как оба эти выражения представляют работу одной и той же силы для одного и того же смещения точки ее приложения; в остальном мы проводим расчет только при допущении, что

$$
\begin{aligned}
x &= x' \cos wt + y' \sin wt, \\
y &= -x' \sin wt + y' \cos wt, \\
z &= z'
\end{aligned} \tag{2}
$$

где w — постоянная; это значит, что мы рассмотрим задачу в предположении, что движущаяся система координат вращается в определенном направлении с постоянной угловой скоростью w вокруг оси z', при этом совпадают начала координат систем и ось z совпадает с осью z'. Из уравнений (2) следует:

$$
\begin{aligned}
\delta x &= \delta x' \cos wt + \delta y' \sin wt, \\
\delta y &= -\delta x' \sin wt + \delta y' \cos wt, \\
\delta z &= \delta z',
\end{aligned} \tag{3}
$$

далее

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} \cos wt + \frac{dy'}{dt} \sin wt - wx' \sin wt + wy' \cos wt,$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx'}{dt} \sin wt + \frac{dy'}{dt} \cos wt - wx' \cos wt - wy' \sin wt,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt},$$

и

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2} \cos wt + \frac{d^2y'}{dt^2} \sin wt -$$

$$- 2w \frac{dx'}{dt} \sin wt + 2w \frac{dy'}{dt} \cos wt - w^2 x' \cos wt - w^2 y' \sin wt,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{d^2x'}{dt^2} \sin wt + \frac{d^2y'}{dt} \cos wt -$$

$$- 2w \frac{dx'}{dt} \cos wt - 2w \frac{dy'}{dt} \sin wt + w^2 x' \sin wt - w^2 y' \cos wt,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

После этого уравнение (1) принимает следующий вид:

$$0 = \sum \left(m \frac{d^2x'}{dt^2} - X' - mw^2 x' + m2w \frac{dy'}{dt} \right) \delta x' +$$

$$+ \left(m \frac{d^2y'}{dt^2} - Y' - mw^2 y' - m2w \frac{dx'}{dt} \right) \delta y' + \left(m \frac{d^2z'}{dt^2} - Z' \right) \delta z'. \tag{4}$$

Это уравнение того же вида, что и уравнение (1); из него следует, что вращение системы координат x', y', z' можно отбросить, если к силам (X', Y', Z'), которые действуют на материальные точки, еще добавить определенные силы, составляющие которых

$$m \left(w^2 x' - 2w \frac{dy'}{dt} \right), \qquad m \left(w^2 y' + 2w \frac{dx'}{dt} \right), \qquad 0 \tag{5}$$

относятся к точке с массой m.

Если система материальных точек находится в относительном покое в системе x', y', z', то $\frac{dx'}{dt}=0$, $\frac{dy'}{dt}=0$; тогда выражения (5) приводятся к виду:

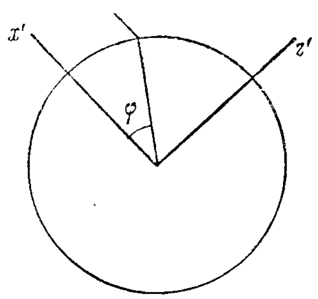
$$m\omega^2 x', \qquad m\omega^2 y', \; 0.$$

Сила, которая имеет эти составляющие, перпендикулярна к оси вращения, т. е. оси z', направлена от нее и имеет величину

$$m\omega^2\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

Эту силу называют *центробежной*. Для системы материальных точек, которые без изменения их относительного расположения вращаются вокруг оси с постоянной угловой скоростью, можно (чтобы выяснить соотношения между силами, которые действуют на нее) отбросить вращение, если к этим силам добавить центробежную силу, вызванную вращением.

Эта теорема допускает еще обобщение, которое мы хотим получить. Мы предполагаем, что уравнения условий между координатами x', y', z' не содержат времени; изменения dx', dy', dz', которые претерпевают x' y', z'за элемент времени dt, являются виртуальными изменениями x', y', z', и могут быть подставлены в уравнение (4) вместо $\delta x'$, $\delta y'$, $\delta z'$. Сделав это, мы получим



Фиг. 1

$$0=\sum\left(m\frac{d^2x'}{dt^2}-X'-m\omega^2x'\right)dx'+$$
$$+\left(m\frac{d^2y'}{dt^2}-Y'-m\omega^2y'\right)dy'+ \qquad (6)$$
$$+\left(m\frac{d^2z'}{dt^2}-Z'\right)dz'.$$

Это уравнение совпадает с тем, к которому приходят, если пренебрегают вращением системы координат и вводят при этом соответствующие центробежные силы. Если далее число уравнений условий между координатами x', y', z' так велико, что мгновенное положение системы определяется *одной* переменной величиной, то можно вычислить из (6) эту переменную величину, а следовательно, и получить закон движения системы. Из этого следует, что при сделанных теперь допущениях необходимость принимать во внимание вращение системы координат полностью заменена введением центробежной силы.

Этот результат важен для движения тел на Земле; он показывает, что можно отказаться от рассмотрения вращения Земли, если добавить к действующим на тело силам соответствующие этому вращению центробежные силы, предполагая, что положение системы определено посредством *одной* переменной величины и что уравнения условий между координатами в неподвижной на Земле системе координат не содержат времени. *Тяжесть* — это равнодействующая притяжения к Земле, которое испытывает единица массы по законам гравитации, и центробежной силы, возникающей вследствие вращения Земли; эта равнодействующая и есть та сила, которая измеряется в опытах с маятником, рассмотренных в предыдущей лекции.

Посмотрим теперь, как после этого должна была бы изменяться тяжесть по величине и направлению на поверхности Земли, если Земля — шар и ее плотность на одинаковом расстоянии от центра была бы одинаковой. Расстояние рассматриваемого тела от центра Земли, т. е. радиус Земли, мы назовем R; направленное к центру Земли и отнесенное к единице массы притяжение к Земле — G; угол, который образует проведенный к телу радиус Земли с экваториальной плоскостью, обозначим φ, и через w обозначим угловую скорость Земли. Ось z' направим по оси вращения Земли, ось x' — по пересечению ее экваториальной плоскости с меридианом тела (фиг. 1). Тогда составляющие силы тяжести g по осям координат будут равны

$$-(G-w^2R)\cos\varphi, \quad 0, \quad -G\sin\varphi.$$

Из этого следует

$$g=G\sqrt{1-2\frac{w^2R}{G}\cos^2\varphi+\left(\frac{w^2R}{G}\right)^2\cos^2\varphi}\,, \tag{7}$$

и если обозначить географическую широту места наблюдения через ψ, то она будет означать угол между экватором и вертикалью, т. е. направлением силы тяжести, и

$$\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\varphi\frac{1}{1-\frac{w^2R}{G}}. \tag{8}$$

При допущении, которое мы сделали о форме и свойстве Земли, G равно значению, которое g имеет на полюсе, следовательно, по уравнению (6) прошлой лекции (если единицей времени будет секунда)

$$G=9^m,\ 8309.$$

Далее приближенно имеем

$$R=\frac{1}{2\pi}\,40\,000\,000^m$$

и

$$w=\frac{2\pi}{24\cdot 60\cdot 60}\,;$$

из этого следует

$$\frac{w^2R}{G}=\frac{1}{291}\,.$$

Эта дробь так мала, что при наших наблюдениях ее квадратом (по сравнению с единицей) можно пренебречь. Сделав это, получим из уравнений (7) и (8)

$$g=G\left(1-\frac{w^2R}{G}\cos^2\varphi\right),$$

$$\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\varphi\left(1+\frac{w^2R}{G}\right).$$

Поэтому $\psi-\varphi$ также очень мало, так что можно подставить

$$\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\varphi+\frac{\psi-\varphi}{\cos^2\varphi}\,,$$

откуда затем следует

$$\psi-\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\varphi\,\frac{w^2R}{G}\,.$$

С той же точностью имеем

$$g=G\left(1-\frac{w^2R}{G}\cos^2\psi\right),$$

$$\psi-\varphi=\frac{1}{2}\sin 2\psi\,\frac{w^2R}{G}\,.$$

Первое из этих двух уравнений того же вида, что и уравнение (6) предыдущей лекции, выведенное из опытов с маятником; но числовые коэффициенты при $\cos^2\psi$ в обоих существенно различны. В основе этого лежит то, что Земля не является, как мы это принимаем, шаром; вследствие ее вращения она является очень приближенно эллипсоидом вращения, и поэтому притяжение к ней тем больше, чем больше географическая широта места исследования. Но не будем подробнее останавливаться на этом вопросе.

§ 2

На движение тела по отношению к Земле вращение последней оказывает еще влияние, кроме того, которое представляется центробежной силой.

Исследуем его для свободной тяжелой материальной точки.

Пусть x', y', z' — координаты точки в момент времени t в неподвижной системе координат на Земле, ось z' которой является осью Земли. Обозначим через X', Y', Z' составляющие силы тяжести по осям координат, т. е. составляющие равнодействующей притяжения к Земле и центробежной силы. Тогда

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X' - 2w\frac{dy'}{dt},$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = Y' + 2w\frac{dx'}{dt}, \qquad (9)$$

$$\frac{d^2z'}{dt^2} = Z'.$$

Так как в этих уравнениях не встречаются сами координаты, а входят только их производные функции, то они остаются справедливыми, если оси координат перенести без изменения их направления; итак, мы можем начало координат совместить с положением, которое занимает рассматриваемая точка в $t = 0$; ось z' должна тогда быть параллельной оси Земли. Составляющие силы тяжести, строго говоря, не постоянные, но мы рассмотрим их как постоянные, т. е. предположим, что путь, который описывает точка, бесконечно мал по сравнению с размерами Земли. Обозначим силу тяжести буквой g, географическую широту места наблюдения — ψ и направим ось y' перпендикулярно к меридиану. Пусть положительные направления x' и z' идут от Земли, тогда

$$X' = -g\cos\psi, \quad Y' = 0, \quad Z' = -g\sin\psi. \qquad (10)$$

Теперь вместо системы координат x', y', z' должна быть введена новая — x, y, z, так что ось y совпадает с осью y', ось z имеет направление силы тяжести, и, следовательно,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = g.$$

Теперь можно получить:

$$x = -x'\sin\psi + z'\cos\psi,$$

$$y = y',$$

$$z = -x'\cos\psi - z'\sin\psi.$$

Продифференцируем эти уравнения дважды по t, используя (9), (10) и уравнения $x' = -x\sin\psi - z\cos\psi$, $y' = y$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2w\cos\psi\,\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2w\left(\sin\psi\,\frac{dx}{dt} + \cos\psi\,\frac{dz}{dt}\right); \tag{11}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = g + 2w\cos\psi\,\frac{dy}{dt}.$$

Эти уравнения можно интегрировать без дополнительных предположений известным методом; мы упростим их интегралы, допустив, что можно пренебречь членами порядка w^2y. Начальные значения $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ назовем α, β, γ; тогда мы прежде всего получим из (11)

$$\frac{dx}{dt} = \alpha + 2w\sin\psi\cdot y,$$
$$\frac{dz}{dt} = \gamma + gt + 2w\cos\psi\cdot y,$$

а используя это — при упомянутом допущении — получим

$$\frac{dy}{dt} = \beta - 2w(\alpha\sin\psi + \gamma\cos\psi)\,t - w\cos\psi\cdot gt^2.$$

Это же предположение ведет далее к уравнениям

$$x = \alpha t + w\beta\sin\psi\, t^2,$$
$$y = \beta t - w(\alpha\sin\psi + \gamma\cos\psi)\,t^2 - w\cos\psi\,\frac{gt^3}{3},$$
$$z = \gamma t + \left(\frac{g}{2} + w\beta\cos\psi\right)t^2.$$

Пусть начальная скорость равна нулю; это означает, что α, β, γ равны нулю, и тогда эти уравнения будут

$$x = 0,$$
$$y = -w\cos\psi\,\frac{gt^3}{3},$$
$$z = \frac{gt^2}{2},$$

отсюда следует

$$y = -\frac{w\cos\psi}{3}\sqrt{\frac{8z^3}{g}}. \tag{12}$$

Свободно падающее тело отклоняется поэтому вследствие вращения Земли от вертикальной линии в направлении, перпендикулярном меридиану. Отклонение происходит в сторону вращения Земли, т. е. на восток. Райхом поставлены в Фрайберге опыты, при которых было

$$\psi = 50^\circ 57', \quad g = 9^m{,}811, \quad x = 158^m{,}5.$$

Уравнение (12) дает отсюда $y = 27^{mm},5$; Райх нашел $y = 28^{mm},4$.

§ 3

Теперь мы исследуем движение простого маятника, который может свободно вращаться вокруг точки подвеса, но с учетом вращения Земли.

Мы воспользуемся той же системой координат, к которой относится уравнение (11), ось z этой системы направлена вертикально вниз. За начало координат примем положение равновесия тяжелой точки маятника, l — его длина. Тогда имеем уравнение условия

$$x^2 + y^2 + (l - z)^2 = l^2,$$

и дифференциальные уравнения движения примут вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= 2w \sin\psi \frac{dy}{dt} + \lambda x, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -2w\left(\sin\psi \frac{dx}{dt} + \cos\psi \frac{dz}{dt}\right) + \lambda y; \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= g + 2w\cos\psi \frac{dy}{dt} + \lambda(z - l). \end{aligned} \tag{13}$$

Интеграл уравнений найдем, если их помножим на dx, dy, dz, сложим и проинтегрируем; тогда получим

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (2gz + H)\,dt^2, \tag{14}$$

где H — произвольная постоянная. Чтобы найти второй интеграл, образуем из (13)

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = -2w\sin\psi\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) - 2w\cos\psi\, x\frac{dz}{dt}. \tag{15}$$

Это уравнение, вообще говоря, неинтегрируемо; но его можно проинтегрировать, если допустить, что колебания маятника бесконечно малы. Пусть x и y — бесконечно малые первого порядка по сравнению с l; тогда z будет второго порядка малости, а именно

$$z = \frac{x^2 + y^2}{2l}.$$

Поэтому последний член в уравнении (15) третьего порядка малости, в то время как другие — второго. Пренебрегая ими, имеем

$$x\,dy - y\,dx = (c - w\sin\psi\,(x^2 + y^2))\,dt, \tag{16}$$

где c — новая произвольная постоянная. Теперь уравнение (14) приведем к виду

$$dx^2 + dy^2 = \left(\frac{g}{l}(x^2 + y^2) + H\right)dt^2. \tag{17}$$

Подставляем в (16) и (17)

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta,$$

где r и θ — полярные координаты тяжелой точки, получим

$$r^2\,d\theta = (c - r^2 w\sin\psi)\,dt,$$

$$dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \left(\frac{g}{l}r^2 + H\right)dt^2.$$

Если мы положим

$$\theta + tw \sin\psi = \vartheta, \tag{18}$$

то первое из этих уравнений примет вид

$$r^2\, d\vartheta = c\,dt, \tag{19}$$

а второе

$$dr^2 + r^2\, d\theta^2 = \left(\left(\frac{g}{l} - w^2 \sin^2\psi \right) r^2 + H + c2w \sin\psi \right) dt^2 \tag{20}$$

Введем вместо H другую произвольную постоянную h с помощью уравнения

$$H + c2w \sin\psi = h$$

при условии, что w столь мало, что его квадратом можно пренебречь уравнение (20) запишем следующим образом:

$$dr^2 + r^2\, d\vartheta^2 = \left(\frac{g}{l} r^2 + h \right) dt^2.$$

Уравнения (19) и (20) можно легко проинтегрировать до конца; они согласуются с уравнениями, в которых пренебрегают вращением Земли. Из этого следует, что они не содержат w, т. е. останутся неизменными, если подставить в них $w=0$. Подставляем $w=0$, тогда $\vartheta=\theta$, и r и ϑ будут полярными координатами тела маятника. Если принять во внимание вращение Земли, то этими полярными координатами являются r и θ, и между θ и ϑ существует соотношение (18). Отсюда следует, что относительное движение маятника по отношению к вращающейся Земле такое же, каким было бы абсолютное движение маятника, если бы Земля была неподвижной, но в действительности Земля вращается с угловой скоростью $w \sin\psi$ вокруг вертикальной линии, проходящей через точку подвеса.

Этот результат подтвержден опытами, поставленными Фуко.

ЛЕКЦИЯ ДЕСЯТАЯ

(Относительные перемещения частей тела. Расширение линии, поверхности, объемного элемента. Изменение бесконечно малой частицы твердого тела слагается из поступательного перемещения, вращения и растяжения по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Главные удлинения. Движение по поверхности тела и по поверхности соприкасания двух тел)

§ 1

До сих пор наши исследования относились к материальной точке и твердому телу. Последнее мы рассматривали как систему материальных точек, неизменно связанных между собой. Нам не нужно было обсуждать, как расположены точки — непрерывно или нет, и не надо было принимать во внимание, что число их бесконечно велико.

Мы обратимся теперь к исследованию движения нетвердого тела, частицы которого испытывают относительные перемещения. Строго говоря, это имеет место для всех тел природы. Исходным пунктом этого исследования будет предположение, что тела состоят из сплошной растяжимой материи и что движение в этих телах непрерывно изменяется с изменением положения тела. Значение этого предположения выступит яснее, когда мы его выразим уравнениями. Пусть a, b, c — координаты некоторой материальной точки тела в момент t_0 и x, y, z — координаты той же точки в момент t. Тогда x, y, z будут непрерывными функциями четырех непрерывно изменяющихся аргументов a, b, c, t. Материальная точка тела, координаты которой в момент t_0 будут

$$a+da, \quad b+db, \quad c+dc,$$

в момент t имеет координаты

$$x+dx, \quad y+dy, \quad z+dz,$$

где

$$dx=\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db+\frac{\partial x}{\partial c}dc,$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial b}db+\frac{\partial y}{\partial c}dc,$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial b}db+\frac{\partial z}{\partial c}dc.$$

Эти уравнения составляют основу исследований, к которым мы приступим.

Можно da, db, dc рассматривать как координаты в момент t_0 точки тела относительно системы координат, оси которой параллельны осям прежней системы, но начало которой взято в точке 0; прежние координаты этой точки a, b, c. Три координаты одной и той же материальной точки

da, db, dc в момент t в той же системе координат будут

$$x - a + \frac{\partial x}{\partial a} da + \frac{\partial x}{\partial b} db + \frac{\partial x}{\partial c} dc,$$

$$y - b + \frac{\partial y}{\partial a} da + \frac{\partial y}{\partial b} db + \frac{\partial y}{\partial c} dc, \tag{1}$$

$$z - c + \frac{\partial z}{\partial a} da + \frac{\partial z}{\partial b} db + \frac{\partial z}{\partial c} dc.$$

Так как da, db, dc произвольны и мы можем не обращать внимания на то, что они должны быть бесконечны малы, то выражения (1) позволяют судить о том изменении, которое получают бесконечно малые частицы за промежуток времени от t_0 до t. Характеристикой этих выражений является то, что они линейны относительно da, db, dc. При развитии следствий, которые отсюда вытекают, мы будем пользоваться некоторыми новыми обозначениями, но потом вернемся к тем, которые использовались до сих пор.

§ 2

Пусть ξ, η, ζ — координаты материальной точки тела. Предположим, что это тело деформируется так, что если обозначить через ξ'', η'', ζ'' координаты той же точки после деформации, то

$$\xi'' = a_1 + a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta,$$

$$\eta'' = a_2 + a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \tag{2}$$

$$\zeta'' = a_3 + a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta,$$

где величины a — постоянные. Исследуем эти деформации. Мы предположим при этом, что величины a не бесконечны, и что если

$$\xi = b_{11}(\xi'' - a_1) + b_{21}(\eta'' - a_2) + b_{31}(\zeta'' - a_3),$$

$$\eta = b_{12}(\xi'' - a_1) + b_{22}(\eta'' - a_2) + b_{32}(\zeta'' - a_3), \tag{3}$$

$$\zeta = b_{13}(\xi'' - a_1) + b_{23}(\eta'' - a_2) + b_{33}(\zeta'' - a_3)$$

суть решения уравнений (2), то величины b также имеют определенные не бесконечные значения. Если обозначить через D определитель величин a_{11}, $a_{12}, \ldots$, т. е.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \tag{4}$$

то согласно решению (3), требуется, чтобы D не обращалось в нуль. Мы будем предполагать, что при непрерывном изменении тела D не обращается в нуль. Тогда D будет всегда положительным, а именно, равно единице, и положительно, если уравнения (2) будут

$$\xi'' = \xi, \quad \eta'' = \eta, \quad \zeta'' = \zeta.$$

Прежде всего очевидно, что точки тела, первоначально расположенные в одной плоскости, в плоскости же и останутся, потому что линейному соотношению между ξ'', η'', ζ'' соответствует линейное соотношение между

ξ, η, ζ, и наоборот. Прямые линии при этом будут также прямыми и параллельные параллельными же и останутся, потому что ξ'', η'', ζ'' бесконечны, когда ξ, η, ζ бесконечны, и обратно.

Дальнейшие рассуждения мы можем несколько пояснить следующим замечанием. Представляемую уравнениями (2) деформацию тела мы можем рассматривать как составленную из двух, следующих одна за другой. Кроме двух рассмотренных до сих пор состояний тела вообразим себе третье, промежуточное состояние, и обозначим через ξ', η' ζ' координаты в этом состоянии той точки, которой соответствуют координаты ξ, η, ζ и ξ'', η'', ζ''. Тогда уравнения (2) мы можем заменить следующими

$$\xi'' = a_1 + \xi',$$
$$\eta'' = a_2 + \eta', \qquad (5)$$
$$\zeta'' = a_3 + \zeta'.$$

и

$$\xi' = a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta,$$
$$\eta' = a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \qquad (6)$$
$$\zeta' = a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta.$$

Представляемые уравнениями (5) изменения тела есть смещение без изменения относительного положения его точек и без вращения; проекции этого смещения на оси координат равны a_1, a_2, a_3. Обратимся теперь к исследованию деформации, данной уравнениями (6), являющейся частным случаем деформации, представленной уравнениями (2).

Рассмотрим прямую линию тела, проходящую через начало координат. Пусть α, β, γ — косинусы углов, образуемых с осями, r — длина этой линии перед деформацией, α', β', γ', r' — соответствующие величины после деформации; тогда

$$\xi = r\alpha, \qquad \eta = r\beta, \qquad \zeta = r\gamma,$$
$$\xi' = r'\alpha', \qquad \eta' = r'\beta', \qquad \zeta' = r'\gamma';$$

вследствие (6) имеем

$$r'\alpha' = r(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma),$$
$$r'\beta' = r(a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma), \qquad (7)$$
$$r'\gamma' = r(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma).$$

Рассматриваемая линия изменяется по величине и направлению. Значение $\frac{r'}{r} - 1$ называется ее *удлинением*. Оно вычисляется так же, как и изменение направления из (7), если принять во внимание уравнение

$$\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1.$$

Параллельные линии получают равные удлинения и равные изменения направления, так как параллелограмм остается параллелограммом. Найдем теперь изменение величины и направления, испытываемое плоской поверхностью. Выберем за таковую треугольник, координаты вершин которого в начальном состоянии тела суть

$$0, \quad 0, \quad 0, \quad \xi_1, \quad \eta_1, \quad \zeta_1, \quad \xi_2, \quad \eta_2, \quad \zeta_2,$$

и после деформации

$$0,\ 0,\ 0,\quad \xi_1',\quad \eta_1',\quad \zeta_1',\quad \xi_2',\quad \eta_2',\quad \zeta_2'.$$

Наряду с принятой системой координат введем другую — x, y, z, относительно которой предположим, что она может быть приведена вращением в положение, при котором оси x, y, z соответственно совпадут с осями ξ, η, ζ, и положим вообще

$$\xi = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z,$$

$$\eta = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z,$$

$$\zeta = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z.$$

В начальном состоянии тела примем за плоскость x, y плоскость упомянутого треугольника. Тогда будем иметь

$$\xi_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1, \qquad \xi_2 = \alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2,$$

$$\eta_1 = \beta_1 x_1 + \beta_2 y_1, \qquad \eta_2 = \beta_1 x_2 + \beta_2 y_2,$$

$$\zeta_1 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1, \qquad \zeta_2 = \gamma_1 x_2 + \gamma_2 y_2,$$

откуда, принимая во внимание уравнения (6) и (7) пятой лекции, получим

$$\begin{aligned} \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1 &= \alpha_3(x_1y_2 - x_2y_1), \\ \zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1 &= \beta_3(x_1y_2 - x_2y_1), \\ \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 &= \gamma_3(x_1y_2 - x_2y_1). \end{aligned} \tag{8}$$

Обозначим через s площадь упомянутого выше треугольника в начальном состоянии тела; тогда

$$\pm 2s = x_1y_2 - x_2y_1,$$

где знак левой части определяется тем, что s должно быть положительно. Обозначим далее через α, β, γ косинусы углов, которые образует одна из двух нормалей к плоскости треугольника, т. е. ось z или ей противоположное направление, с осями ξ, η, ζ; тогда

$$\pm 2s\alpha = \eta_1\zeta_2 - \eta_2\zeta_1,$$

$$\pm 2s\beta = \zeta_1\xi_2 - \zeta_2\xi_1,$$

$$\pm 2s\gamma = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1,$$

где должны быть взяты три верхних или три нижних знака. Подобные же исследования по отношению к треугольнику *после* деформации в аналогичных обозначениях приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} \pm 2s'\alpha' &= \eta_1'\zeta_2' - \eta_2'\zeta_1', \\ \pm 2s'\beta' &= \zeta_1'\xi_2' - \zeta_2'\xi_1', \\ \pm 2s'\gamma' &= \xi_1'\eta_2' - \xi_2'\eta_1', \end{aligned} \tag{9}$$

где s' — площадь, α' β', γ' — косинусы углов ее нормали с осями координат после деформации и где равным образом должны быть взяты три верхних или три нижних знака. Из (6) также получаем

$$\eta_1'\zeta_2'-\eta_2'\zeta_1=(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})(\eta_1\zeta_2-\eta_2\zeta_1)+(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33})(\zeta_1\xi_2-\zeta_2\xi_1)+$$
$$+(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})(\xi_1\eta_2-\xi_2\eta_1). \qquad (10)$$

Это уравнение примет более простой вид, если введем определение величины b из уравнений (3). Именно

$$b_{11}=\frac{1}{D}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}),$$
$$b_{12}=\frac{1}{D}(a_{23}a_{31}-a_{21}a_{33}),$$
$$b_{13}=\frac{1}{D}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}),$$

где D обозначает определитель величин a. Преобразуем помощью этих выражений уравнение (10) и добавим два уравнения, кот ые могут быть составлены аналогичным путем; тогда получим

$$\begin{aligned} \pm s'\alpha' &= sD(b_{11}\alpha+b_{12}\beta+b_{13}\gamma),\\ \pm s'\beta' &= sD(b_{21}\alpha+b_{22}\beta+b_{23}\gamma),\\ \pm s'\gamma' &= sD(b_{31}\alpha+b_{32}\beta+b_{33}\gamma), \end{aligned} \qquad (11)$$

где в левых частях должны быть одновременно взяты положительные или отрицательные знаки. Мы уже предположили, что состояние тела изменяется непрерывно и притом так, что D не обращается в нуль. Если мы теперь установим, что нормаль, определенная через α, β, γ, не меняет знака, то в формулах (11) должен быть взят положительный знак, так как он имеется в начале деформации и не может измениться на обратный. В самом деле, если бы это произошло, то s' должно было бы быть равным нулю, в то время как s отлично от нуля, так как левые части уравнений (11) не могут одновременно обратиться в нуль, т. е. три точки тела, которые первоначально не лежали на одной прямой, должны были бы находиться на ней после деформации. Поэтому

$$\begin{aligned} s'\alpha' &= sD(b_{11}\alpha+b_{12}\beta+b_{13}\gamma),\\ s'\beta' &= sD(b_{21}\alpha+b_{22}\beta+b_{23}\gamma),\\ s'\gamma' &= sD(b_{31}\alpha+b_{32}\beta+b_{33}\gamma). \end{aligned} \qquad (12)$$

Из этих уравнений можно вычислить изменение направления и *расширение* данной поверхности; так называется значение $\frac{s'}{s}-1$. Эти уравнения пригодны, впрочем, не только для треугольника, который мы рассматривали, но и для каждой части его плоскости, потому что она может быть составлена посредством сложения и вычитания таких треугольников. Уравнения (12) пригодны также и для параллельных площадей, потому что линии, параллельные и равной длины, такими и останутся.

Найдем, наконец, *объемное расширение*, соответствующее деформации тела, представляемой уравнениями (6). Для этого вообразим себе в теле в его начальном состоянии цилиндр, ограниченный двумя перпендикулярными поперечными сечениями. Обозначим через s площадь основания, через r — длину оси, через α, β, γ — косинусы углов, образуемых одним из двух ее направлений с осями координат. После деформации цилиндр сделается косым. Пусть теперь s' — площадь основания, r' — длина оси его цилиндра, далее пусть α', β', γ' — направляющие косинусы основания и α'', β'', γ'' — направляющие косинусы оси цилиндра. Тогда будут применимы уравнения (12), и по уравнениям (7) имеем

$$r'\alpha'' = r(a_{11}\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma),$$

$$r'\beta'' = r(a_{21}\alpha + a_{22}\beta + a_{23}\gamma),$$

$$r'\gamma'' = r(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma).$$

Перемножим эти уравнения, соответственно, с уравнениями (12) и сложим произведения. Обозначим объем цилиндра перед деформацией через τ, после деформации — через τ'; тогда будем иметь

$$\tau = rs,$$

$$\tau' = r's'(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'').$$

Заметим далее, что при данном в (3) определении величин b уравнения (3) должны сделаться тождественными, если подставить в них значения ξ'', η'', ζ'' из (2). Отсюда получим девять соотношений между величинами a и b; из них, подобно предыдущему, составим уравнение

$$\tau' = \tau D. \tag{13}$$

Объемное расширение, т. е. $\frac{\tau'}{\tau} - 1$, будет поэтому равно $D - 1$. Это выражение пригодно не только для цилиндра, но и для любой части тела, потому что такая часть может быть составлена из цилиндров.

Мы присоединим к этому одно замечание, на которое будем ссылаться в дальнейшем. Пусть

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,$$

$$\xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2,$$

$$\xi_3,\ \eta_3,\ \zeta_3$$

— координаты трех точек тела до деформации;

$$\xi_1',\ \eta_1',\ \zeta_1',$$

$$\xi_2',\ \eta_2',\ \zeta_2',$$

$$\xi_3',\ \eta_3',\ \zeta_3'$$

— координаты тех же точек после деформации; тогда будут иметь место уравнения, которые получатся из уравнений (6), если в них буквы ξ, η, ζ, ξ' η', ζ' снабдить индексами 1, 2 или 3. Шестикратный объем тетраэдра, имеющего вершинами эти три точки и начало координат, перед или после деформации равен абсолютному значению определителя из начальных или конечных девяти координат. Следовательно, на основании (13) отношение этих определителей равно $\pm D$; именно равно $+D$, так как оно равно единице вместе с D, когда деформация обращается в нуль. Подставим вместо D его значение из (4); тогда получим

$$\begin{vmatrix} \xi_1' & \eta_1' & \zeta_1' \\ \xi_1' & \eta_2' & \zeta_2' \\ \xi_3' & \eta_3' & \zeta_3' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Это уравнение не зависит от того, какое значение имеют буквы ξ', η', ζ', ξ, η, ζ, и требует только, чтобы между ними существовали уравнения, составленные по образцу уравнений (6); оно выражает известное предложение теории определителей.

§ 3

Данное уравнениями (2) изменение тела мы рассматривали как составленное из двух, представленных уравнениями (5) и (6); первое из них является смещением. Покажем теперь, что второе может быть разложено на *вращение* тела вокруг начала координат и на деформацию, которую будем называть *растяжением по трем взаимно перпендикулярным направлениям*. Наряду с системой координат ξ, η, ζ введем другую с тем же началом координат, и обозначим через x, y, z координаты относительно этой системы некоторой материальной точки тела в его начальном состоянии. Вообразим себе теперь, что состояние тела изменилось так, что, обозначив через x', y', z' новые координаты той же точки относительно той же самой системы координат, будем иметь

$$\begin{aligned} x' &= \mu_1 x, \\ y' &= \mu_2 y, \\ z' &= \mu_3 z, \end{aligned} \tag{14}$$

где μ_1, μ_2, μ_3 должны быть положительными константами.

Мы назовем эти деформации растяжениями в направлениях осей x, y, z. Они имеют ту особенность, что частицы, первоначально расположенные на оси, на ней же и останутся. Расширения, имеющие место в направлениях осей, мы назовем *главными растяжениями*; их величины суть $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1$, $\mu_3 - 1$. После того как имело место это растяжение, вообразим, что тело вращается вокруг начала координат вместе с осями x, y, z. Тогда несмотря на это вращение координаты рассматриваемой материальной точки относительно этих осей не изменятся и останутся равными x', y', z'.

Пусть теперь ξ, η, ζ — координаты той же самой материальной точки в системе $(\xi\eta\zeta)$ в начальном состоянии тела и ξ', η', ζ' — координаты той же точки после растяжения и вращения. Далее обозначим косинусы углов, образуемых осями x, y, z с осями ξ, η, ζ перед вращением, через

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1, \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2, \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3, \end{matrix}$$

а после вращения — через

$$\begin{matrix} \alpha_1' & \beta_1' & \gamma_1', \\ \alpha_2' & \beta_2' & \gamma_2', \\ \alpha_3' & \beta_3' & \gamma_3', \end{matrix}$$

так что, согласно ранее примененному способу обозначения, α, β, γ соответствуют ξ, η, ζ, а индексы 1, 2, 3 соответствуют x, y, z. Тогда будем иметь

$$x = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta,$$
$$y = \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta, \qquad (15)$$
$$z = \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta$$

и

$$\xi' = \alpha_1'x' + \alpha_2'y' + \alpha_3'z',$$
$$\eta' = \beta_1'x' + \beta_2'y' + \beta_3'z', \qquad (16)$$
$$\zeta' = \gamma_1'x' + \gamma_2'y' + \gamma_3'z'.$$

Подставив в (16) значения x', y', z' из (14) и потом вместо x, y, z их значения из (15), получим

$$\xi' = \xi(\alpha_1\alpha_1'\mu_1 + \alpha_1\alpha_2'\mu_2 + \alpha_3\alpha_3'\mu_3) + \eta(\beta_1\alpha_1'\mu_1 + \beta_2\alpha_2'\mu_2 + \beta_3\alpha_3'\mu_3) +$$
$$+ \zeta(\gamma_1\alpha_1'\mu_1 + \gamma_2\alpha_2'\mu_2 + \gamma_3\alpha_3'\mu_3),$$
$$\eta' = \xi(\alpha_1\beta_1'\mu_1 + \alpha_2\beta_2'\mu_2 + \alpha_3\beta_3'\mu_3) + \eta(\beta_1\beta_1'\mu_1 + \beta_2\beta_2'\mu_2 + \beta_3\beta_3'\mu_3) +$$
$$+ \zeta(\gamma_1\beta_1'\mu_1 + \gamma_2\beta_2'\mu_2 + \gamma_3\beta_3'\mu_3),$$
$$\zeta' = \xi(\alpha_1\gamma_1'\mu_1 + \alpha_2\gamma_2'\mu_2 + \alpha_3\gamma_3'\mu_3) + \eta(\beta_1\gamma_1'\mu_1 + \beta_2\gamma_2'\mu_2 + \beta_3\gamma_3'\mu_3) +$$
$$+ \zeta(\gamma_1\gamma_1'\mu_1 + \gamma_2\gamma_2'\mu_2 + \gamma_3\gamma_3'\mu_3). \qquad (17)$$

Эти уравнения того же вида, как (6); подходящим выбором восемнадцати величин α, β, γ и трех величин μ их можно сделать тождественными с (6). Для этого имеем девять уравнений, выражающих равенство коэффициентов уравнений (6) и (17), и двенадцать соотношений между величинами α, β, γ. Отсюда следует, как это будет показано ниже, что каждое из уравнений (6), определяющих деформацию тела, может быть рассматриваемо как составленное из вращения и растяжения, как оно представлено уравнениями (14).

Каким образом можно вычислить α, β, γ, μ, покажет следующее исследование. Допустим, что между ξ, η, ζ существует соотношение

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \qquad (18)$$

т. е. рассмотрим материальные точки тела, которые первоначально находились на сфере, описанной единичным радиусом вокруг начала координат. Тогда, если использовать данное в (3) значение b, то уравнения (6) дадут следующее соотношение между ξ', η' ζ':

$$(b_{11}\xi' + b_{21}\eta' + b_{31}\zeta')^2 + (b_{12}\xi' + b_{22}\eta' + b_{32}\zeta')^2 +$$
$$+ (b_{13}\xi' + b_{23}\eta' + b_{33}\zeta')^2 = 1, \qquad (19)$$

т. е. уравнение поверхности второго порядка, а именно эллипсоида, так как если мы положим

$$\xi' = r'\alpha', \ \eta' = r'\beta', \ \zeta' = r'\gamma',$$

то оно при верхних значениях α', β', γ' дает действительные конечные значения для r'. Таким образом, рассматриваемая частица после деформации, представленной (4), будет расположена на этом эллипсоиде.

Из уравнения (18) следует теперь на основании (15)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

и далее, с помощью (14),

$$\frac{x'^2}{\mu_1^2} + \frac{y'^2}{\mu_2^2} + \frac{z'^2}{\mu_3^2} = 1.$$

Если принять во внимание положение осей x, y, z после вращения, которое мы рассматриваем как часть изучаемой деформации, то это уравнение представит тот же самый эллипсоид, что и уравнение (19). Будем искать с помощью последнего главные оси эллипсоида; получим для длин его полуосей значения μ_1, μ_2, μ_3, а для косинусов углов, которые они образуют с осями ξ, η, ζ, значения α', β', γ'. Если мы положим

$$\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2 = 1,$$

то подобным же образом найдем

$$(a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta)^2 + (a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta)^2 + (a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta)^2 = 1,$$

и

$$\mu_1^2 x^2 + \mu_2^2 y^2 + \mu_3^2 z^2 = 1$$

как уравнения второго эллипсоида, если только оси x, y, z имеют положение, которое они занимали перед этим вращением. Полуоси этого эллипсоида равны $\frac{1}{\mu_1}$, $\frac{1}{\mu_2}$, $\frac{1}{\mu_3}$ и косинусы углов, которые они образуют с осями ξ, η, ζ, имеют значения α, β, γ.

§ 4

Вычислим вращения, величины и направления главных удлинений, соответствующих уравнениям (6), только для случая, когда полная деформация бесконечно мала. Тогда главные растяжения $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1$, $\mu_3 - 1$, которые мы обозначили через λ_1, λ_2, λ_3, будут бесконечно малы так же, как и разности $\alpha' - \alpha$, $\beta' - \beta$, $\gamma' - \gamma$, которые мы обозначим через

$$\delta\alpha, \ \delta\beta, \ \delta\gamma$$

с индексами 1, 2, 3. В силу существующих соотношений между α, β, γ, уравнения (17) при пренебрежении бесконечно малыми высших порядков примут вид:

$$\begin{aligned}\xi' - \xi = {} & \xi(\alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \alpha_3^2\lambda_3 + \alpha_1\delta\alpha_1 + \alpha_2\delta\alpha_2 + \alpha_3\delta\alpha_3) + \\ & + \eta(\alpha_1\beta_1\lambda_1 + \alpha_2\beta_2\lambda_2 + \alpha_3\beta_3\lambda_3 + \beta_1\delta\alpha_1 + \beta_2\delta\alpha_2 + \beta_3\delta\alpha_3) + \\ & + \zeta(\alpha_1\gamma_1\lambda_1 + \alpha_2\gamma_2\lambda_2 + \alpha_3\gamma_3\lambda_3 + \gamma_1\delta\alpha_1 + \gamma_2\delta\alpha_2 + \gamma_3\delta\alpha_3),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta' - \eta = {} & \xi(\beta_1\alpha_1\lambda_1 + \beta_2\alpha_2\lambda_2 + \beta_3\alpha_3\lambda_3 + \alpha_1\delta\beta_1 + \alpha_2\delta\beta_2 + \alpha_3\delta\beta_3) + \\ & + \eta(\beta_1^2\lambda_1 + \beta_2^2\lambda_2 + \beta_3^2\lambda_3 + \beta_1\delta\beta_1 + \beta_2\delta\beta_2 + \beta_3\delta\beta_3) + \qquad (20) \\ & + \zeta(\beta_1\gamma_1\lambda_1 + \beta_2\gamma_2\lambda_2 + \beta_3\gamma_3\lambda_3 + \gamma_1\delta\beta_1 + \gamma_2\delta\beta_2 + \gamma_3\delta\beta_3),\end{aligned}$$

$$\zeta' - \zeta = \xi(\gamma_1\alpha_1\lambda_1 + \gamma_2\alpha_2\lambda_2 + \gamma_3\alpha_3\lambda_3 + \alpha_1\delta\gamma_1 + \alpha_2\delta\gamma_2 + \alpha_3\delta\gamma_3) +$$
$$+ \eta(\gamma_1\beta_1\lambda_1 + \gamma_2\beta_2\lambda_2 + \gamma_3\beta_3\lambda_3 + \beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 + \beta_3\delta\gamma_3) +$$
$$+ \zeta(\gamma_1^2\lambda_1 + \gamma_2^2\lambda_2 + \gamma_3^2\lambda_3 + \gamma_1\delta\gamma_1 + \gamma_2\delta\gamma_2 + \gamma_3\delta\gamma_3).$$

Варьируя соотношения между величинами α, β, γ, получим шесть соотношений между величинами α, β, γ, $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, которые были даны в § 2 пятой лекции при выводе уравнений (10).

Вследствие этих соотношений, сравнивая уравнения (20) с уравнениями (6), получим

$$\begin{aligned}
a_{11} - 1 &= \alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 + \alpha_3^2\lambda_3,\\
a_{22} - 1 &= \beta_1^2\lambda_1 + \beta_2^2\lambda_2 + \beta_3^2\lambda_3,\\
a_{33} - 1 &= \gamma_1^2\lambda_1 + \gamma_2^2\lambda_2 + \gamma_3^2\lambda_3,\\
\frac{a_{23} + a_{32}}{2} &= \beta_1\gamma_1\lambda_1 + \beta_2\gamma_2\lambda_2 + \beta_3\gamma_3\lambda_3,\\
\frac{a_{31} + a_{13}}{2} &= \gamma_1\alpha_1\lambda_1 + \gamma_2\alpha_2\lambda_2 + \gamma_3\alpha_3\lambda_3,\\
\frac{a_{12} + a_{21}}{2} &= \alpha_1\beta_1\lambda_1 + \alpha_2\beta_2\lambda_2 + \alpha_3\beta_3\lambda_3.
\end{aligned} \tag{21}$$

В § 2 пятой лекции показано, что величины

$$\beta_1\delta\gamma_1 + \beta_2\delta\gamma_2 + \beta_3\delta\gamma_3, \quad \gamma_1\delta\alpha_1 + \gamma_2\delta\alpha_2 + \gamma_3\delta\alpha_3, \quad \alpha_1\delta\beta_1 + \alpha_2\delta\beta_2 + \alpha_3\delta\beta_3,$$

которые мы обозначали там через π', χ', ρ', суть компоненты вращения по осям ξ, η, ζ. Следовательно, сравнивая уравнения (20) и (6), найдем выражения этих компонент

$$\frac{a_{32} - a_{23}}{2}, \quad \frac{a_{13} - a_{31}}{2}, \quad \frac{a_{21} - a_{12}}{2}. \tag{22}$$

Значения величин α, β, γ, λ мы получим следующим образом. Из уравнений (21) легко найдем, с помощью соотношений между α, β, γ

$$\begin{aligned}
(a_{11} - 1 - \lambda_1)\alpha_1 + \frac{a_{12} + a_{21}}{2}\beta_1 + \frac{a_{13} + a_{31}}{2}\gamma_1 &= 0,\\
\frac{a_{21} + a_{12}}{2}\alpha_1 + (a_{22} - 1 - \lambda_1)\beta_1 + \frac{a_{23} + a_{32}}{2}\gamma_1 &= 0,\\
\frac{a_{31} + a_{13}}{2}\alpha_1 + \frac{a_{32} + a_{23}}{2}\beta_1 + (a_{33} - 1 - \lambda_1)\gamma_1 &= 0.
\end{aligned} \tag{23}$$

Так как здесь α_1, β_1, γ_1 не могут быть одновременно равны нулю, потому что сумма их квадратов равна единице, то определитель этих уравнений должен обратиться в нуль, т. е. λ_1 должно быть одним из корней кубического уравнения

$$\begin{vmatrix}
a_{11} - 1 - \lambda & \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & \frac{a_{13} + a_{31}}{2}\\
\frac{a_{21} + a_{12}}{2} & a_{22} - 1 - \lambda & \frac{a_{23} + a_{32}}{2}\\
\frac{a_{31} + a_{13}}{2} & \frac{a_{32} + a_{23}}{2} & a_{33} - 1 - \lambda
\end{vmatrix} = 0. \tag{24}$$

Уравнения (23) будут также иметь место, если поставим индекс 1 вместо 2 или 3 при буквах α, β, γ, λ, откуда следует, что λ_1, λ_2, λ_3 суть три корня уравнения (24). Если один из них выбран в качестве λ_1, то из уравнений (23) определятся соотношения α_1, β_1, γ_1; сами эти величины, до знака одной из них, который остается произвольным, определяются через присоединение уравнения

$$\alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2=1.$$

Подобным же образом получим значения α_2, β_2, γ_2 и α_3, β_3, γ_3. Знаки одной из величин α_2, β_2, γ_2 и α_3, β_3, γ_3 также могут быть выбраны произвольно.

Заметим, что объемное расширение

$$\mu_1\mu_2\mu_3-1=(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)-1=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,$$

как это вытекает из трех первых уравнений (21), равно

$$a_{11}-1+a_{22}-1+a_{33}-1. \tag{25}$$

§ 5

Возвратимся теперь к § 1. Из полученных в нем результатов можно заключить, что деформация, которую получает какая-нибудь частица тела, размеры которой бесконечно малы, при движении в какой-нибудь элемент времени, может быть рассматриваема как составленная из смещения, вращения и растяжения, характеризуемых уравнениями (14). Компоненты смещения суть

$$x-a,\ y-b,\ z-c.$$

Материальная точка, которая не получает перемещения при вращении и растяжении, есть точка с начальными коэффициентами a, b, c; после деформации ее координаты будут, следовательно, x, y, z. Компоненты вращения, величины и направления главных растяжений, как и всех растяжений, могущих возникнуть, мы найдем из выведенных для них формул, если положим

$$\begin{aligned} a_{11}&=\frac{\partial x}{\partial a}, & a_{12}&=\frac{\partial x}{\partial b}, & a_{13}&=\frac{\partial x}{\partial c},\\ a_{21}&=\frac{\partial y}{\partial a}, & a_{22}&=\frac{\partial y}{\partial b}, & a_{23}&=\frac{\partial y}{\partial c},\\ a_{31}&=\frac{\partial z}{\partial a}, & a_{32}&=\frac{\partial z}{\partial b}, & a_{33}&=\frac{\partial z}{\partial c}. \end{aligned} \tag{26}$$

Деформация, которую получит рассматриваемая часть тела в элемент времени dt, бесконечно мала; поэтому к ней применимы формулы, выведенные в § 4. Для этого обозначим через x, y, z те величины, которые до сих пор обозначали через a, b, c, и напишем $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ вместо x, y, z. Вместе с тем положим

$$dx=udt,\ dy=vdt,\ dz=wdt,$$

т. е. обозначим через u, v, w компоненты скорости в момент времени t в точке (x, y, z). Тогда уравнения (26) будут иметь вид

$$\begin{aligned} a_{11}-1&=\frac{\partial u}{\partial x}dt, & a_{12}&=\frac{\partial u}{\partial y}dt, & a_{13}&=\frac{\partial u}{\partial z}dt.\\ a_{21}&=\frac{\partial v}{\partial x}dt, & a_{22}-1&=\frac{\partial v}{\partial y}dt, & d_{23}&=\frac{\partial v}{\partial z}dt,\\ a_{31}&=\frac{\partial w}{\partial x}dt, & a_{32}&=\frac{\partial w}{\partial y}dt, & a_{33}-1&=\frac{\partial w}{\partial z}dt. \end{aligned} \tag{27}$$

Вследствие уравнений (22) компоненты скорости вращения в точке (x, y, z) во время t суть

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right),\quad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{28}$$

и, по (25), объемное расширение, которое здесь происходит в элемент времени dt, равно

$$\left(\frac{du}{dx}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dt. \tag{29}$$

§ 6

Обратимся теперь к рассмотрению *внешней поверхности* движущегося тела; докажем (в предположении непрерывности движения), что она всегда будет образована одними и теми же материальными точками. В самом деле, вообразим себе материальную точку * P, которая в некоторое мгновение не лежит на наружной поверхности, и рассмотрим часть тела, представляющую бесконечно малый шар, описанный в это мгновение вокруг точки P. Согласно нашим исследованиям, в каждое другое мгновение эта часть станет эллипсоидом с центром в точке P. Из этого следует, что материальная точка, которая хотя однажды не лежала на наружной поверхности, никогда не будет на ней находиться; это есть не что иное, как предыдущее предложение, только высказанное другими словами. Чтобы выразить его аналитически, предположим, что уравнение наружной поверхности в момент времени t будет

$$f(x,\ y,\ z,\ t)=0, \tag{30}$$

и рассмотрим материальную точку, которая в момент времени t лежит на наружной поверхности. Та же точка лежит на ней и во время $t+dt$, так как если $f=0$, то также равно нулю изменение, которое получит f, когда t возрастет на dt и одновременно x, y, z возрастут на udt, vdt, wdt; таким образом,

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u\frac{\partial f}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}+w\frac{\partial f}{\partial z}=0. \tag{31}$$

Наружная поверхность тела состоит из поверхностей, которыми оно соприкасается с другими телами. Пусть (30) будет уравнением одной из таких поверхностей и пусть u_1, v_1, w_1 и u_2, v_2, w_2 — компоненты скорости в точке соприкосновения (x, y, z) первого и второго тела; тогда из уравнения (31) получим

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u_1\frac{\partial f}{\partial x}+v_1\frac{\partial f}{\partial y}+w_1\frac{\partial f}{\partial z}=0$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial t}+u_2\frac{\partial f}{\partial x}+v_2\frac{\partial f}{\partial y}+w_2\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

---

* Материальной точке здесь не может быть приписано никакое растяжение. Физическое значение граничного условия усматривается непосредственно, если уяснить себе, что компонента скорости точки координат поверхности по нормали к ней должна совпадать со скоростью в том же направлении, имеющейся налицо в рассматриваемой точке, вследствие значений, приписываемых u, v, w. При движении жидкости условие можно выразить так, что наружная поверхность должна быть всегда образована линиями тока (В. Вин).

Вычтем эти уравнения одно из другого; обозначим через n одно из двух направлений нормали в точке (x, y, z) и воспользуемся тем, что

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z} = \cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz);$$

тогда получим

$$u_1 \cos(nx) + v_1 \cos(ny) + w_1 \cos(nz) = u_2 \cos(nx) + v_2 \cos(ny) + w_2 \cos(nz). \tag{32}$$

Это уравнение выражает, что компоненты скорости по нормали к граничной поверхности двух тел имеют одно и то же значение.

Возможно также допустить, что в *одном* теле имеется поверхность, по которой скорость изменяется скачком. Мы можем тогда рассматривать две части, на которые тело разделяется поверхностью, причем, если она не замкнута, то любым образом может быть дополнена до замкнутой, как два тела. Тогда уравнение (31) будет также иметь место.

ЛЕКЦИЯ ОДИННАДЦАТАЯ

(Давления. Зависимость компонент давления от направления и положения элемента поверхности, к которому оно относится. Равенство давлений на обеих сторонах поверхности соприкосновения двух тел. Внутренние силы. Значения компонент сжимающей силы в жидкостях и упругих твердых телах)

§ 1

Для простоты представления движений тела полезно, кроме сил, которые мы до сих пор рассматривали и которые действуют на частицы тела, ввести другие силы, распределенные по его поверхности. Эти силы называют *давлениями*[1]. Давление, действующее на элемент поверхности тела, подобно движущей силе, приложенной к точке; ему присущи некоторая величина и некоторое направление. Мы будем говорить о компоненте давления по известному направлению, его моменте вращения относительно некоторой оси, его работе для известного перемещения в том же смысле, как о силе такого рода, который мы до сих пор рассматривали. Давление пропорционально величине элемента поверхности, к которому оно относится.

Мы не будем пытаться давать более полное определение этого обобщенного понятия силы, так же как и раньше мы не дали его для более частного случая. Мы только хотим установить, что произойдет с движением тела, когда даны силы, действующие на его частицы, и давления, распределенные по его поверхности.

Для системы материальных точек, которые связаны между собой так, что допускают смещение в любом направлении и вращение вокруг каждой оси, без изменения относительных компонент, применимы выведенные в § 3 и 5 четвертой лекции теорема о движении центра тяжести и теорема площадей. Мы будем рассматривать тело как такую систему материальных точек.

Пусть на частицы тела действуют известные силы и на частицы его поверхности известные давления; тогда это предложение должно быть равносильно шести уравнениям, выражающим теорему о движении центра тяжести и теорему площадей, если только одни эти силы и давления принимаются в расчет.

Если $d\tau$ — элемент объема тела, μ — плотность этого элемента, то

$$\mu X d\tau,\ \mu Y d\tau,\ \mu Z d\tau$$

— компоненты действующей на него силы; далее, пусть ds — элемент поверхности, n — направленная внутрь тела нормаль к нему,

$$X_n ds,\ Y_n ds,\ Z_n ds$$

— компоненты действующего на элемент ds давления, x, y, z — координаты точки объема $d\tau$ или поверхности ds и, наконец, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$ — компоненты ускорения этой точки.

По только что данному определению и согласно уравнениям (3) и (9) четвертой лекции имеем

$$
\begin{aligned}
\int \mu \frac{d^2x}{dt^2}\, d\tau &= \int \mu X\, d\tau + \int X_n ds,\\
\int \mu \frac{d^2y}{dt^2}\, d\tau &= \int \mu Y\, d\tau + \int Y_n\, ds,\\
\int \mu \frac{d^2z}{dt^2}\, d\tau &= \int \mu Z\, d\tau + \int Z_n\, ds
\end{aligned}
\tag{1}
$$

и

$$
\begin{aligned}
\int \mu \left(y \frac{d^2z}{dt^2} - z \frac{d^2y}{dt^2}\right) d\tau &= \int \mu\,(yZ - zY)\, d\tau + \int (yZ_n - zY_n)\, ds,\\
\int \mu \left(z \frac{d^2x}{dt^2} - x \frac{d^2z}{dt^2}\right) d\tau &= \int \mu\,(zX - xZ)\, d\tau + \int (zX_n - xZ_n)\, ds,\\
\int \mu \left(x \frac{d^2y}{dt^2} - y \frac{d^2x}{dt^2}\right) d\tau &= \int \mu\,(xY - yX)\, d\tau + \int (xY_n - yX_n)\, ds.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

§ 2

Каждая частица тела сама есть тело, к которому могут быть приложены уравнения (1) и (2). Из этого следует, что обозначения X_n, Y_n, Z_n должны иметь смысл также для каждого элемента поверхности, взятой внутри тела. Их значения зависят от положения элемента поверхности и от направления нормали n к нему. Мы найдем зависимость от последнего, если напишем уравнения (1) для частицы тела, размеры которой бесконечно малы. Положим, что они будут бесконечно малыми первого порядка; тогда, если предположить конечность сил и ускорений, интегралы

$$\int \mu \frac{d^2x}{dt^2}\, d\tau \quad \text{и} \quad \int \mu X\, d\tau$$

будут бесконечно малыми третьего порядка. Интеграл

$$\int X_n ds \tag{3}$$

есть, таким образом, бесконечно малое второго порядка. Мы рассмотрим этот вывод на примере прямоугольного параллелепипеда, ребра которого имеют длины a, b, c и произвольные направления. Применительно к этому параллелепипеду мы можем интеграл (3) написать так:

$$bc\,(X_a + X_a') + ca\,(X_b + X_b') + ab\,(X_c + X_c'),$$

причем обозначения X_a, X_b, X_c относятся к трем его граням, проходящим через произвольно выбранную вершину, а X_a', X_b', X_c' относятся к противоположным граням. Из того, что указанная сумма должна быть бесконечно малым третьего порядка, если a, b, c — первого, и такими же могут быть также отношения $a : b : c$, следует, что

$$X_a + X_a',\ X_b + X_b',\ X_c + X_c'$$

обращаются в нуль, т. е. что, вообще говоря, X_n получает то же абсолютное значение, но изменяет знак при перемене направления нормали n на противоположное. Пользуясь этим результатом, мы покажем теперь, как X_n может быть выражено через значения, которые оно имеет, когда нормаль n параллельна оси x или оси y, или оси z; эти значения X_n можно обозначить через X_x, X_y, X_z. Вообразим бесконечно близко к элементу поверхности, к которому относится X_n, со стороны, в которую направлена нормаль n, точку; проведем через нее три плоскости, параллельные плоскостям координат. Таким образом получится тетраэдр, для которого составим интеграл (3). Пусть s — площадь грани тетраэдра, к которой относится X_n; тогда соответствующий ей элемент интеграла есть sX_n. Чтобы найти элемент последнего, относящийся к грани, перпендикулярной к оси x, надо различать два случая, когда внешняя нормаль параллельна положительному направлению оси x или ему противоположна. В первом случае величина площади есть $s\cos(nx)$ и соответствующая величина X есть $-X_x$, во втором эти две величины суть $-s\cos(nx)$ и X_x. Таким образом, относящийся к обоим случаям элемент интеграла (3) будет

$$-X_x s\cos(nx).$$

Так как подобное заключение приложимо в отношении двух остальных граней тетраэдра, то весь интеграл (3) равен

$$s\,[X_n - X_x\cos(nx) - X_y\cos(ny) - X_z\cos(nz)].$$

Так как это выражение должно быть высшего порядка, чем s, то

$$X_n = X_x\cos(nx) + X_y\cos(ny) + X_z\cos(nz). \tag{4}$$

Вследствие этого соотношения интеграл (3) будет порядка малости выше второго для каждой частицы тела, размеры которой первого порядка малости, так как

$$\int ds\cos(nx) = 0,\quad \int ds\cos(ny) = 0,\quad \int ds\cos(nz) = 0. \tag{5}$$

Эти уравнения легко получаются из следующего предложения, которое мы будем применять неоднократно.

Если V есть однозначная, непрерывная функция координат x, y, z точек некоторого замкнутого объема, $d\tau$ — элемент этого объема, ds — элемент его поверхности и n, направленная внутрь объема, нормаль к ds, то

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau &= -\int V\cos(nx)\,ds,\\ \int \frac{\partial V}{\partial y}\,d\tau &= -\int V\cos(ny)\,ds,\\ \int \frac{\partial V}{\partial z}\,d\tau &= -\int V\cos(nz)\,ds. \end{aligned} \tag{6}$$

Мы убедимся в правильности этих уравнений, если подставим в их левые части $dx\,dy\,dz$ вместо $d\tau$ и произведем интегрирование по x, y или z. Достаточно положить в них $V = 1$, чтобы получить уравнения (5).

Поступая подобным же образом, мы можем добавить к уравнению (4) два аналогичных; тогда получим

$$\begin{aligned} X_n &= X_x\cos(nx) + X_y\cos(ny) + X_z\cos(nz),\\ Y_n &= Y_x\cos(nx) + Y_y\cos(ny) + Y_z\cos(nz),\\ Z_n &= Z_x\cos(nx) + Z_y\cos(ny) + Z_z\cos(nz). \end{aligned} \tag{7}$$

Входящие сюда девять величин X_x, X_y, ... мы будем, вообще, предполагать однозначными и непрерывными функциями x, y, z, Изменение их скачком может произойти единственно только на поверхностях соприкосновения различных тел. Тогда для какой-нибудь части одного тела по уравнениям (4) и (6) будем иметь

$$\int X_n\,ds = -\int\left(\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)d\tau$$

и отсюда, в силу первого из уравнений (1),

$$\int\left(\mu\frac{d^2x}{dt^2}-\mu X+\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}\right)d\tau=0.$$

Так как это уравнение должно иметь место для каждой части тела, то множитель при $d\tau$ под знаком интеграла должен обратиться в нуль. К полученному таким образом уравнению мы по-прежнему можем добавить два подобных; тогда получим

$$\begin{aligned}\mu\frac{d^2x}{dt^2}&=\mu X-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial X_y}{\partial y}-\frac{\partial X_z}{\partial z},\\ \mu\frac{d^2y}{dt^2}&=\mu Y-\frac{\partial Y_x}{\partial x}-\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial Y_z}{\partial z},\\ \mu\frac{d^2z}{dt^2}&=\mu Z-\frac{\partial Z_x}{\partial x}-\frac{\partial Z_y}{\partial y}-\frac{\partial Z_z}{\partial z}.\end{aligned}\tag{8}$$

Введем эти значения $\mu\frac{d^2y}{dt^2}$ и $\mu\frac{d^2z}{dt^2}$ в первое из уравнений (2), пользуясь тем, что вследствие (6) имеем

$$\begin{aligned}-\int z\frac{\partial Y_x}{\partial x}\,d\tau&=\int zY_x\cos(nx)\,ds,\\ -\int z\frac{\partial Y_y}{\partial y}\,d\tau&=\int zY_y\cos(ny)\,ds,\\ -\int z\frac{\partial Y_z}{\partial z}\,d\tau&=\int zY_z\cos(nz)\,ds+\int Y_z\,d\tau,\\ -\int y\frac{\partial Z_x}{\partial x}\,d\tau&=\int yZ_x\cos(nx)\,ds,\\ -\int y\frac{\partial Z_y}{\partial y}\,d\tau&=\int yZ_y\cos(ny)\,ds+\int Z_y\,d\tau,\\ -\int y\frac{\partial Z_z}{\partial z}\,d\tau&=\int yZ_z\cos(nz)\,ds,\end{aligned}$$

и опираясь на два последних из уравнений (7); таким образом получим

$$\int(Y_z-Z_y)\,d\tau=0.$$

Отсюда следует, что

$$Y_z=Z_y.$$

К этому уравнению можем добавить два аналогичных; тогда будем иметь

$$Y_z=Z_y,\quad Z_x=X_z,\quad X_y=Y_x.\tag{9}$$

§ 3

Давление на элемент поверхности, вообще, наклонно к нему, но в каждом месте имеются три взаимно перпендикулярные площадки, к которым давления перпендикулярны. Мы докажем это предположение следующим образом.

Пусть будет n — нормаль к элементу поверхности, на который действует перпендикулярное давление, и p — величина этого давления: тогда

$$X_n = p\cos(nx),\ Y_n = p\cos(ny),\ Z_n = p\cos(nz).$$

Следовательно, по (7),

$$\begin{aligned} &(X_x - p)\cos(nx) + X_y\cos(ny) + X_z\cos(nz) = 0, \\ &Y_x\cos(nx) + (Y_y - p)\cos(ny) + Y_z\cos(nz) = 0, \\ &Z_x\cos(nx) + Z_y\cos(ny) + (Z_z - p)\cos(nz) = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Эти уравнения в связи с уравнением

$$\cos^2(nx) + \cos^2(ny) + \cos^2(nz) = 1$$

определяют четыре неизвестных; p, $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$. Вследствие соотношений (9) эти уравнения того же вида, как те уравнения, к которым приходят при нахождении длины и направления полуоси поверхности второго порядка, уравнение которой есть

$$X_x\xi^2 + Y_y\eta^2 + Z_z\zeta^2 + 2Y_z\eta\zeta + 2Z_x\zeta\xi + 2X_y\xi\eta = 1, \tag{11}$$

где ξ, η, ζ — текущие координаты. В самом деле, обозначим через ρ длину радиуса-вектора, образующего с осями координат углы, косинусы которых α, β, γ; тогда, так как

$$\xi = \rho\alpha,\ \eta = \rho\beta,\ \zeta = \rho\gamma,$$

уравнение (11) примет вид

$$\frac{1}{\rho^2} = X_x\alpha^2 + Y_y\beta^2 + Z_z\gamma^2 + 2Y_z\beta\gamma + 2Z_x\gamma\alpha + 2X_y\alpha\beta. \tag{12}$$

Мы найдем полуоси поверхности, если будем искать максимум и минимум выражения $\frac{1}{\rho^2}$ при условии

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 1 = 0.$$

Для этого служат уравнения

$$\begin{aligned} &(X_x - \lambda)\alpha + X_y\beta + X_z\gamma = 0, \\ &Y_x\alpha + (Y_y - \lambda)\beta + Y_z\gamma = 0, \\ &Z_x\alpha + Z_y\beta + (Z_z - \lambda)\gamma = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

которые дают для λ кубическое уравнение

$$\begin{vmatrix} X_x - \lambda, & X_y, & X_z \\ Y_x, & Y_y - \lambda, & Y_z \\ Z_x, & Z_y, & Z_z - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Три корня последнего соответствуют трем полуосям и дают обратные величины их квадратов, что легко видеть, если умножить уравнения (13) на α, β, γ, сложить и сравнить результат с (12). Мы сделаем уравнения (10) тождественными с уравнениями (13), если положим

$$p=\lambda,\ \cos(nx)=\alpha,\ \cos(ny)=\beta,\ \cos(nz)=\gamma.$$

Отсюда следует, что главные оси поверхности (11) суть нормали к площадкам, к которым давления перпендикулярны. Величины этих давлений равны обратным величинам квадратов полуосей этой поверхности. Эти давления называют *главными*, их направления—*главными осями давлений*.

Обозначим через p_1, p_2, p_3 главные давления, через α, β, γ с индексами 1, 2, 3 — косинусы углов, которые главные оси давлений образуют с осями координат; тогда из уравнений (13), если принять во внимание соотношения, выражающие взаимную перпендикулярность главных осей, получим

$$\left.\begin{aligned} X_x &= p_1\alpha_1^2+p_2\alpha_2^2+p_3\alpha_3^2,\\ Y_y &= p_1\beta_1^2+p_2\beta_2^2+p_3\beta_3^2,\\ Z_z &= p_1\gamma_1^2+p_2\gamma_2^2+p_3\gamma_3^2,\\ Y_z=Z_y &= p_1\beta_1\gamma_1+p_2\beta_2\gamma_2+p_3\beta_3\gamma_3,\\ Z_x=X_z &= p_1\gamma_1\alpha_1+p_2\gamma_2\alpha_2+p_3\gamma_3\alpha_3,\\ X_y=Y_x &= p_1\alpha_1\beta_1+p_2\alpha_2\beta_2+p_3\alpha_3\beta_3.\end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

§ 4

На поверхности соприкосновения двух тел компоненты давления X_x, $X_y, \ldots$ могут претерпевать разрыв; если n — нормаль к поверхности соприкосновения, то X_n, Y_n, Z_n все-таки будут непрерывны, если предполагать, что силы, распределенные по поверхности соприкосновения, не бесконечно велики. Чтобы это доказать, рассмотрим любую конечную часть поверхности соприкосновения, во всех точках ее проведем нормали и на них по обе стороны отложим отрезки бесконечно малой длины ε. К заполненному этими отрезками объему применим уравнения (1). Входящие сюда интегралы по $d\tau$ бесконечно малые порядка ε; взятые по ds интегралы должны быть того же порядка малости. Для этого необходимо, чтобы значения X_n, Y_n, Z_n на обеих сторонах поверхности соприкосновения не различались между собой на конечные величины. При этом надо заметить, что в то время как в уравнениях (1) мы понимали под n нормаль к ds, направленную внутрь рассматриваемого объема, то здесь мы определили n как одну из двух нормалей к поверхности соприкосновения. Отсюда следует, что n на одной стороне здесь и там имеет одно и то же значение, а на другой направлена противоположно [2].

§ 5

После того как во второй лекции мы получили лагранжевы уравнения движения для системы дискретных материальных точек, мы вывели из них в третьей лекции принцип Даламбера и из него принцип Гамильтона. С уравнениями, полученными нами теперь для движения тела, мы произведем действия, которые соответствуют тем, которые раньше привели нас к принципу Гамильтона. Обозначим, как это мы делали до сих пор, через x, y, z — координаты некоторой материальной точки тела в момент t, а через δx, δy, δz — составляющие бесконечно малого возможного перемещения этой точки. Возможные перемещения здесь совершенно произвольны и должны только непрерывно изменяться с положением точки. Умножим уравнения (8) на δx, δy, δz, сложим их, умножим на элемент объема $d\tau$, занимаемого телом в момент t, и проинтегрируем по этому объему. Мы обозначаем при этом через $d\tau$ известную совокупность материальных точек, массу которых назовем dm, так что

$$\mu d\tau = dm. \tag{15}$$

Мы воспользуемся тем, что

$$\frac{\partial X_n}{\partial x}\delta x = \frac{\partial (X_x \delta x)}{\partial x} - X_x \frac{\partial \delta x}{\partial x},$$

и преобразуем соответственным образом восемь аналогичных членов. Тогда, при помощи уравнений (6) и (7), придем к сумме

$$\int dm\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + \int ds\,(X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z), \tag{16}$$

где через ds обозначен элемент поверхности тела. Эта сумма есть работа, которую при рассматриваемом перемещении произведут силы, действующие на частицы тела, и давления, распределенные по его поверхности; мы обозначим ее через U'. Тогда, используя уравнения (9), получим

$$0 = \int dm\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right) - U' - F', \tag{17}$$

где

$$F' = \int d\tau\left[X_x\frac{\partial \delta x}{\partial x} + Y_y\frac{\partial \delta y}{\partial y} + Z_z\frac{\partial \delta z}{\partial z} + \right.$$

$$\left. + Y_z\left(\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \frac{\partial \delta z}{\partial y}\right) + Z_x\left(\frac{\partial \delta z}{\partial x} + \frac{\partial \delta x}{\partial z}\right) + X_y\left(\frac{\partial \delta x}{\partial y} + \frac{\partial \delta y}{\partial x}\right)\right]. \tag{18}$$

Уравнение (17) выражает принцип Даламбера для нашего тела. Для случая равновесия будем иметь условие

$$0 = U' + F', \tag{19}$$

выражающее принцип возможных перемещений.

При этом вычислении существенно предположение, что в рассматриваемом теле компоненты давления X_x, $Y_y, \ldots$ и перемещений δx, δy, δz повсюду непрерывно изменяются с положением тела, потому что без этого не могло бы быть оправдано применение уравнений (6). Вообразим теперь систему тел, для каждого из которых в отдельности это предположение выполнено. На поверхности соприкосновения двух тел те или другие компоненты давлений или перемещений могут иметь разрыв, как мы это видели в § 4 этой и в § 6 предыдущей лекции. Особенностью этого разрыва является то, что X_n, Y_n, Z_n (где n обозначает для обоих тел внутреннюю нормаль) для обоих тел имеют противоположные значения, и что компоненты перемещения (δx, δy, δz) по нормали равны между собой. Составим уравнения (17) для всех тел, заменив в них U' и F' их значениями из (16) и (18), и возьмем их сумму для всех тел. Сумма соответственных интегралов, под знак которых входит dm или $d\tau$, может быть представлена одним интегралом, распространенным на массы или объем всей системы. Сумма интегралов, под знаком которых стоит ds, слагается из интеграла, который распространен на поверхность всей системы, и интегралов (того же вида), относящихся к поверхностям соприкосновения каждых двух тел. Каждый элемент δx, δy, δz встречается в соответственном интеграле дважды, как принадлежащий поверхности двух тел. Рассмотрим только такие перемещения δx, δy, δz, которые и на поверхности соприкосновения тел не претерпевают разрыва, тогда множитель при ds

$$X_n\delta x + Y_n\delta y + Z_n\delta z \tag{20}$$

на обеих сторонах поверхности соприкосновения имеет противоположное значение. Вследствие этого интегралы, относящиеся к поверхности соприкосновения, обратятся в нуль, и уравнения (17) и (19) будут иметь место при значениях U' и F', определяемых (16) и (18), также и для системы тел, на поверхностях соприкосновения которых компоненты давлений претерпевают разрыв. Это, вообще, не будет иметь места для перемещений, непрерывность которых нарушается на этих поверхностях, но верно в случае, который мы будем подробно разбирать для поверхностей соприкосновения, когда давление, компоненты которого суть X_n, Y_n, Z_n, всюду нормально к этим поверхностям. В самом деле, в этом случае выражение (20) имеет для обоих тел противоположные знаки, так как оно равно произведению величины равнодействующей компонент давления X_n, Y_n, Z_n, на компоненту перемещения (δx, δy, δz) по той или другой из двух нормалей к ds, причем эти компоненты должны иметь противоположные значения[3].

Умножим уравнения (17) на dt и проинтегрируем их для произвольного промежутка времени; тогда, тем же способом и при тех же обозначениях, какими мы пользовались при рассмотрении системы дискретных материальных точек, мы получим

$$\left[\int dm\left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)\right]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} dt\,(\delta T + U' + F'), \tag{21}$$

где через T обозначена живая сила

$$T = \frac{1}{2}\int dm\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Предположим еще, что вариации δx, δy, δz все обращаются в нуль при $t = t_0$ и $t = t_1$; тогда уравнение (21) примет вид

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt\,(\delta T + U' + F'). \tag{22}$$

Это — выражение принципа Гамильтона для рассмотренного теперь случая.

Мы видим, что при желании применить принцип Даламбера или принцип Гамильтона к телу, частицы которого получают относительные перемещения, надо к работе U' сил X, Y, Z и давлений, действующих на поверхность, добавить величину F', определяемую уравнением (18). Эту последнюю можно рассматривать как работу некоторых сил для рассматриваемых перемещений. Иногда эти силы называют *внутренними*, и в противоположность этому *внешними* силами — силы, работу которых обозначают через U'

§ 6

Опыт учит, что для достижения простейшего описания движения тела можно допустить, что компоненты давления X_x, $Y_y \ldots$ для каждой бесконечно малой частицы тела зависят только от состояния и изменения состояния *этой* частицы. Выражения, которыми можно представить компоненты давления, различны для разных классов тел.

Рассмотрим сперва *жидкости*. Если отвлечься от явлений, которые наблюдаются как следствие трения, то здесь можно положить

$$Y_z = Z_x = X_y = 0,$$
$$X_x = Y_y = Z_z.$$

Обозначим общее значение X_x, Y_y, Z_z через p и назовем его просто давлением в рассматриваемой точке в момент t.

Уравнения (7) показывают, что элемент поверхности любого направления испытывает одно и то же перпендикулярное давление p. Это тот самый случай, на который было указано при исследовании выражения (20).

Уравнения (8) примут вид

$$\begin{aligned}\mu \frac{d^2x}{dt^2} &= \mu X - \frac{\partial p}{\partial x},\\ \mu \frac{d^2y}{dt^2} &= \mu Y - \frac{\partial p}{\partial y},\\ \mu \frac{d^2z}{dt^2} &= \mu Z - \frac{\partial p}{\partial z}.\end{aligned} \tag{23}$$

К этим трем уравнениям между пятью неизвестными x, y, z, μ, p добавляются в качестве четвертого уравнения соотношение между давлением p и плотностью, которое обусловлено природой жидкости, и пятое уравнение, которое мы получим следующим образом. Пусть $d\tau$ — объем некоторой совокупности материальных точек в момент t; тогда $\mu d\tau$ есть масса этой совокупности [как об этом уже говорилось в (15)], т. е. $\mu d\tau$ не зависит от времени. Обозначим изменения, получаемые μ и $d\tau$ в элемент времени dt, через $d\mu$ и $dd\tau$; тогда

$$\frac{d\mu}{\mu} + \frac{dd\tau}{d\tau} = 0.$$

Второй член в левой части этого уравнения есть объемное расширение, происходящее за время dt, равное по (29) предыдущей лекции

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dt,$$

где через u, v, w обозначены компоненты скорости в момент t в точке (x, y, z), т. е.

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \tag{24}$$

Для определяемой соотношением (18) величины F' получим

$$F' = \int d\tau p \left(\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z}\right). \tag{25}$$

Рассуждая так же, как при выводе уравнения (24), найдем

$$\frac{\delta\mu}{\mu} + \frac{\partial(\delta x)}{\partial x} + \frac{\partial(\delta y)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta z)}{\partial z} = 0,$$

откуда

$$F' = -\int d\tau p \frac{\delta\mu}{\mu} = -\int dm p \frac{\delta\mu}{\mu^2}.$$

Представим себе, что с помощью существующего между p и μ соотношения составлено выражение

$$f = \int p \frac{d\mu}{\mu^2},$$

причем нижнему пределу этого интеграла может быть дано какое-нибудь неизменное значение; тогда будем иметь

$$\delta f = p \frac{\delta\mu}{\mu^2}$$

и

$$F' = -\delta \int f dm.$$

Так как F' обозначает работу внутренних сил, то из этого можно заключить, что для нашей жидкости внутренние силы имеют потенциал, равный

$$-\int f dm.$$

Во многих случаях изменение плотности так незначительно, что приблизительно можно рассматривать жидкость как несжимаемую. Тогда в уравнениях (23) μ будет постоянно, и уравнение (24) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{26}$$

По данному уравнением (25) выражению для F' оно будет равно нулю, если

$$\frac{\partial \delta x}{\partial x} + \frac{\partial \delta y}{\partial y} + \frac{\partial \delta z}{\partial z} = 0,$$

т. е. если вариация плотности равна нулю. Под возможным перемещением несжимаемой жидкости понимают только такое, при котором плотность не меняется; поэтому для несжимаемой жидкости для всех возможных перемещений $F' = 0$, принцип Даламбера, принцип возможных перемещений и принцип Гамильтона применимы для нее в той же форме, как для системы дискретных материальных точек.

§ 7

Рассмотрим теперь упругое твердое тело, причем предположим, что все его точки могут получать лишь бесконечно малые отклонения от положения, при котором все компоненты давления равны нулю. Далее предположим, что тело одинаково по своим свойствам по всем направлениям или, как говорят, *изотропно.* Для такого тела допускают, что главные давления имеют то же направление, как и главные удлинения, и являются линейными однородными функциями последних. Мы обозначим главные давления через p_1, p_2, p_3, соответствующие главные удлинения через λ_1, λ_2, λ_3 и положим

$$\begin{aligned} p_1 &= -2K[\lambda_1 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)], \\ p_2 &= -2K[\lambda_2 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)], \\ p_3 &= -2K[\lambda_3 + \theta(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)], \end{aligned} \tag{27}$$

причем под K и θ мы подразумеваем постоянные, зависящие от природы тела. Эти уравнения составлены так, что получаются одно из другого посредством какой-нибудь перестановки индексов 1, 2, 3. Пусть α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 — косинусы углов, образуемых направлениями главных давлений и главных удлинений с осями координат; тогда имеют место уравнения (14), а также уравнения (21) предыдущей лекции, если приписать величинам a_{11}, $a_{12}, \ldots$ некоторые определенные значения. Эти значения определены посредством уравнений (26) предыдущей лекции. Изменим примененные там обозначения. Пусть x, y, z — координаты материальной точки тела в предполагаемом нами состоянии, при котором все компоненты давлений равны нулю; $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ —координаты той же точки в момент t, так что под ξ, η, ζ подразумеваются бесконечно малые перемещения точки в момент t. Тогда из уравнений (25) получим

$$\begin{aligned}
&a_{11}-1=\frac{\partial\xi}{\partial x}, && a_{12}=\frac{\partial\xi}{\partial y}, && a_{13}=\frac{\partial\xi}{\partial z},\\
&a_{21}=\frac{\partial\eta}{\partial x}, && a_{22}-1=\frac{\partial\eta}{\partial y}, && a_{23}=\frac{\partial\eta}{\partial z},\\
&a_{31}=\frac{\partial\zeta}{\partial x}, && a_{32}=\frac{\partial\eta}{\partial y}, && a_{33}-1=\frac{\partial\zeta}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{27a}$$

Соединим уравнения, из которых получились уравнения (21) предыдущей лекции, с уравнениями (24) и (27) этой лекции; тогда получим

$$\begin{aligned}
X_x &= -2K\left[\frac{\partial\xi}{\partial x}+\theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right],\\
Y_y &= -2K\left[\frac{\partial\eta}{\partial y}+\theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right],\\
Z_z &= -2K\left[\frac{\partial\zeta}{\partial z}+\theta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}\right)\right],\\
Y_z &= -K\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right),\\
Z_x &= -K\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\xi}{\partial z}\right),\\
X_y &= -K\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right).
\end{aligned} \tag{28}$$

Эти уравнения без изменения пригодны для всякой системы координат, как это следует из их вывода.

При измененных обозначениях уравнения (8) примут вид

$$\begin{aligned}
\mu\frac{d^2\xi}{dt^2} &= \mu X-\frac{\partial X_x}{\partial x}-\frac{\partial X_y}{\partial y}-\frac{\partial X_z}{\partial z},\\
\mu\frac{d^2\eta}{dt^2} &= \mu Y-\frac{\partial Y_x}{\partial x}-\frac{\partial Y_y}{\partial y}-\frac{\partial Y_z}{\partial z},\\
\mu\frac{\partial^2\zeta}{dt^2} &= \mu Z-\frac{\partial Z_x}{\partial x}-\frac{\partial Z_y}{\partial y}-\frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Если бы мы не сделали предположения, что ξ, η, ζ бесконечно малы (это требуется для того, чтобы X, Y, Z были также бесконечно малы), то мы должны были бы в правых частях повсюду заменить x, y, z через $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$.

Упомянутое предположение делает это необязательным; оно дает также право рассматривать в этих уравнениях μ как постоянное.

Вычислим еще определяемую уравнениями (18) величину F'. Для сокращения положим

$$x_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad y_z = z_y = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

$$y_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad z_x = x_z = \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$z_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x},$$

тогда это уравнение будет иметь вид

$$F' = \int d\tau \, (X_x \delta x_x + Y_y \delta y_y + Z_z \delta z_z + Y_z \delta y_z + Z_x \delta z_x + X_y \delta x_y).$$

Положим

$$f = -K\left[x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2} y_z^2 + \frac{1}{2} z_x^2 + \frac{1}{2} x_y^2 + \theta (x_x + y_y + z_z)^2\right], \tag{30}$$

или, что то же самое,

$$f = -K\,[\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \theta (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2];$$

тогда найдем

$$X_x = \frac{\partial f}{\partial x_x}, \quad Y_z = \frac{\partial f}{\partial y_z},$$

$$Y_y = \frac{\partial f}{\partial y_y}, \quad Z_x = \frac{\partial f}{\partial z_x}, \tag{31}$$

$$Z_z = \frac{\partial f}{\partial z_z}, \quad X_y = \frac{\partial f}{\partial x_y}.$$

Отсюда следует, что

$$F' = \int d\tau \, \delta f,$$

или, так как при пренебрежении бесконечно малыми высшего порядка можно рассматривать $d\tau$ как постоянное, то

$$F' = \delta \int f d\tau.$$

Из этого следует, что здесь внутренние силы также имеют потенциал, именно, потенциал, равный $\int f d\tau$.

То же самое имеет место и для неизотропных тел, например кристаллов. Для них также существуют уравнения (31), в которых f обозначает однородную функцию второй степени от шести аргументов: x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y, но которая, однако, имеет иную форму, чем данная выражением (30).

§ 8

Мы опять возвратимся к исследованию жидкости и составим выражения компонент давления для случая, когда должно быть принято во внимание *трение* жидкости. Обозначим через u, v, w компоненты скорости в точке

(x, y, z) в момент t; согласно объяснениям, данным в предыдущей лекции, относительное давление внутри бесконечно малой частицы жидкости в момент t зависит от шести величин:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{32}$$

Если они обращаются в нуль, то относительное давление не имеет места, но возможны смещения и вращения частицы, как целого. Мы предположим также, что в этом случае трения нет, т. е. величины

$$X_x - p,\ Y_y - p,\ Z_z - p,\ Y_z,\ Z_x,\ X_y \tag{33}$$

при подходящем выборе p обратятся в нуль; в самом деле, в § 6 мы предположили относительно этих величин, что если можно пренебречь трением, то они всегда равны нулю. Мы примем далее, что величины (33) — это линейные функции величин (32), и положим

$$X_x = p - 2k\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_z = -k\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right),$$

$$Y_y = p - 2k\frac{\partial v}{\partial y}, \quad Z_x = -k\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

$$Z_z = p - 2k\frac{\partial w}{\partial z}, \quad X_y = -k\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right);$$

где через k обозначена некоторая константа жидкости. Эти уравнения, как и аналогично составленные уравнения (28), обладают свойством оставаться неизменными при любой замене системы координат[4].

Три уравнения, которые мы получим после подстановки в (8) этих значений компонент давления, содержат, в предположении, что жидкость рассматривается как несжимаемая (исследованием этого случая мы и ограничимся), четыре неизвестные функции, именно x, y, z, p, так как u, v, w — производные x, y, z по t. К ним добавляется условие несжимаемости

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Выражения, которыми в трех последних параграфах представлены компоненты давления, рассматриваются как произвольные предположения. Они могут быть сделаны, так как при любых предположениях относительно компонент давления всякое движение тела будет представлено уравнениями (8), лишь бы силы X, Y, Z были выбраны подходящим образом. Сделанные предположения отличаются тем, что при них произвольные движения тела если не вполне точно, то с высокой степенью приближения получаются при простом значении этих сил.

Предметом следующей лекции будет исследование выведенных уравнений при простейших предположениях относительно названных сил. Мы познакомимся в этой лекции с предположениями, хорошо согласующимися с действительностью.

ЛЕКЦИЯ ДВЕНАДЦАТАЯ

(Гидростатика. Равновесие жидкости возможно только при силах, имеющих однозначный потенциал. Свободная поверхность жидкости есть эквипотенциальная поверхность. Тяжелая жидкость. Тяжелая вращающаяся жидкость. Вращающаяся жидкость, частицы которой притягиваются одной точкой или между собой по закону Ньютона. Сжатие Земли. Давления, которые жидкость производит на сосуд, в котором она заключается, или на погруженное твердое тело. Принцип Архимеда)

§ 1

Познакомимся теперь ближе с механикой жидкостей и сперва с *гидростатикой*, т. е. с учением о равновесии жидкостей. Для равновесия жидкости из уравнений (23) предыдущей лекции получим

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}, \\ Y &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}, \\ Z &= \frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где мы обозначили через p давление, через μ — плотность, через X, Y, Z — компоненты силы, относящейся к единице массы в точке (x, y, z). К этому добавим соотношение между p и μ; тогда одна из этих величин может быть выражена как функция другой. Положим, что в уравнениях (1) μ выражено как функция от p, т. е. эти уравнения представляют X, Y, Z как частные производные по x, y, z *одной* функции. В самом деле:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

если положить

$$U = \int \frac{dp}{\mu}. \qquad (2)$$

Таким образом, силы X, Y, Z имеют потенциал, и только при этом условии возможно равновесие. Далее, для этого необходимо, чтобы потенциал U был *однозначной* функцией координат x, y, z внутри наполненного жидкостью объема, потому что уравнение (2), в котором μ обозначает однозначную функцию p, представляет U так же, как однозначную функцию p, а p имеет в каждой точке указанного пространства одно единственное значение. Если U задано, то из уравнения (2) можно найти давление как функцию от U, но только до постоянного, которое остается неизвестным. Поэтому на всякой поверхности равного потенциала давление остается одним и тем же. Если будем рассматривать жидкость как несжимаемую, т. е. μ как постоянное, то уравнение (2) дает

$$p = p_0 + \mu U,$$

где p_0 обозначает неизвестное постоянное. Для газа приближенно, согласно закону Мариотта, получим

$$p = c\mu,$$

где через c обозначена постоянная; отсюда найдем

$$\lg \frac{p}{p_0} = \frac{1}{c} U.$$

Если две разнородные жидкости соприкасаются по некоторой поверхности, то на основании рассуждения, приведенного в § 4 одиннадцатой лекции, для каждой точки этой поверхности в обеих жидкостях p должно иметь одно и то же значение. Допустим, что потенциал для обеих один и тот же, но плотность, соответствующая одному и тому же давлению, различна; пусть будет μ_1 — плотность одной жидкости, μ_2 — другой. Обозначим через dp и dU изменения, которые получают p и U, когда мы переходим от одной точки поверхности соприкосновения к бесконечно близкой точке той же поверхности; тогда из (2) имеем

$$\mu_1 dU = dp \text{ и } \mu_2 dU = dp.$$

Эти уравнения дают

$$dp = 0 \text{ и } dU = 0,$$

т. е. поверхность соприкосновения есть поверхность равного давления и равного потенциала; поэтому она также перпендикулярна к направлению силы в каждой ее точке.

Если жидкость граничит с пустым пространством, то это может случиться только по поверхности равных давлений. Мы будем предполагать в этом случае давление на поверхности равным нулю.

§ 2

Если тяжесть есть единственная внешняя сила и если рассматривать земной радиус как величину бесконечно большую, то поверхность раздела двух разнородных жидкостей или поверхность, которою жидкость отграничена от пустого пространства, есть горизонтальная плоскость.

Мы вычислим теперь поверхность жидкости для некоторых более сложных случаев. Представим себе сперва тяжелую жидкость в сосуде и предположим, что эта система вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью и притом так, что относительное положение частей остается неизменным. В этом случае, на основании объяснений, данных в § 1 девятой лекции, мы можем отвлечься от вращения, если присоединим к действующим силам соответствующую центробежную силу. Направим ось z нашей системы координат по оси вращения вниз, обозначим через g тяжесть и через w угловую скорость, причем если T означает продолжительность одного оборота, то

$$w = \frac{2\pi}{T}.$$

Тогда мы можем положить потенциал тяжести равным gz и потенциал центробежной силы равным $\frac{w^2}{2}(x^2 + y^2)$, откуда следует

$$U = gz + \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Приняв это выражение для U равным постоянному, мы получим уравнение поверхности жидкости. Следовательно, имеем параболоид вращения, ось которого совпадает с осью z.

Подобным же образом может быть рассмотрен следующий случай. Жидкая масса, частицы которой притягиваются началом координат по закону Ньютона, вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью w. Найдем форму поверхности этой массы при равновесии.

Обозначим через G величину притяжения на единицу массы, находящейся на расстоянии R от начала координат, и через r — расстояние переменной точки жидкости от начала. Тогда мы имеем

$$U = \frac{GR^2}{r} + \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Это выражение, приравненное постоянному, дает уравнение искомой поверхности. Преобразуем его, для чего положим

$$z = r \sin \varphi,$$

и выберем R так, чтобы на поверхности $r = R$ для $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Это предположение определяет постоянное, которое в уравнении поверхности оставалось неопределенным, и дает

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{w^2 r^2}{2GR^2}\cos^2\varphi.$$

Предположим, что угловая скорость w так мала, что второй член правой части этого уравнения можно рассматривать как бесконечно малый по сравнению с первым, и примем во внимание только бесконечно малые низшего порядка. Тогда найденное уравнение может быть написано так:

$$r = R\left(1 + \frac{w^2 R}{2G}\cos^2\varphi\right).$$

Оно представляет сжатый на полюсах сфероид. Сжатием его называют дробь $\frac{w^2R}{2G}$; это разность между полярным и экваториальным диаметрами, разделенная на один из них.

Земля также есть слегка сжатый сфероид. Положим для нашей жидкости R равным половине полярного диаметра Земли и G равным тяжести на полюсе Земли. Исходя из произведенного в конце § 1 девятой лекции вычисления, мы получим сжатие жидкого сфероида равным $\frac{1}{582}$. Градусными измерениями сжатие Земли найдено почти вдвое бо́льшим. Однако частицы Земли притягиваются по закону Ньютона не только к центру Земли, но и между собою.

Чтобы подойти ближе к отношению, которое имеет место для Земли, вычислим форму равновесия жидкой массы, вращающейся вокруг оси z нашей системы координат с угловой скоростью w, частицы которой притягиваются между собой по закону Ньютона. Но эту задачу мы можем решить, и то не вполне, предполагая жидкость однородной и несжимаемой. Если w лежит между известными границами, то, как показывает вычисление, формой равновесия жидкости является эллипсоид. Считая, что жидкость ограничена эллипсоидом, можно определить его оси. Решение этой задачи много труднее, чем предыдущей, потому что здесь потенциал действующих сил не задан прямо, но зависит от искомой формы жидкости.

Представим себе эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{3}$$

наполненный массой, плотность которой равна единице; возьмем такую единицу массы, чтобы она действовала по закону всемирного тяготения на равную массу, помещенную в единице расстояния, с силой, равной единице. Потенциал этого эллипсоида в точке (x, y, z) назовем Ω, т. е. положим

$$\Omega=\int\frac{d\tau}{r},$$

где $d\tau$ — элемент объема эллипсоида, r — расстояние этого элемента от точки (x, y, z). Тогда, если эта точка лежит внутри эллипсоида или на поверхности, как мы узнаем впоследствии (в § 1 восемнадцатой лекции),

$$\Omega=\mathrm{const}-\pi(Ax^2+By^2+Cz^2),$$

где

$$A=abc\int\limits_0^\infty\frac{du}{(a^2+u)N},\quad B=abc\int\limits_0^\infty\frac{du}{(b^2+u)N},\quad C=abc\int\limits_0^\infty\frac{du}{(c^2+u)N},$$

$$N=\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}. \tag{4}$$

Пусть теперь эллипсоид, определяемый уравнением (3), будет фигурой равновесия нашей жидкости; тогда

$$U=\mu\Omega+\frac{w^2}{2}(x^2+y^2)$$

и это U должно иметь постоянное значение для всех точек, соответствующих уравнению (3). В таком случае надо так определить некоторую величину M, чтобы

$$-\mu\pi A+\frac{w^2}{2}=\frac{M}{a^2},$$

$$-\mu\pi B+\frac{w^2}{2}=\frac{M}{b^2},$$

$$-\mu\pi C=\frac{M}{c^2}.$$

Исключим M из этих уравнений и положим

$$v=\frac{w^2}{2\pi\mu}; \tag{5}$$

тогда получим

$$a^2(A-v)=b^2(B-v)=c^2C. \tag{6}$$

Это двойное уравнение служит для определения отношений a: b: c. Действительно, величины A, B, C зависят только от этих отношений, потому что если подставим в уравнениях (4) na, nb, nc, n^2u соответственно вместо a, b, c, u, то A, B, C не изменятся. Когда отношения $a:b:c$ будут определены, тогда сами полуоси найдутся из условия, что жидкость имеет данный объем.

Предположим теперь, что искомый эллипсоид есть эллипсоид вращения, ось вращения которого совпадает с осью z. При таком предположении

$$a = b \text{ и } A = B.$$

Тогда уравнения (6) обратятся в одно

$$a^2(A - v) = c^2 C. \tag{7}$$

Так как a^2, c^2, A, C и v — величины положительные, то необходимо, чтобы $a^2 A$ было больше $c^2 C$ и, как показывают выражения (4) для A и C, чтобы a^2 было больше c^2. Таким образом, эллипсоид будет сжатым.

Для трехосного эллипсоида интегралы, представляющие A, B, C, будут эллиптическими; в нашем же случае они выражаются через круговые функции. Положим

$$\lambda = \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2}}$$

введем вместо u новое положительное переменное интегрирования x равнением

$$u = c^2 \frac{\lambda^2 - x^2}{x^2};$$

тогда легко найдем

$$A = \frac{1}{\lambda^3}[(1 + \lambda^2) \operatorname{arc\,tg} \lambda - \lambda],$$

$$C = 2\frac{1 + \lambda^2}{\lambda^3}(\lambda - \operatorname{arc\,tg} \lambda),$$

где $\operatorname{arc\,tg} \lambda$ должен быть взят между нулем и $\frac{\pi}{2}$. Уравнение (7) превратится в

$$v = \frac{(3 + \lambda^2) \operatorname{arc\,tg} \lambda - 3\lambda}{\lambda^3}. \tag{8}$$

Заметим, не приводя доказательства, что уравнение это ни при каких положительных значениях v не может иметь более двух действительных корней и имеет таковых два, когда v лежит между нулем и 0,2246. В этом случае получается два эллипсоида вращения, с помощью которых можно изобразить форму жидкости. Если v можно рассматривать как бесконечно малое, то их легко найти. В этом случае один из двух действительных корней уравнения (8) бесконечно мал, другой бесконечно велик.

Для бесконечно малого корня имеем

$$\operatorname{arctg} \lambda = \lambda - \frac{\lambda^3}{3} + \frac{\lambda^5}{5} - \dots,$$

и отсюда

$$v = \frac{4}{15}\lambda^2 \text{ или } \lambda = \frac{1}{2}\sqrt{15v}; \tag{9}$$

для бесконечно большого корня

$$\operatorname{arctg} \lambda = \frac{\pi}{2},$$

и отсюда

$$v = \frac{\pi}{2\lambda} \text{ или } \lambda = \frac{\pi}{2v}.$$

Когда v приближается к нулю, один из этих эллипсоидов приближается к шару, а другой — к бесконечному диску.

Уравнения (6) не требуют, чтобы эллипсоид, для которого они составлены, обязательно был эллипсоидом вращения. Как впервые заметил Якоби, получается также и трехосный эллипсоид, если v лежит ниже известной границы (а именно, ниже 0,1871), который представляет форму равновесия жидкости. Когда v приближается к нулю, он приближается к бесконечному круговому цилиндру, ось которого перпендикулярна к оси вращения жидкости.

Земля — немного сжатый эллипсоид вращения. Посмотрим, можно ли получить точно ее сжатие, если мы отождествим ее с нашей жидкостью. Для этого прежде всего предстоит найти значение, которое надо дать величине v. Оно определится из уравнения (5), где вместо w должна быть подставлена угловая скорость Земли и вместо μ — ее средняя плотность. Но последняя должна быть выражена в единицах, в которых мы приняли за единицу массы такую, которая притягивает по закону Ньютона равную массу, помещенную на единице расстояния, с силой, равной единице. Легче всего мы определим μ, если введем в вычисление тяжесть на полюсе, которую опять обозначим через G. Обозначим через R половину полярного диаметра Земли и допустим (такое допущение здесь можно сделать), что Земля шарообразна; тогда будем иметь

$$G = \frac{4\pi}{3} R\mu,$$

откуда следует, что

$$v = \frac{2}{3}\frac{w^2 R}{G} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{291} = \frac{1}{436}.$$ [8]

Если будем рассматривать эту дробь как бесконечно малую, то из уравнения (9) получим

$$\lambda^2 = \frac{1}{116}.$$

Из определения λ непосредственно получается

$$a = c\left(1 + \frac{\lambda^2}{2}\right),$$

откуда следует, что $\frac{\lambda^2}{2}$ есть сжатие. Отсюда сжатие Земли было бы равно $\frac{1}{232}$. Из градусных измерений оно найдено близким к $\frac{1}{300}$. Причину этого расхождения надо искать в том, что Земля неоднородна и что ее плотность по мере приближения к центру возрастает.

§ 3

Рассмотрим теперь давления, производимые жидкостью на твердое тело, с которым она находится в соприкосновении, и найдем суммы их компонент по осям координат и моменты вращения[5] относительно этих осей.

Рассмотрим сначала жидкость, вполне наполняющую замкнутый сосуд. Чтобы решить поставленную задачу, воспользуемся уравнениями, которые определяют, вообще говоря, понятие давления, именно уравнениями (1) и (2) одиннадцатой лекции. Они показывают, что если равновесие существует, то сумма компонент[6] и моментов вращения давлений, производимых сосудом на жидкость, равна и противоположна сумме компонент и моментов вращения сил, действующих на частицы жидкости. Но давления, производимые жидкостью на сосуд, равны и противоположны давлениям, производимым сосудом на жидкость, как это было другими словами и в более общей форме выражено в § 4 одиннадцатой лекции. Отсюда следует, что сумма компонент и моменты вращения давлений, испытываемых сосудом от жидкости, равны сумме компонент и моментам вращения сил, действующих на частицы жидкости.

Это предложение имеет место также, если сосуд не замкнут или не вполне наполнен жидкостью и имеет свободную поверхность, по которой граничит с пространством; мы докажем это, если заметим, что давление на свободной поверхности равно нулю.

Представим себе теперь твердое тело, которое погружено в жидкость. Пусть ds — элемент его поверхности, n — направленная внутрь тела нормаль к ds, а $X_n ds$, $Y_n ds$, $Z_n ds$ — компоненты давлений, производимых жидкостью на ds; тогда имеем

$$X_n = p\cos(nx),\ Y_n = p\cos(ny),\ Z_n = p\cos(nz).$$

Поэтому искомые суммы компонент и моменты вращения будут

$$\begin{array}{lll} \int p\cos(nx)\,ds & \text{и} & \int p\,[y\cos(nz) - z\cos(ny)]\,ds, \\ \int p\cos(ny)\,ds & & \int p\,[z\cos(nx) - x\cos(nz)]\,ds, \\ \int p\cos(nz)\,ds & & \int p\,[x\cos(ny) - y\cos(nx)]\,ds. \end{array}$$

При некоторых условиях эти интегралы можно преобразовать в интегралы, распространенные по объему тела, воспользовавшись предложением, выраженным уравнениями (6) одиннадцатой лекции. Для этого необходимо, чтобы для пространства, занимаемого телом, могла быть найдена функция координат точки, непрерывная и однозначная, которая принимала бы на поверхности названного пространства такие же значения, что и p. Положим, что такая функция дана. Обозначим ее также через p, а элемент указанного пространства через $d\tau$; тогда, согласно упомянутому предложению, те же интегралы будут иметь вид

$$\begin{array}{lll} -\int \frac{\partial p}{\partial x}\,d\tau & \text{и} & -\int \left(y\frac{\partial p}{\partial z} - z\frac{\partial p}{\partial y}\right)d\tau, \\ -\int \frac{\partial p}{\partial y}\,d\tau & & -\int \left(z\frac{\partial p}{\partial x} - x\frac{\partial p}{\partial z}\right)d\tau, \\ -\int \frac{\partial p}{\partial z}\,d\tau & & -\int \left(x\frac{\partial p}{\partial y} - y\frac{\partial p}{\partial x}\right)d\tau. \end{array}$$

Поэтому суммы компонент и моменты вращения давлений, которые жидкость производит на тело, равны и противоположны суммам компонент и моментам вращения оси, действующим на частицы тела таким образом, что на каждый элемент объема $d\tau$ действует сила, компоненты которой суть $\frac{\partial p}{\partial x}d\tau$, $\frac{\partial p}{\partial y}d\tau$, $\frac{\partial p}{\partial z}d\tau$.

Это предложение можно так обобщить, что оно будет верно и для случая, когда жидкость имеет свободную поверхность, на которой давление равно нулю, и тело не вполне погружено в жидкость. Чтобы рассмотреть этот случай, предположим, что мы нашли функцию x, y, z, которая в точках поверхности соприкасания тела и жидкости имеет то же значение, как и давление на этой поверхности. Предположим далее, что эта функция однозначная и непрерывная в *части* пространства, занимаемого телом, которая ограничена только что названной поверхностью и поверхностью, на которой функция равна нулю, т. е. поверхностью, которая должна быть ограничена линией, по которой свободная поверхность жидкости пересекает поверхность тела. Тогда предыдущее вычисление, сделанное для вполне погруженного тела, пригодно без дальнейших изменений и к этому случаю, если только приложить его не ко всему объему, занятому телом, а к только что определенной части этого объема.

Доказанное предложение приводит к так называемому принципу Архимеда, если предположить, что на жидкость не действуют никакие другие силы, кроме тяжести. Мы возьмем ось z направленною вертикально вниз и обозначим тяжесть через g; тогда давление в жидкости определится из уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = g\mu$$

и из соотношения, существующего между p и μ. Мы найдем искомую функцию p для занятого твердым телом пространства из *тех же* уравнений; другими словами: в каждой точке этого пространства величина μ должна быть взята такою же, как в той же горизонтальной плоскости в жидкости. Из этого следует, что, как говорят, производимые жидкостью на тело давления имеют равнодействующую, которая равна и противоположна весу вытесненной жидкости и имеет точку приложения в ее центре тяжести.

ЛЕКЦИЯ ТРИНАДЦАТАЯ

(Капиллярные явления. Потенциал капиллярных сил. Главный радиус кривизны и линии кривизны. Увеличение поверхности при бесконечно малых перемещениях ее точек. Дифференциальные уравнения поверхности соприкасания двух тяжелых жидкостей. Граничные условия. Величина силы, удерживающей в равновесии тело, способное двигаться только в одном направлении и соприкасающееся и двумя жидкостями. Примеры такой силы)

§ 1

В капельных жидкостях обнаруживаются некоторые явления, которые называются *капиллярными явлениями* и рассматриваются как действия *капиллярных сил*. Эти явления состоят частью в том, что свободная поверхность такой жидкости или, как мы будем более общо и точно выражаться, поверхность раздела двух жидкостей не представляет горизонтальной плоскости. Эти же явления состоят и в том, что на твердое тело, которое отчасти погружено в капельную жидкость (или, как мы предпочитаем говорить, чтобы удержать в равновесии тело, соприкасающееся с двумя жидкостями) должны действовать силы, которые не могут быть полностью определены по принципу Архимеда. Лаплас первый основал теорию капиллярных явлений; при этом он исходил из гипотезы, что капиллярные силы — это силы притяжения между частицами тел, которые при возрастании расстояния так быстро убывают, что при измеримых расстояниях перестают быть заметными. Позднее эту гипотезу обосновал Гаусс* более строго, чем это удалось Лапласу, и пришел при этом к принципу, который мы можем выразить так: если два разнородных тела соприкасаются по некоторой поверхности, то следствием этого являются силы, имеющие потенциал, который равен величине поверхности соприкасания, умноженной на некоторую постоянную, зависящую от природы обоих тел[7]. Эти силы называются капиллярными силами.

Этот принцип послужит основанием наших исследований капиллярных явлений, к которым мы здесь приступим. При этом мы будем предполагать, что кроме капиллярных сил на жидкость действует только сила тяжести, и будем рассматривать жидкости как несжимаемые, а твердые тела — как неизменяемые. Мы будем исходить из принципа возможных перемещений, но чтобы приложить его к случаю действия капиллярных сил, надо сперва вывести выражение для увеличения, получаемого поверхностью, когда точки ее получают бесконечно малые перемещения. Мы могли бы при этом основываться на уравнениях (12) десятой лекции, но предпочтем решить задачу непосредственно.

§ 2

Вообразим прямую линию, проходящую через точку (x, y, z) и образующую с осями координат углы, косинусы которых суть α, β, γ. Пусть ξ, η, ζ — текущие координаты этой линии. Тогда

---

* Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii; Carl Friedrich Gauss Werke, Bd. V, S. 29.

$$\xi - x = r\alpha, \quad \eta - y = r\beta, \quad \zeta - z = r\gamma,$$

где r — расстояние между этими точками, взятое положительным или отрицательным, в зависимости от того, лежит ли точка (ξ, η, ζ) от точки (x, y, z) в направлении, определяемом косинусами α, β, γ, или в противоположном. Далее, вообразим вторую прямую, уравнения которой при соответственных обозначениях будут

$$\xi - x_1 = r_1\alpha_1, \quad \eta - y_1 = r_1\beta_1, \quad \zeta - z_1 = r_1\gamma_1.$$

Эти линии, вообще, не пересекаются. Они пересекутся, если шесть предыдущих уравнений удовлетворяются надлежащими значениями пяти величин ξ, η, ζ, r, r_1, или, что то же, если уравнения

$$x - x_1 = r_1\alpha_1 - r\alpha,$$

$$y - y_1 = r_1\beta_1 - r\beta,$$

$$z - z_1 = r_1\gamma_1 - r\gamma$$

удовлетворятся надлежащими значениями двух величин r и r_1. Если это имеет место, то r и r_1 обозначают расстояния точки пересечения от точек (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1), взятые положительными или отрицательными.

Пусть теперь (x, y, z) и (x_1, y_1, z_1) будут две бесконечно близкие точки поверхности тела, α, β, γ и α_1, β_1, γ_1 — косинусы углов, которые соответственные нормали, направленные внутрь тела, образуют с осями координат. Мы будем применять знак d для обозначения приращения рассматриваемых величин при переходе от первой точки ко второй; тогда условием пересечения обеих нормалей будет то, что уравнения

$$-dx = rd\alpha + \alpha dr,$$

$$-dy = rd\beta + \beta dr,$$

$$-dz = rd\gamma + \gamma dr$$

должны быть удовлетворены при подходящем выборе r и dr. Умножим эти уравнения на α, β, γ и сложим их; отсюда, принимая во внимание, что по сделанному определению

$$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

и

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0,$$

получим

$$dr = 0.$$

Следовательно, уравнения, которые должны быть удовлетворены, обращаются в

$$dx = -rd\alpha, \quad dy = -rd\beta, \quad dz = -rd\gamma.$$

Одно из этих уравнений есть следствие двух других, так как, если мы умножим их на α, β, γ и сложим, то получим тождественное уравнение. Таким образом, условие пересечения нормалей состоит в том, что два из этих уравнений могут быть удовлетворены подходящим выбором r.

Возьмем уравнение поверхности, о которой здесь говорится, в виде

$$z - z(x, y) = 0, \tag{1}$$

где второе z есть знак функции, которая должна быть дана, и x, y выбраны как независимые переменные, которые определяют точку поверхности и соответствующие ей значения косинусов α, β, γ. Тогда два первых из трех предыдущих уравнений обращаются в

$$dx = -r\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y}dy\right),$$

$$dy = -r\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}dx + \frac{\partial\beta}{\partial y}dy\right)$$

или в

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{1}{r}\right)dx + \frac{\partial\alpha}{\partial y}dy = 0,\\ &\frac{\partial\beta}{\partial x}dx + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{1}{r}\right)dy = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Они могут быть удовлетворены подходящим выбором значения отношения $dy:dx$, если r будет корнем квадратного уравнения

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{1}{r}\right) - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x} = 0. \qquad (3)$$

Пусть r' и r'' — корни этого уравнения, dx', dy' и dx'', dy'' — значения dx, dy, соответствующие им, удовлетворяющие уравнениям (2); тогда r' и r'' будут *главными радиусами кривизны* поверхности тела в точке (x, y), и линейные элементы поверхности, проекции которых суть dx', dy' и dx'', dy'', будут элементами двух проходящих через эту точку *линий кривизны.*

Главные радиусы кривизны всегда действительны и линии кривизны взаимно ортогональны. При доказательстве этого утверждения мы сделаем некоторое предположение относительно системы координат, которая до сих пор оставалась произвольной. Это позволит нам в приводимом ниже доказательстве получить для главных радиусов кривизны и линий кривизны значения, не зависящие от системы координат. Из уравнений (1), представляющих рассматриваемую поверхность, вообще, следует:

$$\alpha : \beta : \gamma = -\frac{\partial z}{\partial x} : -\frac{\partial z}{\partial y} : 1, \qquad (4)$$

так что

$$\frac{\alpha}{\gamma} = -\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\beta}{\gamma} = -\frac{\partial z}{\partial y};$$

отсюда

$$\frac{\partial\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)}{\partial x},$$

или

$$\gamma\left(\frac{\partial\alpha}{\partial y} - \frac{\partial\beta}{\partial x}\right) = \alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y} - \beta\frac{\partial\gamma}{\partial x}.$$

Выберем систему координат так, чтобы было $\gamma = 1$, т. е. так, чтобы ось z была параллельна нормали к поверхности в рассматриваемой точке, направленной внутрь тела. Тогда α и β обратятся в нуль, и выведенное уравнение даст

$$\frac{\partial\alpha}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial x}. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что последний член левой части уравнения (3) есть квадрат и, далее, что левая часть формулы (3) отрицательна, если

$$\frac{1}{r} = -\frac{\partial\alpha}{\partial x} \text{ или } \frac{1}{r} = -\frac{\partial\beta}{\partial y};$$

но она будет положительна, если принять r бесконечно малым. Из этого можно заключить, что уравнение (3) имеет два действительных корня, но они могут быть как положительными, так и отрицательными. Главный радиус кривизны положителен, если соответственный центр кривизны (т. е. точка, координаты которой при принятых в начале этого параграфа обозначениях мы назвали ξ, η, ζ) лежит от точки (x, y, z) со стороны нормали, проведенной внутрь тела, и отрицателен в противном случае. Оба радиуса кривизны положительны для выпуклой поверхности тела и отрицательны для вогнутой; один положителен, другой отрицателен, если поверхность в одном направлении выпукла, в другом вогнута.

Чтобы доказать, что линии кривизны взаимно ортогональны, будем исходить из уравнений

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{1}{r'}\right) dx' = -\frac{\partial\alpha}{\partial y} dy',$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} dx'' = -\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{1}{r''}\right) dy'',$$

которые следуют из уравнений (2). Перемножим их и воспользуемся тем, что

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{1}{r'} = -\left(\frac{\partial\beta}{\partial y} + \frac{1}{r''}\right),$$

так как из уравнений (3) следует, что

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} = -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right). \qquad (6)$$

Таким образом, будем иметь

$$\frac{\partial\beta}{\partial x} dx' dx'' + \frac{\partial\alpha}{\partial y} dy' dy'' = 0.$$

Введем теперь систему координат, для которой существуют уравнения (5), и $\gamma = 1$; тогда это уравнение примет вид

$$dx'\, dx'' + dy'\, dy'' = 0.$$

Так как проекции обоих рассматриваемых элементов на ось z в принятой теперь системе координат (которые должны быть обозначены через dz' и dz'') равны нулю, то это равенство выражает, что оба элемента взаимно перпендикулярны.

При помощи понятий главного радиуса кривизны и линий кривизны теперь легко вычислить увеличение, получаемое частью поверхности тела при бесконечно малом перемещении ее точек. Предположим сперва, что перемещения всюду имеют место в направлении нормалей. Обозначим через ν величину перемещения в направлении внешней нормали, величину, которая непрерывно изменяется от точки к точке поверхности. Вообразим поверхность, разделенную на бесконечно малые прямоугольники двумя системами бесконечно близких линий кривизны; пусть будут dl' и dl'' — смежные стороны такого прямоугольника в начальном состоянии поверхности; следовательно, $dl'\, dl''$ есть его площадь. При перемещении

dl' изменится на $dl'\left(1+\frac{\nu}{r'}\right)$, а dl'' на $dl''\left(1+\frac{\nu}{r''}\right)$; это будет иметь место, каковы бы ни были знаки r' и r''. Поэтому площадь прямоугольника получает при перемещении приращение

$$dl'\,dl''\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)\nu,$$

а вся площадь, элемент которой обозначим через ds, получит приращение

$$\int ds\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)\nu.$$

Во-вторых, мы рассмотрим случай, когда точки поверхности будут смещены в ней самой таким образом, что опять перемещения будут изменяться непрерывно. Тогда увеличение площади будет выражаться интегралом, взятым по периметру. Обозначим через dl элемент периметра; через m — нормаль к dl, касательную к поверхности и направленную внутрь периметра; через μ — проекцию перемещения элемента dl на направление, противоположное m; тогда приращение площади будет

$$\int dl\,\mu.$$

Положим, что точка может получить произвольное бесконечно малое и непрерывно изменяющееся перемещение. Пусть ε будет величина и направление этого перемещения; оно может быть рассматриваемо как составленное из двух таких перемещений, которые мы только что рассматривали. Из этого следует, что увеличение, получаемое частью поверхности, равно сумме двух написанных выше интегралов, если приписать количествам ν и μ известные значения, т. е. положить

$$\nu=-\varepsilon\cos(n\varepsilon),\quad \mu=-\varepsilon\cos(m\varepsilon),$$

где n — направленная внутрь тела нормаль к ds. Отсюда искомое увеличение части поверхности тела будет

$$-\int ds\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)\varepsilon\cos(n\varepsilon)-\int dl\,\varepsilon\cos(m\varepsilon). \tag{7}$$

§ 3

Полученный результат дает нам возможность найти работу капиллярных сил для бесконечно малого перемещения части системы, на которую они действуют. Предположим, что кроме капиллярных сил действует сила тяжести, для которой также надо будет найти работу при таких перемещениях. Примем ось z координатной системы направленной вертикально вниз, обозначим через g тяжесть, через $d\tau$ — элемент объема тела и через μ — его плотность. Тогда потенциал силы тяжести по отношению к телу будет

$$g\int \mu z\,d\tau, \tag{8}$$

и изменение, полученное этим интегралом при рассматриваемом перемещении, представит работу, которую надо вычислить. Как уже сказано, мы будем предполагать тело несжимаемым; поэтому μ должно иметь всегда одинаковое значение. Вследствие этого изменение интеграла (8) для каких-нибудь возможных перемещений может быть представлено интегралом, взятым по поверхности тела, в который войдут только перемещения частей поверхности. В самом деле, при принятом предположении единственной причиной изменения интеграла (8) можно считать изменение пределов интегрирования. Пусть будет ds — элемент поверхности тела, ε — перемещение, n — направленная внутрь тела нормаль к ds; тогда

$$ds\,\varepsilon\cos(n\varepsilon)$$

представляет элемент объема, выключаемый, если $\cos(n\varepsilon)$ положителен, и включаемый, если $\cos(n\varepsilon)$ отрицателен. Следовательно, приращение интеграла или работа тяжести, о которой идет речь, будет

$$-g\mu\int ds\,z\varepsilon\cos(n\varepsilon). \tag{9}$$

Перемещения ε вследствие несжимаемости тела должны быть связаны некоторым уравнением: интеграл

$$\int d\tau$$

должен оставаться неизменным; согласно предыдущему, мы видим, что это условие выражается уравнением

$$0=\int ds\,\varepsilon\cos(n\varepsilon). \tag{10}$$

Введем теперь некоторые свойства поверхности раздела различных жидкостей. Пусть 1 и 2 — две соприкасающиеся жидкости, A_{12} — постоянная, произведение которой на поверхность соприкасания дает потенциал капиллярных сил, действующих вследствие соприкасания, μ_1 и μ_2 — их плотности. Рассмотрим произвольную конечную часть их поверхности соприкасания. Назовем ds_{12} — элемент этой части, n_1 — направленную внутрь жидкости 1 нормаль к ds_{12}, r' и r'' — главные радиусы кривизны этого элемента, считаемые положительными, если поверхность жидкости 1 выпуклая. Предположим, что только точки выбранной части поверхности перемещаются бесконечно мало, тогда как остальные точки поверхности соприкасания различных тел остаются на своем месте; именно, мы предположим, что они перемещаются так, что точки краев сохраняют свое положение и объем обеих жидкостей остается неизменным. Если ε есть перемещение элемента ds_{12}, то необходимо, вследствие уравнения (10), на основании последнего определения, чтобы

$$\int ds_{12}\varepsilon\cos(n_1\varepsilon)=0. \tag{11}$$

Если это условие выполнено, то по принципу возможных перемещений, как это следует из значения выражений (7) и (9), должен быть равен нулю также интеграл

$$\int ds_{12}\varepsilon\cos(n_1\varepsilon)\left[A_{12}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)+g(\mu_1-\mu_2)z\right]. \tag{12}$$

Для этого необходимо, чтобы выражения, стоящие в (11) и (12) под знаком интеграла, были пропорциональны, т. е. чтобы

$$A_{12}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)+g(\mu_1-\mu_2)z=\lambda, \tag{13}$$

где через λ обозначено постоянное. Это и есть дифференциальное уравнение поверхности раздела двух жидкостей. Оно может быть представлено в несколько более простом виде подходящим выбором плоскости x, y. Если плоскость xOy изменяется, то изменяется значение z в определенной точке, в то время как первый член левой части уравнения (13) остается неизменным; таким образом, λ также изменяется и может, следовательно, обратиться в нуль при подходящем выборе плоскости xOy. В этом случае уравнение (13) примет вид

$$A_{12}\left(\frac{1}{r'}+\frac{1}{r''}\right)+g(\mu_1-\mu_2)z=0. \tag{14}$$

Плоскость, которую нужно взять за плоскость xOy, чтобы это уравнение имело место, называется *плоскостью уровня*. Если для поверхности раздела двух жидких частей, которая только что была рассмотрена, r' и r'' бесконечно велики, то она совпадает с плоскостью уровня, как это видно из уравнения (14).

Рассмотрим теперь линию, по которой примыкают друг к другу три жидкости. Мы обозначим эти жидкости через *1*, *2*, *3*, через dl_{123} — элемент линии, через m_{12} — нормаль к этому элементу, касательную к поверхности раздела жидкостей *1* и *2* и направленную внутрь линии, и дадим буквам m_{23}, m_{31} и A_{23}, A_{31} значения, аналогичные тем, которые приписаны буквам m_{12} и A_{12}. Предположим, что точки названной линии бесконечно мало смещены, вследствие чего элемент dl_{123} получит смещение ε. Тогда бесконечно близкие к линии частицы жидкости также получат смещения, притом только такие, при которых объем ни одной из жидкостей не изменится. При помощи выражения (7), на основании принципа возможных перемещений, заключаем, что

$$\int dl_{123}\,\varepsilon\,[A_{12}\cos(m_{12}\varepsilon)+A_{23}\cos(m_{23}\varepsilon)+A_{31}\cos(m_{31}\varepsilon)]=0,$$

откуда следует, в силу произвольности ε,

$$A_{12}\cos(m_{12}\varepsilon)+A_{23}\cos(m_{23}\varepsilon)+A_{31}\cos(m_{31}\varepsilon)=0, \tag{15}$$

где ε — произвольное направление. Это уравнение есть то самое, которое выражает, что три силы, с величинами A_{12}, A_{23}, A_{31}, направления которых перпендикулярны к dl_{123} (направления m_{12}, m_{23}, m_{31}), действующие на одну точку, находятся между собою в равновесии. Обозначим углы (m_{31}, m_{12}), (m_{12}, m_{23}), (m_{23}, m_{31}) через ϖ_1, ϖ_2, ϖ_3; это те углы, которые образуют между собой две из трех плоскостей, касательных к трем поверхностям раздела, в элементе dl_{123}. Тогда уравнение (15) выражает тот факт, что треугольник, стороны которого находятся между собой в отношении $A_{23}:A_{31}:A_{12}$, имеет углы $\pi-\varpi_1$, $\pi-\varpi_2$, $\pi-\varpi_3$, или что

$$\sin\varpi_1:\sin\varpi_2:\sin\varpi_3=A_{23}:A_{31}:A_{12}. \tag{16}$$

Рассмотрим теперь случай, подобный только что изложенному, но который отличается от него тем, что тело *3*—не жидкость, а твердое тело или, что означает здесь то же самое, неизменяемое тело. Сверх того, его поверхность, там, где она встречает поверхность раздела жидкостей *1* и *2*, не должна иметь острых ребер; тогда направления m_{23} и m_{31} будут противоположны. Примем перемещение ε параллельным m_{31}; тогда уравнения (15) также имеют место, и мы получим

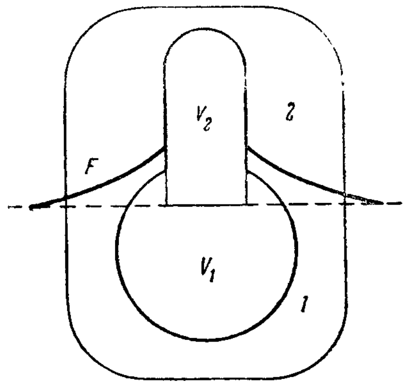
$$\cos\varpi_1=\frac{A_{23}-A_{31}}{A_{12}}. \tag{17}$$

Уравнения, которые могут быть составлены по образцу уравнений (16) и (17), суть граничные условия, которые служат для ближайшего определения интегралов дифференциальных уравнений, составленных по образцу (13) и (14).

§ 4

Прежде чем интегрировать при известных предположениях дифференциальные уравнения поверхности раздела двух жидкостей, выведем выражение для силы, которая должна действовать на твердое тело, чтобы удержать его в равновесии, если оно находится в соприкосновении с двумя жидкостями и может двигаться в данном направлении. Мы по-прежнему обозначим твердое тело цифрой *3*, жидкости — цифрами *1* и *2*. Примером служит твердое тело, погруженное в воду. Этот пример мы положим в основание нашего исследования и обозначим воду через *1*, воздух через *2*.

Сперва мы допустим, что часть поверхности твердого тела, у которой лежит край поверхности воды (т. е. линия, элемент которой мы называли dl_{123}), есть часть вертикального цилиндра с любым поперечным сечением и что тело может двигаться в вертикальном направлении. Кроме собственного веса тела, мы ищем силу Z, которая должна действовать по вертикали вниз, т. е. в направлении оси z, чтобы имело место равновесие. Мы найдем ее, если применим принцип возможных перемещений к некоторому перемещению нашей системы.



Фиг. 1

Представим себе, как показано на фиг. 1, некоторую поверхность F, которая заключает твердое тело и которою ограничена некоторая часть каждой жидкости. Дадим всем точкам системы такое возможное перемещение, что все точки, лежащие вне поверхности F или на ней, остаются на своих местах; твердое тело смещается на ε' по вертикали вниз; частицы жидкости двигаются так, что точки края поверхности воды не получат никакого изменения, и объем каждой жидкости остается неизменным. Допустим, что при этом всем частицам жидкости, которые соприкасаются с телом, вплоть до частиц, лежащих бесконечно близко к пограничной поверхности обеих жидкостей, будет дано такое же смещение, как твердому телу. Работа силы Z для этого перемещения равна

$$Z\varepsilon'. \tag{18}$$

Чтобы найти работу капиллярных сил и силы тяжести, мы сохраним ранее принятые обозначения, но будем понимать под ds_{12} элемент части поверхности раздела *1* и *2*, лежащей внутри поверхности F, и обозначим через U периметр горизонтального поперечного сечения цилиндра, из части которого, по предположению, образована часть поверхности твердого тела. При рассматриваемом перемещении часть поверхности соприкасания *1* с *3* увеличится на $U\varepsilon'$, в то время как поверхность соприкасания *3* и *2* точно на столько же уменьшится, вследствие чего, принимая во внимание выражение (7), получим работу капиллярных сил

$$(A_{31} - A_{23})U\varepsilon' - A_{12}\int ds_{12}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right)\varepsilon' \cos(n_1\varepsilon). \tag{19}$$

Наконец, с помощью выражения (9), найдем работу силы тяжести

$$g(\mu_1 - \mu_3)\varepsilon'\int ds_{31} z\cos(n_3 z) + g(\mu_2 - \mu_3)\varepsilon'\int ds_{23}\cos(n_3 z) -$$
$$- g(\mu_1 - \mu_2)\int ds_{12} z\varepsilon \cos(n_1\varepsilon). \tag{20}$$

Сумма выражений (18), (19), (20) должна быть равна нулю. Выберем за плоскость xOy плоскость уровня и принимая во внимание, что тогда имеет место уравнение (4), получим

$$0 = Z + (A_{31} - A_{23}) U + g(\mu_1 - \mu_3) \int ds_{31} z \cos(n_3 z) + g(\mu_2 - \mu_3) \times \\ \times \int ds_{23} z \cos(n_3 z). \tag{21}$$

Дадим этому уравнению еще другую форму. Если через ds обозначим элемент поверхности замкнутого пространства, через n — направленную внутрь его нормаль к ds, то $\int ds\, z \cos(nz)$, распространенный на всю поверхность, равен отрицательному объему этого пространства, как это следует из предложения, выражаемого уравнениями (6) одиннадцатой лекции. Заметим, что этот интеграл, распространенный на любую часть плоскости xOy или на любую часть цилиндра, параллельного оси z, обращается в нуль; поэтому можно будет найти значение, которое он получит, если будет распространен на ограниченную часть указанной замкнутой поверхности. Именно эту часть можно привести к замкнутой поверхности добавлением поверхности, составленной из куска цилиндра, параллельного оси z, и куска плоскости xOy. Оба интеграла, входящие в уравнение (21), можно поэтому выразить через два объема. Построим поверхность, которая ограничена кривой края воды и составлена из части вертикального цилиндра и части плоскости уровня.

Предположим, что вся эта поверхность лежит внутри твердого тела; тогда она разделит его на две части, из которых одна находится в соприкосновении с жидкостью 1, другая — с обеими жидкостями; объемы этих частей назовем V_1 и V_2; тогда

$$\int ds_{31} z \cos(n_3 z) = -V_1 \quad \text{и} \quad \int ds_{23} z \cos(n_3 z) = -V_2.$$

Введем еще угол w_1 из (17); при этом уравнение (21) примет вид

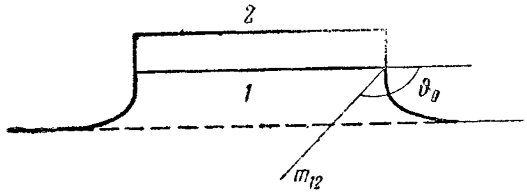
$$Z = g(\mu_1 - \mu_3) V_1 + g(\mu_2 - \mu_3) V_2 + A_{12} \cos w_1 U.$$

§ 5

Рассмотрим теперь случай, в котором только что изложенное заключается как частный случай. Пусть неизменяемое тело 3 имеет произвольную форму и смещается в произвольном направлении, которое мы обозначим через p. Требуется найти силу P, действующую на тело в направлении p, кроме соответствующей компоненты собственного веса, так, чтобы при этом имело место равновесие. Вообразим, что тело смещено в направлении p на ε'. Соприкасающиеся с ним частицы жидкости должны получить равные смещения, в то время как частицы, которые лежат на и вне поверхности F, должны оставаться на месте, и элементы ds_{12} должны получить такое смещение ε, чтобы было выполнено условие несжимаемости. Поверхности, элементы которых были обозначены через ds_{31} и ds_{23}, при этом не изменяются; напротив, край поверхности раздела двух жидкостей получает смещение. Обратив внимание на это, путем исследования, аналогичного тому, которое послужило для вывода уравнения (21), и выбрав опять за плоскость xOy плоскость уровня, мы получим

$$0 = P + g(\mu_1 - \mu_3) \int ds_{31} z \cos(n_3 p) + \\ + g(\mu_2 - \mu_3) \int ds_{23} z \cos(n_3 p) - A_{12} \int dl_{123} \cos(m_{12} p). \tag{22}$$

Применим сперва это уравнение к случаю, когда направление p опять совпадает с направлением z. Пусть тело 3 будет горизонтальной пластинкой, поверхность края которой есть часть кругового вертикального цилиндра. Ее нижняя поверхность должна соприкасаться с жидкостью 1, так что край последней есть линия, элемент которой мы называли dl_{123}. Если мы рассмотрим край нижней поверхности как бесконечно узкую площадь бесконечно большой кривизны, то вместо этого нам следует сказать, что названная линия должна лежать в этом крае. Очевидно, что результат уравнения (22) один и тот же как при одном толковании, так и при другом.



Фиг. 2

Обозначим через V объем пластинки, через f — площадь, а через U — периметр ее оснований, через z_0 — значение z для нижней поверхности, через ϑ_0 — угол между направлением m_{12} и продолжением радиуса пластинки, представленный на фиг. 2, причем

$$(m_{12}p) = \vartheta_0 - \frac{\pi}{2},$$

и допустим, что поверхность раздела двух жидкостей есть поверхность вращения, ось которой совпадает с осью пластинки. Тогда уравнение (22) примет вид

$$0 = P + g(\mu_3 - \mu_2)V - g(\mu_1 - \mu_3)z_0 f - A_{12}U \sin\vartheta_0. \tag{23}$$

Значение z_0 может быть изменяемо внутри известных границ и с ним также изменяется ϑ_0. Как связаны эти величины, мы найдем при изучении формы поверхности раздела двух жидкостей.

Применим теперь уравнение (22) к случаю, когда направление p горизонтально; примем его за направление оси x. Если ds есть элемент поверхности замкнутого пространства, n — направленная внутрь его нормаль к ds, то интеграл

$$\int ds\, z \cos(nx) \tag{24}$$

обращается в нуль, как это показывает первое из уравнений (6) одиннадцатой лекции. Из этого следует, что коэффициент при μ_3 в (22) обращается в нуль и что оба члена этого уравнения, содержащие поверхностные интегралы, объединяются в один

$$g(\mu_1 - \mu_2)\int ds_{31}\, z \cos(n_3 x). \tag{25}$$

Далее, получившийся здесь интеграл можно представить как распространенный по части поверхности твердого тела, лежащей между плоскостью xOy и границей поверхности раздела обеих жидкостей; для этого стоит только заметить, что интеграл (24) также обращается в нуль, если он взят по части плоскости xOy. Предположим, что граница поверхности раздела обеих жидкостей не пересекает плоскости xOy, т. е. вся лежит выше или ниже ее. В обоих случаях мы обозначим через ds_3 элемент названной части поверхности твердого тела. Тогда выражение (25) примет вид

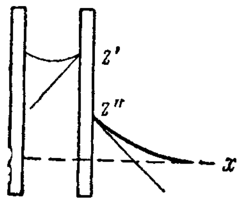
$$\pm g(\mu_1 - \mu_2)\int ds_3\, z \cos(n_3 x),$$

где верхний знак относится к первому, нижний ко второму случаю, в предположении, что нижняя жидкость по-прежнему жидкость *1*. В этом случае уравнение (22) имеет вид

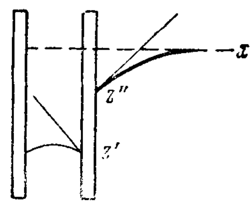
$$0 = P \pm g(\mu_1 - \mu_2)\int ds_3\, z \cos(n_3 x) - A_{12}\int dl_{123} \cos(m_{12} x). \tag{26}$$

Продолжим вычисление в предположении, что твердое тело есть перпендикулярная к оси x пластинка, длина которой b в направлении оси y очень велика. Близ нее со стороны отрицательных x находится другая, параллельная ей твердая пластинка равной или еще большей длины.

Оба случая, которые надо различать в уравнении (26), представлены на фиг. 3 и 4. Элементы ds_3 и dl_{123} в большей части параллельны оси y,



Фиг. 3



Фиг. 4

теми же из них, для которых это не имеет места, в двух предыдущих интегралах можно пренебречь. На наружной стороне подвижной пластинки имеем

$$\pm(m_{12}x) = w_1 - \frac{\pi}{2},$$

на внутренней

$$w_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому взятый по dl_{123} интеграл в уравнении (26) обращается в нуль. Далее, на наружной стороне пластинки $\cos(n_3 x) = -1$, на внутренней он равен $+1$. Наконец, можно положить $ds_3 = l\,dz$, если добавить условие, что нижней границе интеграла должно соответствовать меньшее значение z, а верхней — бо́льшее. Поэтому в обоих различных случаях уравнение (26) примет вид

$$P = g(\mu_1 - \mu_2)\, l\, \frac{z'^2 - z''^2}{2},$$

если значение z для границы обеих жидкостей на внутренней поверхности подвижной пластинки обозначим через z', а на внешней через z''. В зависимости от того, будет ли это выражение для P положительно или отрицательно, обе пластинки оказывают друг на друга кажущееся притяжение или отталкивание.

Как зависят z' и z'' от природы жидкостей и пластинок, а также от расстояния между ними, покажет изучение формы поверхности раздела двух жидкостей.

ЛЕКЦИЯ ЧЕТЫРНАДЦАТАЯ

(Интегрирование дифференциальных уравнений для поверхности соприкасания двух тяжелых жидкостей в случае, когда эта поверхность есть поверхность вращения и когда расстояния рассматриваемых точек от оси вращения очень малы или очень велики. Первое и второе приближение)

§ 1

Займемся теперь интегрированием дифференциального уравнения для поверхности раздела двух жидкостей *1* и *2*. Примем за плоскость xOy плоскость уровня; тогда уравнение будет иметь вид дифференциального уравнения (14) предыдущей лекции

$$z = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''}\right), \tag{1}$$

где

$$a^2 = -2\frac{A_{12}}{g(\mu_1 - \mu_2)}.$$

Примем постоянное A_{12} отрицательным. Только при этом условии возможно устойчивое равновесие, так как, согласно данному в § 2 четвертой лекции разъяснению, для него необходимо, чтобы потенциал действующих сил имел максимум; однако максимум не может иметь места для поверхности несжимаемой жидкости, простирающейся в область положительных значений, а, следовательно, поверхность должна простираться в отрицательную сторону. Далее, обозначим более плотную жидкость через *1*, менее плотную — через *2*; тогда a^2 будет положительно. Если мы определим a тоже как величину положительную, то это будет длина, что видно из уравнения (1). Тогда из уравнений (4) и (6) предыдущей лекции будем иметь

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} = -\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\right)$$

и

$$\alpha : \beta : \gamma = -\frac{\partial z}{\partial x} : -\frac{\partial z}{\partial y} : 1,$$

где через α, β, γ обозначены косинусы угла, который образует с осями координат нормаль к поверхности, направленная внутрь жидкости *1*. Отсюда следует

$$\alpha = \frac{-\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \quad \beta = \frac{-\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

и по (1)

$$z = \frac{a^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}, \tag{2}$$

где корень должен быть взят положительным или отрицательным в зависимости от того, положительно или отрицательно γ. Это уравнение в частных производных мы превратим в обыкновенное дифференциальное уравнение, если предположим, что поверхность, о которой здесь говорится, будет частью поверхности вращения, ось вращения которой совпадает с осью z. Положим

$$u = \sqrt{x^2 + y^2},$$

где корень взят положительным; тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{u} \frac{dz}{du}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{u} \frac{dz}{du},$$

и уравнение (2) обращается в

$$z = \frac{a^2}{2} \frac{1}{u} \frac{d}{du} \frac{u \frac{dz}{du}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}}. \tag{3}$$

Здесь мы можем рассматривать u и z как прямоугольные координаты точки кривой, по которой поверхность пересекается с плоскостью, проходящей через ось z. Поэтому уравнение (3) мы можем преобразовать, введя угол ϑ, для определения которого прежде всего положим

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}} = \cos\vartheta;$$

дополним это определение уравнением

$$\frac{\frac{dz}{du}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}} = \sin\vartheta.$$

Этим уравнением ϑ определено с точностью до добавочной постоянной, кратной 2π; при этом можно принять, что ϑ изменяется по кривой непрерывно. Из полученных для $\sin\vartheta$ и $\cos\vartheta$ выражений следует, что

$$\frac{dz}{du} = \operatorname{tg}\vartheta, \tag{4}$$

т. е. ϑ — угол, который образует касательная к кривой с осью u и который описывает прямая, вращающаяся от оси u до положения, параллельного касательной, в том направлении, в котором она должна быть повернута на $\frac{\pi}{2}$, чтобы принять направление оси z. На основании уравнения $\gamma = \cos\vartheta$ здесь также можно сказать: ϑ есть угол, который проведенная внутрь более плотной жидкости нормаль n_1 образует с осью z и который описывает прямая, вращающаяся от оси z в том же направлении до направления n_1. Тогда уравнение (3) примет вид

$$z = \frac{a^2}{2}\frac{1}{u}\frac{d}{du}(u \sin \vartheta). \tag{5}$$

Мы будем интегрировать уравнения (4) и (5), которые вместе заменяют уравнение (3), только для случаев, когда для точек рассматриваемой поверхности u очень мало или очень велико.

§ 2

Предположим сперва, что u бесконечно мало. Этот случай приблизительно осуществляется, например для поверхности жидкости в тонкой вертикальной трубке кругового сечения, погруженной в большую массу воды, или для поверхности малой капли ртути, лежащей на горизонтальной стеклянной пластинке. Из (5) следует, что в этом случае, вообще говоря, z бесконечно велико. Допустим, что это имеет место, но что для различных точек рассматриваемой кривой разность значений z не бесконечно велика. Обозначим через z_0 одно из этих значений; тогда вместо (5) мы можем здесь написать

$$z_0 = \frac{a^2}{2}\frac{1}{u}\left[\frac{d(u \sin \vartheta)}{du}\right]$$

или

$$z_0 u + \frac{\text{const}}{u} = a^2 \sin \vartheta,$$

где const означает постоянную интегрирования. Она обращается в нуль, если, как мы предположим, ось z пересекает поверхность жидкости, потому что для $u = 0$ левая часть найденного уравнения сделается бесконечно большой, правая же обратиться в бесконечность не может. Равным образом относительно z_0 мы примем, что должно быть $z = z_0$ при $u = 0$. Тогда мы имеем

$$u = \frac{a^2}{z_0} \sin \vartheta, \tag{6}$$

при этом $\vartheta = 0$ для $u = 0$, если, как мы предположим и как это имеет место в обоих приведенных примерах, в точке ($u = 0$, $z = z_0$) более плотной жидкостью является *нижняя.*

Продифференцируем уравнение (6) и перемножим результат с уравнением (4); тогда получим

$$dz = \frac{a^2}{z_0} \sin \vartheta \, d\vartheta;$$

отсюда, интегрируя и принимая во внимание, что $z = z_0$, при $\vartheta = 0$ будем иметь

$$z - z_0 - \frac{a^2}{z_0} = -\frac{a^2}{z_0} \cos \vartheta. \tag{7}$$

Уравнения (6) и (7) показывают, что поверхность жидкости есть шар, радиус которого равен абсолютному значению $\frac{a^2}{z_0}$ и центр которого имеет координату z, равную $z_0 + \frac{a^2}{z_0}$. Более плотная жидкость ограничена здесь выпуклой поверхностью, если z_0 положительно, и вогнутою, если z_0 отрицательно. Значение z_0 обусловлено углом w_1, который определяется из уравнения (17) предыдущей лекции. Рассмотрим, например, свободную поверхность жидкости в вертикальной трубке радиуса R; тогда

$$u = R,$$

$$\vartheta = w_1 - \frac{\pi}{2};$$

подставив эти значения в уравнение (6), получим

$$z_0 = -\frac{a^2}{R}\cos w_1. \tag{8}$$

Часто встречается случай, когда $w_1 = 0$; это происходит, когда твердое тело, о котором говорится, смочено жидкостью *1*. В этом случае уравнение (8) дает

$$z_0 = -\frac{a^2}{R};$$

поверхность жидкости в трубке будет полушарием.

Пусть значения u не бесконечно малы, но просто малы; тогда найденные уравнения представляют первое приближение. Найдем теперь второе приближение. Из уравнения (5) следует:

$$a^2 \sin\vartheta = \frac{2}{u}\int_0^u z u\,du, \tag{9}$$

если будем предполагать, что ось z пересекает поверхность.

Подставим $z_0 + (z - z_0)$ вместо z, где по-прежнему z_0 есть значение z при $u = 0$; тогда имеем

$$a^2 \sin\vartheta = z_0 u + \frac{2}{u}\int_0^u (z - z_0)\,u\,du.$$

Мы придем к формулам первого приближения, именно к уравнению (6), если пренебрежем здесь членом с интегралом; найдем второе приближение, если выразим с помощью уравнений (6) и (7) величины $(z - z_0)$ и u через ϑ. При этом мы получим

$$a^2 \sin\vartheta = z_0 u + 2\left(\frac{a^2}{z_0}\right)^2 \frac{1}{\sin\vartheta}\int_0^\vartheta (1 - \cos\vartheta)\sin\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta$$

или

$$z_0 u = a^2 \sin\vartheta - \left(\frac{a^2}{z_0}\right)^2\left(\sin\vartheta - \frac{2}{3}\,\frac{1 - \cos^3\vartheta}{\sin\vartheta}\right). \tag{10}$$

Дифференцируя это уравнение и перемножая результат с уравнением (4), придем к уравнению, интегрируя которое, получим z как функцию ϑ.

В случае вертикальной трубки радиуса R уравнение (10) дает значение z_0 более точное, чем определенное из (8). Чтобы его найти, можно в член, которым различаются уравнения (10) и (6), подставить z_0 из (8). Если трубка смачивается, то таким же путем получим

$$-z_0 = \frac{a^2}{R} - \frac{R}{3}.$$

§ 3

Уравнения (4) и (5) можно интегрировать дальше, полагая u бесконечно большим. Положим

$$u = u_0 + x, \tag{11}$$

где u_0 обозначает бесконечно большую постоянную величину, выбранную так, что для точек, которые будут рассматриваться, x будет конечно. Выполним в (5) дифференцирование по u; тогда, пренебрегая членами, бесконечно малыми по сравнению с конечными, получим

$$z = \frac{a^2}{2} \frac{d \sin \vartheta}{dx}, \tag{12}$$

и уравнение (4) будет иметь вид

$$dz = \operatorname{tg} \vartheta \, dx. \tag{13}$$

Это — те же уравнения, которые можно было бы получить непосредственно из (2), в прямоугольных координатах x, y, z, предполагая, что z не зависит от y. Перемножив их между собой, получим интегрируемое уравнение, и интегрированием его найдем

$$z^2 = \text{const} - a^2 \cos \vartheta,$$

или также

$$z^2 = 2a^2 \left(h - \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right), \tag{14}$$

где h — произвольное постоянное. Оно необходимо должно быть положительным, потому что z^2 положительно, но может быть больше или меньше единицы. Эти случаи существенно различны. Если $h > 1$, то z не может обратиться в нуль, а также не может переменить знака. Это получим согласно уравнению (1) для кривизны кривой, текущие координаты которой — x и z; напротив, ϑ может быть равно нулю или 2π, т. е. существует точка, в которой касательная горизонтальна, и более плотная жидкость лежит под менее плотной. Если $h < 1$, то имеем обратное, т. е. в этом случае нет такой касательной и ϑ не может быть равно нулю или 2π; но z может равняться нулю, т. е. существуют точки, лежащие в плоскости уровня, в которых кривизна равна нулю.

Для случая $h > 1$ положим

$$h = \frac{1}{k^2}, \quad \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} = \psi, \tag{15}$$

Обозначим по-прежнему через $\Delta\psi$, взятый положительным, корень $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}$; тогда уравнение (14) будет иметь вид

$$z^2 = \frac{2a^2}{k^2} \Delta^2\psi,$$

или, если обозначим через c максимум z, когда z положительно, и минимум z в противном случае причем

$$c^2 = \frac{2a^2}{k^2}, \tag{16}$$

то

$$z = c\Delta\psi. \tag{17}$$

Из уравнения (12) имеем

$$z = a^2 \cos 2\psi \frac{d\psi}{dx},$$

откуда на основании (17) следует, что

$$dx = k^2 \frac{c}{2} \frac{\cos 2\psi \, d\psi}{\Delta\psi},$$

или

$$x = c\left[\left(\frac{k^2}{2} - 1\right)\int \frac{d\psi}{\Delta\psi} + \int \Delta\psi \, d\psi\right], \tag{18}$$

где нижняя граница обоих интегралов есть произвольное постоянное. Для случая $h < 1$ положим в (14)

$$h = \cos^2 \frac{i}{2} = k^2, \tag{19}$$

где под i мы понимаем значение, которого ϑ не может превзойти, но может достигнуть. Далее возьмем

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \cos\frac{i}{2} \sin\psi; \tag{20}$$

отсюда имеем

$$z^2 = 2a^2 \cos^2 \frac{i}{2} \cos^2 \psi.$$

Таким образом, для окончательного определения ψ мы получим

$$z = \sqrt{2}\, a \cos\frac{i}{2} \cos\psi. \tag{21}$$

Для *одной* точки рассматриваемой кривой можно принять ϑ лежащим между нулем и 2π и, следовательно, $\frac{\vartheta}{2}$ лежащим между нулем и π; так как по (20) $\sin\frac{\vartheta}{2}$ не может обратиться в нуль, то $\frac{\vartheta}{2}$ всегда лежит между названными границами, и мы из (20) получим

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \Delta\psi.$$

Уравнение (12) здесь примет вид

$$z = -a^2 (1 - 2\Delta^2\psi) \cos\frac{i}{2} \frac{\cos\psi}{\Delta\psi} \frac{d\psi}{dx},$$

откуда в связи с (21) будем иметь

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{d\psi}{\Delta\psi} + a\sqrt{2} \int \Delta\psi \, d\psi, \tag{22}$$

где нижней границей обоих интегралов по-прежнему является произвольное постоянное.

§ 4

Выведенные уравнения мы приложим теперь к случаям, когда модуль эллиптических интегралов, к которым мы пришли, бесконечно мал или равен единице. Положим сперва в уравнениях (17) и (18) k бесконечно малым. Тогда, разлагая по степеням k, мы найдем

$$z = c\left(1 - \frac{k^2}{2}\sin^2\psi\right) = c\left(1 - \frac{k^2}{4} + \frac{k^2}{4}\cos^2\psi\right)$$

и, воспользовавшись тем, что

$$\int \sin^2\psi\, d\psi = \frac{\psi}{2} - \frac{\sin 2\psi}{4} + \text{const},$$

будем иметь

$$x = \frac{ck^2}{4}\sin 2\psi + \text{const}.$$

Эти выражения z и x показывают, что кривая, о которой говорится, есть круг, радиус которого равен абсолютному значению $\frac{ck^2}{4}$ или по (16) равен $\frac{a^2}{2c}$. Если жидкость заключена между двумя параллельными вертикальными пластинками, которые ею смочены и находятся между собой на расстоянии $2e$, то этот круг должен касаться пластинок; его радиус должен быть равен e, и, так как c отрицательно, то должно быть $c = -\frac{a^2}{2e}$.

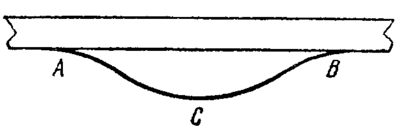
В случае, когда имеют место уравнения (21) и (22), в предположении, что k, как и $\cos\frac{i}{2}$, бесконечно малы, получим

$$z = a\sqrt{2}\cos\frac{i}{2}\cos\psi, \quad x = \frac{a}{\sqrt{2}}\psi + \text{const};$$

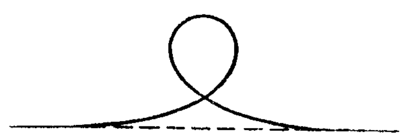
следовательно,

$$z = a\sqrt{2}\cos\frac{i}{2}\cos\left(\frac{x\sqrt{2}}{a} + \text{const}\right).$$

Это уравнение изображает синусоиду. Чтобы дать пример, когда имеет место это уравнение, вообразим горизонтальную пластинку, под нижней



Фиг. 1.



Фиг. 2.

поверхностью которой находится небольшое количество смачивающей ее жидкости. Жидкость может быть в равновесии, если профиль ее имеет форму ACB (фиг. 1), причем предполагается, что расстояние точки C от прямой AB не бесконечно мало, при этом

$$AB = \frac{a\pi}{\sqrt{2}}.$$

Наконец, при $k = 1$ уравнения (17) дают тот же результат, что и уравнения (21) и (22). Чтобы избежать необходимости введения двойного знака, мы допустим в приложениях, что ϑ выбрано между нулем и 2π, следовательно, по (15) ψ лежит между $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$. При использовании второго случая будем предполагать, что для i, которое может быть равно нулю и 2π, выбрано то из этих значений, при котором знак $\cos\frac{i}{2}$ согласуется со знаком z. Если эти условия соблюдены для одной точки рассматриваемой кривой, то они будут иметь место для всех точек ее, лежащих на конечном расстоянии, потому что ϑ не может выйти из границ 0, 2π, и z знака не меняет; таким образом, случай, который мы здесь рассматриваем, является пограничным между двумя случаями, в которых входящее в уравнение (14) количество h больше или меньше единицы. Вследствие этого $\cos\psi$ положительно, и отсюда

$$\cos\psi = \Delta\psi.$$

Пользуясь тем, что

$$\int \frac{d\psi}{\cos\psi} = \lg \operatorname{tg} \frac{1}{2}\left(\psi + \frac{\pi}{2}\right) + \text{const},$$

будем иметь

$$x = c\left(\frac{1}{2} \lg \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{4} + \cos\frac{\vartheta}{2}\right) + \text{const},$$

$$z = c \sin\frac{\vartheta}{2}, \tag{23}$$

$$c = \pm a\sqrt{2}.$$

Фиг. 2 дает приблизительное представление о виде кривой, представляемой этими уравнениями. Часть этой кривой может изображать профиль поверхности жидкости. Таков, например, случай, когда плоская пластинка погружена в произвольном направлении в большую массу воды.

§ 5

Полученные в двух предыдущих параграфах уравнения можно рассматривать как первое приближение для случая, когда поверхность жидкости есть поверхность вращения, ось вращения которой совпадает с осью z, и при котором радиус u для рассматриваемой точки очень велик. Мы положили там, как видно из (11),

$$u = u_0 + x$$

и рассматривали u_0 как очень большую постоянную величину. Найдем второе приближение следующим путем. Уравнения (4) и (5), которые надо интегрировать, можно написать так:

$$z - \frac{a^2 \sin\vartheta}{2u} = \frac{a^2}{2}\frac{d\sin\vartheta}{du}, \quad dz = \operatorname{tg}\vartheta\, du.$$

Перемножив их между собой, преобразуем член

$$-\frac{a^2 \sin\vartheta\, dz}{u},$$

которым пренебрегали в первом приближении; именно, заменим u через u_0 и воспользуемся уравнением, имевшим место в первом приближении. Таким образом, мы получим уравнение, которое может быть проинтегрировано и из которого z может быть выражено как функция от ϑ. После этого можно будет с помощью уравнения (4) представить также u как функцию ϑ. Ограничиваясь случаем, для которого в первом приближении имеет место уравнение (23), найдем указанным способом

$$z\,dz \mp \frac{a^3 \sin\vartheta \cos\frac{\vartheta}{2}\,d\vartheta}{2\sqrt{2}u_0} = \frac{a^2}{2}\sin\vartheta\,d\vartheta,$$

где, как и в следующем, из двух знаков должен быть взят нижний или верхний в зависимости от того, положительно или отрицательно z.

Отсюда, интегрируя, будем иметь

$$z = \pm a\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\left(1 - \frac{a}{3\sqrt{2}u_0}\,\frac{1 \pm \cos^3\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\right). \qquad (24)$$

Это уравнение можно применить к случаю, который мы рассматривали в предыдущей лекции и к которому относятся уравнения (23), именно к случаю, когда горизонтальная круглая пластинка своей нижней поверхностью касается жидкости. Предположим теперь, что поверхность жидкости простирается в бесконечность, и обозначим через u_0 радиус пластинки, через z_0 и ϑ_0 — значения z и ϑ при $u = u_0$. Если z_0 и ϑ_0 имеют те же значения, как указано выше, то уравнение (24) дает соотношение между обеими величинами, на которое там было указано.

Мы не будем продолжать изучение капиллярных явлений и при наших дальнейших исследованиях не будем принимать в расчет капиллярные силы. При рассмотрении этих явлений мы не пользовались понятием давления, которое играет важную роль в общих уравнениях гидростатики и гидродинамики. Это понятие сохраняет также и здесь свое значение. В жидкости, на которую действуют капиллярные силы, давление изменяется внутри точно так же, как если бы этих сил не было, но бесконечно близко к поверхности оно изменяется бесконечно быстро. Именно, капиллярные силы, действующие на частицу, лежащую на конечном расстоянии от поверхности, равны нулю, но на поверхности они дают бесконечно большую равнодействующую. Поэтому мы встретили бы большие затруднения при исследовании капиллярных явлений, если бы пожелали использовать это понятие; мы избежали этого, следуя по другому пути, впервые указанному Гауссом.

ЛЕКЦИЯ ПЯТНАДЦАТАЯ

(Гидродинамика. Дифференциальные уравнения Лагранжа и Эйлера. Вращение жидких частиц. Вихревые линии и вихревые нити. Потенциал скоростей. Многозначный потенциал скоростей в многосвязном пространстве)

§ 1

Обратимся теперь к гидродинамике и в первую очередь к тем движениям жидкостей, при которых трение не проявляется заметно. Мы займемся здесь рассмотрением уравнений (23) и (24) одиннадцатой лекции, т. е. уравнений

$$\begin{aligned} \mu\frac{d^2x}{dt^2} &= \mu X - \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \mu\frac{d^2y}{dt^2} &= \mu Y - \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \mu\frac{d^2z}{dt^2} &= \mu Z - \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{d\mu}{dt} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \tag{2}$$

к которым добавим соотношение между давлением p и плотностью μ.

Преобразуем сначала уравнение (2), которое выражает, что элемент массы остается неизменным при движении, и которое обыкновенно называется *уравнением неразрывности*. Обозначим через x_0, y_0, z_0 координаты той материальной точки жидкости в момент t_0, которая в момент t имеет координаты x, y, z. Тогда отношение объемов, содержащих эту точку в моменты t и t_0, есть определитель

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix},$$

как это следует из уравнений (13) десятой лекции, если мы заметим, что величины, обозначенные через a, b, c в уравнении (26) той же лекции, обозначены здесь через x_0, y_0, z_0. Поэтому условие, что этот определитель, умноженный на μ, не зависит от t, равносильно уравнению (2). Обозначим через a, b, c какие-нибудь независимые между собой величины, которые определяют материальную точку, координаты которой в момент t суть

x, y, z. Тогда имеем девять уравнений, которые могут быть получены из одного

$$\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{\partial x}{\partial x_0}\frac{\partial x_0}{\partial a}+\frac{\partial x}{\partial y_0}\frac{\partial y_0}{\partial a}+\frac{\partial x}{\partial z_0}\frac{\partial z_0}{\partial a}$$

заменой x на y, z или a на b, c. Если положим

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} = D, \tag{3}$$

то следствием этих уравнений, на основании теории определителей (см. конец § 2 десятой лекции), будет

$$D=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial x}{\partial z_0} \\ \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} \\ \frac{\partial z}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial x_0}{\partial a} & \frac{\partial x_0}{\partial b} & \frac{\partial x_0}{\partial c} \\ \frac{\partial y_0}{\partial a} & \frac{\partial y_0}{\partial b} & \frac{\partial y_0}{\partial c} \\ \frac{\partial z_0}{\partial a} & \frac{\partial z_0}{\partial b} & \frac{\partial z_0}{\partial c} \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует, что уравнение (2) может быть заменено условием, что μD не зависит от времени, т. е. уравнением

$$\frac{d(\mu D)}{dt}=0. \tag{4}$$

Умножим уравнения (1)

$$\begin{array}{llllll} \text{на } \frac{\partial x}{\partial a}, & \text{или} & \text{на } \frac{\partial x}{\partial b}, & \text{или} & \text{на } \frac{\partial x}{\partial c}; \\ \text{» } \frac{\partial y}{\partial a} & \text{»} & \text{» } \frac{\partial y}{\partial b} & \text{»} & \text{» } \frac{\partial y}{\partial c}; \\ \text{» } \frac{\partial z}{\partial a} & \text{»} & \text{» } \frac{\partial z}{\partial b} & \text{»} & \text{» } \frac{\partial z}{\partial c}, \end{array}$$

и каждый раз будем складывать их; тогда получим

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial a}=0, \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial b}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial b}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial b}=0, \\ \left(\frac{d^2x}{dt^2}-X\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(\frac{d^2y}{dt^2}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial c}+\left(\frac{d^2z}{\partial t^2}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial c}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial c}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Уравнения (4) и (5) известны под названием лагранжевых уравнений гидродинамики; в них x, y, z, p рассматриваются как функции независимых переменных a, b, c, t.

Поверхность жидкости, по § 6 десятой лекции, должна быть всегда образована из одних и тех же частиц. Представим себе уравнение ее как уравнение между x, y, z, t; тогда, если x, y, z будут выражены через a, b, c, t, то t исключается; уравнение поверхности должно быть уравнением между a, b, c. Второе условие, которое должно быть выполнено на этой поверхности, т. е. на поверхности соприкасания жидкости с другим телом, получим из § 4 одиннадцатой лекции: элемент поверхности соприкасания должен с каждой стороны испытывать одно и то же давление.

Преобразуем еще уравнения (5). Положим сначала

$$P = \int \frac{dp}{\mu} \tag{6}$$

и предположим, что в интервале, в котором введено соотношение, существующее между p и μ, нижний предел выбран произвольно. Далее, сделаем предположение, что силы X, Y, Z имеют потенциал V, так что

$$X = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial V}{\partial z}.$$

Тогда уравнения (5) примут следующий более простой вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial a} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial a}, \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{d^2z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial b}, \\ \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial c} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial c}. \end{aligned} \tag{7}$$

Если жидкость несжимаема, то уравнение (4) перейдет в

$$\frac{dD}{dt} = 0, \tag{8}$$

и по (6) можно положить

$$P = \frac{1}{\mu} p. \tag{9}$$

§ 2

В приложениях часто оказывается более удобной, чем лагранжева, другая форма гидродинамических уравнений, так называемая эйлерова. В ней скорости u, v, w и давление p представляются функциями x, y, z, t. Мы имеем

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

так что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{du}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dw}{dt};$$

припомним теперь, что d обозначает приращение, которое получает стоящая за ним величина, относящаяся к той же материальной точке, в элемент времени dt, т. е. приращение, которое она получает во время увеличения t на dt при неизменных a, b, c. Если a, b, c останутся неизменными, то x, y, z возрастут соответственно на udt, vdt, wdt, когда t увеличится на dt; отсюда следует, что

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Из этого уравнения мы получим такие же уравнения, если под знаком производных заменим u на v, или w, или μ. Введем сюда определяемую уравнением (6) величину P и предположим, что действующие силы имеют потенциал V; тогда вместо уравнений (1) и (2) получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial y}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial (V-P)}{\partial z}, \end{aligned} \tag{10}$$

и

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial (\mu u)}{\partial x} + \frac{\partial (\mu v)}{\partial y} + \frac{\partial (\mu w)}{\partial z} = 0. \tag{11}$$

Для элемента поверхности соприкасания жидкости с другим телом, по уравнению (32) десятой лекции, получим, что компоненты скорости по нормали имеют для обоих тел одно и то же значение; к этому условию надо присоединить еще второе, что элемент поверхности с каждой стороны испытывает одно и то же давление.

Если жидкость несжимаема, то P получает здесь также значение (9), и уравнение (11) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{12}$$

§ 3

Мы видели в десятой лекции, что изменение, получаемое бесконечно малой частицей тела при движении его, слагается из смещения, вращения и известного рода растяжения, и имели в (28) выражения для компонент скорости вращения. Обозначим через π, χ, ρ эти компоненты; тогда, как мы там нашли,

$$\begin{aligned} 2\pi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \\ 2\chi &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \\ 2\rho &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \tag{13}$$

Выведем теперь для вращения частицы жидкости известную теорему, открытую Гельмгольцем *, предполагая, что действующие силы имеют потенциал; при этом будем исходить из уравнений (7).

* Borchard's Journal fur die reine und angewandte Mathematik, Bd. 55.

Дифференцируя второе из них по c, третье по b и вычитая результаты один из другого, мы получим уравнение, которое можно интегрировать по t, так как

$$\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial b}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c}\right)=\frac{\partial x}{\partial b}\frac{d^2\frac{\partial x}{\partial c}}{\partial t^2}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{d^2\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)}{dt^2}=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{d\frac{\partial x}{\partial c}}{dt}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{d\frac{\partial x}{\partial b}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial u}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial u}{\partial b}\right).$$

Получим аналогичные соотношения, заменяя в этом выражении u и x через v и y или w и z. Из этого интегрируемого уравнения круговой перестановкой букв a, b, c можно получить два других. Обозначим через A', B', C' три не зависящих от t величины; тогда

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}-\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}&=2A',\\
\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}-\frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}&=2B',\\
\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}-\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}&=2C'.
\end{aligned}\right\}\qquad(14)$$

Эти уравнения можно привести к более простому виду. Для этого прежде всего умножим их на $\frac{\partial x}{\partial a}$, $\frac{\partial x}{\partial b}$, $\frac{\partial x}{\partial c}$ и сложим. Тогда члены, содержащие u, пропадут; члены, зависящие от v, объединятся с такими же, зависящими от w, если ввести производные от a, b, c по x, y, z.

Вообразим, что уравнение, которое представляет x, y, z как функции a, b, c, t, разрешено относительно a, b, c, так что эти величины будут функциями x, y, z, t. Обозначим через da, db, dc и dx, dy, dz соответствующие изменения, которые получают a, b, c и x, y, z, в то время как t остается неизменным. Уравнения

$$da=\frac{\partial a}{\partial x}dx+\frac{\partial a}{\partial y}dy+\frac{\partial a}{\partial z}dz,$$

$$db=\frac{\partial b}{\partial x}dx+\frac{\partial b}{\partial y}dy+\frac{\partial b}{\partial z}dz,$$

$$dc=\frac{\partial c}{\partial x}dx+\frac{\partial c}{\partial y}dy+\frac{\partial c}{\partial z}dz$$

будут тогда решениями уравнений

$$dx=\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db+\frac{\partial x}{\partial c}dc,$$

$$dy=\frac{\partial y}{\partial a}da+\frac{\partial y}{\partial b}db+\frac{\partial y}{\partial c}dc,$$

$$dz=\frac{\partial z}{\partial a}da+\frac{\partial z}{\partial b}db+\frac{\partial z}{\partial c}dc.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial a}{\partial z}=\frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}-\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}\right),$$

$$\frac{\partial b}{\partial z}=\frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}\right),$$

$$\frac{\partial c}{\partial z}=\frac{1}{D}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}\right),$$

где D имеет значение, данное в (3). Отсюда мы получим члены, содержащие v, уравнения, в которое мы преобразуем уравнения (14), именно

$$D\left(\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial z}+\frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial z}\right),$$

т. е.

$$D\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Подобным же образом найдем, что член этого уравнения, зависящий от w, равен

$$-D\frac{\partial w}{\partial y},$$

поэтому левая часть примет вид

$$D\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right), \quad \text{или по (13),} \ -2D\pi.$$

Положим еще

$$A'=-A\mu D, \quad B'=-B\mu D, \quad C'=-C\mu D,$$

причем A, B, C будут также независящие от t величины, так как, по (4), произведение μD не зависит от t. Добавляя к составленному уравнению еще два, которые получим из него при замене x и π на y и χ или на z и ρ, будем иметь

$$\begin{aligned}\pi&=\mu\left(A\frac{\partial x}{\partial a}+B\frac{\partial x}{\partial b}+C\frac{\partial x}{\partial c}\right),\\ \chi&=\mu\left(A\frac{\partial y}{\partial a}+B\frac{\partial y}{\partial b}+C\frac{\partial y}{\partial c}\right),\\ \rho&=\mu\left(A\frac{\partial z}{\partial a}+B\frac{\partial z}{\partial b}+C\frac{\partial z}{\partial c}\right).\end{aligned} \tag{15}$$

Мы подразумеваем под a, b, c какие-нибудь величины, определяющие частицу жидкости; при исследовании уравнений (15) мы примем, что a, b, c — координаты частицы в момент $t=0$. Значение величин A, B, C легко при этом истолковать; действительно они суть значения, которые получают $\frac{\pi}{\mu}$, $\frac{\chi}{\mu}$, $\frac{\rho}{\mu}$ при $t=0$. Отсюда прежде всего вытекает такое следствие: если частица жидкости не вращается в момент $t=0$, т. е. если для нее в этот момент π, χ, ρ равны нулю, то для нее A, B, C, а также, по (15), π, χ, ρ для каждого момента времени должны быть равны нулю. Частица жидкости, вращение которой в какой-нибудь момент было равно нулю, *никогда* не будет вращаться.

Второе заключение, которое может быть выведено из уравнений (15), следующее. Пусть a, b, c и $a+da$, $b+db$, $c+dc$ будут начальные координаты двух бесконечно близких частиц, так что x, y, z и $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$ суть координаты тех же частиц в момент t. Предположим далее, что da, db, dc выбраны так, что

$$da : db : dc = A : B : C,$$

т. е. так, что в момент $t=0$ прямая, соединяющая обе частицы, совпадает с осью вращения. Эта двойная пропорция равносильна уравнениям

$$da = A\varepsilon, \quad db = B\varepsilon, \quad dc = C\varepsilon,$$

где ε обозначает бесконечно малую независимую от t величину. Подставим получающиеся отсюда для A, B, C значения в уравнения (15); тогда последние примут вид

$$dx = \frac{\pi}{\mu}\varepsilon, \quad dy = \frac{\chi}{\mu}\varepsilon, \quad dz = \frac{\rho}{\mu}\varepsilon, \tag{16}$$

т. е. будем иметь

$$dx : dy : dz = \pi : \chi : \rho.$$

Это соотношение означает, что прямая, соединяющая две рассматриваемые частицы, всегда совпадает с их осью вращения.

Обозначим через k скорость вращения, т. е. положим

$$k = \sqrt{\pi^2 + \chi^2 + \rho^2};$$

тогда уравнения (16) дадут

$$k = \frac{\mu}{\varepsilon}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}, \tag{17}$$

т. е. скорость вращения изменяется со временем так, что остается пропорциональной произведению плотности на расстояние между обеими частицами.

Выраженному уравнениями (16) и (17) предложению мы дадим еще другую форму. Вообразим в некоторый момент исходящую из некоторой точки жидкости линию, направление которой всюду совпадает с направлением оси вращения частиц, через которые она проходит; такую линию мы будем называть вместе с Гельмгольцем *вихревой линией*. Тогда уравнения (16) показывают, что все частицы жидкости, которые в некоторый момент лежат на вихревой линии, в каждый другой момент также находятся на ней. Поэтому мы можем говорить об изменении, которое получает вихревая линия со временем, причем мы устанавливаем, что вихревая линия всегда проходит через одни и те же частицы жидкости. Чтобы выразить иначе доказанное уравнением (17) предложение, введем новое определение. Мы будем понимать под *вихревой нитью* бесконечно тонкую нить, которая будет вырезана из жидкости вихревыми линиями, проходящими через точки контура бесконечно малой площади. Мы можем говорить об изменениях, которые испытывает вихревая нить со временем, установив, что вихревая нить всегда содержит одни и те же частицы жидкости. Рассмотрим бесконечно короткий отрезок вихревой нити и обозначим через l его длину, а через q — его поперечное сечение; тогда $\mu q l$ есть его масса, которая не изменяется со временем. Но, по (17), скорость вращения этого отрезка пропорциональна μl, откуда следует, что qk постоянно, т. е. что произведение скорости вращения на поперечное сечение бесконечно короткого отрезка вихревой нити не изменяется с течением времени.

Докажем еще одно свойство того же произведения qk. Пусть $d\tau$ — элемент объема некоторой произвольной частицы жидкости, ds — элемент поверхности этой частицы и n — направленная внутрь не нормаль к ds. Тогда, согласно предложению, которым мы уже неоднократно пользовались, будем иметь

$$\int d\tau \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) = -\int ds\,[\pi \cos(nx) + \chi \cos(ny) + \rho \cos(nz)],$$

или равно

$$-\int ds\, k \cos(kn), \tag{18}$$

где k обозначает одновременно направление оси вращения и величину скорости вращения. Но из уравнений (13) следует, что множитель при $d\tau$, а вместе с ним и интеграл левой части уравнения (18) обращаются в нуль. Поэтому обратится в нуль и интеграл правой части. Это предложение мы применим к части нити, ограниченной двумя перпендикулярными к ней поперечными сечениями. Пусть q' и q'' — площади этих сечений, k' и k'' — соответствующие значения скорости вращения. Для одного из поперечных сечений

$$\cos(kn) = 1,$$

для другого

$$\cos(kn) = -1,$$

в то время как для остальных частей поверхности этот косинус обращается в нуль. Поэтому доказанное предложение дает

$$q'k' = q''k''.$$

Произведение скорости вращения на поперечное сечение вихревой нити, которое не изменяется со временем для одной и той же ее части, также остается неизменным в данный момент для всех частей нити.

Отсюда заключаем, что вихревая нить не может прерваться внутри жидкости. Вихревая нить либо оканчивается на поверхности жидкости, либо оказывается замкнутой.

§ 4

Если все частицы рассматриваемой жидкости не вращаются в некоторый момент, то, согласно доказанному в предыдущем параграфе предложению, они не будут вращаться никогда. Тогда всегда вследствие уравнений (13),

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Эти уравнения показывают, что существует функция x, y, z, t, которую мы обозначим через φ, обладающая свойством:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \tag{19}$$

Гельмгольц назвал эту функцию φ *потенциалом скоростей*. Если движение вполне определено, так что u, v, w суть определенные функции x, y, z, t, то потенциал скоростей еще определен не вполне; в его выражении остается произвольной функция t, так как уравнения (19) единственные, которым φ должна удовлетворять и из которых она должна быть определена.

Введем значения u, v, w из (19) в эйлеровы уравнения (10), умножим их на dx, dy, dz и сложим; тогда получим интегрируемое уравнение и после интегрирования будем иметь

$$V-P=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+C,$$

где C обозначает величину, не зависящую от x, y, z, но которая может зависеть от t. Действительно, если возьмем частные производные этого уравнения по x, y или z, то придем к уравнениям, которые получаются из (10) и (19). Не умаляя общности, можем положить $C=0$, тогда

$$V-P=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{20}$$

если предположим, что мы надлежащим образом выбрали добавочную функцию от t, входящую в φ. Для некоторого определенного случая φ будет найдено с точностью до добавочной постоянной, не зависящей ни от t, ни от x, y, z и остающейся произвольной. При этом мы предполагаем, что V вполне дано, т. е. определено вместе с добавочной произвольной функцией t, входящей в его выражение, если только заданы силы. Уравнение неразрывности в форме Эйлера, а именно уравнение (11), после введения потенциала скоростей будет иметь вид

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}{\partial z}=0. \tag{21}$$

Потенциал скоростей не всегда однозначная функция x, y, z, t. Он может быть и многозначным, но при известном условии и притом только некоторым образом, что мы сейчас и покажем.

Пусть φ' и φ'' — два значения φ для некоторой системы значений x, y, z, t; тогда разность $\varphi'-\varphi''$ должна оставаться неизменной, если при неизменном t точка (x, y, z) непрерывно перемещается в жидкости, причем φ' и φ'' всегда будут принимать такие значения φ, которые непрерывно получаются одно из другого. В самом деле, производные φ' и φ'' по x, y, z должны быть между собою равны, так как они суть скорости u, v, w. Если потенциал действующей силы V однозначен, то эта разность не может также изменяться со временем. Действительно, так как P, согласно его определению (6), однозначно, так же как p и μ, то из (20) следует, что $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ может иметь только одно *единственное* значение. Теперь мы должны найти еще условие, при котором может иметь место многозначность φ. Так как $\varphi'-\varphi''$ не зависит от времени и места, как мы только что видели, предполагая рассматриваемую жидкость связной, то нам необходимо установить, при каком условии в некоторый момент и в некоторой точке эта разность может быть отличной от нуля. Одно значение φ мы можем здесь выбрать произвольно благодаря добавочной постоянной, которая остается произвольной в φ; мы положим ее равной нулю и посмотрим, может ли φ иметь здесь отличное от нуля значение. Найдем значение φ для некоторой точки (x, y, z), которая отлична от выбранной (для рассматриваемого момента); для этого соединим эти точки произвольной линией, которая только не должна выходить из границ жидкости, и возьмем интеграл, распространенный по этой линии:

$$\int(u\,dx+v\,dy+w\,dz). \tag{22}$$

Продолжим эту линию до замыкания в первоначально выбранной точке; тогда интеграл (22) может дать отличное от нуля значение для этой точки;

в этом случае φ многозначна. Но если для *всех* линий такого рода интеграл (22) будет равен нулю, то φ однозначна. Вообразим теперь, что такая линия может быть непрерывно изменяема в другую так, чтобы ни при каком из промежуточных положений данное для нее условие не было нарушено. При этом рассматриваемый интеграл может изменяться непрерывно или совсем не изменяться. Первый случай не может иметь места, потому что многозначная функция для одной системы значений аргументов не представляет ряда значений, непрерывно вытекающих одно из другого. Следовательно, интеграл не изменяется. Если линия бесконечно мала, то интеграл равен нулю; но он будет равен нулю и для всякой линии, которая указанным образом может быть приведена в бесконечно малую.

Итак, потенциал скоростей должен быть однозначен, если замкнутая линия, которая может быть проведена в жидкости в некоторый данный момент через данную точку, может быть непрерывным изменением, без выхода из жидкости, стянута в эту точку. Выполнение этого условия зависит от формы пространства, содержащего жидкость. Область пространства, для которой это условие выполнено, называют *односвязной*. Это название вытекает из другого свойства такой области, которое необходимо согласуется с указанным выше, именно, из свойства, что *поперечным сечением* область можно разделить на две отдельные части. Под поперечным сечением мы разумеем здесь поверхность, которая вся лежит внутри области, не пересекая себя, и вполне ограничена линией пересечения с поверхностью области. Примером односвязного пространства является полый шар или шар, из которого вырезан меньший. Следует обратить внимание, что во втором примере для ограничения односвязного пространства применена несвязная поверхность. Односвязному пространству противопоставляют *дву-*, *трех-* и вообще *многосвязное* пространство. Двусвязное пространство есть такое, которое надлежаще выбранным поперечным сечением может быть обращено в односвязное. Трехсвязное — такое, которое одним подобным сечением может быть обращено в двусвязное, и т. д. Пример двусвязного пространства представляет кольцо или шар, из которого вырезано кольцо. Здесь нет необходимости строго обосновывать понятие о связности и притом приводить доказательство, что оба указанных признака для односвязного пространства согласуются между собой. В тех простых случаях, где мы будем пользоваться этим понятием, это легко усмотреть непосредственно.

ЛЕКЦИЯ ШЕСТНАДЦАТАЯ

(Несжимаемая жидкость. Потенциал масс, сосредоточенных в одной точке или непрерывным образом распределенных по поверхности или по объему. Потенциал двойного слоя. Теорема Грина. Представление некоторой функции V, которая удовлетворяет в некоторой области уравнению $\Delta V = 0$ и вместе со своими первыми производными однозначна и непрерывна, через сумму потенциалов простого слоя и двойного слоя, распространенных по поверхности области. Условия, достаточные для определения V. Линии тока и нити тока. Случай, когда рассматриваемая область простирается в бесконечность. Многозначные решения уравнения $\Delta\varphi = 0$. Потенциал масс, зависящий от двух координат).

§ 1

Мы будем теперь заниматься движением несжимаемой жидкости в предположении, что существует потенциал скоростей. Уравнение (21) предыдущей лекции переходит для несжимаемой жидкости в следующее:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Рассмотрим здесь решение этого дифференциального уравнения в частных производных. Уравнение для краткости будем изображать через

$$\Delta\varphi = 0. \tag{1}$$

Вначале выведем некоторые свойства однозначных решений этого уравнения.

Пусть r — расстояние точки (x, y, z) от точки (a, b, c), т. е.

$$r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

и m — постоянное; тогда

$$\frac{m}{r} \tag{2}$$

будет частным решением уравнения (1). В самом деле, мы имеем

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} = \frac{a-x}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} = 3\frac{(a-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} = \frac{b-y}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y^2} = 3\frac{(b-y)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} = \frac{c-z}{r^3}, \qquad \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2} = 3\frac{(c-z)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3};$$

поэтому

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \quad \text{вместе с} \quad \Delta \frac{m}{r} = 0.$$

Мы будем называть выражение (2), как мы это делали раньше, *потенциалом массы* m относительно точки (x, y, z), но при этом допустим, что масса может быть как положительной, так и отрицательной. Этот потенциал будет непрерывным во всем пространстве за исключением точки, в которой находится масса, где он делается бесконечным. В бесконечно удаленной области потенциал и его производные бесконечно малы. Обозначим потенциал через U, а через R (по величине и направлению), проведенную из начала координат — прямую в точку (x, y, z); тогда величины

$$RU, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial z}$$

при возрастании R до бесконечности будут приближаться к значениям

$$m, \quad -m\cos(Rx), \quad -m\cos(Ry), \quad -m\cos(Rz)$$

в предположении, что точка (a, b, c), так же как и начало координат, лежит на конечном расстоянии.

Уравнение (1) линейно и однородно, откуда следует, что сумма решений также является его решением; поэтому

$$\sum \frac{m}{r}$$

есть также решение, где каждый член суммы различается значениями a, b, c и m. Мы будем называть это выражение потенциалом масс, лежащих в точках (a, b, c). Он непрерывен всюду, за исключением тех точек, где он делается бесконечно большим. Обозначим его через U и оставим для R то значение, которое было ей придано; тогда, при возрастании R до бесконечности, величины

$$RU, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad R^2 \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R^2 \frac{\partial U}{dz}$$

будут приближаться к значениям

$$\sum m, \quad -\cos(Rx)\sum m, \quad -\cos(Ry)\sum m, \quad -\cos(Rz)\sum m. \tag{3}$$

§ 2

Рассмотрим теперь потенциал масс, непрерывно заполняющих некоторый объем. Пусть $d\tau$—элемент этого объема, k — плотность в нем и r—его расстояние от точки (x, y, z); поэтому

$$U = \int \frac{k d\tau}{r}.$$

Во всех точках (x, y, z), которые лежат вне заполненного массами объема, на конечном расстоянии от его поверхности, этот потенциал имеет те же свойства, как и выше. Именно, он удовлетворяет уравнению (1), всюду непрерывен и, если точка (x, y, z) удаляется на бесконечность, выражение (3) сохраняет свое значение, если заменить $\sum m$ интегралом $\int k d\tau$. *Внутри* заполненного массами объема U есть также непрерывная функция x, y, z, но она уже не удовлетворяет уравнению (1), как мы это сейчас увидим. Именно, введем полярные координаты вместо прямоугольных a, b, c, по которым производится интегрирование, причем положим

$$a = x + r \sin\vartheta \cos w,$$

$$b = y + r \sin\vartheta \sin w,$$

$$c = z + r \cos\vartheta;$$

тогда

$$d\tau = r^2\, dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, dw$$

и

$$U = \iiint kr\, dr \sin\vartheta\, d\vartheta\, dw.$$

Нижний предел r есть нуль, если точка (x, y, z) лежит внутри пространства, которому принадлежит $d\tau$, и отличен от нуля в противном случае; он будет конечен или бесконечно мал в зависимости от того, лежит ли рассматриваемая точка на конечном или бесконечно малом расстоянии от поверхности этого объема. Но так как величина, умножаемая на дифференциал $dr\, d\vartheta\, dw$, для бесконечно малых значений r не становится бесконечно большой, то во всех этих случаях U имеет определенное конечное значение и изменяется непрерывно с перемещением точки (x, y, z).

Найдем теперь одну из первых производных U и выберем для этого $\frac{\partial U}{\partial z}$. Мы имеем

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \int k \frac{dr}{dz} d\tau, \tag{4}$$

или, так как r, а также и $\frac{1}{r}$ есть функция $z - c$, то

$$\frac{\partial U}{\partial z} = -\int k \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c} d\tau;$$

следовательно,

$$-\int \frac{\partial \frac{k}{r}}{\partial c} d\tau + \int \frac{\partial k}{\partial c} \frac{d\tau}{r},$$

или, наконец,

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \int ds \frac{k}{r} \cos(nz) + \int \frac{\partial k}{\partial c} \frac{d\tau}{r}, \tag{5}$$

если обозначить через ds элемент поверхности наполненного массами объема, а через n — направленную внутрь объема нормаль к ds. Второй интеграл, входящий в уравнение (5), есть потенциал того же рода, как U, только плотность массы в точке (a, b, c) есть не k, а $\frac{\partial k}{\partial c}$. Первый интеграл мы можем обозначить как потенциал массы, распределенной по поверхности, которой принадлежит ds, с плотностью $k \cos(nz)$. Мы употребляем здесь слово плотность в другом смысле, чем до сих пор.

Пусть будет V потенциал относительно точки (x, y, z) некоторой массы плотности h, распределенной по поверхности, элемент которой есть ds; отсюда

$$V = \int \frac{h\, ds}{r}. \tag{6}$$

Плотность h должна быть конечной и должна изменяться непрерывно по поверхности с конечными размерами, нигде не имеющей бесконечно большой кривизны. Мы докажем, что для точки, которая лежит бесконечно близко к поверхности, V конечно и не испытывает разрыва при переходе точки через поверхность. Систему координат, которую мы можем выбрать произвольно, расположим так, чтобы начало координат находилось на поверхности; точку, к которой относится V, возьмем на оси z, направив ось перпендикулярно к поверхности. Тогда нам необходимо будет найти V для бесконечно малых положительных и отрицательных значений z. Вообразим, что из поверхности вырезана некоторая часть круговым цилиндром, ось которого есть ось z, а радиус R бесконечно мал, но сравнительно с z бесконечно велик и от z не зависит. Часть V, которая относится к массе, находящейся на вырезанном куске поверхности, обозначим V_1; другую часть V обозначим через $V - V_1$; эта часть не обращается в бесконечность и не будет непрерывной при переходе z через нуль. Выясним, обладает ли V_1 таким же свойством. Выберем при этом новую единицу длины, и именно так, чтобы z было конечно. Тогда R будет бесконечно велико, и еще высшего порядка будет радиус кривизны поверхности. Вырезанный кусок поверхности станет при этом плоским кругом бесконечно большого радиуса R, а его плотность h должна быть рассматриваема как постоянная. Поэтому

$$V_1 = 2\pi h \int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}},$$

т. е.

$$V_1 = 2\pi h(\sqrt{R^2 + z^2} - \sqrt{z^2}), \tag{7}$$

где $\sqrt{z^2}$ обозначает абсолютное значение z. Возвратимся теперь к первоначальной единице длины, при которой R и z бесконечно малы и при которой V, вообще, конечно. Тогда, пренебрегая бесконечно малыми, получим $V_1 = 0$. Отсюда следует, что V остается конечным и непрерывным при переходе точки, к которой относится потенциал, через поверхность, на которой находятся массы.

На основании уравнения (7) сделаем еще и другое заключение. Из него следует, что

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = 2\pi h\left(\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}}\right),$$

или, так как R бесконечно велико по сравнению с z, то

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} = -2\pi h \frac{z}{\sqrt{z^2}},$$

т. е. $\frac{\partial V_1}{\partial z} = -2\pi h$, если z положительно, или равно $2\pi h$, если z отрицательно.

Производная $\frac{\partial (V - V_1)}{\partial z}$ изменяется непрерывно при переходе z через нуль; отсюда следует, что $\frac{\partial V}{\partial z}$ возрастает скачком на $-4\pi h$, когда z переходит через нуль от отрицательных значений к положительным. Добавим к этому, что так как V не получает при этом никакого скачка, $\frac{\partial V}{\partial x}$ и $\frac{\partial V}{\partial y}$ остаются непрерывными.

Чтобы освободиться от зависимости от определенной системы координат, которой мы пользовались при выводе этих предложений, обозначим, в согласии с ранее примененным способом, через n нормаль, которую мы выше обозначали через z, и оставим систему координат x, y, z неопределенной. Если точка (x, y, z) проходит в направлении нормали n сквозь элемент поверхности ds, то $\frac{\partial V}{\partial n}$ возрастает на $-4\pi h$ и, как это следует из формул, относящихся к преобразованию прямоугольных координат,

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

возрастут на

$$-4\pi h \cos(nx), \quad -4\pi h \cos(ny), \quad -4\pi h \cos(nz). \tag{8}$$

Назовем одну из двух сторон поверхности *внутренней*, другую — *внешней* и обозначим через n_i и n_a соответственно направленную нормаль к ds; тогда получим

$$\frac{\partial V}{\partial n_i} + \frac{\partial V}{\partial n_a} = -4\pi h. \tag{9}$$

Обратимся теперь к исследованию определяемого уравнением (4) потенциала U масс, заполняющих объем. Мы уже видели, что на поверхности этого объема само U остается непрерывным; мы видим теперь, что то же самое имеет место в отношении $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$. Это следует из уравнения (5) и тех двух уравнений, которые получим из него после замены z и c на x и a или y и b, потому что определяемое из уравнения (6) V не получит разрыва на поверхности, элемент которой ds. Мы могли бы доказать непрерывность первых производных U на поверхности заполненного массами объема, вводя полярные координаты, как при доказательстве непрерывности самого U. Иначе обстоит дело со вторыми производными U. Из (5) и (9) следует, что

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n_i \, \partial z} + \frac{\partial^2 U}{\partial n_a \, \partial z} = -4\pi k \cos(n_i z), \tag{10}$$

и с помощью выражений (8) найдем, что если точка (x, y, z) приходит извне в объем, наполненный массами, то

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \, \partial z}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z \, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x \, \partial y}$$

скачком увеличиваются соответственно на

$$-4\pi k \cos^2(nx), \quad -4\pi k \cos^2(ny), \quad -4\pi k \cos^2(nz),$$

$$-4\pi k \cos(ny)\cos(nz), \quad -4\pi k \cos(nz)\cos(nx), \quad -4\pi k \cos(nx)\cos(ny).$$

Следовательно, скачок, который при этом получает ΔU $\left(\text{т. е. } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$, будет равен $-4\pi k$.

Таким образом будем иметь во внешнем пространстве $\Delta U = 0$ и в объеме, наполненном массами, бесконечно близко к поверхности

$$\Delta U = -4\pi k. \tag{11}$$

Однако это уравнение имеет место не только бесконечно близко к поверхности, но также и во всем заполненном массами объеме. Чтобы доказать это, представим себе, что этот объем разделен на две части поверхностью, которая проведена бесконечно близко к точке (x, y, z), и назовем U_1 ту часть U, которая относится к массам той части, где находится точка (x, y, z). Тогда будем иметь

$$\Delta (U - U_1) = 0$$

и

$$\Delta U_1 = -4\pi k,$$

откуда следует уравнение (11).

§ 3

Мы будем теперь искать потенциал распределения масс, которое определим следующим образом. Обозначим через ds элемент поверхности, по которой распределены массы, n — ее нормаль. Представим себе, что точки поверхности перенесены по нормали n на бесконечно малые длины, которые могут непрерывно изменяться; таким образом образуется вторая поверхность, бесконечно близкая к первой, элементы которой соответствуют элементам первой. Вообразим массу, распределенную по каждому элементу второй поверхности, в точности равную по величине, но противоположную по знаку массе, находящейся на соответственном элементе первой поверхности. Обозначим через i взятое отрицательным произведение плотности массы, расположенной на элементе ds первой поверхности, на расстояние, считаемое положительным в направлении n до соответственного элемента второй поверхности, и будем считать это произведение конечным. Тогда потенциал W в точке (x, y, z) такого распределения масс представится формулой

$$W = \int i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds, \tag{12}$$

где a, b, c по-прежнему обозначают координаты ds и дифференцирование по n относится к смещению точки (a, b, c). Такое распределение масс мы будем называть *двойным слоем* и в противоположность этому то распределение, потенциал которого определен уравнением (6), *простым слоем*. Величину i можно было бы назвать плотностью двойного слоя.

Выражение (12), данное для W, может быть преобразовано. Имеем

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = -\frac{1}{r^2} \cos(rn),$$

где через (r, n) обозначен угол, который образует прямая, проведенная от точки (x, y, z) к элементу ds, с направлением нормали n в этом месте. Обозначим через dK *кажущуюся величину* площади элемента ds, видимого из точки (x, y, z), т. е. кусок шаровой поверхности, описанной радиусом, равным единице, из точки (x, y, z), как центра, который вырезается конусом с вершиной в (x, y, z) и с направляющими по периметру ds; тогда получим

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \pm dK,$$

где надо взять верхний или нижний знак в зависимости от того, положителен или отрицателен $\cos(rx)$. Если этот косинус не меняет знака на всей поверхности, которой принадлежит ds [это условие соблюдается всегда, когда из точки (x, y, z) нельзя провести касательных к поверхности], то

$$W = \pm \int i dK, \tag{13}$$

где по-прежнему надо взять верхний или нижний знак в зависимости от того, положителен или отрицателен $\cos(rn)$. Если это условие не соблюдено, то поверхность можно разделить на части, из которых каждая ему удовлетворяет, и представить W как сумму выражений вида (13).

Посмотрим теперь, будет ли непрерывно W в том случае, когда точка (x, y, z) неограниченно приближается к поверхности, которой принадлежит ds, или проходит сквозь эту поверхность. Если здесь может иметь место разрывность, то она может происходить только от частей поверхности, бесконечно близко прилегающих к точке (x, y, z). Возьмем опять начало координат на поверхности, как это мы делали при выводе уравнения (7), дадим оси z направление нормали n и будем искать значение W для случая, когда $x = 0$, $y = 0$ и z бесконечно мало.

Представим себе, что из поверхности вырезан кусок круговым цилиндром, ось которого есть ось z и радиус которого равен R, и положим, что R бесконечно мало сравнительно с размерами поверхности, но бесконечно велико сравнительно с z и от z не зависит. Обозначим через W_1 ту часть W, которая происходит от этого куска поверхности. Так как поверхность шара с единичным радиусом равна 4π, то при пренебрежении бесконечно малыми получим из уравнения (13):

для z отрицательного $W_1 = -2\pi i$,

для z положительного $W_1 = +2\pi i$.

Так как в обоих этих случаях W_1 не зависит от z, то W не может быть бесконечно большим при z бесконечно малом, и так как W_1 увеличивается скачком на $4\pi i$, когда z, возрастая, проходит через нуль, то это имеет место и для W.

Чтобы найти $\frac{\partial W_1}{\partial z}$, составим для W_1 выражение, в котором мы не будем пренебрегать величинами, обращающимися в нуль вместе с z. Мы придем к этому выражению при помощи уравнения (12); оно дает

$$W_1 = -i \int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} ds = 2\pi i \int_0^R \frac{z\rho d\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}} = 2\pi i \left(\frac{z}{\sqrt{z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} \right).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = -2\pi i \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}},$$

или, так как z бесконечно мало сравнительно с R,

$$\frac{\partial W_1}{\partial z} = -\frac{2\pi i}{R}.$$

Из того, что $\frac{\partial W_1}{\partial z}$ не зависит от z и имеет одно и то же значение для положительных и отрицательных значений z, следует, что $\frac{\partial W_1}{\partial z}$ для $z=0$ конечно и непрерывно. Следовательно, определяемый из уравнения (12) потенциал двойного слоя W конечен также на его поверхности, но получает увеличение скачком на $4\pi i$, когда точка (x, y, z) в направлении нормали n проходит сквозь его поверхность; напротив, производная $\frac{\partial W}{\partial n}$ остается на ней конечной и непрерывной.

Если система координат выбрана произвольно, то производные $\frac{\partial W}{\partial x}$, $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ при переходе через рассматриваемую поверхность претерпевают разрывы, так как скачок, получаемый W, вообще говоря (т. е. если i изменяется на поверхности), зависит от места, в котором точка пересекает поверхность. Но если i постоянно[9], то эти производные не претерпевают разрыва на поверхности; мы напомним об этом при определении многозначного потенциала скоростей в *многосвязном* пространстве.

§ 4

Выведем теперь одно предложение (теорему Грина), из которого можно получить важнейшие свойства функций, которые могут быть потенциалами скоростей.

Пусть $d\tau$ — элемент вполне ограниченного объема, x, y, z — его координаты, U и V — две функции x, y, z. Сложим тождества

$$\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+U\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(U\frac{\partial V}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+U\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(U\frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}+U\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left(U\frac{\partial V}{\partial z}\right),$$

умножим на $d\tau$ и проинтегрируем по объему. Мы будем предполагать, что U и $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ однозначны и непрерывны в объеме, которому принадлежит $d\tau$, и обозначим через ds элемент поверхности этого объема, через n — направленную внутрь объема нормаль к ds. Тогда из уравнений (6) одиннадцатой лекции, которыми мы так часто пользовались, получим

$$\int d\tau\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}+U\Delta V\right)=$$

$$=-\int dsU\left[\frac{\partial V}{\partial x}\cos(nx)+\frac{\partial V}{\partial y}\cos(ny)+\frac{\partial V}{\partial z}\cos(nz)\right]$$

или

$$\int d\tau\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z}\right)=-\int d\tau U\Delta V-\int dsU\frac{\partial V}{\partial n}. \qquad (14)$$

Это уравнение называется *теоремой Грина*. Если V и $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ также однозначны и непрерывны в рассматриваемом объеме, то при выводе формулы (14) можно будет переставить U и V; тогда получим

$$\int ds\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)=\int d\tau(V\Delta U-U\Delta V).$$

Если, кроме того, U и V будут решениями уравнения (1), то тогда получим

$$\int ds\left(U\frac{\partial V}{\partial n}-V\frac{\partial U}{\partial n}\right)=0. \tag{15}$$

Мы будем постоянно в этой лекции обозначать через V такую функцию, которая в рассматриваемом пространстве удовлетворяет уравнению $\Delta V=0$ и вместе со своими первыми производными однозначна и непрерывна. Положим далее в уравнении (15) U равным постоянному, что допустимо; тогда оно превратится в

$$\int ds\frac{\partial V}{\partial n}=0. \tag{16}$$

Если будем рассматривать V как потенциал скоростей, не зависящий от времени, то это уравнение можно легко истолковать некоторым определенным образом. Оно выражает, что объем жидкости, входящий в единицу времени в рассматриваемую область, равен нулю, если будем рассматривать объем выходящей жидкости как отрицательный объем входящей.

Положим далее в уравнении (15)

$$U=\frac{1}{r},\ r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}.$$

Это допустимо, если точка (a, b, c) лежит вне объема, элемент которого назван $d\tau$. Если теперь точка (a, b, c) лежит *внутри* первоначально рассматриваемого объема, то уравнение (15) применимо к части его, которая останется, если из него выключить бесконечно малый шар, описанный вокруг точки (a, b, c) как центра. Поверхность этого шара должна быть принята во внимание при составлении названного уравнения. Пусть dS — элемент последней, в то время как ds обозначает элемент поверхности первоначально рассматриваемого объема; тогда получим

$$\int\frac{dS}{r^2}V+\int\frac{dS}{r}\frac{\partial V}{\partial r}=\int dsV\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}-\int\frac{ds}{r}\frac{\partial V}{\partial n},$$

где в левой части формулы r равно бесконечно малому радиусу шара. Второй интеграл этой части обращается в нуль, потому что, вводя полярные координаты, имеем

$$dS=r^2\sin\vartheta d\vartheta d\omega.$$

Первый будет равен $4\pi V$, где V относится к точке (a, b, c). Отсюда для V получим

$$V=\frac{1}{4\pi}\int dsV\frac{\partial\frac{1}{r}}{dn}-\frac{1}{4\pi}\int\frac{ds}{r}\frac{\partial V}{\partial n}. \tag{17}$$

Это уравнение представляет значение V для произвольной точки рассматриваемого объема как сумму потенциалов простого слоя масс и двойного слоя, причем эти слои лежат на поверхности объема и их плотность для элемента ds равна соответственно $-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial V}{\partial n}$ и $\frac{1}{4\pi}V$. Это уравнение показывает, что высшие производные V по координатам также непрерывны во всем пространстве.

Положим теперь в уравнении (14)

$$U = V;$$

тогда будем иметь

$$\int d\tau \left[\left(\frac{\partial V}{dx}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] = -\int ds V \frac{dV}{dn}. \tag{18}$$

Будем рассматривать V как потенциал скоростей, и примем плотность жидкости равной единице; тогда левая часть этого уравнения есть удвоенная живая сила ее; мы имеем, таким образом, выражение этой живой силы через интеграл, взятый по поверхности.

§ 5

Теперь из установленных в предыдущем параграфе уравнений выведем следствия. Преимущественно мы постараемся найти условия для полного определения функции V, но при этом обратим внимание также на свойства этой функции, интересные и в других отношениях.

Уравнение (17) дает возможность вычислить V для каждой точки рассматриваемого объема, если для всех точек поверхности даны значения V и $\frac{\partial V}{\partial n}$. Но все значения не могут быть заданы произвольно; напротив, V вполне определено для всего объема, если для всей поверхности дано V или для одной части поверхности дано V, а для другой $\frac{\partial V}{\partial n}$, и V будет определено до произвольной постоянной, если $\frac{\partial V}{\partial n}$ известно для всей поверхности. Это предложение вытекает из уравнения (18).

Действительно, пусть для одной части поверхности $V = 0$, для другой $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$; тогда правая часть этого уравнения обращается в нуль; следовательно, обращается в нуль также и левая, и, так как это есть сумма членов, которые не могут быть отрицательными, то, следовательно, каждый член равен нулю, т. е. V постоянно во всем объеме. Далее, так как $V=0$ для части поверхности, то оно будет иметь это значение всюду. Пусть теперь значение V для одной части поверхности и $\frac{\partial V}{\partial n}$ для другой имеют данные значения, не равные нулю; пусть V_1 и V_2 — две функции, которые соответствуют этим значениям; тогда $V_1 - V_2$ удовлетворяет сделанным ранее для V предположениям, откуда следует, что для всего объема[10] $V_1 = V_2$.

Подобное же исследование покажет, что если для всей поверхности $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, то V равно некоторой неопределенной постоянной, и если для всей поверхности $\frac{\partial V}{\partial n}$ дано, то V определено для всего объема до произвольной постоянной.

Заметим, однако, что из всех функций $V + U$, которые на поверхности рассматриваемого объема получают данные значения и в нем однозначны и непрерывны, функция V, которая имеет эти значения на поверхности, дает интегралу

$$\Omega = \int d\tau \left[\left\{\frac{\partial (U+V)}{\partial x}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial (U+V)}{\partial y}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial (U+V)}{\partial z}\right\}^2\right]$$

наименьшее значение из всех возможных. В самом деле, мы имеем

$$\Omega = \int d\tau \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] +$$

$$+ 2\int d\tau \left[\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial z}\right] + \int d\tau \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 \right]. \quad (19)$$

Правильность высказанного утверждения следует из того, что третий из этих интегралов постоянно положителен, а второй обращается в нуль вследствие уравнения (14), так как $\Delta V = 0$ и на поверхности $U = 0$. Обозначим второй из трех членов правой части уравнения (19), который, вообще, при бесконечно малом U того же порядка малости, что и U, через $\delta\Omega$; тогда $\delta\Omega = 0$, если V обладает предполагаемым здесь свойством. Это замечание оказывается полезным, когда требуется в уравнение $\Delta V = 0$ вместо прямоугольной системы координат ввести другую. Мы применим его для такого случая.

§ 6

Представим себе шар, описанный вокруг точки (a, b, c) произвольным радиусом R, который целиком лежит внутри рассматриваемого объема, и применим к нему уравнение (17). Второй интеграл этого уравнения обратится в нуль вследствие (16), и $\dfrac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} = \dfrac{1}{R^2}$; тогда мы получаем

$$V = \frac{1}{4\pi R^2}\int V ds. \quad (20)$$

Это уравнение имеет следующий смысл: значение V в центре шара равно среднему арифметическому значений V в точках поверхности шара, т. е. значение V в центре шара лежит между наибольшим и наименьшим значением V на его поверхности. Так как это имеет место, каким бы малым ни был взят шар, то V во всем рассматриваемом пространстве, имеющем любую форму, не может достигать ни максимума, ни минимума; все значения, которые V получает, лежат между наибольшим и наименьшим значениями его на поверхности. Если значения на поверхности равны нулю, то везде $V = 0$, и если V задано для поверхности, то оно будет известно и для всего пространства. Таким образом мы доказали вторым способом предложение, уже доказанное в предыдущем параграфе; этот способ имеет некоторое преимущество по сравнению с ранее примененным, которое сделается очевидным в ближайших параграфах.

Из предложения, что V внутри рассматриваемого пространства не может иметь ни максимума, ни минимума, можно вывести, что

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2$$

также не достигает здесь максимума, хотя может иметь минимум. Таким образом, если мы будем представлять себе V как потенциал скоростей, то наибольшая скорость должна быть на границе объема.

Чтобы доказать это, представим опять шар внутри рассматриваемого объема. Обозначим через 0 его центр, через $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0$ — значения $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ в центре, причем последние обозначения относятся к поверхности шара.

Мы докажем это предложение, если выясним, что не для всех этих точек может быть

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2<\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0^2. \tag{21}$$

Если $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0$ одновременно обращаются в нуль, то правильность этого утверждения очевидна непосредственно; поэтому этот особенный случай мы можем исключить. Подходящим выбором направления оси x всегда можно достигнуть того, чтобы

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0=0 \text{ и } \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0=0^{11}.$$

Производная $\frac{\partial V}{\partial x}$ имеет те же свойства, которые предположены у V. Отсюда следует, что если $\frac{\partial V}{\partial x}$ не для всех точек шаровой поверхности постоянно, то на ней имеется точка, для которой

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2>\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0^2.$$

Но при сделанном выборе системы координат

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\geqq\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_0^2,$$
$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\geqq\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)_0^2. \tag{22}$$

Достаточно сложить эти три соотношения, чтобы убедиться в правильности доказываемого положения для случая, когда $\frac{\partial V}{\partial x}$ не постоянно на всей шаровой поверхности. Но если последнее постоянно, то для всех точек шаровой поверхности

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_0^2.$$

Если при этом $\frac{\partial V}{\partial y}$ и $\frac{\partial V}{\partial z}$ не для всех этих точек обращаются в нуль, то получатся точки, для которых по меньшей мере в одном из соотношений (22) будет иметь место верхний знак, и для них будет существовать неравенство, которое противоречит (21). Если, наконец, для всех точек шаровой поверхности $\frac{\partial V}{\partial x}$ постоянно и $\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial z}=0$, то обе величины, которые сравниваются между собой в (21), будут всегда равны между собой. В этом случае три производные от V будут иметь для всех точек внутри шара одно и то же значение. Тогда скорость всюду имеет одну и ту же величину и одно и то же направление.

Мы свяжем с уравнением (20) еще другое предложение. Допустим, что в некоторой части рассматриваемого объема $V=0$. Если $V=0$ не во всем объеме, то пусть будет дана часть его, пограничная с первой, в пределах которой V отлично от нуля и не меняет знака. Представим шаровую поверхность, центр которой лежит в той части объема, где $V=0$, а сама поверхность частью лежит в этом объеме, частью же в том, где V отлично от нуля и остается с одним и тем же знаком. Тогда из уравнения (20) следует, что V отлично от нуля в центре шара. Это противоречие показывает, что если V обращается в нуль в части рассматриваемого объема, то оно должно обращаться в нуль во всем объеме. Рассуждая так же, как указано в предыдущем параграфе, получим далее, что если V дано для некоторой части объема, то оно будет определено во всем объеме. Если V в одной части объема постоянно, то оно сохранит это значение и во всем объеме.

Если для части объема три производных $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ обращаются в нуль, так что V постоянно, то отсюда следует непосредственно, что они обращаются в нуль также и для всего объема. Докажем, что это должно иметь место и тогда, когда $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ равны нулю только для всех точек некоторой поверхности. Для этого будем перемещаться по линии, исходящей из некоторой произвольной точки и удовлетворяющей дифференциальным уравнениям

$$dx : dy : dz = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z},$$

которая, следовательно, перпендикулярна к поверхности $V = \text{const}$. Мы будем называть ее *линией тока*, потому что, если мы будем представлять V как не зависящий от времени потенциал скоростей, то вдоль нее будет происходить течение жидкости. Ее продолжение может сделаться неопределенным[12] только там, где все три производные V обращаются в нуль; через каждую же точку, в которой этот случай не имеет места, проходит только одна линия тока. Объем, образованный линиями тока, прилегающими непрерывно одна к другой, мы будем называть *нитью тока*. Если дана поверхность, для всех точек которой скорость равна нулю, в то время как вблизи поверхности имеет место движение, то нити тока оказываются на этой поверхности. Рассмотрим часть такой нити тока, которая ограничена с одной стороны подобной поверхностью, а с другой — поперечным сечением, для каждого элемента которого $\frac{\partial V}{\partial n}$ отлично от нуля и имеет одни и те же знаки. К этой части нити тока применим уравнение (16). Заметив, что для всякого элемента боковой поверхности, образованной линиями тока, $\frac{\partial V}{\partial n}$ обращается в нуль, мы получим, что интеграл

$$\int ds \frac{\partial V}{\partial n},$$

распространенный по поверхности рассматриваемого сечения, равен нулю Это противоречит условию, согласно которому это поперечное сечение могло быть выбрано. Отсюда следует, что не существует поверхности, на которой скорость равна нулю, если движение, вообще, имеет место, т. е. если V отличается от постоянной. Поэтому скорость может обращаться в нуль только вдоль линий или в точках. Но также и на них нити тока не могут оканчиваться, как показало бы исследование, вполне подобное приведенному. Все пространство, к которому относится V, состоит из нитей тока, которые оканчиваются на его поверхности. В самом деле, линия тока не может замыкаться, потому что мы предположили, что V есть однозначная непрерывная функция x, y, z и что на линии тока в направлении течения V постоянно возрастает[13].

Рассмотрим теперь отрезок нити тока, ограниченный с одной стороны поверхностью $V = \text{const}$, а с другой — поверхностью, ограничивающей рассматриваемый объем. Пусть dS и ds будут элементы обеих граничных площадей, N и n — их нормали, направленные внутрь. Тогда из уравнения

(16) следует, что

$$\int dS\frac{\partial V}{\partial N}+\int ds\frac{\partial V}{\partial n}=0 \tag{23}$$

и притом

$$\frac{\partial V}{\partial n}=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2},$$

где верхний или нижний знак должен быть взят в зависимости от того, возрастет ли V в направлении нормали или наоборот. Если для всех точек поверхности рассматриваемого объема будет $\frac{\partial V}{\partial n}=0$, то уравнение (23) показывает, что для всех точек внутри него будет $\frac{\partial V}{\partial N}=0$, т. е. V постоянно. Таким образом мы пришли другим путем к предложению, доказанному в предыдущем параграфе.

§ 7

Мы до сих пор предполагали, что объем, в котором мы рассматривали V, вполне ограничен. Теперь предположим, что этот объем простирается в бесконечность, так что он только частью ограничен замкнутой конечной поверхностью или незамкнутой поверхностью, простирающейся в бесконечность. Представим себе, что границы объема дополнены одной или несколькими поверхностями, лежащими к бесконечности. Тогда к этому объему можно применить все предыдущие предложения. При этом надо обратить внимание только на то, что поверхность его бесконечно велика и поэтому бесконечно малые величины, умноженные на элементы этой поверхности, при интегрировании могут дать конечную величину.

Мы доказали в § 5, что если на поверхности V обращается в нуль, то $V=0$ везде. Доказательство, с помощью которого мы пришли в § 5 к этому предложению, неприменимо здесь по приведенным соображениям, если только мы не введем в рассмотрение порядок величин V и $\frac{\partial V}{\partial n}$ в бесконечности. Напротив, заключения, из которых мы вывели это предложение в § 6, сохраняют силу также и здесь. Как на особый случай исключительной важности, мы укажем на следующее: если во всем неограниченном пространстве V конечно и непрерывно и известно, что V обращается в нуль в бесконечности, хотя и неизвестен его порядок в бесконечности, то отсюда необходимо, чтобы V всюду было равно нулю.

Далее, в § 5 и 6 мы доказали предложение, что если $\frac{\partial V}{\partial n}$ обращается в нуль на поверхности, то V должно быть постоянно. Это предложение без ограничения здесь неверно; необходимое ограничение легко вывести из исследования, которое мы произвели в конце предыдущего параграфа. Размеры вполне ограниченного пространства, о котором идет речь, могут быть конечны или бесконечны, но если

$$\int ds\frac{\partial V}{\partial n},$$

распространенный на любую часть его поверхности, обращается в нуль, то всюду V равно постоянному. Если $\frac{\partial V}{\partial n}$ дано до величин определенного здесь порядка, то V будет определено до добавочной постоянной [14].

Для некоторых задач гидродинамики, которыми мы будем заниматься, мы установим еще следующее положение. Пусть рассматриваемое пространство будет частью ограничено конечными замкнутыми поверхностями и по всем направлениям будет простираться в бесконечность. Пусть $\frac{\partial V}{\partial n}$ дано для каждой из этих поверхностей, и предположим, что в бесконечности $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ обращаются в нуль, но порядок величины производных в бесконечности не указан. Если будем представлять себе V как потенциал скоростей, то последнее обстоятельство мы можем выразить следующим образом: жидкость покоится в бесконечности. Мы докажем, что V определено при этом до добавочного постоянного.

Представим себе вокруг точки (a, b, c) в жидкости шаровую поверхность, описанную постоянным бесконечно большим радиусом; обозначим через dS элемент этой шаровой поверхности и через ds — элемент первоначально заданой граничной поверхности. В силу уравнения (17) значение V в точке (a, b, c) будет

$$V = \frac{1}{4\pi}\int dsV\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\frac{\partial V}{\partial n} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi R^2}\int VdS - \frac{1}{4\pi R}\int dS\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Из этих четырех членов последний обращается в нуль, так как R бесконечно велико. В самом деле, положим

$$\frac{1}{4\pi}\int ds\frac{\partial V}{\partial n} = -M, \tag{24}$$

де M — данное конечное число; тогда из (17) будем иметь

$$\frac{1}{4\pi}\int dS\frac{\partial V}{\partial n} = +M.$$

Третий из этих четырех членов есть среднее арифметическое значение V для элементов бесконечно большой шаровой поверхности; следовательно, он равен постоянному. Действительно, если точка (a, b, c) сместится на конечную длину вместе с описанной вокруг нее шаровой поверхностью, то значения V, относящиеся к единственному элементу dS, получат бесконечно малые изменения, так как $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$ бесконечно малы в бесконечности. Таким образом, среднее арифметическое этих изменений будет также бесконечно мало, и таковым же будет изменение, получаемое названным членом. Если C означает это постоянное, то отсюда имеем

$$V - C = \frac{1}{4\pi}\int dsV\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Это уравнение позволяет судить о порядке величин, производных V в бесконечности. На шаровой поверхности, описанной бесконечно большим радиусом R вокруг начала координат, с точностью до величин, стремящихся к нулю по сравнению с данными, если M конечно, мы получаем

$$V - C = \frac{M}{R}, \quad \frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{M}{R^2}.$$

Таким образом, если для элемента первоначально данной граничной поверхности производные $\frac{\partial V}{\partial n}$ и, следовательно, по (24), M даны, и dS означает элемент произвольной части бесконечно большой шаровой поверхности, то интеграл

$$\int dS \frac{\partial V}{\partial n}$$

до величин, обращающихся в нуль, определен, и на основании изложенного выше результата V будет определено до добавочной постоянной.

Рассмотрим еще более частный случай. Рассмотрим движение жидкости, в которой движется известным образом твердое тело. Тогда поверхности тела суть те поверхности, элементы которых мы обозначали через ds. Здесь $M = 0$, потому что для каждого из тел

$$\int ds \frac{\partial V}{\partial n}$$

равно нулю. В самом деле, умножая этот интеграл на элемент времени dt, мы видим, что он равен изменению в этот элемент времени вытесненного телом объема жидкости, т. е. его собственного объема. На основании предыдущего рассуждения движение жидкости будет определено вполне, если еще будет установлено, что в бесконечности жидкость находится в покое. Оно будет также определено, если вместо этого условия ввести условие, что жидкость заключена в твердую неподвижную шаровую поверхность бесконечно большого радиуса, описанную вокруг начала координат. В самом деле, для всякого элемента этой поверхности $\frac{\partial V}{\partial n}$ в точности равно нулю. В обоих этих случаях движение жидкости одно и то же, потому что в каждом из них

$$\int dS \frac{\partial V}{\partial n},$$

распространенный на любую часть названной шаровой поверхности, обращается в нуль.

§ 8

После этих разъяснений об однозначных решениях дифференциального уравнения $\Delta\varphi = 0$, мы займемся многозначным решением, которое может быть, как мы видели в конце предыдущей лекции, потенциалом скоростей в многосвязном пространстве. При этом мы ограничимся рассмотрением двусвязного пространства. Те заключения, которые мы сделаем по отношению к этому случаю, легко можно распространить на случай связности более высокого порядка.

Вообразим, что данное двусвязное пространство превращено поперечным сечением в односвязное. Тогда в нем, если для одной точки выберем одно из значений φ, то φ будет функцией однозначной. На обеих сторонах сечения φ может иметь различные значения, однако только такие, что φ получает один и тот же скачок, в каком бы месте поперечного сечения мы через него ни переходили. При этом производные φ по x, y, z не имеют скачка.

Предположим теперь, что выбранное сечение продолжено произвольно наружу так, что получится некоторая вполне ограниченная поверхность, часть которой, лежащую внутри даннного пространства, представляет рассматриваемое сечение. Обозначим через ds элемент этой поверхности, через n — нормаль к ds, направленную в одну сторону от поверхности, и положим, как в уравнении (12),

$$W = i\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, ds, \tag{25}$$

причем будем понимать под i постоянное. Это W, на основании предыдущего исследования (§ 3), в данном двусвязном пространстве есть однозначная функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta W = 0$ и обладающая тем свойством, что ее производные непрерывны. Она сама также непрерывна вне рассматриваемого сечения. Если точка $(x,\ y,\ z)$ переходит через него в направлении нормали n, то W получает скачком изменение на $4\pi i$. Положим теперь, что постоянное i выбрано так, что этот скачок имеет ту же величину, что и скачок φ на этом сечении; тогда $\varphi - W$ будет на нем непрерывно, и если мы положим

$$\varphi = V + W, \tag{26}$$

то V будет обладать всеми свойствами, которыми обладает функция, прежде обозначенная этой буквой.

Уравнение (26) определяет для каждой точки рассматриваемого пространства только одно значение φ. Мы можем видоизменить W так, чтобы уравнение (26) представляло все значения φ. Для этого мы должны определить W вместо (25) уравнениями

$$\frac{\partial W}{\partial x} = i\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, ds,\quad \frac{\partial W}{\partial y} = i\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, ds,\quad \frac{\partial W}{\partial z} = i\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, ds,$$

с дополнением, что W всюду непрерывно, причем оно будет многозначным. Можно упомянуть, что W есть потенциал электрического тока, текущего по границе поверхности, элемент которой обозначен через ds, с напряжением i относительно магнитного полюса с единицей магнетизма, координаты которого — x, y, z.

§ 9

Рассмотрим теперь еще один случай, который будет часто встречаться, именно случай, когда функция V не зависит от одной из координат (например, от z).

Применим уравнение (17) к объему, который вполне ограничен цилиндрической поверхностью, ось которой параллельна оси z, или несколькими такими цилиндрическими поверхностями, и двумя плоскостями, параллельными плоскости xOy, уравнения которых можно представить в виде $z = -\gamma$ и $z = \gamma$. При этом мы будем рассматривать γ как величину, бесконечно большую сравнительно со всеми значениями, которые принимают x и y в этом объеме, и даже сравнительно с такими, которые мы будем считать бесконечно большими. Координаты точки, к которой относится V в левой части уравнения (17), обозначим по-прежнему через a, b, c и положим $c = 0$. Тогда для элементов ds, для которых $z = \pm\gamma$, r будет бесконечно велико по сравнению с другими рассматриваемыми данными, и оба интеграла уравнения должны быть поэтому распространены только на пограничную цилиндрическую поверхность. Положим для нее $ds = dl\,dz$, причем мы понимаем под dl элемент границы части плоскости xOy, которая лежит внутри рассматриваемого объема; тогда будем иметь

$$V = \frac{1}{4\pi}\iint_{-\gamma}^{+\gamma} dl\, dz\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\, V - \frac{1}{4\pi}\iint_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{dl\, dz}{r}\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Положим теперь $\rho^2 = (a-x)^2 + (b-y)^2$, следовательно $r^2 = \rho^2 + z^2$, и воспользуемся тем, что V и $\frac{\partial V}{\partial n}$ не зависят от z и что нормали n перпендикулярны к оси z; далее, так как γ бесконечно велико относительно ρ, то

$$\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{dz}{\sqrt{\rho^2+z^2}} = \lg \frac{\gamma + \sqrt{\rho^2+\gamma^2}}{-\gamma+\sqrt{\rho^2+\gamma^2}} = 2\lg\frac{2\gamma}{\rho}; \tag{27}$$

и, наконец, как это следует из уравнения (16),

$$\int dl \frac{\partial V}{\partial n} = 0.$$

Отсюда получим

$$V = -\frac{1}{2\pi}\int dlV \frac{\partial \lg \rho}{\partial n} + \frac{1}{2\pi}\int dl \frac{\partial V}{\partial n}\lg\rho. \tag{28}$$

Применим это уравнение к кругу, описанному радиусом R вокруг точки a, b) и образующему часть площади, к которой относится V; мы будем иметь

$$V = \frac{1}{2\pi R}\int dlV,$$

так как значение V в центре круга равно среднему арифметическому значений на периферии. Отсюда можно заключить, что на рассматриваемой площади V не обладает ни максимумом, ни минимумом и что если оно постоянно на периферии, то и всюду имеет постоянное значение. Также

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)^2$$

не может иметь внутри поверхности максимума, хотя и может иметь минимум. Если поверхность, к которой относится V, представляет безграничную плоскость xOy; причем V в бесконечности обращается в нуль, то оно равно нулю всюду; если в бесконечности V не равно нулю, но $\frac{\partial V}{\partial a} = 0$ и $\frac{\partial V}{\partial b} = 0$, то эти уравнения имеют место всюду, т. е. V постоянно, так как производные V обладают таким же свойством, как и V.

Мы добавим здесь еще следующее предложение. Пусть будет df — элемент некоторой конечной части плоскости xOy; k — функция его координат, ρ — расстояние этого элемента от точки (x, y) той же плоскости и

$$U = -2\int kdf \lg\rho; \tag{29}$$

тогда U есть функция x и y, которая вместе со своими производными первого порядка однозначна и непрерывна на всей плоскости xOy; внутри поверхности, элемент которой обозначен через df, она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -4\pi k,$$

где k относится к точке (x, y), а вне ее удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

Чтобы доказать это предложение, рассмотрим потенциал Ω цилиндра, параллельного оси z, поперечное сечение которого есть площадь, элемент которой мы обозначим через df. Пусть уравнения его оснований будут $z = \pm\gamma$, где γ — постоянное, бесконечно большое относительно координат всех точек, для которых должно быть вычислено Ω. Предположим, что этот цилиндр заполнен массой, так что k есть плотность той нити, которая соответствует элементу df. Обозначим еще через c ординату z точки цилиндра; тогда для точки (x, y, z) будем иметь

$$\Omega = \iint\limits_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{kdf\,dc}{\sqrt{\rho^2 + (c - z)^2}}$$

или, на основании (27),

$$\Omega = -2\int k\,df\,(\lg\rho - \lg 2\gamma),$$

и, согласно (29), получим

$$\Omega = U + 2\lg 2\gamma\int k\,df. \tag{30}$$

Если заметим теперь, что второй из двух членов правой части уравнения (30) постоянен, далее, что во всяком рассматриваемом объеме Ω вместе со своими первыми и вторыми производными однозначно и непрерывно ($\Delta\Omega$ внутри цилиндров равно $-4\pi k$, а вне его равно нулю), то отсюда получим предыдущий результат.

Укажем еще, что если точка (x, y) удаляется в бесконечность и R означает ее расстояние от начала координат, то по данному в (29) определению

$$U = -2\lg R\int k\,df, \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -2\frac{x}{R^2}\int k\,df, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{2y}{R^2}\int k\,df,$$

т. е. U будет бесконечно велико, но его первые производные обратятся в нуль.

ЛЕКЦИЯ СЕМНАДЦАТАЯ

(Преобразование уравнения $\Delta\varphi = 0$ к произвольным ортогональным координатам. Эллиптические координаты. Течения по линиям, пересекающим нормально систему софокусных эллипсоидов. Представление потенциала скоростей этих течений как потенциала слоя. Объем жидкости, протекающей через сечение в единицу времени. Сопротивление. Линии тока, пересекающие нормально систему софокусных гиперболоидов)

§ 1

Каждое решение дифференциального уравнения в частных производных $\Delta\varphi = 0$, первые производные которого по x, y, z однозначны и непрерывны в некотором пространстве, представляет возможное движение несжимаемой жидкости в этом пространстве. В общем случае потенциал скоростей будет зависеть от времени, но мы займемся теперь только тем случаем, когда это не имеет места, т. е. когда в каждой точке потенциал скоростей не изменяется с течением времени. Такое движение называют *установившимся*. Так как $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ — составляющие скорости по осям координат, то скорость везде перпендикулярна к поверхности $\varphi = \text{const}$; движение происходит по линиям, перпендикулярно пересекающим эти поверхности; поэтому эти линии называются, как это было упомянуто выше, *линиями тока*. Если жидкость ограничена неподвижными стенками, то для всех элементов стенок должно быть $\frac{\partial f}{\partial n} = 0$, или, что то же самое, эти стенки должны быть образованы линиями тока. Одним из способов нахождения решений этого дифференциального уравнения, представляющих некоторые движения жидкости, является введение вместо x, y, z новых координат. Мы будем пользоваться этим способом и для этого преобразуем уравнение $\Delta\varphi$ к новым координатам, которые назовем через u, v, w. При этом мы можем рассматривать функцию φ как однозначную и непрерывную, потому что если в данном пространстве φ этим свойством не обладает, то можно будет разделить это пространство на такие части, что для каждой части φ будет однозначной непрерывной функцией или системой однозначных непрерывных функций, которые, если φ есть потенциал скоростей, различаются между собой добавочными постоянными. Тогда для каждой такой части будет иметь место дифференциальное уравнение, которое мы выведем при сделанном предположении. Уравнение $\Delta\varphi = 0$ можно преобразовать, применяя теорему, доказанную в конце § 5 предыдущей лекции, именно теорему, что при $\Delta\varphi = 0$ будет

$$\delta\Omega = 0,$$

где Ω есть интеграл

$$\Omega = \int d\tau \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \right], \tag{1}$$

распространенный на любую область, на поверхности которой φ задано. Мы имеем

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv + \frac{\partial x}{\partial w} dw,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv + \frac{\partial y}{\partial w} dw, \tag{2}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv + \frac{\partial z}{\partial w} dw.$$

Допустим, что u, v, w обладают таким свойством, при котором имеют место уравнения

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial w} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial w} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial z}{\partial u} = 0,$$

и положим

$$\frac{1}{U^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$\frac{1}{V^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \tag{4}$$

$$\frac{1}{W^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2,$$

при том ограничении, что U, V, W положительны. Тогда из уравнения (2) получим

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \left(\frac{du}{U}\right)^2 + \left(\frac{dv}{V}\right)^2 + \left(\frac{dw}{W}\right)^2. \tag{5}$$

Из этого можно заключить, что если рассматривать dx, dy, dz как координаты точки, бесконечно близкой к точке (x, y, z) относительно системы координат, начало которой есть (x, y, z) и оси которой параллельны осям x, y, z, то $\frac{du}{U}$, $\frac{dv}{V}$, $\frac{dw}{W}$ будут координатами той же точки относительно второй системы прямоугольных координат с тем же началом, но оси которой имеют другое направление. Представим уравнения (2) в виде

$$dx = U\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{U} + V\frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{V} + W\frac{\partial x}{\partial w}\frac{dw}{W},$$

$$dy = U\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{U} + V\frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{V} + W\frac{\partial y}{\partial w}\frac{dw}{W},$$

$$dz = U\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{U} + V\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{V} + W\frac{\partial z}{\partial w}\frac{dw}{W};$$

тогда множители при $\frac{du}{U}$, $\frac{dv}{V}$, $\frac{dw}{W}$ суть косинусы углов, образуемых между собой осями обеих систем. Уравнениям, выражающим du, dv, dw через

dx, dy, dz, можно придать такой вид:

$$\frac{du}{U}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{U}dx+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}}{U}dy+\frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{U}dz,$$

$$\frac{dv}{V}=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{V}dx+\frac{\frac{\partial v}{\partial y}}{V}dy+\frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{V}dz,$$

$$\frac{dw}{W}=\frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{W}dx+\frac{\frac{\partial w}{\partial y}}{W}dy+\frac{\frac{\partial w}{\partial z}}{W}dz.$$

Отсюда [15] следует:

$$\begin{aligned}U^2&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,\\ V^2&=\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2,\\ W^2&=\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\end{aligned}\tag{6}$$

и

$$\begin{aligned}0&=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z},\\ 0&=\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z},\\ 0&=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}.\end{aligned}\tag{7}$$

Три последних уравнения выражают тот факт, что поверхности

$$u=\text{const},\ v=\text{const},\ w=\text{const}$$

пересекаются взаимно ортогонально, в силу чего u, v, w называют *ортогональными* координатами. Этим условиям должны удовлетворять u, v, w, если соблюдены уравнения (3), и наоборот, если выполняются эти условия, то существуют уравнения (3). Из заключения, которое мы сделали по поводу уравнения (5), следует далее, что элемент объема $d\tau$ можно положить равным

$$\frac{du}{U}\cdot\frac{dv}{V}\cdot\frac{dw}{W},$$

если взять du, dv, dw положительными.

Далее имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z},$$

так что по (6) и (7),

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=U^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+V^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+W^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2.$$

Поэтому уравнение (1) примет вид

$$\Omega=\iiint du\,dv\,dw\left[\frac{U}{VW}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2+\frac{V}{WV}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2+\frac{W}{UV}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)^2\right].$$

Если $\Delta\varphi=0$ и φ задано на поверхности рассматриваемой области, то Ω получает значение минимум, т. е. для произвольного $\delta\varphi$, которое только должно обращаться в нуль на поверхности[16], должно быть

$$0=\iiint du\,dv\,dw\left(\frac{U}{VW}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial u}+\frac{V}{WU}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial v}+\frac{W}{UV}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial\delta\varphi}{\partial w}\right);$$

если слагаемые этого интеграла проинтегрируем по частям, т. е. произведем такие же действия, посредством которых были выведены уравнения (14) предыдущей лекции, и воспользуемся тем, что на поверхности $\delta\varphi=0$, то получим

$$0=\iiint du\,dv\,dw\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{VW}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{WU}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{W}{UV}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right]\delta\varphi,$$

или, наконец,

$$0=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{VW}\frac{d\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{V}{WU}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{W}{UV}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right). \tag{8}$$

Это заключение основано на предположении, что пределы интегрирования по u, v, w соответствуют границам рассматриваемого пространства — предположение, которое выполняется всегда, если мы разобьем пространство надлежащим образом на части и будем рассматривать эти части в отдельности.

Заметим еще, что уравнение (8), представляющее искомое преобразование уравнения $\Delta\varphi=0$, не изменится, если знак одной из величин U, V, W мы изменим на противоположный. Следовательно, сделанное нами предположение, что эти величины должны быть положительными, излишне для настоящего результата.

§ 2

Предположим теперь, что u, v, w — так называемые эллиптические координаты, и докажем, что они ортогональны.

Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{9}$$

представляет поверхность второго порядка, центр которой совпадает с началом координат и главные оси которой совпадают с осями координат. Пусть

$$a^2>b^2>c^2;$$

тогда расстояния фокусов главных сечений от центра будут

$$\sqrt{a^2-b^2},\quad \sqrt{a^2-c^2},\quad \sqrt{b^2-c^2}.$$

Две первые пары фокусов лежат на оси x, третья лежит на оси y. Таким образом фокусы не зависят от λ, и потому поверхности, представляемые уравнением (9) при различных λ, называются софокусными. Чтобы эти поверхности были действительными, λ должно лежать между $+\infty$ и $-a^2$. По значениям λ они распадаются на три группы. Если

$$+\infty > \lambda > -c^2,$$

то три члена левой части уравнения (9) положительны; поверхность есть эллипсоид, который каждой из трех осей координат пересекается в действительных точках. Если

$$-c^2 > \lambda > -b^2,$$

то только два первых из трех членов положительны, а третий отрицателен; поверхность пересекается в действительных точках только с осями x и y, но не с осью z. Эта поверхность есть однополостный гиперболоид. Если, наконец,

$$-b^2 > \lambda > -a^2,$$

то лишь первый из трех членов положителен; поэтому только одна ось x пересекает поверхность в действительных точках. Следовательно, это двуполостный гиперболоид. Таким образом при данных a, b, c через каждую точку x, y, z проходит одна поверхность каждого из трех родов. Действительно, уравнение (9) есть уравнение третьей степени относительно λ, и три корня его всегда лежат в трех указанных интервалах. Чтобы убедиться, что между ∞ и $-c^2$ должен лежать один корень, надо обратить внимание на то, что левая часть уравнения обращается в нуль для $\lambda = +\infty$ и равна $+\infty$ для $\lambda = -c^2 + \varepsilon$, где ε означает положительную бесконечно малую величину, т. е. левая часть уравнения для первого значения λ будет меньше, а для второго больше, чем правая. Между $-c^2$ и $-b^2$ должен лежать корень, потому что левая часть равна $-\infty$ для $\lambda = -c^2 - r$ и $+\infty$ для $\lambda = -b^2 + r$. Из аналогичного рассуждения следует, что и между $-b^2$ и $-a^2$ точно так же должен лежать корень. Три корня уравнения (9), соответствующие точке (x, y, z), называются ее *эллиптическими координатами*. Обозначим их через u, v, w и положим, что

$$u > v > w.$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1, \quad +\infty > u > -c^2,\\
&\frac{x^2}{a^2+v} + \frac{y^2}{b^2+v} + \frac{z^2}{c^2+v} = 1, \quad -c^2 > v > -b^2, \qquad (10)\\
&\frac{x^2}{a^2+w} + \frac{y^2}{b^2+w} + \frac{z^2}{c^2+w} = 1, \quad -b^2 > w > -a^2.
\end{aligned}$$

Поэтому каждой точке (x, y, z) соответствует только одна система значений u, v, w. Пусть, наоборот, даны u, v, w; тогда x^2, y^2, z^2 будут определены однозначно, потому что их придется вычислять из линейных уравнений, но знаки x, y, z останутся неопределенными; таким образом, каждой системе значений u, v, w будет соответствовать вообще восемь точек, каждая из которых лежит в одном из восьми координатных углов.

Проще всего найдем выражения x^2, y^2, z^2, если заметим, что так как u, v, w должны быть корнями уравнения (9), то для каждого значения λ должно быть

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} - 1 = \frac{(u-\lambda)(v-\lambda)(w-\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}, \qquad (11)$$

и приравняем здесь $a^2+\lambda$, или $b^2+\lambda$, или $c^2+\lambda$ бесконечно малой величине. Тогда получим

$$x^2 = \frac{(a^2+u)(a^2+v)(a^2+w)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$

$$y^2 = \frac{(b^2+u)(b^2+v)(b^2+w)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}, \tag{12}$$

$$z^2 = \frac{(c^2+u)(c^2+v)(c^2+w)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.$$

Выведем еще одно следствие из тождественного уравнения (11). Дифференцируя его по λ, получим

$$\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}=$$

$$=\frac{(u-\lambda)(v-\lambda)(w-\lambda)}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}\left(\frac{1}{u-\lambda}+\frac{1}{v-\lambda}+\frac{1}{w-\lambda}+\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right);$$

полагая $u-\lambda$, или $v-\lambda$, или $w-\lambda$ бесконечно малыми, будем иметь

$$\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}=\frac{(u-v)(u-w)}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+v)},$$

$$\frac{x^2}{(a^2+v)^2}+\frac{y^2}{(b^2+v)^2}+\frac{z^2}{(c^2+v)^2}=\frac{(v-w)(v-u)}{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}, \tag{13}$$

$$\frac{x^2}{(a^2+w)^2}+\frac{y^2}{(b^2+w)^2}+\frac{z^2}{(c^2+w)^2}=\frac{(w-u)(w-v)}{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}.$$

К этим уравнениям добавим те, которые получим из уравнений (10), вычитая их одно из другого; это будут уравнения

$$\frac{x^2}{(a^2+u)(a^2+v)}+\frac{y^2}{(b^2+u)(b^2+v)}+\frac{z^2}{(c^2+u)(c^2+v)}=0,$$

$$\frac{x^2}{(a^2+v)(a^2+w)}+\frac{y^2}{(b^2+v)(b^2+w)}+\frac{z^2}{(c^2+v)(c^2+w)}=0, \tag{14}$$

$$\frac{x^2}{(a^2+w)(a^2+u)}+\frac{y^2}{(b^2+w)(b^2+u)}+\frac{z^2}{(c^2+w)(c^2+u)}=0.$$

Взяв частные производные уравнений (12) по u, v, w и деля каждый раз результат на то уравнение, из которого он выведен, мы найдем

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{x}{a^2+u},\quad \frac{\partial x}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{x}{a^2+v},\quad \frac{\partial x}{\partial w}=\frac{1}{2}\frac{x}{a^2+w},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{y}{b^2+u},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{y}{b^2+v},\quad \frac{\partial y}{\partial w}=\frac{1}{2}\frac{y}{b^2+w}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{z}{c^2+u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{z}{c^2+v},\quad \frac{\partial z}{\partial w}=\frac{1}{2}\frac{z}{c^2+w}.$$

Из уравнений (15) и (14) будем иметь уравнение (3), которое является критерием того, что u, v, w представляют ортогональные координаты. Из уравнений (15), (13) и (4) можно вычислить U^2, V^2, W^2; они дают

$$
\begin{aligned}
U^2 &= 4\frac{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}{(u-v)(u-w)},\\
V^2 &= 4\frac{(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}{(v-w)(v-u)},\\
W^2 &= 4\frac{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}{(w-u)(w-v)}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Присовокупим к этим еще одно уравнение, которое получается из (15) и которым мы воспользуемся впоследствии. Из тождественного уравнения

$$u = u,$$

в котором в правой части u должно быть выражено через x, y, z, а x, y, z — через u, v, w, следует

$$1 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u};$$

следовательно, на основании (15), будем иметь

$$2 = \frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{y}{b^2+u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{z}{c^2+u}\frac{\partial u}{\partial z}. \tag{17}$$

Производные u, v, w по x, y, z легко вычислить из производных x, y, z по u, v, w при помощи соотношений

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= U^2\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial v}{\partial x} &= V^2\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial w}{\partial x} &= W^2\frac{\partial x}{\partial w},\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= U^2\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial v}{\partial y} &= V^2\frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial w}{\partial y} &= W^2\frac{\partial y}{\partial w},\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= U^2\frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial v}{\partial z} &= V^2\frac{\partial z}{\partial v}, & \frac{\partial w}{\partial z} &= W^2\frac{\partial z}{\partial w},
\end{aligned} \tag{18}
$$

которые получаются из замечания, сделанного в предыдущем параграфе по поводу коэффициентов уравнений между dx, dy, dz и $\frac{du}{U}$, $\frac{dv}{V}$, $\frac{dw}{W}$.

Посмотрим теперь, каковы будут те поверхности, в которые перейдут поверхности $u = \text{const}$, $v = \text{const}$, $w = \text{const}$, когда u, v или w будут приближаться к границам интервала, в котором они должны заключаться. Мы найдем эти поверхности из уравнений (10).

Пусть $u = \infty$; тогда первое из этих уравнений определяет бесконечно большой шар, радиус которого равен $\sqrt{u}$.

Пусть будет $u = -c^2 + r$, где по-прежнему r — бесконечно малое положительное количество; тогда это уравнение дает

$$z = 0 \text{ и } \frac{x^2}{a^2-c^2} + \frac{y^2}{b^2-c^2} < 1,$$

и, следовательно, представляет площадь, лежащую внутри эллипса плоскости xOy, полуоси которого имеют длины $\sqrt{a^2-c^2}$, $\sqrt{b^2-c^2}$ и направления осей совпадают с осями x и y.

Пусть $v = -c^2 - \varepsilon$; тогда из второго из этих уравнений следует

$$z = 0 \text{ и } \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} > 1;$$

но это — уравнение части плоскости xOy, лежащей вне только что названного эллипса.

Если $v = -b^2 + r$, то имеем

$$y = 0 \text{ и } \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{x^2}{b^2 - c^2} < 1;$$

но этим определяется площадь, представляющая связную часть плоскости z, x, ограниченную гиперболой, уравнение которой получим из предыдущего неравенства, если заменим знак неравенства знаком равенства.

Пусть $w = -b^2 - r$; тогда

$$y = 0 \text{ и } \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} > 1,$$

чем будут представлены обе несвязные части плоскости zOx, ограниченные той же самой гиперболой.

Пусть, наконец, $w = -a^2 + \varepsilon$; тогда будем иметь

$$x = 0$$

без дальнейших ограничений, т. е. поверхность, о которой идет речь, есть вся плоскость yOz.

Таким образом, все эти поверхности, вместе взятые, представляют бесконечно большой шар и три плоскости координат. Одновременно усматриваем, что равенство двух из трех величин u, v, w имеет место только для эллипса

$$z = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1, \tag{19}$$

где

$$u = v = -c^2,$$

и для гиперболы

$$y = 0, \quad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1, \tag{20}$$

где

$$v = w = -b^2.$$

Плоскости этих кривых взаимно перпендикулярны, и каждая из кривых проходит через фокус другой.

Если бы понадобилось рассмотреть вместо точки пространства (x, y, z) точку (y, z) плоскости, то имели бы место заключения и формулы, аналогичные только что полученным.

§ 3

Чтобы составить уравнение (8) в эллиптических координатах, найдем с помощью (16) значения $\frac{U}{VW}$, $\frac{V}{WU}$, $\frac{W}{UV}$, т. е. получим

$$\left(\frac{U}{VW}\right)^2 = -\frac{1}{4} \frac{(a^2 + u)(b^2 + u)(c^2 + u)(v - w)^2}{(a^2 + v)(b^2 + v)(c^2 + v)(a^2 + w)(b^2 + w)(c^2 + w)}.$$

Следовательно, $\frac{U}{VW}$ есть функция u, умноженная на функцию v и w

Ясно, что соответственные предложения имеют место для $\frac{V}{WU}$ и $\frac{W}{UV}$. На этом обстоятельстве основывается возможность представить дифференциальное уравнение, о котором идет речь, еще проще, если ввести вместо u, v, w некоторые функции только одной из этих величин. Действительно, пусть u_1 — функция только u; тогда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\frac{du_1}{du},$$

так что

$$\frac{U}{VW}\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{U}{VW}\frac{du_1}{du}\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}.$$

Теперь на основании сделанного замечания можно так определить функцию u_1, чтобы в этом уравнении множитель при $\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}$ не зависел от u; при этом мы будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{VW}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) = \frac{U}{VW}\left(\frac{du_1}{du}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2}.$$

Обозначим через v_1 и w_1 соответственным образом составленные функции v и w и умножим уравнение (8) на UVW; тогда это уравнение примет вид

$$U^2\left(\frac{du_1}{du}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2} + V^2\left(\frac{dv_1}{dv}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial v_1^2} + W^2\left(\frac{dw_1}{dw}\right)^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_1^2} = 0. \tag{21}$$

Заметим, что непосредственно будем иметь

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 =$$

$$= U^2\left(\frac{du_1}{du}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)^2 + V^2\left(\frac{dv_1}{dv}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\right)^2 + W^2\left(\frac{dw_1}{dw}\right)^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w_1}\right)^2 \tag{22}$$

на основании выражения, которое мы получим для левой части этого уравнения при выводе уравнения (8).

Требуемые условия для u_1, v_1, w_1 будут соблюдены, если положим

$$\begin{aligned} du_1 &= \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}}, \\ dv_1 &= \frac{dv}{\sqrt{-(a^2+v)(b^2+v)(c^2+v)}}, \\ dw_1 &= \frac{dw}{\sqrt{(a^2+w)(b^2+w)(c^2+w)}}. \end{aligned} \tag{23}$$

Тогда уравнения (21) и (22) преобразуются в следующие:

$$\frac{1}{(u-v)(u-w)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2} - \frac{1}{(v-w)(v-u)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial v_1^2} + \frac{1}{(w-u)(w-v)}\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_1^2} = 0,$$

или

$$(v-w)\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_1^2} - (w-u)\frac{\partial^2\varphi}{\partial v_1^2} + (u-v)\frac{\partial^2\varphi}{\partial w_1^2} = 0 \tag{24}$$

и

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2=$$

$$=\frac{4}{(u-v)(u-w)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\right)^2-\frac{4}{(v-w)(v-u)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v_1}\right)^2+\frac{4}{(w-u)(w-v)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial w_1}\right)^2. \quad (25)$$

Для *одной* точки значения u_1, v_1, w_1 и знак перед корнем в (23) можно выбрать произвольно; но тогда для остальных точек эти знаки должны быть определены так, чтобы $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ были непрерывны в той области, в которой они должны быть непрерывны.

§ 4

С первого взгляда на дифференциальное уравнение (24) можно определить некоторые его частные решения: таковыми должны быть сами u_1, v_1, w_1. Исследуем ближе первое из них, т. е. положим

$$\varphi=u_1.$$

Тогда поверхности $\varphi=\text{const}$ будут софокусными эллипсоидами $u=\text{const}$. Будем рассматривать φ как потенциал скоростей; тогда линии тока, которые должны быть перпендикулярны к этим эллипсоидам, будут образованы линиями пересечения гиперболоидов $v=\text{const}$ и $w=\text{const}$. Эти линии образуют, чего мы не будем здесь доказывать, систему линий кривизны, которые имеют общими эти гиперболоиды[17]. В частном случае, когда $a=b$, это будут гиперболы, плоскость которых проходит через ось z, имеющие фокусы на окружности, в которую тогда переходит эллипс (19). Через каждую точку площади указанного эллипса всегда проходит одна из этих линий, пересекающая ее перпендикулярно. В бесконечности, где u бесконечно велико, на основании уравнений (12) отношения $x^2:y^2:z^2$, а следовательно, также и отношения $x:y:z$, не зависят от u, т. е. эти линии тока обращаются в прямые линии, проходящие через начало координат и направленные к нему или от него. Квадрат скорости вследствие уравнения (25) равен

$$\frac{4}{(u-v)(u-w)}, \quad (26)$$

или, по первому из уравнений (13), равен

$$\frac{4}{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]}. \quad (26a)$$

Отсюда следует, что скорость всюду на конечном расстоянии имеет определенное, конечное, непрерывно изменяющееся значение, за исключением только точек эллипса (19), для которого $u=v$, где она бесконечна. В бесконечности скорость равна

$$\frac{2}{r^2},$$

если r означает расстояние рассматриваемой точки от начала; в самом деле, мы видели в предыдущем параграфе, что тогда $u=r^2$. Направление движения в каждой точке есть одно из двух направлений, которое имеет проходящая через эту точку линия тока. Отсюда следует, что φ или u_1, даже если не принимать во внимание добавочную постоянную, которая остается произвольной, еще может иметь различные ветви[19]. Несомненно, что направление движения внутри жидкости не может скачком измениться на противоположное, но это возможно на поверхности, которой нарушается связность жидкости. Изменение направления движения на противоположное соответствует перемене знака корня в первом из уравнений (23), так как при перемене этого знака $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, $\frac{\partial u_1}{\partial z}$ изменяют свой знак на обратный. Внутри жидкости этот корень не может изменить знаки, не обращаясь в нуль; он равен нулю на поверхности неоднократно упомянутого эллипса (19), и только для нее имеем $u = -c^2$. Если его площадь не представляет пограничной поверхности, то при переходе через эту площадь знак корня должен измениться; в самом деле, du меняет знак, так как $-c^2$ есть наименьшее значение, которое только может принять u, и сверх того u_1 при движении вдоль этой линии тока может или только возрастать или только убывать[20]. Ни в какой другой точке жидкости не может быть перемены знака корня. Из этого следует, что движение, представляемое уравнением $\varphi = u_1$, невозможно, если в жидкости нет поверхности, нарушающей ее связность[21]. В качестве такой поверхности может служить каждая из поверхностей, ограниченных эллипсом (19). Тогда можно представить себе, что из каждого элемента выбранной поверхности с обеих ее сторон жидкость вытекает или поглощается. Если предположить, что вся поверхность лежит на конечном расстоянии, еще можно принять, что в бесконечности u_1 обращается в нуль и что $\frac{\partial u_1}{\partial u}$ отрицательно; поэтому при принятом для скорости обозначении для бесконечно большого r

$$u_1 = \frac{2}{r}.$$

Этим u_1 будет определено вполне[22]. Если поверхность изменяется, то в силу этого u_1 изменяется только в пространстве, описанном этой поверхностью при ее изменении.

Покажем, что u_1 можно представить в виде суммы потенциалов простого слоя масс и двойного слоя, которые лежат на выбранной поверхности. Для этого вообразим, что последняя заключена внутри замкнутой поверхности, элемент которой обозначим через ds, а нормаль к ds, направленную внутрь, через n. Тогда для какой-нибудь внешней точки, по уравнению (17) предыдущей лекции и его обобщению, сделанному в § 7 той же лекции, получим

$$u_1 = \frac{1}{4\pi}\int ds\, u_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\frac{\partial u_1}{\partial n}. \tag{27}$$

Теперь представим себе поверхность, элемент которой обозначен через ds, составленную из двух кусков поверхности, совпадающих с проведенной вначале поверхностью, ограниченной эллипсом (19), и из бесконечно тонкой трубчатой поверхности (внутри нее проходит кривая, ограничивающая эллипс), перпендикулярные сечения которой — круги бесконечно малого радиуса r, с центрами в точках этого эллипса[23]. Распространенные на эту трубчатую поверхность оба входящих в выражение (27) интеграла обращаются в нуль, потому что u_1 для $\rho = 0$ не бесконечно. Действительно, для $\rho = 0$ значение u_1 не обращается в бесконечность[24], но будет равно

$$\int\limits_{-c^2}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} = 2\int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{(a^2-c^2+x^2)(b^2-c^2+x^2)}}. \tag{28}$$

Мы убедимся, что действительно первый из входящих в (27) интегралов, распространенный на трубчатую поверхность, обращается в нуль, если заметим, что $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$ или, что то же самое, $\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \rho}$ имеет на ней всюду конечные значения, а площадь трубчатой поверхности есть величина порядка ρ. Что касается второго из двух интегралов, то $\frac{\partial u_1}{\partial n}$, т. е. $\frac{\partial u_1}{\partial \rho}$, всюду бесконечно велико, но $\rho\frac{\partial u_1}{\partial \rho}$ бесконечно мало, так как u_1 для $\rho = 0$ не будет бесконечно велико и $\frac{\partial u_1}{\partial \rho}$, т. е. $\frac{du_1}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \rho}$, может быть разложено в ряд по восходящим дробным степеням ρ[25]. Так как поверхность трубки есть величина порядка ρ, то отсюда следует, что второй интеграл, распространенный на поверхность трубки, также обращается в нуль. Поэтому при составлении уравнения (27) надо принимать в расчет только тот кусок поверхности, который совпадает с первоначально взятой ограниченной эллипсом (19) площадью. Мы будем теперь понимать под ds элемент этой поверхности за исключением бесконечно узкой полоски, прилегающей к пограничному эллипсу. Тогда в оба интеграла уравнения (27) каждый элемент ds войдет дважды. Мы будем различать обе стороны этого элемента как внутреннюю и внешнюю, а именно, внутренней должна быть та, с которой нельзя пройти в бесконечность, не проходя через поверхность, которой принадлежит ds, или через площадь эллипса (19). Далее, пусть n—нормаль к ds, направленная внутрь; обозначение u_1 под знаком интеграла мы будем относить к внутренней стороне ds, тогда как для внешней стороны мы воспользуемся обозначением u_1'. Тогда уравнение (27) перейдет в

$$u_1 = \frac{1}{4\pi}\int ds\,(u_1 - u_1')\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{ds}{r}\left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_1'}{\partial n}\right); \tag{29}$$

эта формула представляет u_1 в том виде, в каком эта величина и должна быть выражена.

Допустим, что поверхность, элемент которой обозначен через ds, есть площадь самого эллипса (19); тогда первый из двух входящих в (29) интегралов обратится в нуль, так как для площади эллипса $u = -c^2$ и, следовательно, u_1 и u_1' имеют данное в (28) значение[26]. Тогда

$$u_1 = \int \frac{ds}{r} h;$$

следовательно, u_1 представлено как потенциал простого слоя масс плотности

$$h = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial u_1}{\partial n} - \frac{\partial u_1'}{\partial n}\right).$$

За n здесь может быть взята по произволу направленная в ту или другую сторону нормаль к площади эллипса. Воспользуемся тем, что эта площадь пересекается нормально линиями тока; тогда из определения скорости, данного в (26а), причем $\frac{z^2}{c^2+u^2}$ должно быть исключено при помощи первого из уравнений (10), получим[27]

$$h = \frac{1}{\pi\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2-c^2}-\frac{y^2}{b^2-c^2}}}.$$

Найдем непосредственно массу всего слоя, приняв во внимание сделанное выше замечание, что на бесконечности $u_1 = \frac{2}{r}$; отсюда следует, что эта масса[28] равна двум.

Попутно мы отметим, что эти результаты особенно важны для учения об электричестве, так как они позволяют изучить распределение количества электричества на проводящей эллиптической пластинке. Количество электричества, сообщающее проводнику потенциал, равный единице, определяет его емкость. Следовательно, по (28) емкость эллиптической пластинки с полуосями $\sqrt{a^2-c^2}$ и $\sqrt{b^2-c^2}$ равна обратной величине интеграла[29]:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2-c^2+x^2)(b^2-c^2+x^2)}}. \tag{30}$$

Если поверхность, элемент которой обозначен в (29) через ds, не есть площадь эллипса (19), то найденное здесь выражение для u_1 годится также для всего пространства, за исключением части его, заключенной между названными выше поверхностями. В этом случае по каждой линии тока u_1 возрастает совершенно так же, как в предыдущем случае оно здесь убывало. Представим себе, что названная поверхность продолжена в бесконечность и притом так, что лежащая на конечном расстоянии часть ее совпадает с частью плоскости xOy, внешней относительно эллипса (19); тогда на каждой линии тока в части ее, лежащей на конечном расстоянии, движение не изменяет своего направления. Лежащая вне эллипса часть плоскости xOy образует твердую стенку, вдоль которой движутся частицы жидкости[30]. В то время как с одной стороны ее в бесконечности $u_1 = 0$, с другой стороны[31]

$$u_1 = 4\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2-c^2+x^2)(b^2-c^2+x^2)}}.$$

Рассмотренные здесь значения может принимать потенциал скоростей жидкости, заполняющей пространство, ограничиваемое поверхностью, образуемой линиями, уравнения которых $v = \text{const}$, $w = \text{const}$. Этот случай имеем, если жидкость ограничена твердой стенкой, образованной каким-нибудь однополостным гиперболоидом $v = \text{const}$, и наполняет односвязное пространство, ограниченное этой поверхностью. Найдем для этого случая объем жидкости, протекающей в единицу времени через поперечное сечение; под этим названием мы подразумеваем какую-нибудь не пересекающую себя поверхность, вполне ограниченную линией пересечения со стенкой. Это сечение делит *наполненное жидкостью* пространство на две отдельные *части*; поэтому задача сводится к тому, чтобы найти объем жидкости, проходящей из первой части во вторую. Обозначим через ds элемент поперечного сечения, через n — направленную внутрь второй части нормаль к ds; тогда искомый объем будет равен

$$\int ds \frac{\partial u_1}{\partial n}.$$

Этот интеграл не зависит от формы и положения поперечного сечения, что следует из уравнения (16) предыдущей лекции. Поэтому, чтобы найти его значение, мы можем выбрать в качестве поперечного сечения часть шаровой поверхности, описанной бесконечно большим радиусом r. Возьмем нормаль в направлении течения; тогда, как мы видели раньше,

$$\frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{2}{r^2}.$$

Предположим, что часть шаровой поверхности, отсеченная гиперболической стенкой, равна

$$Kr^2,$$

т. е. мы обозначим через K отверстие асимптотического конуса гиперболоида; поэтому искомый объем жидкости будет равен

$$2K.$$

Применим теперь одно выражение, введенное для электрического тока, к рассмотренным здесь движениям жидкости. Именно, мы будем говорить *о сопротивлении* жидкости, протекающей в пространстве, ограниченном твердой стенкой и двумя поверхностями равных потенциалов скоростей; мы будем под этим подразумевать разность значений потенциала скоростей на обеих поверхностях, разделенную на объем жидкости, проходящей в единицу времени через поперечное сечение. Тогда сопротивление пространства, ограниченного рассмотренным гиперболоидом и простирающегося в обе стороны в бесконечность, будет равно

$$\frac{2}{K}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2-c^2+x^2)(b^2-c^2+x^2)}}. \tag{31}$$

Исследование, произведенное для частного решения дифференциального уравнения (24), может быть с некоторыми изменениями применено к решениям $\varphi = v_1$ и $\varphi = w_1$. Отметим для них только следующее. Каждое из них представляет возможное движение жидкости, линиями тока в них будут того или другого рода линии кривизны эллипсоидов $u = \mathrm{const}$. Каждая из этих линий будет замкнутой. Если линии тока не прерываются поверхностями, из которых жидкость вытекает или в которые вливается, то, следовательно, потенциал скоростей многозначен и наполненное жидкостью пространство должно быть многосвязным. Это пространство всегда может быть ограничено твердыми стенками, образованными линиями тока.

Положим $\varphi = v_1$; тогда линиями тока будут линии пересечения эллипсоидов $u = \mathrm{const}$ и двуполостных гиперболоидов $w = \mathrm{const}$. Жидкость может заполнять двусвязное пространство, лежащее вне такого эллипсоида и представляющее часть связного пространства, ограниченного одним из этих гиперболоидов. По (25) квадрат скорости равен

$$-\frac{4}{(v-w)(v-u)};$$

следовательно, скорость будет бесконечна на эллипсе (19), где $v = u$, и на гиперболе (20), где $v = w$. Обе эти линии лежат не внутри занятого жидкостью пространства, а на его границе, когда эллипсоид переходит в эллипс (19), а гиперболоид — в обе не связанные части плоскости xOz, ограниченные гиперболой (20).

Положим $\varphi = w_1$; тогда линиями тока будут линии пересечения эллипсоидов $u = \mathrm{const}$ с однополостным гиперболоидом $v = \mathrm{const}$. Жидкость может заполнять двусвязное пространство, ограниченное одним из этих гиперболоидов. Квадрат скорости по (25) равен

$$\frac{4}{(w-u)(w-v)}.$$

Здесь скорость бесконечна только на гиперболе (20), которая лежит не внутри указанного пространства, а на его границе, если гиперболоид переходит в связную часть плоскости zOx, которая ограничена гиперболой (20).

Продолжим исследование движения, представляемого уравнением $\varphi = w_1$, для случая, когда жидкость ограничена стенкой, представляющей поверхность вращения, ось которой есть ось z. Тогда мы имеем $a = b$ или, скорее, должны принять $a - b$ бесконечно малым, чтобы можно было воспользоваться выведенными формулами. Линиями тока будут круги, плоскость которых перпендикулярна к оси z и центры которых лежат на этой оси. Остается только вычислить еще скорость. Если $a - b$ бесконечно мало, то w, которое всегда лежит между $-a^2$ и $-b^2$, отличается бесконечно мало от $-a^2$; поэтому квадрат скорости равен

$$\frac{4}{(a^2 + u)(a^2 + v)}.$$

Но при таком предположении суммирование двух из первых уравнений (12) даст

$$x^2 + y^2 = \frac{(a^2 + u)(a^2 + v)}{a^2 - c^2};$$

откуда следует, что скорость равна

$$\frac{2}{\sqrt{(a^2 - c^2)(x^2 + y^2)}}.$$

Так как потенциал скоростей имеет измерение: скорость, помноженная на длину, то, чтобы сохранить физический характер уравнений, следует в § 5 добавить к φ постоянный множитель с размерностью, обратной размерности потенциала скоростей W.

ЛЕКЦИЯ ВОСЕМНАДЦАТАЯ

(Потенциал однородного эллипсоида. Потенциал однородного бесконечно длинного цилиндра. Покоящийся эллипсоид в текущей жидкости. Линии тока в случае, когда эллипсоид обращается в эллипсоид вращения или в шар. Твердое тело, движущееся в жидкости данным образом; исследуется движение жидкости. Случай, когда тело—эллипсоид или шар. Движение в жидкости двух тел. Ближайшее рассмотрение случая двух бесконечно малых шаров)

§ 1

При некоторых движениях жидкостей, которые мы рассмотрим здесь, полезно знать потенциал эллипсоида, наполненного массой постоянной плотности. Мы не будем выводить выражения этого потенциала. Но приведем его выражение непосредственно и, следуя по весьма простому пути, указанному Дирихле*, докажем его правильность. Пусть уравнение поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

его плотность равна единице, и его потенциал в точке с координатами x, y, z пусть будет Ω. Мы сопоставим известные свойства, которыми должно обладать Ω. Вследствие уравнения (11) шестнадцатой лекции, если точка (x, y, z) лежит внутри эллипсоида, должно быть

$$\Delta\Omega=-4\pi;$$

если она лежит вне, то

$$\Delta\Omega=0.$$

Далее Ω, $\frac{\partial\Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$ должны быть однозначны и непрерывны во всем пространстве, и Ω должно в бесконечности обращаться в нуль.

Эти свойства однозначно определяют Ω, как это показывает следующее рассуждение. Положим, что существуют две функции x, y, z, которые обладают этими свойствами, и пусть U — их разность. Тогда U имеет такие свойства во всем пространстве: $\Delta U=0$; U, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ — однозначны и непрерывны; в бесконечности $U=0$. Но тогда, согласно разъяснению, сделанному в § 7 шестнадцатой лекции, всюду $U=0$. Пусть будет, как в предыдущей лекции, u — наибольший корень кубического уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1; \tag{2}$$

если точка (x, y, z) лежит вне эллипсоида (1), то u положительно и представляет единственный положительный корень этого уравнения; на поверх-

* Crelle's Journal, Bd. 32, S. 80.

ности эллипсоида $u=0$. Тогда будем иметь для внешней точки

$$\Omega = \pi abc \int_u^\infty d\lambda \, \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{3}$$

для внутренней

$$\Omega = \pi abc \int_0^\infty d\lambda \, \frac{1 - \frac{x^2}{a^2+\lambda} - \frac{y^2}{b^2+\lambda} - \frac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}. \tag{4}$$

Чтобы доказать правильность этого утверждения, нам нужно только показать, что функция, данная уравнениями (3) и (4), обладает свойствами, которые определяют Ω. Для этого продифференцируем уравнения (3) и (4) сперва по x. Для внешней точки мы получим

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = -2\pi abcx \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}, \tag{5}$$

так как член, происходящий от переменности нижнего предела, обращается в нуль вследствие уравнения (2); для внутренней точки

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = -2\pi abcx \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}. \tag{6}$$

Пусть аналогичные уравнения составлены для $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$ и $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$. При этом заметим, что Ω, $\frac{\partial\Omega}{\partial x}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial y}$, $\frac{\partial\Omega}{\partial z}$ не претерпевают разрыва на поверхности эллипсоида, где $u=0$, и, следовательно, однозначны и непрерывны всюду. Продифференцируем уравнения (5) и (6) еще раз по x; тогда для внешней точки получим

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} = 2\pi abc\left\{\frac{\frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{(a^2+u)(b^2+u)(c^2+u)}} - \int_u^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}\right\},$$

а для внутренней

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} = -2\pi abc \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Складывая с этим уравнением соответствующие уравнения для $\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}$ и пользуясь тем, что

$$\int \left(\frac{1}{a^2+\lambda} + \frac{1}{b^2+\lambda} + \frac{1}{c^2+\lambda}\right)\frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

для внутренней точки мы получим

$$\Delta\Omega = -4\pi;$$

для внешней, если еще добавим, что по уравнению (17) предыдущей лекции

$$\frac{x}{a^2+u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y}{b^2+u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{z}{c^2+u}\frac{\partial u}{\partial z}=2,$$

будем иметь

$$\Delta\Omega = 0.$$

Наконец, чтобы убедиться в том, что определяемая уравнением (3) функция Ω в бесконечности обращается в нуль, надо только заметить, что вследствие уравнения (2) u бесконечно велико на бесконечности.

Добавим к этому еще определение потенциала цилиндра, наполненного массой с плотностью, равной единице, уравнение боковой поверхности которого есть

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

и уравнения оснований суть

$$z=-\gamma \text{ и } z=+\gamma,$$

где γ должно быть рассматриваемо как величина бесконечно большая по сравнению с a, b и с координатами точек, к которым потенциал относится. Обозначим последний через Ω; тогда по уравнению (30) шестнадцатой лекции будем иметь

$$\Omega = 2\pi ab \lg 2\gamma + U, \qquad U = -2\int df \lg \rho, \tag{7}$$

где df — элемент площади, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $z=0$. ρ — расстояние этого элемента от точки $(x, y, 0)$, если (x, y, z) есть точка, к которой относятся U и Ω. По проведенному в шестнадцатой лекции исследованию U определено с точностью до произвольной постоянной, если оно со своими первыми производными однозначно и непрерывно на всей плоскости xOy и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-4\pi \quad\text{или}\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0,$$

что зависит от того, лежит ли точка (x, y) внутри или вне указанного эллипса, а $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ на бесконечности обращаются в нуль. U будет обладать этими свойствами, если положим для внутренней точки

$$U=\pi ab\left(\int\limits_0^{u'}\frac{1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}}\,d\lambda+1-\lg u'\right), \tag{8}$$

а для внешней точки

$$U=\pi ab\left(\int\limits_u^{u'}\frac{1-\frac{x^2}{a^2+\lambda}-\frac{y^2}{b^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)}}\,d\lambda+1-\lg u'\right), \tag{9}$$

при этом под u' понимаем бесконечно большое постоянное, а под u — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}=1.$$

Это вытекает из рассуждений, подобных рассуждениям первой части этого параграфа.

Для доказательства того, что эти выражения для U не вводят иного постоянного, кроме содержащегося для U в формуле (7), надо только показать, что если мы положим $x^2+y^2=\rho^2$, где ρ^2 бесконечно велико, но бесконечно мало по сравнению с u', то получим из (9)

$$U=-2\pi ab\lg\rho.$$

Это следует из того, что при сделанном предположении $u=\rho^2$, и

$$\int_{\rho^2}^{u'}\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{\rho^2}{\lambda}\right)d\lambda=\lg u'-2\lg\rho-1.$$

Нетрудно произвести интегрирование, указанное в выражениях (8) и (9). Тогда для внутренней точки найдем

$$U=\pi ab\left(2\lg\frac{2}{a+b}+1\right)-2\pi\frac{bx^2+ay^2}{a+b}. \tag{10}$$

Если эллипс превращается в круг радиуса a, то это уравнение дает

$$U=\pi a^2(1-2\lg a)-\pi\rho^2,$$

где по-прежнему $x^2+y^2=\rho^2$; для внешней точки при этом будем иметь

$$U=-2\pi a^2\lg\rho.$$

§ 2

Положим [32]

$$\varphi=M\frac{\partial\Omega}{\partial z}-z, \tag{11}$$

где M означает постоянное, а Ω имеет данное уравнением (3) значение; тогда в пространстве, внешнем относительно эллипсоида (1), φ удовлетворяет уравнению $\Delta\varphi=0$.

Поэтому уравнение (11) представляет возможное движение жидкости в этом пространстве. На бесконечности имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-1;$$

следовательно, в бесконечности жидкость течет со скоростью, равной единице, в направлении, противоположном оси z. Мы покажем, что постоянное M можно определить так, чтобы на поверхности эллипсоида (1) было

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0.$$

Если постоянное определено именно так, то уравнение (11) пригодно для случая, когда жидкость движется определенным образом в бесконечность и в ней покоится эллипсоид (1). Обозначим через n_a нормаль к элементу поверхности эллипсоида, направленную внутрь жидкости, нормаль же, направленную внутрь эллипсоида, обозначим через n_i; тогда получим условие, которое должно быть выполнено при надлежащем выборе M:

$$M \frac{\partial^2\Omega}{\partial n_a \partial z} = \cos(n_a, z),$$

или, так как по уравнению (10) шестнадцатой лекции

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial n_i \partial z} + \frac{\partial^2\Omega}{\partial n_a \partial z} = 4\pi\cos(n_a, z),$$

то

$$M \frac{\partial^2\Omega}{\partial n_i \partial z} = (4\pi M - 1)\cos(n_a z). \tag{12}$$

Мы ввели вместо производной по n_a производную по n_i, так как определяемое из уравнения (4) значение Ω для внутренней точки проще, чем определяемое уравнением (3) для внешней точки. Действительно, для внутренней точки по уравнению (4) имеем выражение

$$\Omega = \text{const} - \pi(Ax^2 + By^2 + Cz^2),$$

которым пользовались уже в двенадцатой лекции и где A, B, C суть постоянные, значения которых были определены уравнением (4) той же лекции.

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial n_i \partial z} = -2\pi C\frac{\partial z}{\partial n_i} = 2\pi C\cos(n_a z).$$

Поэтому уравнение (12) будет выполнено, если мы положим

$$M = \frac{1}{2\pi(2 - C)}. \tag{13}$$

Если для установившегося движения жидкости с потенциалом скоростей этот потенциал φ известен, то определение линий тока потребует еще интегрирования дифференциальных уравнений

$$dx : dy : dz = \frac{\partial\varphi}{\partial x} : \frac{\partial\varphi}{\partial y} : \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{14}$$

интегралы которых, содержащие две произвольные постоянные, дают уравнения линий тока.

Если φ есть функция двух аргументов: z и $\sqrt{x^2+y^2}$ [условие, которое в рассматриваемом здесь случае будет выполнено, если эллипсоид (1) есть эллипсоид вращения и $a = b$], то интегрирование уравнений (14) приводится к квадратурам. В самом деле, положим

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

и будем рассматривать φ как функцию z и ρ; тогда получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\cdot\frac{x}{\rho}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{y}{\rho}.$$

Поэтому одно из уравнений (14) будет

$$x\,dy - y\,dx = 0, \tag{15}$$

откуда следует

$$\frac{x}{y} = \text{const},$$

т. е. каждая линия тока лежит в плоскости, проходящей через ось (z). Из (15) в связи с уравнением

$$x\,dx + y\,dy = \rho\,d\rho$$

получается далее

$$dx = \frac{x\,d\rho}{\rho},$$

вследствие чего второе из уравнений (14) примет вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}d\rho - \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}dz = 0.$$

Но из уравнения $\Delta\varphi = 0$ можно убедиться, что интегрирующий множитель этого уравнения есть ρ, т. е. левая часть уравнения

$$\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z}d\rho - \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}dz = 0 \tag{16}$$

есть полный дифференциал. Действительно, мы имеем

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{y^2}{\rho^3},$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2}\frac{y^2}{\rho^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\frac{x^2}{\rho^3},$$

откуда следует

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} = 0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = -\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}\right),$$

чем и доказано высказанное утверждение. Таким образом, существует функция U переменных z и ρ, имеющая то свойство, что

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \rho\frac{\partial\varphi}{\partial\rho}, \quad \frac{\partial U}{\partial\rho} = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial z}; \tag{17}$$

если она найдена, то мы получим

$$U = \text{const}$$

как интеграл уравнения (16) и как уравнение линий тока.

Пусть будет известна функция V переменных z и ρ, для которой

$$\frac{\partial V}{\partial z} = \varphi \text{ и } \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho} = 0; \tag{18}$$

тогда можно будет положить

$$U = \rho\frac{\partial V}{\partial\rho},$$

так как при этом будут удовлетворены оба уравнения (17). Следовательно, уравнение линий тока будет

$$\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} = \text{const}.$$

В случае движения жидкости, представляемого уравнениями (11) в предположении, что $a = b$, условиям (18) можно удовлетворить, положив

$$V = M\Omega - \frac{z^2}{2} + \frac{\rho^2}{4};$$

тогда уравнение линий тока будет

$$\rho \left(M \frac{\partial \Omega}{\partial \rho} + \frac{\rho}{2} \right) = \text{const}. \tag{19}$$

Если эллипсоид вращения превращается в шар радиуса R, то для внешней точки будем иметь

$$\Omega = \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{1}{r}.$$

Из этого, пользуясь предложением, что $\frac{\partial \Omega}{\partial z}$ не претерпевает разрыва на поверхности шара, можно вывести, что $C = \frac{2}{3}$, и, следовательно, по (13), $M = \frac{3}{8\pi}$. Отсюда следует, что

$$\varphi = \frac{R^3}{2} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - z$$

и что уравнение линий тока есть

$$\rho^2 \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) = \text{const}.$$

Положим, что величина, обозначенная в этом уравнении через const, равна нулю; тогда мы удовлетворим этому уравнению, полагая $\rho = 0$ или $r = R$. В этом случае линия тока состоит из отрезка оси z, лежащего вне шара, и из полукруга, по которому поверхность шара пересекается с полуплоскостью, ограниченной осью z и проходящей через ось ρ. В точках, в которых части оси z встречаются с этим кругом, т. е. в точках $\rho = 0$ и $z = \pm R$, скорость равна нулю, как это следует из уравнений

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{R^3}{2} \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) - 1$$

и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \rho} = \frac{R^3}{2} \cdot \frac{3z\rho}{r^5},$$

которые, вообще, определяют компоненты скорости по осям z и ρ. Эти точки обладают тем свойством, что никакая частица жидкости, лежащая в данный момент на конечном от них расстоянии, никогда не может их достигнуть. Вычисление показывает, что необходимое для этого время будет бесконечно велико. Мы покажем это для частиц, лежащих на названном полукруге. Для такой частицы $r = R$; следовательно, $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{3}{2} \left(\frac{z^2}{R^2} - 1 \right)$, и потому $\frac{dz}{dt}=\frac{3}{2}\left(\frac{z^2}{R^2}-1\right)$. Обозначим значение t, для которого $z=0$, через t_0; тогда интегрированием получим

$$\frac{3}{4}(t-t_0)=\lg\frac{R-z}{R+z},$$

откуда действительно получаем

$$t=\infty \text{ для } z=-R.$$

§ 3

Выведенным уравнениям мы можем придать еще другое, отличное от прежнего, значение. Согласно разъяснению, данному в § 4 четвертой лекции, для системы координат, оси которой движутся поступательно с постоянной скоростью, пригодны те же дифференциальные уравнения движения, как и для неподвижной. Представим себе, что оси x, y, z неизменно связаны с эллипсоидом и движутся с ним в некотором направлении с постоянной скоростью; тогда выведенные в предыдущем параграфе формулы будут пригодны для движения жидкости относительно эллипсоида. Допустим, что движение происходит в направлении оси z со скоростью, равной единице, так что при этом абсолютная скорость частиц жидкости в бесконечности равна нулю.

Рассмотрим теперь случай, в котором указанный случай заключается как частный. Предположим, что в жидкости, покоящейся в бесконечности, движется известным образом неизменяемое тело произвольной формы; требуется найти движение жидкости. При этом допустим, что существует однозначный потенциал скоростей; тем самым мы исключаем из задачи те случаи, когда тело заполняет многосвязное пространство, а, следовательно, и жидкость также занимает многосвязное пространство.

Воспользуемся обозначениями пятой лекции и введем две прямоугольные системы координат, одна из которых (ξ, η, ζ) неподвижна в пространстве, а другая (x, y, z) неподвижна в теле; напишем уравнения между координатами одной и той же точки в обеих системах:

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z,\\ \eta &= \beta+\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z,\\ \zeta &= \gamma+\gamma_1 x+\gamma_2 y+\gamma_3 z.\end{aligned}\tag{20}$$

Обозначим далее через u, v, w компоненты скорости начала координат системы x, y, z по осям x, y, z и через p, q, r — компоненты угловой скорости тела относительно тех же осей. Тогда выражения (1) шестой лекции, именно выражения

$$\begin{aligned}&u+zq-yr,\\ &v+xr-zp,\\ &w+yp-xq,\end{aligned}\tag{21}$$

будут компонентами скорости точки тела (x, y, z) по осям x, y, z; они будут также компонентами скорости жидкой частицы по тем же осям, если последняя находится с телом в относительном покое.

Из последнего можно заключить, что если мы отнесем x, y, z к этой же жидкой частице, то получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - u - zq + yr,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - v - xr + zp,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} - w - yp + xq.$$

Интегрирование этих уравнений дает относительное движение всех жидких частиц по отношению к телу, если u, v, w, p, q, r — известные функции t и φ. Если бы мы пожелали найти их абсолютное значение, то надо было бы вычислить ξ, η, ζ из уравнений (20), пользуясь определенными значениями x, y, z.

Посмотрим теперь, как определить φ. Обозначим через n направленную внутрь жидкости нормаль к элементу поверхности тела; тогда выражения (21), по умножении их на $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ и после сложения, дадут компоненту скорости рассматриваемого элемента на направление n, но эта компонента должна быть равна $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$, т. е.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = (u + zq - yr)\cos(nx) + (v + xr - zp)\cos(ny) + (w + yp - xq)\cos(nz).$$

К этому добавляются следующие условия: в бесконечности $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ обращаются в нуль; в объеме, наполненном жидкостью, $\Delta\varphi = 0$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ однозначны и непрерывны. Что φ однозначно, мы уже допустили; не ограничивая общности, мы можем предположить, что φ также непрерывно, так как пока оно определено только через свои производные. Согласно разъяснению, сделанному в § 7 шестнадцатой лекции, φ определено здесь до добавочной постоянной; оно будет определено вполне, если мы примем, а это допустимо, что оно обращается в нуль в бесконечности. Все эти требования будут удовлетворены, если мы положим

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6 \tag{22}$$

и определим шесть функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ так, чтобы каждая из них удовлетворяла уравнению $\Delta\varphi = 0$, заданным для φ условиям непрерывности и обращалась в нуль в бесконечности, а на поверхности движущегося тела удовлетворяла уравнениям

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial n} &= \cos(nx), & \frac{\partial \varphi_4}{\partial n} &= y\,\varphi\cos(nz) - z\cos(ny),\\
\frac{\partial \varphi_2}{\partial n} &= \cos(ny), & \frac{\partial \varphi_5}{\partial n} &= z\cos(nx) - x\cos(nz),\\
\frac{\partial \varphi_3}{\partial n} &= \cos(nz), & \frac{\partial \varphi_6}{\partial n} &= x\cos(ny) - y\cos(nx).
\end{aligned} \tag{23}$$

Этими условиями функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ вполне определены; они не зависят от движения тела, но зависят исключительно от его формы. Если тело представляет эллипсоид, уравнение поверхности которого есть уравнение

(1), то функции φ_1, $\varphi_2, \ldots$ легко определить на основании результатов § 2. Именно, пользуясь принятыми там обозначениями и принимая для нормали n данное здесь направление, мы получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Omega}{\partial n\,\partial x} &= 2\pi(2-A)\cos(nx), \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial n\,\partial y} &= 2\pi(2-B)\cos(ny), \\ \frac{\partial^2\Omega}{\partial n\,\partial z} &= 2\pi(2-C)\cos(nz). \end{aligned} \tag{24}$$

Отсюда прежде всего будем иметь

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\pi(2-A)}\frac{\partial\Omega}{\partial x}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2\pi(2-B)}\frac{\partial\Omega}{\partial y}, \quad \varphi_3 = \frac{1}{2\pi(2-C)}\frac{\partial\Omega}{\partial z}.$$

Далее, мы можем заметить, что если N обозначает определенное постоянное, то

$$\varphi_6 = N\left(x\frac{\partial\Omega}{\partial y} - y\frac{\partial\Omega}{\partial x}\right), \tag{25}$$

или, что то же самое,

$$\varphi_6 = N\frac{\partial\Omega}{\partial\vartheta},$$

если положить

$$x = \rho\cos\vartheta, \qquad y = \rho\sin\vartheta.$$

Все поставленные для φ_6 условия будут удовлетворять определенным выражениям при любом значении N, за исключением последнего из уравнений (23), которое выполняется только при некотором определенном значении N. Именно, вследствие уравнений (24) и уравнений

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x} = -2\pi Ax, \qquad \frac{\partial\Omega}{\partial y} = -2\pi By,$$

$$\frac{\partial x}{\partial n} = \cos(nx), \qquad \frac{\partial y}{\partial n} = \cos(ny),$$

это уравнение примет вид

$$x\cos(ny) - y\cos(nx) = 2\pi N[x\cos(ny)(2-B+A) - y\cos(nx)(2-A+\varphi)].$$

Оно линейно и однородно относительно x и y; на этом основании и так как

$$\cos(nx):\cos(ny) = \frac{x}{a^2}:\frac{y}{b^2},$$

можно положить, что x и y соответственно равны $a^2\cos(nx)$ и $b^2\cos(ny)$; тогда в обе части уравнения $\cos(nx)\cos(ny)$ войдет общим множителем. По сокращении на этот множитель мы получим

$$N = \frac{a^2-b^2}{2\pi[2(a^2-b^2)+(A-B)(a^2+b^2)]}.$$

Выражения, подобные (25), которым определено φ_6, можно составить и для φ_4 и φ_5.

Если a^2-b^2 обращается в нуль, т. е. если эллипсоид переходит в эллипсоид вращения, ось которого совпадает с осью z, то отношение

$(A-B):(a^2-b^2)$, а также и N получают легко определяемые значения. Но множитель при N в уравнении (25), а следовательно, и φ_6 обращается в нуль.

Если эллипсоид превращается в шар радиуса R, то

$$\varphi_4=0, \quad \varphi_5=0, \quad \varphi_6=0,$$

т. е. вращение шара вокруг его центра не оказывает никакого влияния на движение жидкости. Далее, согласно сделанному в § 2 определению, будем иметь

$$\varphi_1=\frac{R^3}{2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \varphi_2=\frac{R^3}{2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \varphi_3=\frac{R^3}{2}\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}, \tag{26}$$

где

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Поэтому для шара мы имеем

$$\varphi=\frac{R^3}{2}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x}+v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial y}+w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial z}\right). \tag{27}$$

Это φ удовлетворяет на поверхности шара условию

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=u\cos(nx)+v\cos(ny)+w\cos(nz).$$

Здесь уместно упомянуть, что найденное для φ выражение согласуется с потенциалом молекулярного магнита, находящегося в центре шара, магнитная ось которого имеет направление движения, и магнитный момент которой равен скорости центра, умноженной на $\frac{R^3}{2}$, относительно полюса, лежащего в точке (x, y, z) и содержащего единицу магнетизма. Это следует из того, что скорость в точке (x, y, z) по величине и направлению равна силе, с которой этот молекулярный магнит действует на полюс.

Движение шара в жидкости впервые было исследовано Дирихле*, эллипсоида — Клебшем**.

§ 4

В предыдущих параграфах мы предполагали, что на конечном расстоянии жидкость ограничена только поверхностью движущегося твердого тела. В этом случае следует отнести потенциал скоростей φ к системе координат, неподвижно связанной с телом, потому что тогда он зависит исключительно от формы тела и его движения в рассматриваемый момент. Если кроме данного тела на конечном расстоянии находятся еще другие твердые тела, которые движутся или покоятся, то потенциал скоростей всегда будет зависеть от относительного положения всех тел. Тогда целесообразно отнести его прямо к неподвижной в пространстве системе координат. Мы будем теперь представлять себе, что в бесконечной жидкости на конечном расстоянии движутся *два* твердых тела и что система осей x, y, z неподвижна в пространстве. Пусть u, v, w — компоненты скорости точки первого тела, u', v' w' — точки второго, p, q, r — компоненты угловой ско-

* Monatsberichte der Berliner Academie, 1852, S. 12.

** Crelle's Journal, Bd. 52, S. 103 u. Bd. 53, S. 287.

рости по осям, параллельным осям координат для первого тела, p', q', r' — соответствующие величины для второго. Тогда, соответственно уравнению (22), можно положить

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + p\varphi_4 + q\varphi_5 + r\varphi_6 +$$
$$+ u'\varphi_1' + v'\varphi_2' + w'\varphi_3' + p'\varphi_4' + q'\varphi_5' + r'\varphi_6',$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_1', \varphi_2', \ldots$ — функции x, y, z, которые зависят не только от движения обоих тел, но и от их мгновенного положения. Каждая из них должна в наполненном жидкостью пространстве удовлетворять уравнению $\Delta\varphi = 0$, а также быть однозначной и непрерывной вместе со своими первыми производными, обращаться в нуль на бесконечности и на поверхности обоих тел удовлетворять некоторым двум уравнениям. А именно, пусть a, b, c и a', b', c' — координаты двух точек, компоненты скоростей которых обозначены через u, v, w и u', u', w'; тогда на поверхности первого тела должно быть

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \cos(nx), \qquad \frac{\partial\varphi_1'}{\partial n} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \cos(ny), \qquad \frac{\partial\varphi_2'}{\partial n} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = \cos(nz), \qquad \frac{\partial\varphi_3'}{\partial n} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = (y-b)\cos(nz) - (z-c)\cos(ny), \qquad \frac{\partial\varphi_4'}{\partial n} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = (z-c)\cos(nx) - (x-a)\cos(nz), \qquad \frac{\partial\varphi_5'}{\partial n} = 0,$$
$$\frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = (x-a)\cos(ny) - (y-b)\cos(nx), \qquad \frac{\partial\varphi_6'}{\partial n} = 0.$$

и на поверхности второго

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_1'}{\partial n} = \cos(nx),$$
$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_2'}{\partial n} = \cos(ny),$$
$$\frac{\partial\varphi_3}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_3'}{\partial n} = \cos(nz),$$
$$\frac{\partial\varphi_4}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_4'}{\partial n} = (y-b')\cos(nz) - (z-c')\cos(ny),$$
$$\frac{\partial\varphi_5}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_5'}{\partial n} = (z-c')\cos(nx) - (x-a')\cos(nz),$$
$$\frac{\partial\varphi_6}{\partial n} = 0, \qquad \frac{\partial\varphi_6'}{\partial n} = (x-a')\cos(ny) - (y-b')\cos(nx).$$

Эти уравнения, которые соответствуют уравнениям (20), выведены таким же путем, как и последние. Указанные условия определяют вполне двенадцать функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$

Простейшим случаем будет тот, когда оба тела — шары, и точки (a, b, c) и (a', b', c') — их центры. Тогда условия, определяющие φ_4, φ_5, φ_6, φ_4', φ_5', φ_6', приведут к тому, что эти шесть функций обращаются в нуль, и, следовательно, мы получим

$$\varphi = u\varphi_1 + v\varphi_2 + w\varphi_3 + u'\varphi_1' + u'\varphi_2' + w'\varphi_3'.$$

В этом случае с помощью так называемых *шаровых функций* можно найти выражение φ в виде бесконечного ряда, всегда сходящегося и тем быстрее сходящегося, чем больше расстояние между шарами по сравнению с их радиусами. Мы не будем касаться здесь теории шаровых функций, и потому наметим только в общих чертах способ решения названной задачи и определим результат лишь постольку, поскольку он будет необходим для дальнейших исследований.

Шаровые функции непосредственно позволяют найти функцию U, которая вне *одного* шара удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Delta U = 0$, однозначна и непрерывна вместе со своими первыми производными, обращается в нуль на бесконечности и на поверхности шара $\frac{\partial U}{\partial n}$ получает произвольно заданное непрерывно изменяющееся значение. Из бесконечного числа подобных функций можно составить сходящийся ряд для потенциала скоростей жидкости, в которой таким образом движутся два шара. Чтобы это показать, назовем шар, центр которого — a, b, c, первым, а другой — вторым.

Составим функцию U_1, для которой на поверхности первого шара будет $\frac{\partial U_1}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, т. е. равно $u \cos(nx) + v\cos(ny) + w\cos(nz)$, и функцию U_1', для которой на поверхности второго шара будет $\frac{\partial U_1'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$, т. е. равно $u' \cos(nx) + v'\cos(ny) + w'\cos(nz)$, и положим

$$U_1 + U_1' = V_1.$$

Тогда это V_1 будет первым членом ряда, представляющего φ. Функция $\varphi - V_1$ должна для обоих шаров удовлетворять условиям, что на первом

$$\frac{\partial(\varphi - V_1)}{\partial n} = -\frac{\partial U_1'}{\partial n},$$

и на втором

$$\frac{\partial(\varphi - V_1)}{\partial n} = -\frac{\partial U_1}{\partial n}.$$

Составим функции U_2 и U_2', для которых на первой шаровой поверхности

$$\frac{\partial U_2}{\partial n} = -\frac{\partial U_1'}{\partial n}$$

и на второй

$$\frac{\partial U_2'}{\partial n} = -\frac{\partial U_1}{\partial n},$$

и положим

$$U_2 + U_2' = V_2;$$

тогда V_2 будет вторым членом ряда для φ. Теперь для первой шаровой поверхности должно быть

$$\frac{\partial(\varphi - V_1 - V_2)}{\partial n} = -\frac{\partial U_2'}{\partial n},$$

для второй

$$\frac{\partial(\varphi - V_1 - V_2)}{\partial n} = -\frac{\partial U_2}{\partial n}.$$

Положим

$$U_3 + U_3' = V_3,$$

причем U_3 и U_3' должны быть определены так, чтобы на первой шаровой поверхности

$$\frac{\partial U_3}{\partial n} = -\frac{\partial U_2'}{\partial n}$$

и на второй

$$\frac{\partial U_3'}{\partial n} = -\frac{\partial U_2}{\partial n}.$$

Продолжая таким образом дальше, мы получим

$$\varphi = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$$

Этот ряд везде сходится, чего, однако, мы здесь не будем доказывать. Если радиусы обоих шаров рассматривать как бесконечно малые сравнительно с расстоянием между шарами, то при этом каждый последующий член ряда будет бесконечно мал сравнительно с предыдущим. Каждая из величин $V_2, V_3, \ldots$ сама выражается в шаровых функциях бесконечным рядом, который обладает также свойством, что каждый следующий член бесконечно мал сравнительно с предыдущим, если радиусы шаров бесконечно малы сравнительно с расстоянием между ними. Если при таком предположении желательно вычислить φ с точностью только до величин известного порядка, то можно принимать в расчет лишь ограниченное число величин V и для каждой из них ограниченное число членов.

Величины U_1 и U_1', а также и величина V_1 могут быть найдены непосредственно из уравнения (27). Обозначим расстояния точки (x, y, z) от центров обоих шаров через r и r', радиусы их через R и R' и воспользуемся тем, что r есть функция $(x-a)$, $(y-b)$, $(z-c)$, r' — функция $(x-a')$, $(y-b')$, $(z-c')$; тогда получим

$$U_1 = -\frac{R^3}{2}\left(u\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a} + v\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b} + w\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}\right), \tag{28}$$

$$U_1' = -\frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial a'} + v'\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial b'} + w'\frac{\partial\frac{1}{r'}}{\partial c'}\right).$$

Сумма этих двух выражений, т. е. V_1, определяет значение φ в первом приближении. Примем R и R' за бесконечно малые первого порядка и расстояние между системами за конечную величину; тогда для того, чтобы при этом потенциал скоростей и скорость были, вообще говоря, конечными, u, v, w, u', v', w' должны быть бесконечно большими третьего порядка. Тогда на шаровых поверхностях φ со своими первыми производными должны быть бесконечно велики.

На конечном расстоянии от шаровых поверхностей уравнение $\varphi = V_1$ дает скорости до бесконечно малых величин, но не на самих поверхностях. Чтобы получить их на этих поверхностях, надо составить U_2, но при этом надо принять в расчет члены высшего порядка. Это приводит к тому, что U_2 и U_2' опять надо будет вычислять из уравнения (27). Чтобы найти U_2, следует составить для первой шаровой поверхности $\frac{\partial U_1'}{\partial n}$, т. е.

$$\frac{\partial U_1'}{\partial n} = \frac{\partial U_1'}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial U_1'}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial U_1'}{\partial z}\cos(nz).$$

Подставим сюда вместо U_1' его значение (28), введем вместо производных по x, y, z, производные по a', b', c', взятые с обратным знаком. Заменим, что допустимо при требуемой точности, r' на r_0, где r_0 — расстояние между центрами шаров, следовательно, получим

$$r_0 = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2}$$

и заменим производные по a', b', c' производными по a, b, c; тогда

$$\frac{\partial U_2}{\partial n} = -\frac{\partial U_1'}{\partial n} = \frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial b} + w'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial c}\right)\cos(nx) -$$

$$-\frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial a} + v'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}\right)\cos(ny) -$$

$$-\frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial a} + v'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial b} + w'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\cos(nz).$$

Вместе с тем по (27) будем иметь

$$\begin{aligned} U_2 = {} & \frac{R^3R'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial b} + w'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial c}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial a} + \\ & + \frac{R^3R'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial a} + v'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial b} + \\ & + \frac{RR'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial a} + v'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial b} + w'\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c}. \end{aligned} \tag{29}$$

Соответственно будет

$$\begin{aligned} U_2' = {} & \frac{R^3R'^3}{4}\left(u\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial b} + w\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial c}\right)\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial a'} + \\ & + \frac{R^3R'^3}{4}\left(u\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b\partial a} + v\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}\right)\frac{\partial \frac{1}{r'}}{\partial b'} + \\ & + \frac{R^3R'^3}{4}\left(u\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c\partial a} + v\frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial b} + w\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial c^2}\right)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial c'}. \end{aligned}$$

Составим с помощью этих значений U_2 и U_2' уравнение $\varphi = V_1 + V_2$, тогда оно даст также и на шаровой поверхности скорости с точностью до бесконечно малых величин и значение φ со включением бесконечно малых величин первого порядка. Мы будем выполнять вычисление так, чтобы φ на каждой шаровой поверхности было определено с такой же точностью. Чтобы найти φ, надо еще преобразовать значения U_1 и U_1', определяемые (28). Займемся определением φ для первой шаровой поверхности. Величину $\frac{1}{r'}$, входящую в выражение для U_1', разложим по степеням

$x-a$, $y-b$, $z-c$, которые являются бесконечно малыми первого порядка, причем необходимо принять во внимание только первые степени. Так как

$$x-a=R\cos(nx),\quad y-b=R\cos(ny),\quad z-c=R\cos(nz),$$

то поэтому можно положить

$$\frac{1}{r'}=\frac{1}{r_0}+R\left[\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial a}\cos(nx)+\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial b}\cos(ny)+\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial c}\cos(nz)\right];$$

отсюда получим

$$\begin{aligned}U'_1=&\frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial a}+v'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial b}+w'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial c}\right)+\\&+\frac{RR'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a^2}+v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial b}+w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial c}\right)\cos(nx)+\\&+\frac{RR'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial a}+v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b^2}+w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}\right)\cos(ny)+\\&+\frac{RR'^3}{2}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial a}+v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial b}+w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\cos(nz).\end{aligned}$$

Далее из (28) следует

$$U_1=-\frac{R}{2}[u\cos(nx)+v\cos(ny)+w\cos(nz)],$$

так как

$$\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial a}=\frac{1}{R^2}\cos(nx),\qquad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial b}=\frac{1}{R^2}\cos(ny),\qquad \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial c}=\frac{1}{R^2}\cos(nz).$$

Воспользуемся этими соотношениями, чтобы составить также определенное (29) выражение для U_2, и заметим, что U'_2 высшего порядка малости, чем U_2; тогда для первой шаровой поверхности с требуемой степенью точности мы получим

$$\begin{aligned}\varphi=&-\frac{R}{2}[u\cos(nx)+v\cos(ny)+w\cos(nz)]+\\&+\frac{R'^3}{2}\left(u'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial a}+v'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial b}+w'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial c}\right)+\\&+\frac{3RR'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a^2}+v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial b}+w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial c}\right)\cos(nx)+\\&+\frac{3RR'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial a}+v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b^2}+w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}\right)\cos(ny)+\\&+\frac{3RR'^3}{4}\left(u'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial a}+v'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial b}+w'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c^2}\right)\cos(nz).\end{aligned}\qquad(30)$$

Значение φ на поверхности второго шара мы найдем, если переставим в этом выражении буквы со штрихами и буквы без штрихов.

Более общая задача, чем изложенная здесь, разрешена Бьеркнесом (Bjerknes) в его мемуаре: «Sur le mouvement simultané de corps sphériques variables dans un fluide indéfini et incompressible, presenté à la société des Sciences de Christiania le 15 sept. 1871».

ЛЕКЦИЯ ДЕВЯТНАДЦАТАЯ

(Дифференциальные уравнения движения тела в жидкости, на которое действуют данные силы. Применение к этому случаю принципа Гамильтона. Движение тел при отсутствии внешних сил. Упрощение задачи через предположение некоторой симметрии Шар. Тело вращения. Движение в жидкости двух бесконечно малых шаров. Силы взаимодействия между ними.)

§ 1

При рассмотренных в предыдущей лекции движениях жидкости, простирающейся во всех направлениях в бесконечность, обусловленных движением твердого тела, мы предполагали движение тел заданным. Теперь мы будем заниматься задачей, как определить это движение, если даны силы, действующие на тело и жидкость. При этом относительно силы, действующей на жидкую частицу, мы будем предполагать, что она имеет однозначный потенциал, так как предположение о существовании потенциала скоростей, которое мы там приняли, мы удержим и здесь.

Чтобы решить эту задачу, можно вычисленное с помощью уравнения (20) пятнадцатой лекции давление, производимое жидкостью на элемент поверхности тела, ввести в дифференциальное уравнение движения неизменяемого тела. Это можно сделать более коротким путем, если исходить из принципа Гамильтона, который применим также и к настоящему случаю, как мы это показали в § 6 одиннадцатой лекции, и который применялся Томсоном и Тэтом* в подобных случаях.

Обозначим через m массу материальной точки, принадлежащей безразлично твердому телу или жидкости, через ξ, η, ζ — координаты ее в момент времени t относительно неподвижной в пространстве системы координат, через U' — работу всех действующих сил для бесконечно малых возможных перемещений их точек приложения, каковым перемещениям будет соответствовать обозначение δ, наконец, через T—живую силу всей системы. Тогда по принципу Гамильтона получим

$$\left[\sum m \frac{d\zeta}{dt}\,\delta\xi\right]_{t_0}^{t_1'} = \int_{t_0}^{t_1} dt\,(\delta T + U'), \tag{1}$$

где сумма взята как по всем массам, так и по всем координатам каждой массы, и t_0, t' означают какие-нибудь два значения t. Относительно вариаций $\delta\xi$, к которым будем применять это уравнение, установим следующее: для твердого тела должны быть как для $t = t_0$, так и для $t = t'$ все $\delta\xi = 0$. При $t = t_0$ то же самое должно иметь место для жидкости. Для варьированного движения, т. е. для движения, при котором $\xi + \delta\xi$, $\eta + \delta\eta$, $\zeta + \delta\zeta$ — координаты массы m в момент t, должен существовать потенциал скоростей, как и для движения, которое мы ищем. Тогда из значений $\delta\xi$ для частиц твердого тела будут вполне определены значения для всех частиц жидкости. Последние, вообще, не обращаются в нуль

* Handbuch der theoretischen Physik von W. Thomson und P. G. Tait. Немецкий перевод, т. I, стр. 296.

для $t = t'$; однако, как мы это покажем, левая часть уравнения (1) обращается в нуль. Если, согласно сделанному определению, обозначим через $d\tau$ элемент заполненного жидкостью объема и через μ — ее плотность, то левая часть уравнения (1) будет равна

$$\mu \int d\tau \left(\frac{d\xi}{dt} \delta\xi + \frac{d\eta}{dt} \delta\eta + \frac{d\zeta}{dt} \delta\zeta \right)$$

для $t = t'$. Но мы имеем

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \quad \frac{d\eta}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta},$$

поэтому это выражение равно

$$\mu \int d\tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} \delta\xi + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \delta\eta + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \delta\zeta \right).$$

Вместо условия, что жидкость покоится в бесконечности, введем предположение, что она заключена в бесконечно большую твердую шаровую поверхность. Согласно доказанному в конце § 7 шестнадцатой лекции, оба эти предположения равносильны. Обозначим через ds элемент поверхности тела или упомянутого шара, через n — направленную внутрь жидкости нормаль к ds; тогда искомая величина после интегрирования по частям превратится в

$$-\mu \int d\tau\varphi \left(\frac{\partial\delta\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial\eta} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial\zeta} \right)$$

$$-\mu \int ds\varphi\, (\delta\xi \cos(n\xi) + \delta\eta \cos(n\eta) + \delta\xi \cos(n\zeta)).$$

Благодаря несжимаемости жидкости, вообще, имеем

$$\frac{\partial\delta\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial\eta} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial\zeta} = 0.$$

Для каждого элемента поверхности тела при $t = t'$ имеем

$$\delta\xi \cos(n\xi) + \delta\eta \cos(n\eta) + \delta\zeta \cos(n\zeta) = 0,$$

потому что для этого момента времени вариации координат точек тела должны обращаться в нуль[33] и то же самое уравнение имеет место для каждого элемента ограничивающей шаровой поверхности, так как последняя неподвижна.

Поэтому уравнение (1) примет вид

$$0 = \int_{t_0}^{t'} dt\, (\delta T + U'). \tag{2}$$

Живая сила T рассматриваемой системы составляется из живой силы твердого тела и жидкости. Первая по уравнению (2) шестой лекции есть однозначная функция второй степени u, v, w, p, q, r с постоянными коэффициентами; вторая, именно

$$\frac{\mu}{2} \int d\tau \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} \right)^2 \right],$$

или, что то же самое,

$$-\frac{\mu}{2} \int ds\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

вследствие уравнения (22) предыдущей лекции, есть точно такая же функция. Поэтому T есть также однородная функция u, v, w, p, q, r с постоянными коэффициентами, значения которых зависят от формы тела, его массы и распределения ее так же, как и от плотности жидкости.

Работа U' слагается из работы сил, действующих на тело, и работы сил, которые будут действовать на частицы жидкости. Относительно последних мы должны предположить, что они имеют однозначный потенциал. Из этого следует, что если бы твердое тело было заменено жидкой массой, однородной с внешней, то работа совокупности сил для перемещений всей жидкой массы была бы равна нулю[34], поэтому работы сил, действующих на действительно имеющуюся жидкость, равны отрицательной работе сил, действующих на воображаемую жидкую массу, заменявшую твердое тело.

Уравнение (2) во всем согласуется с тем, из которого в § 2 шестой лекции мы вывели дифференциальные уравнения движения твердого тела в пустоте. Поэтому эти дифференциальные уравнения, именно уравнения (12) и (13) или (14) и (15) упомянутой лекции, имеют место также и для рассматриваемого случая, только здесь X, Y, Z, M_x, M_y, M_z обозначают слагающие равнодействующей и момента вращения относительно осей x, y, z; Σ, H, Z, M_ξ, M_η, M_ζ обозначают составляющие равнодействующей и момента вращения относительно осей ξ, η, ζ сил, действующих на тело, и взятых со знаком минус сил, которые действовали бы на жидкость, вытесненную телом, если бы таковая была. Кроме того, коэффициенты в выражении T имеют здесь другие значения.

§ 2

Предположим теперь, что на твердое тело и жидкость не действуют силы. Однако результаты, к которым мы при этом придем, годятся также и в некоторых случаях, когда действуют силы, например в случае действия тяжести, причем тело имеет всюду постоянную плотность, равную плотности жидкости. Тогда уравнения (12) и (10) шестой лекции будут

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) &= r\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial w},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) &= p\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial u},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) &= q\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial v},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) &= w\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial r},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) &= u\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial p},\\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) &= v\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial q}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Сперва обратим внимание на частное решение этих уравнений. Мы удовлетворим им, если положим $p=0$, $q=0$, $r=0$, а u, v, w равными постоянным, отношения которых удовлетворяют условию

$$u:v:w = \frac{\partial T}{\partial u} : \frac{\partial T}{\partial v} : \frac{\partial T}{\partial w}.$$

Тогда левые части уравнений (3) обратятся в нуль так же, как и правые, так как u, v, w, p, q, r постоянны. Заметив, что, если p, q, r обращаются в нуль, то T будет однородной функцией второй степени и притом такой, которая постоянно положительна, так как живая сила не может быть отрицательной, мы видим, что определение отношений $u:v:w$ из приведенного выше условия аналогично с определением главных осей некоторого эллипсоида, именно эллипсоида, уравнение которого есть

$$T = \mathrm{const},$$

если рассматривать u, v, w как прямоугольные координаты точек. Возьмем оси u, v, w параллельно осям x, y, z; тогда направление главных осей означенного эллипсоида суть три взаимно перпендикулярных и неизменных в теле направления, в каждом из которых тело может поступательно перемещаться в жидкости без вращения с постоянной скоростью. Других направлений, в которых скорость остается постоянной, не существует, если эллипсоид не есть эллипсоид вращения; но если имеет место этот случай, то направление оси вращения и каждое из перпендикулярных к нему направлений обладает указанным выше свойством. Этим свойством обладает всякое направление, если эллипсоид есть шар.

Мы не рассматривали, при каких условиях указанное движение будет устойчивым, т. е. при каких условиях *всегда* p, q, r будут бесконечно малы, когда u, v, w до бесконечно малых имеют приведенные выше значения в какой-нибудь момент времени.

Не вводя дальнейших ограничений, можно найти три интеграла уравнений (3); для этого умножим их на

$$\begin{array}{lll}
u, & \text{или на } \dfrac{\partial T}{\partial u}, & \text{или на } \dfrac{\partial T}{\partial p} \\
v & \dfrac{\partial T}{\partial v} & \dfrac{\partial T}{\partial q}, \\
w & \dfrac{\partial T}{\partial w} & \dfrac{\partial T}{\partial r}, \\
p & 0 & \dfrac{\partial T}{\partial u}, \\
q & 0 & \dfrac{\partial T}{\partial v}, \\
r & 0 & \dfrac{\partial T}{\partial w}
\end{array}$$

и каждый раз сложим. Заметим, что при пользовании первой системой множителей по известному предложению, относящемуся к однородным функциям, получим

$$2T = u\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{\partial T}{\partial w} + p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r}$$

и

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{dw}{dt} + \frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt};$$

отсюда

$$\frac{dT}{dt} = u\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} + v\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} + w\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} + p\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r},$$

таким образом

$$2T = L,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = M,\quad \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = N, \tag{4}$$

где через L, M, N обозначены произвольные постоянные.

Шесть других интегралов рассматриваемой задачи мы получим из второй формы ее дифференциальных уравнений (14) и (15) шестой лекции, если положим в них Ξ, H, Z, M_ξ, M_η, M_ζ равными нулю. Первые уравнения дадут

$$\begin{aligned}
\alpha_1\frac{\partial T}{\partial u} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial v} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial w} &= A, \\
\beta_1\frac{\partial T}{\partial u} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial v} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial w} &= B, \\
\gamma_1\frac{\partial T}{\partial u} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial v} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial w} &= C,
\end{aligned} \tag{5}$$

а вторые при помощи предыдущих —

$$\begin{aligned}
\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r} &= A' + B\gamma - C\beta, \\
\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r} &= B' + C\alpha - A\gamma, \\
\gamma_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3 \frac{\partial T}{\partial r} &= C' + A\beta - B\alpha,
\end{aligned} \tag{6}$$

где A, B, C, A', B', C' — произвольные постоянные, и двенадцать величин α, β, γ имеют значения, данные уравнениями (20) предыдущей лекции.

Два последние уравнения (4) суть следствия уравнений (5) и (6), и постоянные M и N могут быть выражены через постоянные $A, B, \ldots, C'$. Действительно, возводя в квадрат уравнения (5) и складывая их, а потом перемножив уравнения (5) с уравнениями (6), при посредстве уравнений (4) и соотношений, существующих между косинусами, получим

$$A^2 + B^2 + C^2 = M,$$

$$AA' + BB' + CC' = N.$$

Если u, v, w определены из уравнений (3) как соответственные функции t, то полное решение предложенной задачи, т. е. определение двенадцати величин α, β, γ, требует выполнения квадратур, как мы это теперь покажем.

Относительно произвольных постоянных A, B, C, входящих в уравнение (5), можно, не нарушая общности рассматриваемого движения, положить, что $A = 0$, $B = 0$ и C положительно; для этого надо только выбрать направления оси ζ. Именно, будем рассматривать $\frac{\partial T}{\partial u}$, $\frac{\partial T}{\partial v}$, $\frac{\partial T}{\partial w}$ как компоненты скорости точки по осям x, y, z; тогда уравнения (5) показывают, что компоненты этой скорости по осям ξ, η, ζ равны постоянным A, B, C. Дадим оси ζ направление этой скорости; тогда A и B будут равны нулю, между тем как C будет положительно. Умножим при этом предположении уравнения (5) на α, β, γ, или на α_2, β_2, γ_2, или α_3, β_3, γ_3 и каждый раз сложим их; тогда получим

$$\gamma_1 = \frac{1}{C} \frac{\partial T}{\partial u}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{C} \frac{\partial T}{\partial v}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{C} \frac{\partial T}{\partial w}. \tag{7}$$

Чтобы найти шесть других косинусов, введем определяемые из уравнений (8) пятой лекции углы ϑ, f, φ. Тогда будем иметь

$$\gamma_1 = \cos f \sin \vartheta, \quad \gamma_2 = \sin f \sin \vartheta, \quad \gamma_3 = \cos \vartheta, \tag{8}$$

откуда определим f и ϑ. Для определения φ введем уравнение (13) седьмой лекции, именно уравнение

$$d\varphi = \frac{\gamma_1 p + \gamma_2 q}{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}\, dt,$$

из которого следует, что

$$d\varphi = C \frac{p \frac{\partial T}{\partial u} + q \frac{\partial T}{\partial v}}{\left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2}\, dt.$$

Наконец, чтобы выразить координаты α, β, γ начала системы x, y, z как функции t, положим входящие в уравнение (6) постоянные A' и B' равными нулю, также не нарушая этим общность рассматриваемого движения. Мы выберем произвольно только положение оси ζ, потому что, как это следует из уравнений (6), изменение значений A' и B' может быть компенсировано добавлением произвольных постоянных β и α.

Тогда два первые уравнения (6) дадут

$$\alpha = \frac{1}{C}\left(\beta_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

$$\beta = -\frac{1}{C}\left(\alpha_1 \frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2 \frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3 \frac{\partial T}{\partial r}\right)$$

и γ определится из уравнения

$$\frac{d\gamma}{dt} = \gamma_1 u + \gamma_2 v + \gamma_3 w,$$

т. е.

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{C}\left(u \frac{\partial T}{\partial u} + v \frac{\partial T}{\partial v} + w \frac{\partial T}{\partial w}\right).$$

§ 3

Число постоянных, входящих в выражение для T, вообще, равно 21; но при известных условиях это число можно уменьшить, благодаря чему облегчается интегрирование дифференциальных уравнений (3). Подобное упрощение имеет место, если поверхность тела и распределение в нем масс симметрично относительно некоторой плоскости. Чтобы показать это, примем во внимание сначала ту часть T, которая образована живой силой жидкости. Удвоенную величину этой живой силы положим равной

$$a_{11}u^2 + 2a_{12}uv + 2a_{13}uw + 2a_{14}up + 2a_{15}uq + 2a_{16}ur + a_{22}v^2 + \\ + 2a_{23}vw + 2a_{24}vp + 2a_{25}vq + 2a_{26}vr + a_{33}w^2 + \ldots$$

Тогда это выражение, как мы видели в § 1, равно

$$-\mu \int ds\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n}.$$

Вследствие уравнения (22) предыдущей лекции отсюда имеем

$$a_{11} = -\mu \int ds\varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n},$$

$$a_{12} = -\mu \int ds\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{\partial n} = -\mu \int ds\varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}, \tag{9}$$

. . . .

Введем теперь предположение, что поверхность тела симметрична относительно плоскости xOz, т. е. что если x, y, z — координаты точки поверхности, то последняя содержит также точку $(x, -y, z)$. Две такие точки будем называть соответственными. Тогда в двух соответственных точках поверхности вследствие уравнений (23) предыдущей лекции $\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}, \frac{\partial \varphi_3}{\partial n}, \frac{\partial \varphi_5}{\partial n}$ имеют равные и противоположные по знаку $\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \frac{\partial \varphi_4}{\partial n}, \frac{\partial \varphi_6}{\partial n}$ значения. Отсюда можно доказать, что в каких-нибудь двух соответственных точках наполненного жидкостью пространства φ_1, φ_3, φ_5 имеют равные и противоположные φ_2, φ_4, φ_6 значения. Действительно, обозначим через φ_1' значение φ_1 в точке $(x, -y, z)$, понимаемое как функция x, y, z (координат точки, к которой относится φ_1); тогда $\varphi_1 - \varphi_1'$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению в частных производных и тому же условию неразрывности, что и φ, и как φ, функция $\varphi_1 - \varphi_1'$ в бесконечности равна 0; на поверхности же тела

$$\frac{d(\varphi_1 - \varphi_1')}{dn} = 0;$$

отсюда следует, что $\varphi_1' = \varphi_1$.

Аналогичным способом можно доказать высказанное утверждение для φ_2, φ_3, ... Так как вследствие этого для соответственных элементов поверхности тела φ_1, φ_3, φ_5 также имеют равные и противоположные φ_2, φ_4, φ_6 значения, то уравнения (9) показывают, что обращаются в нуль те значения a, одному индексу которых соответствует ряд 1, 3, 5, а другому—ряд 2, 4, 6.

Удвоенная живая сила тела, если обозначить через dm элемент его массы, имеющей координаты x, y, z, как это уже дано уравнением (2) шестой лекции, равна

$$\begin{aligned}\int dm\, \{u^2 + v^2 + w^2 + (y^2 + z^2)p^2 + (z^2 + x^2)q^2 + (x^2 + y^2)r^2 + \\ + 2x(vr - wq) + 2y(wp - ur) + \\ + 2z(uq - vp) - 2yzqr - 2zxrp - 2xypq\}.\end{aligned}$$

Если распределение масс симметрично относительно плоскости xOz, то те члены, которые содержат множители

$$wp - ur, \ qr, \ pq,$$

обратятся в нуль. Поэтому если положим, вообще, удвоенную живую силу тела равной

$$\begin{aligned}b_{11}u^2 + 2b_{12}uv + 2b_{13}uw + 2b_{14}up + \ldots \\ + b_{22}v^2 + 2b_{23}vw + 2b_{24}vp + \ldots,\end{aligned}$$

то, как легко видеть, обратятся в нуль те b, у которых одному индексу соответствует ряд 1, 3, 5, а другому — ряд 2, 4, 6.

Отсюда следует, что если положим

$$\begin{aligned}2T = c_{11}u^2 + 2c_{12}uv + 2c_{13}uw + 2c_{14}up + \ldots \\ + c_{22}v^2 + 2c_{23}vw + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

то обратятся в нуль те c, при которых один индекс есть 1, 3 или 5, а другой 2, 4 или 6, лишь бы тело как по форме, так и по распределению масс было симметрично относительно плоскости xOz.

Если такая симметрия имеет место относительно плоскости xOy или плоскости yOz, то вместо рядов 1, 3, 5 и 2, 4, 6 войдут ряды 2, 1, 6 и 3, 5, 4 или 3, 2, 4 и 1, 6, 5.

Пусть теперь тело будет симметрично по форме и распределению масс относительно двух взаимно перпендикулярных плоскостей; примем их за плоскости xOz и yOz; тогда получим

$$2T = c_{11}u^2 + c_{22}v^2 + c_{33}w^2 + c_{44}p^2 + c_{55}q^2 + c_{66}r^2 + 2c_{15}uq + 2c_{24}vp.$$

Мы еще более ограничим рассматриваемый случай, предположив, что существует еще одна пара перпендикулярных плоскостей, проходящих через ось z, относительно которых имеет место симметрия. Введем вторую систему координат x', y', z', в которой плоскости $x'Oz'$ и $y'Oz'$ суть эти плоскости симметрии; тогда для одной и той же точки

$$\begin{aligned}x &= x'\cos\vartheta + y'\sin\vartheta, \\ y &= -x'\sin\vartheta + y'\cos\vartheta, \\ z &= z',\end{aligned}$$

где через ϑ обозначен один из углов, образуемых плоскостью xOz с плоскостью $x'Oz'$. Обозначим буквами со штрихами те величины относительно новой системы координат, которые в старой системе были обозначены буквами без штрихов; тогда одновременно получим

$$\begin{aligned} u &= u'\cos\vartheta + v'\sin\vartheta, & p &= p'\cos\vartheta + q'\sin\vartheta, \\ v &= -u'\sin\vartheta + v'\cos\vartheta, & q &= -p'\sin\vartheta + q'\cos\vartheta, \\ w &= w', & r &= r' \end{aligned}$$

и

$$2T = c'_{11}u'^2 + c'_{22}v'^2 + c'_{33}w'^2 + c'_{44}p'^2 + c'_{55}q'^2 + c'_{66}r'^2 + \\ + 2c_{15}u'q' + 2c'_{24}v'p'.$$

Положим оба выражения $2T$ равными друг другу; тогда получим уравнение, которое должно быть тождеством на основании соотношения между u, v, w, p, q, r и u', v', w', p', q', r'. Выразим шесть первых величин через шесть последних; тогда, сравнивая коэффициенты при $u'v'$, $p'q'$ и $u'p' - v'q'$, найдем

$$c_{11} - c_{22} = 0,\ c_{44} - c_{55} = 0,\ c_{15} + c_{24} = 0$$

и из сравнения коэффициентов остальных членов увидим, что величины c' равны соответственным величинам c. Отсюда имеем

$$2T = c_{11}(u^2 + v^2) + c_{33}w^2 + c_{44}(p^2 + q^2) + c_{66}r^2 + 2c_{15}(uq - vp).$$

Это выражение можно еще упростить, выбирая надлежащим образом начало координат на оси z. Чтобы это показать, введем наряду с системой координат x, y, z вторую — x', y', z', которую выберем так, чтобы для каждой точки

$$x = x',\ y = y',\ z = z' + \alpha.$$

При обозначениях, подобных примененным, получим

$$\begin{aligned} u &= u' - aq', & p &= p', \\ v &= v' + ap', & q &= q', \\ w &= w', & r &= r' \end{aligned}$$

и

$$c_{11}(u^2 + v^2) + c_{33}w^2 + c_{44}(p^2 + q^2) + c_{66}r^2 + 2c_{15}(uq - vp) = \\ = c'_{11}(u'^2 + v'^2) + c'_{33}w'^2 + c'_{44}(p'^2 + q'^2) + c'_{66}r'^2 + 2c'_{15}(u'q' - v'p'),$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} &c_{11} = c'_{11}, \quad c_{33} = c'_{33}, \quad c_{66} = c'_{66}, \\ &c_{44} = c'_{44} + 2ac'_{15} + a^2c'_{11}, \\ &c_{15} = c'_{15} + ac'_{11}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что если начало z' выбрано произвольно, то a может быть определено так, чтобы

$$c_{15} = 0.$$

Тогда получим

$$2T = c_{11}(u^2 + v^2) + c_{33}w^2 + c_{44}(p^2 + q^2) + c_{66}r^2. \tag{10}$$

Предположения, положенные в основу этого вывода, выполняются, когда форма тела и расположение масс соответствуют телу вращения. Но они могут быть также выполнены в различных других случаях, например, когда тело есть однородная прямая призма или однородная прямая пирамида с квадратным или правильным шестиугольным поперечным сечением; в подобных случаях мы будем говорить, что оно имеет *характер* тела вращения.

Пусть имеем тело вращения относительно двух взаимно перпендикулярных осей, т. е. оно есть или шар, в котором массы распределены симметрично относительно центра, или имеет характер тела вращения относительно двух перпендикулярных осей, что будет, например, в случае однородного куба или однородного правильного октаэдра. Возьмем эти оси за две оси координат; тогда

$$2T = c_{11}(u^2 + v^2 + w^2) + c_{44}(p^2 + q^2 + r^2).$$

Определенное этим выражением T оказывается той же формы, как живая сила самого твердого тела; только его масса и моменты инерции относительно осей координат кажутся увеличенными вследствие наличия жидкости. Задача об определении его движения в жидкости также и в случае действия произвольных сил такова же, как задача об определении его движения в пустоте. Пусть тело — шар; тогда увеличение момента инерции жидкости не имеет места; увеличение массы, если R означает радиус, на основании уравнения (26) предыдущей лекции и вследствие уравнения (9) будет равно

$$\frac{1}{2}\frac{4\pi}{3}R^3\mu,$$

т. е. половине массы вытесненной шаром жидкости.

§ 4

Положим теперь, что движущееся в жидкости тело есть тело вращения или имеет характер такового, так что получим уравнение (10). В этом случае уравнения (3) можно интегрировать до конца. Последнее из них будет

$$\frac{dr}{dt} = 0, \text{ т. е. } r = \text{const};$$

остальные будут

$$\begin{aligned}
c_{11}\frac{du}{dt} &= c_{11}vr - c_{33}wq,\\
c_{11}\frac{dv}{dt} &= -c_{11}ur + c_{33}wp,\\
c_{33}\frac{dw}{dt} &= c_{11}(uq - vp),\\
c_{44}\frac{dp}{dt} &= (c_{11} - c_{33})vw + (c_{44} - c_{66})qr,\\
c_{44}\frac{dq}{dt} &= (c_{33} - c_{11})uw + (c_{66} - c_{44})pr.
\end{aligned} \tag{11}$$

Вместо u, v, p, q здесь надо будет ввести четыре других переменных. По уравнениям (7), (8) и (10) имеем

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg} f,$$

поэтому можно положить

$$u = s\cos f, \quad p = \sigma\cos(f + \psi),$$
$$v = s\sin f, \quad q = \sigma\sin(f + \psi),$$

причем

$$u^2 + v^2 = s^2, \quad p^2 + q^2 = \sigma^2,$$
$$up + vq = s\sigma\cos\psi, \quad uq - vp = s\sigma\sin\psi.$$

Пользуясь еще тем, что отсюда

$$sds = udu + vdv, \quad \sigma d\sigma = pdp + qdq,$$

$$s^2 df = udv - vdu, \quad \sigma^2 (df + d\psi) = pdq - qdp,$$

легко найдем из уравнений (11)

$$\begin{aligned}
c_{33} \frac{dw}{dt} &= c_{11} s\sigma \sin\psi, \\
c_{11} \frac{ds}{dt} &= -c_{33} w\sigma \sin\psi, \\
c_{44} \frac{d\sigma}{dt} &= (c_{33} - c_{11}) ws \sin\psi, \\
c_{11} \frac{df}{dt} &= c_{33} w \frac{\sigma}{s} \cos\psi - c_{11} r, \\
c_{44} \frac{d\psi}{dt} &= \left[(c_{33} - c_{11}) \frac{s}{\sigma} - \frac{c_{33} c_{44}}{c_{11}} \frac{\sigma}{s} \right] w \cos\psi + c_{66} r.
\end{aligned} \tag{12}$$

Три интеграла этих уравнений мы имеем в уравнениях (4). При вновь введенных обозначениях они таковы:

$$\begin{aligned}
c_{11}s^2 + c_{33}w^2 + c_{44}\sigma^2 + c_{66}r^2 &= L, \\
c_{11}^2 s^2 + c_{13}^2 w^2 &= M, \\
c_{33}c_{66}wr + c_{11}c_{44}s\sigma\cos\psi &= N.
\end{aligned}$$

Введем новые постоянные a, b, g, a', b', g', которые определенным образом свяжем с L, M, N и величинами c; тогда те же самые уравнения можно написать так:

$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{a - a'w^2}, \\
\sigma &= \sqrt{b - b'w^2}, \\
s\sigma\cos\psi &= g - g'w.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$s\sigma \sin\psi = \sqrt{(a - a'w^2)(b - b'w^2) - (g - g'w)^2}.$$

Первое и четвертое из уравнений (12) при этом дадут

$$dt = \frac{c_{33}}{c_{11}} \frac{dw}{\sqrt{(a - a'w^2)(b - b'w^2) - (g - g'w)^2}},$$

$$df = -rdt + \left(\frac{c_{33}}{c_{11}}\right)^2 \frac{(g - g'w)\, wdw}{(a - a'w^2)\sqrt{(a - a'w^2)(b - b'w^2) - (g - g'w)^2}}.$$

Эти уравнения интегрируются, что дает интегралы уравнений (12).

§ 5

Мы приведем вычисление движения лишь для одного случая, который рассмотрен в предыдущем параграфе как частный случай и характеризуется начальными значениями величин u, v, w, p, q, r. Уравнения (11) будут удовлетворены, если положим

$$v = 0, \quad p = 0, \quad r = 0$$

и надлежащим образом определим u, w, q; тогда движение имеет ту особенность, что плоскость xOz остается неподвижной в пространстве.

Вследствие сделанного предположения два из уравнений (11) будут выполнены тождественно, а три остальных дадут

$$c_{11}\frac{du}{dt} = -c_{33}wq,$$

$$c_{33}\frac{dw}{dt} = c_{11}uq,$$

$$c_{44}\frac{dq}{dt} = (c_{33}-c_{11})\,uw.$$

Сравнив их с тождественными уравнениями

$$\frac{d\sin\operatorname{am}\lambda t}{dt} = \lambda\cos\operatorname{am}\lambda t\Delta\operatorname{am}\lambda t,$$

$$\frac{d\cos\operatorname{am}\lambda t}{dt} = -\lambda\sin\operatorname{am}\lambda t\Delta\operatorname{am}\lambda t,$$

$$\frac{d\Delta\operatorname{am}\lambda t}{dt} = -\lambda k^2\sin\operatorname{am}\lambda t\cos\operatorname{am}\lambda t,$$

в которых применен способ обозначения, разъясненный в § 1 седьмой лекции, и где k означает модуль эллиптических функций, заметим, что они будут удовлетворены, если мы величинам u, w, q дадим значения

$$l\sin\operatorname{am}\lambda t,\quad m\cos\operatorname{am}\lambda t,\quad n\Delta\operatorname{am}\lambda t$$

и определим надлежащим образом постоянные k, λ, l, m, n. Две из этих постоянных остаются при этом опять произвольными; они суть две из произвольных постоянных интегрирования, которые должны содержать полные интегралы рассматриваемых дифференциальных уравнений; третье может быть введено прибавлением добавочной постоянной к t. Данные значения могут быть распределены между u, w, q так, чтобы все рассматриваемые величины были действительны и K было правильной дробью. Чтобы сделать это, будем исходить из уравнений

$$c_{11}u^2 + c_{33}w^2 + c_{44}q^2 = L,$$

$$c_{11}^2u^2 + c_{33}^2w^2 = M,$$

в которые перейдут уравнения (4) при определенном (10) значении T и при сделанном относительно v, p, r предположении и которые являются интегралами дифференциальных уравнений, о которых идет речь. Заметив, что при выполнении указанного выше требования $\cos^2\operatorname{am}$ и $\Delta^2\operatorname{am}$ убывают, в то время как $\sin^2\operatorname{am}$ возрастает, сделаем заключение; из второго из этих уравнений следует, что одна из величин u и w должна быть выражена через $\sin\operatorname{am}$, так как вследствие этого уравнения u^2 и w^2 должны изменяться одновременно в противоположном смысле. Далее, из обоих уравнений получим

$$\begin{aligned} c_{11}(c_{33}-c_{11})\,u^2 + c_{33}c_{44}q^2 &= \text{const}, \\ c_{33}(c_{11}-c_{33})\,w^2 + c_{11}c_{44}q^2 &= \text{const}. \end{aligned} \tag{13}$$

Так как c_{11}, c_{33}, c_{44} — величины положительные (потому что T никогда не может быть отрицательным), то из свойства эллиптических функций следует, что u или w должны быть выражены через $\sin\operatorname{am}$ в зависимости от того, меньше c_{11} или больше, чем c_{33}. Каждый из этих случаев распадается опять на два, которые различаются знаком одной из входящих в (13) постоянных. Пусть c_{11} будет меньше c_{33}, тогда u должно быть выражено через $\Delta \operatorname{am}$, а w через $\cos \operatorname{am}$, так как $\cos \operatorname{am}$ для некоторых значений аргумента обращается в нуль. Если постоянное отрицательно, то имеет место обратное. Подобное исследование приложимо и к случаю, когда c_{11} больше c_{33}.

Относительно формул, которыми в этих четырех случаях выражаются все неизвестные задачи как действительные функции времени, мы отсылаем к сочинению*, в котором разобран также случай движения тела вращения в жидкости, когда v, p и r не равны нулю, случай, в котором начало координат системы x, y, z движется по винтовой линии.

§ 6

В § 4 предыдущей лекции мы вычислили потенциал скоростей для случая, когда в жидкости двигаются за данным образом два шара, радиусы которых бесконечно малы сравнительно с их расстоянием. Поэтому теперь мы можем составить дифференциальные уравнения движения этих шаров, если на них действуют данные силы. Для этого необходимо вычислить живую силу жидкости. Если положим плотность жидкости равной единице, то живая сила равна интегралу

$$-\frac{1}{2}\int ds\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n},$$

распространенному на обе шаровые поверхности. Значение последнего для первой шаровой поверхности получим из уравнения (30) предыдущей лекции, если воспользуемся тем, что здесь

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=u\cos(nx)+v\cos(ny)+w\cos(nz),$$

$$\int ds\cos(nx)=0,\quad \int ds\cos(ny)=0,\quad \int ds\cos(nz)=0,$$

$$\int ds\cos^2(nx)=\int ds\cos^2(ny)=\int ds\cos^2(nz)=\frac{4\pi}{3}R^2,$$

$$\int ds\cos(ny)\cos(nz)=\int ds\cos(nz)\cos(nx)=\int ds\cos(nx)\cos(ny)=0.$$

Заменив в полученном таким образом из уравнения (30) выражении буквы со штрихами на буквы без штрихов, найдем значение того же интеграла для второй шаровой поверхности. Таким образом будем иметь

$$\frac{\pi}{3}R^2(u^2+v^2+w^2)+\frac{\pi}{3}R'^2(u'^2+v'^2+w'^2)+V,$$

где

$$V=-\pi R^3R'^3\left[uu'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a^2}+(vw'+v'w)\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b\,\partial c}+\right.$$
$$+vv'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial b^2}+(wu'+w'u)\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c\,\partial a}+$$
$$\left.+ww'\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial c^2}+(uv'+u'v)\frac{\partial^2\frac{1}{r_0}}{\partial a\,\partial b}\right]. \qquad (14)$$

Это выражение точно до бесконечно малых величин, если будем рассматривать расстояние шаров как конечное и скорости жидких частиц на конечном расстоянии от шаров тоже как конечные. Чтобы получить

* Kirchhoff. Ueber die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit. Borchardt's Journal, Bd. 71.

живую силу всей системы, надо прибавить еще живую силу шаров. Мы примем, что каждый шар имеет центр тяжести в центре и не вращается. Пусть m и m' будут массы шаров; тогда живая сила их равна

$$\frac{m}{2}(u^2+v^2+w^2)+\frac{m'}{2}(u'^2+v'^2+w'^2).$$

Если имеет место вращение шаров вокруг их центров, то оно происходит совершенно так же, как если бы жидкости не было, и не имеет никакого влияния на движение жидкости и центров шаров.

Обозначим через X, Y, Z и X', Y', Z' суммы компонент сил, действующих на оба шара; тогда дифференциальные уравнения движения их центров, т. е. точек (a, b, c) и (a', b', c') по принципу Гамильтона, т. е. по уравнениям (2), будут

$$\begin{gathered}
\frac{da}{dt}=u,\quad \frac{db}{dt}=v,\quad \frac{dc}{dt}=w,\\
\frac{da'}{dt}=u',\quad \frac{db'}{dt}=v',\quad \frac{dc'}{dt}=w',\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u}=\frac{\partial T}{\partial a}+X,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'}=\frac{\partial T}{\partial a'}+X',\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v}=\frac{\partial T}{\partial b}+Y,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v'}=\frac{\partial T}{\partial b'}+Y',\\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w}=\frac{\partial T}{\partial c}+Z,\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w'}=\frac{\partial T}{\partial c'}+Z'.
\end{gathered}\tag{15}$$

Мы не будем здесь исходить при интегрировании этих уравнений из частных предположений относительно сил X, Y, Z, X', Y', Z', но вычислим из них, какие значения должны иметь эти силы, чтобы шары двигались при этом известным образом. Мы рассмотрим при этом только случай, когда каждый шар будет обладать равномерным движением, так что u, v, w и u', v', w' будут постоянными. Если бы имелся только *один* шар, то он двигался бы равномерно, если бы *никакие* силы не действовали на него; поэтому силы, компоненты которых суть $-X$, $-Y$, $-Z$ и $-X'$, $-Y'$, $-Z'$, можно рассматривать как те силы, с которыми действуют друг на друга оба шара. Вследствие предположения, что u, v, w, u', v', w' постоянны, мы должны в уравнения (15) вместо T подставить выражение для V (14).

Положим

$$P=-\pi R^3R'^3\left[u'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial a}+v'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial b}+w'\frac{\partial\frac{1}{r_0}}{\partial c}\right];$$

тогда

$$V=u\frac{\partial P}{\partial a}+v\frac{\partial P}{\partial b}+w\frac{\partial P}{\partial c}.$$

Так как P не зависит от u, то отсюда следует, что

$$\frac{\partial V}{\partial u}=\frac{\partial P}{\partial a},$$

и затем далее, из того, что P есть функция $a-a'$, $b-b'$, $c-c'$, получим

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial u}-\frac{\partial V}{\partial a}=-\frac{\partial}{\partial a}\left(u'\frac{\partial P}{\partial a}+v'\frac{\partial P}{\partial b}+w'\frac{\partial P}{\partial c}\right).$$

Это выражение равно X. Поэтому $-X$, $-Y$, $-Z$ суть частные производные по a, b, c выражения

$$-\pi R^3 R'^3 \left[u'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w'^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2} + 2v'w' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b\, \partial c} + 2w'u' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c\, \partial a} + 2u'v' \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a\, \partial b} \right],$$

и, как это получится из подобного же вычисления, $-X'$, $-Y'$, $-Z'$ суть частные производные по a', b', c' выражения

$$-\pi R^3 R'^3 \left[u^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a^2} + v^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b^2} + w^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c^2} + 2vw \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial b\, \partial c} + 2wu \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial c\, \partial a} + 2uv \frac{\partial^2 \frac{1}{r_0}}{\partial a\, \partial b} \right].$$

Здесь следует обратить внимание на то, что сила, с которой один шар действует на другой, не зависит от скорости последнего, и что силы, с которыми шары взаимодействуют, вообще, не являются равными и противоположными. Это имеет место только тогда, когда скорости обоих шаров равны по величине и одинаковы или противоположны по направлению. Можно упомянуть, что сила, с которой второй шар действует на первый, имеет ту же величину, но противоположное направление с силой, с которой магнитная молекула, находящаяся на втором шаре, действует на молекулу первого, если магнитные оси обоих параллельны направлению движений второго шара и магнитные моменты их равны произведению его скорости на

$$R^3\sqrt{\pi} \text{ и } R'^3\sqrt{\pi}.$$

Если $R = R'$, $u = u'$, $v = v'$ и $w = -w'$, т. е. существует симметрия относительно плоскости xOy, то частицы жидкости, которые в некоторый момент лежат в этой плоскости симметрии, в ней же и остаются; тогда можно, не изменяя движения, принять эту плоскость за неподвижную стенку. Отсюда мы можем прийти к случаю движения одного шара вблизи плоской стенки. Установленные формулы дадут силу, с которой стенка действует на шар.

Не представит трудности подобным же образом вычислить силы, с которыми взаимодействуют шары в случае, когда u, v, w, u', v', w' переменны во времени. Если это имеет место, то можно найти среднюю силу, с которой действует один шар, совершающий малые колебания, на другой, покоящийся.

ЛЕКЦИЯ ДВАДЦАТАЯ

(Вихревое движение. Прямые и параллельные вихревые нити. Движение нескольких подобных нитей бесконечно малых сечений. Прямые вихревые нити, заполняющие сплошным образом цилиндр эллиптического сечения. Круговые вихревые нити с общей осью. Движение вихревого кольца и двух вихревых колец бесконечно малого сечения)

§ 1

До сих пор мы рассматривали только такое движение несжимаемой жидкости, при котором для каждой частицы существует потенциал скоростей. Допустим теперь, что для некоторых частиц это не имеет места, так что, согласно § 3 пятнадцатой лекции, в жидкости имеются *вихревые нити*. Мы будем предполагать, что вихревые нити целиком находятся в конечной области, что жидкость, наполняющая все пространство, покоится на бесконечности и что скорости u, v, w в точке (x, y, z) изменяются непрерывно с x, y, z. Производные u, v, w по x, y, z мы не будем считать непрерывными, но будем предполагать, что для них возможен конечный скачок на некоторых поверхностях.

Обозначим через ξ, η, ζ компоненты скорости вращения в точке (x, y, z); тогда по уравнению (13) пятнадцатой лекции будем иметь

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad (1)$$

$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Далее, вследствие несжимаемости жидкости, мы имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (2)$$

Прежде всего покажем, что u, v, w вполне определены, если ξ, η, ζ заданы всюду. Положим, что существуют две системы значений u, v, w, удовлетворяющих указанным условиям; разность их обозначим через u', v', w'. Тогда будем иметь

$$\frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} = 0,$$

т. е. u', v', w — частные производные некоторой функции, которую мы обозначим через φ. Далее, они непрерывны во всем пространстве и равны нулю в бесконечности. Для φ' уравнение (2) переходит в уравнение $\Delta\varphi' = 0$. Для определения функции φ', определенной пока только своими производными, мы можем еще дополнительно положить, что φ' должна быть всюду непрерывна; тогда φ' будет также и однозначной, так как пространство, которое мы рассматриваем, односвязно. Но по предложению, доказанному в § 7 шестнадцатой лекции, отсюда следует, что $\varphi' = \mathrm{const}$; следовательно, $u' = 0$, $v' = 0$, $w' = 0$.

Положим

$$u = \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{3}$$

где через U, V, W мы обозначим три новых неизвестных функции; тогда уравнение (2) будет удовлетворено. Уравнения (1) также будут удовлетворены, если положим, что

$$\Delta U = -2\xi, \; \Delta V = -2\eta, \; \Delta W = -2\zeta$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0. \tag{4}$$

Три первых из этих уравнений будут удовлетворены вследствие уравнения (11) шестнадцатой лекции, если положим

$$U = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\xi d\tau}{r}, \quad V = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\eta d\tau}{r}, \quad W = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\zeta d\tau}{r}, \tag{5}$$

где $d\tau$ — элемент заполненного вихревыми нитями объема, и r — расстояние его от точки, к которой относятся U, V, W. При этом U, V, W со своими первыми производными непрерывны во всем пространстве и равны нулю в бесконечности, откуда следует, что u, v, w также непрерывны и обращаются в нуль в бесконечности. Что последнее из уравнений (4) будет также удовлетворено, покажет следующее исследование. Из трех первых уравнений (4) мы получим

$$\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = -2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right);$$

поэтому, вследствие уравнений (1)

$$\Delta\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = 0.$$

Функция $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$ сверх того непрерывна во всем пространстве и обращается в нуль в бесконечности. Ее производные по x, y, z также всюду непрерывны, за исключением, может быть, поверхности, ограничивающей наполненное вихревыми нитями пространство. Надо будет доказать, что и здесь также эта функция не имеет скачка. Пусть ds — элемент этой поверхности, n_i — внутренняя, n_a — внешняя нормаль к ds; тогда, согласно предложению, выраженному уравнением (10) шестнадцатой лекции, имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial n_i \partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial n_a \partial x} = -2\xi \cos(n_i, x),$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial n_i \partial y} + \frac{\partial^2 V}{\partial n_a \partial y} = -2\eta \cos(n_i, y),$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial n_i \partial z} + \frac{\partial^2 W}{\partial n_a \partial z} = -2\zeta \cos(n_i, z),$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial n_a}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) = -2[\xi \cos(n_i, x) + \eta \cos(n_i, y) + \zeta \cos(n_i, z)].$$

Но, по данному в § 3 пятнадцатой лекции определению вихревой нити, выражение, стоящее в правой части этого уравнения, равно нулю.

Поэтому выражение

$$\frac{\partial}{\partial n_i}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}\right)$$

не получит скачка на поверхности, ограничивающей заполненное вихревыми нитями пространство. Согласно разъяснению, данному в § 7 шестой лекции, отсюда приходим к последнему из уравнений (4).

Этим доказано, что если для некоторого момента ξ, η, ζ даны для всех частиц вихревой нити, то из уравнений (3) и (5) можно найти скорости u, v, w всех частиц для того же момента. Из уравнений

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w$$

можно затем найти перемещения, получаемые какой-нибудь частицей жидкости, а следовательно, и элементом вихревой нити, в элемент времени dt. Но из перемещений, получаемых в это время вихревой частицей, по доказанному в § 3 пятнадцатой лекции предложению можно вычислить соответственные изменения ξ, η, ζ. Поэтому, если ξ, η, ζ заданы для момента времени t, то они определены также для момента времени $t + dt$; следовательно, движение жидкости вполне определено, если даны ξ, η, ζ только для одного момента.

Уравнения (3) и (5) показывают, что каждый элемент вихревой нити $d\tau$ дает определенные части значений компонент скорости u, v, w; эти части суть

$$\begin{aligned} &\frac{d\tau}{2\pi}\left(\zeta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} - \eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}\right), \\ &\frac{d\tau}{2\pi}\left(\xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} - \zeta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}\right), \\ &\frac{d\tau}{2\pi}\left(\eta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} - \xi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Если рассматривать эти величины как компоненты скорости, то направление их перпендикулярно к оси вращения элемента $d\tau$ и к линии r. Первое следует из того, что выражения (6), умноженные на ξ, η, ζ, дают сумму, обращающуюся в нуль; второе — из того, что эти выражения, умноженные на $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$, дают сумму, равную нулю. Нетрудно найти величину равнодействующей скорости; она равна

$$\frac{d\tau}{2\pi}\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}\,\frac{\sin\vartheta}{r^2},$$

где ϑ — угол между направлением оси вращения элемента $d\tau$ и направления линии r. Двузначность, которая остается в отношении направления скорости, исчезнет, если мы заметим, что это направление непрерывно изменяется с местом и вблизи рассматриваемой частицы вихревой нити определено направлением ее вращения. Можно упомянуть, что скорость, о которой идет речь, согласуется по величине и направлению с силой, с которой действует элемент электрического тока, находящийся на месте элемента $d\tau$ и имеющий направление оси вращения, на магнитный полюс, координаты которого суть x, y, z.

Мы выведем еще замечательные выражения для живой силы жидкости. Обозначим ее опять через T и положим, что плотность жидкости равна единице; тогда

$$T=\frac{1}{2}\int d\tau\,(u^2+v^2+w^2),\tag{7}$$

где интегрирование распространено на область, ограниченную замкнутой поверхностью, все точки которой лежат в бесконечности. Какова будет форма этой поверхности, безразлично для значения T, как покажет вычисление, которое мы сейчас сделаем. При посредстве уравнений (3) уравнение (7) дает

$$T=\frac{1}{2}\int d\tau\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{\partial V}{\partial z}\right)u+\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)v+\left(\frac{\partial V}{\partial x}-\frac{\partial U}{\partial y}\right)w\right\}.$$

Каждую из шести частей, на которые может быть разложен этот интеграл, мы проинтегрируем по частям по x, y или z. Функции U, V, W и u, v, w всюду непрерывны и в бесконечности будут бесконечно малыми. При этом, если R означает расстояние точки, к которой они относятся, от некоторой точки, лежащей на конечном расстоянии, то величины RU, RV, RW, и R^2u, R^2v, R^2w не будут бесконечно большими, если R бесконечно велико. Отсюда найдем

$$T=\frac{1}{2}\int d\tau\left\{U\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)+V\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)+W\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right\},$$

или по (1)

$$T=\int d\tau\,(U\xi+V\eta+W\zeta).\tag{8}$$

Обозначим через $d\tau'$ второй элемент объема, через ξ', η', ζ' — значения ξ, η, ζ для него и через r — расстояние между элементами $d\tau$ и $d\tau'$; тогда, вследствие уравнений (5), здесь можно будет также написать

$$T=\frac{1}{2\pi}\iint\frac{d\tau\,d\tau'}{r}(\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta').\tag{9}$$

§ 2

Прежде чем применять полученные в предыдущем параграфе уравнения, выведем соответственные уравнения для случая, когда движение всюду параллельно *одной* плоскости, плоскости xOy, и не зависит от координаты z рассматриваемой точки. В этом случае вычисления будут много проще, чем рассмотренные в § 1. Представим себе, что жидкость ограничена двумя стенками, параллельными плоскости xOy; между ними жидкость должна простираться в бесконечность и там находиться в покое.

При сделанном предположении уравнения (1) дают

$$\xi=0,\quad \eta=0$$

и
$$2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{10}$$

Из этого следует, что вихревые нити параллельны оси (z). Так как они здесь не изменяют своей длины, то, по доказанному в § 3 пятнадцатой лекции предложению, для какой-нибудь частицы жидкости ζ не должно зависеть от времени.

Пусть для некоторого момента даны значения ζ как функции x и y; тогда для того же момента мы найдем u и v из уравнения (10) и уравнения
$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x},$$
выражающего условие несжимаемости. Эти уравнения в связи с утверждением, что u и v всюду непрерывны и обращаются в нуль на бесконечности, определяют u и v однозначно и дают
$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial k}, \tag{11}$$
$$W = -\frac{1}{\pi}\int \zeta\, df \lg \rho,$$
где df — элемент плоскости xOy, к которому относится ζ, и ρ — расстояние его от точки (x, y) плоскости xOy. Оба утверждения легко могут быть доказаны при помощи разъяснения, сделанного в § 9 шестнадцатой лекции, совершенно таким же путем, каким соответственное предположение было доказано в предыдущем параграфе.

Если u и v определены из (11), то из уравнений
$$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v,$$
пользуясь тем, что ζ для каждой частицы остается постоянным, найдем движение частиц, к которым относятся x и y.

Уравнение (11) показывает, что каждая вихревая нить, поперечное сечение которой есть df, дает известные части значений u и v, а именно
$$-\frac{1}{\pi}\frac{\zeta\, df}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\frac{\zeta\, df}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

Если будем рассматривать их как компоненты некоторой скорости, то ее направление перпендикулярно к линии ρ, а величина равна
$$\frac{1}{\pi}\frac{\zeta\, df}{\rho}.$$

Положим расстояние между обеими стенками, параллельными плоскости xOy, ограничивающими жидкость, равным единице и найдем выражение для живой силы путем, аналогичным тому, каким следовали при вычислении живой силы в предыдущем параграфе; тогда T получится бесконечно большим, если только не будет
$$\int \zeta\, df = 0.$$ [36]

Определим величины x_0 и y_0 из уравнений
$$x_0 \int \zeta\, df = \int x\zeta\, df, \qquad y_0 \int \zeta\, df = \int y\zeta\, df. \tag{12}$$

Обозначим через ζ плотность массы, распределенной по элементам df плоскости xOy; тогда x_0 и y_0 будут координатами центра тяжести всех наличных масс. Мы будем называть точку с координатами x_0, y_0 *центром тяжести вихревых нитей*. Эта точка не изменяет своего положения, как показывает следующее исследование.

Так как ζ и df, относящиеся к одной и той же частице, не зависят от времени, то из уравнений (12) следует, что

$$\frac{dx_0}{dt}\int \zeta\, df = \int u\zeta\, df, \quad \frac{dy_0}{dt}\int \zeta\, df = \int v\zeta\, df.$$

Подставим здесь вместо u и v их значения из (11); тогда, если обозначим через df' второй элемент плоскости xOy и через ρ — расстояние между элементами df и df', получим

$$\frac{dx_0}{dt}\int \zeta\, df = -\frac{1}{\pi}\iint \zeta\zeta'\, df\, df'\, \frac{y-y'}{\rho^2},$$

$$\frac{dy_0}{dt}\int \zeta\, df = \frac{1}{\pi}\iint \zeta\zeta'\, df df'\, \frac{x-x'}{\rho^2}.$$

Каждый из этих двойных интегралов равен нулю.

В самом деле, каждая пара элементов площади, по которой производится интегрирование, встречается в нем дважды; первый раз элемент df считается за первый, а элемент df' за второй, и другой раз наоборот. Но при перестановке букв со штрихами и букв без штрихов интегрируемые величины получают противоположное значение, поэтому элементы каждого из двойных интегралов уничтожаются попарно.

Отсюда следует, что

$$\frac{dx_0}{dt} = 0, \quad \frac{dy_0}{dt} = 0,$$

т. е. центр тяжести вихревых нитей не изменяет своего места со временем.

§ 3

Полученные в предыдущем параграфе предложения мы применим теперь к случаю, когда имеется налицо только одна или несколько вихревых нитей бесконечно малого поперечного сечения. Допустим сперва, что существует только *одна* такая нить и положим для нее

$$\int \zeta\, df = m; \tag{13}$$

при этом мы будем рассматривать m как конечное; тогда ζ должно иметь бесконечно большое значение. Мы не предполагаем ζ постоянным, но знак его не должен меняться; тогда центр тяжести нити лежит всегда внутри или бесконечно близко к поперечному сечению. Для всех точек, лежащих на конечном расстоянии от вихревой нити, вследствие уравнений (11), имеем

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad W = -\frac{1}{\pi} m \lg \rho,$$

где начало ρ есть произвольная точка поперечного сечения нити. Величины W, u, v бесконечно близки к нити, а внутри нити, вообще, бесконечно велики, и значения их зависят от ее поперечного сечения и значения ζ для отдельных частиц этого поперечного сечения. Для центра тяжести нити, согласно предложению, доказанному в конце § 2, u и v равны нулю. Поэтому мы можем сказать, что вихревая нить остается на своем месте, хотя, вообще, поперечное сечение ее изменяется и ее центр тяжести совпадает в различные моменты с различными частицами жидкости. Каждая частица жидкости, находящаяся от этого центра тяжести на конечном расстоянии, описывает около него круг с постоянной скоростью

$$\frac{m}{\pi\rho}.$$

Пусть теперь имеется несколько точно таких нитей, как рассмотренная выше; $m_1, m_2, \ldots$ — соответственные значения интеграла (13) для них; $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots$ — координаты их центров тяжести в момент времени t; $\rho_1, \rho_2, \ldots$ — расстояния их до точки (x, y). Тогда для всех точек, лежащих на конечном расстоянии от вихревых нитей, будем иметь

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad W = -\frac{1}{\pi}\sum_i m_i \lg \rho_i,$$

где сумма взята по всем индексам. Центры тяжести этих нитей движутся; однако для центра тяжести каждой нити части функций u и v, которые происходят от этой нити, равны нулю. Из этого следует, что если мы отнесем u_1 и v_1 к центру тяжести нити с индексом 1, предполагая, что каждые две нити находятся на конечном расстоянии друг от друга, то будем иметь

$$u_1 = \frac{\partial W_1}{\partial y_1}, \quad v_1 = -\frac{\partial W_1}{\partial x_1}, \quad W_1 = -\frac{1}{\pi}(m_2 \lg \rho_{12} + m_3 \lg \rho_{13} + \ldots),$$

где $\rho_{12}, \rho_{13}, \ldots$ означают расстояния центра тяжести нити 1 от центров тяжести нитей 2, 3... Уравнения, составленные по этому образцу, можно написать так:

$$m_1 \frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial P}{\partial y_1}, \quad m_2 \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial P}{\partial y_2}, \ldots,$$

$$m_1 \frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad m_2 \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial x_2}, \ldots \tag{14}$$

$$P = -\frac{1}{\pi}\sum m_1 m_2 \lg \rho_{12},$$

где сумма взята по всем сочетаниям индексов по два.

Мы можем найти некоторые интегралы уравнений (14), как бы велико ни было число нитей. Значение P останется неизменным, если $x_1, x_2, \ldots$ или $y_1, y_2, \ldots$ мы увеличим на одну и ту же величину, откуда следует, что

$$\sum \frac{\partial P}{\partial x_1} = 0 \quad \text{и} \quad \sum \frac{\partial P}{\partial y_1} = 0,$$

т. е.

$$\sum m_1 x_1 = \text{const} \quad \text{и} \quad \sum m_1 y_1 = \text{const}. \tag{15}$$

Эти интегралы не дают ничего нового; они выражают уже доказанное предложение, что общий центр тяжести вихревых нитей остается в одном и том же положении.

Умножим уравнения первой строки в (14) на $dy_1, dy_2, \ldots$, второй строки на $-dx_1, -dx_2, \ldots$ и сложим их; тогда получим

$$dP = 0, \text{ т. е. } P = \text{const}. \tag{16}$$

Четвертый интеграл мы найдем, если вместо прямоугольных координат введем полярные следующим рассуждением. Пусть будет

$$x_1 = \rho_1 \cos\vartheta_1, \quad x_2 = \rho_2 \cos\vartheta_2, \ldots,$$

$$y_1 = \rho_1 \sin\vartheta_1, \quad y_2 = \rho_2 \sin\vartheta_2, \ldots.$$

Дифференциальные уравнения (14), вследствие такой подстановки, примут вид

$$m_1\rho_1 \frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \vartheta_1}, \quad m_2\rho_2 \frac{d\rho_2}{dt} = \frac{\partial P}{\partial \vartheta_2}, \ldots,$$

$$m_1\rho_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \rho_1}, \quad m_2\rho_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial \rho_2}, \ldots. \tag{17}$$

Из того обстоятельства, что P по (14) остается неизменным, если углы ϑ_1, $\vartheta_2, \ldots$ возрастут на одну и ту же величину, следует, что

$$\sum \frac{\partial P}{\partial \vartheta_1} = 0.$$

Поэтому уравнения верхней строки (17) дают

$$\sum m_1 \rho_1^2 = \text{const}. \tag{18}$$

Выведем одно следствие из уравнений (17) нижней строки. Пусть в то время как углы ϑ_1, $\vartheta_2, \ldots$ остаются неизменными, ρ_1, $\rho_2, \ldots$ увеличиваются в отношении $\frac{1}{n}$, так как $\lg \rho_1$, $\lg \rho_2, \ldots$ увеличится на $\log n$; тогда величины ρ_{12} возрастут также в отношении $1:n$, а величины $\log \rho_{12}$ — на $\lg n$.

При этом, по (14), возрастет и P на

$$-\frac{1}{\pi} \lg n \sum m_1 m_2.$$

Отсюда следует, что

$$\sum \frac{\partial P}{\partial \lg \rho_1} = -\frac{1}{\pi} \sum m_1 m_2,$$

или

$$\sum \rho_1 \frac{\partial P}{\partial \rho_1} = -\frac{1}{\pi} \sum m_1 m_2,$$

и поэтому вследствие уравнений (17)

$$\sum m_1 \rho_1^2 \, d\vartheta_1 = \frac{dt}{\pi} \sum m_1 m_2. \tag{19}$$

Если имеем *три* нити, то задача об определении их движения приводится к решению уравнений и выполнению квадратур. Именно, введем как искомые переменные ρ_1, ρ_2, ρ_3, $\vartheta_2 - \vartheta_1$, $\vartheta_3 - \vartheta_1$ и ϑ_1, умножим затем уравнения (15) сначала на $\cos \vartheta_1$, $\sin \vartheta_1$, а потом на $-\sin \vartheta_1$, $\cos \vartheta_1$ и каждый раз сложим их; тогда, решая полученные таким образом уравнения и уравнения (16) и (18), можно выразить четыре из переменных ρ_1, ρ_2, ρ_3, $\vartheta_2 - \vartheta_1$ через пятое $\vartheta_3 - \vartheta_1$. Положим, что остальные переменные выражены через ρ_1; тогда из (19) и уравнения

$$m_1 \rho_1 \, d\vartheta_1 = -\frac{\partial P}{\partial \rho_1} dt,$$

которое входит в систему (17), можно посредством квадратур найти ϑ_1 и t как функции ρ_1 *.

Очень легко определяется движение вихревых нитей, когда таковых имеется только *две*. Возьмем их центр тяжести за начало координат; тогда будем иметь

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{d\vartheta_2}{dt}.$$

Уравнения (16) и (18) дадут

$$\rho_1 = \text{const}, \quad \rho_2 = \text{const},$$

и из (19) следует, что

$$\frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{m_1 m_2}{m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2}. \tag{20}$$

---

* Vergl. Gzöbbli. Inaugural-Dissertation, Göttingen, 1877.

С такой угловой скоростью обе вихревые нити вращаются относительно их центра тяжести. При этом

$$m_1\rho_1 \mp m_2\rho_2 = 0,$$

где надо взять верхний или нижний знак в зависимости от того, будут ли m_1 и m_2 иметь одинаковые или противоположные знаки, т. е. в зависимости от того, вращаются ли обе нити в одинаковом или в противоположном направлениях. Из (20) следует, что

$$\rho_1 \frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{m_2}{\rho_2 \pm \rho_1},$$

$$\rho_2 \frac{d\vartheta_2}{dt} = \frac{1}{\pi} \frac{m_1}{\rho_2 \pm \rho_1}.$$

Особое исследование требуется для случая, когда

$$m_2 = -m_1.$$

Тогда центр тяжести нитей лежит в бесконечности, ρ_1 и ρ_2 бесконечно велики, но разность их длин конечна и равна расстоянию нитей друг от друга. Движение нитей происходит так, что они движутся с равными скоростями, перпендикулярными к прямой, соединяющей их. Эта скорость равна

$$\rho_1 \frac{\partial\vartheta_1}{\partial t} \text{ или } \frac{1}{\pi} \frac{m_2}{\rho_2 - \rho_1}.$$

Частицы, лежащие между обеими вихревыми нитями, двигаются в том же направлении. Частица, находящаяся посредине между нитями, движется с учетверенной скоростью нитей.

Частицы жидкости, лежащие в некоторый момент в плоскости, делящей пополам расстояние между нитями и пересекающей его перпендикулярно, остаются в этой плоскости. Поэтому рассматриваемое движение жидкости может существовать также, если плоскость будет заменена твердой стенкой. Тогда можно, рассматривая жидкость по одну сторону этой стенки, прийти к случаю одной вихревой нити, которая движется параллельно ограничивающей жидкость твердой стенке.

§ 4

Теперь мы приложим выведенные в § 2 уравнения к случаю, когда имеющиеся вихревые нити непрерывно сливаются одна с другой и образуют цилиндр конечного поперечного сечения. Допустим, что ζ имеет одно и то же значение для всех точек поперечного сечения и что последнее в некоторый момент времени есть эллипс. Вычисление покажет, что тогда все условия задачи будут удовлетворены при предположении, что это сечение будет *всегда* эллипсом, оси которого сохраняют постоянную длину и вращаются с постоянной угловой скоростью. Представим уравнение линии, ограничивающей поперечное сечение в момент времени t, в виде

$$F(x, y, t) = 0.$$

Так как эта линия всегда состоит из одних и тех же частиц жидкости то для нее, согласно разъяснению к уравнению (31) десятой лекции, должно быть также

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u\frac{\partial F}{\partial x} + v\frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

или, вследствие уравнений (11),

$$\frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}=0. \tag{21}$$

Положим теперь, что

$$F=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2-1,$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} — некоторые функции t. Введем наряду с системой координат x, y вторую — x', y', оси которой совпадают с главными осями эллипса, о котором идет речь. Представим уравнение его в виде

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

и положим

$$x'=x\cos\vartheta+y\sin\vartheta,\quad y'=-x\sin\vartheta+y\cos\vartheta; \tag{22}$$

тогда будем иметь

$$\begin{aligned} a^2b^2a_{11}&=b^2\cos^2\vartheta+a^2\sin^2\vartheta,\\ a^2b^2a_{12}&=(b^2-a^2)\cos\vartheta\sin\vartheta,\\ a^2b^2a_{22}&=b^2\sin^2\vartheta+a^2\cos^2\vartheta, \end{aligned} \tag{23}$$

где ϑ зависит от t, но a и b постоянные. Как найти определяемое (11) значение W, показано уравнением (10) восемнадцатой лекции; именно, мы будем иметь

$$W=\text{const}-\frac{\zeta}{a+b}(bx'^2+ay'^2)$$

для каждой точки внутри вихревых нитей или на их границе.

Отсюда для каждой такой точки имеем

$$W=\text{const}-\frac{\zeta}{a+b}(A_{11}x^2+2A_{12}xy+A_{22}y^2),$$

где

$$\begin{aligned} A_{11}&=b\cos^2\vartheta+a\sin^2\vartheta,\\ A_{12}&=(b-a)\cos\vartheta\sin\vartheta,\\ A_{22}&=b\sin^2\vartheta+a\cos^2\vartheta. \end{aligned} \tag{24}$$

Поэтому уравнение (21) будет выполнено не только на границе, но также для всякой точки поперечного сечения вихревых нитей, если только ϑ будет определено как функция t так, что будут удовлетворены три уравнения

$$(a+b)\frac{da_{11}}{dt}=4\zeta(a_{11}A_{12}-a_{12}A_{11}),$$

$$(a+b)\frac{da_{12}}{dt}=2\zeta(a_{11}A_{22}-a_{22}A_{11}),$$

$$(a+b)\frac{da_{22}}{dt}=4\zeta(a_{12}A_{22}-a_{22}A_{12}).$$

Уравнения (23) и (24) показывают, что это будет иметь место, если мы положим

$$\frac{d\vartheta}{dt}=2\zeta\frac{ab}{(a+b)^2}.$$

С такой скоростью эллиптический цилиндр, образованный вихревыми нитями, вращается вокруг своей оси, но при этом нити получают также относительные смещения. Мы найдем их, если координаты x', y', относящиеся к одной и той же частице, выразим через время. Посредством исследования, которое мы уже сделали по отношению к уравнениям (2) девятой лекции, и пользуясь тем, что компоненты скорости по осям x' и y' суть

$$\frac{\partial W}{\partial y'} \text{ и } -\frac{\partial W}{\partial x'},$$

из (22) найдем

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\partial W}{\partial y'} + y'\frac{d\vartheta}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt} = -\frac{\partial W}{\partial x'} - x'\frac{d\vartheta}{dt},$$

т. е.

$$\frac{dx'}{dt} = -\frac{2\zeta a^2}{(a+b)^2}y', \quad \frac{dy'}{dt} = \frac{2\zeta b^2}{(a+b)^2}x'.$$

Положим ради краткости

$$2\zeta\frac{ab}{(a+b)^2} = \lambda,$$

т. е. обозначим через λ угловую скорость, с которой вращается рассматриваемый эллиптический цилиндр; тогда интегралы этих уравнений будут

$$x' = a\varkappa\cos(\lambda t + \mu), \quad y' = b\varkappa\sin(\lambda t + \mu),$$

где $\varkappa$ и μ — постоянные интегрирования и определяют частицу жидкости, к которой относятся x' и y'; первое из них должно быть правильной дробью, так как проделанное вычисление годится только для частиц жидкости, образующих вихревые нити. Вычислим x и y по x' и y' при помощи уравнений (22) и выберем начало отсчета времени так, чтобы ϑ и t обращались в нуль одновременно. Тогда получим

$$x = a\varkappa\cos(\lambda t + \mu)\cos\lambda t - b\varkappa\sin(\lambda t + \mu)\sin\lambda t,$$

$$y = a\varkappa\cos(\lambda t + \mu)\sin\lambda t + b\varkappa\sin(\lambda t + \mu)\cos\lambda t,$$

или

$$x = \frac{a+b}{2}\varkappa\cos(2\lambda t + \mu) + \frac{a-b}{2}\varkappa\cos\mu,$$

$$y = \frac{a+b}{2}\varkappa\sin(2\lambda t + \mu) - \frac{a-b}{2}\varkappa\sin\mu.$$

Эти уравнения показывают, что каждая из рассматриваемых частиц жидкости движется с постоянной скоростью по окружности и описывает ее за время $\frac{\pi}{\lambda}$. Радиусы и центры этих окружностей для различных точек различны.

Если одна из главных осей может быть рассматриваема как бесконечно большая сравнительно с другой, то λ обращается в нуль; следовательно, линия, в которую превращается эллипс, не вращается. Если $a = b$, то $\lambda = \frac{\zeta}{2}$; частицы круга, в который тогда переходит эллипс, вращаются без изменения своего относительного расположения вокруг центра с угловой скоростью ζ.

§ 5

Приложим теперь выведенные в § 1 уравнения к случаю, когда все вихревые линии суть круги, имеющие общей осью ось z. Если это состояние осуществляется в некоторый момент времени, то оно будет иметь место всегда. Положим

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

тогда форма и длина каждой вихревой линии в какой-нибудь момент времени определится двумя переменными ρ и z. Траектория частицы жидкости лежит в плоскости, проходящей через ось z, и ее уравнение есть уравнение между ρ и z.

Положим

$$x = \rho\cos\vartheta, \quad y = \rho\sin\vartheta,$$

тогда при сделанном предположении

$$\xi = -\sigma\sin\vartheta, \quad \eta = \sigma\cos\vartheta, \quad \zeta = 0,$$

где σ не зависит от ϑ. Из последнего уравнения и последнего из уравнений (5) будем иметь

$$W = 0$$

и, следовательно, по (3) получаем

$$u = -\frac{\partial V}{\partial z}, \quad v = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}. \tag{25}$$

Обозначим через $d\tau'$ элемент объема, через σ', ϑ', ρ', z' — значения σ, ϑ, ρ, z для него и через r — его растояние от точки (ϑ, ρ, z) или (x, y, z); тогда из (5) следует, что

$$U = -\frac{1}{2\pi}\int\frac{\sigma'\sin\vartheta'\,d\tau'}{r}, \quad V = \frac{1}{2\pi}\int\frac{\sigma'\cos\vartheta'\,d\tau'}{r},$$

причем имеем

$$d\tau' = \rho'\,d\rho'\,dz'\,d\vartheta',$$

$$r^2 = (z'-z)^2 + \rho'^2 + \rho^2 - 2\rho'\rho\cos(\vartheta' - \vartheta).$$

Введем вместо ϑ' величину

$$\varphi = \vartheta' - \vartheta$$

и заметим, что по φ можно будет интегрировать от нуля до 2π и что

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(z'-z)^2 + \rho'^2 + \rho^2 - 2\rho'\rho\cos\varphi}} = 0;$$

тогда получим

$$U = -S\sin\vartheta, \quad V = S\cos\vartheta, \tag{26}$$

где S не зависит от ϑ. Положим

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(z'-z)^2 + \rho'^2 + \rho^2 - 2\rho'\rho\cos\varphi}} = R\,[(z'-z), \rho', \rho], \tag{27}$$

тогда будем иметь

$$S = \frac{1}{2\pi}\iint\sigma'\rho'\,d\rho'\,dz' R. \tag{28}$$

Обозначим еще через s компоненту скорости по направлению, в котором ρ возрастает, т. е. положим

$$u = s\cos\vartheta, \quad v = s\sin\vartheta;$$

тогда из уравнений (25) и (26) получаем для обеих определяемых компонент скорости s и w:

$$s\rho = -\frac{\partial (S\rho)}{\partial z}, \quad w\rho = \frac{\partial (S\rho)}{\partial \rho}. \tag{29}$$

При этом для каждой частицы жидкости будем иметь

$$s = \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Для живой силы жидкости найдем из (8):

$$T = \int S\sigma d\tau,$$

или

$$T = 2\pi \int S\rho\sigma df, \tag{30}$$

или также

$$T = \int\int R\rho'\rho\sigma'\sigma df' df,$$

где df' и df — поперечные сечения имеющихся вихревых нитей.

Что касается значения функции R, то, положив

$$\varphi = \pi - 2\psi,$$

из (27) найдем, что

$$R = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-2\sin^2\psi)\,d\psi}{\sqrt{(z'-z)^2+(\rho'+\rho)^2-4\rho\rho'\sin^2\psi}},$$

или, если положим

$$k^2 = \frac{4\rho'\rho}{(z'-z)^2+(\rho'+\rho)^2},$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}, \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi,$$

то

$$R = \frac{2}{\sqrt{\rho\rho'}}\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)K - \frac{2}{k}E\right]. \tag{31}$$

Выполним теперь исследование, аналогичное тому, которое мы произвели в § 2 в связи с уравнением (12). Это последнее существенно основывалось на том, что функция

$$\lg\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}$$

обладает свойством иметь для производных по x и y противоположные значения, если переставить буквы со штрихами и буквы без штрихов; отсюда следует, что

$$0 = \int\int \rho\rho' \frac{\partial R}{\partial z} \sigma\sigma' df df',$$

или, на основании уравнения, которое получим из (28) дифференцированием по z,

$$0 = \int \rho \frac{\partial S}{\partial z} \sigma df.$$

По (29) это уравнение можно представить в виде

$$\int \rho s\sigma df = 0, \text{ или } \int \rho \frac{d\rho}{dt} \sigma df = 0$$

или

$$\int \rho^2 \sigma df = \text{const}, \tag{32}$$

так как σdf для каждой вихревой нити не изменяется со временем.

Это уравнение влечет за собой другое. Прологарифмируем выражение для k^2 и от полученного уравнения возьмем частные производные по ρ и z; тогда найдем

$$\begin{aligned} \frac{2}{k} \rho \frac{\partial k}{\partial \rho} &= \frac{(z'-z)^2 + \rho'^2 - \rho^2}{(z'-z)^2 + (\rho' + \rho)^2}, \\ \frac{2}{k} z \frac{\partial k}{\partial z} &= \frac{2z(z'-z)}{(z'-z)^2 + (\rho' + \rho)^2}, \end{aligned} \tag{33}$$

следовательно,

$$\frac{2}{k}\left(\rho \frac{\partial k}{\partial \rho} + z \frac{\partial k}{\partial z}\right) = \frac{z'^2 - z^2 + \rho'^2 - \rho^2}{(z'-z)^2 + (\rho' + \rho)^2}.$$

Так как k не изменяется от перестановки букв со штрихами и букв без штрихов, то отсюда заключаем, что выражение

$$\rho \frac{\partial k}{\partial \rho} + z \frac{\partial k}{\partial z}$$

получает при такой перестановке противоположное значение. На основании (31) такое же свойство имеет выражение

$$\frac{\partial R}{\partial k}\left(\rho \frac{\partial k}{\partial \rho} + z \frac{\partial k}{\partial z}\right),$$

или, что то же самое, так как

$$\frac{\partial R}{\partial \rho} = \frac{\partial R}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial \rho} - \frac{1}{2} \frac{R}{\rho}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial z},$$

такое же свойство имеет выражение

$$\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + z \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{2} R.$$

Отсюда следует, что

$$\int\int \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} + z \frac{\partial R}{\partial z} + \frac{1}{2} R\right) \rho' \rho \sigma \sigma' df df' = 0,$$

или, при посредстве уравнения (28), также

$$\int \left(\rho \frac{dS}{\partial \rho} + z \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{1}{2} S\right) \rho \sigma df = 0.$$

Так как

$$\rho \frac{\partial S}{\partial \rho} = \frac{\partial (S\rho)}{\partial \rho} - S,$$

то отсюда по (29) и (30) получаем

$$\int \left(w\rho - sz\right) \rho \sigma df = \frac{T}{4\pi},$$

или, наконец,

$$\int \left(\rho \frac{dz}{dt} - z \frac{d\rho}{dt}\right) \rho \sigma df = \frac{T}{4\pi} \tag{34}$$

Прибавим сюда еще уравнение

$$T = \text{const}; \tag{35}$$

оно выражает закон сохранения живой силы, который имеет место в настоящем случае.

§ 6

Теперь мы исследуем случай, когда имеется только одна вихревая нить бесконечно малого поперечного сечения. Пусть размеры поперечного сечения будут бесконечно малыми длинами порядка ε; положим

$$m = \int \sigma df \tag{36}$$

и допустим, что m конечно. Тогда σ (мы предположим, что оно всюду имеет один и тот же знак) будет порядка $\frac{1}{\varepsilon^2}$. Далее, пусть будут

$$\rho = \rho_0, \quad z = z_0$$

уравнения окружности, о которой мы пока предположим только, что она лежит внутри или бесконечно близко к вихревой нити; ниже мы определим ее точнее. Тогда для всех точек, которые лежат на конечном расстоянии от этой окружности, по (28) имеем

$$S\rho = \frac{m}{2\pi}\rho\rho_0 R(z - z_0, \rho, \rho_0);$$

отсюда можно при помощи (29) и (31) вычислить скорости s и w для этих точек. Но ρ_0 и z_0 суть функции времени; их можно найти, если определим движение любой частицы жидкости; здесь именно необходимо рассмотреть такие частицы, которые лежат бесконечно близко к окружности (ρ_0, z_0), т. е. на вихревой нити.

Для таких частиц S, s и w бесконечно велики; посмотрим, какого порядка они должны быть.

Вследствие уравнения (28) величина S внутри вихревой нити того же порядка, как и R для значений ρ, z, ρ', z', соответствующих двум окружностям, расстояние между которыми порядка ε. Положим

$$k_1^2 = 1 - k^2 = \frac{(z'-z)^2 + (\rho'-\rho)^2}{(z'-z)^2 + (\rho'+\rho)^2};$$

отсюда заключаем, что S того же порядка, как R, для значения k_1, которое имеет порядок ε. Чтобы найти его, заметим сперва, что если k_1 бесконечно мало, то, пренебрегая бесконечно малыми, имеем

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\psi d\psi = 1.$$

Напишем далее выражение

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\psi'} \frac{d\psi}{\sqrt{\cos^2\psi + k_1^2\sin^2\psi}} + \int_0^{\psi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\sin^2\varphi + k_1^2\cos^2\varphi}}$$

и допустим, что ψ' бесконечно мало, но бесконечно велико сравнительно с k_1. Тогда, с точностью до бесконечно малых, имеем

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\psi'} \frac{d\psi}{\cos\psi} + \int_0^{\psi'} \frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2+k_1^2}}.$$

Отсюда следует, что

$$K = \lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\psi'}{2}\right) + \lg\frac{\psi'+\sqrt{\psi'^2+k_1^2}}{k_1},$$

т. е. равно

$$-\lg\frac{\psi'}{2} + \lg\frac{2\psi'}{k_1};$$

таким образом

$$K = \lg\frac{4}{k_1}.$$

Поэтому S внутри вихревой нити будет порядка $\lg\varepsilon$. Того же порядка, согласно уравнению (30), будет и живая сила T. Чтобы определить из уравнений (29) и (28) порядок величин s и w, мы должны найти порядок $\frac{\partial R}{\partial\rho}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$, т. е. порядок $\frac{\partial R}{\partial k}$ при бесконечно малом k_1. Из уравнений, определяющих K и E, и из уравнения

$$0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-2\sin^2\psi+k^2\sin^4\psi}{(1-k^2\sin^2\psi)^{3/2}}\,d\psi,$$

которое получается из тождества

$$d\,\frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \frac{1-2\sin^2\psi+k^2\sin^4\psi}{(1-k^2\sin^2\psi)^{3/2}},$$

легко найдем, что

$$\frac{dK}{dk} = \frac{E-k_1^2K}{kk_1^2}, \quad \frac{dE}{dk} = -\frac{K-E}{k}.$$

Из этого следует, что если k_1 бесконечно мало, то $\frac{\partial R}{\partial k}$ будет порядка $\frac{1}{k_1^2}$. Так как, согласно (33), производные $\frac{\partial k}{\partial\rho}$ и $\frac{\partial k}{\partial z}$ порядка k_1, то $\frac{\partial R}{\partial\rho}$ и $\frac{\partial R}{\partial z}$ будут порядка $\frac{1}{k_1}$.

Внутри вихревого кольца k_1 имеет порядок ε; уравнения (29) и (28) приводят нас к заключению, что здесь скорости s и w будут порядка $\frac{1}{\varepsilon}$.

Теперь мы определим точнее значения величин ρ_0 и z_0, которые уже введены, но еще не вполне определены. Мы определим их уравнениями

$$\rho_0^2\int\sigma df = \int\rho^2\sigma df,$$
$$z_0\int\rho^2\sigma df = \int z\rho^2\sigma df. \qquad (37)$$

Так как мы предположили, что σ всюду имеет один и тот же знак, то в этом случае окружность (ρ_0, z_0) лежит внутри вихревой нити или бесконечно близко к ней. Из (32) и уже многократно использованного обстоятельства, что σdf не зависит от времени, следует, что ρ_0 также не изменяется со временем. Но величина z_0 изменяется со временем; посмотрим, каким образом. Из уравнений (37) и (36) следует, что

$$m\rho_0^2 z_0 = \int z\rho^2 \sigma df,$$

и отсюда далее

$$m\rho_0^2 \frac{dz_0}{dt} = \int \rho^2 \frac{dz}{dt} \sigma df + 2 \int z\rho \frac{d\rho}{dt} \sigma df.$$

Поэтому уравнение (34) можно написать так:

$$m\rho_0^2 \frac{dz_0}{dt} = \frac{T}{4\pi} + 3 \int z\rho \frac{d\rho}{dt} \sigma df. \tag{38}$$

Первый член правой части этого уравнения, как мы видели, есть бесконечно большое постоянное порядка $\lg \varepsilon$; второй член конечен, как это следует из уравнения (32), в связи с тем, что разность значений z, заключающихся в них, порядка ε, но $\frac{d\rho}{dt}$ порядка $\frac{1}{\varepsilon}$. Из этого следует, что $\frac{dz_0}{dt}$ — величина бесконечно большая, порядка $\lg \varepsilon$, и если пренебречь конечными величинами по сравнению с бесконечно большими порядка $\lg \varepsilon$, — постоянная.

Поэтому вихревая нить, сохраняя тот же самый радиус, движется поступательно в направлении оси z со скоростью $\frac{dz_0}{dt}$. Здесь скорость имеет тот же знак, что и m или σ; это следует из уравнения (38), так как T — величина положительная. Это предложение мы можем выразить еще другим способом. По разъяснению, сделанному относительно выражения (6), жидкость течет через все части площади круга, ограниченной вихревой нитью, которые находятся от нее на конечном расстоянии в направлении оси z или противоположном в зависимости от знака σ. Из определения σ, данного в начале § 5, следует, что в точках, для которых угол, обозначенный там через ϑ, обращается в нуль, будет $\sigma = \eta$. Из определения положительного вращения, сделанного в § 2 пятой лекции, вытекает, что движение происходит в направлении оси z, если только η положительно при $\vartheta = 0$. Из этого следует, что вихревая нить движется в том же направлении, в котором жидкость течет через ограниченную ею площадь круга.

Эти результаты были впервые получены Гельмгольцем в его сочинении «Об интегралах уравнений гидродинамики, соответствующих вихревым движениям» (Borchardt's Journal, Bd. 55). Он заключает его следующим замечанием:

«Мы можем теперь в общих чертах рассмотреть также, как две кольцеобразные вихревые нити, имеющие одну и ту же ось, будут влиять друг на друга, так как каждая, кроме собственного передвижения, следует еще движению частиц жидкости, вызываемому другой нитью. Если они имеют одинаковое направление вращения, то обе передвигаются в одну и ту же сторону; движущаяся впереди нить будет расширяться и замедлять свое движение, следующая же за ней суживается и передвигается быстрее. Если скорости передвижения не слишком различны, то второе кольцо догонит первое и пройдет сквозь него. Затем то же явление повторяется с первым, т. е. кольца будут поочередно проходить одно через другое.

Если вихревые нити имеют равные радиусы и равные, но противоположные скорости вращения, то они будут приближаться друг к другу под взаимным влиянием; наконец, когда они подойдут весьма близко друг к другу, то взаимное сближение их будет происходить все слабее, расширение же, напротив, будет происходить с возрастающей скоростью. Если обе вихревые нити вполне симметричны, то для частиц, лежащих в срединной плоскости, скорость, параллельная оси, равна нулю. Поэтому, не возмущая движения, мы можем вообразить здесь твердую стенку, и таким образом получим случай одного вихревого кольца, направляющегося к твердой стенке.

Я замечу еще, что движения круглых вихревых колец легко наблюдать в действительности, если быстро продвинуть на небольшое расстояние параллельно поверхности воды на половину погруженный в нее кружок (или имеющей приблизительно форму полукруга кончик ложки) и затем быстро его вынуть; тогда в жидкости остаются половины вихревых колец, ось которых лежит на свободной поверхности. Таким образом, свободная поверхность образует плоскость, проходящую через ось и ограничивающую массу воды, что не вызывает никакого существенного изменения в движении. Вихревые кольца передвигаются поступательно, расширяются или суживаются под влиянием других вихревых колец совершенно так же, как мы это вывели теоретически».

ЛЕКЦИЯ ДВАДЦАТЬ ПЕРВАЯ

(Функции комплексного переменного. Их применение к нахождению действительного движения жидкостей. Подобное в малых частях отображение некоторой части плоскости на другую. Линейные функции. Многозначные функции. Изображение одного серпа на другом)

§ 1

Один из наиболее интересных случаев движения жидкости представляют жидкие струи, образующиеся при истечении жидкости. До сих пор не удалось решить вычислением задачу о таком движении для случая, когда потенциал скоростей, существование которого предполагается, зависит от трех координат x, y, z, но это вычисление возможно в предположении, что потенциал скоростей есть функция только x и y. Упрощение, которое получают гидродинамические задачи при таком предположении, мы уже видели в одном примере предыдущей лекции. Главнейшее основание этого упрощения лежит в том, что уравнение в частных производных, которому удовлетворяет потенциал скоростей,

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$$

удовлетворяется действительной и также мнимой частью функции комплексного переменного $x+iy$.

Положим

$$z=x+iy$$

и составим какое-нибудь аналитическое выражение, содержащее z, которое обозначим через Z и которое, кроме действительных величин и z, может содержать еще i. Преобразуем его по правилам, известным для действительных величин, считая i за неизвестное действительное постоянное, но при этом положим

$$i^2=-1.$$

Как известно, таким образом можно привести Z к виду

$$Z=X+iY,$$

где X и Y суть действительные функции x и y. При этом z и Z называются комплексными величинами, x и X, iy и iY — их действительными и мнимыми частями, Z — функцией z. Две комплексные величины называются равными, если равны между собой их действительные и мнимые части. Взятый со знаком « + » корень $\sqrt{x^2+y^2}$ называется модулем z.

При этих обозначениях имеем

$$\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial z},\ \frac{\partial Z}{\partial y}=i\frac{\partial Z}{\partial z},\quad \text{поэтому}\quad i\frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial Z}{\partial y},$$

т. е.

$$i\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y};$$

следовательно,

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\frac{\partial Y}{\partial y},\ \frac{\partial Y}{\partial x}=-\frac{\partial X}{\partial y}. \qquad (1)$$

Эти два уравнения мы можем рассматривать как определение функции Z z^{37}, более общее, чем приведенное выше. Из них следует, что

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 X}{\partial y^2}=0,\ \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}=0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial y}=0.$$

Последнее уравнение выражает, что линии $X=\mathrm{const}$ и линии $Y=\mathrm{const}$ взаимно ортогональны.

На основании сделанного разъяснения мы найдем возможное движение жидкости, если возьмем для Z любое выражение, содержащее z, и за потенциал скоростей φ примем одну из двух величин X и Y; тогда другая из них будет иметь также простое значение. Обозначим ее через ψ; тогда

$$\psi=\mathrm{const}$$

будет уравнением линий тока.

Рассмотрим некоторые простые примеры. Возьмем сперва $Z=\lg z$; следовательно, $z=e^Z$.

Положим

$$x=r\cos\vartheta,\ y=r\sin\vartheta,$$

откуда следует, что

$$r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)=e^X(\cos Y+i\sin Y),$$

или

$$X=\lg r,\ Y=\vartheta,$$

где под $\lg r$ понимается действительное значение этой величины.

Отсюда мы имеем или

$$\varphi=\lg r \text{ и } \psi=\vartheta,$$

или

$$\varphi=\vartheta \text{ и } \psi=\lg r.$$

В первом случае линиями тока будут проходящие через точку $z=0$ прямые, а линиями равного потенциала скоростей — описанные вокруг этой точки круги; во втором случае имеем обратное. В обоих случаях скорость равна $\frac{1}{r}$. Две линии тока всегда можно заменить твердыми стенками без изменения движения между ними. Поэтому выведенные формулы пригодны, если две из прямых, проходящих через точку $z=0$, или два из описанных вокруг этой точки как центра круга будут заменены твердыми стенками.

Чтобы получить второй пример, возьмем

$$Z=\lg\frac{z-c_1}{z-c_2},$$

где через c_1 и c_2 обозначены две комплексные постоянные. Положим

$$c_1=a_1+ib_1,\quad c_2=a_2+ib_2$$

и

$$x - a_1 = r_1 \cos \vartheta_1, \quad x - a_2 = r_2 \cos \vartheta_2,$$

$$y - b_1 = r_1 \sin \vartheta_1, \quad y - b_2 = r_2 \sin \vartheta_2,$$

откуда следует, что

$$X = \lg \frac{r_1}{r_2}, \quad Y = \vartheta_1 - \vartheta_2.$$

Положим $\varphi = X$, $\psi = Y$; тогда, как покажет элементарное геометрическое исследование, линиями тока будут дуги кругов, соединяющих точки $z = c_1$ и $z = c_2$. К одной из этих двух точек жи кость притекает, а из другой вытекает. Линиями равного потенциала будут круги, описанные, как на диаметре, на отрезке между двумя точками, расположенными гармонически относительно точек $z = c_1$ и $z = c_2$. Какие-нибудь две линии тока, например обе части проходящего через эти точки круга, могут быть заменены твердой стенкой. Положим наоборот, что $\varphi = Y$, $\psi = X$; тогда обе системы кругов поменяются ролями.

Мы придем к частному случаю течения, рассмотренного в семнадцатой лекции, если положим

$$Z = \arcsin z; \text{ следовательно, } z = \sin Z.$$

Тогда

$$x = \sin X \frac{e^{Y} + e^{-Y}}{2},$$

$$y = \cos X \frac{e^{Y} - e^{-Y}}{2},$$

откуда следует, что

$$\frac{x^2}{\sin^2 X} - \frac{y^2}{\cos^2 X} = 1,$$

$$\frac{4x^2}{(e^{Y} + e^{-Y})^2} + \frac{4y^2}{(e^{Y} + e^{-Y})^2} = 1.$$

Уравнения $X = \text{const}$ и $Y = \text{const}$ представляют здесь систему софокусных гипербол и эллипсов, фокусы которых имеют координаты $x = \pm 1$, $y = 0$.

§ 2

В уравнении (1) предыдущего параграфа мы дали определение того, что $X + iY$ или Z есть функция $x + iy$ или z, которое не предполагает, что аналитическое выражение для Z задано. Исходя из этого, мы докажем теперь, что если Z есть функция z, то также и наоборот, z есть функция Z.

Положим

$$M^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}; \tag{2}$$

все эти выражения равны между собой вследствие уравнения (1). Решая тождественные уравнения

$$1 = \frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}, \quad 0 = \frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$0=\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}, \quad 1=\frac{\partial y}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y},$$

получаем

$$\frac{\partial x}{\partial X}=\frac{1}{M^2}\frac{\partial X}{\partial x}, \qquad \frac{\partial y}{\partial X}=-\frac{1}{M^2}\frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial x}{\partial Y}=-\frac{1}{M^2}\frac{\partial X}{\partial y}, \quad \frac{\partial y}{\partial Y}=\frac{1}{M^2}\frac{\partial Y}{\partial y},$$

и отсюда следует, на основании уравнения (1), что

$$\frac{\partial x}{\partial X}=\frac{\partial y}{\partial Y} \text{ и } \frac{\partial x}{\partial Y}=-\frac{\partial y}{\partial X},$$

чем и доказано высказанное утверждение.

Если $Z=X+iY$ и $Z'=X'+iY'$ суть функции z, то ZZ' также есть функции z. Действительно,

$$ZZ'=XX'-YY'+i(XY'+X'Y);$$

далее

$$\frac{\partial(XX'-YY')}{\partial x}=X\frac{\partial X'}{\partial x}+X'\frac{\partial X}{\partial x}-Y\frac{\partial Y'}{\partial x}-Y'\frac{\partial Y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial(XY'+X'Y)}{\partial y}=X\frac{\partial Y'}{\partial y}+X'\frac{\partial Y}{\partial y}+Y\frac{\partial X'}{\partial y}+Y'\frac{\partial X}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(XX'-YY')}{\partial y}=X\frac{\partial X'}{\partial y}+X'\frac{\partial X}{\partial y}-Y\frac{\partial Y'}{\partial y}-Y'\frac{\partial Y}{\partial y},$$

$$\frac{\partial(XY'-X'Y)}{\partial x}=X\frac{\partial Y'}{\partial x}+X'\frac{\partial Y}{\partial x}+Y\frac{\partial X'}{\partial x}+Y'\frac{\partial X}{\partial x},$$

и отсюда, на основании уравнений (1) и уравнений

$$\frac{\partial X'}{\partial x}=\frac{\partial Y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial Y'}{\partial x}=-\frac{\partial X'}{\partial y},$$

следует:

$$\frac{\partial(XX'-YY')}{\partial x}=\frac{\partial(XY'+X'Y)}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial(XY'+X'Y)}{dx}=-\frac{\partial(XX'-YY')}{\partial y}.$$

Рассмотрим теперь производную

$$\frac{dZ}{dz}, \text{ т. е. } \frac{dX+idY}{dx+idy};$$

она равна

$$\frac{\left(\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial X}{\partial y}+i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)dy}{dx+idy},$$

или, по (1),

$$\frac{\partial X}{\partial x}+i\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Следовательно, производная не зависит от dx и dy и является функцией x и y. Она есть функция z, в чем убедимся, если возьмем частные производные уравнений (1) по x.

Если в некоторой конечной части плоскости xOy величина Z есть однозначная функция z, т. е. X и Y — однозначные и непрерывные функции x и y, удовлетворяющие уравнениям (1), то, как мы покажем, $\frac{dZ}{dz}$ есть также однозначная непрерывная функция z в той же области. Пусть X и Y будут две однозначные непрерывные функции x и y для некоторой части плоскости xOy, элемент которой обозначим через df; пусть dl — элемент граничной линии этой части, n — направленная внутрь нормаль к dl. Тогда, согласно предложению, неоднократно применявшемуся нами, имеем

$$\begin{aligned} \int df\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}\right) &= -\int dl\,[X\cos(nx)-Y\cos(ny)], \\ \int df\left(\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial Y}{\partial x}\right) &= -\int dl\,[X\cos(ny)+Y\cos(nx)]. \end{aligned} \tag{3}$$

Преобразуем прежде всего эти уравнения, вводя вместо двух углов (nx) и (ny) *один* угол. Будем считать вращение прямой положительным, если оно происходит в том же направлении, в котором должна быть повернута на прямой угол ось x, чтобы совпасть с осью y. Обозначим через ν угол, на который должна быть повернута в положительном направлении прямая, параллельная оси x, для того, чтобы прийти в положение, параллельное нормали n. Тогда получим

$$\cos(nx)=\cos\nu, \quad \cos(ny)=\sin\nu.$$

Подставим эти значения $\cos(nx)$ и $\cos(ny)$ в уравнения (3), полагая, что Z, т. е. $X+iY$, есть функция z, т. е. $x+iy$, причем левые части уравнений обращаются в нуль; умножим второе на i и сложим его с первым. Тогда получим

$$0=\int Z\,dl\,(\cos\nu+i\sin\nu).$$

Обозначим через dz приращение, получаемое z, когда точка (x, y), или точка z, как мы будем ее называть, проходит элемент dl в направлении, которое получила бы нормаль n, повернутая на прямой угол в отрицательном направлении. Тогда будем иметь

$$dz=dl\left[\cos\left(\nu-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\nu-\frac{\pi}{2}\right)\right]=-i\,dl\,(\cos\nu+i\sin\nu), \tag{4}$$

откуда следует, что

$$0=\int Z\,dz. \text{[38]} \tag{5}$$

Пусть

$$c=a+ib,$$

где через a и b обозначены координаты точки поверхности, элемент которой мы назвали df. Подставим в уравнение (5), что допустимо, $\frac{Z}{z-c}$ вместо Z, и приложим его этой к площади, за исключением круга, описанного бесконечно малым радиусом вокруг точки c.

На периферии этого круга имеем

$$z-c=r(\cos\nu+i\sin\nu),$$

и отсюда по (4) получаем

$$\frac{dz}{z-c}=-i\,\frac{dl}{r},$$

следовательно,

$$\int\frac{Z}{z-c}\,dz=-i2\pi Z_c,$$

где Z_c есть значение Z в точке c. Отсюда следует, наконец, что

$$Z_c = -\frac{1}{i2\pi}\int \frac{Z}{z-c}\,dz,^{39} \tag{6}$$

где интегрирование должно быть распространено на граничную линию рассмотренной выше области z в направлении, указанном уравнением (4). Направление это мы определим еще другим образом. Вообразим, что мы находимся по плоскости xOy и, глядя вдоль положительного направления оси x, видим положительное направление оси y *слева*. Тогда направление интегрирования должно быть таким, чтобы во время хода границы области z сама область z оставалась *слева*. Это можно выразить еще иначе, если область z представляет *односвязную* площадь, т. е. такую, которая может быть ограничена единственной, не пересекающей себя, замкнутой линией. Вообразим прямую линию, проведенную от точки такой площади к точке ее границы, и заставим эту последнюю точку совершить полный обход границы в том или другом направлении; тогда прямая линия поворачивается на угол 2π в положительном или отрицательном направлении. Мы будем называть обход *положительным*, если линия поворачивается на 2π в положительном направлении. Тогда интегрирование в (6) должно соответствовать положительному обходу. Если область z не представляет односвязной площади, но граница ее состоит из нескольких замкнутых линий, то ее можно обратить в односвязную *поперечными сечениями*, т. е. линиями, из которых каждая соединяет две точки двух замкнутых граничных линий. В этом случае обе стороны каждого поперечного сечения следует рассматривать как принадлежащие границам области; при этом входящий в (6) интеграл не изменится, так как $\frac{Z}{z-c}$ —однозначная непрерывная функция z до тех пор, пока не будет $z=c$.

Уравнение (6), которое мы могли бы вывести из уравнения (28) шестнадцатой лекции, доказывает высказанное утверждение, что $\frac{dZ}{dz}$ в той же области, как Z, есть однозначная непрерывная функция z. Мы присоединим к уравнению (5) еще одно следствие. Пусть будет Z непрерывная однозначная функция z в односвязной части плоскости z. Вообразим произвольную линию, проведенную из некоторой точки z_0, или (x_0, y_0), к точке z той же области и рассмотрим интеграл

$$\int Z\,dz = W = U + iV,$$

взятый по этой линии в направлении от z_0 к z. Заменим эту линию какой-нибудь другой, проведенной от z_0 к z; тогда мы можем применить уравнение (5) к площади, ограниченной этими двумя линиями. Мы получим, что для обеих линий W имеет одно и то же значение, следовательно, оно не зависит от выбора линии. Поэтому W есть функция x и y, следовательно, W есть функция z, так как мы имеем

$$U = \int_{x_0,y_0}^{x,y} (X\,dx - Y\,dy),$$

$$V = \int_{x_0,y_0}^{x,y} (X\,dy + Y\,dx),$$

и отсюда

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = X,\quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = -Y.$$

§ 3

Обозначим через x и y прямоугольные координаты точки некоторой плоскости; мы можем также рассматривать X и Y как прямоугольные координаты точки другой плоскости. Если Z будет функцией z, то также z должно быть функцией Z; в соответственных друг другу областях z и Z, которые мы будем рассматривать, Z должно быть однозначной непрерывной функцией z, и z однозначной непрерывной функцией Z. Тогда, согласно доказанному в предыдущем параграфе, и $\frac{dZ}{dz}$ есть также однозначная непрерывная функция z, а $\frac{dz}{dZ}$ — такая же функция Z. Ни одна из этих производных не может сделаться бесконечной, и поэтому каждая из них не может быть ни нулем, ни бесконечностью.

Положим

$$\frac{dZ}{dz} = M(\cos\vartheta + i\sin\vartheta),$$

где M — модуль этой производной, есть положительная величина, определяемая уравнением (2). Так как $\frac{dZ}{dz}$ не зависит от dx и dy, то M и ϑ — функции x и y. Из предыдущего уравнения получаем

$$dX + idY = M(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)(dx + idy),$$

т. е.

$$\begin{aligned} dX &= M(\cos\vartheta\, dx - \sin\vartheta\, dy), \\ dY &= M(\sin\vartheta\, dx + \cos\vartheta\, dy). \end{aligned} \tag{7}$$

Положим, что плоскости Z и z совпадают с материальной плоскостью, ось X — с осью x, ось Y — с осью y, и будем рассматривать x и y как координаты материальной точки при *одном* состоянии плоскости, X, Y — как координаты той же точки в *измененном* состоянии плоскости; тогда в уравнениях (7) мы будем иметь частный случай уравнений, рассмотренных в десятой лекции. По уравнениям (7) можно найти изменение, полученное бесконечно малой частью плоскости; они показывают, что это изменение состоит: из смещения, из вращения на положительный угол ϑ и из растяжения, одинакового для всех направлений, при котором все линейные размеры увеличиваются в отношении $1 : M$. Из этого заключаем, что бесконечно малая часть материальной плоскости остается себе *подобной*. Изменение, которое она получает, мы можем представлять себе непрерывным и произведенным так, что M не делается ни нулем, ни бесконечностью; если оно происходит таким образом, то направление положительного обхода рассматриваемой части, если она односвязна, не останется при этом неопределенным и не может измениться скачком; следовательно, оно остается неизменным. Теперь откажемся от представления, что плоскости z и Z совпадают с одной материальной плоскостью; тогда все-таки останется в силе, что соответственные бесконечно малые части этих плоскостей будут между собой подобны и направления положительного обхода вокруг них будут взаимно соответственны, если эти части односвязны.

Рассмотрим соответственные конечные куски обеих плоскостей; они не будут, вообще, подобны друг другу, но это будет иметь место для всех бесконечно малых частей их. Эти части благодаря соотношению, существующему между Z и z, как говорят, *в малых частях подобно отображаются один на другой*. Точкам границы одного куска соответствуют исключительно точки границы другого; действительно, внутренней точке одного не может соответствовать точка границы другого, так как бесконечно малому кругу, центром которого является первая точка, должен соответствовать бесконечно малый круг, центром которого является вторая точка. Если один из этих кусков ограничен замкнутой линией, т. е. является односвязным, то таким же должен быть и другой. Положительному обходу на одном куске соответствует положительный обход на другом.

§ 4

Предположение, что Z и z суть однозначные функции одна другой, будет выполнено без ограничения их области, если одна из них есть целая линейная функция другой.

Совместим ось X с осью x, ось Y с осью y и будем рассматривать, как прежде, X, Y и x, y как координаты одной и той же точки плоскости x, y при ее двух различных состояниях. Тогда уравнение

$$Z = a + ib + z$$

будет соответствовать смещению плоскости на a параллельно оси x и на b параллельно оси y. Уравнение

$$Z = (\cos\alpha + i\sin\alpha)z,$$

из которого вытекают уравнения

$$X = x\cos\alpha - y\sin\alpha,$$
$$Y = x\sin\alpha + y\cos\alpha,$$

представляет вращение плоскости на угол α. Уравнение

$$Z = mz,$$

где m означает положительное постоянное, представляет растяжение плоскости, при котором все линии увеличиваются в отношении $1:m$, сохраняя свое направление, и точка $z = 0$ остается на своем месте. Во всех этих случаях, т. е. всегда, когда Z есть целая линейная функция z, подобны также конечные соответственные области обеих переменных. Положим Z равным *дробно-линейной* функции z, т. е.

$$Z = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}, \quad z = -\frac{\alpha - \gamma Z}{\beta - \delta Z}, \tag{8}$$

где через α, β, γ, δ обозначены комплексные постоянные; тогда Z и z равным образом будут непременно однозначными функциями одна другой, но они не непрерывны всюду. Если $\gamma + \delta z = 0$, то бесконечно Z, если $\beta - \delta Z = 0$, то бесконечно z, и непрерывность в обоих случаях нарушится. Чтобы иметь возможность применить предложения, которые мы вывели в предположении, что Z и z однозначные непрерывные функции одна другой, ограничим область z двумя замкнутыми линиями, из которых одна, бесконечно малая, содержит точку $\gamma + \delta z = 0$, другая же линия бесконечно удалена. Тогда область Z будет также ограничена бесконечно малой и бесконечно большой замкнутыми линиями, из которых малая соответствует большой граничной линии области z и наоборот.

При соотношении между z и Z, выражаемом уравнением (8), каждой окружности на плоскости z соответствует окружность на плоскости Z. Чтобы доказать это, введем две новые переменные z' и Z', причем положим

$$z = a + bz', \quad Z = A + BZ'$$

и выберем комплексные постоянные a, b, A, B так, чтобы уравнение (8) превратилось в

$$Z' = \frac{1}{z'}.$$

Чтобы получить уравнения, из которых определяются a, b, A, B, надо только, чтобы одна из величин z' и Z' обращалась в нуль, когда другая обращается в бесконечность, и если одна равна единице, другая получит то же значение. Из этого следует, что

$$\beta - A\delta = 0,$$
$$\gamma + a\delta = 0,$$
$$\alpha + a\beta = Bb\delta.$$

Соответственно этим уравнениям всегда можно подобрать значения a, b, A, B, если только δ не равно нулю; но в этом случае Z есть линейная функция z и мы можем его исключить, так как для этого случая рассматриваемое предположение уже было доказано. Окружности же в плоскости z' соответствует окружность в плоскости Z'. Действительно, если

$$z' = x' + iy', \quad Z' = X' + iY',$$

то

$$X' + iY' = \frac{1}{x' + iy'} = \frac{x' - iy'}{x'^2 + y'^2};$$

следовательно,

$$X' = \frac{x'}{x'^2 + y'^2}, \quad Y' = -\frac{y'}{x'^2 + y'^2}$$

и

$$x' = \frac{X'}{x'^2 + y'^2}, \quad y' = -\frac{Y'}{X'^2 + y'^2}.$$

Если между x' и y' существует уравнение

$$a_1(x'^2 + y'^2) + a_2 x' + a_3 y' + a_4 = 0,$$

то из него получим уравнение между X' и Y':

$$a_1 + a_2 X' - a_3 Y' + a_4(X'^2 + Y'^2) = 0,$$

т. е. окружности в плоскости z' соответствует окружность в плоскости Z'. Но так как, согласно предыдущему, окружности в плоскости z соответствует окружность в плоскости z' и окружности в плоскости z' соответствует окружность же в плоскости Z, то, следовательно, каждой окружности в плоскости z соответствует окружность в плоскости Z.

В уравнения (8), определяющие соотношение между z и Z, входят три независимых комплексных постоянных, именно отношения $\alpha : \beta : \gamma : \delta$, так как эти четыре величины можно умножить на одно и то же постоянное, не изменяя соотношения. Эти три постоянных можно определить из трех линейных уравнений так, чтобы три любые точки a, b, c плоскости z попарно соответствовали трем любым точкам A, B, C плоскости Z. Тогда окружности, которые можно провести через точки a, b, c и A, B, C, будут также соответственными. Мы обозначим площади, ограниченные этими окружностями, через f и F. Они будут соответственными, если только точка $\gamma + \delta z = 0$ не лежит внутри окружности f; действительно, тогда f будет односвязной областью z, и ей должна соответствовать односвязная часть области Z. Но если точка $\gamma + \delta z = 0$ лежит внутри площади f, то f и F не будут соответственными, но каждой из этих площадей соответствует дополнительная площадь круга, если назовем дополнительной площадью f ту часть области z, которая останется по исключении f. Действительно, тогда надо будет исключить из площади f бесконечно малую часть, содержащую точку $\gamma + \delta z = 0$, чтобы получить из нее часть области z. Но границе этой бесконечно малой части будет соответствовать бесконечно большая замкнутая линия в плоскости Z. Очевидно, что это заключение годится также для случая, когда f и F — две какие-нибудь односвязные части плоскостей z и Z, границы которых соответственны одна другой. Соответственны ли эти площади или их дополнительные площади, легче всего решить посредством следующего исследования. В случае, когда точка $\gamma+\delta z=0$ лежит внутри f, превратим поперечным сечением двусвязную площадь, которая образуется после исключения из f бесконечно малой части, содержащей точку $\gamma+\delta z=0$, в односвязную, и проведем соответственное поперечное сечение в дополнительной площади F. Припомним теперь положение, что если z и Z — однозначные непрерывные функции одна другой, то соответственные обходы вокруг соответственных односвязных площадей будут одного знака, и назовем через a, A, b, B, c, C соответственные точки граничных линий f и F; тогда увидим, что эти площади оказываются сами соответственными, если обходы вокруг них $abca$ и $ABCA$ одного знака, и что в противном случае площадям f и F соответствуют их дополнительные площади.

Окружностям, проходящим через точки a, b плоскости z, соответствуют в плоскости Z окружности, проходящие через соответственные точки A, B и пересекающиеся под такими же углами, так как одна плоскость в бесконечно малых частях подобно изображается на другой. Если точка B удаляется в бесконечность, то проходящие через точку A круги сделаются прямыми линиями. Мы будем называть серпом площадь, ограниченную двумя круговыми дугами; если же одна из двух вершин удаляется в бесконечность, то будем называть эту площадь клином. Поэтому уравнения (8) позволят любой серп плоскости z отобразить на любой серп равного угла плоскости Z так, что вершинам первого a, b будут соответствовать вершины второго A, B и сверх того будут соответственными две произвольно выбранные точки границы c и C при условии, что c и C выбраны так, что обходы вокруг серпов $abca$ и $ABCA$ будут одного знака. Частным случаем такого отображения будет отображение серпа на клин равного угла.

§ 5

В предыдущем параграфе мы приняли, что Z и z без ограничения суть однозначные функции одна другой; теперь мы положим, что между этими переменными установлено соотношение, вследствие которого Z и z, вообще, суть многозначные непрерывные функции одна другой. Но они могут рассматриваться как однозначные, т. е. каждой точке области Z будет соответствовать одна точка области z и наоборот, если надлежащим образом разграничить эти области.

Путь будет z_0 значение z, или, как мы будем выражаться, точка плоскости z. Если ей соответствует много значений Z или много точек плоскости Z, то выберем из них одну Z_0. Тогда достаточно малой области z, содержащей точку z_0, соответствует подобная в малых частях область Z, содержащая точку Z_0, совершенно так, как если бы мы имели дело с безусловно однозначной функцией. Отношение соответственных бесконечно малых размеров повсюду будет определено модулем производной $\frac{dZ}{dz}$. Теперь будем понемногу расширять границы обеих областей, причем бесконечно малые части плоскости z будем изображать на плоскости Z, и наоборот, сохраняя подобие в отношении, определенном указанным выше модулем. При этом мы будем избегать точек, в которых $\frac{dZ}{dz}$ обращается в нуль или бесконечность и в которых, следовательно, это отношение было бы нулем или бесконечностью. Может случиться, что в то время как область z ограничена замкнутой, не пересекающей себя линией, соответствующая линия плоскости Z пересекает себя; тогда две части области Z совпадают и z перестает быть однозначной функцией Z; пока это не имеет места, z есть однозначная функция Z. Отсюда мы сделаем следующее заключение.

Если область z не содержит точки, в которой $\frac{dZ}{dz}$ равно нулю или бесконечности, если она ограничена замкнутой не пересекающейся линией и соответствующая последней линия плоскости Z себя не пересекает, то эта линия ограничивает область Z, точки которой однозначно соответствуют точкам области z. Тогда в этих областях Z и z суть однозначные функции одна другой. При этом границы области z могут бесконечно близко подходить к точкам, для которых $\frac{dZ}{dz}$ есть нуль или бесконечность; только в таком смысле мы можем говорить, что такие точки могут лежать на граничной линии области.

Мы приведем некоторые относящиеся сюда отображения, которые нам придется применять в дальнейшем.

Положим сперва

$$Z = z^n, \tag{9}$$

где n означает действительную постоянную. Положим

$$X = R\cos\theta, \quad x = r\cos\vartheta,$$
$$Y = R\sin\theta, \quad y = r\sin\vartheta,$$

тогда из этих уравнений следует, что

$$R = r^n, \ \theta = n\vartheta.$$

Кругу $r = \mathrm{const}$ соответствует круг $R = \mathrm{const}$, прямой $\vartheta = \mathrm{const}$ соответствует прямая $\theta = \mathrm{const}$. Вообразим себе область z, ограниченную двумя кругами $r = \mathrm{const}$ и двумя прямыми $\vartheta = \mathrm{const}$; тогда границами области Z будут два круга $R = \mathrm{const}$ и две прямые $\theta = \mathrm{const}$. Меньший из кругов может быть выбран бесконечно малым, большой — бесконечно большим. Тогда обе области будут два клина неравных углов. Если эти углы назовем α и A, то

$$A = n\alpha.$$

Соответствие между z и Z будет однозначным, если ни один из углов α и A не больше, чем 2π. Так как

$$\frac{dZ}{dz} = nz^{n-1},$$

то для $z = 0$ производная $\frac{dZ}{dz}$ равна нулю или бесконечности в зависимости от того, будет ли n больше или меньше единицы.

Найдем теперь, как можно отобразить один на другой два серпа различных углов так, чтобы соответствовали друг другу обе вершины и две произвольно выбранные точки на их границах. При этом мы предположим (и в подобных случаях будем предполагать, не оговариваясь), что точки границ, которые должны соответствовать друг другу, выбраны так, что соответствующие обходы рассматриваемых площадей имеют один знак. Предполагая, что между z и Z существует уравнение (9), положим

$$z = k\frac{z' - c_1}{z' - c_1} \ \text{и} \ Z = K\frac{Z' - C_1}{Z' - C_2}. \tag{10}$$

Вследствие этого два клина, изображающих области z и Z, перейдут соответственно в два серпа с углами α и A в плоскостях z' и Z', вершины которых лежат в точках $z' = c_1$, $z' = c_2$, $Z' = C_1$, $Z' = C_2$. Комплексные постоянные k и K могут быть выбраны так, чтобы две соответствующие, впрочем произвольные, точки границы клина соответствовали двум любым точкам границы серпа. Исключим z и Z из уравнений (9) и (10) и положим

$$N = \frac{K}{k^{\iota}};$$

тогда получим

$$N\frac{Z' - C_1}{Z' - C_2} = \left(\frac{z' - c_1}{z' - c_2}\right)^{\frac{A}{\alpha}}. \tag{11}$$

Этим уравнением оба серпа отображаются один на другом так, что соответственными являются обе вершины и точки, которые были произвольно выбраны на границах. В вершинах $\frac{dZ'}{dz'}$ равно нулю или бесконечности в зависимости от того, больше A или меньше, чем α.

Теперь мы покажем, как могут быть отображены один на другом два серпа различных углов, чтобы три произвольные точки границы одного соответствовали трем произвольным точкам границы другого. Предположим, что серп в плоскости Z', к которой относится уравнение (11), полный круг; следовательно,

$$A = \pi.$$

Две какие-нибудь точки его границы мы можем рассматривать как его вершины. Опуская штрихи при буквах z' и Z', получим

$$N\frac{Z - C_1}{Z - C_2} = \left(\frac{z - c_1}{z - c_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}. \tag{12}$$

Определим постоянные N, C_1, C_2 в этом уравнении, так чтобы при любых точках границы серпа плоскости z соответствовали трем точкам, взятым в плоскости Z; при этом серп отобразится на площади круга так, что граница его пройдет через эти три точки. Теперь введем опять новое переменное z' и вообразим себе в плоскости z' серп, вершины которого лежат в точках $z' = c_1'$ и $z' = c_2'$ и угол которого есть α'. Положим затем

$$N'\frac{Z - C_1'}{Z - C_2'} = \left(\frac{z' - c_1'}{z' - c_2'}\right)^{\frac{\pi}{\alpha'}} \tag{13}$$

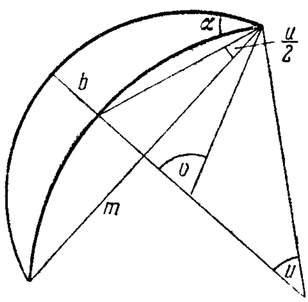
и определим постоянные N', C_1', C_2', так чтобы три любые точки границы этого серпа соответствовали тем трем точкам плоскости Z, которые были уже взяты при рассмотрении серпа на плоскости z. Тогда оба серпа будут отображены на один и тот же круг, следовательно, также один на другой, и именно так, что три точки, произвольно взятые на одной границе, соответствуют трем точкам, произвольно выбранным на другой границе. Мы получим уравнение между z и z', которое это выражает, исключая Z из (12) и (13); при этом одна из двух величин

$$\left(\frac{z - c_1}{z - c_2}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad \left(\frac{z' - c_1'}{z' - c_2'}\right)^{\frac{\pi}{\alpha'}} \tag{14}$$

будет выражена как дробно-линейная функция другой. Три постоянные, которые входят в эту функцию, определяются тремя парами точек, которые должны соответствовать друг другу. Как новое следствие, рассмотрим случай, когда один из двух серпов переходит в полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми, и рассмотрим еще этот случай. Предположим, что

$$-c_1 = c_2 = m(\cos\gamma + i\sin\gamma);$$

тогда m обозначает половину расстояния между вершинами серпа, предполагаемого в плоскости z, γ — угол, который прямая, соединяющая вершины, образует с осью x. Пусть далее $2u$ и $2v$ будут длины дуг окружностей, образующих серп, выраженные в частях радиуса так, что



Фиг. 1

$$v - u = \alpha;$$

пусть, наконец, b будет ширина серпа, т. е. расстояние между точками пересечения его границы с линией центров кругов, ограничивающих серп (фиг. 1). Тогда из простого геометрического рассмотрения мы получим

$$b = m\left(\operatorname{tg}\frac{v}{2} - \operatorname{tg}\frac{u}{2}\right). \tag{15}$$

Серп превратится в полосу указанного вида, если m сделается бесконечно большим, а v и u, и следовательно также α, бесконечно малыми. Тогда ширина b получится из (15):

$$b = \frac{m\alpha}{2},$$

и γ будет углом, образованным с осью x направлением длины полосы.

Обозначим еще общее бесконечно большое значение $-c_1$ и c_2 — через c; тогда для выражения

$$\left(\frac{z - c_1}{c_2 - z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}},$$

которое отличается от первого из выражений (14) только постоянным множителем, именно множителем $(-1)^{\frac{\pi}{\alpha}}$, получим

$$\left(\frac{z - c_1}{c_2 - z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = \left(1 + 2\frac{z}{c}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = \left(1 + \frac{\alpha}{\pi}\frac{2\pi}{\alpha c}z\right)^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Положим теперь, что α приближается к нулю, в то время как αc сохраняет постоянное значение; тогда отсюда следует, как показывает разложение по биноминальному закону, что

$$\left(\frac{z - c_1}{c_2 - z}\right)^{\frac{\pi}{\alpha}} = e^{\frac{2\pi z}{\alpha c}} = e^{\frac{\pi z}{b}(\cos\gamma - i\sin\gamma)} \tag{16}$$

ЛЕКЦИЯ ДВАДЦАТЬ ВТОРАЯ

(Жидкие струи. Струя, вытекающая из сосуда определенного вида. Струя, встречающая плоскую стенку. Плоская стенка в потоке бесконечной ширины. Давление на эту стенку)

§ 1

При установившемся движении несжимаемой жидкости, при котором существует потенциал скоростей φ и не действуют внешние силы, вследствие уравнения (20) пятнадцатой лекции имеем

$$p = C - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{1}$$

где через p обозначено давление, через C — постоянное, и плотность жидкости положена равной единице. Отсюда следует, что давление убывает, когда скорость возрастает, и делается равным $-\infty$, когда скорость равна бесконечности. Но, согласно опыту, давление в жидкости не может опуститься ниже некоторого отрицательного значения без того, чтобы не произошел разрыв жидкости, причем нарушилась бы и непрерывность движения. Тот факт, что вода образует струю, вытекая из отверстия сосуда в покоящуюся воду, объясняется именно этим. До сих пор мы предполагали, что скорость движения воды всюду непрерывно изменяется; теперь же сделаем другое предположение — будем считать, что существуют такие поверхности, по обе стороны от которых прилегающие к ним частицы жидкости имеют различную скорость; но при этом поставим условие, чтобы давление не опускалось ниже известного предела. Это условие равносильно требованию, чтобы скорость не превышала некоторого значения, зависящего от постоянного C. Поверхность, на которой скорость изменяется скачком, аналогична поверхности раздела двух различных жидкостей; на двух сторонах ее давление и компоненты скорости по нормали должны иметь одно и то же значение. Мы ограничимся исследованием случая, когда имеется только одна область движущейся жидкости, ограниченная покоящейся жидкостью. Отсюда следует, что поверхности раздела должны быть образованы линиями тока и скорость на них должна иметь всюду одно и то же значение. Мы положим это значение равным единице. Предположим далее, что потенциал скоростей зависит только от двух координат x и y. Рассмотрим переменные

$$z = x + iy, \quad w = \varphi + i\psi$$

и постараемся определить w как функцию z, так чтобы были удовлетворены поставленные условия. При этом воспользуемся тем, что

$$\psi = \text{const}$$

есть уравнение линий тока. Выведем выражение для скорости из приведенного ниже исследования. Мы имеем

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y};$$

следовательно,

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}} \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}}. \tag{2}$$

Положим теперь

$$\frac{dz}{dw} = \zeta = \xi + i\eta = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta) \tag{3}$$

и будем рассматривать ξ и η как прямоугольные координаты точки на плоскости, которую будем называть плоскостью ζ.

Выберем ось ξ параллельно оси x, ось η параллельно оси y; тогда сравнение уравнений (2) и (3) показывает, что если из точки $\zeta = 0$ провести в точку ζ прямую линию, то длина ее ρ равна обратной величине скорости, а направление есть направление скорости в точке z.

Границы пространства, заполненного рассматриваемой жидкостью или, иначе говоря, границы области z, составляются из трех различных частей. Одна часть образована линиями, через которые жидкость втекает и вытекает; вторая — твердыми стенками, для них $\psi = \text{const}$; наконец, третью составляют поверхности, по которым движущаяся жидкость соприкасается с покоящейся; мы будем называть их *свободными* границами; для них также $\psi = \text{const}$, но, кроме того, $\rho = 1$. Чтобы найти такое движение, мы будем рассматривать φ и ψ как прямоугольные координаты точки некоторой плоскости, которую назовем плоскостью w. Сделаем соответственные предположения относительно областей w и ζ: найдем такое соотношение между w и ζ, которое позволило бы обе эти области сделать подобными в малом и отобразить одну на другую, а затем с помощью (3) вычислим из него z. Область z, соответствующая областям w и ζ, определяет пространство, наполненное движущейся жидкостью.

§ 2

Примем теперь за область w полосу, границы которой выражаются уравнениями

$$\psi = \psi_0, \quad \varphi = -\infty,$$

$$\psi = \psi_0 + b, \quad \varphi = +\infty,$$

где через ψ_0 и b обозначим две постоянные, а за область ζ примем серп; уравнением одной из его дуг является

$$\rho = 1,$$

а для внутренних его точек всюду $\rho > 1$. Согласно сделанному в § 5 предыдущей лекции разъяснению, составим уравнение между w и ζ, с помощью которого одну область возможно отобразить на другой. Это уравнение определит w и ζ как однозначные функции внутри этой области; при этом три точки одной границы будут соответствовать трем произвольным точкам другой границы. Положим, что

$$\zeta = \zeta_1 \text{ для } \varphi = -\infty,$$

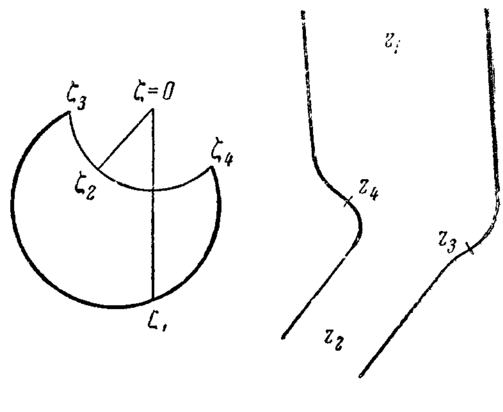
$$\zeta = \zeta_2 \text{ для } \varphi = +\infty,$$

и возьмем точку ζ_2 на дуге круга $\rho = 1$, точку ζ_1 — на другой дуге круга границы области ζ. Не определяя третью пару соответственных точек и не вникая ближе в уравнение между w и ζ, уже можно в общих чертах указать характер области z и движения жидкости при сделанных предположениях.

Из уравнения

$$z = \int \zeta \, dw,$$

которое следует из (3), заключаем, прежде всего, что область z простирается в бесконечность (так как такова и область w), а ζ нигде не обращается в нуль. Пусть z_1 будет точкой плоскости z для $\varphi = -\infty$, и z_2—точкой, для которой $\varphi = +\infty$, так что z_1 и z_2, которые лежат в бесконечности, соответствуют точкам ζ_1 и ζ_2. Проведенные из точки $\zeta = 0$ к точкам ζ_1 и ζ_2 прямые линии будем обозначать (по величине и направлению) через ρ_1 и ρ_2, причем величина $\rho_2 = 1$; тогда в z_1 (и на конечном от него расстоянии, где направление движения есть направление ρ_1) скорость равна $\frac{1}{\rho_1}$, а в z_2 (и на конечном от него расстоянии, где направление движения есть направление ρ_2) скорость равна единице. Повсюду область z есть подобное в малом отображение области w, при котором все длины увеличены в отношении $1 : \rho$. Поэтому мы имеем при z_2 область, конгруентную w, а b есть ширина потока; при z_1 эта ширина равна $\rho_1 b$. При z_1 границами потока должны быть твердые стенки, при z_2 — свободные границы. Свободные границы могут быть, вообще, частями границы области z, которые соответствуют частям границы области ζ, для которых $\rho = 1$, в то время как части границы области ζ, представляющие твердые стенки, соответствуют частям второй дуги круга на границе области ζ. Пусть ζ_3 и ζ_4 будут вершинами серпа, образованного в области ζ, z_3 и z_4 — соответствующие точки в области z. Каждая из этих двух точек представляет конец твердой стенки и начало свободной границы. Фиг. 1 наглядно воспроизводит области ζ и z; толстые линии на ней представляют твердые стенки, тонкие линии — свободные границы; последние изображают форму струй, вытекающих из сосуда, форма же сосуда определяется первыми.



Фиг. 1

Отметим еще одну особенность, которую имеют точки z_2 и z_4. Линии тока, проходящие через них, имеют в этих точках касательные; они параллельны линиям ρ_3 и ρ_4 плоскости ζ. Однако z_3 и z_4 будут *точками перегиба* и притом единственными для этих линий тока; это следует из того, что всюду касательные параллельны линиям ρ, проведенным через соответствующие точки плоскости ζ. Мы предполагаем при этом, как показано на фигуре, что из точки ζ_0 нельзя провести ни одной касательной к дуге круга $\zeta_3\zeta_1\zeta_4$.

Найдем радиус кривизны в точках z_3 или z_4. Пусть dl будет элемент линии тока и $d\varphi$—изменение потенциала скоростей на этом протяжении; так как $\frac{1}{\rho}$ есть скорость, то тогда

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{1}{\rho} \text{ или } dl = \rho d\varphi.$$

Воспользуемся опять величиной ϑ, определенной уравнением (3); тогда для радиуса кривизны в dl получим выражение

$$\frac{\rho d\varphi}{d\vartheta},$$

или, так как для каждой линии тока ψ постоянно и поэтому можно подставить dw вместо $d\varphi$, придем к выражению

$$\frac{\rho dw}{d\vartheta}. \tag{4}$$

Введем здесь $d\zeta$ вместо $d\vartheta$; вследствие уравнения (3) получим

$$\lg \zeta = \lg \rho + i\vartheta,$$

следовательно,

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \frac{d\rho}{\rho} + i d\vartheta. \tag{5}$$

Если теперь мы предположим, что dl принадлежит свободной границе струй, то $\rho = 1$; следовательно, $d\rho = 0$ и

$$d\vartheta = -i\frac{d\zeta}{\zeta},$$

поэтому приведенное в (4) выражение радиуса кривизны станет

$$i\zeta\frac{dw}{d\zeta}.$$

Пусть точка z бесконечно близка к точкам z_3 и z_4; следовательно, точка ζ будет также бесконечно близка к точкам ζ_3 и ζ_4; тогда $\frac{dw}{dz}$ сделается бесконечно малым в предположении, что угол при вершинах серпа на плоскости ζ меньше π, так как соответственные части областей ζ и w, для которых ζ отклоняется бесконечно мало от ζ_3 и ζ_4, можно рассматривать как части клина, которые взаимно отображаются посредством соотношения, существующего между w и ζ. Отсюда следует, что рассматриваемые радиусы кривизны бесконечно малы[40].

Если dl принадлежит твердым стенкам, то $d\rho$ не равно нулю. Дифференцируя соотношение между ρ и ϑ, которое представляет вторую дугу круга, ограничивающую область ζ, получим уравнение между $d\rho$ и $d\vartheta$, из которого, в связи с уравнением (5), $d\vartheta$ может быть выражено через $d\zeta$, если вторая дуга перейдет в прямую линию; в этом случае уравнением ее будет $\vartheta = \text{const}$, т. е. $d\vartheta = 0$. Отсюда получается для радиуса кривизны выражение, содержащее $\frac{dw}{d\zeta}$ множителем и, следовательно, обращающееся в нуль, когда точка z приходит в точку z_3 или z_4. Но в этом исключительном случае радиус кривизны бесконечно велик и перескакивает от бесконечности к нулю, когда точка z переходит через точку z_3 или z_4.

§ 8

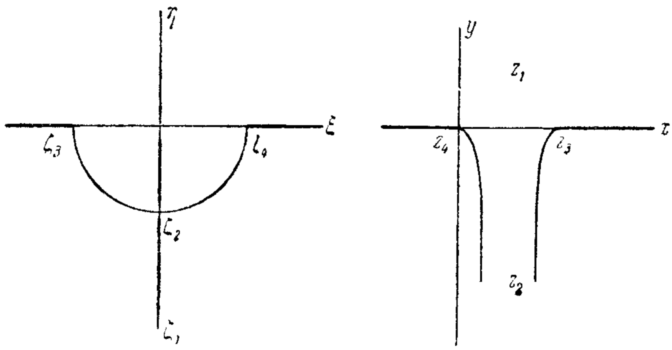
Применим теперь вычисление, намеченное в предыдущем параграфе, к одному частному случаю. Пусть из двух окружностей, ограничивающих область ζ, одна — полуокружность, для которой $\rho = 1$, другая же имеет бесконечно большой радиус; точка ζ_2 делит пополам полуокружность, и точка ζ_1 лежит в бесконечности на прямой, проведенной через точки $\zeta = 0$ и ζ_2. На фиг. 2 представлены области ζ и z для этого случая. На ней, кроме границ областей, показаны введенные нами оси ξ, η и x, y.

Возьмем в качестве границ полосы, образующей область линии w,

$$\psi = 0 \text{ и } \psi = \pi;$$

тогда, по данному в связи с выражением (14) предыдущей лекции правилу и по уравнению (16) той же лекции, имеем

$$\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = K \frac{e^w - C}{e^w - C'}. \tag{6}$$



Фиг. 2

Для нахождения трех постоянных C, C' и K мы имеем, по сделанному уже определению, два условия

$$\text{для } \zeta = -i\infty \quad \varphi = -\infty,$$

$$\text{для } \zeta = -i \quad \varphi = +\infty.$$

К этому добавим произвольно третье

$$\text{для } \zeta = 1 \quad w = 0.$$

Отсюда получим

$$K = -1, \; C = 1, \; C' = -1;$$

следовательно,

$$\left(\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right)^2 = \frac{1 - e^w}{1 + e^w}.$$

Отсюда определим ζ и получим квадратное уравнение

$$(\zeta - 1)^2 \frac{e^{-w} + 1}{2} - (\zeta + 1)^2 \frac{e^{-w} - 1}{2} = 0,$$

т. е.

$$\zeta^2 - 2\zeta e^{-w} + 1 = 0,$$

откуда следует, что

$$\zeta = e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}. \tag{7}$$

Определим знак перед корнем, приняв, что для $\varphi = \infty$ величина ζ должна быть бесконечной (но не нулем); этим корень определен для всей области w, так как мы знаем, что для этой области ζ есть однозначная функция w. Теперь по (3) имеем

$$z = \int \left(e^{-w} + \sqrt{e^{-2w} - 1}\right) dw,$$

где нижняя граница интеграла может быть выбрана произвольно и сделана равной нулю. Тогда точка $z = 0$ соответствует точке $\zeta = 1$; следовательно, есть точка, обозначенная через z_4. Интегрирование первого члена выражения, найденного для z, производится непосредственно; чтобы проинтегрировать второй, введем вместо w переменную интегрирования $\sqrt{e^{-2w}-1}$.

Таким образом получим

$$z = 1 - e^{-w} - \sqrt{e^{-2w}-1} + \operatorname{arctg}\sqrt{e^{-2w}-1}, \tag{8}$$

где arctg для $w = 0$ обращается в нуль. Отсюда надо определить границы области z.

Если $\psi = 0$ и φ изменяется между 0 и $-\infty$, то из (8) следует, что

$$x = 1 - e^{-\varphi} - \sqrt{e^{-2\varphi}-1} + \operatorname{arctg}\sqrt{e^{-2\varphi}-1}, \quad y = 0,$$

где корень (как всякий действительный корень) положительный, и arctg лежит в первом квадранте. Это уравнение представляет отрицательную ось x, которая образует твердую стенку. Отсюда для $\varphi = -\infty$ и $\psi = 0$ имеем

$$x = 1 - 2e^{-\varphi} + \frac{\pi}{2}, \quad y = 0.$$

Если φ имеет постоянное бесконечно большое отрицательное значение, и ψ возрастает от нуля до π, то

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 - 2e^{-\varphi}\cos\psi + \frac{\pi}{2}, \\ y &= 2e^{-\varphi}\sin\psi. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

При этом заключении мы предположили, что $\operatorname{arctg} u$, т. е.

$$\int\limits_0^u \frac{du}{1+u^2},$$

не изменяет своего значения, когда точка u двигается по бесконечно удаленной прямой. Уравнение (9) представляет полуокружность, центр которой имеет координаты $x = 1 + \frac{\pi}{2}$, $y = 0$, и радиус равен $2e^{-\varphi}$. Через эту полуокружность жидкость течет к центру со скоростью, равной обратной величине ее радиуса. Для $\varphi = -\infty$ и $\psi = \pi$ имеем

$$x = 1 + 2e^{-\varphi} + \frac{\pi}{2}, \quad y = 0.$$

Если $\psi = \pi$ и φ лежит между $-\infty$ и нулем, то

$$x = 1 + e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi}-1} + \pi - \operatorname{arctg}\sqrt{e^{-2\varphi}-1}, \quad y = 0,$$

где опять arctg надо выбрать в первом квадранте. Эти уравнения представляют часть оси x между точками $x = 2 + \pi$ и $x = \infty$; ось также должна быть твердой стенкой. Для $\psi = \pi$, $\varphi = 0$, так же как для $\psi = 0$, $\varphi = 0$, как это вытекает из уравнения (7), $\frac{d\zeta}{dw} = \infty$; $w = 0$ и $w = \infty$ являются единственными двумя точками области w, в которых это имеет место. Отсюда следует, что точка $x = 2 + \pi$, $y = 0$ должна быть обозначена через z_3. Если $\psi = \pi$ и φ положительно, то, так как

$$\operatorname{arctg} iu = i\frac{1}{2}\lg\frac{1+u}{1-u}$$

и y теперь должен быть отрицательным, мы получим

$$x = 1 + e^{-\varphi} + \pi,$$

$$y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}.$$

Эта линия есть свободная граница струй.

Для $\psi = \pi$, $\varphi = +\infty$ имеем

$$x = 1 + \pi, \quad y = 1 - \lg 2 - \varphi.$$

Пусть φ будет постоянной бесконечно большой положительной величиной, а ψ пусть убывает от π до нуля; тогда

$$x = 1 + \psi;$$

$$y = 1 - \lg 2 - \varphi.$$

Эти уравнения представляют линию длиной π, параллельную оси x, для которой $y = -\infty$. Через эту линию жидкость течет со скоростью, равной единице, в направлении отрицательной оси y.

Для $\varphi = +\infty$ и $\psi = 0$ имеем

$$x = 1, \quad y = 1 - \lg 2 - \varphi.$$

Положим, наконец, $\psi = 0$ и φ положительным; тогда получим

$$x = 1 - e^{-\psi},$$

$$y = \sqrt{1 - e^{-2\varphi}} - \frac{1}{2} \lg \frac{1 + \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}{1 - \sqrt{1 - e^{-2\varphi}}}.$$

Представленная этими уравнениями линия есть вторая свободная граница струй. Положив в этих уравнениях $\varphi = 0$, мы возвратимся таким образом к точке $z = 0$, от которой мы исходили при нахождении границ области z.

§ 4

Перейдем теперь к задаче, для которой только что рассмотренный случай является частным. Область w будет ограничена, как прежде, линиями

$$\psi = 0, \quad \varphi = -\infty,$$

$$\psi = \pi, \quad \varphi = +\infty;$$

область же ζ ограничена дугой круга (описанного из точки $\zeta = 0$ радиусом, равным единице), имеющей длину α; в концевых точках дуга ζ имеет значения ζ_3 и ζ_4. Эту область ζ, на основании разъяснения, сделанного в связи с уравнением (9) предыдущей лекции, можно отобразить подстановкой

$$Z = \zeta^{\frac{\pi}{\alpha}}$$

на область переменного Z, которая ограничена полукругом с радиусом, равным единице, продолжением радиусов, проведенных в его конечные точки, и бесконечно большой концентрической полуокружностью. Значения, которые получает Z для $\zeta = \zeta_3$ и $\zeta = \zeta_4$, мы обозначим через Z_3 и Z_4, так что

$$Z_3 = \zeta_3^{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad Z_4 = \zeta_4^{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

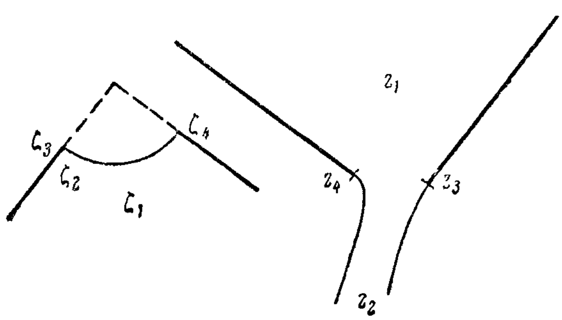
Но область Z на конечном расстоянии совпадает с областью ζ, которую мы рассмотрели в предыдущем параграфе, а поэтому ее можно изобразить на области w уравнением

$$\left(\frac{Z - Z_3}{Z - Z_4}\right)^2 = K\,\frac{e^w - C}{e^w - C'},$$

в которое перейдет уравнение (6). Отсюда следует такое соотношение между ζ и w:

$$\left(\frac{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} - \zeta_3^{\frac{\pi}{\alpha}}}{\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}} - \zeta_4^{\frac{\pi}{\alpha}}}\right) = K\,\frac{e^w - C}{e^w - C'}. \tag{10}$$

Обозначим опять через ζ_1 и ζ_2 произвольно выбранные точки границы области ζ, для которых $\varphi = -\infty$ и $\varphi = +\infty$; если сверх того мы

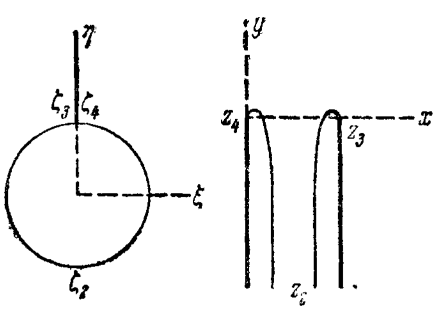


Фиг. 3

определим еще две точки границ областей ζ и w как соответственные одна другой, то найдем постоянные K, C, C'.

Возьмем точку ζ_1 в бесконечности, ζ_2 — на дуге круга, описанного радиусом, равным единице. Соответствующие области ζ и z показаны на фиг. 3.

Части области z, для которых $\varphi = -\infty$ или $\varphi = +\infty$, лежат в бесконечности. Твердые стенки прямолинейны на всем протяжении и имеют направление ρ_3 и ρ_4. Струя в бесконечности имеет направление ρ_2 и ширину π.



Фиг. 4

Рассмотрим еще один особый относящийся сюда случай. Пусть будет

$$\alpha = 2\pi, \quad \zeta_3 = \zeta_4 = i, \quad \zeta_2 = -i$$

и для $w = 0$

$$\zeta = i, \quad z = 0.$$

Области ζ и z представлены на фиг. 4.

Применив уравнения (10), мы введем величины $\sqrt{\zeta_3}$ и $\sqrt{\zeta_4}$; хотя ζ_3 и ζ_4 равны между собой, корни $\sqrt{\zeta_3}$ и $\sqrt{\zeta_4}$ не будут равными — они противоположны. В самом деле, один из них можно перевести в другой по пути, лежащему в области точки ζ. Поэтому, а также вследствие условий, что

$$\begin{aligned} &\text{для } \varphi = -\infty \quad && \zeta = \infty, \\ &\varphi = +\infty && \zeta = -i, \\ &w = 0 && \zeta = i, \end{aligned}$$

приведенное выше уравнение перейдет в

$$\left(\frac{\sqrt{\zeta}-\sqrt{i}}{\sqrt{\zeta}+\sqrt{i}}\right)^2 = \frac{1-e^w}{1+e^w},$$

т. е.

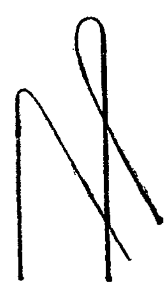
$$\zeta - 2\sqrt{\zeta}\sqrt{i}\,e^{-w} + i = 0.$$

Сумма двух значений $\sqrt{\zeta}$, которую отсюда получим, равна $2\sqrt{i}e^{-w}$, произведение их равно $+i$; сумма двух значений ζ равна $2i(2e^{-2w}-1)$ и их произведение равно -1. Поэтому для ζ имеем уравнение

$$\zeta^2 - 2\zeta i(2e^{-2w}-1) - 1 = 0,$$

из которого следует

$$\zeta = \left(2e^{-2w} - 1 + 2e^{-w}\sqrt{e^{-2w}-1}\right).$$



Фиг. 5

Знак входящего сюда корня определен тем, что при $\varphi = -\infty$ должно быть $\zeta = \infty$, но не $\zeta = -\infty$.

Следовательно, из уравнения

$$z = \int_0^w \zeta\, dw$$

будем иметь

$$z = -i\left[e^{-2w} + w - 1 + e^{-w}\sqrt{e^{-2w}-1} - \lg\left(e^{-w} + \sqrt{e^{-2w}-1}\right)\right],$$

причем для $w = 0$ логарифм обращается в нуль.

Когда $\psi = 0$ и φ убывает от нуля до $-\infty$, то по предыдущему будет

$$x = 0,$$

$$y = -\left[e^{-2\varphi} + \varphi - 1 + e^{-\varphi}\sqrt{e^{-2\varphi}-1} - \lg\left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi}-1}\right)\right].$$

Эти уравнения представляют отрицательную ось y.

Когда φ имеет постоянное бесконечно большое отрицательное значение и ψ возрастает от нуля до π, то

$$x = -2e^{-2\varphi}\sin 2\psi + 2\psi.$$

$$y = -2e^{-2\varphi}\cos 2\psi - 2\varphi + 1 + \lg 2.$$

Если $\psi = \pi$ и φ отрицательно, то

$$x = 2\pi,$$

$$y = -\left[e^{-2\varphi} + \varphi - 1 + e^{-\varphi}\sqrt{e^{-2\varphi}-1} - \lg\left(e^{-\varphi} + \sqrt{e^{-2\varphi}-1}\right)\right].$$

Эти уравнения представляют вторую твердую стенку, которая, следовательно, находится на расстоянии 2π от первой. Ширина струи на основании предыдущего общего исследования равна π.

Рассмотренный случай жидкой струи был впервые математически обработан Гельмгольцем *.

Дадим точке ξ_2 на круге $\rho = 1$ другое положение, не вводя никаких других изменений в предположения, принятые на фиг. 5; тогда границы области z будут такой формы, как представлено на фиг. 5. Эти границы пересекаются; соответственное им движение жидкости невозможно.

§ 5

Теперь сделаем относительно области w другое предположение. Пусть область w ограничена линиями

$$\psi = -\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = -\infty,$$

$$\psi = +\frac{\pi}{2}, \quad \varphi = +\infty$$

и обеими сторонами линии, для которой

$$\psi = 0 \text{ и } \varphi > 0.$$

Приводимое ниже исследование покажет, что эту область можно также изобразить на серпе.

Область, которая получится из этой, если не считать линию $\psi = 0$, $\varphi > 0$ принадлежащей границе, изобразим на круге плоскости Z уравнением

$$e^w = \frac{1+Z}{1-Z}, \tag{11}$$

причем так, что для

$$\varphi = -\infty, \quad Z = -1,$$

$$\varphi = +\infty, \quad Z = +1,$$

$$w = i\frac{\pi}{2}, \quad Z = i.$$

Радиус круга в этом случае равен единице, его центр есть точка $Z = 0$, которая соответствует точке $w = 0$. Когда $\psi = 0$, $\varphi > 0$, Z действительно и меньше единицы. Линии $\psi = 0$, $\varphi > 0$ соответствует радиус, проведенный из точки $Z = 0$ в точку $Z = 1$. Следовательно, уравнение (11) отображает область w, введенную в начале этого параграфа, на область переменного Z, которая ограничена упомянутым выше кругом и радиусом. Эту последнюю область при помощи соотношения

$$Z = Z'^2$$

отобразим на полукруг радиуса $R = 1$ в плоскости Z', как на серпе; угол при вершине этого серпа равен $\frac{\pi}{2}$, и для его вершины $Z' = \pm 1$. Следо-

* Monatsberichte der Berliner Akademie. April. 1868.

вательно, рассмотренная выше область w отобразится на этом серпе соотношением

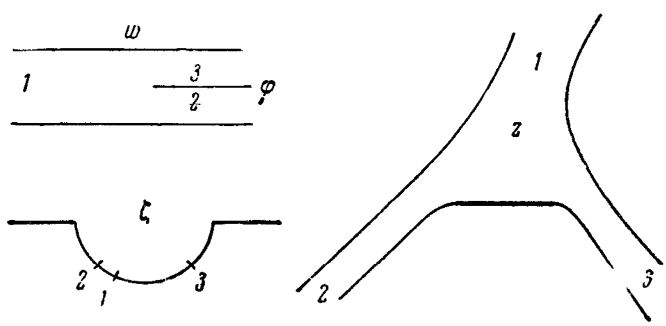
$$e^{w} = \frac{1+Z'^2}{1-Z'^2}$$

и, согласно разъяснению, сделанному в § 5 двадцать первой лекции, может быть отображена на всяком другом серпе, и притом так, что три любые точки его границы будут соответствовать трем любым точкам границы другого серпа.

В качестве границ области ζ возьмем опять полукруг радиуса, равного единице, и бесконечно большую дугу круга и примем, что если ζ_1, ζ_2, ζ_3 есть три точки полуокружности, то

$$\begin{aligned}
&\text{для} \quad \varphi = -\infty \qquad \zeta = \zeta_1,\\
&\psi < 0, \ \varphi = +\infty \qquad \zeta = \zeta_2,\\
&\psi > 0, \ \varphi = +\infty \qquad \zeta = \zeta_3.
\end{aligned}$$

В этом случае легко уяснить общий характер области z. На фиг. 6 представлены области ζ, w и z.



Фиг. 6

Из бесконечности приходит струя, которая там имеет ширину π, скорость, равную единице, и направление радиуса ρ_1; в бесконечность уходят две струи, которые там имеют ширину $\frac{\pi}{2}$, скорость, равную единице, и направления ρ_2 и ρ_3. Границы первой струи переходят во внешние границы последних по линиям, соответствующим дугам круга $\zeta_1\zeta_2$ и $\zeta_1\zeta_3$. Внутренние границы двух струй, уходящих в бесконечность, переходят одна в другую по линии, которая является частично свободной границей, частично твердой стенкой. Концы последней соответствуют вершинам области ζ и некоторым двум точкам области w, для которых $\psi = 0$, $\varphi > 0$. Вся стенка находится на конечном расстоянии и представляет прямую, параллельную бесконечно большой дуге границы области ζ, поскольку последняя лежит на конечном расстоянии. В этой области находится точка, соответствующая точке $w = 0$, где скорость равна нулю, и линия тока раздваивается.

Изучим подробнее еще один случай, хотя частично мы его уже рассматривали.

Пусть границами области ζ будут те границы, которые представлены на фиг. 6, но область w будет бесконечной плоскостью, которая ограничена двумя сторонами линии $\psi = 0$, $\varphi > 0$. При этом пусть будет для

$$w = \infty \qquad \zeta = -i,$$

$$w = 1 \qquad \zeta = \pm 1;$$

последнее условие выполнено, так как точка $w = 1$ встречается дважды в границе области w и поэтому должна соответствовать двум точкам области ζ. Соотношение между w и ζ, с помощью которого области обоих переменных отображаются одна на другую, легко найти из следующего рассуждения. Соотношением

$$w = Z^2$$

область w будет отображена на полуплоскости Z таким образом, что для

$$w = \infty \quad Z = \infty,$$
$$w = 1 \quad Z = \pm 1.$$

Эта область Z есть круг бесконечно большого радиуса; на нем серп, воспроизводящий область ζ, изобразится при помощи соотношения

$$\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2 = \frac{1-Z}{1+Z},$$

так что будет

$$\zeta = -i, \quad Z = \infty,$$
$$\zeta = +1, \quad Z = +1,$$
$$\zeta = -1, \quad Z = -1.$$

Отсюда получим соотношение между ζ и w

$$\left(\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right)^2 = \frac{1-\sqrt{w}}{1+\sqrt{w}}.$$

Отсюда найдем

$$\zeta^2 - 2\zeta \frac{1}{\sqrt{w}} + 1 = 0;$$

следовательно,

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{w}} + \sqrt{\frac{1}{w} - 1}. \tag{12}$$

Определим знак второго корня (из двух значений, входящих сюда), приняв, что $\zeta = -i$ для $w = \infty$; знак первого же определится тем, что для $w = 0$ ζ бесконечно, а не равно нулю, так как в области ζ нет значений, модуль которых был бы меньше единицы. Положив еще, что z и w обращаются в нуль одновременно, мы получим из (12)

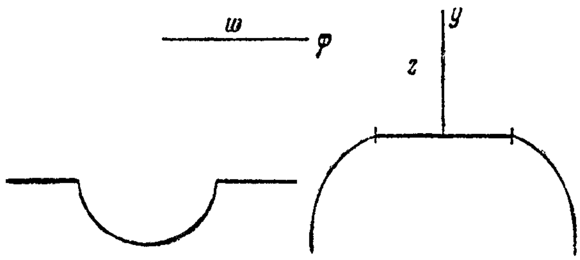
$$z = 2\sqrt{w} + w\sqrt{\frac{1}{w} - 1} + \arcsin\sqrt{w},$$

где arcsin равен нулю для $w = 0$. Для твердой стенки $\sqrt{w}$ действителен и изменяется от -1 до $+1$; следовательно, для нее $y = 0$, а x изменяется между

$$-2 - \frac{\pi}{2} \text{ и } 2 + \frac{\pi}{2}.$$

Фиг. 7 представляет для рассматриваемого случая области w, ζ и z.

Поток бесконечно большой ширины, всюду имеющий в бесконечности скорость, равную единице, и направление отрицательной оси y, встречает стенку шириной $4+\pi$, перпендикулярную к оси y; по свободным границам, идущим от концов стенки, он соприкасается с покоящейся жидкостью.



Фиг. 7

§ 6

Теперь мы произведем исследование давления, испытываемого твердой стенкой при таком движении жидкости, какое было изучено в данной лекции. Давление p в какой-нибудь точке движущейся жидкости определим из уравнения (1):

$$p = C - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right],$$

или

$$p = C - \frac{1}{2}\,\frac{1}{\rho^2}.$$

В покоящейся жидкости давление постоянно; мы обозначим его через C_0. На свободной границе движущейся и покоящейся жидкости, по обе ее стороны, давление одинаково и равно $\rho = 1$. Отсюда следует, что

$$C_0 = C - \frac{1}{2},$$

так что

$$p = C_0 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right).$$

Пусть теперь dl будет элементом стенки, которая с одной стороны соприкасается с движущейся жидкостью, а с другой — с покоящейся. Превышение давления первой жидкости над давлением второй, которое испытывает стенка, мы будем называть для краткости давлением на элемент dl:

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)dl.$$

Чтобы с помощью этого выражения вычислить давление на конечную часть стенки или на всю стенку, целесообразно ввести как переменную интегрирования w. Как мы уже видели в конце § 2, $dl = \rho d\varphi$, или, так как для стенки $\psi = 0$, то $dl = \rho dw$. При этом заметим, что $d\varphi$ и dw, так же как dl, должны быть взяты положительными. Тогда давление, испытываемое элементом dl, равно

$$\frac{1}{2}\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)dw.$$

Для дальнейшего вычисления мы ограничимся случаем, когда стенка прямая и параллельна оси x. Тогда на ней ζ действительно, и, следовательно,

$$\rho = \pm \zeta,$$

где знак должен быть определен условием, что ρ положительно.

Следовательно, давление, испытываемое всей стенкой, равно

$$\int \pm \frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) dw,$$

где интегрирование распространено на всю стенку, и знак должен быть выбран так, чтобы все элементы интеграла были положительны.

В случае, изображенном на фиг. 5, вследствие уравнения (12) имеем

$$\frac{1}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) = \sqrt{\frac{1}{w} - 1}.$$

Так как на протяжении стенки $\sqrt{w}$ возрастает от -1 до $+1$, то давление, испытываемое стенкой, в этом случае равно π.

§ 7

Теперь, наконец, мы освободились от некоторых предположений, сделанных в этой лекции с целью упрощения формул.

В уравнении, представляющем движение жидкости рассматриваемого вида, введем $\frac{w}{n}$ вместо w, где n — положительное постоянное; тогда новое уравнение представит движение, в котором линии тока останутся прежними, скорость всюду будет пропорциональна n, давление, испытываемое стенкой, пропорционально n^2.

Введем в то же уравнение $\frac{z}{m}$ и $\frac{w}{m}$ вместо z и w, где m опять положительное постоянное: тогда это видоизмененное уравнение представит новое движение, в котором линии тока подобны прежним, а скорость в соответственных точках та же. Линейные размеры линий тока пропорциональны m, также пропорционально m и давление, испытываемое стенкой.

Если плотность жидкости равна не единице, а μ, то давление, испытываемое стенкой, пропорционально μ. Возвратимся еще раз к исследованию течения, изображенного на фиг. 5, но положим, что l есть длина стенки, v — скорость движения жидкости на свободной границе или в бесконечности, μ — плотность жидкости. Тогда давление, испытываемое твердой стенкой, равно

$$\mu v^2 \frac{l\pi}{4+\pi}.$$

ЛЕКЦИЯ ДВАДЦАТЬ ТРЕТЬЯ

(Движение воздуха или другой сжимаемой жидкости, на частицы которой не действуют никакие силы. Случай, когда существует потенциал скоростей, и скорость есть величина бесконечно малая. Вывод условий, определяющих потенциал скоростей. Плоские волны; отражение последних. Шаровые волны. Вычисление потенциала скоростей из начальных данных для случая, когда воздушная область безгранична. Движение неизменяемого шара в воздухе. Колебания шара. Интенсивность производимых тонов. Колебание двух малых шаров)

§ 1

До сих пор мы изучали движение жидкости только в предположении, что ее можно рассматривать как несжимаемую; теперь будем учитывать изменение ее плотности. К явлениям, которые нам придется здесь изучать, относятся преимущественно *звуковые колебания воздуха*. Будем под жидкостью здесь подразумевать *воздух*, хотя производимые вычисления пригодны для всякой жидкости. Предположим, что существует потенциал скоростей, что силы не действуют и скорость всюду изменяется непрерывно. Обозначим для точки (x, y, z) в момент t через φ потенциал скоростей, через p — давление, через μ — плотность. Тогда из уравнений (20), (21) и (6) пятнадцатой лекции получим

$$-P=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right], \tag{1}$$

$$0=\frac{\partial\mu}{\partial t}+\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\mu\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)}{\partial z}, \tag{2}$$

$$P=\int\frac{dp}{\mu}, \tag{3}$$

где обозначенный через P интеграл можно вычислить из соотношения, существующего между p и μ, причем нижний предел интеграла может быть выбран произвольно. Мы ограничимся исследованием случая, когда скорости, так же как изменения давления и плотности, можно рассматривать как бесконечно малые. Прежде всего тогда можно положить

$$dp=a^2d\mu, \tag{4}$$

где через a обозначено положительное постоянное, которое, как мы увидим, представляет скорость распространения звука в воздухе. Положим далее

$$\mu=\mu_0(1+\sigma), \tag{5}$$

причем под μ_0 мы будем понимать постоянное, бесконечно мало отличающееся от μ; величину σ мы назовем сгущением в точке (x, y, z) в момент t.

Примем во внимание только члены низшего порядка; тогда, полагая, что σ и P одновременно обращаются в нуль, из (3), (4) и (5) будем иметь

$$P = a^2\sigma,$$

а из (1) и (2)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\varphi}{\partial t} + a^2\sigma = 0, \\ &\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \Delta\varphi = 0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Отсюда найдем для φ дифференциальное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\Delta\varphi. \tag{7}$$

По определению потенциала скоростей, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ являются компонентами скорости, и по уравнению (6) выражение $-\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ есть сгущение в точке (x, y, z) в момент t. Поэтому все эти величины будут найдены, если известна φ как функция x, y, z, t с точностью до постоянного, независимого от этих четырех аргументов. Докажем, что уравнением (7) φ вполне определено, если φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ будут даны для $t = 0$ как функции x, y, z, и для всех элементов поверхности, ограничивающей рассматриваемую массу воздуха, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ будет дано как функция t, и φ будет предположено непрерывным. Обозначим через $d\tau$ объем, занимаемый элементом массы воздуха в момент t; умножим уравнение (7) на $\frac{\partial\varphi}{\partial t}d\tau$ и проинтегрируем по τ. Тогда уравнение (7) перейдет в следующее:

$$\frac{d}{dt}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 d\tau = 2a^2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Delta\varphi\, d\tau, \tag{8}$$

так как член, который при раскрытии левой части (8) появится в ней вследствие того, что $d\tau$ изменяется с временем, будет высшего порядка малости сравнительно с остальными членами. На этом же основании будем иметь

$$\frac{d}{dt}\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau =$$

$$= 2\int\left(\frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\frac{\partial\varphi}{\partial t}}{\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)d\tau.$$

Правая часть этого уравнения, а вместе с нею и левая, на основании выраженной уравнением (14) шестнадцатой лекции теоремы Грина, равна

$$-2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Delta\varphi\, d\tau - 2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds,$$

где через ds обозначен элемент поверхности массы воздуха и через n — направленная внутрь этой массы нормаль к ds; это предложение применимо также и в том случае, когда φ многозначно, так как все производные φ по x, y, z и t однозначны. Поэтому уравнение (8) примет вид

$$\frac{d}{dt}\int\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=-2\int\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n}ds.$$

Это выражает теорему живых сил для случая, который мы рассматриваем. Если для всех элементов поверхности, при всяком значении времени, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$, то найденное уравнение интегрируется и дает

$$\int\left[\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]d\tau=C,$$

где C — не зависящая от t величина. Если для $t=0$ всюду φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ обращаются в нуль, то $C=0$. Тогда φ не зависит от x, y, z, t, т. е. всегда и везде $\varphi=0$. Итак, мы докажем, что если φ удовлетворяет дифференциальному уравнению (7), для $t=0$ функции φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ обращаются в нуль, и на поверхности для всякого значения времени $\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$, то, вообще, $\varphi=0$. Отсюда следует, что если φ_1 и φ_2 удовлетворяют уравнению (7), для $t=0$ имеют место равенства

$$\varphi_1=\varphi_2 \text{ и } \frac{\partial\varphi_1}{\partial t}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial t},$$

и на поверхности будет

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial n},$$

то, вообще, имеем

$$\varphi_1=\varphi_2.$$

Для некоторого промежутка времени для каждой точки массы воздуха φ можно выразить более простым образом через значения φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, которые они имеют в начальный момент. Чтобы показать это, воспользуемся частным решением уравнения (7), которое выведем в следующем параграфе.

§ 2

Предположим, что φ не зависит от x и y; тогда уравнение (7) перейдет в следующее:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \tag{9}$$

Положим

$$x=z-at,\quad y=z+at,$$

причем величинам x и y дано новое значение; тогда получим

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y};$$

следовательно, уравнение (9) примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y}=0.$$

Отсюда следует, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ не зависит от y; поэтому φ должно быть суммой функции x и функции y. Следовательно, общим решением уравнения (9) будет

$$\varphi = F_1(z - at) + F_2(z + at), \tag{10}$$

где F_1 и F_2 означают произвольные функции указанных аргументов.

Положим, что

$$\varphi = F_1(z - at),$$

и F_1 имеет переменное значение только тогда, когда аргумент лежит между нулем и ε. Тогда в момент t φ имеет переменное значение только тогда, когда z лежит между at и $at + \varepsilon$, и именно то самое значение, которое должно быть для этого момента t. Говорят: *волна* постоянной формы распространяется в направлении оси z со скоростью a.

Если

$$\varphi = F_2(z + at),$$

F_2 имеет переменное значение только тогда, когда аргумент лежит внутри некоторого интервала, то мы имеем волну, которая распространяется с той же скоростью в противоположном направлении. Самое общее движение, представляемое уравнением (10), соответствует случаю, когда имеются две волны или две системы волн, которые распространяются со скоростью a в направлении оси z и в противоположном.

Предположим, что имеется твердая стенка, для которой $z = l$, так что для этого значения z всегда должно быть $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$. Пусть для рассматриваемой массы воздуха $z < l$ и t положительно, и пусть в момент $t = 0$ имеется одна волна, которая движется в направлении оси z, но не достигает этой стенки. Тогда для $t = 0$ и для достаточно малых значений t имеем

$$\varphi = F_1(z - at);$$

функция $F_1(x)$ будет при этом определена для всех значений x, которые меньше l, с точностью до добавочной постоянной, через сгущения или через скорости, которые имеют место в момент $t = 0$. Она будет вполне определена для этих значений x, если мы еще примем, что $F_1(x) = 0$, когда x близко к значению l. Применим уравнение (10) к нашему случаю; тогда мы должны положить $F_2(y) = 0$ для всех значений y, меньших l; для больших значений аргумента определим F_2 из условия, которое должно быть выполнено для $z = l$.

Действительно, обозначим через F_1' и F_2' производные от F_1 и F_2, взятые по их аргументам; тогда для положительных значений t должно быть

$$F_1'(l - at) + F_2'(l + at) = 0,$$

или, если положим, что для всех значений y, больших l, $y = l + at$, то

$$F_2'(y) = -F_1'(2l - y).$$

Проинтегрируем это уравнение, умножив его на dy и выбрав постоянные интегрирования так, чтобы $F_2(y)$ оставалась непрерывной при $y = l$; тогда получим

$$F_2(y) = F_1(2l - y).$$

Это уравнение применимо только для случая, когда $y > l$; его можно распространить также и на случай, когда $y < l$, в котором $F_2(y) = 0$, если $F_1(x)$, определенная до сих пор только для значений x, меньших, чем l. Мы примем значения $x > l$ равными нулю. Тогда в общем случае будем иметь

$$\varphi = F_1(z - at) + F_1(2l - z - at). \tag{11}$$

Второй член в этом выражении представляет волну, которая движется в направлении, противоположном оси z; о ней говорят, что она *отраженная*, так как она возникает вследствие *отражения* от стенки при $z = l$.

Мы еще упростим рассматриваемый случай, предположив, что l бесконечно велико и $F_1(x)$ обращается в нуль для бесконечно больших положительных значений x. Тогда для конечных значений t уравнение (11) будет

$$\varphi = F_1(z - at),$$

т. е. движение происходит так, как если бы стенки при $z = l$ не было. Для бесконечно больших значений t последнее уравнение неприменимо. В любом месте оно удовлетворяется до тех пор, пока отраженная от стенки волна не достигнет его.

Мы исследовали плоскую волну, теперь рассмотрим *сферическую*. Положим

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

и допустим, что, помимо t, φ зависит еще только от r. Так как в этом случае

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r},$$

то уравнение (7) перейдет в

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right),$$

или, по умножении на r, в

$$\frac{\partial^2(\varphi r)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2(r\varphi)}{\partial r^2}.$$

Это уравнение того же вида, как (9); его общим решением является

$$\varphi = \frac{1}{r}F_1(r - at) + \frac{1}{r}F_2(r + at), \tag{12}$$

где F_1 и F_2 — по-прежнему произвольные функции.

Этим уравнением представлены две системы шаровых волн, из которых одна распространяется от начала наружу, другая же идет снаружи к исходной точке со скоростью a. Но при распространении этих волн скорость и изменение плотности не повторяются от волны к волне, как в случае плоских волн. Вследствие множителя $\frac{1}{r}$, эти величины при расширяющихся волнах убывают, а при сходящихся возрастают.

§ 3

Теперь все подготовлено к доказательству предложения, сформулированного в конце § 1. Пусть U и V — две функции прямоугольных координат x, y, z, которые вместе со своими первыми производными непрерывны внутри ограниченного односвязного объема, $d\tau$ — элемент этого объема, ds — элемент его поверхности и n — направленная внутрь нормаль к ds. Тогда по теореме Грина имеем

$$\int d\tau\,(U\Delta V - V\Delta U) = \int ds\left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right).$$

В этом уравнении положим U равным потенциалу скоростей φ, здесь рассматриваемому, т. е. удовлетворяющему уравнению (7), и выберем V так, чтобы было

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \Delta V.$$

Тогда имеем

$$\int d\tau (\varphi \Delta V - V \Delta \varphi) = \frac{1}{a^2} \int d\tau \left(\varphi \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} - V \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right) =$$
$$= \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \int d\tau \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right),$$

и, следовательно, получим, если обозначим через T любое значение t,

$$\int_0^T dt \int ds \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial V}{\partial n} \right) = \frac{1}{a^2} \left[\int d\tau \left(\varphi \frac{\partial V}{\partial t} - V \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right]_0^T. \tag{13}$$

Возьмем начало координат в любой точке объема воздуха, к которому относится φ, и положим

$$V = \frac{F(r + at)}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Из смысла уравнения (12) следует, что V удовлетворяет установленному для него дифференциальному уравнению в частных производных. Относительно функции F мы примем, что она имеет отличные от нуля значения только тогда, когда ее аргумент лежит между at' и $at' + \varepsilon$; здесь функция F положительна. Пусть при этом

$$0 < at' < at' + \varepsilon < aT,$$
$$\int_{at'}^{at'+\varepsilon} F(r)\, dr = 1$$

и ε бесконечно мало. Тогда $F(r)$ должно иметь бесконечно большое значение порядка $\frac{1}{\varepsilon}$. Ограничим объем, элемент которого $d\tau$, двумя шаровыми поверхностями, общий центр которых лежит в начале координат. Радиус одной из шаровых поверхностей бесконечно мал по сравнению с ε. Радиус другой — R равен кратчайшему расстоянию от начала координат до поверхности объема воздуха, к которому относится φ. Величина t' должна быть при этом выбрана так, чтобы

$$at' + \varepsilon < R.$$

Прежде чем с учетом этих предположений раскрыть уравнение (13), заметим, что интеграл

$$\int ds \left(V \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial V}{\partial n} \right),$$

распространенный по шару радиуса R, обращается в нуль для всех положительных значений t, потому что V и $\frac{\partial V}{\partial n}$ $\left(\text{или, что то же самое, } -\frac{\partial V}{\partial r}\right)$ для них равны нулю. Интегралы, распространенные по бесконечно малому шару, равны

$$\int ds\, V \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

$$\int ds \varphi \frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi \varphi_0 F(at),$$

где φ_0 — значение φ в точке $r=0$ в момент t, как в этом легко убедимся, если выразим ds в полярных координатах. Поэтому, произведя интегрирование по t, найдем, что левая часть уравнения (13) равна

$$\frac{4\pi}{a}\varphi_0,$$

где φ_0 относится к моменту t'.

Выражение, стоящее в прямых скобках правой части уравнения (13), обращается в нуль при $t=T$, потому что V и $\frac{\partial V}{\partial t}$ при этом равны нулю. Чтобы вычислить значение этого выражения при $t=0$, введем полярные координаты r, ϑ, ω и обозначим через F' производную функцию F по ее аргументу. Тогда правая часть уравнения (13) будет

$$\frac{1}{a^2}\int\int\int \sin\vartheta d\vartheta d\omega r dr\left[F(r)\frac{\partial\varphi}{\partial t}-aF'(r)\varphi\right],$$

где надо положить $t=0$ в φ и в $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и интегрировать по ϑ от нуля до π, по ω — от нуля до 2π и по r — от нуля до R.

Интегрирование по r можно выполнить. Действительно, имеем

$$\int_0^R rdrF(r)\frac{\partial\varphi}{\partial t}=at'\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

$$\int_0^R rdrF'(r)\varphi=[r\varphi F(r)]_0^R-\int_0^R\frac{\partial(r\varphi)}{\partial r}F(r)dr=-\frac{\partial(t'\varphi)}{\partial t'},$$

где в φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ в правой части равенства положено $r=at'$. Поэтому уравнение (13) дает

$$4\pi\varphi_0=\int\int\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\omega\left(t'\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial(t'\varphi)}{\partial t'}\right).$$

Это выражение определяет значение φ в точке $r=0$ в момент t по значениям $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ на шаровой поверхности и значение φ в точках, близких к шаровой поверхности, описанной радиусом at' вокруг точки $r=0$, в момент t. Эта точка может быть произвольно выбрана в рассматриваемом объеме воздуха и t' также может быть взято произвольно, только оно должно лежать в интервале от нуля до $\frac{R}{a}$. Если φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ при $t=0$ даны всюду, то таким образом можно определить φ в каждой точке и для некоторого промежутка времени. Если объем воздуха рассматривать как беспредельный, то тогда φ определится вполне.

§ 4

Раньше мы нашли движение твердого тела в неподвижной жидкости, предполагая, что ее можно рассматривать как несжимаемую. Теперь мы рассмотрим движение твердого тела при простейших предположениях, учитывая изменение плотности жидкости. Рассмотрим движение, для которого

$$\varphi=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{F(r-at)}{r}\right], \tag{14}$$

где через r по-прежнему обозначена линия, проведенная из начала координат в точку, к которой относится φ; F — некоторая функция, которой мы можем произвольно распорядиться. Это выражение можно принять за потенциал скоростей, так как оно удовлетворяет уравнению (7). Равнозначащим уравнению (14) будет уравнение

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{F(r-at)}{r}\right]\frac{\partial r}{\partial z},$$

или

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{F(r-at)}{r}\right]\cos\vartheta,$$

если мы обозначим через ϑ угол между направлением оси z и r. Тогда компоненту скорости частицы воздуха по направлению r, т. е. $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, определим из уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{F(r-at)}{r}\right]\cos\vartheta.$$

Пусть R будет частное значение r и

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left[\frac{F(R-at)}{R}\right] = f(t). \tag{15}$$

Тогда для $r = R$ имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} = f(t)\cos\vartheta.$$

Отсюда следует, что уравнение (14) годится для случая, когда твердый шар радиусом R, центр которого расположен бесконечно близко от начала координат, движется в направлении оси z так, что $f(t)$ есть его бесконечно малая скорость в момент t. Если f — произвольная функция, то уравнение (15) послужит для определения F. Действительно, обозначив первую и вторую производные функции F по ее аргументу через F' и F'', будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2}\left[\frac{F(R-at)}{R}\right] = \frac{2}{R^3}F(R-at) - \frac{2}{R^2}F'(R-at) + \frac{1}{R}F''(R-at).$$

Положим

$$F(R-at) = U(t), \text{ или, короче, } U; \tag{16}$$

тогда получим $F'(R-at) = -\frac{1}{a}\frac{dU}{dt}$, $F''(R-at) = \frac{1}{a^2}\frac{d^2U}{dt^2}$,

и уравнение (15) примет вид

$$\frac{2}{R^3}U + \frac{2}{aR^2}\cdot\frac{dU}{dt} + \frac{1}{a^2R}\frac{d^2U}{dt^2} = f(t). \tag{17}$$

Интегрирование этого уравнения не представляет никакой трудности. Пусть λ_1 и λ_2 будут корни квадратного уравнения

$$2\frac{a^2}{R^2} + 2\frac{a}{R}\lambda + \lambda^2 = 0,$$

т. е. пусть

$$\lambda_1 = -\frac{a}{R}(1+i),\ \lambda_2 = -\frac{a}{R}(1-i),\quad i = \sqrt{-1};$$

тогда будем иметь

$$U = U_1e^{\lambda_1 t} + U_2e^{\lambda_2 t},$$

если U_1 и U_2 будут определены как функции t из уравнений

$$\frac{dU_1}{dt} e^{\lambda_1 t} + \frac{dU_2}{dt} e^{\lambda_2 t} = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{dU_1}{dt} e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \frac{dU_2}{dt} e^{\lambda_2 t} = a^2 R f(t),$$

т. е. если

$$U_1 = \frac{a^2 R}{\lambda_1 - \lambda_2} \int f(t) e^{-\lambda_1 t} dt, \qquad U_2 = \frac{a^2 R}{\lambda_2 - \lambda_1} \int f(t) e^{-\lambda_2 t} dt,$$

где нижними границами обоих интегралов являются произвольные постоянные. Если определим U, то φ найдем из (14) и (16); второе из них дает

$$F(r - at) = U\left(t - \frac{r - R}{a}\right). \tag{18}$$

Предположим относительно функции $f(t)$, что она обращается в нуль при всех отрицательных значениях t, т. е. что шар начинает двигаться в момент $t = 0$. Положим одновременно, что нижний предел обоих интервалов в выражениях U_1 и U_2 равен нулю; тогда $U(t)$ обратится в нуль при всех отрицательных значениях t; также обратятся в нуль φ и $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ при $t = 0$ и при $r > R$. Следовательно, сделанные предположения соответствуют случаю, когда при $t = 0$ скорость и сгущение для всех частиц воздуха равны нулю. При этом

$$F(r - at) = 0, \text{ если } at < r - R;$$

любая частица воздуха остается в покое, пока существует это неравенство. Для положительных значений $tf(t)$ может еще быть выбрана произвольно. Предположим для нее

$$f(t) = c,$$

где c означает постоянное, или (что в результате приводит к тому же) предположим, что в то время, как t возрастает от нуля до бесконечно малого значения, $f(t)$ растет непрерывно от нуля до постоянного значения c. Тогда получим

$$U(t) = \frac{a^2 Rc}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[\frac{1}{\lambda_1}(e^{\lambda_1 t} - 1) - \frac{1}{\lambda_2}(e^{\lambda_2 t} - 1)\right],$$

или, если ввести значения λ_1 и λ_2,

$$U(t) = \frac{R^3 c}{2}\left[1 - \sqrt{2}\, e^{-\frac{at}{R}} \cos\left(\frac{at}{R} - \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Отсюда по (18), при $at > r - R$, имеем

$$F(r - at) = \frac{R^3 c}{2}\left[1 - \sqrt{2}\, e^{\frac{r - R - at}{R}} \cos\left(\frac{r - R - at}{R} + \frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Для очень больших значений t будет

$$F(r - at) = \frac{R^3 c}{2},$$

и потенциал скоростей получит то же значение, как прежде, при нахождении движения шара в несжимаемой жидкости.

Так же легко вычислить U и в том случае, если для положительных значений t будет

$$f(t) = c \cos \varkappa a t, \tag{19}$$

где $\varkappa$ — постоянное. Мы легче придем к цели, если воспользуемся замечанием, что функция, принимаемая за $f(t)$, представляет действительную часть выражения $ce^{i\varkappa at}$; введем эту показательную функцию вместо $f(t)$ в выражение для U и затем удержим его действительную часть. Этот способ верен потому, что если мы положим $f(t)$ равным сумме двух функций t, то получим для U сумму таких выражений, которые будут иметь место для U, если положить $f(t)$ равным той или другой из предыдущих функций; сверх того, U должно быть действительно, если действительно $f(t)$. Тогда найдем, что $U(t)$ равно действительной части выражения

$$\frac{R^3c}{2}\left[\frac{e^{i\varkappa at}-e^{-\frac{at}{R}}e^{-i\frac{at}{R}}}{1+\varkappa R-i}+\frac{e^{i\varkappa at}-e^{-\frac{at}{R}}e^{i\frac{at}{R}}}{1-\varkappa R+i}\right].$$

Отсюда для очень больших значений t получаем

$$U = A\cos\varkappa at + B\sin\varkappa at, \tag{20}$$

где A и B — постоянные. Так как это выражение для U есть действительная часть выражения

$$(A-iB)(\cos\varkappa at + i\sin\varkappa at),$$

то она должна удовлетворять уравнению

$$\frac{R^3c}{2}\left(\frac{1}{1+\varkappa R-i}+\frac{1}{1-\varkappa R+i}\right)=A-iB$$

или уравнению

$$A-iB=\frac{R^3c}{2-\varkappa^2R^2+i2\varkappa R},$$

откуда следует, что

$$A=R^3c\,\frac{2-\varkappa^2R^2}{4+\varkappa^4R^4},\quad B=R^3c\,\frac{2\varkappa R}{4+\varkappa^4R^4},$$

$$\sqrt{A^2+B^2}=\frac{R^3c}{\sqrt{4+\varkappa^4R^4}}.$$

Эти значения легко найти также из уравнения (17), если подставить туда выражения $f(t)$ и U из (19) и (20).

Для потенциала скоростей, пользуясь (18) и (14), из (20) получим

$$\varphi=\frac{\partial}{\partial r}\left[A\,\frac{\cos\varkappa(r-R-at)}{r}-B\,\frac{\sin\varkappa(r-R-at)}{r}\right]\cos\vartheta. \tag{21}$$

При движении воздуха, как оно представлено этим уравнением, если $\varkappa a$ лежит между известными границами, существует *простой тон*. *Высота* тона обусловливается названной выше величиной, или, что то же самое, *продолжительностью колебания* частицы воздуха; определим эту величину как продолжительность двойного колебания, т. е. $2\pi/\varkappa a$. Обратное этому количество называется *числом* колебаний тона. Протяжение, на которое распространяется волна за время одного колебания, т. е. $2\pi/\varkappa$, называется *длиной волны* тона. Под *интенсивностью* тона известной высоты мы будем подразумевать величину, которая пропорциональна квадрату наибольшего сгущения частиц воздуха, т. е. пропорциональна максимальному значению, которое получает $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2$ для определенного момента времени. При движении воздуха, представленном уравнением (21), интенсивность тона зависит от r и ϑ; от r — довольно сложным образом. Что касается ϑ, то интенсивность просто пропорциональна $\cos^2 \vartheta$. Следовательно, она равна нулю в плоскости, проведенной через центр колеблющегося шара перпендикулярно к направлению колебаний.

§ 5

В восемнадцатой лекции мы разобрали случай, когда два бесконечно малых шара движутся в несжимаемой жидкости. В этом случае для всех частиц жидкости, не лежащих бесконечно близко к этим шарам, потенциал скоростей можно положить равным сумме значений, которые он имел бы, если бы в жидкости был только один из двух шаров. Если же жидкость изменяет плотность, то это не имеет места. Представим себе два бесконечно малых шара равных размеров, центры которых совершают бесконечно малые маятникообразные колебания по оси z, так что скорости их в каждый момент равны и противоположны по направлению. Пусть r и r' — расстояния точек, к которым относится φ, от центров шаров; движение воздуха, аналогичное рассмотренному в конце предыдущего параграфа, при соответствующем выборе начала счета времени, будет представлено уравнением

$$\varphi = C \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\sin \varkappa (r - at)}{r} - \frac{\sin \varkappa (r' - at)}{r'}\right],$$

где C — постоянное.

Найдем точки, в которых интенсивность тока равна нулю, т. е. $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ всегда обращается в нуль; для них получим

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sin \varkappa r}{r} - \frac{\sin \varkappa r'}{r'}\right) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\cos \varkappa r}{r} - \frac{\cos \varkappa r'}{r'}\right) = 0.$$

Обозначим через ρ расстояние точки, к которой относится φ, от оси z; тогда эти два уравнения будут уравнениями между ρ и z. Поэтому в общем случае интенсивность тона может обратиться в нуль только на отдельных окружностях, для которых общей осью является ось z. Но мы получим *поверхность*, на которой интенсивность равна нулю, если $\frac{1}{\varkappa}$, т. е. если длина волны тона бесконечно велика по сравнению с r и r'. Тогда первое из этих двух уравнений будет выполнено всюду, и второе обратится в

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = 0$$

или в

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{\sqrt{(z - c)^2 + \rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z + c)^2 + \rho^2}}\right] = 0,$$

если для центров двух шаров будет $z = c$ и $z = -c$. Это уравнение представляет поверхность вращения, направляющая кривая которой имеет гиперболическую форму, проходит через центры обоих шаров и имеет асимптоты, образующие с осью z углы, косинусы которых равны $\pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

Опытным путем доказано, что вблизи концов звучащего камертона находятся такие поверхности, по которым интенсивность тона обращается в нуль.

ЛЕКЦИЯ ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

(Простые тоны. Применение теоремы Грина к потенциалу скоростей простого тона. Плоские волны. Стоячие и движущиеся колебания. Собственные тоны столба воздуха. Колебания воздуха в открытой трубе. Резонанс. Шаровые волны. Колебания воздуха в области, размеры которой бесконечно малы по сравнению с длиной волны. Кубическая трубка. Вычисление резонанса и высота тона кубической трубки для эллиптического или круглого отверстия. Вычисление резонанса и высота тона цилиндрической трубки при известных условиях)

§ 1

Познакомимся ближе с движениями воздуха, которые соответствуют простому тону, и установим ряд тех частных решений для применяющегося здесь дифференциального уравнения, которые имеют значительный интерес для акустики, а именно для теории труб. Для простого тона с числом колебаний n потенциал скоростей имеет вид

$$\varphi = \psi' \cos 2\pi n t + \psi'' \sin 2\pi n t, \tag{1}$$

где ψ' и ψ'' — функции x, y, z. Из уравнений (7) предыдущей лекции следует, что каждая из них удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\Delta \psi + \varkappa^2 \psi = 0, \tag{2}$$

если положим по-прежнему

$$\varkappa = \frac{2\pi n}{a}.$$

Прежде чем перейти к рассмотрению частных случаев, напомним, что дает формула Грина по отношению к функциям, которые во вполне ограниченном пространстве удовлетворяют этому дифференциальному уравнению и вместе со своими первыми производными однозначны и непрерывны. Решением уравнения (2) будет

$$\frac{\cos \varkappa r}{r},$$

где r — расстояние переменной точки от какой-нибудь постоянной точки. Это легко доказать непосредственным вычислением или же можно вывести из уравнения (12) предыдущей лекции. В уравнение, которое является исходным при исследовании в § 3 предыдущей лекции и выражает теорему Грина, подставим

$$U = \frac{\cos \varkappa r}{r}, \quad V = \psi,$$

причем начало радиуса r предполагается в объеме, в котором ψ имеет указанные свойства; применим эту формулу к тому объему, который останется от всего предыдущего, если исключить из него бесконечно малый шар, центр которого совпадает с началом радиуса r. Таким же исследованием, какое мы произвели в § 3 предыдущей лекции, и при простейших предположениях § 4 шестнадцатой лекции мы найдем

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int ds\psi \frac{\partial \frac{\cos \varkappa r}{r}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi}\int ds \frac{\cos \varkappa r}{r}\frac{\partial \psi}{\partial n},$$

где в левой части равенства ψ относится к началу r, и ds означает элемент поверхности первоначально взятого объема. Мы обращаем внимание на то, что, как это показывает уравнение, при предположениях, сделанных относительно ψ, все высшие производные ψ непрерывны.

Рассмотрим теперь случай, когда φ, а следовательно также и ψ (мы будем обозначать как каждую из двух величин ψ' и ψ''), не зависит от x и y. Тогда уравнение (2) будет

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} = -\varkappa^2\psi,$$

и его общий интеграл есть

$$\psi = A\cos \varkappa z + B\sin \varkappa z.$$

Поэтому мы имеем

$$\varphi = (A'\cos \varkappa z + B'\sin \varkappa z)\cos 2\pi nt + (A''\cos \varkappa z + B''\sin \varkappa z)\sin 2\pi nt, \tag{3}$$

где A', B', A'', B'' — произвольные постоянные. Это уравнение можно также представить в следующем виде:

$$\varphi = A\cos \varkappa (z - z_0)\cos 2\pi n(t - t_0) + B\sin \varkappa (z - z_0)\sin 2\pi n(t - t_0),$$

где A, B, z_0, t_0 — новые постоянные, или, при надлежащем выборе начала z и начального момента времени,

$$\varphi = A\cos \varkappa z\cos 2\pi nt + B\sin \varkappa z\sin 2\pi nt. \tag{4}$$

Разберем сперва случаи, когда A, или B, или $A - B$, или $A + B$ обращается в нуль.

При $B = 0$ будет

$$\varphi = A\cos \varkappa z\cos 2\pi nt,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\varkappa A\sin \varkappa z\cos 2\pi nt,$$

$$\sigma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\varkappa}{a} A\cos \varkappa z\sin 2\pi nt.$$

Пусть ζ — перемещение частицы воздуха в момент времени t и в направлении оси z от некоторого положения, именно от ее среднего положения: тогда, так как ζ — бесконечно малое, то

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

и

$$\zeta = -\frac{A}{a}\sin \varkappa z\sin 2\pi nt.$$

Из этого следует, что каждая частица воздуха движется совершенно так же, как точка маятника при бесконечно малых колебаниях: $-\frac{A}{a}\sin \varkappa z$ или абсолютное значение этой величины называется *амплитудой*; $2\pi nt$ или избыток этого числа над кратным 2π — *фазой* колебаний рассматриваемой частицы. Фаза для каждого мгновения всюду одна и та же, но амплитуда изменяется с z. Обозначим через λ длину волны, т. е. положим

$$\lambda = \frac{2\pi}{\varkappa};$$

тогда амплитуда равна нулю там, где z кратное $\frac{\lambda}{2}$, и будет максимум там, где z нечетное кратное $\frac{\lambda}{4}$; первые места называются *узлами*, вторые *пучностями*. Сгущение σ изменяется по такому же закону, как перемещение ζ, но его максимум имеет место в узлах, а в пучностях оно обращается в нуль. Совершенно то же самое имеет место, когда в уравнении (4) обращается в нуль A, но не B.

Колебания этого рода, именно такие, при которых фаза в некоторое мгновение всюду одинакова, называют *стоячими* колебаниями.

Если

$$A = \pm B,$$

то колебания называются бегущими; тогда

$$\varphi = A\cos\varkappa(z \mp at),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\varkappa A\sin\varkappa(z \mp at),$$

$$\zeta = \mp\frac{A}{a}\cos\varkappa(z \mp at),$$

$$\sigma = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \mp\frac{\varkappa}{a}A\sin\varkappa(z \mp at).$$

В зависимости от того, взят ли верхний или нижний знак, колебания распространяются в направлении оси z или в противоположном. Здесь амплитуда всюду одна и та же, фаза для некоторого мгновения изменяется от места к месту.

Представляемое уравнением (4) движение, если постоянные A и B не удовлетворяют ни одному из сделанных предположений, можно рассматривать как составное из каких-нибудь двух из четырех разобранных видов колебаний. Непосредственно из уравнения (4) находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\varkappa A\sin\varkappa z\cos 2\pi nt + \varkappa B\cos\varkappa z\sin 2\pi nt =$$

$$= \varkappa\sqrt{A^2\sin^2\varkappa z + B^2\cos^2\varkappa z}\cdot\sin(2\pi nt - \delta),$$

$$\zeta = -\frac{1}{a}\sqrt{A^2\sin^2\varkappa z + B^2\cos^2\varkappa z}\cdot\cos(2\pi nt - \delta),$$

$$\sigma = \frac{\varkappa}{a}A\cos\varkappa z\sin 2\pi nt - \frac{\varkappa}{a}B\sin\varkappa z\cos 2\pi nt =$$

$$= \frac{\varkappa}{a}\sqrt{A^2\cos^2\varkappa z + B^2\sin^2\varkappa z}\cdot\sin(2\pi nt - \varepsilon),$$

где

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{A}{B}\operatorname{tg}\varkappa z, \quad \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{B}{A}\operatorname{tg}\varkappa z.$$

Для каждого момента здесь изменяется вместе с z как амплитуда, так и фаза; амплитуда нигде не обращается в нуль.

Если $A^2 > B^2$, то максимум амплитуды имеет место при z, кратном $\frac{\lambda}{2}$; максимум ее — при z нечетном, кратном $\frac{\lambda}{4}$. Также и здесь первые места называют узлами, последние пучностями, и здесь также сгущение имеет максимум в узлах и минимум в пучностях.

Если масса воздуха ограничена твердой, перпендикулярной к оси z, плоскостью, то для последней должно быть

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Из предыдущего исследования вытекает, что места, в которых скорость постоянно равна нулю, имеются только при стоячих колебаниях, а потому в этом случае колебания должны быть стоячими, и пограничная плоскость должна быть узлом.

Если масса воздуха ограничена двумя твердыми плоскостями, перпендикулярными к оси z, то каждая из них должна быть узлом, и расстояние между ними должно быть кратным от длины полуволны. Вообразим, что между этими стенками масса воздуха ограничена твердой цилиндрической трубкой произвольного поперечного сечения; это допустимо, так как требуемое условие на стенках трубки, именно условие $\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$, соблюдено вследствие того, что φ не зависит от x и y. Пусть для концов трубки будет

$$z = 0 \text{ и } z = l;$$

тогда, следовательно,

$$l = h\frac{\lambda}{2} = h\frac{\pi}{\varkappa} = h\frac{a}{2n},$$

где h — целое число. Определенные при данном значении l числа n носят название чисел колебаний так называемых *собственных* тонов рассматриваемого воздушного столба. Такие колебания могут происходить соответственно уравнению

$$\varphi = A\cos\varkappa z\cos 2\pi n(t - t_0),$$

где A и t_0 — произвольные постоянные. Предположим теперь, что поперечное сечение трубы $z = 0$ неизменно, а поперечное сечение $z = l$ получает снаружи такое движение, что в момент t будет иметь скорость

$$G\cos 2\pi nt$$

в направлении оси z, где G и n означают любые данные постоянные. Этому выражению всегда должно быть равно значение $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ при $z=l$; отсюда следует, что

$$\varphi = -\frac{G}{\varkappa\sin\varkappa l}\cos\varkappa z\cos 2\pi nt.$$

При таком движении поперечного сечения $z = l$ движение частицы существенно зависит от величины $\varkappa l$; оно будет бесконечно при $\sin\varkappa l = 0$, т. е. если n соответствует одному из собственных тонов воздушного столба.

Эти условия будут приблизительно соблюдены для стеклянной трубки, закрытой двумя пробками, из которых одна неподвижна, а другая, слабо подвижная, соединена с острием камертона или другим телом, которое может сильно колебаться. Если это тело производит колебания, продолжительность которых приблизительно равна продолжительности колебаний собственного тона ограниченного столба воздуха, то последний приходит в колебания столь интенсивные, что мелкий порошок, насыпанный в трубку, приходит в движение, и положение узлов может быть с точностью определено. Причина того, что ни при каком значении n движение воздуха не возрастает безгранично, заключается в том, что стенки трубки не абсолютно тверды, подвижная трубка не вполне плотно пригнана к, главное, в трении воздуха. На описанном явлении основывается метод Кундта для измерения скорости распространения звука в различных газах.

§ 2

Представим себе, как и в нашем последнем исследовании, столб воздуха длиной l, но положим, что в поперечном сечении $z=0$ равна нулю не скорость, а сгущение. Если поперечное сечение $z=l$ представляет твердую стенку, то колебания возможны согласно уравнению

$$\varphi = A \sin \varkappa z \cos 2\pi n (t - t_0),$$

если $\cos \varkappa l = 0$, т. е. l равно нечетному кратному длины четверти волны. Если сечение $z=l$ движется так, что его скорость в момент t равна $G \cos 2\pi n t$, то

$$\varphi = \frac{G}{\varkappa \cos \varkappa l} \sin \varkappa z \cos 2\pi n t. \tag{5}$$

Д. Бернулли, Эйлер и Лагранж полагали, что если цилиндрическая трубка при $z=0$ сообщается с бесконечным воздушным пространством, то сгущение здесь всегда равно нулю, так что воздух в трубке, с одной стороны открытой, а с другой закрытой, может колебаться соответственно установленному уравнению. Гельмгольц* показал, в каких пределах верно это предположение. Оно подразумевает, что размеры поперечного сечения бесконечно малы по сравнению с длиной трубы и длиной волны. При этом на бесконечно малом участке при открытом конце труба может быть расширена или сжата. Тогда для внутренних точек трубы, лежащих на конечном расстоянии от отверстия, установленное уравнение дает потенциал скоростей, верный до бесконечно малой дробной части его значения, при условии, что l не равно (с точностью до бесконечно малых) нечетному кратному четверти волны. О зависимости движения внутри трубки и вне ее при этих предположениях нельзя получить никаких указаний. Не делая таких предположений, мы исследуем теперь колебания воздуха в открытой с одной стороны трубе, размеры поперечного сечения которой бесконечно малы сравнительно с ее длиной и длиной волны.

Вообразим объем воздуха, простирающийся в бесконечность, следовательно, только отчасти ограниченный стенками. Предположим, что часть этой стенки образована параллельной оси z цилиндрической трубой, которая вблизи ее отверстия может отклоняться от цилиндрической формы; размеры ее поперечного сечения мы будем рассматривать как конечные, ее длину и длину волны — как бесконечно большие, причем $\varkappa$ тогда бесконечно мало. Допустим, что внутри трубы на бесконечно большом расстоянии от отверстия имеются плоские волны. Положим, что начало z расположено в области плоских волн, но так, что расстояние его от отверстия еще бесконечно мало сравнительно с длиной волны, и возьмем положительное направление оси z к основанию трубы. Поперечное сечение $z=0$ делит весь рассматриваемый объем воздуха на две части, которые мы и будем иметь в виду. Для одной части, которая вся находится в трубе и для которой z всюду положительно, имеет место уравнение (3), т. е.

$$\varphi = (A' \cos \varkappa z + B' \sin \varkappa z) \cos 2\pi n t + (A'' \cos \varkappa z + B'' \sin \varkappa z) \sin 2\pi n t; \tag{6}$$

для другой — общее уравнение (1), т. е.

$$\varphi = \psi' \cos 2\pi n t + \psi'' \sin 2\pi n t.$$

Для полученного сечения $z=0$ оба выражения для φ и для получающегося из него $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ должны быть равны между собой, так как плотность и скорость должна всюду изменяться непрерывно. Соответствующее урав-

* Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. Crelle's Journal, Bd 57.

нение мы составим после того, как преобразуем второе выражение для φ Введем в него частные значения ψ' и ψ'', соответствующие некоторому движению поперечного сечения $z = 0$, которые мы обозначим через f' и f''. Пусть

$$\varphi = f' \cos 2\pi nt + f'' \sin 2\pi nt,$$

если для поперечного сечения $z = 0$ имеет место соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \cos 2\pi nt$$

и на остальной части границы объема воздуха, к которому относятся ψ' и ψ'', то производная φ по нормали обращается в нуль. Тогда f' и f'' являются функциями x, y, z, обладающими такими свойствами, что для поперечного сечения $z = 0$

$$\frac{\partial f'}{\partial z} = 1, \qquad \frac{\partial f''}{\partial r} = 0. \tag{7}$$

Из этих частных решений дифференциального уравнения, которому удовлетворяет φ, мы получим более общее, если помножим их на постоянный множитель c и прибавим к t постоянное δ. Положим

$$\varphi = c\,[f' \cos 2\pi n (t + \delta) + f'' \sin 2\pi n (t + \delta)];$$

тогда для поперечного сечения $z = 0$ будем иметь

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = c \cos 2\pi n\,(t + \delta),$$

причем на остальной части границы выполнено прежнее условие. Будем рассматривать c и δ как переменные; тогда в каждом месте наибольшее сгущение пропорционально c, интенсивность же тона пропорциональна c^2, но она при этом изменяется в зависимости от места. Введем вместо c и δ две другие переменные величины c' и c'', причем положим

$$c' = c \cos 2\pi n\delta, \quad c'' = -c \sin 2\pi n\delta;$$

тогда

$$\varphi = (c'f' - c''f'') \cos 2\pi nt + (c'f'' + c''f') \sin 2\pi nt;$$

для поперечного сечения $z = 0$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = c' \cos 2\pi nt + c'' \sin 2\pi nt,$$

и интенсивность тона пропорциональна

$$c'^2 + c''^2.$$

Сравним теперь это выражение с выражением для области плоских волн (6) и запишем условие, чтобы для поперечного сечения $z = 0$ оба эти выражения привели к одинаковым формулам для сгущения и скорости. Обозначим значения, которые f' и f'' имеют в сечении $z = 0$, через f_0' и f_0'': тогда с помощью (7) получим для них

$$\begin{aligned} A' &= c'f_0' - c''f_0'', \quad \varkappa B' = c', \\ A'' &= c'f_0'' + c''f_0', \quad \varkappa B'' = c''. \end{aligned} \tag{8}$$

Предположим теперь, что поперечное сечение трубы $z = l$ (где l порядка длины волны) получает извне такое движение, что скорость его в момент

t в направлении оси z равно $G \cos 2\pi nt$. Тогда это выражение должно быть равно тому значению $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, которое получается вследствие уравнения (6) при $z = l$, т. е. должно быть

$$G = \varkappa(-A' \sin \varkappa l + B' \cos \varkappa l),$$
$$0 = \varkappa(-A'' \sin \varkappa l + B'' \cos \varkappa l).$$

Исключив из этих уравнений и уравнений (8) величины A', B', A'', B'', получим

$$\begin{aligned} G &= c'(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l) + c'' \varkappa f_0'' \sin \varkappa l, \\ 0 &= c' \varkappa f_0'' \sin \varkappa l - c''(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l). \end{aligned} \tag{9}$$

Если известны постоянные f_0' и f_0'', то из этих уравнений легко можно найти значения c' и c'', и из (8) — значения A', B', A'', B''; если известны также функции f' и f'', то движение будет определено во всем подлежащем рассмотрению объеме воздуха.

Особый интерес представляет знание величины $c'^2 + c''^2$, которая, как мы видели, пропорциональна интенсивности тона в какой-нибудь точке внешнего объема воздуха. Если возведем в квадрат и сложим уравнения (9), то найдем

$$c'^2 + c''^2 = \frac{G^2}{(\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l)^2 + (\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2}. \tag{10}$$

Если l изменяется, в то время как G и $\varkappa$ сохраняют одни и те же значения, то уравнение интенсивности тона изменяется периодически, принимая попеременно значения максимума и минимума. Так как $c'^2 + c''^2$ равно обратному значению однородной функции второй степени переменных $\cos \varkappa l$ и $\sin \varkappa l$, то мы определим его максимум и минимум из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\varkappa l = \gamma,$$

где γ означает постоянное, зависящее от коэффициентов этой функции, или, если по-прежнему обозначим через λ длину волны, из уравнения

$$\operatorname{tg} 4\pi \frac{l}{\lambda} = \gamma.$$

Если l_m — одно из значений l, соответствующее максимуму силы тона, то отсюда остальные максимальные и минимальные значения l будут равны соответственно

$$l_m + h \frac{\lambda}{2}$$

и

$$l_m + (2h + 1) \frac{\lambda}{4},$$

где h — целое число.

На одном примере, в котором мы доведем вычисление до конца, мы убедимся, что $\varkappa f_0''$ есть число бесконечно малое; если принять это во внимание, то уравнение (10) показывает, что для максимума силы тона будет

$$\cos \varkappa l - \varkappa f_0' \sin \varkappa l = 0, \tag{11}$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \varkappa l = \frac{1}{\varkappa f_0'},$$

$$c'^2 + c''^2 = G^2 \frac{1}{(\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2} = G^2 \frac{1 + \varkappa^2 f_0'^2}{\varkappa^2 f_0''^2},$$

и что значение этого максимума бесконечно велико сравнительно со значением силы тона в случае, когда уравнение (11) не удовлетворено. Так же убедимся, что это правило верно при данном значении l и при переменной высоте тона, т. е. при переменном $\varkappa$.

Определим угол $\varkappa\alpha$ из уравнения

$$\operatorname{tg} \varkappa\alpha = \varkappa f_0';$$

тогда уравнение (10) примет вид

$$c'^2 + c''^2 = \frac{G^2}{\dfrac{\cos^2 \varkappa (l + \alpha)}{\cos^2 \varkappa\alpha} + (\varkappa f_0'' \sin \varkappa l)^2}.$$

В упомянутом примере мы видим, что при известных условиях $\varkappa f_0'$ также бесконечно мало; тогда можно положить

$$\alpha = f_0'.$$

§ 3

В предыдущем параграфе мы предполагали, что вся граница части объема воздуха, к которой относятся ψ' и ψ'', за исключением поперечного сечения $z = 0$, находится в покое, и поперечное сечение $z = l$ получает некоторое движение. Теперь мы предположим, что другая часть этой границы получает известное движение и поперечное сечение $z = l$ находится в покое. Чтобы иметь в виду определенный случай, мы будем представлять себе, что перед отверстием трубы находится звучащий камертон, поверхность которого принадлежит, следовательно, к указанной границе. Для случая, когда камертон колеблется определенным образом и поперечное сечение $z = 0$ находится в покое, мы положим потенциал скоростей для точки внешнего объема воздуха равным

$$F' \cos 2\pi nt + F'' \sin 2\pi nt,$$

а для случая, когда камертон находится в покое, и поперечное сечение $z = 0$ движется, так что для него

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \cos 2\pi nt,$$

возьмем потенциал скоростей равным

$$f' \cos 2\pi nt + f'' \sin 2\pi nt.$$

Тогда F' и F'' являются некоторыми функциями переменных x, y, z, которые имеют то свойство, что для $z = 0$ будет

$$\frac{\partial F'}{\partial z} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial F''}{\partial z} = 0, \tag{12}$$

и f' и f'' имеют то же значение, как в предыдущем параграфе.

Если камертон звучит и поперечное сечение $z=0$ движется, так что для него

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=c'\cos 2\pi nt+c''\sin 2\pi nt,$$

то

$$\varphi=(F'+c'f'-c''f'')\cos 2\pi nt+(F''+c'f''+c''f')\sin 2\pi nt. \tag{13}$$

Для области внутри трубы по-прежнему имеет место уравнение (6). Поставим условия, чтобы оба выражения φ и оба выражения $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, которые получим для $z=0$, были бы равны между собой для всех значений t; тогда при помощи (7) и (12) найдем

$$A'=F_0'+c'f_0'-c''f_0'',\quad \varkappa B'=c',$$

$$A''=F_0''+c'f_0''+c''f_0',\quad \varkappa B''=c'',$$

где через F_0' и F_0'' обозначены значения F' и F'' при $z=0$. Если, как мы предположим, поперечное сечение $z=0$ находится в покое, то из (6) следует, что

$$A'\sin\varkappa l-B'\cos\varkappa l=0,$$

$$A''\sin\varkappa l-B''\cos\varkappa l=0.$$

Из этих уравнений мы получим

$$c'(\cos\varkappa l-\varkappa f_0'\sin\varkappa l)+c''\varkappa f_0''\sin\varkappa l=\varkappa F_0'\sin\varkappa l,$$

$$c'\varkappa f_0''\sin\varkappa l-c''(\cos\varkappa l-\varkappa f_0'\sin\varkappa l)=-\varkappa F_0''\sin\varkappa l,$$

и отсюда далее

$$c'^2+c''^2=\frac{(F_0'^2+F_0''^2)\,\varkappa^2\sin^2\varkappa l}{(\cos\varkappa l-\varkappa f_0'\sin\varkappa l)^2+(\varkappa f_0''\sin\varkappa l)^2}. \tag{14}$$

Движение в простирающемся в бесконечность объеме воздуха вследствие уравнения (11) можно рассматривать как уравнение, составленное из того, которое имело бы место, если бы поперечное сечение $z=0$ было в покое, в то время как камертон двигался бы данным образом, и некоторого другого уравнения. Относительно этого другого уравнения говорят, что оно происходит от *резонанса* трубы. Интенсивность тона, производимого резонансом, пропорциональна $c'^2+c''^2$. Если l меняется, то эта величина имеет максимум, равный

$$\frac{F_0'^2+F_0''^2}{f_0''^2}$$

при

$$\operatorname{tg}\varkappa l=\frac{1}{\varkappa f_0'}, \tag{15}$$

и минимум, равный нулю, если

$$\sin\varkappa l=0.$$

Воспользуемся тем, что $\varkappa f_0''$ — число бесконечно малое, и будем считать максимумы резонанса конечными; тогда из (14) следует, что резонанс будет бесконечно мал, пока $\varkappa l$ отличается от каждого корня уравнения (15) на любое конечное количество. Это верно также, когда l постоянно и $\varkappa$ переменно. Если перед отверстием трубы поддерживать движение, которое можно рассматривать как составленное из различных тонов, то только те из этих тонов будут весьма усилены резонансом, которые соответствуют уравнению (15).

§ 4

Исследование, аналогичное произведенному в трех предыдущих параграфах этой лекции для плоских волн, можно произвести для сферических волн. Решением дифференциального уравнения, которому удовлетворяет потенциал скоростой вследствие уравнения (12) предыдущей лекции, будет

$$\varphi = \frac{1}{r}(A' \cos \varkappa r + B' \sin \varkappa r) \cos 2\pi n t + \\ + \frac{1}{r}(A'' \cos \varkappa r + B'' \sin \varkappa r) \sin 2\pi n t. \quad (16)$$

Это уравнение того же вида, как уравнение (3), и может привести к таким же заключениям, как последнее. Соответствующее уравнению (16) движение возможно в объеме воздуха, ограниченном двумя концентрическими сферическими поверхностями, точки которых надлежащим образом движутся в радиальном направлении, или двумя такими же сферическими поверхностями и неподвижной конической поверхностью с вершиной в центре сферы.

Частным случаем уравнения (16) является уравнение

$$\varphi = \frac{1}{r}(A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r) \cos 2\pi n (t - t_0). \quad (17)$$

Оно представляет стоячие волны. При таком движении на некоторых сферических поверхностях сгущение всегда равно нулю; радиусы их определяются из уравнения

$$A \cos \varkappa r + B \sin \varkappa r = 0.$$

На других поверхностях — узлах — обращается в нуль скорость, радиусы же узлов удовлетворяют более сложному уравнению

$$A \frac{d \frac{\cos \varkappa r}{r}}{dr} + B \frac{d \frac{\sin \varkappa r}{r}}{dr} = 0,$$

т. е.

$$A (\cos \varkappa r + \varkappa r \sin \varkappa r) + B (\sin \varkappa r - \varkappa r \cos \varkappa r) = 0. \quad (18)$$

Если сферические поверхности, ограничивающие массу воздуха, неподвижны, и R и R' — их радиусы, то движение, представляемое уравнением (17), возможно, если $\varkappa$ имеет такое значение, что уравнение (18) может быть удовлетворено при $r = R$ и $r = R'$, при A и B, не обращающихся одновременно в нуль. Усл овием этого является уравнение

$$\operatorname{tg} \varkappa (R - R') = \frac{\varkappa (R - R')}{1 + \varkappa^2 R R'},$$

которое при $R' = 0$ перейдет в более простое

$$\operatorname{tg} \varkappa R = \varkappa R.$$

Эти уравнения определяют собственные тоны рассматриваемой массы воздуха.

Другим частным случаем уравнения (16) является уравнение

$$\varphi = \frac{A}{r}\cos(\varkappa r - 2\pi nt) + \frac{B}{r}\sin(\varkappa r - 2\pi nt); \tag{19}$$

оно представляет волны, которые из их центра распространяются наружу. Заменим в (19) минус в cos и sin на плюс; тогда будем иметь волны, идущие снаружи к центру.

Вычисление, подобное тому, которое мы произвели в § 2 и 3 относительно бесконечно тонкой цилиндрической трубы, может быть применимо и для конической трубы, имеющей бесконечно малое отверстие при вершине, сообщающейся с бесконечным воздушным пространством и с другой стороны ограниченной сферической поверхностью с центром в вершине.

§ 5

Рассмотрим теперь для плоских и сферических волн третий род колебаний, соответствующих простому тону. Мы займемся здесь колебаниями объема воздуха, все измерения которого бесконечно малы сравнительно с длиной волны тона. Размер объема воздуха примем за конечную, величину, длину волны — за бесконечно большую; тогда величина $\varkappa$ будет бесконечно малой. Применим опять способ обозначений, принятый для уравнений (1) и (2), т. е. положим

$$\varphi = \psi' \cos 2\pi nt + \psi'' \sin 2\pi nt$$

и будем понимать под ψ любую из двух зависящих от x, y, z величин ψ' и ψ''. Уравнение (2), а именно

$$\Delta\psi + \varkappa^2\psi = 0, \tag{20}$$

если $\varkappa$ бесконечно мало и ψ не бесконечно велико по сравнению со своей производной, перейдет в уравнение

$$\Delta\psi = 0,$$

которому удовлетворяет потенциал скоростей для несжимаемой жидкости. Каждое однозначное решение его мы можем принять за ψ; ψ должно быть однозначно, даже если объем воздуха будет многосвязным, так как сгущение, а также $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, должны быть однозначными. Тогда в каждый момент воздух движется как несжимаемая жидкость. Обозначим через ds элемент поверхности объема воздуха и через n — направленную внутрь нормаль к ds; тогда будем иметь

$$\int ds \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0. \tag{21}$$

Если $\frac{\partial\psi}{\partial n}$, удовлетворяющее этому условию, дано, то, следовательно, всегда дана также некоторая функция ψ, содержащая дополнительное произвольное постоянное и удовлетворяющая уравнению $\Delta\psi = 0$ *.

---

* В своем сочинении: «Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte» Гаусс установил теорему, что для вполне ограниченного пространства всегда имеется функция, непрерывная и однозначная со своими первыми производными, которая удовлетворяет уравнению $\Delta\psi=0$ и принимает на поверхности любые данные значения. Аналогичным способом можно доказать изложенное выше. Однако относительно полной строгости доказательства возникли сомнения; эти же сомнения могут появиться и при другом доказательстве.

Если условие (21) не соблюдено, то уравнение (20) решается следующим образом. Положим

$$\psi = \frac{C}{\varkappa^2} + U,$$

где C и U не зависят от $\varkappa$, C — постоянное, U — функция x, y, z, которая должна быть надлежащим образом определена. Тогда для U получим дифференциальное уравнение в частных производных[42]

$$\Delta U + C = 0.$$

Мы удовлетворим этому уравнению, если положим

$$U = \frac{C}{4\pi}\Omega + V,$$

где Ω — потенциал массы (плотность которой равна единице), заполняющей рассматриваемый объем воздуха, и V — решение уравнения

$$\Delta V = 0.$$

Если надлежащим образом выбрать постоянную C, то это решение может быть таким, что $\frac{\partial\psi}{\partial n}$ получит любые значения. Мы имеем

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{C}{4\pi}\frac{\partial\Omega}{\partial n} + \frac{\partial V}{\partial n};$$

так как

$$\int ds \frac{\partial V}{\partial n} = 0,$$

то надо положить

$$\frac{C}{4\pi}\int ds \frac{\partial\Omega}{\partial n} = \int ds \frac{\partial\psi}{\partial n},$$

или, так как

$$\int ds \frac{\partial\Omega}{\partial n} = 4\pi T,$$

где T обозначает объем рассматриваемой массы воздуха,

$$CT = \int ds \frac{\partial\psi}{\partial n}. \tag{22}$$

Тогда

$$\psi = \frac{C}{\varkappa^2} + \frac{C}{4\pi}\Omega + V. \tag{23}$$

Решение уравнения (20) приводит к теории так называемой *кубической трубки*. Под этим названием подразумевают сосуд, размерами которого являются величины одинакового порядка, сообщающийся с бесконечным воздушным пространством через маленькое отвéрстие. Если в отверстие дуть надлежащим образом, то возникает тон. Мы будем рассматривать размеры сосуда как конечные, размеры отверстия — как бесконечно малые, а длину волны тона — как бесконечно большую. Для этого можно применить исследование, которое было произведено в § 2 и 3 для цилиндрической трубы. Сперва мы будем иметь в виду случай, когда одна часть стенки сосуда, которая не должна достигать края отверстия, получит некоторое периодическое движение.

Представим себе сферическую поверхность, описанную вокруг отверстия — центра — радиусом, который бесконечно мал, но сравнительно с размерами отверстия он бесконечно велик.

Часть этой поверхности, лежащую внутри сосуда, будем называть нулевой поверхностью; ее элемент обозначим через ds_0; она соответствует поперечному сечению $z = 0$ цилиндрической трубы. Примем, что для всех элементов поверхности 0 скорость направлена по радиусу и равна ему по величине. Такое предположение допустимо, по крайней мере, для случаев, в которых вычисление будет доведено до конца. Это выяснится из того, что при сделанном предположении для всего рассматриваемого объема воздуха можно найти φ, которое непрерывно со своими первыми производными всюду, как и на поверхности 0.

В случае, когда давление на поверхности 0 таково, что

$$\int ds_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \cos 2\pi nt,$$

где n — направленная внутрь сосуда нормаль к ds_0, предположим, что для какой-нибудь точки части всего рассматриваемого объема воздуха, простирающейся в бесконечность и ограниченной поверхностью 0, будет

$$\varphi = f' \cos 2\pi nt + f'' \sin 2\pi nt.$$

При этом f' и f'' означают некоторые функции x, y, z, имеющие то свойство, что

$$\int ds_0 \frac{\partial f'}{\partial n} = 1, \quad \int ds_0 \frac{\partial f''}{\partial n} = 0. \tag{24}$$

Тогда для случая, когда движение на поверхности 0 происходит по уравнению

$$\int ds_0 \frac{\partial \varphi}{\partial n} = c' \cos 2\pi nt + c'' \sin 2\pi nt,$$

получим

$$\varphi = (c'f' - c''f'') \cos 2\pi nt + (c'f'' + c''f') \sin 2\pi nt; \tag{25}$$

интенсивность тона всюду пропорциональна $c'^2 + c''^2$.

Во второй части рассматриваемого объема воздуха, вполне ограниченной поверхностью 0 и стенкой сосуда, каждая из двух величин ψ' и ψ'' удовлетворяет уравнению (23). Обозначим значения C для этих функций через C' и C''. Так как функция φ непрерывна на поверхности 0, то, если пренебречь членами, бесконечно малыми сравнительно с принимаемыми во внимание, отсюда следует, что

$$\begin{aligned} C' &= \varkappa^2 (c'f_0' - c''f_0''), \\ C'' &= \varkappa^2 (c'f_0'' + c''f_0'), \end{aligned} \tag{26}$$

где f_0' и f_0'' представляют значения f' и f'' для какой-нибудь точки поверхности 0. Два других уравнения получим, когда $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ на поверхности 0 также непрерывно. С одной стороны, из (25) с помощью (24) следует, что

$$\int ds_0 \frac{\partial \psi'}{\partial n} = c', \quad \int ds_0 \frac{\partial \psi''}{\partial n} = c''.$$

Будем называть часть стенки сосуда, которая получает движение снаружи, поверхностью l и обозначим элемент ее через ds_l. Пусть движение будет таким, что

$$\int ds_l \frac{\partial \varphi}{\partial n} = G \cos 2\pi nt,$$

где n — направленная внутрь сосуда нормаль к ds_i, G — постоянное. Тогда уравнение (22) дает

$$G + \int ds_0 \frac{\partial\psi'}{\partial n} = C'T,$$

$$\int ds_0 \frac{\partial\psi''}{\partial n} = C''T,$$

если T — объем сосуда; отсюда имеем

$$G + c' = C'T,$$

$$c'' = C''T.$$

Подставив сюда вместо C' и C'' их значения из (26), найдем

$$c'(1 - \varkappa^2 f_0' T) + c''\varkappa^2 f_0'' T = -G,$$

$$c'\varkappa^2 f_0'' T - c''(1 - \varkappa^2 f_0' T) = 0,$$

и отсюда

$$c'^2 + c''^2 = \frac{G^2}{(1 - \varkappa^2 f_0' T)^2 + (\varkappa^2 f_0'' T)^2}.$$

Из одного примера мы увидим, что второй член в знаменателе этого выражения есть число бесконечно малое. Применив это замечание, мы можем заключить, что интенсивность тона бесконечно велика сравнительно со значениями, которые она имела прежде, если только

$$1 - \varkappa^2 f_0' T = 0. \qquad (27)$$

Допустим теперь, что стенки сосуда находятся в покое и тон задается извне сосуда, например колеблющимся камертоном. Для этого случая можно применить исследование, подобное приведенному в § 3. Для бесконечного воздушного пространства, если поверхность 0 покоится, будем иметь

$$\varphi = F' \cos 2\pi nt + F'' \sin 2\pi nt,$$

причем

$$\int ds_0 \frac{\partial F'}{\partial n} = 0, \text{ и } \int ds_0 \frac{\partial F''}{\partial n} = 0.$$

Если для поверхности 0 будет

$$\int ds_0 \frac{\partial\varphi}{\partial n} = c' \cos 2\pi nt + c'' \sin 2\pi nt,$$

то тогда имеем

$$\varphi = (F' + c'f' - c''f'') \cos 2\pi nt + (F'' + c'f'' + c''f') \sin 2\pi nt.$$

Положим опять для пространства, ограниченного стенкой сосуда и поверхностью 0,

$$\varkappa^2\varphi = C' \cos 2\pi nt + C'' \sin 2\pi nt;$$

тогда из условия, что φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ непрерывны на поверхности 0, получим уравнения

$$C' = \varkappa^2 (F_0' + c'f_0' - c''f_0''), \quad c' = C'T,$$

$$C'' = \varkappa^2 (F_0'' + c'f_0'' + c''f_0'), \quad c'' = C''T,$$

где через F_0' и F_0'' обозначены значения F' и F'' для какой-нибудь точки поверхности 0. Отсюда следует, что

$$\varkappa^2 T F_0' = c'(1 - \varkappa^2 f_0' T) + c'' \varkappa^2 f_0' T,$$

$$\varkappa^2 T F_0'' = -c' \varkappa^2 f_0' T + c''(1 - \varkappa^2 f_0' T)$$

и далее

$$c'^2 + c''^2 = \frac{(F_0'^2 + F_0''^2)\varkappa^4 T^2}{(1 - \varkappa^2 f_0' T) + (\varkappa^2 f_0'' T)^2}.$$

Этой величине пропорциональна интенсивность тона, производимого резонансом. Если $\varkappa^2 f_0'' T$ бесконечно мало, то эта величина бесконечно велика сравнительно со значениями, которые она имела прежде, если только имеет место уравнение (27). Это уравнение определяет тон, который возникает, если дуть в отверстие надлежащим образом.

§ 6

В уравнениях, приведенных в § 2, 3 и 5 для цилиндрической и кубической трубки, встречаются две постоянные — f_0' и f_0'', которыми существенно обусловливается резонанс; теперь мы постараемся вычислить эти постоянные для некоторых случаев. При этом необходимо определить потенциал скоростей для всего рассматриваемого объема воздуха и для движения, которое в цилиндрической трубе поддерживается ее основанием, в кубической же трубе — произвольной частью сосуда. Это опять-таки возможно при некоторых определенных предположениях относительно ограничения объема воздуха. Мы примем, что для расстояний от отверстия порядка длины волны или бóльших, простирающихся в бесконечность, объем воздуха или ничем не ограничен, или ограничен частью произвольной конической поверхности, вершина которой расположена в отверстии. Обозначим через r расстояние переменной точки от этой вершины и допустим, что для значений r порядка длины волны или бóльших, имеет место уравнение (19)

$$\varphi = \frac{A}{r}\cos(\varkappa r - 2\pi n t) + \frac{B}{r}\sin(\varkappa r - 2\pi n t), \tag{28}$$

т. е. что для значений r указанного порядка величины имеются сферические волны, которые распространяются наружу. Допустимость этого предположения оправдывается тем, что при нем можно найти φ, удовлетворяющее всем условиям, которые должны быть выполнены.

Представим себе, что вокруг начала r описан шар, который опять лежит в области сферических волн, но радиус его бесконечно мал сравнительно с длиной волны. Назовем его поверхностью 1, элемент его обозначим через ds_1, а внешнюю нормаль к этому элементу через n. Чтобы иметь возможность совместно рассматривать цилиндрическую и кубическую трубки, назовем поверхностью 0 то поперечное сечение каждой трубки, которое прежде обозначали как сечение $z = 0$. Мы уже предположили, что расстояние ее от отверстия бесконечно мало сравнительно с длиной волны. Две поверхности 1 и 0 делят все рассматриваемое воздушное пространство на три части. Для каждой из двух внешних частей мы установили выражение φ уравнениями (21), (23) и (28); мы должны еще составить уравнение для средней части, ограниченной поверхностями 0 и 1, и именно такое, чтобы φ и $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ были непрерывны на поверхностях 0 и 1. Размеры этой части бесконечно малы сравнительно с длиной волны. Обозначим опять через ψ любую из двух функций ψ' и ψ''; тогда, согласно разъяснению, сделанному в § 5, для ψ можно взять решение уравнения $\Delta\psi = 0$, лишь бы было выполнено уравнение (21), которое при наших теперешних обозначениях будет иметь вид

$$\int ds_0 \frac{\partial\psi}{\partial n} + \int ds_1 \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0;$$

это условие может быть удовлетворено наряду с другими. Мы можем тогда рассматривать ψ как потенциал скоростей несжимаемой жидкости, которая движется так же, как воздух в некоторый момент. Согласно предположению, сделанному нами в § 2 и 5, найдем также, что ψ во всех точках поверхности 0 имеет одно и то же значение. В самом деле, мы предположили там, что поперечное сечение $z = 0$ лежит в области плоских волн, и здесь, что скорость во всех точках поверхности 0 перпендикулярна к ней. Из уравнения (28) следует, что на поверхности *1* ψ также имеет во всех точках равные значения. Для твердой стенки, соединяющей края поверхностей 0 и *1*, будет $\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0$. Отсюда, после рассуждений, приведенных в семнадцатой лекции, получим

$$\int ds_0 \frac{\partial\psi}{\partial n} = -\int ds_1 \frac{\partial\psi}{\partial n} = \frac{1}{W}(\psi_0 - \psi_1), \tag{29}$$

где W означает постоянное, зависящее от формы объема, лежащего между поверхностями 0 и *1*, которое мы назвали там сопротивлением этого объема (этот термин мы заимствовали из учения об электричестве).

Функции f' и f'', найти значения которых для точек поверхности 0 составляет нашу задачу, поскольку они относятся к точкам на поверхностях 0 и *1* или между ними, представляют частный случай рассматриваемой теперь функции ψ; поэтому в уравнении (29) можно положить $\psi = f'$ и $\psi = f''$. Положим, что это сделано; обозначим затем через f_1' и f_1'' значения f' и f'' в точках поверхности *1*. Пусть r_1 будет радиус этой поверхности и K — отверстие конуса, который ограничивает простирающееся в бесконечность воздушное пространство в достаточном удалении от отверстия, как мы это предположим. Тогда из (28), на основании того, что $\varkappa r_1$ бесконечно мало, следует

$$\begin{gathered} f_1' = \frac{A}{r_1} + B\varkappa, \quad f_1'' = A\varkappa - \frac{B}{r_1}, \\ \int ds_1 \frac{\partial f'}{\partial n} = -KA, \quad \int ds_1 \frac{\partial f''}{\partial n} = KB. \end{gathered} \tag{30}$$

Для цилиндрической трубы для поверхности 0 по (7) имеем

$$\frac{\partial f'}{\partial n} = 1, \quad \frac{\partial f''}{\partial n} = 0;$$

следовательно, если Q означает поперечное сечение трубы, то

$$\int ds_0 \frac{\partial f'}{\partial n} = Q, \quad \int ds_0 \frac{\partial f''}{\partial n} = 0. \tag{31}$$

С помощью (30) и (31) уравнения (29) дают

$$Q = KA = \frac{1}{W}\left(f_0' - \frac{A}{r_1} - B\varkappa\right),$$

$$0 = KB = \frac{1}{W}\left(f_0'' - A\varkappa + \frac{B}{r_1}\right);$$

следовательно,

$$A = \frac{Q}{K}, \quad B = 0,$$

$$f_0' = Q\left(W + \frac{1}{Kr_1}\right), \qquad f_0'' = \frac{\varkappa Q}{K}.$$

Выражение для f_0' можно представить проще. Эта величина, согласно первоначальному ее определению, не должна зависеть от r_1, которое должно быть известного порядка величины, но в остальном может быть выбрано произвольно. Поэтому W должно известным образом зависеть от r_1. В условия (29), из которых должно быть определено W, $\varkappa$ не входит; поэтому, не изменяя этого условия, можно в нем положить $\varkappa = 0$. Поэтому требование, что $\varkappa r_1$ должно быть бесконечно малым, не ограничивает величины, которая может быть дана r_1 при определении W. Теперь, изменяя обозначения, мы обозначим той же буквой W значение W при $r_1 = \infty$; тогда получим

$$f_0' = QW, \qquad f_0'' = \frac{\varkappa Q}{K}. \tag{32}$$

Для кубической трубки вместо уравнений (31) войдут уравнения (24), именно

$$\int ds_0 \frac{\partial f'}{\partial n} = 1, \qquad \int ds_0 \frac{\partial f''}{\partial n} = 0,$$

между тем как уравнение (30) будет по-прежнему иметь место. Поэтому здесь из (29) получим

$$f_0' = W, \; f_0'' = \frac{\varkappa}{K}. \tag{33}$$

§ 7

Найдем теперь значение W для некоторых случаев. Эта задача относится к движению несжимаемой жидкости. Те исследования, которые мы произвели в § 4 семнадцатой лекции относительно течений в несжимаемой жидкости по нормалям к софокусным эллипсоидам, мы приложим к кубической трубке, сделав предположение, что поверхность сосуда вблизи отверстия и на бесконечно большом от него расстоянии, сравнительно с его размерами, есть однополостный гиперболоид. Составим уравнение этого гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

и обозначим через K отверстие его асимптотического конуса; тогда, на основании выражения (31) семнадцатой лекции, получим

$$W = \frac{2}{K}\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(a^2 + c^2 + x^2)(b^2 + c^2 + x^2)}}. \tag{34}$$

Положив $c = 0$, придем к случаю отверстия в тонкой плоской стенке, ограниченного эллипсом с полуосями a и b; при этом будет

$$K = 2\pi.$$

Положим еще

$$a = b = R;$$

тогда отверстие будет кругом радиуса R и

$$W = \frac{1}{2R}.$$

Для тона наисильнейшего резонанса, или тона, получаемого при надлежащем дутье в отверстия, в этом случае получим по (33) и (27)

$$\varkappa^2 = \frac{2R}{T}. \tag{35}$$

Положим теперь

$$\varkappa = \frac{2\pi n}{a},$$

где через n обозначено число двойных колебаний в единицу времени, через a — скорость распространения звука в воздухе. Примем за единицу времени и длины секунду и миллиметр; положим для атмосферного сухого воздуха при температуре 0°С

$$a = 332\,260$$

и введем вместо радиуса R площадь отверстия S; тогда из (35) получим

$$n = 56174 \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{T}}.$$

Задолго до того, как этот теоретический результат был выведен Гельмгольцем, Зондхаусс представил результаты своих опытов относительно тонов кубической трубки формулой

$$n = 52400 \frac{\sqrt[4]{S}}{\sqrt{T}}.$$

Теперь вычислим также сопротивление W для известного рода цилиндрической трубки. Мы предпошлем этому следующее. Пусть на части плоскости xOy некоторой координатной системы будет распределена масса переменной плотности h, и пусть V будет потенциал этой массы в точке (x, y, z). Тогда в двух точках, которым соответствуют равные значения x и y и противоположные значения z, потенциал V имеет равные значения. Отсюда следует, во-первых, что при бесконечно малом z потенциал V имеет всегда одно и то же значение, будет ли z положительно или отрицательно, что мы могли бы заключить из общего предположения, что потенциал простого слоя масс непрерывен при переходе через слой. Во-вторых, отсюда следует, что $\frac{\partial V}{\partial z}$ для $z = 0$ на обеих сторонах плоскости xOy имеет противоположные значения. Соединим это с предложением, выраженным уравнением (9) шестнадцатой лекции, причем если направление n_i совпадает с направлением оси z, то для бесконечно малого z найдем

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -2\pi h \text{ при } z \text{ положительном},$$

и

$$\frac{\partial V}{\partial z} = +2\pi h \text{ при } z \text{ отрицательном},$$

откуда, между прочим, следует, что для части плоскости xOy, свободной от масс, для которой, следовательно, $h = 0$, производная $\frac{\partial V}{\partial z}$ обращается в нуль.

Обозначим теперь через ds элемент части плоскости xOy, которую назовем площадью S, через r — расстояние точки (x, y, z) от ds, через

e — такую функцию координат ds, что всегда, когда точка (x, y, z) лежит на площади S, будет

$$\int \frac{eds}{z} = 1,$$

наконец, через c — произвольное постоянное. Рассмотрим функцию ψ переменных x, y, z, которую определим тем, что положим для отрицательных значений z

$$\psi = \int \frac{eds}{r} + c \int \frac{ds}{r}$$

и для положительных значений z

$$\psi = -\int \frac{eds}{r} + c \int \frac{ds}{r} + 2 + 4\pi cz.$$

Это ψ во всем пространстве удовлетворяет уравнению $\Delta\psi = 0$; далее оно имеет то свойство, как это следует из предпосланных замечаний, что ψ и $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ на площади S непрерывны, между тем как на остальной части плоскости xOy претерпевают разрыв. Действительно, в точках площади S на одной, как и на другой стороне будет

$$\psi = 1 + c \int \frac{ds}{r},$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = 2\pi(e + c); \tag{36}$$

далее, на плоскости xOy вне площади S на стороне отрицательных z будет

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0,$$

и в бесконечности для отрицательных значений z

$$\psi = 0,$$

для положительных

$$\psi = 2 + 4\pi cz. \tag{37}$$

Теперь определим область для точки (x, y, z), которая вполне ограничена следующими поверхностями: полусферой, описанной вокруг начала координат бесконечно большим радиусом со стороны отрицательных z; частью плоскости xOy, лежащей между границей этой полусферы и границей площади S; частью плоскости, для которой z имеет бесконечно большое положительное значение L, и частью поверхности, проходящей через край S и пересекающей ортогонально поверхности $\psi = \text{const}$, причем эта поверхность для бесконечно больших положительных значений z обращается в цилиндрическую поверхность, параллельную оси z. В этой области функция обладает всеми свойствами потенциала скоростей несжимаемой жидкости. Если рассматривать ее как таковую, то бесконечно большую полусферу и плоскость $z = L$ можно рассматривать как поверхности равного потенциала, а остальные граничные поверхности — как твердые стенки. Обозначим через Q поперечное сечение трубы, принадлежащей этой области, при бесконечно больших положительных значениях z; тогда из (37) для сопротивления W пространства, наполненного рассматриваемой жидкостью, получим

$$W = \frac{2 + 4\pi cL}{4\pi cQ} = \frac{1}{Q}\left(L + \frac{1}{2\pi c}\right).$$

Это выражение для W можно привести к другому виду. Положим

$$\int ds = S, \int eds = \gamma,$$

т. е. обозначим через S величину площади (которая уже была так обозначена), через γ — электрическую емкость площади S. Вычислим из (36) и (37) объем жидкой массы, проходящей в единицу времени через поперечное сечение, и приравняем друг другу полученные таким образом выражения; тогда будем иметь

$$2\pi(\gamma + cS) = 4\pi c Q,$$

т. е.

$$c = \frac{\gamma}{2Q - S};$$

следовательно,

$$W = \frac{1}{Q}\left(L + \frac{2Q - S}{2\pi\gamma}\right).$$

Если площадь S, или, как мы будем теперь выражаться, отверстие трубки, есть эллипс, то для $\frac{1}{\gamma}$ имеет место выражение (30) семнадцатой лекции; но в этом случае трудно найти форму трубы, т. е. поверхности, которые пересекают ортогонально поверхности $\psi = \text{const}$ и проходят через край отверстия. Это относительно легче для круглого отверстия, так как тогда стенки трубки являются поверхностью вращения и для вычисления ее можно будет воспользоваться способом, указанным в § 2 восемнадцатой лекции. Если площадь S есть круг радиуса R_1, то

$$\gamma = \frac{2R_1}{\pi}.$$

Обозначим через R радиус поперечного сечения Q; тогда получим

$$W = \frac{1}{Q}\left(L + \frac{\pi}{4} \cdot \frac{2R^2 - R_1^2}{R_1}\right).$$

Если при этом еще $R_1 = R$, то отсюда находим

$$W = \frac{1}{Q}\left(L + \frac{\pi}{4} R\right).$$

Для последнего случая Гельмгольц произвел вычисление стенки трубы и нашел, что она имеет почти точно цилиндрическую форму. Радиус ее не меньше R и максимум этого радиуса равен приблизительно 1,02 R.

ЛЕКЦИЯ ДВАДЦАТЬ ПЯТАЯ

(Движение несжимаемой жидкости, на частицы которой действуют силы. Истечение тяжелой жидкости из отверстия в сосуде. Теорема Торричелли. Установившееся движение жидкого эллипсоида, частицы которого взаимно притягиваются по закону всемирного тяготения. Установившееся движение жидкого эллипсоида относительно вращающейся системы координат. Бесконечно малые колебания тяжелой жидкости. Волны тяжелой жидкости конечной высоты. Неустановившееся движение жидкого эллипсоида, частицы которого притягиваются по закону всемирного тяготения)

§ 1

В предыдущих исследованиях мы предполагали, что на частицы жидкости силы не действуют; теперь будем считать, что силы действуют, но при этом ограничимся случаем, в котором рассмотрим только несжимаемую жидкость.

Если существует потенциал скоростей φ и действующие силы имеют потенциал V, то по уравнениям (20) и (21) пятнадцатой лекции имеем

$$V - p = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] \tag{1}$$

и

$$\Delta\varphi = 0, \tag{2}$$

где p означает давление, а плотность положена равной единице. Если пространство, наполненное рассматриваемой жидкостью, односвязно, и если для всех элементов его поверхности $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ задано, то, как мы видели, уравнение (2), в которое силы не входят, вполне определяет движение. Чтобы определить движение при указанных предположениях, знание сил не является необходимым (оно необходимо, если надо найти изменение давления с изменением места и времени; для этого служит уравнение (1)). Но если для одной части поверхности жидкости дано $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, а для другой — давление, то действующие силы существенно влияют на движение, и это движение можно вычислить только с помощью уравнения (1).

Пусть тяжесть будет единственной действующей силой; предположим, что ось z направлена вертикально вниз. Тогда мы можем положить

$$V = gz.$$

Обозначим временно полную скорость через v, тогда уравнение (1) примет вид

$$gz - p = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2. \tag{3}$$

Теперь представим, что жидкость содержится в покоящемся сосуде и вытекает струей из его отверстия. На поверхность жидкости в сосуде и на поверхность струи атмосфера производит постоянное давление. Если размеры отверстия достаточно малы по сравнению с размерами сосуда, то возможно движение, при котором поверхность жидкости в сосуде в каждый момент времени бесконечно мало отклоняется от горизонтальной плоскости; скорость на этой плоскости бесконечно мала и производные компонент скорости по времени также всюду бесконечно малы. Мы и рассмотрим это движение. Применим уравнение (3) сначала к точке поверхности струи, потом к точке поверхности в сосуде, соединим оба результата и заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz\right)^{43}$$

бесконечно мало, если интегрирование будет произведено по линии, которая соединяет обе рассматриваемые точки и при этом полностью лежит в жидкости; тогда получим

$$v=\sqrt{2gz},$$

где v — скорость в точке, выбранной на поверхности струи, z — глубина этой точки над поверхностью в сосуде. Это уравнение выражает так называемую *теорему Торричелли.*

О форме струи при современных средствах анализа можно сказать лишь очень мало. Это неудивительно, так как уже в случае, когда силы не действуют, можно найти форму струй единственно только в предположении, что поток плоско-параллельный. Предположим, что размеры поперечного сечения струи бесконечно малы; тогда можно рассматривать давление, которое на поверхности струи, вообще, равно атмосферному, как постоянное для всей струи, кроме части, лежащей бесконечно близко к отверстию, где компоненты скорости изменяются бесконечно быстро. Возьмем часть струи, ограниченную двумя бесконечно близкими поперечными сечениями; тогда отсюда можно заключить, что она движется как свободная материальная точка под действием силы тяжести, т. е. по параболе с вертикальной осью. Если рассматривать движение как установившееся, то струя есть траектория, которую описывают все частицы, т. е. парабола.

Такое заключение можно применить также к несколько более общему случаю. Если жидкость течет через бесконечно узкую щель, прямую или кривую, и в последнем случае замкнутую или незамкнутую, тогда жидкость образует бесконечно тонкий слой, в котором давление надо рассматривать как всюду одинаковое. Поэтому любая частица ее движется как материальная точка, а именно, по параболе с вертикальной осью, и если движение установившееся, то жидкий слой составлен из таких парабол, проходящих через отдельные точки щели.

§ 2

Теперь займемся установившимся движением несжимаемой жидкости при котором, кроме силы тяжести, действуют другие силы и нет потенциала скоростей. Мы будем говорить о жидкости, частицы которой притягиваются между собой по закону Ньютона и на поверхность которой действует постоянное давление. Мы докажем, исходя из эйлеровых уравнений гидродинамики, что эта жидкость может иметь некоторое установившееся движение, в то время как поверхность ее будет трехосным эллипсоидом, между осями которого существует некоторое определенное соотношение. Для этого предположим, что между компонентами скорости u, v, w и координатами x, y, z точки, к которой относится скорость, существуют уравнения

$$
\begin{aligned}
u &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z, \\
v &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z, \\
w &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

в которых девять величин a_{11}, a_{12}, ... — постоянные. Уравнение (12) пятнадцатой лекции дает для них условие

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0. \tag{5}$$

Подставим значения u, v, w из (4) в уравнения (10) пятнадцатой лекции; тогда левые части этих уравнений сделаются линейными однородными функциями x, y, z, правые части будут такими же функциями, если надлежащим образом выбрать величину P (которая равна p, так как мы положим плотность равной единице). Составим уравнение поверхности жидкости

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \tag{6}$$

тогда

$$V = \text{const} - \pi(Ax^2 + By^2 + Cz^2), \tag{7}$$

где A, B, C — постоянные, определяемые уравнениями (4) двенадцатой лекции, если единицы массы длины и времени выбраны так, что сила, с которой притягиваются две массы, равна произведению масс, разделенному на квадрат расстояния между ними. Мы достигнем этого, если приравняем p однородной функции второй степени x, y, z, умноженной на постоянное. Одновременно мы достигнем и того, что давление будет постоянным на поверхности, если положим

$$p = \text{const} + \sigma\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right). \tag{8}$$

Приведенные выше дифференциальные уравнения будут удовлетворяться для всех значений x, y, z, если приравняем между собой коэффициенты при них; тогда вследствие (7) и (8) получим

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} + a_{13}a_{31} &= \frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A, \\
a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{32} &= 0, \\
a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23} + a_{13}a_{33} &= 0, \\
a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{23}a_{31} &= 0, \\
a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{23}a_{32} &= \frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B, \\
a_{21}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{23}a_{33} &= 0, \\
a_{31}a_{11} + a_{32}a_{21} + a_{33}a_{31} &= 0, \\
a_{31}a_{12} + a_{32}a_{22} + a_{33}a_{32} &= 0, \\
a_{31}a_{13} + a_{32}a_{23} + a_{33}a_{33} &= \frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C.
\end{aligned}
\right\}
\tag{9}
$$

Должно быть выполнено еще условие, что частицы поверхности должны на ней же и оставаться; по уравнению (31) десятой лекции для этого необходимо, если существует уравнение (6), чтобы

$$\frac{ux}{a^2} + \frac{vy}{b^2} + \frac{wz}{c^2} = 0,$$

т. е. чтобы это уравнение, вообще, было удовлетворено.

Отсюда получим шесть уравнений

$$\begin{gathered} a_{11}=0, \qquad a_{22}=0, \qquad a_{33}=0, \\ \frac{a_{12}}{a^2}+\frac{a_{21}}{b^2}=0, \quad \frac{a_{23}}{b^2}+\frac{a_{32}}{c^2}=0, \quad \frac{a_{31}}{c^2}+\frac{a_{13}}{a^2}=0. \end{gathered} \tag{10}$$

Вследствие первых трех из этих уравнений, уравнение (5) будет удовлетворено, и уравнения (9) примут более простой вид

$$\begin{aligned} a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}&=\frac{2\sigma}{a^2}-2\pi A, \quad a_{13}a_{32}=0,\ a_{12}a_{23}=0 \\ a_{23}a_{32}+a_{21}a_{12}&=\frac{2\sigma}{b^2}-2\pi B, \quad a_{21}a_{13}=0,\ a_{23}a_{31}=0, \\ a_{31}a_{13}+a_{32}a_{23}&=\frac{2\sigma}{c^2}-2\pi C, \quad a_{32}a_{21}=0,\ a_{31}a_{12}=0. \end{aligned} \tag{11}$$

Эти и три последних из уравнений (10) могут быть удовлетворены многими системами значений неизвестных. Мы можем им удовлетворить, если положим

$$a_{13}=0, \quad a_{23}=0, \quad a_{31}=0, \quad a_{32}=0,$$

так что из девяти величин $a_{11}, a_{12}, \ldots$ останутся только две — a_{12} и a_{21} — отличными от нуля. Тогда уравнения (10) и (11) превратятся в

$$\frac{a_{12}}{a^2}+\frac{a_{21}}{b^2}=0,$$

$$a_{12}a_{21}=\frac{2\sigma}{a^2}-2\pi A=\frac{2\sigma}{b^2}-2\pi B, \ 0=\frac{2\sigma}{c^2}-2\pi C,$$

или, если положим

$$a_{12}a_{21}=-\varkappa^2$$

и исключим σ, в

$$a_{12}=\frac{a}{b}\varkappa, \ a_{21}=-\frac{b}{a}\varkappa,$$

$$a^2\left(A-\frac{\varkappa^2}{2\pi}\right)=b^2\left(B-\frac{\varkappa^2}{2\pi}\right)=c^2C.$$

Это двойное уравнение — то же самое, что и уравнение (6) двенадцатой лекции, если положить величину, обозначенную там через v, равной $\frac{\varkappa^2}{2\pi}$, т. е., так как мы приняли здесь $\mu=1$, положить величину, обозначенную там через W, равной $\varkappa$. Отсюда следует, что движение, определяемое уравнениями

$$u=\frac{a}{b}\varkappa y, \ v=-\frac{b}{a}\varkappa x, \ w=0,$$

может иметь место, если жидкость образует эллипсоид, который может вращаться, как твердое тело, вокруг оси z с угловой скоростью $\varkappa$. Согласно сделанному выше разъяснению, мы получим три таких эллипсоида — два сплюснутых эллипсоида вращения, осью вращения которых является ось z, и один трехосный, в предположении, что $\varkappa$ лежит внутри некоторых границ. Если жидкость образует один из двух эллипсоидов вращения, то рассмотренные тут и там движения совершенно одинаковы, но они различны в случае трехосного эллипсоида.

Движение части трехосного жидкого эллипсоида, которое мы здесь определили, открыто Дирихле*; исследование, которое привело нас к

* Abhandl. der Königl, Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Bd. 8, 1860.

характеристике этого движения, можно так обобщить, что оно даст движение, для которого только что рассмотренное будет представлять один частный случай, а движение, при котором трехосный эллипсоид вращается, как твердое тело, как другой частный случай.

Предположим, что жидкость ограничена эллипсоидом, который вращается вокруг одной из своих осей с постоянной угловой скоростью λ. Отнесем движение всех жидких частиц к системе координат, оси которой являются осями эллипсоида; пусть ось z будет осью вращения, уравнение (6) по-прежнему уравнением эллипсоида. Согласно исследованию, относящемуся к выражению (5) девятой лекции, при составлении дифференциальных уравнений движения можно будет отвлечься от того, что система координат вращается, если только к компонентам силы (относящейся к единице массы), действующей по осям x и y на жидкую частицу, соответственно добавить

$$\lambda^2 x - 2\lambda v \quad \text{и} \quad \lambda^2 y + 2\lambda u.$$

Предположим, что движение, отнесенное к указанной системе координат, установившееся; тогда уравнения (10) пятнадцатой лекции при помощи уравнений (7) и (8) дадут

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A + \lambda^2\right)x - 2\lambda v,$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = \left(\frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B + \lambda^2\right)y + 2\lambda u,$$

$$u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = \left(\frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C\right)z.$$

Подставим в эти уравнения вместо u, v, w их значения из (4); тогда они должны быть удовлетворены для всех значений x, y, z, если только имеют место девять уравнений, левые части которых являются левыми частями уравнений (9), и правыми частями их служат выражения

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A + \lambda^2 - 2\lambda a_{21}, & -2\lambda a_{22}, & -2\lambda a_{23}, \\[2ex]
2\lambda a_{11}, & \dfrac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B + \lambda^2 + 2\lambda a_{12}, & 2\lambda a_{13}, \\[2ex]
0, & 0, & \dfrac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C.
\end{array}$$

К этим девяти уравнениям надо добавить неизмененные уравнения (5) и (10), если предположенное движение возможно. Всем этим условиям можно удовлетворить, полагая

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0,$$

$$a_{13} = 0, \; a_{23} = 0, \quad a_{31} = 0, \quad a_{32} = 0$$

и

$$\frac{a_{12}}{a^2} + \frac{a_{21}}{b^2} = 0,$$

$$a_{12}a_{21} = \frac{2\sigma}{a^2} - 2\pi A + \lambda^2 - 2\lambda a_{21} = \frac{2\sigma}{b^2} - 2\pi B + \lambda^2 + 2\lambda a_{12},$$

$$0 = \frac{2\sigma}{c^2} - 2\pi C.$$

Положим опять

$a_{12} = \frac{a}{b}\varkappa$, $a_{21} = -\frac{b}{a}\varkappa$, следовательно, $a_{12}a_{21} = -\varkappa^2$, и исключим σ; тогда получим два уравнения между λ, $\varkappa$, a, b, c:

$$\begin{aligned} a^2(\varkappa^2+\lambda^2)+2\varkappa\lambda ab &= 2\pi(a^2A-c^2C), \\ b^2(\varkappa^2+\lambda^2)+2\varkappa\lambda ab &= 2\pi(b^2B-c^2C). \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть a, b, c заданы произвольно, тогда x и λ могут быть вычислены из этих уравнений. Найденные значения, которые могут быть переставлены, не всегда, однако, будут действительными, т. е. представляемое этими уравнениями движение не всегда будет возможным. Мы не будем здесь определять границы области, в которой должны лежать отношения $a:b:c$, чтобы уравнения (12) давали действительные значения $\varkappa$ и λ. Простейший случай, в котором это имеет место, есть тот, когда

$$b^2 = c^2 \text{ и } a^2 > c^2;$$

в этом случае второе из уравнений (12) примет вид

$$c(\varkappa^2+\lambda^2)+2\varkappa\lambda a = 0.$$

§ 3

Когда рассматриваемое движение установившееся или когда его можно свести к установившемуся, если отнести движение к подвижной системе координат (такое движение рассмотрено в конце предыдущего параграфа), то предпочитают пользоваться эйлеровыми уравнениями гидродинамики, а не лагранжевыми. Применение уравнений Эйлера удобно также тогда, когда перемещения и скорости бесконечно малы (подобные случаи составляют предмет двух предыдущих лекций). Одним из этих случаев мы будем заниматься здесь, именно случаем бесконечно малых колебаний тяжелой несжимаемой жидкости.

Предположим, что существует потенциал скорости φ; тогда дифференциальное уравнение в частных производных, с которым нам придется иметь дело, будет по-прежнему $\Delta\varphi = 0$. Предположим, что жидкость отчасти ограничена твердыми стенками; тогда для всех элементов стенок будет

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0. \tag{13}$$

Предположим далее, что жидкость имеет и свободную поверхность, бесконечно мало уклоняющуюся от горизонтальной плоскости, на которую действует постоянное давление. Сперва мы должны найти граничные условия, которым удовлетворяет φ на этой свободной поверхности. Примем плоскость xOy координатной системы бесконечно близкой к свободной поверхности, ось z направим по вертикали вниз. Тогда в уравнении (1) мы можем положить

$$V = C + gz,$$

где C — постоянное, которым мы можем произвольно распорядиться. Примем скорости за бесконечно малые величины первого порядка; тогда, пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, будем иметь

$$C + gz - p = \frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Положим C равным постоянному давлению, действующему на поверхность, и применим это уравнение к поверхности; тогда получим

$$gz = \frac{\partial\varphi}{\partial t}. \tag{14}$$

Отнесем его к некоторой частице жидкости на поверхности, продифференцируем по t и, пренебрегая бесконечно малыми второго порядка, входящими в правую часть этого уравнения, получим

$$g\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}. \qquad (15)$$

В это уравнение вместо z должны быть подставлены бесконечно малые значения, которые соответствуют поверхности 44; вместо этого можно положить в нем $z=0$.

Уравнения (13) и (15) представляют граничные условия, соответственно которым надо определить φ. Им легко удовлетворить в некотором частном случае. Положим

$$\varphi=ZU \qquad (16)$$

и допустим, что Z есть функция z и t, U — функция x и y. Тогда уравнение (13) может быть удовлетворено, если жидкость сбоку ограничена вертикальной цилиндрической поверхностью, а снизу — горизонтальным дном. Для поверхности следует положить

$$\frac{\partial U}{\partial n}=0, \qquad (17)$$

для дна

$$\frac{\partial Z}{\partial z}=0. \qquad (18)$$

Вследствие (16) уравнение $\Delta\varphi=0$ примет вид

$$Z\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)+U\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=0;$$

ему можно удовлетворить, полагая

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}=\varkappa^2 Z, \qquad (19)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=-\varkappa^2 U, \qquad (20)$$

где $\varkappa$ должно быть постоянным. Если для дна

$$z=h,$$

то из (19) и (18) следует, что

$$Z=M\left[e^{\varkappa(h-z)}+e^{-\varkappa(h-z)}\right], \qquad (21)$$

где e — основание натуральных логарифмов и M — функция t. Она определяется из уравнения (15), которое вследствие (16) и (21) будет

$$\frac{d^2M}{dt^2}=-g\varkappa\frac{e^{\varkappa h}-e^{-\varkappa h}}{e^{\varkappa h}+e^{-\varkappa h}}M;$$

отсюда следует, что

$$M=A\cos\frac{t-t_0}{T}2\pi, \qquad (22)$$

где A и t — две произвольные постоянные и

$$T=2\pi\sqrt{\frac{1}{g\varkappa}\frac{e^{\varkappa h}+e^{-\varkappa h}}{e^{\varkappa h}-e^{-\varkappa h}}}. \qquad (23)$$

Уравнение, получаемое из (16) с помощью (21) и (22) в предположении, что U может быть определено соответственно (20) и (17), представляет движение, при котором каждая частица жидкости совершает колебания продолжительностью, равной T. Полученное для T выражение существенно упрощается в случаях, когда можно рассматривать $\varkappa h$ как бесконечно большое или бесконечно малое. В первом случае

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{g\varkappa}},$$

во втором, как показывает разложение показательных функций,

$$T = \frac{2\pi}{\varkappa\sqrt{gh}}.$$

Определим функцию U только для простейшего случая. Положим, что горизонтальное поперечное сечение жидкости представляет прямоугольник, стороны которого параллельны осям x и y, и что U не зависит от y. Тогда уравнение (20) будет

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = -\varkappa^2 U$$

и общий интеграл его равен косинусу

$$\cos\varkappa(x - x_0),$$

где x_0 — произвольное постоянное, умноженное на второе произвольное постоянное. Если для стенок, которыми жидкость ограничена в направлении оси x, будет

$$x = 0 \quad \text{и} \quad x = l,$$

то уравнение (17) требует, чтобы для этих значений x было

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0;$$

мы удовлетворим ему, если положим

$$x_0 = 0, \quad \varkappa = \frac{n\pi}{l}, \tag{24}$$

где n — целое число. Поэтому имеем

$$\varphi = A\cos\frac{t - t_0}{T}2\pi\cos\frac{nx}{\varphi}\pi\left[e^{\frac{n(h-z)}{l}\pi} + e^{-\frac{n(h-z)}{l}\pi}\right]$$

Все требуемые условия будут также выполнены, если положим φ равным сумме таких выражений, одним из которых является указанное выше, и которые отличаются одно от другого значениями целого числа n и постоянными A и t_0; следовательно, можно также положить

$$\varphi = \sum\left(A_n\cos\frac{t}{T_n}2\pi + B_n\sin\frac{t}{T_n}2\pi\right)\left(e^{\frac{n(h-z)}{l}\pi} + e^{-\frac{n(h-z)}{l}\pi}\right)\cos\frac{nx}{l}\pi,$$

где сумма взята по n, A_n, B_n — произвольные постоянные и T_n — вычисляемое из (23) и (24) значение T. Заметим, не входя в подробности, что постоянные A_n, B_n можно определить с помощью так называемых рядов Фурье так, чтобы движение соответствовало любым начальным состояниям, т. е. чтобы для $t = 0$ и для поверхности z величины $\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, согласно (14), были равны данным произвольным функциям x.

Разберем еще случай, когда жидкость можно рассматривать как неограниченную в направлении x, т. е. когда ни для какого значения x не надо удовлетворять граничному условию. Тогда уравнения (24) не будут иметь места, и если мы возьмем

$$\varkappa = \frac{2\pi}{\lambda},$$

где λ произвольно, то найдем

$$\varphi = A \cos\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) 2\pi \left(e^{\frac{h-z}{\lambda} 2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda} 2\pi}\right),$$

$$T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g} \frac{e^{\frac{h2\pi}{\lambda}} + e^{-\frac{h2\pi}{\lambda}}}{e^{h\frac{2\pi}{\lambda}} - e^{-h\frac{2\pi}{\lambda}}}}. \tag{25}$$

Представленное здесь движение осуществляется волнами, распространяющимися вдоль оси x, длина которых есть λ и скорость распространения равна $\frac{\lambda}{T}$, т. е. равна

$$\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} \frac{e^{\frac{h2\pi}{\lambda}} - e^{-\frac{h2\pi}{\lambda}}}{e^{\frac{h2\pi}{\lambda}} + e^{-\frac{h2\pi}{\lambda}}}}.$$

Эта скорость зависит, вообще, от длины волны; но этой зависимости не будет, если рассматривать λ как величину бесконечно большую сравнительно с глубиной h; в этом случае она равна

$$\sqrt{gh}.$$

Если, напротив, h бесконечно велико сравнительно с λ, то скорость распространения равна

$$\sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}.$$

Траекторию частицы жидкости найдем следующим путем. Пусть $x + \xi$, y, $z + \xi$ будут координатами частицы в момент t, координатами которой в момент $t = 0$ были x, y, z; тогда

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial z},$$

т. е., по (25),

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{A2\pi}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda} 2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda} 2\pi}\right) \sin\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) 2\pi,$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{A2\pi}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda} 2\pi} - e^{-\frac{h-z}{\lambda} 2\pi}\right) \cos\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) 2\pi,$$

откуда следует, что

$$\xi = -\frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{\lambda-z}{\lambda} 2\pi} + e^{-\frac{h-z}{\lambda} 2\pi}\right)\left[\cos\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) 2\pi - \cos\frac{x}{\lambda} 2\pi\right],$$

$$\zeta = -\frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda} 2\pi} - e^{-\frac{h-z}{\lambda} 2\pi}\right)\left[\sin\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) 2\pi + \sin\frac{x2\pi}{\lambda}\right].$$

Исключая отсюда t, получим

$$\left(\frac{\xi}{a}-\cos\frac{x2\pi}{\lambda}\right)^2+\left(\frac{\zeta}{c}\sin+\frac{x2\pi}{\lambda}\right)^2=1,$$

где положено

$$a=\frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi}+e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right),$$

$$c=\frac{AT}{\lambda}\left(e^{\frac{h-z}{\lambda}2\pi}-e^{-\frac{h-z}{\lambda}2\pi}\right).$$

Это — уравнение эллипса, полуосями которого являются горизонтальная и вертикальная линии, длины их соответственно a и c. Если h бесконечно велико, в то время как λ и z конечны, то $a=c$; все частицы жидкости описывают круги *.

§ 4

Применим теперь лагранжевы дифференциальные уравнения гидродинамики к некоторым движениям несжимаемой жидкости, на частицы которой действуют силы, а на свободную поверхность производится постоянное давление. Первым рассмотренным случаем будет тот, когда в тяжелой жидкости известным образом распространяются волны конечной высоты. Положим опять плотность равной единице, выберем ось z направленной вниз по вертикали и предположим, что движение всюду происходит параллельно плоскости xOz. Тогда, если положим $b=y$, уравнения (7) пятнадцатой лекции дадут

$$\begin{aligned}&\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-g\right)\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{\partial p}{\partial a}=0,\\&\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial c}+\left(\frac{d^2z}{dt^2}-g\right)\frac{\partial z}{\partial c}+\frac{\partial p}{\partial c}=0.\end{aligned}\tag{26}$$

Уравнения (8) и (3) той же лекции примут вид

$$\frac{dD}{dt}=0,\qquad D=\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial x}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}.$$

Здесь a и c могут быть какими-нибудь переменными, значения которых вместе с y однозначно определяют частицу жидкости. Для этого необходимо только, чтобы во всем наполненном жидкостью объеме D не обращалось ни в нуль, ни в бесконечность. В остальном значения a и c мы можем оставить пока не определенными. Покажем, что указанные уравнения будут удовлетворены; если положим

$$\begin{aligned}&x-a=r\sin\vartheta,\quad z-c=r\cos\vartheta,\\&\vartheta=\left(\frac{a}{\lambda}-\frac{t}{T}\right)2\pi,\end{aligned}\tag{27}$$

где λ и T — два постоянных и r — функция c, которой мы можем распорядиться, как нам угодно, то каждая частица движется по кругу с постоянной скоростью, так что T есть продолжительность обхода.

---

* Vergl. Holtzmann. Programm der Polytechnischen Schule in Stuttgart, 1858.

Из принятых для x и z выражений следует, что

$$\frac{\partial x}{\partial a} = 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \cos\vartheta, \quad \frac{\partial x}{\partial c} = \frac{dr}{dc} \sin\vartheta,$$
$$\frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{2\pi}{\lambda} r \sin\vartheta, \quad \frac{\partial z}{\partial c} = 1 + \frac{dr}{dc} \cos\vartheta, \tag{28}$$

так что

$$D = 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \frac{dr}{dc} + \left(\frac{dr}{dc} + \frac{2\pi}{\lambda} r\right) \cos\vartheta.$$

Так как D должно быть независимым от t, а ϑ от него зависит, то, следовательно,

$$\frac{dr}{dc} = -\frac{2\pi}{\lambda} r \tag{29}$$

и

$$D = 1 + \frac{2\pi}{\lambda} r \frac{dr}{dc}. \tag{30}$$

Первое из этих уравнений дает

$$r = Re^{-\frac{2\pi}{\lambda} c}, \tag{31}$$

где R — произвольное постоянное.

Из принятых для x и z выражений следует, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \sin\vartheta, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \cos\vartheta.$$

Подставляя эти значения в уравнение (26) и пользуясь (28) и (29), получим

$$\frac{\partial p}{\partial a} = \left(\frac{2\pi}{T^2} - \frac{g}{\lambda}\right) 2\pi r \sin\vartheta,$$
$$\frac{\partial p}{\partial c} = \left(\frac{2\pi}{T^2} - \frac{g}{\lambda}\right) 2\pi r \cos\vartheta + g - \frac{8\pi^3}{T^2\lambda} r^2.$$

Мы удовлетворим обоим уравнениям, если установим соотношение между λ и T, которые оставались до сих пор произвольными,

$$\frac{g}{\lambda} = \frac{2\pi}{T^2}$$

и определим p как функцию одного только переменного c, так что

$$\frac{dp}{dc} = g\left(1 - \frac{4\pi^2}{\lambda^2} R^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c}\right).$$

Если $p = p_0$ для $c = 0$, то из этого уравнения следует

$$p = p_0 + g\left[c - \frac{\pi}{\lambda} R^2\left(1 - e^{-\frac{4\pi}{\lambda}c}\right)\right].$$

Свободная поверхность должна все время состоять из одних и тех же частиц, и давление на ней должно быть постоянным; мы удовлетворим обоим этим условиям, если положим, что для свободной поверхности будет

$$p = p_0, \quad \text{и} \quad c = 0.$$

В остальном мы примем, что жидкость не ограничена; тогда a изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, c — от нуля до $+\infty$.

Постоянное R не может превзойти некоторого значения, для того чтобы D ни в какой точке жидкости не обращалось в нуль. Из (30) и (31) следует, что

$$D = 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda} R\right)^2 e^{-\frac{4\pi}{\lambda} c};$$

следовательно, R не может быть больше, чем

$$\frac{\lambda}{2\pi}. \tag{32}$$

Уравнение свободной поверхности в момент t получим выраженным через x и z, если положим в (27) $c = 0$ и исключим a и ϑ; поэтому оно есть результат исключения ϑ из уравнений

$$x - \frac{\lambda}{T} t = R \sin \vartheta + \frac{\lambda}{2\pi} \vartheta,$$
$$z = R \cos \vartheta.$$

Так как x и t входят здесь только в комбинации $x - \frac{\lambda}{T} t$, то поверхность перемещается со скоростью $\frac{\lambda}{T}$ в направлении оси x без изменения формы. Для какого-нибудь значения t пересечение ее с плоскостью xOz есть циклоида; круг, качением которого она описана, имеет радиус R, центр его движется — по оси x; точка, описывающая циклоиду, находится на расстоянии $\frac{\lambda}{2\pi}$ от центра. Если R получит значение, приведенное в (32), то циклоиды будут иметь точки заострения (возврата).

В рассмотренном здесь случае не существует потенциала скоростей; частицы жидкости вращаются вокруг оси y. Обозначим через χ угловую скорость; тогда из уравнений (15) и (14) пятнадцатой лекции получим

$$-2D\chi = \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial a} \frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial \frac{dx}{dt}}{\partial c} \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial a} \frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial \frac{dz}{dt}}{\partial c} \frac{\partial z}{\partial a},$$

следовательно, по (28) и (29) будем иметь

$$-2D\chi = \frac{8\pi^2}{\lambda T} r \frac{dr}{dc}.$$

Разобранное в этом параграфе движение открыто Герстнером *, позднее его самостоятельно исследовал Ранкин **.

§ 5

Возвратимся опять к исследованию жидкости, которую мы рассматривали в § 2, т. е. к жидкости, частицы которой притягиваются по закону Ньютона и на поверхность которой действует постоянное давление. При этом мы опустим сделанное там предположение, что движение жидкости установившееся или может быть приведено к таковому, если отнести его к соответствующим образом выбранной подвижной системе координат.

* Theorie der Wellen sammt einer daraus abgeleiteten Theorie der Deichprofile von Franz Gerstner. Прага, 1804.

** London Philos. Transactions, 1863, Part. I, p. 227.

Как показал Дирихле в цитированном уже в сочинении (§ 2), мы получим возможные движения такой жидкости, если допустим, что координаты каждой частицы являются линейными функциями их начальных значений и что вначале жидкость образует эллипсоид.

Подразумевая теперь под a, b, c начальные значения x, y, z, представим уравнение поверхности для момента $t = 0$ в виде

$$\frac{a^2}{A^2} + \frac{b^2}{B^2} + \frac{c^2}{C^2} = 1 \tag{33}$$

и положим

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c, \\ y &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c, \\ z &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c, \end{aligned} \tag{34}$$

где девять величин α, β, γ означают подлежащие определению функции t. Прежде всего они должны удовлетворять уравнению

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1. \tag{35}$$

Их начальными значениями являются

$$\alpha_1 = \beta_2 = \gamma_3 = 1,$$

$$\alpha_2 = \beta_1 = \alpha_3 = \gamma_1 = \beta_3 = \gamma_2 = 0;$$

начальные значения их производных по t могут быть любыми, с тем лишь ограничением, что они должны удовлетворять условию, получаемому дифференцированием (35), т. е. условию

$$\frac{d\alpha_1}{dt} + \frac{d\beta_2}{dt} + \frac{d\gamma_3}{dt} = 0.$$

Уравнение (33) есть также уравнение поверхности в момент t; подставим в него x, y, z вместо a, b, c; пользуясь (34), найдем, что жидкость всегда образует эллипсоид с центром в начале координат, оси которого по величине и направлению зависят от времени.

Потенциал жидкости V в момент t относительно внутренней точки (x, y, z) равен сумме однородной функции второй степени и некоторой не зависящей от x, y, z величины. Так как V обладает этим свойством, если оси x, y, z совпадают с главными осями эллипсоида, то оно не утратит его, если вместо такой системы координат введем другую с тем же началом координат. При посредстве (34) отсюда следует, что

$$V = H - Ka^2 - Lb^2 - Mc^2 - 2K'bc - 2L'ca - 2M'ab, \tag{36}$$

где семь вновь введенных букв означают функции времени, выражающиеся известным образом через девять функций α, β, γ и три постоянные A, B, C.

Наконец, положим

$$p = \text{const} + \sigma\left(1 - \frac{a^2}{A} - \frac{b^2}{B} - \frac{c^2}{C}\right),$$

где σ — некоторая неизвестная функция t.

Этим предположением мы удовлетворим условию, что давление на поверхности постоянно, и уравнения (7) пятнадцатой лекции будут линейны и однозначны относительно a, b, c. Все условия задачи будут удовлетворены, если десять функций времени: α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 и σ, будут определены из следующих уравнений:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} = -2K + \frac{2\sigma}{A^2}, \\
&\alpha_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} = -2M', \\
&\alpha_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \alpha_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \alpha_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = -2L', \\
&\beta_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} = -2M', \\
&\beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} = -2L + \frac{2\sigma}{B^2}, \\
&\beta_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \beta_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \beta_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = -2K', \\
&\gamma_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\alpha_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\alpha_3}{dt^2} = -2L', \\
&\gamma_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\beta_3}{dt^2} = -2K', \\
&\gamma_1 \frac{d^2\gamma_1}{dt^2} + \gamma_2 \frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + \gamma_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = -2M + \frac{2\sigma}{C^2}.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Семь интегралов этих уравнений можно получить на основании общих исследований, которые мы произведем. Три из них следуют из уравнений (14) пятнадцатой лекции, если ввести в них значения x, y, z из (34); они показывают, что три выражения

$$
\begin{aligned}
&\beta_1 \frac{d\gamma_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\gamma_2}{dt} - \gamma_2 \frac{d\beta_2}{dt} + \beta_3 \frac{d\gamma_3}{dt} - \gamma_3 \frac{d\beta_3}{dt}, \\
&\gamma_1 \frac{d\alpha_1}{dt} - \alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \gamma_2 \frac{d\alpha_2}{dt} - \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt} + \gamma_3 \frac{d\alpha_3}{dt} - \alpha_3 \frac{d\gamma_3}{dt}, \\
&\alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} - \beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\beta_2}{dt} - \beta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} + \alpha_3 \frac{d\beta_3}{dt} - \beta_3 \frac{d\alpha_3}{dt}
\end{aligned}
\tag{38}
$$

имеют постоянные значения. Четыре других определятся из следующих соображений. Мы убедились в § 6 одиннадцатой лекции, что для такой жидкости, как рассматриваемая, принцип Даламбера применяется в той же форме, как для системы отдельных материальных точек. Поэтому из разъяснения, сделанного в четвертой лекции, следует, что для рассматриваемого движения применимы теорема живых сил, теорема сохранения движения центра тяжести и теорема сохранения площадей. Составим сперва уравнение, выражающее теорему живых сил.

Обозначим через $d\tau$ элемент массы жидкости, который в момент $t = 0$ имеет координаты a, b, c; тогда живая сила T в момент t определяется через

$$T = \frac{1}{2} \int \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] d\tau.$$

Подставим здесь вместо $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ значения, взятые из (34), и воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} &\int a^2 d\tau = \frac{4\pi}{3} ABC \frac{A^2}{5}, && \int bc\, d\tau = 0, \\ &\int b^2 d\tau = \frac{4\pi}{3} ABC \frac{B^2}{5}, && \int ca\, d\tau = 0, \\ &\int c^2 d\tau = \frac{4\pi}{3} ABC \frac{C^2}{5}, && \int ab\, d\tau = 0; \end{aligned} \tag{39}$$

эти уравнения легко получить, если положить $d\tau = da\, db\, dc$ и ввести вместо a, b, c новые переменные интегрирования $\frac{a}{A}$, $\frac{b}{B}$, $\frac{c}{C}$. Тогда найдем

$$T = \frac{2\pi}{15} ABC \left\{ \begin{aligned} &A^2 \left[\left(\frac{d\alpha_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3}{dt}\right)^2 \right] + \\ &+ B^2 \left[\left(\frac{d\beta_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\beta_3}{dt}\right)^2 \right] + \\ &+ C^2 \left[\left(\frac{d\gamma_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_3}{dt}\right)^2 \right]. \end{aligned} \right\}.$$

Далее, пусть будет U потенциал всех действующих сил; тогда он равен

$$U = \int V d\tau,$$

или, как мы будем выражаться, равен потенциалу жидкого эллипсоида самого на себя. Согласно предположению, которое доказано в нижеследующем примечании *, он равен $\frac{4}{5}$ объема, умноженного на потенциал этого объема в его центре тяжести, т. е.

$$U = \frac{16\pi}{15} ABC \cdot H,$$

---

* Потенциал массы плотностью, равной единице, заполняющей эллипсоид, уравнение поверхности которого

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

относительно внутренней точки x, y, z, по уравнению (4) восемнадцатой лекции, будет равен

$$\pi abc \int_0^\infty d\lambda \frac{1 - \dfrac{x^2}{a^2+\lambda} - \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} - \dfrac{z^2}{c^2+\lambda}}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}};$$

коэффициенты при x^2, y^2, z^2 в этом выражении, как уже замечено на стр. 112—113, зависят только от отношений a, b, c, но не от абсолютных значений этих величин. Отсюда следует, что потенциал массы с плотностью единица, заполняющей объем, ограниченный двумя поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = n^2$$

и

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = n'^2$$

относительно точки, лежащей во внутренней пустой полости, постоянен и равен значению где H имеет значение, определяемое из (36). Теорема живых сил гласит, что между T и U существует уравнение

$$T = U + \text{const}.$$

Закон сохранения движения центра тяжести в применении к нашей задаче дает только тождество, им подтверждается правильность сделанного предположения, что центр жидкого эллипсоида остается на месте.

Теорема сохранения площадей дает три интеграла; она показывает, что выражения

$$\int\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)d\tau,\quad \int\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)d\tau,\quad \int\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)d\tau,$$

т. е., согласно (34) и (39), выражения

$$\begin{gathered}A^2\left(\alpha_2\frac{d\alpha_3}{dt}-\alpha_3\frac{d\alpha_2}{dt}\right)+B^2\left(\beta_2\frac{d\beta_3}{dt}-\beta_3\frac{d\beta_2}{dt}\right)+C^2\left(\gamma_2\frac{d\gamma_3}{dt}-\gamma_3\frac{d\gamma_2}{dt}\right),\\ A^2\left(\alpha_3\frac{d\alpha_1}{dt}-\alpha_1\frac{d\alpha_3}{dt}\right)+B^2\left(\beta_3\frac{d\beta_1}{dt}-\beta_1\frac{d\beta_3}{dt}\right)+C^2\left(\gamma_3\frac{d\gamma_1}{dt}-\gamma_1\frac{d\gamma_3}{dt}\right),\quad (40)\\ A^2\left(\alpha_1\frac{d\alpha_2}{dt}-\alpha_2\frac{d\alpha_1}{dt}\right)+B^2\left(\beta_1\frac{d\beta_2}{dt}-\beta_2\frac{d\beta_1}{dt}\right)+C^2\left(\gamma_1\frac{d\gamma_2}{dt}-\gamma_2\frac{d\gamma_1}{dt}\right)\end{gathered}$$

равны постоянным.

§ 6

Сделаем теперь упрощающее предположение, что главные оси жидкого эллипсоида всегда сохраняют одни и те же направления. В этом случае надо вместо (34) положить

$$x = \alpha_1 a,\quad y = \beta_2 b,\quad z = \gamma_3 c,$$

в центре, т. е.

$$\pi abc\,(n'^2 - n^2)\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},\ \text{если}\ n' > n.$$

Чтобы найти теперь потенциал эллипсоида, полуоси которого a, b, c, самого на себя, найдем сперва потенциал его относительно слоя, ограниченного двумя поверхностями, которые подобны его поверхности, подобно расположены и имеют полуоси an, bn, cn, и $a(n+dn)$, $b(n+dn)$, $c(n+dn)$. Этот потенциал состоит из двух частей, из которых первая происходит от масс, лежащих снаружи слоя, вторая от масс, заключенных внутри слоя. Первая часть равна

$$\frac{4\pi}{3}\,abc\,3n^2\,dn\,\pi abc\,(1-n^2)\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Вторую часть найдем, если заметим, что потенциал массы M относительно массы M' равен потенциалу массы M' относительно массы M

$$\frac{4\pi}{3}\,abc\,n^3\,\pi abc\,2n\,dn\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}}.$$

Складывая эти выражения и интегрируя сумму их по n от нуля до единицы, получим искомый потенциал эллипсоида с полуосями (a, b, c) самого на себя

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{4\pi}{3}\,abc\int_0^\infty \frac{d\lambda}{\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}},$$

чем доказано высказанное в тексте предложение.

следовательно,

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 = \beta_3 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.$$

Тогда значения величин H, K, L получим из сравнения уравнения (36) с уравнением

$$V = \pi ABC \int_0^\infty d\lambda \frac{1 - \frac{\alpha_1^2 a^2}{\alpha_1^2 A^2 + \lambda} - \frac{\beta_2^2 b^2}{\beta_2^2 B^2 + \lambda} - \frac{\gamma_3^2 c^2}{\gamma_3^2 C^2 + \lambda}}{\sqrt{(\alpha_1^2 A^2 + \lambda)(\beta_2^2 B^2 + \lambda)(\gamma_3^2 C^2 + \lambda)}}.$$

и уравнения (37) дадут для определения четырех неизвестных функций α_1, β_2, γ_3, σ соотношения

$$\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\pi ABC \int_0^\infty \frac{d\lambda}{N} \frac{\alpha_1^2}{\alpha_1^2 A^2 + \lambda},$$

$$\beta_2 \frac{d^2\beta_2}{dt^2} = \frac{2\sigma}{B^2} - 2\pi ABC \int_0^\infty \frac{d\lambda}{N} \frac{\beta_2^2}{\beta_2^2 B^2 + \lambda},$$

$$\gamma_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\pi ABC \int_0^\infty \frac{d\lambda}{N} \frac{\gamma_3^2}{\gamma_3^2 C^2 + \lambda},$$

$$\alpha_1\beta_2\gamma_3 = 1,$$

где положено

$$\sqrt{(\alpha_1^2 A^2 + \lambda)(\beta_2^2 B^2 + \lambda)(\gamma_3^2 C^2 + \lambda)} = N.$$

Выражения (38) будут равны нулю; вращения нет, для движения существует потенциал скоростей. Также равны нулю выражения (40). Первый интеграл дает теорема живых сил. К квадратурам задача не приводится.

Направления осей жидкого эллипсоида можно считать постоянными также тогда, когда он есть эллипсоид вращения, ось вращения которого совпадает с осью z. Также и при этом предположении уравнения (37) могут быть удовлетворены. В этом случае уравнение поверхности, выраженное через a, b, c, имеет вид

$$\frac{a^2 + b^2}{A^2} + \frac{c^2}{C^2} = 1;$$

выраженное через x, y, z, оно может быть представлено в виде

$$\frac{x^2 + y^2}{X^2} + \frac{z^2}{Z^2} = 1,$$

причем X и Z означают тогда полуоси. Составим условия того, что оба эти уравнения при помощи (34) должны быть тождественными; найдем

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \quad \beta_3 = 0,$$

$$\alpha_1 = \pm \beta_2, \quad \alpha_2 = \mp \beta_1,$$

где надо выбрать оба верхних или оба нижних знака. Мы устраним эту двузначность, если допустим, что γ_3 положительно, и примем во внимание уравнение $D = 1$; тогда получим

$$\alpha_1 = \beta_2, \quad \alpha_2 = -\beta_1.$$

При этом уравнение $D = 1$ будет

$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\gamma_3 = 1,$$

и мы найдем

$$X^2 = \frac{A^2}{\gamma_3}, \quad Z^2 = C^2\gamma_3^2,$$

$$x = \alpha_1 a + \beta_1 b, \quad y = -\beta_1 a + \alpha_1 b, \quad z = \gamma_3 c.$$

Отсюда будем иметь

$$V = \pi A^2 C \int_0^\infty d\lambda\, \gamma_3 \frac{1 - \dfrac{a^2 + b^2}{A^2 + \gamma_3\lambda} - \dfrac{\gamma_3^2 c^2}{\gamma_3^2 C^2 + \lambda}}{(A^2 + \gamma_3\lambda)\sqrt{\gamma_3^2 C^2 + \lambda}},$$

причем из сравнения этого уравнения с (36) получим значения $H, K, L, \ldots$. Воспользовавшись этим, мы приведем уравнения (37) к следующим:

$$\alpha_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} + \beta_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} = \frac{2\sigma}{A^2} - 2\pi A^2 C \int_0^\infty \frac{\gamma_3 d\lambda}{(A^2 + \gamma_3\lambda)^2 \sqrt{\gamma_3^2 C^2 + \lambda^2}},$$

$$\gamma_3 \frac{d^2\gamma_3}{dt^2} = \frac{2\sigma}{C^2} - 2\pi A^2 C \int_0^\infty \frac{\gamma_3^3\, d\lambda}{(A^2 + \gamma_3\lambda)(\gamma_3^2 C^2 + \lambda)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\alpha_1 \frac{d^2\beta_1}{dt^2} - \beta_1 \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = 0,$$

$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2)\gamma_3 = 1.$$

Один из интегралов общей задачи, определяемой (38) и (40), можно получить из этих уравнений, другой — из теоремы живых сил. Оба эти интеграла в рассматриваемой теперь задаче могут быть сведены к квадратурам. Исследование их позволит определить в общих чертах колебания, производимые поверхностью эллипсоида вращения. Относительно этого исследования мы сошлемся на цитированное уже в § 2 сочинение Дирихле. Относительно более общих исследований, касающихся движения жидкого эллипсоида, части которого притягиваются по закону Ньютона, сошлемся на сочинение Римана, которое находится в девятом томе известий Королевского общества наук в Геттингене. (Abhandl. der Königl. Gescellsch. der Wissensch. zu Göttingen.)

ЛЕКЦИЯ ДВАДЦАТЬ ШЕСТАЯ

(Трение несжимаемой жидкости. Вывод дифференциальных уравнений и граничных условий. Течение жидкости по длинной цилиндрической трубе. Введение допущений, что жидкость прилипает к твердому телу, с которым соприкасается, и что скорости бесконечно малы. Равномерное вращение в жидкости шара относительно диаметра, или эллипсоида вращения относительно оси симметрии в случае, когда снаружи жидкость не ограничена, или ограничена концентрической шаровой поверхностью, или соответственно поверхностью софокусного эллипсоида. Вычисление момента сил, действующих на шар или эллипсоид. Сопротивление шара, равномерно поступательно движущегося в жидкости. Вращательные колебания шара. Колебания шара при которых центр движется вперед и назад по прямой линии)

§ 1

Закончим наши исследования по гидродинамике рассмотрением некоторых случаев движения несжимаемой жидкости, при которых сказывается влияние трения. Дифференциальные уравнения для таких движений мы установили уже в одиннадцатой лекции. Обозначим по-прежнему через u, v, w компоненты скорости в момент t в точке $(x\ y,\ z)$, и положим

$$\begin{aligned}
X_x &= p - 2k\frac{\partial u}{\partial x}, & Y_z &= Z_y = -k\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\
Y_y &= p - 2k\frac{\partial v}{\partial y}, & Z_x &= X_z = -k\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\
Z_z &= p - 2k\frac{\partial w}{\partial z}, & X_y &= Y_x = -k\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),
\end{aligned} \tag{1}$$

где k — обусловленная трением постоянная жидкости, p — неизвестная функция x, y, z, t; выразим компоненты ускорения так, как это было сделано в § 2 пятнадцатой лекции. Тогда дифференциальные уравнения, о которых идет речь, если принять, что на частицы жидкости не действуют силы, и обозначить плотность жидкости через μ, будут

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) = 0, \\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}\right) = 0, \\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}\right) = 0, \\
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Подставляя сюда вместо X_x, Y_y, ... их значения из (1) и пользуясь четвертым из уравнений (2) для упрощения остальных, получим

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{k}{\mu}\Delta u=0,\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{k}{\mu}\Delta v=0,\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{k}{\mu}\Delta w=0,\\
&\qquad\qquad\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.
\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

На поверхности жидкости, т. е. на поверхности соприкасания ее с другим телом, которое может быть твердым или жидким, должны быть выполнены известные условия: некоторые из них могут быть взяты из § 6 десятой лекции и § 4 одиннадцатой. Обозначим через ds элемент поверхности соприкасания и через n — направленную внутрь рассматриваемой жидкости нормаль к ds; тогда компоненты скорости частицы по направлению нормали n с обеих сторон ds должны иметь равные значения; для этой частицы X_n, Y_n, Z_n также должны иметь равные значения. Но эти условия недостаточны для нахождения решений дифференциальных уравнений (2) или (3); их необходимо дополнить гипотезой. В некоторых случаях удобной оказывается гипотеза, что сами u, v, w для частиц, расположенных по обеим сторонам ds, имеют равные значения, так что частицы двух тел, которые раз соприкоснулись, останутся в соприкосновении навсегда. Сделаем еще некоторое обобщение предлагаемой гипотезы. Отнесем u, v, w к частице рассматриваемой жидкости, прилегающей к ds; u_1, v_1, w_1 — к частице с другой стороны ds; тогда, как упомянуто, будет

$$(u-u_1)\cos(nx)+(v-v_1)\cos(ny)+(w-w_1)\cos(nz)=0.$$

Мы можем рассматривать $u-u_1$, $v-v_1$, $w-w_1$ как *компоненты относительной* скорости соприкасающихся частиц и, следовательно, выразить это уравнение так, что эта относительная скорость перпендикулярна к n, т. е. параллельна ds. Вообразим, что давление, действующее на ds, т. е. давление, компоненты которого по осям координат — X_n, Y_n, Z_n, разложено на две компоненты, одна из которых параллельна n, другая параллельна ds. Согласно данной гипотезе, вторая компонента имеет направление, противоположное относительной скорости, и пропорциональна ей. Аналитическое выражение этой гипотезы мы найдем из следующего рассуждения. Выражение

$$X_n\cos(nx)+Y_n\cos(ny)+Z_n\cos(nz)$$

сть компонента давления, производимого на ds по направлению n. Умножим это выражение на $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$; тогда мы получим компоненты по осям координат этой компоненты давления; вычтем эти произведения из X_n, Y_n, Z_n; тогда разности дадут компоненты по осям координат той параллельной ds составляющей, которая действует на ds. Отсюда по приведенной гипотезе следует, что

$$\begin{aligned}
X_n-[X_n\cos(nx)+Y_n\cos(ny)+Z_n\cos(nz)]\cos(nx)&=\lambda(u_1-u),\\
Y_n-[X_n\cos(nx)+Y_n\cos(ny)+Z_n\cos(nz)]\cos(ny)&=\lambda(v_1-v),\\
Z_n-[X_n\cos(nx)+Y_n\cos(ny)+Z_n\cos(nz)]\cos(nz)&=\lambda(w_1-w),
\end{aligned}\tag{4}$$

где λ — постоянное, зависящее от природы жидкости и соприкасающегося тела.

Допустим, что λ бесконечно велико; тогда уравнения (4) приведут к более частной, упомянутой прежде гипотезе, по которой $u=u_1$, $v=v_1$,

$w = w_1$. Другой предельный случай будет, когда $\lambda = 0$. В этом случае уравнения (4) дают

$$X_n : Y_n : Z_n = \cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz),$$

в чем легко убедиться, если разделить их на $\cos(nx)$, $\cos(ny)$, $\cos(nz)$ и вычесть по два одно из другого. В этом случае давление, компонентами которого являются X_n, Y_n, Z_n, нормально к поверхности; это должно иметь место, если соприкасающееся тело есть жидкость, в которой можно пренебречь трением.

§ 2

Теперь будем искать частные решения уравнений, установленных в предыдущем параграфе. Сперва мы положим, что

$$u = 0 \text{ и } v = 0,$$

т. е. движение всюду параллельно оси z. Тогда первое, второе и четвертое из уравнений (3) примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

т. е. p не зависит от x и y, w — от z. Третье из уравнений (3) будет

$$\mu \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0,$$

откуда, согласно только что сделанному замечанию, следует, что

$$\frac{\partial p}{\partial z} = c, \quad k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \mu \frac{\partial w}{\partial t} = c,$$

где c не зависит от x, y, z и, следовательно, есть функция одного переменного t. Мы введем в рассмотрение еще более частное предположение, допуская, что движение установившееся; тогда c постоянно и

$$\frac{dp}{dz} = c, \quad k\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = c. \tag{5}$$

Соответственно этому уравнению жидкость может двигаться в твердой и неподвижной цилиндрической трубе, параллельной оси z. Составим граничные условия, которые должны быть выполнены на внутренней поверхности такой трубы. Из (1) в нашем случае получается

$$X_x = p, \quad Y_z = Z_y = -k\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$Y_y = p, \quad Z_x = X_z = -k\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$Z_z = p, \quad X_y = Y_x = 0,$$

и так как

$$\cos(nz) = 0,$$

то из уравнений (7) одиннадцатой лекции следует, что

$$X_n = p\cos(nx), \quad Y_n = p\cos(ny), \quad Z_n = -k\left[\frac{\partial w}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(ny)\right]$$

и

$$X_n\cos(nx) + Y_n\cos(ny) + Z_n\cos(nz) = p.$$

Положим в уравнениях (4), которые будем рассматривать как граничные условия, $u_1 = v_1 = w_1 = 0$; тогда два первых уравнения будут удовлетворены тождественно, а третье даст

$$k\left[\frac{\partial w}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial w}{\partial y}\cos(ny)\right] = \lambda w,$$

или, что то же самое,

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{\lambda}{k} w. \tag{6}$$

Допустим теперь, что поперечное сечение есть круг радиуса R, центр которого лежит в плоскости $z = 0$, и что движение на равных расстояниях от этой оси одинаково. Положим

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2};$$

тогда второе из уравнений (5) будет

$$\frac{d^2 w}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dw}{d\rho} = \frac{c}{k},$$

откуда следует, что

$$w = \frac{1}{4}\frac{c}{k}\rho^2 + A\lg\rho + B,$$

где A и B — произвольные постоянные. Первое из них должно обращаться в нуль, так как w не должно обращаться в бесконечность для $\rho = 0$; второе получим из (6), т. е. из условия, что при $\rho = R$ будем иметь

$$\frac{dw}{d\rho} = -\frac{\lambda}{k} w,$$

откуда следует, что

$$B = -\frac{c}{2\lambda}R - \frac{c}{4k}R^2;$$

таким образом

$$w = -\frac{c}{4k}\left(R^2 + \frac{2k}{\lambda}R - \rho^2\right).$$

Постоянное c найдем из первого из уравнений (5), если будут известны значения p для двух значений z. Пусть будет $p = p_0$ для $z = 0$ и $p = p$ для $z = l$; тогда

$$c = \frac{p_l - p_0}{l}.$$

Обозначим через Q объем жидкости, протекающей в единицу времени в направлении оси z через поперечное сечение; тогда

$$Q = 2\pi\int_0^R w\rho\, d\rho;$$

следовательно,

$$Q = \pi\frac{p_0 - p_l}{8kl}\left(R^4 + 4\frac{k}{\lambda}R^3\right). \tag{7}$$

Этот результат приближенно имеет место в том случае, когда тяжелая жидкость вытекает в атмосферу из обширного сосуда по горизонтальной очень длинной и тонкой трубке. Тогда можно выбрать поперечные сечения $z = 0$ и $z = l$ на таком расстоянии от концов трубки, которое велико сравнительно с поперечными размерами последней, но мало сравнительно с l, и приравнять p_0 давлению, которое имеет место в трубке, когда жидкость покоится, а p_l — атмосферному давлению.

Измерения количества вытекающей жидкости при таком расположении произведены Пуазёйлем. Он нашел, что

$$Q = K \frac{p_0 - p_l}{l} R^4,$$

где K — величина, которая остается неизменной, когда изменяются p_0, l или R. Сравнение этого уравнения с (7) приводит прежде всего к заключению, что λ рассматривалось как бесконечно большое; следовательно, было неявно допущено, что жидкие частицы, прикасающиеся к стенкам трубы, к ним прилипают. Далее, найденные для K значения позволяют вычислить k для испытуемой жидкости.

§ 3

Дальнейшие исследования трения жидкости, которые мы произведем, упростим предположением, что жидкие частицы, соприкасающиеся с твердым телом, прилипают к нему и что скорости бесконечно малы. Вследствие последнего, уравнения (3) обратятся в

$$\begin{aligned} &\mu \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = k\Delta u, \qquad \mu \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial y} = k\Delta v, \\ &\mu \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} = k\Delta w. \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Если движение установившееся, то они перейдут в

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p}{\partial x} = k\Delta u, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = k\Delta v, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = k\Delta w, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Решением этих уравнений будет

$$p = \text{const}, \quad u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial y}, \quad w = 0, \tag{10}$$

если W удовлетворяет уравнению

$$\Delta W = \text{const}.$$

Поэтому мы можем в (10) положить

$$W = \frac{c}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

где c — постоянное, и будем иметь частные решения наших дифференциальных уравнений в виде

$$p = \text{const}, \quad u = -\frac{c}{r^3} y, \quad v = \frac{c}{r^3} x, \quad w = 0. \tag{11}$$

Представляемое ими движение легко поддается обозрению. Исследования, которые мы произвели раньше в § 5 четвертой лекции, показывают, что точки, для которых

$$u = -\psi y, \quad v = \psi x, \quad w = 0, \tag{12}$$

где ψ означает постоянное, не изменяют своего относительного расположения и движутся так, как если бы они принадлежали твердому телу, которое вращается с постоянной угловой скоростью ψ вокруг оси z. Вследствие уравнения (11) условие (12) будет выполнено для точек сферической поверхности, описанной произвольным радиусом r вокруг начала координат, если положить

$$\psi = \frac{c}{r^3}.$$

Если в жидкости находится твердый шар, уравнение поверхности которого есть $r = r_1$ и который вращается с постоянной угловой скоростью ψ_1 вокруг оси z, то уравнения (11) представят возможное движение жидкости, если положить в них

$$c = \psi_1 r_1^3.$$

Если жидкость ограничена двумя концентрическими сферическими поверхностями, уравнениями которых являются $r = r_1$ и $r = r_2$, из которых первая (меньшая) вращается с угловой скоростью ψ_1 вокруг оси z, вторая (бо́льшая) покоится, то уравнения (10) дадут возможное движение, если положим в них

$$W = \frac{c}{r} - \frac{b}{r}(x^2 + y^2)$$

и надлежащим образом определим постоянные b и c. При этом предположении относительно W будем иметь

$$u = -\left(\frac{c}{r^3} + b\right)y, \quad v = \left(\frac{c}{r^3} + b\right)x, \quad w = 0, \tag{13}$$

и граничные условия будут выполнены, если положим

$$\psi_1 = \frac{c}{r_1^3} + b, \quad 0 = \frac{c}{r_2^3} + b,$$

откуда следует, что

$$c\left(\frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3}\right) = \psi_1.$$

Если шар радиуса r_1 должен вращаться с постоянной угловой скоростью, то в направлении движения должен действовать вращательный момент M, который должен быть равен моменту вращения давления, производимого на жидкость. Пусть ds будет элемент поверхности шара и n — совпадающая с продолжением радиуса нормаль к ds; тогда

$$M = \int ds\,(xY_n - yX_n); \tag{14}$$

но мы имеем

$$Y_n = \frac{1}{r}(xY_x + yY_y + zY_z), \quad X_n = \frac{1}{r}(xX_x + yX_y + zX_z),$$

и по (1) и (13)

$$\begin{aligned} X_x &= p - 6kc\frac{xy}{r^5}, & Y_z &= Z_y = 3kc\frac{xz}{r^5}, \\ Y_y &= p + 6kc\frac{xy}{r^5}, & Z_x &= X_z = -3kc\frac{yz}{r^5}, \\ Z_z &= p, & X_y &= Y_x = 3kc\frac{x^2 - y^2}{r^5}; \end{aligned} \tag{15}$$

в этих уравнениях надо всюду положить $r = r_1$. Отсюда получаем

$$Y_n = \frac{y}{r} p + \frac{3kc}{r^4} x, \quad X_n = \frac{x}{r} p - \frac{3kc}{r^4} y;$$

следовательно,

$$M = \frac{3kc}{r^4} \int ds\,(x^2 + y^2)$$

или, так как

$$\int x^2\,ds = \int y^2\,ds = \int z^2\,ds = \frac{4\pi}{3} r^4,$$

то

$$M = 8\pi kc.$$

Так как в это выражение r не входит, то оно не получит никаких изменений, если положить $r = r_1$.

Уравнения (10) могут быть также применены к случаю, когда жидкость ограничена двумя софокусными эллипсоидами вращения с осью вращения z, при условии, что внешний эллипсоид покоится, а внутренний вращается с постоянной угловой скоростью ψ_1 вокруг оси z. Составим уравнение внутреннего эллипсоида

$$\frac{x^2 + y^2}{a_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1 \tag{16}$$

и обозначим через Ω потенциал массы, равной единице, одинаковой плотности, наполняющей ограниченное эллипсоидом пространство, относительно внешней точки (x, y, z). В случае, когда жидкость рассматривается как неограниченная извне, что мы сперва и предположим, можно удовлетворить граничным условиям, если положить

$$W = c\Omega$$

и соответственно определить постоянное c. Действительно, вследствие уравнения (3) восемнадцатой лекции имеем

$$\Omega = \frac{3}{4} \int_\sigma^\infty d\lambda \frac{1 - \dfrac{x^2 + y^2}{a_1^2 + \lambda} - \dfrac{z^2}{c_1^2 + \lambda}}{(a_1^2 + \lambda)\sqrt{c_1^2 + \lambda}},$$

где σ означает положительный корень уравнения

$$\frac{x^2 + y^2}{a_1^2 + \sigma} + \frac{z^2}{c_1^2 + \sigma} = 1;$$

поэтому уравнения (10) дадут

$$u = -\psi y, \quad v = \psi x, \quad w = 0,$$

если положим

$$\psi = \frac{3}{2} c \int_\sigma^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda)^2 \sqrt{c_1^2 + \lambda}}.$$

Следовательно, точки жидкости, лежащие на эллипсоиде, определенном значением σ, и софокусным с эллипсоидом (16), движутся так, как если бы они принадлежали твердому телу, вращающемуся с угловой скоростью ψ вокруг оси z; тогда значение c определится из уравнения

$$\psi_1 = \frac{3}{2} c \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2 + \lambda)^2 \sqrt{c_1^2 + \lambda}} \tag{17}$$

Для момента вращения, который должен действовать на эллипсоид, чтобы сообщить ему соответственное вращение, здесь также имеет место уравнение (14). Вычисление момента можно упростить, сделав замечание, которое связано с определением сил давления, данным уравнениями (1) и (2) одиннадцатой лекции. Применим последнее из этих уравнений к произвольной части жидкости, приняв во внимание, что движение установившееся, скорости бесконечно малы и силы не действуют на частицы жидкости; тогда получим

$$\int ds\,(xY_n - yX_n) = 0,$$

где ds — элемент поверхности, ограничивающей выбранную часть, n — нормаль, направленная внутрь к ds. Пусть теперь эта часть будет ограничена эллипсоидом и бесконечно большой концентрической сферической поверхностью. Тогда только что сделанное замечание показывает, что M равно интегралу

$$\int ds\,(xY_n - yX_n),$$

распространенному на бесконечную сферическую поверхность, причем под n подразумевается нормаль, совпадающая с продолжением радиуса. Но в бесконечности здесь также имеет место уравнение (15); следовательно, в данном случае также будет

$$M = 8\pi kc, \tag{18}$$

где c определяется из (17).

Если жидкость ограничена извне покоящимся эллипсоидом

$$\frac{x^2+y^2}{a_2^2} + \frac{z^2}{c_2^2} = 1,$$

софокусным с эллипсоидом (16), так что

$$a_2^2 - a_1^2 = c_2^2 - c_1^2,$$

то надо положить

$$W = c\Omega - \frac{b}{2}(x^2+y^2)$$

так определить b и c, чтобы было

$$\psi_1 = \frac{3}{2}c\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)^2\sqrt{c_1^2+\lambda}} + b,$$

$$0 = \frac{3}{2}c\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a_2^2+\lambda)^2\sqrt{c_2^2+\lambda}} + b,$$

откуда следует, что

$$\psi_1 = \frac{3}{2}c\int_0^{a_2^2-a_1^2} \frac{d\lambda}{(a_1^2+\lambda)^2\sqrt{c_1^2+\lambda}}. \tag{19}$$

При вычислении момента вращения, который должен действовать на внутренний эллипсоид, чтобы сообщить ему требуемое движение, с помощью выражения (14) мы установим, что постоянное b сюда не входит, и получим момент выраженным через c совершенно так же, как если бы жидкость была не ограничена извне; следовательно, здесь пригодно также уравнение (18), если значение c будет взято из (19).

§ 4

Из уравнений (9) следует, что

$$\Delta p = 0.$$

Допустим, что p соответствует этому условию, и определим функцию V так, чтобы она удовлетворяла уравнению

$$\Delta V = \frac{1}{k} p;$$

тогда уравнения (9) будут удовлетворены, если мы положим

$$u = \frac{\partial V}{\partial x} + u', \quad v = \frac{\partial V}{\partial y} + v', \quad w = \frac{\partial V}{\partial z} + w'$$

и выберем u', v', w' так, чтобы было

$$\Delta u' = 0, \quad \Delta v' = 0, \quad \Delta w' = 0$$

и

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = -\frac{1}{k} p.$$

Поэтому мы можем положить

$$\frac{1}{k} p = 2c \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}, \quad u' = 0, \quad v' = 0, \quad w' = -\frac{2c}{r},$$

и, так как

$$\Delta \frac{r}{2} = \frac{1}{r},$$

то

$$V = az + b \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} + c \frac{\partial r}{\partial z}$$

и

$$u = 3b \frac{xz}{r^5} - c \frac{xz}{r^3}, \qquad v = 3b \frac{yz}{r^5} - c \frac{yz}{r^3} \tag{20}$$

$$w = a + b \left(\frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3} \right) - c \left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{1}{r} \right),$$

где a, b, c — произвольные постоянные. Их можно определить так, чтобы для некоторого значения r, которое можно обозначить R, было

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0;$$

для этого имеем уравнения

$$\frac{3b}{R^2} = c, \quad a = \frac{b}{R^3} + \frac{c}{R},$$

для которых следует, что

$$b = \frac{R^3 a}{4}, \quad c = \frac{3Ra}{4}.$$

Тогда уравнения (20) представят движение жидкости, которая на бесконечности всюду течет в направлении оси z со скоростью a и в которой покоится шар, описанный вокруг начала координат радиусом R.

Пусть Z будет сила, которая должна действовать на шар в направлении оси z, чтобы удержать его на месте; тогда

$$Z = \int ds\, Z_n = \int \frac{ds}{r} (xZ_x + yZ_y + zZ_z), \tag{21}$$

где ds означает элемент поверхности шара, описанного вокруг начала координат радиусом r, и должно быть взято $r = R$. Но вместо этого значения r можно также выбрать любое большее, потому что из третьего из уравнений (1) одиннадцатой лекции вытекает, что

$$\int ds\, Z_n = 0,$$

если ds есть элемент поверхности, ограничивающий любую часть жидкости. Есть некоторая выгода принять в уравнении (21) r бесконечно большим; действительно, тогда можно при вычислении Z_x, Z_y, Z_z из уравнений (1) при помощи (20) пренебречь членом с множителем b. Для бесконечно больших r найдем

$$Z_x = -6kc\frac{xz^2}{r^5}, \quad Z_y = -6kc\frac{yz^2}{r^5}, \quad Z_z = -6kc\frac{z^3}{r^5}$$

и поэтому

$$Z = -6kc\frac{1}{r^4}\int z^2 ds = -8\pi kc \quad \text{или} \quad Z = 6\pi kRa. \tag{22}$$

На основании замечания, неоднократно использованного нами, полученное уравнение годится также в случае, когда система координат, к которой оно относится, вместо того чтобы покоиться, движется поступательно в каком-нибудь направлении с постоянной скоростью. Пусть она движется в направлении оси z со скоростью $-a$; тогда мы найдем, что жидкость в бесконечности покоится и в ней движется шар радиуса R в направлении оси z со скоростью $-a$. Уравнение (22) дает сопротивление, которое при этом испытывает шар.

§ 5

Примем уравнения (8) еще для двух случаев, а именно: для неустановившегося движения и для случая колебаний шара в неограниченной извне жидкости, находящегося под действием некоторых сил.

Указанные уравнения будут удовлетворены, если положим

$$p = \text{const}$$

и выберем u, v, w так, чтобы было

$$\frac{\mu}{k}\frac{du}{dt} = \Delta u, \quad \frac{\mu}{k}\frac{dv}{dt} = \Delta u, \quad \frac{\mu}{k}\frac{dw}{dt} = \Delta w,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Мы решим эти уравнения, если положим

$$u = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial W}{\partial x}, \quad w = 0$$

и определим W уравнением

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial W}{\partial t} = \Delta W. \tag{23}$$

Допустим теперь, что W — функция двух переменных t и r, где через r обозначена опять величина $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; тогда мы имеем

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} y, \quad v = -\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r} x, \quad w = 0.$$

Эти уравнения представляют движение, при котором точки, лежащие на расстоянии r от начала координат, движутся так, как если бы они принадлежали твердому телу, вращающемуся вокруг оси z с угловой скоростью ψ, где

$$\psi = -\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}. \tag{24}$$

Поэтому мы можем допустить, что в жидкости находится шар, для поверхности которого $r = R$ и который вращается вокруг оси z с угловой скоростью, равной значению ψ, получаемому из выражения (24) при $r = R$.

Если M есть момент давления, которое упомянутый шар производит на жидкость, то здесь также имеет место уравнение (14), и вычисление, аналогичное тому, которое мы применили к этому уравнению, даст

$$M = \frac{8\pi}{3} k r^4 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}\right) \text{ для } r = R.$$

Пусть ϑ — угол, на который повернулся шар из некоторого положения к моменту t, так что

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \psi \text{ для } r = R; \tag{25}$$

далее, пусть M' будет момент сил, которые действуют на шар (кроме давлений, производимых жидкостью), и K — момент инерции шара; тогда

$$K\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M' - M.$$

Это уравнение, если дано M', составляет граничное условие для функции W, которая до сих пор была определена только дифференциальным уравнением в частных производных; положим, что

$$M' = -\alpha^2\vartheta,$$

где α — произвольное постоянное; тогда это условие, если продифференцируем его по t, примет вид

$$\frac{\alpha^2}{r}\frac{\partial W}{\partial r} - \frac{8\pi}{3} k r^4 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t}\right) + \frac{K}{r}\frac{\partial^3 W}{\partial r\, \partial t^2} = 0 \text{ для } r = R. \tag{26}$$

Уравнение (23), которое можно представить в виде

$$\frac{\mu}{k}\frac{\partial (rW)}{\partial t} = \frac{\partial^2 (rW)}{\partial r^2},$$

имеет частное решение

$$W = Ce^{\beta^2 t}\frac{1}{r}e^{\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\, r}, \tag{27}$$

где C и β — произвольные постоянные. Последнее из них можно определить так, чтобы было удовлетворено уравнение (26); для этого необходимо, чтобы β было корнем уравнения

$$\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} - R\beta\right)(\alpha^2 + K\beta^4) + \frac{8\pi}{3} R^3\mu \sqrt{\frac{k}{\mu}}\, \beta^2 \left(3\,\frac{k}{\mu} - 3\sqrt{\frac{k}{\mu}}\, R\beta + R^2\beta^2\right) = 0. \tag{28}$$

При $k = 0$ корни последнего суть

$$0, \pm \sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{K}}\, \frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Допустим, что k столь мало, что, как и при $k = 0$, из пяти корней два комплексны и имеют отрицательную действительную часть, и положим в (27) β равным одному из этих корней. Тогда скорость на бесконечности будет равна нулю. При этом W будет комплексным, но действительная часть выражения (27), установленного для W, принятая за W, также удовлетворит уравнениям (23) и (26). Выберем за W эту действительную часть; положим тогда

$$\beta = -a + b\sqrt{-1},$$

вычислим ϑ с помощью (24) и (25) из W, обозначим через C новое действительное произвольное постоянное и перенесем начало отсчета времени; тогда найдем

$$\vartheta = Ce^{(a^2-b^2)t} \sin 2\,abt.$$

Это уравнение определяет производимые шаром колебания. Обозначим через T продолжительность простого колебания и через δ — *логарифмический декремент* колебаний, т. е. натуральный логарифм отношения двух последовательных амплитуд; тогда будем иметь

$$T = \frac{\pi}{2ab}, \quad \delta = (b^2 - a^2)\, T = \frac{b^2 - a^2}{2ab}\pi.$$

Легко найти a и b, если можно рассматривать k как бесконечно малое, и из членов, зависящих от k, принять во внимание только члены низшего порядка. Обозначим для этого значение, принимаемое β при $k = 0$, через β_0 и положим

$$\beta = \beta_0 + \varepsilon;$$

представим уравнение (28) в виде

$$F(\beta) = 0$$

и обозначим

$$F'(\beta) = \frac{dF(\beta)}{d\beta};$$

тогда ε вычислим из уравнения

$$F(\beta_0) + \varepsilon F'(\beta_0) = 0.$$

Таким образом получим

$$F(\beta_0) = \frac{8\pi}{3} R^5 \sqrt{k\mu}\,\beta_0^4, \quad F'(\beta_0) = -4RK\beta_0^4;$$

следовательно,

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{3} R^4 \sqrt{k\mu}\, \frac{1}{K}.$$

Обозначим через T_0 продолжительность колебания шара в случае, когда жидкость не производит на него никакого действия, т. е. положим

$$T_0 = \frac{\pi}{a}\sqrt{K};$$

тогда получим

$$a = \sqrt{\frac{\pi}{2T_0}} - \varepsilon,\ b = \sqrt{\frac{\pi}{2T_0}}$$

и

$$T = T_0\left(1 + \varepsilon\sqrt{\frac{2T_0}{\pi}}\right),\quad \delta = \varepsilon\sqrt{2\pi T_0}.$$

Частное решение уравнений (23) и (24), которое мы только что получили, предполагает известное начальное состояние жидкости; теперь мы будем искать частное решение, соответствующее другому начальному состоянию. Решением уравнения (23) будет

$$W = e^{\beta^2 t}\cdot\frac{1}{r}\left(Ce^{\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\cdot r} + C'e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\cdot r}\right),$$

где C, C' и β — произвольные комплексные постоянные; они удовлетворяют условию (26), если между этими постоянными существует уравнение

$$\begin{gathered}
0 = C\left\{\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} - R\beta\right)(\alpha^2 + K\beta^4) + \frac{8\pi}{3}R^3_\mu\sqrt{\frac{k}{\mu}}\beta^2\left(3\frac{k}{\mu} -\right.\right.\\
\left.\left.-3\sqrt{\frac{k}{\mu}}R\beta + R^2\beta^2\right)\right\}e^{\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}R} +\\
+ C'\left\{\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} + R\beta\right)(\alpha^2 + K\beta^4) + \frac{8\pi}{3}R^3_\mu\sqrt{\frac{k}{\mu}}\beta^2\left(3\frac{k}{\mu} +\right.\right.\\
\left.\left.+ 3\sqrt{\frac{k}{\mu}}R\beta + R^2\beta^2\right)\right\}e^{-\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}R}.
\end{gathered}$$

Это уравнение определяет отношение $C:C'$ при любом β. Выражение, которое получим для W таким способом, будет комплексным, действительная часть его также удовлетворит уравнениям (23) и (26). Примем эту действительную часть за W, тогда в бесконечности скорость, вообще, будет бесконечной. Но как исключение скорость может в бесконечности обратиться в нуль, когда одна из двух постоянных равна нулю или постоянное β будет чисто мнимым. Первый случай есть тот, который мы только что рассмотрели и к которому относится уравнение (27), второй приводит к новым решениям, которые мы хотим найти.

Следующее исследование приведет нас к колебаниям шара, находящегося в жидкости с трением, центр которого движется вперед и назад по прямой линии. Одно частное решение уравнения (8) есть

$$u = \frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial z},\ v = \frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial z},\ w = \frac{\partial^2 P}{\partial z^2},$$

$$p = -\frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial t},$$

если

$$\Delta P = 0.$$

Второе будет

$$u = \frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial z},\ v = \frac{\partial^2 W}{\partial y\,\partial z},\ w = -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial y^2},$$

$$p = 0,$$

если

$$\Delta W = \mu \frac{\partial W}{\partial t}.$$

Поэтому упомянутые уравнения должны быть удовлетворены также выражениями

$$u = \frac{\partial^2 (P+W)}{\partial x\, \partial z},\ v = \frac{\partial^2 (P+W)}{\partial y\, \partial z},\ w = -\frac{\partial^2 (P+W)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 (P+W)}{\partial y^2},$$

$$p = -\mu \frac{\partial^2 P}{\partial z\, \partial t},$$

при

$$\Delta P = 0,\ k\Delta W = \mu \frac{\partial W}{\partial t}. \tag{29}$$

Теперь допустим, что P и W — функции только двух переменных r и t; тогда мы получим

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{xz}{r} \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (P+W)}{\partial r}\right], \\ v &= \frac{yz}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (P+W)}{\partial r}\right], \\ w &= -\frac{x^2+y^2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (P+W)}{\partial r}\right] - \frac{2}{r}\frac{\partial (P+W)}{\partial r}, \\ p &= -\frac{\mu z}{r}\cdot\frac{\partial^2 P}{\partial z\, \partial t}. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Далее, положим, что для $r = R$ будет

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (P+W)}{\partial r}\right] = 0; \tag{31}$$

тогда для $r = R$ будет

$$u = 0,\ v = 0,\ w = -\frac{2}{r}\frac{\partial (P+W)}{\partial s}, \tag{32}$$

и полученные уравнения представят возможное движение для случая, когда в жидкости находится шар, для поверхности которого $r = R$ и который движется в жидкости в направлении оси z со скоростью, равной

$$-\frac{2}{r}\frac{\partial (P+W)}{\partial r} \text{ для } r = R.$$

Пусть Z будет сумма компонент по оси z давлений, которые шар производит на жидкость; тогда имеет место уравнение (21), т. е.

$$Z = \int \frac{ds}{r}(xZ_x + yZ_y + zZ_z).$$

Заметим, что по (1)

$$xZ_x + yZ_y + zZ_z = zp - k\left(x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + z\frac{\partial w}{\partial z}\right) - k\left(x\frac{\partial u}{\partial z} + y\frac{\partial v}{\partial z} + z\frac{\partial w}{\partial z}\right);$$

и далее, что

$$\int x^2\, ds = \int y^2\, ds = \int z^2\, ds = \frac{4\pi}{3} r^4,$$

и, пользуясь уравнением (31), найдем из (30)

$$Z = \frac{4\pi}{3} r^2 \left\{2kr\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial (P+W)}{\partial r} - \mu\frac{\partial^2 P}{\partial r\, \partial t}\right]\right\} \text{ для } r = R.$$

Пусть теперь ζ означает перемещение шара к моменту t из некоторого определенного положения, так что

$$\frac{d\zeta}{dt} = w \text{ для } r = R; \tag{33}$$

пусть будет m — масса шара и Z' — сила, которая действует на шар в направлении оси z, кроме давления жидкости; тогда

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = Z' - Z.$$

Положим, что

$$Z' = -\alpha^2\zeta,$$

где α означает произвольное постоянное; тогда соответственно уравнению (26) получим

$$\frac{2\alpha^2}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r} - \frac{4\pi}{3}r^2\frac{\partial}{\partial t}\left\{2kr\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right] - \mu\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial t}\right\} + \frac{2m}{r}\frac{\partial^3(P+W)}{\partial r\,\partial t^2} = 0, \tag{34}$$

$$\text{для } r = R.$$

Мы удовлетворим обоим принятым для P и W уравнениям, (29) если положим

$$P = Be^{\beta^2 t}\frac{1}{r},\quad W = Ce^{\beta^2 t}\frac{1}{r}e^{\beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}r}, \tag{35}$$

где B, C и β — произвольные постоянные. Условия (31) и (34) дают для этих постоянных два уравнения, которые линейны и однородны относительно B и C и из которых можно вычислить отношение $B:C$ и β. При помощи дифференциальных уравнений (29) из (31) для $r = R$ легко найдем

$$\frac{\partial(P+W)}{\partial r} = \frac{1}{3}\frac{\mu}{k}\beta^2 rW,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial(P+W)}{\partial r}\right] = \frac{\mu}{k}\beta^2\frac{1}{r}\frac{\partial W}{\partial r}$$

и потом из (34)

$$0 = (\alpha^2 + m\beta^4)W - \frac{2\pi}{3}r^2\beta^2\left(9k\frac{\partial W}{\partial r} - \mu\beta^2 rW\right),$$

или, так как для каждого значения r будет

$$\frac{\partial W}{\partial r} = \left(-\frac{1}{r} + \beta\sqrt{\frac{\mu}{k}}\right)W,$$

то

$$0 = \alpha^2 + m\beta^4 + \frac{2\pi}{3}R\beta^2(\mu R^2\beta^2 - 9\sqrt{k\mu}R\beta + 9k). \tag{36}$$

Положим

$$\frac{4\pi}{3}R^3\mu = m',$$

обозначив таким образом массу вытесненной шаром жидкости; тогда это уравнение для $k = 0$ перейдет в

$$0 = \alpha^2 + \left(m + \frac{m'}{2}\right)\beta^4,$$

откуда следует, что если k достаточно мало (что мы и допустим), то четыре корня уравнения лежат вблизи значений

$$\pm \sqrt[4]{\frac{\alpha^2}{m+\frac{m'}{2}}}\,\frac{1 \pm \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

Выберем для β один из двух корней с отрицательной действительной частью; тогда в бесконечности скорость будет равна нулю. При этом выражения (35) для P и W будут комплексными, но действительные части этих выражений также удовлетворят уравнениям (29), (31) и (34), и эти действительные части мы примем теперь за P и W. Положим по-прежнему

$$\beta = -a + b\sqrt{-1},$$

вычислим при помощи (32) и (33) ζ по P и W, обозначим через C новое действительное произвольное постоянное и перенесем начало отсчета времени; тогда получим

$$\zeta = Ce^{(a^2-b^2)t}\sin 2abt,$$

причем опять для периода колебаний T и для логарифмического декремента δ получим выражения

$$T = \frac{\pi}{2ab}, \quad \delta = (b^2 - a^2)\,T.$$

Примем k бесконечно малым; тогда отсюда и из уравнения (36) на основании вычисления, подобного произведенному в предыдущем параграфе, найдем

$$T = T_0\left(1 + \varepsilon\sqrt{\frac{2T_0}{\pi}}\right), \quad \delta = \varepsilon\sqrt{2\pi T_0},$$

где

$$T_0 = \frac{\pi}{\alpha}\sqrt{m+\frac{m'}{2}}, \quad \varepsilon = \frac{9}{8}\,\frac{1}{R}\sqrt{\frac{k}{\mu}}\,\frac{m'}{m+\frac{m'}{2}}.$$

Не представляет трудности определить другое частное решение уравнений (29), (31) и (34), соответствующее другому начальному состоянию жидкости, чем указанное выше. Последнее имеет выдающийся интерес потому, что позволяет очень близко учесть влияние, которое производит воздух на колебания маятника, состоящего из шара и тонкой нити. Относительно указанного мы сошлемся на сочинение Стокса (Trans. Cambridge Philos. Soc., vol. IX, part. 2, p. 8) и Эмиля Мейера (Borchardts Journal, vol. 73).

ЛЕКЦИЯ ДВАДЦАТЬ СЕДЬМАЯ

(Равновесие и движение упругого твердого тела. Вывод дифференциальных уравнений для тела, обладающего различными упругими свойствами по разным направлениям. Число упругих постоянных, вообще, 21; оно уменьшается при наличии плоскостей симметрии и для изотропного тела сводится к двум. Задача о равновесии имеет только одно решение. Когда на частицы тела не действуют силы, то оно может быть в равновесии, если компоненты сжатия постоянны. Всестороннее сжатие, коэффициент упругости. Равновесие изотропных цилиндров, на поверхности оснований которых известным образом распределены давления. Продолжение вычисления для случая кругового сечения. Равновесие полого шара, на поверхности которого действует постоянное нормальное давление)

§ 1

Обратимся теперь к исследованию равновесия и движения *упругого твердого* тела. Общие дифференциальные уравнения для этой задачи, при известных предположениях, уже составлены в § 7 одиннадцатой лекции. Сохраним эти предположения и сделаем выводы из приведенных уравнений. Принятые там обозначения применим и здесь, только перемещения ξ, η, ζ будем обозначать здесь через u, v, w. Таким образом, представим себе тело, точки которого могут быть приведены в такое относительное положение, что совокупные компоненты давления на них равны нулю. Состояние, в котором тело тогда находится, мы назовем *естественным*. Обозначим через x, y, z координаты точки тела, когда оно находится в каком-нибудь положении в своем естественном состоянии, а через $x+u$, $y+v$, $z+w$ — координаты той же точки в момент t; u, v, w — бесконечно малы. Положим

$$\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad y_z = z_y = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \\ y_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad z_x = x_z = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \\ z_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{1}$$

и обозначим через f некоторую однородную функцию второй степени шести аргументов x_x, y_y, ... с постоянными коэффициентами; тогда получим

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{\partial f}{\partial x_x}, \quad Y_z = Z_y = \frac{\partial f}{\partial y_z}, \\ Y_y &= \frac{\partial f}{\partial y_y}, \quad Z_x = X_z = \frac{\partial f}{\partial z_x}, \\ Z_z &= \frac{\partial f}{\partial z_z}, \quad X_y = Y_x = \frac{\partial f}{\partial x_y} \end{aligned} \tag{2}$$

и

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu X - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial X_z}{\partial z},$$

$$\mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \mu Y - \frac{\partial Y_x}{\partial x} - \frac{\partial Y_y}{\partial y} - \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \tag{3}$$

$$\mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \mu Z - \frac{\partial Z_x}{\partial x} - \frac{\partial Z_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_z}{\partial z},$$

где μ — плотность, X, Y, Z — компоненты ускоряющей силы, действующей в точке (x, y, z). Функция f при этом обладает таким свойством, что $\int f d\tau$ (где $d\tau$ — элемент объема) есть потенциал сил, зависящих от относительного перемещения частей тела, т. е. сил, которые мы уже назвали *внутренними*. Из этого замечания следует, что значение f для какого-нибудь состояния бесконечно малой части тела, содержащей точку $(x\ y,\ z)$, не зависит от принятой системы координат, но коэффициеннты, входящие в f, которые называются *постоянными упругости*, обусловлэны направлением координатных осей. Число этих постоянных, вообще говоря, 21, но если тело симметрично и направления осей координат выбраны надлежащим образом, то число их может быть значительно уменьшено.

Положим

$$f = a_{11}x_x^2 + 2a_{12}x_xy_y + 2a_{13}x_xz_z + 2a_{14}x_xy_z + 2a_{15}x_xz_x + 2a_{16}x_xx_y +$$
$$+ a_{22}y_y^2 + 2a_{23}y_yz_z + 2a_{24}y_yy_z + 2a_{25}y_yz_x + 2a_{26}y_yx_y +$$
$$+ a_{33}z_z^2 + 2a_{34}z_zy_z + \dots \tag{4}$$

. . . .

и будем считать, что в отношении упругости тела плоскость Oxy есть *плоскость симметрии*, если выражение f не изменится, когда ось z примет противоположное направление. Если направление оси z изменится на противоположное, то z и w примут противоположное значение, x, y, u, v не изменятся. Поэтому вследствие уравнений (1) x_x, y_y, z_z, x_y сохранят свое первоначальное значение, но y_z и z_x изменят знак на обратный. При этом выражение (4), определяющее f, для которого x_x являются аргументами, должно остаться без изменения, т. е.

$$a_{14},\quad a_{24},\quad a_{34},\quad a_{46},$$
$$a_{15},\quad a_{25},\quad a_{35},\quad a_{56}$$

должны обратиться в нуль. Поэтому, если плоскость xOy есть плоскость симметрии, то

$$f = a_{11}x_x^2 + 2a_{12}x_xy_y + 2a_{13}x_xz_z + 2a_{16}x_xx_y +$$
$$+ a_{22}y_y^2 + 2a_{23}y_yz_z + 2a_{26}y_yx_y + a_{33}z_z^2 + 2a_{36}z_zx_y + a_{66}x_y^2 + \tag{5}$$
$$+ a_{44}y_z^2 + 2a_{45}y_zz_x + a_{55}z_x^2.$$

Если плоскости x, y и y, z — плоскости симметрии, то

$$f = a_{11}x_x^2 + a_{22}y_y^2 + a_{33}z_z^2 + a_{44}y_z^2 + a_{55}z_x^2 + a_{66}x_y^2 +$$
$$+ 2a_{23}y_yz_z + 2a_{13}z_zx_x + 2a_{12}x_xy_y, \tag{6}$$

откуда следует, что тогда плоскость zOx есть также плоскость симметрии.

Если три координатные плоскости суть плоскости симметрии, следовательно, имеет место уравнение (6), и если это уравнение удовлетворяется также при перестановке осей x и y, то плоскости y, z и z, x

следует называть *равнозначными* плоскостями симметрии. При перестановке осей x и y, x_x и y_y, так же как z_x и y_z перейдут одно в другое, в то время как z_z и x_y останутся неизменными; при этом данное (6) выражение f не должно изменяться; следовательно, должно быть

$$a_{11}=a_{22},\ a_{44}=a_{55},\ a_{13}=a_{23}.$$

Отсюда следует, что если три плоскости координат будут равнозначными плоскостями симметрии, то

$$f=a_{11}(x_x^2+y_y^2+z_z^2)+2a_{23}(y_yz_z+z_zx_x+x_xy_y)+a_{44}(y_z^2+z_x^2+x_y^2). \tag{7}$$

Примером такого случая является каменная соль *.

Тело называется изотропным, если выражение f одинаково в каждой системе координат. Чтобы найти выражение f для такого тела, мы можем исходить из выражения (7), в котором искомый случай содержится как частный.

Заменим в уравнении (7) постоянные a_{11}, a_{23}, a_{44} другими постоянными K, θ, L; тогда будем иметь

$$f=-K\left[x_x^2+y_y^2+z_z^2+\frac{1}{2}y_z^2+\frac{1}{2}z_x^2+\frac{1}{2}x_y^2+\theta(x_x+y_y+z_z)^2\right]+ \\ +L(x_x^2+y_y^2+z_z^2). \tag{8}$$

Заметим, что

$$x_x+y_y+z_z$$

и

$$x_x^2+y_y^2+z_z^2+\frac{1}{2}y_z^2+\frac{1}{2}z_x^2+\frac{1}{2}x_y^2$$

останутся неизменными при перемене системы координат; чтобы доказать это утверждение, мы введем главные удлинения, обозначив величины их через

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,$$

а через

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3$$

обозначим косинусы углов, которые образуют направления этих и главных удлинений с осями координат. Тогда, по уравнениям (21) десятой лекции и (27а) одиннадцатой, имеем

$$\begin{aligned}
x_x&=\alpha_1^2\lambda_1+\alpha_2^2\lambda_2+\alpha_3^2\lambda_3,\\
y_y&=\beta_1^2\lambda_1+\beta_2^2\lambda_2+\beta_3^2\lambda_3,\\
z_z&=\gamma_1^2\lambda_1+\gamma_2^2\lambda_2+\gamma_3^2\lambda_3,\\
\frac{1}{2}y_z&=\beta_1\gamma_1\lambda_1+\beta_2\gamma_2\lambda_2+\beta_3\gamma_3\lambda_3,\\
\frac{1}{2}z_x&=\gamma_1\alpha_1\lambda_1+\gamma_2\alpha_2\lambda_2+\gamma_3\alpha_3\lambda_3,\\
\frac{1}{2}x_y&=\alpha_1\beta_1\lambda_1+\alpha_2\beta_2\lambda_2+\alpha_3\beta_3\lambda_3,
\end{aligned}$$

откуда при помощи соотношений, существующих между величинами α, β, γ, вытекает правильность нашего утверждения. Одновременно мы убеждаемся, что выражение в уравнении (8), умноженное на L, зависит от направления осей координат. Чтобы уравнение (8) выполнялось в каждой

---

* Untersuchung der Elasticitätsverhältnisse des Steinsalzes. Inauguraldissertation von Woldemar Voigt, 1874.

системе осей координат, необходимо

$$L = 0.$$

Таким образом мы пришли к такому же выражению для изотропного тела, какое уже было дано уравнением (30) одиннадцатой лекции.

§ 2

Для случая равновесия уравнения (3) перейдут в более простые

$$\begin{aligned} \mu X &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\ \mu Y &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\ \mu Z &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}. \end{aligned} \tag{9}$$

К этому добавляется следующее условие: если даны давления, действующие на элементы поверхности тела, то для этих элементов компоненты X_n, Y_n, Z_n (где по-прежнему через n обозначена направленная внутрь тела нормаль) полностью определяются. Кроме того, эти значения и значения X, Y, Z должны удовлетворять шести известным соотношениям, а именно: суммы их компонент и моментов относительно осей координат должны обращаться в нуль, как это вытекает из уравнений (1) и (2) одиннадцатой лекции.

Величины u, v, w этими условиями еще не вполне определены; они входят как в уравнения (9), так и в граничные условия только через x_x, y_y, z_z, y_z, z_x, x_y. Если положим, что последние определены, то u, v, w надо будет найти из дифференциальных уравнений (1). Когда будут найдены выражения для u, v, w, удовлетворяющие этим уравнениям, к ним можно добавить соответственно u', v', w', если

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial u'}{\partial x}, & 0 &= \frac{\partial v'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial y}, \\ 0 &= \frac{\partial v'}{\partial y}, & 0 &= \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial w'}{\partial z}, & 0 &= \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial x}. \end{aligned} \tag{10}$$

Легко найти самое общее решение этих уравнений. Действительно, дифференцируя каждое из них еще раз по x, y и z, мы получим, что совокупность вторых производных u', v', w' по x, y, z обращается в нуль; поэтому u', v', w' будут линейными функциями x, y, z с постоянными коэффициентами. Подставляя эти функции в (10), мы найдем между этими коэффициентами такие соотношения

$$\begin{aligned} u' &= a_0 + bz - cy, \\ v' &= b_0 + cx - az, \\ w' &= c_0 + ay - bx, \end{aligned}$$

где a_0, b_0, c_0, a, b, c — произвольные постоянные. Изменение состояния тела, соответствующее прибавлению этих выражений к u, v, w, согласно разъяснению, сделанному в пятой лекции, состоит из смещения и вращения вокруг начала координат, компоненты которых соответственно a_0, b_0,

c_0 и a, b, c. Иначе говоря, изменению величин a_0, b_0, c_0, u, b, c соответствует изменение *положения* тела и перемещение его в естественное состояние из того положения, для которого были вычислены перемещения u, v, w. Если u, v, w должны быть определены вполне, когда определены x_x, $y_y, \ldots$, то должны быть еще установлены условия для определения шести постоянных a_0, b_0, c_0, a, b, c. Такими условиями будут, например, условия, что для $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ будет

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

Из трех первых условий следует, что начало координат не получает никакого перемещения; значения же трех последних легко уясняются при помощи уравнений (7) десятой лекции. При принятых там обозначениях, как показывают уравнения (27а) одиннадцатой лекции, три последних из уравнений (11) будут

$$a_{13} = 0, \quad a_{23} = 0, \quad a_{21} = 0;$$

поэтому уравнения (7) десятой лекции примут вид

$$r'\alpha' = r(a_{11}\alpha + a_{12}\beta),$$

$$r'\beta' = \qquad ra_{22}\beta,$$

$$r'\gamma' = r(a_{31}\alpha + a_{32}\beta + a_{33}\gamma).$$

Откуда следует, во-первых: если $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, то $\alpha' = 0$ и $\beta' = 0$, т. е. линейный элемент, параллельный оси z и проходящий через начало координат, не претерпевает вращения; во-вторых: если $\beta = 0$, то также $\beta' = 0$, т. е. элемент площади, параллельный плоскости zOx, проходящий через начало координат, остается параллельным себе.

Если бы мы пожелали в уравнениях (1) принять x_x, $y_y, \ldots$ за произвольные функции x, y, z, то, так как эти уравнения содержат только три функции u, v, w, подлежащие определению, возникает некоторое противоречие. Заметим, что они совместны всегда, когда x_x, $y_y, \ldots$ не зависят от x, y, z, хотя имеют произвольные значения. Действительно, пусть u, v, w — линейные функции x, y, z; тогда двенадцать коэффициентов можно определить так, чтобы x_x, $y_y, \ldots$ получали любые данные значения и одновременно были удовлетворены условия (11).

Мы воспользуемся этим замечанием, чтобы вывести важное свойство функции f, которое до сих пор не было упомянуто. Предположим, что когда на части тела не действуют никакие силы и на его поверхность — никакие давления, и тело подчинено условиям (11), оно находится в устойчивом равновесии, если всюду $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Тогда, согласно значению f из § 2 четвертой лекции при условиях (11), интеграл

$$\int f d\tau$$

должен иметь *максимум*, если всюду $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, т. е. если всюду x_x, $y_y, \ldots$ обращаются в нуль. Этот максимум также должен иметь место, если x_x, $y_y \ldots$ подлежат ограничению, а именно: что они не зависят от x, y, z, но значения их остаются произвольными. Поэтому f должно иметь максимум для $x_x = 0$, $y_y = 0, \ldots$, если рассматривать x_x, $y_y, \ldots$ как независимые переменные. Так как f есть однородная функция указанных аргументов, то это выражение равнозначно следующему: *f не может быть положительным и обращается в нуль только при обращении в нуль каждого из его аргументов.* Последним свойством f не обладает, если тело представляет сжимаемую жидкость без трения. Мы можем рассматривать таковую как изотропное тело, для которого постоянные K и θ, введен ные для изотропного тела, имеют такие значения, что $K = 0$ и $K\theta$ конечно. В этом случае f обращается в нуль всегда, когда $x_x + y_y + z_z = 0$.

Из того, что f никогда не положительно и обращается в нуль только когда каждый из аргументов равен нулю, следует далее, что u, v, w будут определены однозначно уравнениями (9), а также условиями, что на поверхости X_n, Y_n, Z_n имеют заданные значения, и уравнением (11). Чтобы доказать это, надо только показать, что эти условия приведут к $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, если X, Y, Z, X_n, Y_n, Z_n всюду обращаются в нуль. Для этого сложим уравнения (9) после умножения их на $ud\tau$, $vd\tau$, $wd\tau$ и проинтегрируем по объему тела. С полученным таким образом уравнением проделаем преобразование, подобное приведшему нас к уравнению (18) одиннадцатой лекции. Тогда, пользуясь тем, что

$$2f = X_x x_x + Y_y y_y + Z_z z_z + Y_z y_z + Z_x z_x + X_y x_y,$$

найдем для данного случая

$$\int f d\tau = 0.$$

Но отсюда следует, на основании свойства, которым обладает f, что x_x, $y_y, \ldots$ всюду обращаются в нуль, и потом далее, что u, v, w также всюду обращаются в нуль.

Если устранить условия (11), то уравнения (9) и значения X_n, Y_n, Z_n определят, как мы будем выражаться, *состояние* тела, именно относительное смещение его частей, в то время как положение тела останется неизвестным.

§ 3

Если силы X, Y, Z обращаются в нуль, то уравнения (9) примут вид

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}, \\
0 &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \\
0 &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.
\end{aligned} \tag{12}$$

Составим частные решения этих уравнений, совместимые с условиями (1).

Мы получим такое решение, если шесть компонент давления X_x, $Y_y, \ldots$ приравняем любым постоянным. Действительно, тогда величины x_x, $y_y, \ldots$ сделаются постоянными, и, как мы уже это видели в предыдущем параграфе, уравнения (1) в этом случае будут удовлетворены и u, v, w окажутся линейными функциями x, y, z. Последнее обстоятельство указывает, что при таком предположении изменение, которое тело претерпевает при переходе из своего естественного состояния, является таким, что новые координаты каждой его точки будут линейными функциями старых, так что каждая плоскость перейдет в плоскость, каждый шар — в эллипсоид.

Пусть будут

$$X_x = Y_y = Z_z = p,$$
$$Y_z = Z_x = X_y = 0,$$

где p — постоянная; тогда каждый элемент площади внутри тела и каждый элемент его поверхности испытывает перпендикулярное давление, равное p. При произвольной форме тела этот случай осуществляется, когда тело погружено в жидкость, на которую производится увеличенное давление; влиянием тяжести при этом пренебрегаем. В этом случае, вообще говоря, тело не остается себе подобным; это имеет место, только если тело изотропно или если тело имеет три равнозначных взаимно перпендикулярных плоскости симметрии. Под *всесторонней сжимаемостью* тела мы будем понимать объемное расширение для $p = 1$, взятое с обратным знаком. Для изотропного тела (исходя из уравнений (28) одиннадцатой лекции) всестороннюю сжимаемость положим равной

$$\frac{3}{2K(1+3\theta)}.$$

Если

$$X_x,\ Y_y,\ X_y,\ Y_z,\ Z_x$$

обращаются в нуль и Z_z имеет постоянное значение, то любой элемент площади, параллельный оси z, не испытывает никакого давления, а элемент, перпендикулярный к этой оси, испытывает перпендикулярное давление Z_z. Этот случай осуществляется, когда тело имеет форму прямого параллельного оси z цилиндра с произвольным поперечным сечением, причем боковая поверхность его остается свободной, а на каждый элемент площади оснований производится перпендикулярное постоянное давление. Тогда значение выражения

$$-\frac{Z_z}{z_z}$$

называется *коэффициентом упругости* вещества в направлении оси z; он всегда зависит от направления оси z, кроме случая, когда тело изотропно. Для изотропного тела, вследствие уравнений (28), он равен

$$2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta}.$$

§ 4

Если тело изотропно, то нетрудно найти самое общее решение уравнений (12), совместимое с условиями (1) при

$$X_x = 0,\ X_y = 0,\ Y_y = 0.$$

Если, кроме того, тело ограничено цилиндрической поверхностью, параллельной оси z, и ее двумя поперечными сечениями, то это решение можно приспособить к случаю, когда циллиндрическая поверхность свободна и на элементы поперечного сечения действуют давления, суммы компонент которых и моменты заданы произвольно. Такое решение имеет особенную важность, потому что оно характеризует с большой точностью изменение формы цилиндрического стержня, на концы которого действуют произвольные давления; необходимо только, чтобы длина стержня была велика по сравнению с размерами поперечного сечения. В двух следующих лекциях мы будем подробно заниматься вопросами изменения формы тонкого стержня, причем прежде всего введем предположение, что размеры его поперечного сечения бесконечно малы, в то время как длина конечна. Исследования, которые мы сейчас произведем, с одной точки зрения имеют более частный, а с другой — более общий характер, чем последующие.

Чтобы получить указанное решение, установим сперва, какие соотношения должны быть между шестью величинами x_x, $y_y, \ldots$, чтобы были выполнены уравнения (1); мы получим последние, установив уравнения, из которых должны быть вычислены по x_x, $y_y, \ldots$ функции u, v, w, если они существуют. Представим себе, что из точки ($x = 0$, $y = 0$, $z = 0$), которую возьмем внутри тела, проведена произвольная линия в точку (x, y, z). Проекции элемента ее на оси координат обозначим через dx, dy, dz. Если u_0 есть значение u при $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, то тогда имеем

$$u = u_0 + \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz\right).$$

Здесь надо рассматривать $\frac{\partial u}{\partial x}$ как непосредственно заданное, потому что оно равно x_x, а $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$ надо прежде всего вычислить. Из уравнений (1) легко следует, что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}=\frac{\partial x_x}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial y_x}{\partial y}-\frac{\partial y_y}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial y_z}{\partial x}+\frac{\partial z_x}{\partial y}+\frac{\partial x_y}{\partial z}\right)$$

и

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}=\frac{\partial x_x}{\partial z}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}=\frac{1}{2}\left(-\frac{\partial y_z}{\partial x}+\frac{\partial z_x}{\partial y}+\frac{\partial x_y}{\partial z}\right), \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{\partial z_x}{\partial z}-\frac{\partial z_z}{\partial x}.$$

Эти значения должны быть подставлены в уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0+\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy+\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}dz\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0+\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z}dx+\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z}dy+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz\right),$$

в которых индекс 0 имеет только что указанное значение. Выражение взятое для $\frac{\partial u}{\partial x}$, именно x_x, есть функция x, y, z; такими же функциями должны быть и выражения, полученные для $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$, т. е. они должны быть независимы от пути интегрирования; следовательно входящие под знак интегралов выражения должны быть полными дифференциалами. Условия этого выражаются пятью уравнениями:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 y_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 x_y}{\partial x\, \partial y},\\
\frac{\partial^2 z_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 x_x}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 z_x}{\partial z\, \partial x},\\
2\frac{\partial^2 x_x}{\partial y\, \partial z}+\frac{\partial^2 y_z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y_x}{\partial z\, \partial x}+\frac{\partial^2 z_x}{\partial y \partial x},\\
2\frac{\partial^2 y_y}{\partial z\, \partial x}+\frac{\partial^2 z_x}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z_y}{\partial x\, \partial y}+\frac{\partial^2 x_y}{\partial z\, \partial y},\\
2\frac{\partial^2 z_z}{\partial x\, \partial y}+\frac{\partial^2 x_y}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 x_z}{\partial y\, \partial z}+\frac{\partial^2 y_z}{\partial x\, \partial z}.
\end{gathered}\tag{13}$$

То обстоятельство, что выражения, получаемые для $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$, будут частными производными только *одной* функции, не приводит при этом ни к каким новым условиям.

Заменив в произведенном исследовании u на v или w, мы получим таким образом только одно новое уравнение

$$\frac{\partial^2 y_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 z_z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 y_z}{\partial y\, \partial z},\tag{14}$$

которое надо добавить к уравнениям (13).

Подставляя в уравнения (1) полученные выражения для первых производных u и соответственные для первых производных v и w, мы убедимся, что они будут выполнены для всех значений x, y, z, если только $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$, $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0$, $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ будут выбраны так, что они будут удовлетворены в точке $x=0$, $y=0$, $z=0$.

В результате этих исследований находим, что уравнения (13) и (14) являются полными условиями того, что u, v, w, в соответствии с уравнениями (1), могут быть определены как функции от x, y, z. Чтобы найти соотношения, которые при этом должны быть между компонентами давлений X_x, $Y_y, \ldots$, надо только заметить, что x_x, $y_y, \ldots$ — линейные однородные функции этих давлений, коэффициенты которых известным образом зависят от постоянных упругости.

Мы уже видели, что уравнения (1) совместимы с предположением, что X_x, $Y_y, \ldots$ имеют любые постоянные значения. Теперь мы видим, что они позволяют также принять за X_x, $Y_y, \ldots$ любые линейные функции x, y, z, так как уравнения (13) и (14) содержат только вторые производные по x, y, z.

Положим, что тело изотропно; тогда по уравнениям (28) одиннадцатой лекции получим

$$x_x=\frac{-1}{2K}\left[X_x-\frac{\theta}{1+3\theta}(X_x+Y_y+Z_z)\right],$$

$$y_y=\frac{-1}{2K}\left[Y_y-\frac{\theta}{1+3\theta}(X_x+Y_y+Z_z)\right],$$

$$z_z=\frac{-1}{2K}\left[Z_z-\frac{\theta}{1+3\theta}(X_x+Y_y+Z_z)\right],$$

$$y_z=-\frac{1}{K}Y_z,$$

$$z_x=-\frac{1}{K}Z_x,$$

$$x_y=-\frac{1}{K}X_y.$$

Введем далее предположение, что

$$X_x=0,\quad X_y=0,\quad Y_y=0; \tag{15}$$

тогда отсюда будем иметь

$$\begin{aligned} x_x&=\frac{1}{2K}\frac{\theta}{1+3\theta}Z_z, & y_z&=-\frac{1}{K}Y_z,\\ y_y&=\frac{1}{2K}\frac{\theta}{1+3\theta}Z_z, & z_x&=-\frac{1}{K}Z_x,\\ z_z&=-\frac{1}{2K}\frac{1+2\theta}{1+3\theta}Z_z, & x_y&=0. \end{aligned} \tag{16}$$

При этом уравнения (12) будут

$$\frac{\partial X_z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial Y_z}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial Z_z}{\partial z}=-\frac{\partial X_z}{\partial x}-\frac{\partial Y_z}{\partial y}. \tag{17}$$

Поэтому из уравнений (13) и (14) найдем

$$\frac{\partial^2 Z_z}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial y^2}=0,\quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial z^2}=0,\quad \frac{\partial^2 Z_z}{\partial x\,\partial y}=0,$$

и

$$\frac{\theta}{1+3\theta}\frac{\partial^2 Z_z}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2 Y_z}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 X_z}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{\theta}{1+3\theta}\frac{\partial^2 Z_z}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 X_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Y_z}{\partial x\,\partial y}.$$

Первые четыре из этих шести уравнений показывают, что Z_z есть линейная функция относительно каждой из величин x, y, z и не содержит произведения xy; поэтому

$$Z_z = a + a_1 x + a_2 y + z(b + b_1 x + b_2 y), \tag{18}$$

где a, a_1, a_2, b, b_1, b_2 — произвольные постоянные. Вследствие этого два последних уравнения примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y}\right) = \frac{\theta}{1+3\theta} b_2,$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y}\right) = -\frac{\theta}{1+3\theta} b_1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial Y_z}{\partial x} - \frac{\partial X_z}{\partial y} = c + \frac{\theta}{1+3\theta}(b_2 x - b_1 y), \tag{19}$$

где c — произвольная величина, которая не зависит от x, y и, вследствие (17), не зависит также от z. Присоединим к этому уравнению уравнение

$$\frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} = -(b + b_1 x + b_2 y), \tag{20}$$

которое следует из (17) и (18). Положим, что X_z' и Y_z' — разности значений X_z и Y_z в двух различных решениях уравнений (19) и (20); тогда

$$\frac{\partial Y_z'}{\partial x} - \frac{\partial X_z'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial X_z'}{\partial x} + \frac{\partial Y_z'}{\partial y} = 0;$$

следовательно,

$$X_z' = \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \quad Y_z' = \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 0. \tag{21}$$

Поэтому можно определить общее решение уравнений (19) и (20), если найдено частное. Но последнее найдем, приняв за X_z и Y_z выражения второй степени от x и y, определив надлежащим образом их коэффициенты; при этом остается еще некоторый простор для произвола. Таким образом, общим решением уравнений (19) и (20) будет

$$\begin{aligned} X_z &= -\frac{b}{2}x - \frac{c}{2}y - \frac{b_1}{4}\frac{1+2\theta}{1+3\theta}(x^2+y^2) - \frac{b_2}{2}\frac{1+4\theta}{1+3\theta}xy + \frac{\partial\Omega}{\partial x}, \\ Y_z &= \frac{c}{2}x - \frac{b}{2}y - \frac{b_2}{4}\frac{1+2\theta}{1+3\theta}(x^2+y^2) - \frac{b_1}{2}\frac{1+4\theta}{1+3\theta}xy + \frac{\partial\Omega}{\partial y}, \end{aligned} \tag{22}$$

где Ω должно быть выбрано соответственно уравнению (21).

Положим теперь, что рассматриваемое тело ограничено цилиндрической поверхностью, параллельной оси z, и двумя перпендикулярными поперечными сечениями, а выведенные формулы применим к случаю, когда цилиндрическая поверхность свободна от давлений. Пусть dl будет элемент контура нормального к оси z сечения, n — направленная внутрь его нормаль к dl; тогда должно быть

$$0 = X_x \cos(nx) + X_y \cos(ny) + X_z \cos(nz),$$
$$0 = Y_x \cos(nx) + Y_y \cos(ny) + Y_z \cos(nz),$$
$$0 = Z_x \cos(nx) + Z_y \cos(ny) + Z_z \cos(nz).$$

На основании уравнений (15), а также того, что $\cos(nz)=0$, первые два из этих уравнений выполнены, а третье будет

$$0 = X_z \cos(nx) + Y_z \cos(ny). \tag{23}$$

Подставив сюда X_z и Y_z из (22), получим выражение для

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial \Omega}{\partial y}\cos(ny), \text{ т. е для } \frac{\partial \Omega}{\partial n},$$

которое определяет функцию Ω, данную пока только уравнением (21), с точностью до аддитивной постоянной, значение которой безразлично.

Чтобы существовала функция, удовлетворяющая поставленным для Ω условиям, как мы видели в шестнадцатой лекции, должно быть

$$\int \frac{\partial \Omega}{\partial n} dl = 0. \tag{24}$$

Составим это уравнение с помощью (22) и (23); тогда из него получим что обращается в нуль сумма членов вида

$$\int V \cos(nx)\, dl \quad \text{или} \quad \int V \cos(ny)\, dl,$$

где V — функция x и y, непрерывная по всему поперечному сечению цилиндрического тела. Но если df есть элемент поперечного сечения, то, соответственно уравнениям (6) одиннадцатой лекции, имеем

$$\int V \cos(nx)\, dl = -\int \frac{\partial V}{\partial x} df,$$

$$\int V \cos(ny)\, dl = -\int \frac{\partial V}{\partial y} df.$$

Расположим ось z так, чтобы

$$\int x df = 0 \text{ и } \int y df = 0,$$

т. е. выберем за ось z прямую, проходящую через центры тяжести поперечных сечений; тогда из уравнения (22) ясно, что уравнение (24) превратится в

$$b \int df = 0, \text{ т. е. } b = 0.$$

Шесть остальных постоянных, которые мы ввели,

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad b_1, \quad b_2, \quad c$$

остаются неопределенными и могут быть выбраны так, чтобы суммы компонент и моментов давлений, действующих на элементы концевых сечений, именно величины

$$\int X_z df, \quad \int Y_z df, \quad \int Z_z df,$$

$$\int (yZ_z - zY_z)\, df, \quad \int (zX_z - xZ_z)\, df, \quad \int (xY_z - yX_z)\, df,$$

принимали любые данные значения.

Мы продолжим вычисления только для случая, когда поперечное сечение тела есть круг радиуса R, следовательно, уравнение контура его есть

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнение (21) будет удовлетворено функцией

$$\Omega = A_1x + A_2y + B_1(x^3 - 3\,xy^2) + B_2(y^3 - 3x^2y),$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 — произвольные постоянные. Здесь надо показать, что они могут быть определены так, что $\frac{\partial\Omega}{\partial n}$ получит требуемое значение. Так как

$$\cos(nx) = -\frac{x}{R}, \cos(ny) = -\frac{y}{R},$$

то

$$-R\frac{\partial\Omega}{\partial n} = x\frac{\partial\Omega}{\partial x} + y\frac{\partial\Omega}{\partial y},$$

что равно

$$A_1x + A_2y + 3B_1(x^3 - 3xy^2) + 3B_2(y^3 - 3x^2y),$$

или, так как $\frac{\partial\Omega}{\partial n}$ относится только к контуру поперечного сечения,

$$-R\frac{\partial\Omega}{\partial n} = A_1x + A_2y + 3B_1(x^3 - 3\,xy^2) + 3B_2(y^3 - 3x^2y) + \\ + (C_1x + C_2y)(x^2 + y^2 - R)^2,$$

где C_1,C_2 — две новые постоянные. С другой стороны, из уравнений (22) и (23) следует, что

$$-R\frac{\partial\Omega}{\partial n} = \frac{b_1x}{4(1+3\theta)}[(1+2\theta)x^2 + (3+10\theta)y^2] + \\ + \frac{b_2y}{4(1+3\theta)}[(3+10\theta)x^2 + (1+2\theta)y^2].$$

Оба выражения, составленные для $-R\frac{\partial\Omega}{\partial n}$, сделаются тождественными если положить

$$A_1 = R^2\frac{b_1}{8}\frac{3+8\theta}{1+3\theta}, \quad A_2 = R^2\frac{b_2}{8}\frac{3+8\theta}{1+3\theta},$$

$$B_1 = -\frac{b_1}{24}\frac{1+4\theta}{1+3\theta}, \quad B_2 = -\frac{b_2}{24}\frac{1+4\theta}{1+3\theta},$$

$$C_1 = \frac{b_1}{8}\frac{3+8\theta}{1+3\theta}, \quad C_2 = \frac{b_2}{8}\frac{3+8\theta}{1+3\theta}.$$

При этих значениях A_1, A_2, B_1, B_2 уравнения (22) будут

$$X_z = -\frac{c}{2}y + \frac{b_1}{8}\frac{(3+8\theta)(R^2 - x^2) - y^2}{1+3\theta} - \frac{1+4\theta}{1+3\theta}\frac{b_2}{4}xy,$$

$$Y_z = \frac{c}{2}x - \frac{1+4\theta}{1+3\theta}xy + \frac{b_2}{8}\frac{(3+8\theta)(R^2 - y^2) - x^2}{1+3\theta},$$

к которым мы добавим уравнение

$$Z_z = a + a_1x + a_2y + z(b_1x + b_2y).$$

Вычисление постоянных a, a_1, a_2, b_1, b_2, c по суммам компонент и моментов давлений, действующих на конец цилиндра, здесь очень просто. Мы примем этот конец за плоскость xOy и воспользуемся тем, что

$$\int x^2 df = \int y^2 df = \frac{\pi}{4} R^4,$$

$$\int xy df = \int x^2 y df = \int xy^2 df = 0;$$

тогда найдем

$$\int X_z df = b_1 \frac{\pi}{4} R^4, \qquad \int (yZ_z - zY_z)\, df = a_2 \frac{\pi}{4} R^4,$$

$$\int Y_z df = b_2 \frac{\pi}{4} R^4, \qquad \int (zX_z - xZ_z)\, df = -a_1 \frac{\pi}{4} R^4,$$

$$\int Z_z df = a\pi R^2, \qquad \int (xY_z - yX_z)\, df = c \frac{\pi}{4} R^4.$$

Относительно дальнейшего и более общего исследования выведенных в этом параграфе формул мы сошлемся на Клебша * и Сен-Венана **.

§ 5

Для изотропного тела, вследствие уравнений (28) одиннадцатой лекции, если положим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma \tag{25}$$

и по-прежнему обозначим

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi,$$

мы сможем представить уравнения (3) в виде

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu X + K\left[\Delta u + (1 + 2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right], \\ \mu \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu Y + K\left[\Delta v + (1 + 2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right], \\ \mu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu Z + K\left[\Delta w + (1 + 2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial z}\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Для случая, когда существует равновесие и на части тела не действуют никакие силы, последние перейдут в

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u + (1 + 2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial x}, \\ 0 &= \Delta v + (1 + 2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial y}, \\ 0 &= \Delta w + (1 + 2\theta)\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \end{aligned} \tag{27}$$

откуда следует, что

$$0 = \Delta\sigma.$$

Легко найти частное решение уравнений (25) и (27), значение которого представляет интерес. Для этого предположим, что $\sigma = a$, где a означает произвольное постоянное, и

$$u = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial V}{\partial z},$$

* Theorie der Elasticität fester Körper von A. Clebsch. Leipzig, 1862.

** Mém. sur la flexion des prismes. Liouville Journal, dexième serie, t. 1, 1856.

где V удовлетворяет уравнению

$$\Delta V = a.$$

Соответственно этому можно положить

$$V = \frac{a}{b} r^2 + \frac{b}{r},$$

где

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

и b — новое произвольное постоянное. Тогда для компонент давления получим выражения

$$X_x = -2K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \theta a\right), \quad Y_z = -2K\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z},$$

$$Y_y = -2K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \theta a\right), \quad Z_x = -2K\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x},$$

$$Z_z = -2K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \theta a\right), \quad X_y = -2K\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},$$

т. е.

$$X_x = -2K\left[(1+3\theta)\frac{a}{3} - \frac{b}{r^3} + \frac{3x^2}{r^5}b\right], \quad Y_z = -2K\frac{3yz}{r^5}b,$$

$$Y_y = -2K\left[(1+3\theta)\frac{a}{3} - \frac{b}{r^3} + \frac{3y^2}{r^5}b\right], \quad Z_x = -2K\frac{3zx}{r^5}b,$$

$$Z_z = -2K\left[(1+3\theta)\frac{a}{3} - \frac{b}{r^3} + \frac{3z^2}{r^5}b\right], \quad X_y = -2K\frac{3xy}{r^5}b.$$

Эти значения X_x, $Y_y, \ldots$ имеют свойство удовлетворять уравнениям

$$(X_x - p)x + X_y y + X_z z = 0,$$

$$Y_x x + (Y_y - p)y + Y_z z = 0,$$

$$Z_x x + Z_y y + (Z_z - p)z = 0,$$

если положим

$$p = -2K\left[(1+3\theta)\frac{a}{3} + 2\frac{b}{r^3}\right].$$

Вспомнив определение понятия *главного давления*, данное в § 3 одиннадцатой лекции, сделаем заключение, что прямая, проведенная через начало координат и точку (x, y, z), имеет направление главной оси давления для этой точки, и величина соответствующего главного давления есть данное для p выражение. Так как это выражение есть функция r и содержит две произвольные постоянные, то далее следует, что установленные формулы могут быть приспособлены к случаю, когда тело ограничено двумя сферическими поверхностями, описанными вокруг центра — начала координат, на каждую из которых действует постоянное перпендикулярное давление. Если r_1 и r_2 — радиусы двух шаровых поверхностей и p_1 и p_2 — соответствующие давления, то a и b определяются из уравнений

$$p_1 = -2K\left[(1+3\theta)\frac{a}{3} + 2\frac{b}{r_1^3}\right].$$

$$p_2 = -2K\left[(1+3\theta)\frac{a}{3} + 2\frac{b}{r_2^3}\right].$$

ЛЕКЦИЯ ДВАДЦАТЬ ВОСЬМАЯ

(Конечные деформации бесконечно тонкого первоначально цилиндрического стержня. Расширение бесконечно малого элемента последнего. Упрощение, происходящее от того, что сечение есть эллипс, или его плоскость есть плоскость симметрии. Потенциал сил, производимых расширением. Живая сила стержня. Равновесие стержня под влиянием сжимающих сил, приложенных по концам его. Аналогия относящейся сюда задачи с задачей о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. Стержень может представлять винтовую линию Равновесие изогнутого стержня, бывшего первоначально винтовой линией)

§ 1

Теперь мы будем рассматривать равновесие и движение тел, размеры которых в каком-либо направлении можно считать бесконечно малыми. К ним могут быть отнесены тонкие стержни и пластинки. Тела, которые мы будем рассматривать, могут испытывать *конечную* деформацию, причем расширения не перестают быть бесконечно малыми. Мы можем применить нашу теорию также и к таким случаям, когда можно, разбив тело на части с измерениями одного порядка, применить выведенные выше уравнения сначала *к одной* из этих частей.

Вообразим тело (или часть тела), все размеры которого одного порядка, равного бесконечно малой величине i, и составим для него условия равновесия. Сюда относятся прежде всего уравнения (9) предыдущей лекции, т. е. уравнения

$$\mu X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z},$$

$$\mu Y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}, \tag{1}$$

$$\mu Z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.$$

Пусть g будет функцией переменных x, y, z, причем

$$g = 0$$

есть уравнение поверхности тела, и g положительно внутри тела, n по-прежнему обозначает направленную внутрь нормаль к элементу поверхности.

Тогда будем иметь

$$\cos(nx) : \cos(ny) : \cos(nz) = \frac{\partial g}{\partial x} : \frac{\partial g}{\partial y} : \frac{\partial g}{\partial z},$$

и косинусы имеют те же знаки, как соответственные производные, так как $\frac{\partial g}{\partial n}$ положительно. Отсюда имеем на поверхности

$$
\begin{aligned}
X_x \frac{\partial g}{\partial x} + X_y \frac{\partial g}{\partial y} + X_z \frac{\partial g}{\partial z} &= X_n \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\,, \\
Y_x \frac{\partial g}{\partial x} + Y_y \frac{\partial g}{\partial y} + Y_z \frac{\partial g}{\partial z} &= Y_n \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\,, \\
Z_x \frac{\partial g}{\partial x} + Z_y \frac{\partial g}{\partial y} + Z_z \frac{\partial g}{\partial z} &= Z_n \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial z}\right)^2}\,,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где корни должны быть взяты положительными, и X_n, Y_n, Z_n надо рассматривать как данные.

Чтобы u, v, w были вполне определены, примем еще, что положение тела в его естественном состоянии (исходя из которого определяются u, v, w) выбрано так, что для начала координат, которое должно находиться внутри тела, т. е. для $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, будут иметь место равенства

$$
u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \tag{3}
$$

Теперь положим

$$
x = ix', \quad y = iy', \quad z = iz'; \tag{4}
$$

тогда вследствие сделанного предположения x', y', z', будут в теле конечны; пусть будет

$$
g' = 0
$$

уравнение между x', y', z', соответствующее поверхности, так что g' содержит только конечные постоянные.

Вообразим, что произведена подстановка (4) также и в уравнения (1), (2) и (3). Положим

$$
\begin{aligned}
x_x' &= \frac{\partial u}{\partial x'}, & y_z' &= \frac{\partial v}{\partial z'} + \frac{\partial w}{\partial y'}, \\
y_y' &= \frac{\partial v}{\partial y'}, & z_x' &= \frac{\partial w}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial z'}, \\
z_z' &= \frac{\partial w}{\partial z'}, & x_y' &= \frac{\partial u}{\partial y'} + \frac{\partial v}{\partial x'},
\end{aligned}
$$

и обозначим через X_x', X_y', ... выражения, которые получим, если заменим x_x, y_y, ... через x_x', y_y' ... в выражениях, представляющих X_x, X_y, ... как функции x_x, y_y, ...; таким образом получим

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X_x'}{\partial x'} + \frac{\partial X_y'}{\partial y'} + \frac{\partial X_z'}{\partial z'} &= i^2 X_\mu, \\
\frac{\partial Y_x'}{\partial x'} + \frac{\partial Y_y'}{\partial y'} + \frac{\partial Y_z'}{\partial z'} &= i^2 Y_\mu, \\
\frac{\partial Z_x'}{\partial x'} + \frac{\partial Z_y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z_z'}{\partial z'} &= i^2 Z_\mu;
\end{aligned}
\tag{5}
$$

для $g'=0$ будем иметь

$$
\begin{aligned}
X'_x\frac{\partial g'}{\partial x'}+X'_y\frac{\partial g'}{\partial y'}+X'_z\frac{\partial g'}{\partial z'}&=iX_n\sqrt{\left(\frac{\partial g'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial g'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial g'}{\partial z'}\right)^2},\\
Y'_x\frac{\partial g'}{\partial x'}+Y'_y\frac{\partial g'}{\partial y'}+Y'_z\frac{\partial g'}{\partial z'}&=iY_n\sqrt{\left(\frac{\partial g'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial g'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial g'}{\partial z'}\right)^2},\\
Z'_x\frac{\partial g'}{\partial x'}+Z'_y\frac{\partial g'}{\partial y'}+Z'_z\frac{\partial g'}{\partial z'}&=iZ_n\sqrt{\left(\frac{\partial g'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial g'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial g'}{\partial z'}\right)^2},
\end{aligned}
\tag{6}
$$

и для $x'=0,\ y'=0,\ z'=0$ будет

$$
u=0,\quad v=0,\quad w=0,\quad \frac{\partial u}{\partial z'}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial y'}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial x'}=0. \tag{7}
$$

Значения u, v, w, которые получаются из (5), (6) и (7), могут быть представлены как суммы членов, из которых одни удовлетворяют уравнениям (6) и (7), но вместо уравнений (5) — тем уравнениям, которые получаются из (5), если заменить в них правые части нулем; другие же удовлетворяют уравнениям (5) и (7), но вместо уравнений (6) — тем, которые получаются из (6), если заменить в них правые части нулями.

Первые из указанных членов будут порядка iX_n, iY_n, iZ_n, вторые — порядка i^2X_μ, i^2Y_μ, i_2Z_μ. Следовательно, последние бесконечно малы по сравнению с первыми, если мы примем, что сила X, Y, Z не бесконечно велика сравнительно с X_n, Y_n, Z_n, т. е. что относительные перемещения, которые вызываются в теле конечных размеров первыми, не бесконечно велики по сравнению с перемещениями, вызываемыми в том же теле вторыми силами. Следовательно, при этом предположении для каждого бесконечно малого тела уравнения (5) надо заменить уравнениями, которые из них получатся, когда положим правую часть равной нулю, т. е уравнения (1) надо заменить уравнениями

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}+\frac{\partial X_z}{\partial z}&=0,\\
\frac{\partial Y_x}{\partial x}+\frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial Y_z}{\partial z}&=0,\\
\frac{\partial Z_x}{\partial x}+\frac{\partial Z_y}{\partial y}+\frac{\partial Z_z}{\partial z}&=0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Произведенное исследование одновременно показывает, что u, v, w будут порядка iX_n, iY_n, iZ_n; того же порядка будут производные u, v, w по x', y', z'; следовательно, производные u, v, w по x, y, z одного порядка с X_n, Y_n, Z_n.

Эти же результаты имеют место и в случае движения, и уравнения (8) заменяют уравнения (3) предыдущей лекции, если только ускорения $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ не переходят границ, принятых для силы X, Y, Z. Это следует из того, что для перехода от равновесия к движению надо заменить X, Y, Z на $X-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, Y-\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, Z-\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$.

§ 2

Теперь положим, что тело, о котором идет речь, есть бесконечно тонкий в естественном состоянии цилиндрический стержень. Введем систему прямоугольных осей. Предположим, что одна ось проходит через центры тяжести поперечных сечений, а две другие параллельны главным осям поперечного сечения, проходящим через его центр тяжести. Возьмем на первой оси точку P, обозначим расстояние ее от начала стержня через s и рассмотрим три линейных элемента, которые проведены через P в направлении трех осей; их можно назвать *3*, *1*, *2*, причем за *3* примем элемент, направленный по длине цилиндра. Когда исходное состояние тела изменится, эти три элемента, вообще, не будут более перпендикулярны друг другу, но образуют угол, который отличается от прямого на величины порядка расширений, которые имеют место. Пусть положение точек стержня вблизи P будет отнесено к системе координат (с началом в точке P), ось z которой имеет направление линейного элемента *3* и плоскость zOx которой проходит через линейные элементы *3* и *1*. Пусть в этой системе координат $x+u$, $y+v$, $z+w$ будут координатами некоторой точки стержня после деформации; x, y, z — координаты той же точки, когда стержень находится в естественном состоянии и в положении, при котором линейные элементы совпадают с осями x, y, z. При этих предположениях выполняются уравнения (3) и (11) предыдущей лекции, как это вытекает из сделанного там замечания; далее, на поверхности стержня имеет место уравнение между x и y; затем могут быть записаны следующие соотношения:

$$\int x dx dy = 0, \quad \int y dx dy = 0, \quad \int xy dx dy = 0, \tag{9}$$

где интегрирование должно быть распространено по поперечному сечению; наконец, каждая материальная точка стержня будет характеризоваться некоторыми значениями x, y и $s+z$.

Пусть далее ξ, η, ζ — координаты точки P после деформации стержня относительно произвольно выбранной в пространстве системы координат, которая имеет то свойство, что оси x, y, z при вращении могут быть сделаны соответственно параллельными осям ξ, η, ζ.

Пусть

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2, \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{matrix}$$

косинусы углов, которые оси ξ, η, ζ образуют с осями x, y, z, так что индексы 1, 2, 3 относятся соответственно к осям x, y, z; эти девять величин, так же как ξ, η, ζ, в случае равновесия будут функциями одного переменного s, в случае движения — функциями s и t.

При этих обозначениях выражения

$$\begin{aligned} &\xi + \alpha_1(x+u) + \alpha_2(y+v) + \alpha_3(z+w), \\ &\eta + \beta_1(x+u) + \beta_2(y+v) + \beta_3(z+w), \\ &\zeta + \gamma_1(x+u) + \gamma_2(y+v) + \gamma_3(z+w) \end{aligned} \tag{10}$$

будут координатами относительно осей ξ, η, ζ той точки, координаты которой относительно осей x, y, z будут $x+u$, $y+v$, $z+w$. Выражения (10) должны быть функциями $s+z$, так как значения $z+s$, x и y определяют материальную точку стержня. Поэтому частные производные этих выражений по z и по s должны быть равны между собой; следовательно, будем иметь

$$\begin{aligned} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \alpha_3\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial s} + \\ + \frac{d\xi}{ds} + \frac{d\alpha_1}{ds}(x+u) + \frac{d\alpha_2}{ds}(y+v) + \frac{d\alpha_3}{ds}(z+w), \end{aligned}$$

$$\beta_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \beta_3 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \beta_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \beta_2 \frac{\partial v}{\partial s} + \beta_3 \frac{\partial w}{\partial s} +$$
$$+ \frac{d\eta}{ds} + \frac{d\beta_1}{\partial s}(x + u) + \frac{d\beta_2}{ds}(y + v) + \frac{d\beta_3}{ds}(z + w),$$
$$\gamma_1 \frac{\partial u}{\partial z} + \gamma_2 \frac{\partial v}{\partial z} + \gamma_3 \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \gamma_1 \frac{\partial u}{\partial s} + \gamma_2 \frac{dv}{ds} + \gamma_3 \frac{\partial w}{\partial s} +$$
$$+ \frac{\partial \zeta}{\partial s} + \frac{d\gamma_1}{ds}(x + u) + \frac{d\gamma_2}{ds}(y + v) + \frac{d\gamma_3}{ds}(z + w).$$

Умножим эти уравнения последовательно на α_1, β_1, γ_1, на $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ и на α_3, β_3, γ_3 и каждый раз сложим их. Положим при этом

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2} - 1; \tag{11}$$

так как по сделанному определению

$$\frac{d\xi}{ds} : \frac{d\eta}{ds} : \frac{d\zeta}{ds} = \alpha_3 : \beta_3 : \gamma_3,$$

то отсюда следует, что

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha_3 (1 + \sigma), \quad \frac{d\eta}{ds} = \beta_3 (1 + \sigma), \quad \frac{d\zeta}{ds} = \gamma_3 (1 + \sigma) \tag{12}$$

и σ есть расширение, которое получает элемент ds. Положим далее

$$\begin{aligned} p &= \alpha_3 \frac{d\alpha_2}{ds} + \beta_3 \frac{d\beta_2}{ds} + \gamma_3 \frac{d\gamma_2}{ds}, \\ q &= \alpha_1 \frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_1 \frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_1 \frac{d\gamma_3}{dt}, \\ r &= \alpha_2 \frac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2 \frac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2 \frac{d\gamma_1}{ds}. \end{aligned} \tag{13}$$

Сравним эти выражения с выражениями для p', q', r' уравнений (19) пятой лекции и вспомним значение, приданное там p', q', r'; тогда мы увидим, что pds, qds, rds — это углы, на которые повернется система осей x, y, z вокруг осей x, y, z, когда начало ее опишет элемент ds. Количество rds называется *кручением* части стержня, соответствующей элементу ds, а p и q будут обратными радиусами кривизны проекций элемента ds на плоскости y, z и x, z.

С помощью шести соотношений, существующих между косинусами α, β, γ, и тех, которые получим из них, дифференцируя их по s, будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial s} + q(z + w) - r(y + v), \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial s} + r(x + u) - p(z + w), \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{\partial w}{\partial s} + p(y + v) - q(x + u) + \sigma. \end{aligned}$$

Опираясь на сделанное в конце предыдущего параграфа замечание, мы примем, что $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$ бесконечно велики сравнительно с u, v, w, если только будем давать z значения одного порядка с размерами поперечного сечения стержня. Примем далее, что $\frac{\partial u}{\partial s}, \frac{\partial v}{\partial s}, \frac{\partial w}{\partial s}$ одного порядка с u, v, w.

Пользуясь, кроме того, тем, что u, v, w бесконечно малы сравнительно с x, y, z, мы получим уравнения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial z} = qx - ry,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = rx - pz,$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = py - qx + \sigma.$$

Интегрируя, найдем

$$u = u_0 + \frac{q}{2} z^2 - ryz,$$

$$v = v_0 + rxz - \frac{p}{2} z^2, \tag{14}$$

$$w = w_0 + (py - qx + \sigma) z,$$

где u_0, v_0, w_0 — функции x и y, именно такие, в которые обращаются u, v, w при $z = 0$. Эти функции можно определить из уравнений (8), (2) и (3).

Найденные для u, v, w выражения дадут

$$\begin{aligned} x_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x}, & y_z &= \frac{\partial w_0}{\partial y} + rx, \\ y_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y}, & z_x &= \frac{\partial w_0}{\partial x} - ry, \\ z_z &= py - qx + \sigma, & x_y &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}. \end{aligned} \tag{15}$$

Все эти значения независимы от z, вследствие чего уравнения (8) примут более простой вид

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \tag{16}$$

$$\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} = 0.$$

Допустим, что первоначально на цилиндрическую поверхность стержня не действуют никакие давления и пусть q — функция x и y, приравняв нулю которую, получим уравнение контура поперечного сечения; тогда уравнения (2) при $q = 0$ дадут

$$X_x \frac{\partial g}{\partial x} + X_y \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

$$Y_x \frac{\partial g}{\partial x} + Y_y \frac{\partial g}{\partial y} = 0, \tag{17}$$

$$Z_x \frac{\partial g}{\partial x} + Z_y \frac{\partial g}{\partial y} = 0.$$

Два уравнения из уравнений (3) будут выполняться тождественно, остальные требуют, чтобы при $x = 0$ и $y = 0$ было

$$u_0 = 0, \quad v_0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad \frac{\partial v_0}{\partial x} = 0. \tag{18}$$

Уравнения (17) мы вывели в предположении, что давления, действующие на боковую поверхность стержня, равны нулю. Но мы можем сохранить те же уравнения, когда эти давления имеют любые значениия, не превосходящие, однако, некоторых границ. Они должны иметь таке значения, чтобы давления с величинами такого же порядка вызывали в теле, все размеры которого одного порядка, только расширения, бесконечно малые сравнительно с определяемыми (15). Пренебрегая при этом величинами, которые должны были бы образовать правые части уравнений (17), мы пренебрежем тем самым только величинами бесконечно малыми по сравнению с отдельными членами левых частей.

Подставляя в уравнения (16) и (17) вместо X_x, $X_y, \ldots$ их выражения через x_x, $y_y, \ldots$ и вместо последних — значения, данные (15), однозначно определим из уравнений (16), (17) и (18) величины u_0, v_0, w_0 как линейные однородные функции p, q, r, σ. Чтобы доказать это предположение, достаточно показать, что когда p, q, r, σ обращаются в нуль, то указанные уравнения могут быть удовлетворены только при $u_0=0$, $v_0=0$, $w_0=0$. Это достигается таким же рассуждением, каким было доказано подобное предположение в § 2 предыдущей лекции. Если u_0, v_0, w_0 выражены таким образсм, то уравнение (15) дает x_x, $x_y, \ldots$ как линейные функции p, q, r, σ. Точно такими же функциями будут компоненты давления X_x, $X_y, \ldots$, и f будет однородной функцией второй степени тех же четырех элементов.

Сделаем одно замечание, которое существенно расширит применимость наших рассуждений. Вообразим, что стержень переведен из его естественного цилиндрического состояния силами, действующими внутри, и давлениями, которые действуют на концы его один раз в одно, другой раз в другое состояние. Пусть второе из этих состояний характеризуется через x_x, x_y, $\ldots, p, q, r, \sigma$, а первое—$x'_x, y'_y, \ldots, p', q', r', \sigma'$. Если стержень будет переведен из первого состояния во второе, тогда разности $x_x - x'_x$, $x_y - x'_y, \ldots$ определят происходящие при этом расширения совершенно так же, как сами x_x $x_y, \ldots$ определяли расширения при переходе стержня из его цилиндрического состояния в то, которое мы назвали вторым. Эти рассуждения могут быть отнесены также к тому случаю, когда в естественном состоянии (названном нами первым) стержень имеет не цилиндрическую форму, а искривлен и скручен так, как это соответствует значениям p', q', r'. Следовательно, в этом случае компоненты давления X_x, $X_y, \ldots$ и величина f являются такими же функциями $x_x - x'_x$, $x_y - x'_y, \ldots$, какими они были ранее от x_x, $x_y, \ldots$, и такими же функциями $p-p'$, $q-q'$, $r-r'$, $\sigma-\sigma'$, какими они были от p, q, r, σ, так как $x_x - x'_x$, $x_y - x'_y$ — такие же линейные функции $p-p'$, $q-q'$, $r-r'$, $\sigma-\sigma'$, как x_x, $x_y, \ldots$ функции p, q, r, σ.

Это замечание важно тогда, когда вещество тела изотропно. Пользуясь им, всегда можно представить уравнения равновесия и движения бесконечно тонкого стержня, поперечное сечение которого всюду имеет одинаковую форму, когда он в его естественном состоянии как-нибудь искривлен или скручен. При этом величина, которую мы обозначили через σ', может быть положена равной нулю.

§ 3

Относительно легко определить u_0, v_0, w_0, когда поперечное сечение стержня—эллипс, каковы бы ни были постоянные упругости. Положим соответственно этому предположению

$$g = 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Тогда уравнения (16) и (17) (последнее не только при $g=0$, но вообще) будут удовлетворены значениями

$$X_x=0,\ Y_y=0,\ X_y=0,$$

$$Z_x=c\frac{y}{b^2},\quad Z_y=-c\frac{x}{a^2},$$

где c — произвольное постоянное. Из этих уравнений вместе с входящим в (15) уравнением

$$z_z=py-qx+\sigma$$

и с помощью соотношений, существующих между шестью величинами x_x, $x_y, \ldots$ и шестью компонентами давления, можно выразить x_x, y_y, x_y и z_x, z_y как линейные функции x и y. Три первых из них при помощи уравнений (15) приведут к определению u_0, v_0, два последних — к определению w_0. Чтобы эти определения были возможны, необходимо

$$\frac{\partial^2 x_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 y_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 x_y}{\partial x \partial y}$$

и

$$\frac{\partial y_z}{\partial x}-\frac{\partial x_z}{\partial y}=2r.$$

Первое из этих уравнений, которое получим, рассуждая так же, как при выводе уравнений (13) и (14) предыдущей лекции, выполнено вследствие того, что x_x, y_y, x_y — линейные функции относительно x и y. Второе определяет величину c. Интегрирования, которые должны быть произведены при вычислении u_0 и v_0, введут три произвольные постоянные; интегрирование, которое определяет w_0, вводит одно. Эти постоянные вычисляются непосредственно так, чтобы были выполнены уравнения (18). Таким образом получим u_0, v_0, w_0 как функции второй степени x и y.

Упрощения в определении u_0, v_0, w_0 будут иметь место при произвольной форме поперечного сечения, когда плоскость его есть плоскость симметрии. В этом случае по уравнениям (5) предыдущей лекции имеем

$$\frac{1}{2}X_x=a_{11}x_x+a_{12}y_y+a_{13}z_z+a_{16}x_y,$$

$$\frac{1}{2}Y_y=a_{21}x_x+a_{22}y_y+a_{23}z_z+a_{26}x_y.$$

$$\frac{1}{2}Z_z+a_{31}x_x+a_{32}y_y+a_{33}z_z+a_{36}x_y,$$

$$\frac{1}{2}X_y=a_{61}x_x+a_{62}y_y+a_{63}z_z+a_{66}x_y,$$

$$\frac{1}{2}Z_y=a_{44}z_y+a_{45}z_x,$$

$$\frac{1}{2}Z_x=a_{54}z_y+a_{56}z_x,$$

где

$$a_{12}=a_{21},\quad a_{13}=a_{31},\ldots$$

Поэтому на основании уравнений (15) последнее из уравнений (16) будет

$$a_{55}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+2a_{45}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x\, \partial y}+a_{44}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}=0 \tag{19}$$

и последнее из уравнений (17) будет

$$\left[a_{54}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+rx\right)+a_{55}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}-ry\right)\right]\frac{\partial g}{\partial x}+$$
$$+\left[a_{44}\left(\frac{\partial w_0}{\partial y}+rx\right)+a_{45}\left(\frac{\partial w_0}{\partial x}-ry\right)\right]\frac{\partial g}{\partial y}=0. \tag{20}$$

Из этих уравнений и третьего из уравнений (18) надо определить w_0 Из остальных уравнений (16), (17) и (18) — u_0 и v_0; мы удовлетворим им, если положим

$$X_x=0,\quad Y_y=0,\quad X_y=0. \tag{20a}$$

Действительно, решив эти уравнения относительно x_x, y_y, x_y, получим для этих величин линейные функции x и y, причем z_z должно быть заменено его значением из (15). Вследствие этого возможно определить u_0 и v_0 соответственно уравнениям

$$x_x=\frac{\partial u_0}{\partial x},\quad y_y=\frac{\partial v_0}{\partial y},\quad x_y=\frac{\partial u_0}{\partial y}+\frac{\partial v_0}{\partial x},$$

интегрирование которых вводит три произвольных постоянных, надлежащим выбором которых можно удовлетворить уравнениям (18).

§ 4

Когда u_0, v_0, w_0 найдены, то надо будет еще определить p, q, r, σ в случае равновесия как функции s, а в случае движения как функции s и t. Для этого можно в первом случае пользоваться принципом возможных перемещений, во втором — принципом Гамильтона. Следовательно, в обоих случаях прежде всего необходимо составить выражение потенциала сил, производимых расширением. Обозначим, как прежде, через f однородную функцию x_x, $x_y, \ldots$; тогда этот потенциал равен

$$\int f\,dx\,dy\,ds,$$

где интегрирование по x и y распространяется по поперечному сечению, а по s — по длине стержня. Подставим здесь вместо x_x, $y_y, \ldots$ их значения из (15); так как эти значения являются линейными однородными функциями p, q, r, σ, то f будет однородной функцией второй степени p, q, r, σ, коэффициенты которой зависят только от x и y. Теперь положим

$$F=\int f\,dx\,dy; \tag{21}$$

тогда F будет однородной функцией второй степени p, q, r, σ с постоянными коэффициентами и потенциал будет равен

$$\int F\,ds.$$

Обозначим через U' работу сил, действующих внутри, и работу сил давления, действующих на боковой поверхности и на концевых сечениях стержня при некотором изменении количеств p, q, r, σ; далее, обозначим через T живую силу. Тогда условие равновесия будет

$$U'+\delta\int F\,ds=0, \tag{22}$$

и для движения можно будет написать уравнение

$$\int dt\,[U'+\delta T+\delta\int F\,ds]=0. \tag{23}$$

Чтобы получить значение T, надо продифференцировать выражения (10) по t, умножить суммы квадратов производных на $1/2$ элемента массы стержня и проинтегрировать по стержню. При этом $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ пренебрежем как бесконечно малыми сравнительно с членами, с ними складываемыми, и положим $z = 0$, что возможно, так как выражения (10) есть функции $s + z$, и s мы рассматриваем как переменное. Тогда производные этих выражений будут

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + x\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + y\frac{\partial \alpha_2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + x\frac{\partial \beta_1}{\partial t} + y\frac{\partial \beta_2}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + x\frac{\partial \gamma_1}{\partial t} + y\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}.$$

Сумма квадратов этих выражений, умноженная на $dx\,dy$ и проинтегрированная по сечению стержня, с учетом уравнений (9) будет

$$\begin{gathered}\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right]\int dx\,dy + \\ + \left[\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)^2\right]\int x^2\,dx\,dy + \\ + \left[\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)^2\right]\int y^2\,dx\,dy.\end{gathered} \tag{24}$$

Положим теперь

$$\begin{aligned} -P &= \alpha_2\frac{\partial \alpha_3}{\partial t} + \beta_2\frac{\partial \beta_3}{\partial t} + \gamma_2\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}, \\ Q &= \alpha_1\frac{\partial \alpha_3}{\partial t} + \beta_1\frac{\partial \beta_3}{\partial t} + \gamma_1\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}, \\ R &= \alpha_2\frac{\partial \alpha_1}{\partial t} + \beta_2\frac{\partial \beta_1}{\partial t} + \gamma_2\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}. \end{aligned} \tag{25}$$

Далее, из уравнений, которые могут быть составлены по образцу уравнений (20) пятой лекции, мы получим

$$\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial t}\right)^2 = Q^2 + R^2,$$

$$\left(\frac{\partial \alpha_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \beta_2}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma_2}{\partial t}\right)^2 = P^2 + R^2.$$

Заметим теперь, что, вследствие уравнений (12), $\frac{\partial \alpha_3}{\partial t}$, $\frac{\partial \beta_3}{\partial t}$, $\frac{\partial \gamma_3}{\partial t}$, не могут быть бесконечно велики по сравнению с $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, если предположить, что производные этих величин по s не бесконечно велики по сравнению с ними. Отсюда следует, что P и Q не могут быть бесконечно велики по сравнению с $\frac{\partial \xi}{\partial t}$, $\frac{\partial \eta}{\partial t}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial t}$, между тем как относительно R этого утверждать нельзя. И, наконец, последнее замечание: из трех интегралов, входящих в выражение (24), два последних бесконечно малы по сравнению с первыми, поэтому это выражение равно

$$\left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right]\int dx\,dy + R^2\int (x^2 + y^2)\,dx\,dy.$$

Положим

$$\int dx\,dy = \lambda, \quad \int (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \varkappa \tag{26}$$

и обозначим по-прежнему плотность через μ; тогда получим

$$T = \frac{\mu}{2}\int ds \left\{\lambda \left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2\right] + \varkappa R^2\right\}. \tag{27}$$

§ 5

Рассмотрим теперь ближе равновесие стержня в предположении, что на части его не действуют никакие силы и только по концевым сечениям его приложены силы давления. Но вместо того чтобы применить при этом принцип возможных перемещений, мы будем исходить непосредственно из определения давления, данного уравнениями (1) и (2) одиннадцатой лекции. Применим его к части стержня между двумя любыми поперечными сечениями. Обозначим через A, B, Γ суммы компонент давления по осям ξ, η, ζ, которое производится на элементы некоторого поперечного сечения s (со стороны частей стержня, для которых s имеет меньшее значение по сравнению с частями, для которых s имеет большее значение), и через M_α, M_β, M_γ — моменты этих давлений относительно тех же осей; тогда, предположив, что существует равновесие и внутри стержня никакие силы не действуют, мы получим

$$A = \text{const}, \quad B = \text{const}, \quad \Gamma = \text{const},$$

$$M_\alpha = \text{const}, \quad M_\beta = \text{const}, \quad M_\gamma = \text{const}.$$

Если для одного конца стержня $s = 0$, для другого $s = l$ и l положительно, то тогда A, B, Γ, M_α, M_β, M_γ равны суммам компонент и моментов вращения давлений, производимых извне на элементы поперечного сечения $s = 0$. Для другого конца такое же значение имеют $-A$, $-B$, $-\Gamma$, $-M_\alpha$, $-M_\beta$, $-M_\gamma$.

Теперь мы введем моменты давлений, от которых происходят M_α, M_β, M_γ, относительно осей x, y, z, соответствующих выбранному значению s, и обозначим их через M_x, M_y, M_z. Одновременно мы выберем (что всегда возможно) ось ζ так, чтобы было $A = 0$, $B = 0$ и Γ отрицательно или равно нулю. Тогда, вследствие выведенных в § 4 пятой лекции соотношений, мы получим

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \alpha_1 M_x + \alpha_2 M_y + \alpha_3 M_z + \eta\Gamma = \text{const}, \\ M_\beta &= \beta_1 M_x + \beta_2 M_y + \beta_3 M_z - \xi\Gamma = \text{const}, \\ M_\gamma &= \gamma_1 M_x + \gamma_2 M_y + \gamma_3 M_z = \text{const}. \end{aligned} \tag{28}$$

Продифференцируем эти уравнения по s, помножим их на α_1, β_1, γ_1 или α_2, β_2, γ_2, или α_3, β_3, γ_3 и каждый раз сложим. Вследствие соотношений, существующих между девятью косинусами, и уравнений (12) и (13), получим

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{ds} &= rM_y - qM_z + \gamma_2\Gamma, \\ \frac{dM_y}{ds} &= pM_z - rM_x - \gamma_2\Gamma, \\ \frac{dM_z}{ds} &= qM_x - pM_y. \end{aligned} \tag{29}$$

Теперь мы выведем, в каком отношении находятся моменты M_x, M_y, M_z к выраженной в предыдущем параграфе функции F. Для этого рассмотрим приращение δf, которое получит f, когда состояние стержня вблизи поперечного сечения, соответствующего некоторому постоянному значению s, изменится так, что p, q, r, σ возрастут на $\delta p, \delta q, \delta r, \delta\sigma$.

Прежде всего получим

$$\delta f = X_x \delta x_x + Y_y \delta y_y + Z_z \delta z_z + Y_z \delta y_z + Z_x \delta z_x + X_y \delta x_y,$$

так как $X_x, Y_y, \ldots$ — частные производные f по $x_x, y_y, \ldots$. При помощи уравнений (15) будем иметь

$$\delta f = X_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + Y_y \delta \frac{\partial u_0}{\partial y} + Z_z (y \delta p - x \delta q + \delta\sigma) +$$
$$+ Y_z \left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial y} + x \delta r \right) + Z_x \left(\delta \frac{\partial w_0}{\partial x} - y \delta r \right) + X_y \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right).$$

Умножим это уравнение на $dx\, dy$ и проинтегрируем по поперечному сечению стержня. Тогда, по (21), левая часть его есть δF. Правую часть преобразуем при помощи уравнения

$$0 = \int dx\, dy \left\{ X_x \delta \frac{\partial u_0}{\partial x} + Y_y \delta \frac{\partial v_0}{\partial y} + Y_z \delta \frac{d v_0}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + Z_x \delta \frac{\partial w_0}{\partial x} + X_y \delta \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right) \right\};$$

это уравнение мы получим интегрированием по частям, приняв во внимание уравнения (17), в которых можно подставить $\cos(nx)$ и $\cos(ny)$ вместо $\frac{\partial g}{g x}$ и $\frac{\partial g}{\partial y}$, если умножить уравнения (16) на $dx\, dy\, \delta u_0$, $dx\, dy\, \delta v_0$, $dx\, dy\, \delta w_0$, сложить и проинтегрировать по поперечному сечению. Положим

$$Z = \int dx\, dy\, Z_z,$$
$$M_x = \int dx\, dy\, y Z_z,$$
$$M_y = -\int dx dy x Z_z,$$
$$M_z = \int dx\, dy\, (x Y_z - y X_z),$$

где через Z обозначена компонента силы F по оси z, и M_x, M_y, M_z имеют те значения, которые приняты в уравнениях (28) и (29). Таким образом, отсюда получим

$$\delta F = M_x \delta p + M_y \delta q + M_z \delta r + Z \delta\sigma,$$

откуда следует, что

$$\frac{\partial F}{\partial p} = M_x, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = M_y, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = M_z, \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = Z. \tag{30}$$

Следовательно, функция $2F$ есть однородная функция второй степени p, q, r, σ, коэффициенты которой зависят от постоянных упругости и постоянных поперечного сечения стержня. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \sigma} &= \gamma_3 \Gamma = A_{00}\sigma + A_{01} p + A_{02} q + A_{03} r, \\ \frac{\partial F}{\partial p} &= M_x = A_{10}\sigma + A_{11} p + A_{12} q + A_{13} r, \\ \frac{\partial F}{\partial q} &= M_y = A_{20}\sigma + A_{21} p + A_{22} q + A_{23} r, \\ \frac{\partial F}{\partial r} &= M_z = A_{30}\sigma + A_{31} p + A_{32} q + A_{33} r, \end{aligned} \tag{31}$$

где $A_{00}, A_{01}, \ldots = A_{10}, A_{11}, \ldots$ — упомянутые коэффициенты. Величины их не одного порядка. Так как σ — отвлеченное число, а p, q, r — числа, обратные длинам, то те A, которые содержат один раз индекс 0, должны иметь одним измерением меньше, чем те, в которые этот индекс не входит, и одним измерением больше, чем A_{00}. Но длины, которые входят в выражения величин A, будут порядка размеров сечения, следовательно, бесконечно малы. Поэтому A_{01}, A_{02}, A_{03} должны быть бесконечно малы сравнительно с A_{00} и бесконечно велики сравнительно с другими A. На этом основании мы не можем пренебречь в (31) членом, содержащим σ, хотя σ бесконечно мало, но p, q, r мы должны рассматривать как конечные. Из (31) (первое уравнение) следует, что

$$\sigma = -\frac{A_{01}p + A_{02}q + A_{03}r - \gamma_3\Gamma}{A_{00}}. \tag{32}$$

Подставим это значение σ в выражения (31) для M_x, M_y, M_z и допустим, что Γ не бесконечно велико по сравнению с M_x, M_y, M_z; тогда из выведенных соотношений между величинами A вытекает, что входящим туда членом, зависящим от Γ, как бесконечно малым по сравнению с M_x, M_y, M_z, можно пренебречь. Тогда мы получим эти моменты как линейные однородные функции p, q, r. Их можно представить следующим образом. Пусть G будет функцией p, q, r, в которую перейдет F, если при помощи уравнения $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0$ выразить σ в ней через p, q, r; тогда

$$M_x = \frac{\partial G}{\partial p}, \quad M_y = \frac{\partial G}{\partial q}, \quad M_z = \frac{\partial G}{\partial r}. \tag{33}$$

Действительно, когда σ будет выражено из $\frac{\partial F}{\partial \sigma} = 0$ через p, q, r, то

$$\frac{\partial F}{\partial p} = \frac{\partial G}{\partial p};$$

в самом деле, если бы G мы получили из F, заменив σ произвольными функциями p, q, r, то

$$\frac{\partial G}{\partial p} = \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial F}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial p},$$

и подобные же выражения имели бы место для соответственных производных по q и r. Таким образом, уравнения (29) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{ds}\frac{\partial G}{\partial p} &= r\frac{\partial G}{\partial q} - q\frac{\partial G}{\partial r} + \Gamma\gamma_2, \\ \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial q} &= p\frac{\partial G}{\partial r} - r\frac{\partial G}{\partial p} - \Gamma\gamma_1, \\ \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial r} &= q\frac{\partial G}{\partial p} - p\frac{\partial G}{\partial q}. \end{aligned} \tag{34}$$

Эти уравнения, в которых G означает однородную функцию второй степени p, q, r с постоянными коэффициентами, имеют такой же вид, как уравнения (17) седьмой лекции, которые относятся к вращению тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Для полного их согласования достаточно положить в (34) $s = t$, $G = T$ и Γ равным произведению веса тела на расстояние его центра тяжести от неподвижной точки. При этом значения девяти косинусов α, β, γ и величин p, q, r будут одинаковы. Так как там за ось z была принята прямая, проведенная через центр тяжести и неподвижную точку, а здесь осью z является касательная к стержню, то получаем: тяжелое неизменяемое тело, вращающеесе вокруг неподвижной точки, всегда соответствует стержню в том смысль что прямая, проходящая через неподвижную точку и центр тяжести всегда параллельна касательной к оси стержня при условии, если $s = t$ Если решена задача о вращении, то, чтобы найти форму стержня, надо еще составить уравнения

$$\xi = \int \alpha_3 ds, \quad \eta = \int \beta_3 ds, \quad \zeta = \int \gamma_3 ds.$$

§ 6

Задача о вращении тяжелого тела вокруг неподвижной точки, как было разъяснено в седьмой лекции, неразрешима в общем виде. Решение возможно лишь в том случае, когда на тело не действует тяжесть. Это будет случай, когда $\Gamma = 0$, т. е. сумма компонент сил давления по любому направлению, действующих на элементы конца стержня, обращается в нуль. Второй случай, когда задача о вращении может быть решена, это тот, когда тяжесть действует на тело, но телом является тело вращения, и неподвижная точка расположена на оси вращения. В данном случае это возможно тогда, когда между постоянными упругости стержня и постоянными его поперечного сечения существуют некоторые соотношения. Эти соотношения существуют, как это будет видно из изложенного, если вещество стержня изотропно и его поперечное сечение есть круг.

Для изотропного тела, по § 1 предыдущей лекции,

$$f = -K\left\{x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + \theta(x_x + y_y + z_z)^2\right\}.$$

Поэтому из уравнений (20а) следует, что

$$x_x = y_x = -\frac{\theta}{1+2\theta}z_z, \quad x_y = 0.$$

Уравнения (19) и (20) примут вид

$$\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} = 0, \tag{35}$$

и для $g = 0$ будем иметь

$$\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} - ry\right)\frac{\partial g}{\partial x} + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + rx\right)\frac{\partial g}{\partial y} = 0. \tag{36}$$

Если мы предположим, что поперечное сечение стержня есть круг, то

$$g = x^2 + y^2 - \text{const}.$$

При этом значении g из (35), (36) и (18) следует, что

$$w_0 = 0.$$

Поэтому уравнения (15) дадут

$$z_z = py - qx + \sigma, \quad y_z = rx, \quad x_z = -ry.$$

Следовательно,

$$f^2 = -K\left[\frac{1+3\theta}{1+2\theta}(py - qx + \sigma^2 + \frac{1}{2}r^2(x^2 + y^2)\right].$$

По (21), если воспользуемся определенными в (26) величинами $\varkappa$ и λ, будем иметь

$$F = -K\left[\frac{1+3\theta}{1+2\theta}\frac{\varkappa}{2}(p^2 + q^2) + \frac{\varkappa}{2}r^2 + \frac{1+3\theta}{1+2\theta}\lambda\sigma^2\right].$$

Отсюда мы получим, наконец, для определяемой выражением (33) функции G:

$$G = -K\frac{\varkappa}{2}\left[\frac{1+3\theta}{1+2\theta}(p^2+q^2)+r^2\right]. \tag{37}$$

Этим доказано указанное выше предложение, что для изотропного стержня круглого поперечного сечения G — такая же функция p, q, r, как живая сила тела вращения, вращающая его вокруг точки оси симметрии, и кроме того показано, что общее решение уравнения (34) для стержня указанных свойств может быть найдено таким же путем, как для соответственной задачи о вращении тела в § 4 седьмой лекции. Мы ограничимся тем, что найдем решение для некоторого частного случая. Положим

$$A_{11} = -K\varkappa\frac{1+3\theta}{1+2\theta}, \quad A_{33} = -K\varkappa \tag{38}$$

и введем определяемые уравнениями (8) пятой лекции углы ϑ, φ, f, причем f здесь имеет значение, отличное от того, которое оно имело до сих пор. Тогда уравнения (34) примут вид

$$\begin{gathered} A_{11}\frac{dp}{ds} = rq(A_{11}-A_{33}) + \Gamma\sin f\sin\vartheta, \\ A_{11}\frac{dq}{ds} = rp(A_{33}-A_{11}) - \Gamma\cos f\sin\vartheta, \\ \frac{dr}{ds} = 0. \end{gathered} \tag{39}$$

К ним мы добавим уравнения

$$\begin{gathered} \frac{d\vartheta}{ds} = p\sin f - q\cos f, \\ \sin\vartheta\frac{d\varphi}{ds} = p\cos f + q\sin f, \\ \frac{df}{ds} = \cos\vartheta\frac{d\varphi}{ds} - r, \end{gathered} \tag{40}$$

которые получаются из уравнений (21), (13) и (15) седьмой лекции при помощи уравнений (8) пятой лекции, если заменить t на s. Заметим, что уравнениям (39) и (40) можно удовлетворить, предположив $\vartheta = \text{const}$. Решение, которое имеется в этом предположении, именно то, какое мы хотим составить; оно соответствует движению тяжелого тела вращения, вращающегося вокруг точки оси симметрии, при котором эта ось описывает прямой конус вокруг вертикали. Если ϑ постоянно, то первое из уравнений (40) будет

$$0 = p\sin f - q\cos f,$$

следовательно, можно написать

$$p = \sqrt{p^2+q^2}\cos f, \quad q = \sqrt{p^2+q^2}\sin f, \tag{41}$$

где знак перед $\sqrt{p^2+q^2}$ остается неопределенным.

Поэтому два первых уравнения из уравнений (39), если умножим их на p и q и сложим, дадут

$$p^2 + q^2 = \text{const},$$

в то время как из третьего следует, что

$$r = \text{const}.$$

Далее, если обозначить произвольные постоянные через φ_0 и f_0, то два последние уравнения (40) примут вид

$$\varphi-\varphi_0=\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sin\vartheta}s,\quad f-f_0=\left(\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{tg\,\vartheta}-r\right)s. \tag{42}$$

Остается еще удевлетворить одному из двух первых уравнений (39). Подставим вместо p или q их значения из (41), тогда оно превратится в уравнение между постоянными, именно уравнение

$$0=A_{11}-\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\operatorname{tg}\vartheta}-A_{33}+\Gamma\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{p^2+q^2}}. \tag{43}$$

Чтобы найти форму стержня, которая удовлетворяет составленным уравнениям, надо еще развернуть уравнения (34а). Положим в них соответственно уравнениям (8) пятой лекции

$$\alpha_3=\cos\varphi\sin\vartheta,\quad \beta_3=\sin\varphi\sin\vartheta,\quad \gamma_3=\cos\vartheta;$$

при вычислении ξ и η примем во внимание, что, согласно (42),

$$ds=\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{p^2+q^2}}d\varphi$$

и выберем надлежащим образом начало координат ξ, η, ζ; тогда получим

$$\xi=\frac{\sin^2\vartheta}{\sqrt{p^2+q^2}}\sin\varphi,\quad \eta=-\frac{\sin^2\vartheta}{\sqrt{p^2+q^2}}\cos\varphi,\quad \zeta=s\cos\vartheta. \tag{44}$$

Стержень образует винтовую линию, ось которой есть ось ζ, а радиус цилиндра, на котором она лежит, равен

$$\frac{\sin^2\vartheta}{\sqrt{p^2+q^2}}, \tag{45}$$

величина шага винта есть

$$\frac{2\pi\sin\vartheta\cos\vartheta}{\sqrt{p^2+q^2}}. \tag{46}$$

Давление, которое должно быть произведено извне на концевое сечение стержня $s=0$, чтобы он находился в равновесии при произвольных заданных значениях постоянных ϑ, $\sqrt{p^2+q^2}$ и r, можно определить из (43).

Чтобы получить полную аналогию между задачей о равновесии упругого стержня и задачей о вращении тяжелого твердого тела, мы выбрали ось ζ так, чтобы Γ, если оно не обращается в нуль, было отрицательным. Основываясь на этом предположении, мы рассмотрим его как условие, которому должны удовлетворять значения ϑ, $\sqrt{p^2+q^2}$, r, чтобы из уравнения (41) не получались положительные значения Γ. Это условие отпадает, если мы откажемся (что мы и сделали) от полноты аналогии и оставим положительные и отрицательные значения для Γ. Остается еще найти моменты M_α, M_β, M_γ. Прежде всего из (33), (37) и (38) получим

$$M_x=A_{11}p,\ M_y=A_{11}q,\ M_z=A_{33}r;$$

вместо этого по (4) можно написать

$$M_x=A_{11}\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sin\vartheta}\gamma_1,\ M_y=A_{11}\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sin\vartheta}\gamma_2,$$

$$M_z=A_{11}\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sin\vartheta}\gamma_3+A_{33}r-A_{11}\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\operatorname{tg}\vartheta}.$$

Подставив эти значения в уравнения (28), опираясь на соотношения между девятью косинусами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ и на уравнения (43) и (44), найдем

$$M_\alpha = 0, \ M_\beta = 0,$$

$$M_\gamma = A_{11}\sqrt{p^2+q^2}\sin\vartheta + A_{33} r\cos\vartheta.$$

Упомянем еще один относящийся сюда частный случай. Если между постоянными ϑ, $\sqrt{p^2+q^2}$, r существует соотношение

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{r}, \tag{47}$$

то f, как это следует из (42), постоянно, именно равно f_0. Тогда, по (41), будут постоянны также p и q, как и r. Трем величинам p, q, r могут быть даны любые постоянные значения, причем надо только надлежащим образом выбрать величины $\sqrt{p^2+q^2}$, f_0, r. Следовательно, случай, когда p, q, r постоянны, входил в рассмотренный прежде. Так же и в этом случае стержень образует винтовую линию; радиус цилиндра, на котором она лежит, равен

$$\frac{\sqrt{p^2+q^2}}{p^2+q^2+r^2};$$

величина шага винта равна

$$\frac{2\pi r}{p^2+q^2+r^2},$$

на основании выражений (45) и (46), если принять во внимание, что из (47) следует, что

$$\cos\vartheta = \frac{r}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{\sqrt{p^2+q^2}}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}, \tag{48}$$

где знак корня $\sqrt{p^2+q^2+r^2}$ должен быть определен соответствующим образом.

§ 7

Рассмотрим теперь пример на равновесие изотропного *искривленного* в естественном состоянии стержня. Согласно сделанному в конце § 2 разъяснению, чтобы перейти от случая первоначально *прямого* изотропного стержня к случаю первоначально *искривленного*, мы должны поставить в выражение функцию f вместо p, q, r, $p-p'$, $q-q'$, $r-r'$, где p', q', r' представляют значения, которые получат p, q, r, если стержень из состояния, когда он был *прямым*, перейдет в свое естественное состояние. Произведем эту подстановку в F и G; тогда останутся в силе все те заключения, которые были связаны с функцией f в § 4 и 5, и будут иметь место уравнения (34).

Если поперечное сечение стержня есть круг, тогда вместо уравнений (39) будем иметь следующие:

$$\begin{aligned} A_{11}\frac{d(p-q')}{ds} &= A_{11} r(q-q') - A_{33}(r-r') + \Gamma\sin f\sin\vartheta, \\ A_{11}\frac{d(q-q')}{ds} &= A_{33} p(r-r') - A_{11} r(p-p') - \Gamma\cos f\sin\vartheta, \\ A_{33}\frac{d(r-r')}{ds} &= A_{11}[q(p-p') - p(q-q')]. \end{aligned} \tag{49}$$

К ним надо добавить неизмененными уравнения (40).

Функции p', q', r', вообще говоря, будут функциями s, которые обусловлены начальной формой стержня. Предположим, что они постоянны, исходя из сделанного в конце предыдущего параграфа примечания, что первоначально стержень представляет винтовую линию. Тогда уравнениям (49) и (40) можно удовлетворить предположением, что p, q, r есть также постоянные, т. е. предположением, что стержень останется винтовой линией. При таком предположении последнее из уравнений (49) дает

$$\frac{p'}{p} = \frac{q'}{q}$$

и оба других сведутся к одному

$$0 = A_{11} r \left(1 - \frac{p'}{p}\right) - A_{33}(r - r') + \frac{\Gamma}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

если воспользоваться тем, что по (41) и (48)

$$\sin f \sin \vartheta = \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}, \quad \cos f \sin \vartheta = \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

Но уравнения (40) будут выполнены, если положить

$$\cos \vartheta = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}},$$

$$\varphi = \varphi_0 + s\sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

$$\operatorname{tg} f = \frac{q}{p};$$

Эти уравнения выведены в предыдущем параграфе из уравнений (40) в предположении, что ϑ и f постоянны.

Тогда далее получим

$$\xi = \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p^2 + q^2 + r^2} \sin \varphi, \quad \eta = -\frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{p^2 + q^2 + r^2} \cos \varphi, \quad \zeta = \frac{r}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} s,$$

и если воспользуемся тем, что

$$M_x = A_{11}(p - p'), \quad M_y = A_{11}(q - q'), \quad M_z = A_{33}(r - r'),$$

то будем иметь

$$M_\alpha = 0, \ M_\beta = 0,$$

$$M_\gamma = A_{11} \frac{p^2 + q^2}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} \left(1 - \frac{p'}{p}\right) + A_{33} \frac{r(r - r')}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}}.$$

ЛЕКЦИЯ ДВАДЦАТЬ ДЕВЯТАЯ

(Бесконечно малые деформации бесконечно тонкого первоначально цилиндрического стержня. Изгиб и кручение в случае изотропного и ненапряженного стержня. Изгиб напряженного стержня. Метод Гравезанда определения коэффициентов упругости проволоки. Изгиб горизонтальной проволоки от собственного веса. Продольные и крутильные колебания стержня. Поперечные колебания ненапряженного стержня. Поперечные колебания слабо напряженной и сильно напряженной струны)

§ 1

Теперь исследуем дальше равновесие и движение бесконечно тонкого цилиндрического стержня в предположении, что смещения его частей бесконечно малы, следовательно, что p, q, r бесконечно малы. Сперва мы будем иметь в виду случай, когда стержень находится в равновесии и на его части силы не действуют. Тогда будут иметь место уравнения (34) предыдущей лекции. Так как изменения девяти косинусов $\alpha_1, \beta_1, \ldots$ по всей длине стержня бесконечно малы, то в них можно рассматривать γ_1 и γ_2 как постоянные, полагая, что сами они конечны, так что отклонения частей стержня от направления силы не бесконечно малы. Этот последний случай мы пока исключим. Тогда мы можем положить

$$\gamma_1\Gamma = A, \ \gamma_2\Gamma = B,$$

причем мы понимаем под A и B постоянные. Вследствие этого при пренебрежении бесконечно малыми высшего порядка указанные уравнения будут

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial p} = B, \quad \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial q} = -A, \quad \frac{d}{ds}\frac{\partial G}{\partial r} = 0, \tag{1}$$

и эти уравнения справедливы также, какова бы ни была система координат ξ, η, ζ, хотя уравнения (34) предполагают определенное направление оси ζ. Мы убедимся в этом, если заметим, что величины p, q, r по своему значению не зависят от системы осей ξ, η, ζ, так же как коэффициенты, входящие в функцию G. Интегрированием этих уравнений получим p, q, r выраженные как линейные функции s, содержащие три произвольные постоянные; их можно определить по значениям, которые имеют $\frac{\partial G}{\partial p}$, $\frac{\partial G}{\partial q}$, $\frac{\partial G}{\partial r}$, т. е. моменты M_x, M_y, M_z на одном конце стержня. Оси ξ, η, ζ мы выберем так (что возможно), чтобы направление осей x, y, z всюду бесконечно мало отклонялось от их направления. Тогда α_1, β_2, γ_3 будут бесконечно мало отличаться от единицы и α_2, α_3, β_3, β_1, γ_1, γ_2 будут бесконечно малы. Поэтому из уравнений

$$-p = \alpha_2\frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_2\frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_2\frac{d\gamma_3}{ds},$$

$$q = \alpha_1\frac{d\alpha_3}{ds} + \beta_1\frac{d\beta_3}{ds} + \gamma_1\frac{d\gamma_3}{ds},$$

$$r = \alpha_2\frac{d\alpha_1}{ds} + \beta_2\frac{d\beta_1}{ds} + \gamma_2\frac{d\gamma_1}{ds}$$

следует, что

$$p = -\frac{d\beta_3}{ds}, \quad q = \frac{d\alpha_3}{ds}, \quad r = \frac{d\beta_1}{ds}.$$

Приняв во внимание уравнение (12) предыдущей лекции и заменив β_1 на ψ, получим

$$p = -\frac{d^2\eta}{ds^2}, \quad q = \frac{d^2\xi}{ds^2}, \quad r = \frac{d\psi}{ds}. \tag{2}$$

Интегрируя эти уравнения, мы найдем ξ и η как функции третьей степени, а ψ — как функцию второй степени s. Тогда ζ и η определят изгиб, а ψ — кручение стержня. Мы сделаем рассматриваемый случай более частным, предположив, что вещество стержня изотропно, но сечение его оставим неопределенным. Обозначим определенный в конце § 3 двадцать седьмой лекции коэффициент упругости, т. е. величину

$$2K\frac{1+3\theta}{1+2\theta},$$

через E; положим

$$\int x^2 dx\,dy = \varkappa_1, \quad \int y^2 dx\,dy = \varkappa_2, \quad \int dx\,dy = \lambda \tag{3}$$

и воспользуемся тем, что оси x и y были выбраны так, что

$$\int x\,dx\,dy = 0, \quad \int y\,dx\,dy = 0, \quad \int xy\,dx\,dy = 0.$$

Исследование, подобное произведенному в начале § 6 предыдущей лекции, позволит найти F и G. Величина, обозначенная там через w_0, должна содержать множитель r. Пользуясь этим, найдем

$$F = -\frac{E}{2}(\varkappa_1 q^2 + \varkappa_2 p^2 + \rho r^2 + \lambda\sigma^2), \tag{4}$$

где ρ — постоянное, которое для случая круглого сечения стержня равно

$$\frac{1+2\theta}{1+3\theta}\,\frac{\varkappa_1+\varkappa^2}{2};$$

для поперечных сечений другой формы ρ равно этому выражению, умноженному на числовой множитель, который для эллиптической формы можно легко найти с помощью вычисления, произведенного в § 3 предыдущей лекции. Из (4) следует далее, что

$$G = -\frac{E}{2}(\varkappa_1 q^2 + \varkappa_2 p^2 + \rho r^2).$$

Поэтому уравнения (1) дадут

$$E\varkappa_2\frac{dp}{ds} = -B, \quad E\varkappa_1\frac{dq}{ds} = A, \quad \frac{dr}{ds} = 0.$$

Пусть для двух концевых сечений стержня $s = 0$ и $s = l$, причем l положительно. Тогда A и B можно определить как суммы компонент по осям x и y внешних сил давления, действующих на конец стержня $s = 0$. Вместо A и B введем суммы соответственных компонент внешних давлений, действующих на другой конец стержня. Обозначим их через X' и Y'; тогда получим

$$A = -X', \quad B = -Y',$$

и, следовательно,

$$E\varkappa_2\frac{dp}{ds} = Y', \quad E\varkappa_1\frac{dq}{ds} = -X', \quad \frac{dr}{ds} = 0.$$

Проинтегрируем эти уравнения и выразим постоянные интегрирования через моменты внешних сил давления, действующих на конец $s=l$, относительно соответствующих этому концу осей x, y, z. Обозначим эти моменты через M'_x, M'_y, M'_z; тогда для $s=l$, на основании уравнений (33) предыдущей лекции, получим

$$E\varkappa_2 p = M'_x, \quad E\varkappa_1 q = M'_y, \quad E\rho r = M'_z.$$

Отсюда для других значений s следует

$$E\varkappa_2 p = M'_x - Y'(l-s), \; E\varkappa_1 q = M'_y + X'(l-s), \; E\rho r = M'_z.$$

Отсюда, при подходящем выборе системы координат ξ, η, ζ, при помощи уравнений (2) получим

$$E\varkappa_1 \xi = \frac{s^2}{2}\left[X'\left(l-\frac{s}{3}\right)+M'_y\right], \quad E\varkappa_2 \eta = \frac{s^2}{2}\left[Y'\left(l-\frac{s}{3}\right)-M'_x\right],$$
$$E\rho\psi = M'_z s.$$

На двух первых уравнениях основан часто применяемый способ определения коэффициента упругости E при помощи измерений изгиба стержня. Когда коэффициент упругости найден, третье уравнение позволяет определить постоянное θ, входящее в выражение ρ, если произвести измерение кручения стержня. Пуассон высказал предположение, что для всех тел, какие мы здесь рассматриваем, θ должно быть равно $\frac{1}{2}$. Это предположение не может быть с уверенностью ни доказано, ни опровергнуто, потому что ни для одного тела нельзя с уверенностью утверждать, что оно однородно и изотропно.

§ 2

В предыдущем параграфе мы исключили случай, когда направление частей стержня с точностью до бесконечно малых отклонений совпадает с направлением силы, которую в предыдущей лекции мы обозначили через Г. Теперь мы рассмотрим этот случай. При этом мы воспользуемся принципом возможных перемещений и будем исходить из уравнения (4). Для p, q, r мы возьмем их значения из (2). Чтобы получить выражение для σ, положим

$$\zeta = s + \omega,$$

где ω обозначает бесконечно малую величину. Так, по определению σ, данному уравнением (11) предыдущей лекции, имеем

$$(1+\sigma)^2 = \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \left(1+\frac{d\omega}{ds}\right)^2,$$

и отсюда следует (если мы оставим не определенным отношение, в котором находится между собой порядок бесконечно малых величин ξ, η, ω), что

$$\sigma = \frac{d\omega}{ds} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2\right]. \tag{5}$$

Следовательно, выражение работы, производимой силами, обусловленными деформациями, при которых перемещения ξ, η, ω, ψ получают приращения $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\omega$, $\delta\psi$, т. е. выражение

$$\delta\int_0^l F\,ds,$$

где 0 и l взяты как значения s, соответствующие концам стержня, вследствие уравнений (4), будет

$$-E\int_0^l ds\left[\varkappa_1\frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{d^2\delta\xi}{ds^2}+\varkappa_2\frac{d^2\eta}{ds^2}\frac{d^2\delta\eta}{ds^2}+\rho\frac{d\psi}{ds}\frac{d\delta\psi}{ds}+\right.$$
$$\left.+\lambda\sigma\left(\frac{d\delta\omega}{ds}+\frac{d\xi}{ds}\frac{d\delta\xi}{ds}+\frac{d\eta}{ds}\frac{d\delta\eta}{ds}\right)\right].$$

Интегрированием по частям это уравнение можно привести к виду

$$\begin{gathered}-E\int_0^l ds\left[\varkappa_1\frac{d^4\xi}{ds^4}-\lambda\frac{d}{ds}\left(\sigma\frac{d\xi}{ds}\right)\right]\delta\xi-\\ -E\varkappa_1\left[\frac{d^2\xi}{ds^2}\frac{d\delta\xi}{ds}\right]_0^l+E\left[\left(\varkappa_1\frac{d^3\xi}{ds^3}-\lambda\sigma\frac{d\xi}{ds}\right)\delta\xi\right]_0^l-\\ -E\int_0^l ds\left[\varkappa_2\frac{d^4\eta}{ds^4}-\lambda\frac{d}{ds}\left(\sigma\frac{d\eta}{ds}\right)\right]\delta\eta-\\ -E\varkappa_2\left[\frac{d^2\eta}{ds^2}\frac{d(\delta\eta)}{ds}\right]_0^l+E\left[\left(\varkappa_2\frac{d^3\eta}{ds^3}-\lambda\sigma\frac{d\eta}{ds}\right)\delta\eta\right]_0^l+\\ +E\lambda\int_0^l ds\frac{d\sigma}{ds}\delta\omega-E\lambda\left[\sigma\delta\omega\right]_0^l+E\rho\int_0^l ds\frac{d^2\psi}{ds^2}\delta\psi-E\rho\left[\frac{d\psi}{ds}\delta\psi\right]_0^l.\end{gathered}\tag{6}$$

Наложим на вариации $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\frac{d\xi}{ds}$, $\delta\frac{d\eta}{ds}$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ ограничение, что для $s=0$ они обращаются в нуль, и составим выражение для работы силы давления, действующей извне на концевое сечение стержня, для которого $s=l$. При помощи выражения (24) и уравнений (18) и (19) пятой лекции, а также уравнения (12) предыдущей лекции, мы найдем эту работу, которая будет равна

$$X'\delta\xi+Y'\delta\eta+Z'\delta\omega-M'_x\delta\frac{d\eta}{ds}+M'_y\delta\frac{d\xi}{ds}+M'\delta\psi,\tag{7}$$

где вариации взяты при $s=l$, величины X', Y', M'_x, M'_y M'_z имеют те же значения, как в предыдущем параграфе, и Z' означает сумму компонент по оси z той силы давления, к которой относятся предыдущие буквы.

Условием равновесия будет условие, что сумма выражений (6) и (7) должна обращаться в нуль при произвольных значениях входящих в нее вариаций. Получающиеся отсюда уравнения содержат результаты, аналогичные выведенным в предыдущем параграфе для изотропного стержня, но в более общем виде, так как охватывают исключенный там случай.

Для кручения ψ здесь получим то же выражение, которое было найдено ранее. Далее следует, что σ постоянно и определяется из уравнения

$$E\lambda\sigma=Z'.\tag{8}$$

С помощью этого значения σ каждая из величин ξ и η, определяющих изгиб, может быть вычислена из соответствующих дифференциальных уравнений и граничных условий. Далее, из уравнения (5) можно найти $\frac{d\omega}{ds}$ и, если принять, что ω обращается в нуль одновременно с s, определить само ω.

Дифференциальное уравнение для ξ будет

$$E\varkappa_1\frac{d^4\xi}{ds^4}-Z'\frac{d^2\xi}{ds^2}=0.\tag{9}$$

К нему добавляются граничные условия, при которых для $s=0$ должно быть

$$\xi=0, \quad \frac{d\xi}{ds}=0 \tag{10}$$

и для $s=l$

$$E\varkappa_1 \frac{d^2\xi}{ds^2}=M'_y, \quad E\varkappa_1 \frac{d^3\xi}{ds^3}-Z'\frac{d\xi}{ds}=-X'. \tag{11}$$

Если Z' не бесконечно велико по сравнению с X', то второй член левой части последнего из этих уравнений бесконечно мал по сравнению с правой частью; тогда указанное уравнение примет вид

$$E\varkappa_1 \frac{d^3\xi}{ds^3}=-X'.$$

Из предположения, что $\frac{d^3\xi}{ds^3}$ и $\frac{d\xi}{ds}$ — величины одного и того же порядка, следует также, что Z' бесконечно мало сравнительно с $E\varkappa_1$, а отсюда следует, что уравнение (9) примет вид

$$\frac{d^4\xi}{ds^4}=0.$$

Таким образом мы получаем то самое значение для ξ, которое было выведено в предыдущем параграфе.

Для η можно провести то же самое рассуждение, что и для ξ.

§ 3

Чтобы применить выведенные в предыдущем параграфе более общие формулы для изгиба к частному примеру, мы займемся способом определения коэффициента упругости, предложенным Гравезандом и очень удобным для тонкой проволоки. Способ состоит в следующем: между двумя зажимами натягивают горизонтально проволоку, к середине ее привешивают груз и наблюдают понижение середины. Половину этой проволоки мы можем рассматривать как стержень, к которому относятся наши формулы; точку, в которой привешен груз, как конец $s=0$. Ось ξ направим по вертикали вверх. Тогда стержень будет находиться в плоскости ξ, ζ при $\eta=0$; l будет равно половине длины стержня; ζ — наблюдаемое понижение для точки $s=0$ и X' — величина привешенного груза. Здесь M'_y и Z' не заданы непосредственно, но для определения этих величин мы имеем условие, что для $s=l$ должно быть

$$\frac{d\xi}{ds}=0 \text{ и } \omega=\omega',$$

где ω' означает удлинение, которое получает половина проволоки вследствие натяжения между зажимами.

Положим

$$h^2=\frac{Z'}{E\varkappa_1},$$

или, что по (8) одно и то же,

$$h_2=\frac{\lambda}{\varkappa_1}\sigma. \tag{12}$$

Тогда уравнение (9) примет вид

$$\frac{d^4\xi}{ds^4}=h^2\frac{d^2\xi}{ds^2}.$$

Интегралом этого уравнения, удовлетворяющим условиям (10) при $s=0$, будет

$$\xi = A(e^{hs}-hs-1)+B(e^{-hs}+hs-1),$$

где A и B — произвольные постоянные. Для них условия (11) дают

$$E\varkappa_1 h^3 A(e^{hl}+e^{-hl}) = hM'_y - e^{-hl}X',$$

$$E\varkappa_1 h^3 B(e^{hl}+e^{-hl}) = hM'_y + e^{hl}X',$$

между тем как из того, что $\frac{d\xi}{ds}$ для $s=l$ обращается в нуль, следует, что

$$A(e^{hl}-1)+B(-e^{-hl}+1)=0.$$

Из этих трех уравнений получим

$$hM'_y\left(e^{\frac{hl}{2}}+e^{-\frac{hl}{2}}\right) = -\left(e^{\frac{hl}{2}}-e^{-\frac{hl}{2}}\right)X',$$

$$E\varkappa_1 h^3 A\left(e^{\frac{hl}{2}}+e^{-\frac{hl}{2}}\right) = -e^{-\frac{hl}{2}}X',$$

$$E\varkappa_1 h^3 B\left(e^{\frac{hl}{2}}+e^{-\frac{hl}{2}}\right) = e^{\frac{hl}{2}}X'.$$

Обозначим через ξ' значение ξ для $s=l$ и положим для сокращения $\frac{hl}{2}=p$; тогда отсюда найдем

$$\xi' = \frac{X'l^3}{4E\varkappa_1}\frac{1}{p^2}\left(1-\frac{1}{p}\,\frac{e^p-e^{-p}}{e^p+e^{-p}}\right). \tag{13}$$

Чтобы по этому уравнению вычислить коэффициент упругости E, надо еще определить p. Из (5) и (12) следует

$$4p^2\frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{l}{2}\int_0^l \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 ds.$$

Но

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{X'l^2}{4E\varkappa_1}\frac{1}{p^2}\left[1-\frac{e^{p\left(\frac{2s}{l}-1\right)}+e^{-p\left(\frac{2s}{l}-1\right)}}{e^p+e^{-p}}\right];$$

поэтому если введем в предыдущее уравнение ξ' из (13), то оно примет вид

$$4p^2\frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{\xi'^2}{2}\,\frac{e^{2p}+e^{-2p}+4-\frac{3}{2}\frac{1}{p}(e^{2p}-e^{-2p})}{\left[e^p+e^{-p}-\frac{1}{p}(e^p-e^{-p})\right]^2}. \tag{14}$$

Множитель при ξ'^2 всегда положителен, ω' мы будем считать положительным. Отсюда следует, что если одна из величин $\omega' l$ и ξ'^2 или они обе бесконечно велики по сравнению с $\frac{\varkappa_1}{\lambda}$, то p должно быть бесконечно большим. Это приблизительно осуществляется в случае, о котором идет речь. Поэтому в первом приближении будем иметь

$$\xi' = \frac{X'l^3}{4E\varkappa_1}\frac{1}{p^2},\quad 4p^2\frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{\xi'^2}{2};$$

следовательно,

$$E\lambda\xi'\left(\omega' l + \frac{\xi'^2}{2}\right) = X' l^3.$$

Если бы мы приняли во внимание члены следующего порядка малости, то должны были бы воспользоваться уравнениями

$$\xi' = \frac{X' l^3}{4E\varkappa_1}\frac{1}{p^2}\left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad 4p^2\frac{\varkappa_1}{\lambda} = \omega' l + \frac{\xi'^2}{2}\left(1 + \frac{1}{2p}\right),$$

по второму из которых можно найти p, если в правой части подставить вместо p его первое приближение.

Заметим еще следующее. Множитель при ξ'^2 в уравнении (14) не делается бесконечным ни для какого конечного значения p; отсюда следует, что если $\omega' l$ и ξ'^2 бесконечно малы сравнительно с $\frac{\varkappa_1}{\lambda}$, то p должно быть бесконечно малым. Поэтому в этом случае уравнение (13) дает

$$\xi' = \frac{X' l^3}{12E\varkappa_1}.$$

§ 4

Теперь мы приведем пример равновесия стержня, на части которого действуют *силы*. Представим себе проволоку, натянутую горизонтально между двумя зажимами, и найдем изгиб, который она претерпевает при действии на ее частицы силы тяжести.

Пусть ось ξ направлена вертикально вниз; обозначим через g тяжесть, через μ — плотность проволоки. Тогда из выражения (6) следует, что

$$\varkappa_1\frac{d^4\xi}{ds^4} - \lambda\sigma\frac{d^2\xi}{ds^2} = \frac{\mu\lambda g}{E}, \quad \frac{d\sigma}{ds} = 0.$$

Если для концов проволоки $s = l$ и $s = -l$, то для этих значений s должно быть

$$\xi = 0 \text{ и } \frac{d\xi}{ds} = 0,$$

и если ω' означает удлинение, полученное половиной проволоки вследствие натяжения, то

$$\sigma = \frac{\omega'}{l} + \frac{1}{2l}\int_0^l ds\left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2.$$

Эти уравнения можно трактовать совершенно так же, как те уравнения, которые мы исследовали в предыдущем параграфе. Однако мы ограничимся здесь рассмотрением только предельных случаев, когда $\varkappa_1$ бесконечно велико или бесконечно мало по сравнению с $\lambda\sigma$ (или по сравнению с $\lambda l^2\sigma$, что то же самое, так как мы рассматриваем l как конечное).

Если $\varkappa_1$ бесконечно велико по сравнению с $\lambda\sigma$, то составленное для ξ дифференциальное уравнение будет иметь вид

$$\frac{d^4\xi}{ds^4} = \frac{\mu\lambda g}{E\varkappa_1}$$

в предположении, что $\frac{d^2\xi}{ds^2}$ не бесконечно велико по сравнению с $\frac{d^4\xi}{ds^4}$. Этому уравнению и четырем граничным условиям можно удовлетворить, полагая

$$\xi = \frac{\mu\lambda g}{24E\varkappa_1}(l^2 - s^2)^2.$$

Величина $\varkappa_1$ будет бесконечно велика по сравнению с $\lambda\sigma$, если $\sqrt{\omega'}$ и ξ бесконечно мала по сравнению с размерами поперечного сечения проволоки.

Если, напротив, одна из величин $\sqrt{\omega'}$ и ξ или они обе бесконечно велики по сравнению с размерами поперечного сечения, то $\varkappa_1$ будет бесконечно мало по сравнению с $\lambda\sigma$, и дифференциальное уравнение для ξ примет вид

$$\frac{d^2\xi}{ds^2} = -\frac{\mu g}{E\sigma}$$

в предположении, что $\frac{d^4\xi}{ds^4}$ не бесконечно велико по сравнению с $\frac{d^2\xi}{ds^2}$. Интегралом этого уравнения, удовлетворяющим условию, что для $s = \pm l$ значение ξ обращается в нуль, будет

$$\xi = \frac{\mu g}{2E\sigma}(l^2 - s^2).$$

Условие, что для концов проволоки $\frac{d\xi}{ds}$ также обращается в нуль, здесь выполнено быть не может; бесконечно близко к концу проволоки $\frac{d\xi}{ds}$ изменяется бесконечно быстро, $\frac{d^4\xi}{ds^4}$ бесконечно велико вблизи конца по сравнению с $\frac{d^2\xi}{ds^2}$, и упрощенное дифференциальное уравнение непригодно. Для определения σ получим уравнение

$$\sigma = \frac{\omega'}{l} + \frac{l^2}{\sigma}\left(\frac{\mu g}{E\sigma}\right)^2.$$

§ 5

Следующие рассуждения будут относиться к *колебаниям* бесконечно тонкого стержня. Мы ограничимся случаем, когда колебания бесконечно малы и стержень первоначально был прямой и изотропный. Нетрудно найти дифференциальные уравнения движения с помощью принципа Гамильтона из выражений (6) и уравнения (27) предыдущей лекции. В последнем надо прежде всего принять во внимание, что, основываясь на изложенных выше предположениях, по уравнению (25) предыдущей лекции будем иметь

$$R = \frac{\partial\beta_1}{\partial t},$$

или, если мы опять введем ψ вместо β_1,

$$R = \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Далее, положим по-прежнему

$$\zeta = s + \omega$$

и введем определяемые уравнением (3) постоянные $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$; тогда указанное уравнение примет вид

$$T = \frac{\mu}{2}\int ds\left\{\lambda\left[\left(\frac{\partial\xi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2\right] + (\varkappa_1 + \varkappa_2)\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2\right\}.$$

Отсюда получим для

$$\delta\int T\,dt$$

следующее выражение:

$$-\mu\lambda\iint ds\,dt\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\,\delta\xi+\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\,\delta\eta+\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}\,\delta\omega\right)-\mu(\varkappa_1+\varkappa_2)\iint ds\,dt\,\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\,\delta\psi, \quad (15)$$

если для границ времени положим вариации $\delta\xi$, $\delta\eta$, $\delta\omega$, $\delta\psi$ равным нулю.

Исследуем частные случаи. Сперва мы примем, что стержень при своем движении остается прямым, т. е. положим

$$\xi=0 \text{ и } \eta=0.$$

Так как по (5)

$$\sigma=\frac{\partial\omega}{\partial s},$$

то принцип Гамильтона приводит к дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=\frac{E}{\mu}\,\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2}$$

и

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=\frac{E\rho}{\mu(\varkappa_1+\varkappa_2)}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}.$$

Первое из них определяет *продольные колебания*, второе — *крутильные колебания стержня*. Оба они одинаковой формы (формы, которую мы уже рассматривали в двадцать третьей лекции). Они представляют волны, которые распространяются с постоянной скоростью частью в том направлении, в котором s возрастает, частью же в противоположном. Скорость распространения продольных волн равна

$$\sqrt{\frac{E}{\mu}},$$

крутильных

$$\sqrt{\frac{E\rho}{\mu(\varkappa_1+\varkappa_2)}}.$$

Вследствие как продольных, так и крутильных колебаний стержень может давать простые тоны. Легко вычислить соответствующее им число колебаний и положение узлов. Достаточно будет показать это для продольных колебаний, так как крутильные отличаются от них только другим значением скорости распространения. Представим дифференциальное уравнение движения в виде

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2\omega}{\partial s^2},$$

причем через a мы обозначим скорость распространения продольной волны, и положим

$$\omega=u\sin 2\pi nt,$$

где u будет функцией одного переменного s; тогда n есть число колебаний тона. При этом для u получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2u}{ds^2}=-\left(\frac{2\pi n}{a}\right)^2u;$$

его общий интеграл будет

$$u=A\sin\frac{2\pi n}{a}\,s+B\cos\frac{2\pi n}{a}\,s,$$

где A и B — произвольные постоянные. Теперь надо различать три случая: случай двух неподвижных концов, двух свободных концов и случай, когда один конец неподвижен, а другой свободен. Для неподвижного конца всегда будет

$$\omega = 0, \text{ следовательно } u = 0;$$

для свободного, как это вытекает из выражений (6),

$$\frac{\partial\omega}{\partial s} = 0, \text{ следовательно } \frac{du}{ds} = 0.$$

Пусть будет для концов стержня

$$s = 0 \text{ и } s = l.$$

Если оба конца неподвижны, то мы удовлетворим требуемым для u условиям, полагая

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s,$$

$$n = h \frac{a}{2l},$$

где h — целое число. Если оба конца свободны, то имеем

$$u = B \cos \frac{2\pi n}{a} s,$$

причем n имеет то же значение. Если первый конец неподвижен, а второй свободен, то

$$u = A \sin \frac{2\pi n}{a} s, \quad n = (2h - 1) \frac{a}{4l}.$$

При каждом из этих колебаний имеются точки, для которых $u = 0$ и которые, следовательно, остаются в покое; такими точками являются *узлы*. Для них в трех различных случаях при k, равном целому числу, имеем

$$s = l \frac{k}{h},$$

$$s = l \frac{2k - 1}{2h},$$

$$s = l \frac{2k}{2h - 1}.$$

§ 6

Теперь отбросим предположение, что стержень остается прямым, но предположим, что ψ и η равны нулю. Совершенно так же можно трактовать случай, когда $\psi = 0$ и $\xi = 0$.

Из выражений (15), (16) и (5), при применении принципа Гамильтона, следует, что

$$\begin{aligned} &\mu \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} + E \frac{\varkappa_1}{\lambda} \frac{\partial^4\xi}{\partial s^4} - E \frac{\partial}{\partial s}\left(\sigma \frac{\partial\xi}{\partial s}\right) = 0, \\ &\mu \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} - E \frac{\partial\sigma}{\partial s} = 0, \qquad\qquad (16) \\ &\sigma = \frac{\partial\omega}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2. \end{aligned}$$

К этому надо добавить условия для концевых сечений стержня $s=0$ и $s=l$, которые должны быть взяты из выражения (6). Мы получим частное решение этой задачи, если положим

$$\omega=0 \quad \text{и} \quad \sigma=0.$$

При этом для ξ мы получим из (16) дифференциальное уравнение в частных производных

$$\mu\lambda \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = -E\varkappa_1 \frac{\partial^4\xi}{\partial s^4}.$$

Для свободного конца по (6) должно быть

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^3\xi}{\partial s^3}=0,$$

а для конца, который закреплен так, что не может ни отклоняться, ни вращаться, должно быть

$$\xi=0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\xi}{\partial s}=0.$$

Допустим, что стержень дает простой тон с числом колебаний n, и положим

$$\xi = u\sin 2\pi nt, \tag{17}$$

где u означает функцию s, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^4u}{ds^4} = \frac{\mu\lambda}{E\varkappa_1}(2\pi n)^2 u.$$

Введем постоянное p, определяемое уравнением

$$\frac{\mu\lambda}{E\varkappa_1}(2\pi n)^2 = \left(\frac{p}{l}\right)^4; \tag{18}$$

тогда общий интеграл последнего уравнения будет

$$u = A\cos\frac{ps}{l} + B\sin\frac{ps}{l} + C\frac{e^{\frac{ps}{l}}+e^{-\frac{ps}{l}}}{2} + D\frac{e^{\frac{ps}{l}}-e^{-\frac{ps}{l}}}{2},$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Четыре граничных условия определяют три из них и дают для p трансцендентное уравнение, корни которого, принимая во внимание (18), показывают, какие значения может принять число n.

Если конец $s=0$ свободен, то два условия, подлежащих выполнению, дают

$$C=A \quad \text{и} \quad D=B;$$

следовательно,

$$u = A\left[\cos\frac{ps}{l} + \frac{e^{\frac{ps}{l}}+e^{-\frac{ps}{l}}}{2}\right] + B\left[\sin\frac{ps}{l} + \frac{e^{\frac{ps}{l}}-e^{-\frac{ps}{l}}}{2}\right]. \tag{19}$$

Если свободен также конец $s=l$, то должны выполняться уравнения

$$A\left[\frac{e^p+e^{-p}}{2} - \cos p\right] + B\left[\frac{e^p-e^{-p}}{2} - \sin p\right] = 0,$$

$$A\left[\frac{e^p-e^{-p}}{2} + \sin p\right] + B\left[\frac{e^p-e^{-p}}{2} - \cos p\right] = 0.$$

Они определяют отношение $A:B$ и дают для p уравнение

$$\left(\frac{e^p+e^{-p}}{2}-\cos p\right)^2-\left(\frac{e^p+e^{-p}}{2}\right)^2+\sin^2 p=0,$$

т. е. уравнение

$$\cos p\,\frac{e^p+e^{-p}}{2}=1.$$

Корнями этого уравнения будут значения x, соответствующие точкам пересечения кривых, уравнения которых суть

$$y=\cos x \quad \text{и} \quad y=\frac{2}{e^x+e^{-x}}.$$

Исследование этих уравнений показывает, что $p=0$ есть четырехкратный корень; ближайший больший корень несколько больше, чем $\frac{3\pi}{2}$; следующий несколько меньше, чем $\frac{5\pi}{5}$, и так далее, причем корни тем больше приближаются к нечетному кратному $\frac{\pi}{2}$, чем выше их порядок. Величина $p=0$ соответствует бесконечной продолжительности колебания, следовательно, не дает никакого тона. Для сильнейшего тона стержня, для его основного тона, приблизительно будет $p=\frac{3\pi}{2}$, т. е. $p=4{,}712$. Мы получим для него более точное приближение, если вычислим p из уравнения

$$\cos p=\frac{2}{e^{\frac{3\pi}{2}}+e^{-\frac{3\pi}{2}}},$$

из которого получается $p=4{,}730$. Поступая подобным образом, можно найти все корни рассматриваемого уравнения с любой степенью точности.

Узлы определяются из уравнения

$$u=0,$$

которое, если положим

$$\frac{s}{l}=x,$$

будем иметь вид

$$\left(\frac{e^p-e^{-p}}{2}-\sin p\right)\left(\frac{e^{px}+e^{-px}}{2}+\cos px\right)=$$
$$=\left(\frac{e^p+e^{-p}}{2}-\cos p\right)\left(\frac{e^{px}-e^{-px}}{2}+\sin px\right).$$

По вычислениям Штрельке* значения x для первых тонов таковы:

Тон 1	Тон 2	Тон 3
0,2242	0,1321	0,0944
0,7758	0,5	0,3585
	0,8679	0,6415
		0,9056

Если конец $s=l$ неподвижен, в то время как конец $s=0$ свободен,

* Dove's Repertorium der Physik, III, 11C.

то уравнение (19) также имеет место, но для определения $A:B$ и p получим

$$A\left(\frac{e^p+e^{-p}}{2}+\cos p\right)+B\left(\frac{e^p-e^{-p}}{2}+\sin p\right)=0,$$

$$A\left(\frac{e^p-e^{-p}}{2}-\sin p\right)+B\left(\frac{e^p+e^{-p}}{2}+\cos p\right)=0,$$

откуда следует, что

$$\cos p\,\frac{e^p+e^{-p}}{2}=-1.$$

Меньший положительный корень этого уравнения несколько больше, чем $\frac{\pi}{2}$ (точно 1,375); следующий несколько меньше, чем $\frac{3\pi}{2}$, ближайший следующий несколько больше $\frac{5\pi}{2}$, и т. д. Для узлов, полагая опять $\frac{s}{l}=x$, получим

$$\left(\frac{e^p+e^{-p}}{2}+\sin p\right)\left(\frac{e^{px}+e^{-px}}{2}+\cos px\right)=$$
$$=\left(\frac{e^p+e^{-p}}{2}+\cos p\right)\left(\frac{e^{px}-e^{-px}}{2}+\sin px\right).$$

Рассмотрим еще случай, когда конец $s=0$ свободен, а концу $s=l$ сообщено некоторое периодическое движение. Пусть будет для $s=l$

$$\xi=\alpha\sin 2\pi nt,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial s}=\beta\sin 2\pi nt, \tag{20}$$

где α, β и n — данные постоянные. Тогда мы удовлетворим дифференциальному уравнению для ξ в частных производных и соответственным для $s=0$ граничным условиям, взяв уравнения (17) и (19), если вычислим p из (18). Условия, поставленные для $s=l$, дают

$$\alpha=A\left(\frac{e^p+e^{-p}}{2}+\cos p\right)+B\left(\frac{e^p-e^{-p}}{2}+\sin p\right),$$

$$\frac{l}{p}\beta=A\left(\frac{e^p-e^{-p}}{2}-\sin p\right)+B\left(\frac{e^p+e^{-p}}{2}+\cos p\right);$$

эти два уравнения, вообще, вполне определяют A и B. Только когда определитель коэффициентов при A и B обращается в нуль, т. е. когда p и n соответствуют одному из простых тонов, издаваемых стержнем со свободным и заделанным концами, A и B будут неопределенны (если при этом отношение $\alpha:\beta$ имеет некоторое определенное значение) и бесконечны при других значениях этого выражения.

Подобным же образом можно трактовать случай, когда вместо уравнений (20) для конца $s=l$ существуют уравнения

$$\xi=\alpha'\cos 2\pi nt,\qquad \frac{\partial\xi}{\partial s}=\beta'\cos 2\pi nt.$$

Полагая ξ равным сумме этих выражений, мы будем знать движение стержня в случае, когда для $s=l$

$$\xi=\alpha\sin 2\pi nt+\alpha'\cos 2\pi nt,$$
$$\frac{\partial\xi}{\partial s}=\beta\sin 2\pi nt+\beta'\cos 2\pi nt.$$

§ 7

Теперь мы будем искать частные решения уравнений (16), при которых ω и σ не обращаются в нуль и которые относятся к поперечным колебаниям *струны*. *Струной* называется натянутый стержень, поперечные размеры которого достаточно малы даже сравнительно со смещениями его частей. Во втором члене первого из уравнений (16) встречается множитель $\frac{\varkappa_1}{\lambda}$; этот множитель порядка поперечного сечения. Мы будем предполагать, что поперечное сечение так мало по сравнению с имеющимися смещениями, что названный член бесконечно мал по сравнению с третьим членом этого уравнения. Тогда уравнения (16) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial\sigma}{\partial s}\frac{\partial\xi}{\partial s} + \sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}, \\ \frac{\mu}{E}\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} &= \frac{\partial\sigma}{\partial s}, \\ \sigma &= \frac{\partial\omega}{\partial s} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2. \end{aligned} \tag{21}$$

К этому мы добавим условия, что

для $\quad s=0, \quad \xi=0, \quad \omega=0,$

$\quad\quad s=l, \quad \xi=0, \quad \omega=\omega',$

где ω' — постоянное. Эти данные показывают, что оба конца стержня закреплены; значение ω' определяет *натяжение*, которое дано струне.

Мы будем искать только такие движения, при которых $\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2}$ бесконечно мало по сравнению с $\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$. При таком предположении из двух первых уравнений (21) следует, что $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$ бесконечно мало по сравнению с $\frac{\partial\sigma}{\partial s}\frac{\partial\xi}{\partial s} + \sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}$; но если $\frac{\partial\sigma}{\partial s}\frac{\partial\xi}{\partial s}$ бесконечно мало по сравнению с $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$, то $\sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}$ должно быть бесконечно велико по сравнению с $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$ и тем более бесконечно велико по сравнению с $\frac{\partial\sigma}{\partial s}\frac{\partial\xi}{\partial s}$. Поэтому первое из уравнений (21) будет

$$\frac{\mu}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}. \tag{22}$$

Из того, что $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$ бесконечно мало по сравнению с $\sigma\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}$, следует, что $\frac{\partial\sigma}{\partial s}$ тем более бесконечно мало по сравнению с σ, поэтому σ не зависит от s. Таким образом из третьего уравнения (21) имеем

$$\sigma = \frac{\omega'}{l} + \frac{1}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2 ds,$$

и, следовательно, по (22)

$$\frac{\mu}{E}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \left[\frac{\omega'}{l} + \frac{1}{2l}\int_0^l \left(\frac{\partial\xi}{\partial s}\right)^2 ds\right]\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}. \tag{23}$$

Это уравнение существенно упрощается, если натяжение струны достаточно велико, именно, если ω' настолько велико по сравнению с ξ, что можно пренебречь вторым членом (по сравнению с первым) в множителе при $\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}$. Прежде чем перейти к ближайшему рассмотрению этого случая, мы выведем некоторые частные решения уравнения (23), которые пригодны, как бы ни было мало натяжение.

Положим

$$\xi = u \sin \frac{ms}{l} \pi,$$

где m — целое число, u — неизвестная функция от t. При этом те условия, которые должны быть выполнены при $s=0$ и $s=l$, будут удовлетворены. Мы удовлетворим также уравнению (23), если определим u из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\left(\frac{m\pi}{l}\right)^2 \frac{E}{\mu} u \left[\frac{\omega'}{l} + \left(\frac{m\pi}{2l}\right)^2 u^2\right]. \tag{24}$$

Его общим интегралом будет

$$u = a \cos \operatorname{am} h(t - t_0), \quad \operatorname{mod} \varkappa,$$

где a и t_0 означают два произвольных постоянных, h и $\varkappa$ — два постоянных, которые известным образом зависят от a. Действительно, при таком предположении получим для u

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -h^2u\left(1-2\varkappa^2 + \frac{2\varkappa^2}{a^2}u^2\right);$$

это уравнение отождествим с (24), если положим

$$2\varkappa^2 = \frac{m^2\pi^2a^2}{m^2\pi^2a^2 + 4l\omega'},$$

$$h^2 = \frac{m^2\pi^2}{4l^4}\frac{E}{\mu}(m^2\pi^2a^2 + 4l\omega').$$

§ 8

Обратимся к исследованию случая, о котором было уже упомянуто, когда натяжение струны так велико, что вторым членом множителя при $\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}$ в уравнении (23) можно пренебречь. Тогда это уравнение примет вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\mu}\frac{\omega'}{l}\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2}.$$

К этому добавляются условия, что для $s=0$ и $s=l$ ξ обращается в нуль.

Такое дифференциальное уравнение мы рассматривали неоднократно, последний раз — при исследовании продольных и крутильных колебаний упругого стержня. Среди рассмотренных там случаев находится также случай, в котором должны быть выполнены такие же граничные условия, как и здесь; определенное уже частное решение, а также все, что было сказано о возможных простых тонах и соответственных узлах, годится и здесь. Из указанных там частных решений мы составим теперь более общее для поперечных колебаний струны. Чтобы несколько сократить формулы, введем такие единицы длины и времени, чтобы $l=\pi$ и продолжительность простого колебания при основном тоне была равна π. Тогда одним частным решением будет

$$\xi = \sin mt \sin ms,$$

другим

$$\xi = \cos mt \sin ms,$$

где m означает любое положительное целое число.

Поэтому решением будет также выражение

$$\xi = \Sigma \left(A_m \sin mt + B_m \cos mt\right) \sin ms,$$

где A_m, B_m — произвольные постоянные, и сумма взята по m от $m = 1$ до $m = \infty$. Этому решению можно придать такой вид, чтобы ξ и $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ при $t = 0$ для всей струны были произвольными заданными функциями s. Полагая, что для $t = 0$ будет иметь место

$$\xi = U, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial t} = U',$$

где U и U' — функции s, которые произвольно заданы в интервале от $s = 0$ до $s = \pi$, мы тем самым требуем, чтобы для этого интервала было

$$\begin{aligned} U &= \Sigma B_m \sin ms, \\ U' &= \Sigma m A_m \sin ms. \end{aligned} \tag{25}$$

Предполагая, что функции U и U' могут быть представлены в таком виде, мы легко можем найти значения постоянных A_m и B_m (если m и m' — два различных целых числа):

$$\int_0^\pi \sin ms \sin m's \, ds = 0,$$

и если m — любое целое число, то

$$\int_0^\pi \sin^2 ms \, ds = \frac{\pi}{2}.$$

Это предложение легко доказать, воспользовавшись соотношениями

$$2 \sin ms \sin m's = \cos (m - m') s - \cos (m + m') s,$$

$$2 \sin^2 ms = 1 - \cos 2ms.$$

С помощью этого предложения найдем из (25), что

$$B_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi U \sin ms \, ds,$$

$$m A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi U' \sin ms \, ds.$$

Дирихле* впервые строго доказал, что U и U' всегда могут быть представлены таким образом, причем он показал, что бесконечный ряд (так называемый ряд Фурье)

$$\Sigma C_m \sin ms,$$

в котором коэффициенты определены из уравнения

$$C_m = \frac{2}{\pi} \int f(s) \sin ms \, ds,$$

* Dove's Repertorium der Physik, I, 1952, Crelle's Journal, Bd. IV, S. 157.

сходящийся, если $f(s)$ означает произвольную функцию s, всюду однозначную конечную и непрерывную для всех значений s между 0 и π.

Найдем еще и другое решение рассмотренной задачи о колебании струны. Оставим принятые единицы длины и времени прежними, т. е. положим опять длину струны и продолжительность простого колебания основного тона равными π; тогда дифференциальное уравнение для перемещения ξ примет вид

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}=\frac{\partial^2\xi}{\partial s^2},$$

и его общим интегралом будет

$$\xi=\varphi(t+s)+\psi(t-s),$$

где φ и ψ — две произвольные функции указанных аргументов. Из условия, что для $s=0$ переменное ξ всегда обращается в нуль, следует, что

$$0=\varphi(t)+\psi(t),$$

поэтому

$$\xi=\varphi(t+s)-\varphi(t-s);$$

из условия, что для $s=\pi$ всегда будет $\xi=0$, следует, что

$$\varphi(t+\pi)=\varphi(t-\pi)$$

или

$$\varphi(x+2\pi)=\varphi(x),$$

т. е. φ есть периодическая функция с периодом 2π. Отсюда можно будет определить φ и, следовательно, ξ, если будет найдено φ для интервала от $x=-\pi$ до $x=+\pi$. Но для этого необходимо знать начальное состояние струны. Пусть опять для $t=0$ будет

$$\xi=U,\quad \frac{\partial\xi}{\partial t}=U',$$

где U и U' — функции s, которые заданы в промежутке от $s=0$ до $s=\pi$. Тогда для этого интервала должно быть

$$U=\varphi(s)-\varphi(-s),\quad U'=\varphi'(s)-\varphi'(-s),$$

где φ' — производная φ, взятая по аргументу. Умножая последнее уравнение на ds и интегрируя его, мы получим

$$\int U'\,ds=\varphi(s)+\varphi(-s),$$

где нижняя граница интеграла есть произвольное постоянное; и далее

$$\varphi(s)=\frac{1}{2}U+\frac{1}{2}\int U'\,ds,$$

$$\varphi(-s)=-\frac{1}{2}U+\frac{1}{2}\int U'\,ds.$$

Этими уравнениями $\varphi(s)$ определено для интервала от $s=-\pi$ до $s=+\pi$, а также и в общем случае, с точностью до аддитивной постоянной. Значение последней, однако, не влияет на значение ξ, так как ξ равно разности двух значений φ.

ЛЕКЦИЯ ТРИДЦАТАЯ

(Равновесие и движение бесконечно тонкой, первоначально плоской, изотропной пластинки. Расширение малой части пластинки. Потенциал сил, производимых расширением. Бесконечно малая деформация. Равновесие при предельных перемещениях. Дифференциальные уравнения поперечных колебаний свободной пластинки. Интегрирование последних для круглой пластинки. Поперечные колебания напряженной мембраны)

§ 1

Исследования, подобные приведенным в последних лекциях относительно бесконечно тонкого упругого стержня, могут быть применены к бесконечно тонкой упругой пластинке. Равновесием и движением такой пластинки мы и займемся теперь, но при этом будем иметь в виду только тот случай, когда пластинка в естественном состоянии будет плоской.

В среднюю плоскость пластинки, т. е. в плоскость, находящуюся посредине между параллельными наружными поверхностями, введем, при естественном состоянии пластинки, прямоугольную систему координат и обозначим через s_1 и s_2 координаты относительно этой системы точки P средней плоскости. Далее мы представим себе три линейных элемента 1, 2, 3, выходящих из точки P, из которых два первых параллельны осям s_1 и s_2, а третий к ним перпендикулярен. Мы примем, что после деформации пластинки эти три линейных элемента определяют оси прямоугольной системы координат, к которой мы будем относить точки, лежащие вблизи P. Предположим, что точка P будет началом координат, линейный элемент 1 будет лежать на оси x, и плоскость элементов 1 и 2 образует плоскость x, y; тогда последняя будет касаться в точке P искривленной деформацией средней плоскости, ось y образует бесконечно малый угол с элементом 2, ось же z — бесконечно малый угол с элементом 3. Пусть относительно этой системы координат $x+u$, $y+v$, $z+w$ будут координатами материальной точки пластинки после деформации, в то время как x, y, z будут координатами той же точки относительно той же системы координат в естественном состоянии пластинки, когда линейные элементы 1, 2, 3 совпадают с осями x, y, z. Тогда u, v, w будут такими функциями x, y, z, что для $x=0$, $y=0$, $z=0$ должно быть

$$u=0, \quad v=0, \quad w=0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial w}{\partial y}=0. \tag{1}$$ [45]

Далее, пусть ξ, η, ζ будут по-прежнему координатами точки P после деформации относительно произвольной неподвижной в пространстве системы координат, и α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, α_3, β_3, γ_3 — косинусы углов, образуемых осями x, y, z с осями ξ, η, ζ, так что индексы 1, 2, 3 соответствуют буквам x, y, z, буквы α, β, γ соответствуют буквам ξ, η, ζ. Относительно системы $(\xi\eta\zeta)$, координаты материальной точки, характеризуемой значениями s_1+x, s_2+y, z, после деформации будут

$$\begin{gathered}\xi+\alpha_1(x+u)+\alpha_2(y+v)+\alpha_3(z+w),\\ \eta+\beta_1(x+u)+\beta_2(y+v)+\beta_3(z+w),\\ \zeta+\gamma_1(x+u)+\gamma_2(y+v)+\gamma_3(z+w).\end{gathered} \tag{2}$$

Эти величины будут функциями s_1+x и s_2+y, и потому их производные по x будут равны производным по s_1, и их производные по y — производным по s_2. Таким образом мы получим две следующие системы уравнений:

$$\alpha_1\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\alpha_2\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha_3\frac{\partial w}{\partial x}=\alpha_1\frac{\partial u}{\partial s_1}+\alpha_2\frac{\partial v}{\partial s_1}+\alpha_3\frac{\partial w}{\partial s_1}+$$
$$+\frac{\partial \xi}{\partial s_1}+\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1}(x+u)+\frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1}(y+v)+\frac{\partial \alpha_3}{\partial s_1}(z+w),$$
$$\beta_1\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\beta_2\frac{\partial v}{\partial x}+\beta_3\frac{\partial w}{\partial x}=\beta_1\frac{\partial u}{\partial s_1}+\beta_2\frac{\partial v}{\partial s_1}+\beta_3\frac{\partial w}{\partial s_1}+$$
$$+\frac{\partial \eta}{\partial s_1}+\frac{\partial \beta_1}{\partial s_1}(x+u)+\frac{\partial \beta_2}{\partial s_1}(y+v)+\frac{\partial \beta_3}{\partial s_1}(z+w),$$
$$\gamma_1\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\gamma_2\frac{\partial v}{\partial x}+\gamma_3\frac{\partial w}{\partial x}=\gamma_1\frac{\partial u}{\partial s_1}+\gamma_2\frac{\partial v}{\partial s_1}+\gamma_3\frac{\partial w}{\partial s_1}+$$
$$+\frac{\partial \zeta}{\partial s_1}+\frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1}(x+u)+\frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1}(y+v)+\frac{\partial \gamma_3}{\partial s_1}(z+w), \tag{3}$$

и

$$\alpha_1\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha_2\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\alpha_3\frac{\partial w}{\partial y}=\alpha_1\frac{\partial u}{\partial s_2}+\alpha_2\frac{\partial v}{\partial s_2}+\alpha_3\frac{\partial w}{\partial s_2}+$$
$$+\frac{\partial \xi}{\partial s_2}+\frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2}(x+u)+\frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2}(y+v)+\frac{\partial \alpha_3}{\partial s_2}(z+w),$$
$$\beta_1\frac{\partial u}{\partial y}+\beta_2\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\beta_3\frac{\partial w}{\partial y}=\beta_1\frac{\partial u}{\partial s_2}+\beta_2\frac{\partial v}{\partial s_2}+\beta_3\frac{\partial w}{\partial s_2}+$$
$$+\frac{\partial \eta}{\partial s_2}+\frac{\partial \beta_1}{\partial s_2}(x+u)+\frac{\partial \beta_2}{\partial s_2}(y+v)+\frac{\partial \beta_3}{\partial s_2}(z+w),$$
$$\gamma_1\frac{\partial u}{\partial y}+\gamma_2\left(1+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\gamma_3\frac{\partial w}{\partial y}=\gamma_1\frac{du}{\partial s_2}+\gamma_2\frac{\partial v}{\partial s_2}+\gamma_3\frac{\partial w}{\partial s_2}+$$
$$+\frac{\partial \zeta}{\partial s_2}+\frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2}(x+u)+\frac{\partial \gamma_2}{\partial s_2}(y+v)+\frac{\partial \gamma_3}{\partial s_2}(z+w).$$

Уравнения каждой из этих систем умножим на α_1, β_1, γ_1, потом на α_2, β_2, γ_2, потом на α_3, β_3, γ_3 и каждый раз сложим их. При этом положим

$$\begin{aligned}1+\sigma_1&=\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial s_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial s_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s_1}\right)^2}\\ 1+\sigma_2&=\sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial s_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial s_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s_2}\right)^2}.\end{aligned}\tag{4}$$

Но $\frac{\partial\xi}{\partial s_1}:\frac{\partial\eta}{\partial s_1}:\frac{\partial\zeta}{\partial s_1}$ можно рассматривать как отношения косинусов углов, которые образует после деформации линейный элемент 1 с осями ξ, η, ζ, и так как этот линейный элемент и после деформации совпадает с осью x, то

$$\frac{\partial\xi}{\partial s_1}:\frac{\partial\eta}{\partial s_1}:\frac{\partial\zeta}{\partial s_1}=\alpha_1:\beta_1:\gamma_1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\xi}{\partial s_1}=\alpha_1(1+\sigma_1),\quad \frac{\partial\eta}{\partial s_1}=\beta_1(1+\sigma_1),\quad \frac{\partial\zeta}{\partial s_1}=\gamma_1(1+\sigma_1). \tag{5}$$

Обозначим через $(2,\xi)$ $(2,\eta)$, $(2,\zeta)$ углы, которые образует после деформации линейный элемент 2 с осями ξ, η, ζ; тогда получим

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_2} : \frac{\partial \eta}{\partial s_2} : \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} = \cos(2,\xi) : \cos(2,\eta) : \cos(2,\zeta),$$

и потому

$$\frac{\partial \xi}{\partial s_2} = (1+\sigma_2)\cos(2,\xi), \quad \frac{\partial \eta}{\partial s_2} = (1+\sigma_2)\cos(2,\eta), \quad \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} = (1+\sigma_2)\cos(2,\zeta).$$

Косинусы же углов, образуемых после деформации линейным элементом 2 с осями x, y, z, мы найдем из уравнений (7) десятой лекции, опираясь на уравнения (27а) одиннадцатой лекции (в которых надо подставить u, v, w вместо ξ, η, ζ), если пренебрежем величинами высшего порядка малости по сравнению с выражениями расширений

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0, \quad 1, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0,$$

где $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0$ и $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ — значения $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ при $x = y = z = 0$. Второе из этих значений $\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0$ обращается в нуль по (1). Обозначим первое через τ, так что τ означает бесконечно малый угол, на который отличается от прямого угла после деформации угол, образуемый линейными элементами 1 и 2; отсюда следует, что

$$\cos(2,\xi) = \alpha_2 + \alpha_1\tau, \quad \cos(2,\eta) = \beta_2 + \beta_1\tau, \quad \cos(2,\zeta) = \gamma_2 + \gamma_1\tau,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial s_2} &= (\alpha_2 + \alpha_1\tau)(1+\sigma_2), \\ \frac{\partial \eta}{\partial s_2} &= (\beta_2 + \beta_1\tau)(1+\sigma_2), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial s_2} &= (\gamma_2 + \gamma_1\tau)(1+\sigma_2). \end{aligned} \tag{6}$$

Положим далее

$$\begin{aligned} p_1 &= \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_1} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial s_1} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_1}, \\ q_1 &= \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_1} + \beta_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial s_1} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_1}, \\ r_1 &= \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_1} + \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial s_1} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_1}, \\ p_2 &= \alpha_3 \frac{\partial \alpha_2}{\partial s_2} + \beta_3 \frac{\partial \beta_2}{\partial s_2} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_2}{\partial s_2}, \\ q_2 &= \alpha_1 \frac{\partial \alpha_3}{\partial s_2} + \beta_1 \frac{\partial \beta_3}{\partial s_2} + \gamma_1 \frac{\partial \gamma_3}{\partial s_2}, \\ r_2 &= \alpha_2 \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_2} + \beta_2 \frac{\partial \beta_1}{\partial s_2} + \gamma_2 \frac{\partial \gamma_1}{\partial s_2}; \end{aligned} \tag{7}$$

тогда уравнения, полученные таким образом из уравнений (3), примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial s_1} + q_1(z+w) - r_1(y+v) + \sigma_1, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial s_1} + r_1(x+u) - p_1(z+w), \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial s_1} + p_1(y+v) - q_1(x+u), \end{aligned}$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial s_2}+q_2(z+w)-r_2(y+v)+\tau(1+\sigma_2),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial s_2}+r_2(x+u)-p_2(z+w)+\sigma_2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial s_2}+p_2(y+v)-q_2(x+u).$$

Рассуждая так же, как для соответственных уравнений при исследовании бесконечно тонкого стержня, мы убедимся, что эти уравнения могут быть упрощены следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=q_1z-r_1y+\sigma_1,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=q_2z-r_2y+\tau,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=r_1x-p_1z,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=r_2x-p_2z+\sigma_2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=p_1y-q_1x,\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=p_2y-q_2x.$$

Но здесь возможно еще дальнейшее упрощение. Выведенные для $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial x}$ и $\frac{\partial w}{\partial y}$ выражения должны при дифференцировании по x и y давать одинаковые функции, откуда следует, что

$$r_1=0,\quad r_2=0,\quad p_1+q_2=0,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x}=q_1z+\sigma_1,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-p_1z+\tau,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-p_1z,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-p_2z+\sigma_2,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=p_1y-q_1x,\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=p_2y-p_1x.$$

Отсюда интегрированием найдем

$$u=u_0-p_1yz+q_1zx+\sigma_1x+\tau y,$$

$$v=v_0-p_2yz-p_1zx+\sigma_2y,$$

$$w=w_0-\frac{q_1}{2}x^2+p_1xy+\frac{p_2}{2}y^2,$$

где u_0, v_0, w_0 — значения u, v, w при $x=0$ и $y=0$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} x_x&=q_1z+\sigma_1, & y_z&=\frac{dv_0}{dz},\\ y_y&=-p_2z+\sigma_2, & z_x&=\frac{du_0}{dz},\\ z_z&=\frac{dw_0}{dz} & x_y&=-2p_1z+\tau. \end{aligned}\tag{8}$$

Все эти величины независимы от x и y; поэтому тем же свойством обладают также компоненты давления X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y, и уравнения (8) двадцать восьмой лекции примут вид

$$\frac{dX_z}{dz}=0,\qquad \frac{dY_z}{dz}=0,\ \frac{dZ_z}{dz}=0.$$

Теперь допустим, что на обе стороны пластинки действуют давления, величины которых такого порядка, что они могут произвести в теле, все размеры которого являются величинами одного порядка, только расширения, бесконечно малые сравнительно с теми, которые имеются в пластинке. Тогда можно будет, вначале для поверхности пластинки, а потом на основании выведенных уравнений, вообще, положить

$$X_z = 0, \qquad Y_z = 0, \qquad Z_z = 0. \tag{9}$$

При этом мы пренебрежем в выражениях расширений и потенциала вызываемых ими сил (которое составим ниже) только членами, бесконечно малыми по сравнению с удержанными.

Уравнения (9), в связи с условием (1), что для $z = 0$ величины u_0, v_0, w_0 обращаются в нуль, приведут к определению u_0, v_0, w_0. Если вещество пластинки изотропно, что мы будем предполагать, то эти уравнения будут

$$x_z = 0, \quad y_z = 0, \quad z_z + \frac{\theta}{1+\theta}(x_x + y_y) = 0$$

или

$$\frac{du_0}{dz} = 0, \qquad \frac{dv_0}{dz} = 0, \qquad \frac{dw_0}{dz} = \frac{\theta}{1+\theta}[(p_2 - q_1)z - \sigma_1 - \sigma_2]$$

и из (8) получим

$$x_x = q_1 z + \sigma_1, \qquad y_z = 0,$$

$$y_y = -p_2 z + \sigma_2, \quad z_x = 0,$$

$$z_z = \frac{\theta}{1+\theta}[(p_2 - q_1)z - \sigma_1 - \sigma_2], \qquad xy = -2p_1 z + \tau.$$

Так как

$$f = -K\left[x_x^2 + y_y^2 + z_z^2 + \frac{1}{2}y_z^2 + \frac{1}{2}z_x^2 + \frac{1}{2}x_y^2 + \theta(x_x + y_y + z)^2\right],$$

то отсюда следует, что

$$f = -K\left\{(q_1 z + \sigma_1)^2 + (p_2 z - \sigma_2)^2 + \frac{1}{2}(2p_1 z - \tau)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{\theta}{1+\theta}[(p_2 - q_1)z - \sigma_1 - \sigma_2]^2\right\}.$$

Определим уравнениями $z = h$ и $z = -h$ поверхность пластинки и положим

$$F = \int_{-h}^{+h} f\,dz;$$

тогда будет

$$F = -\frac{2}{3}Kh^3\left[q_1^2 + p_2^2 + 2p_1^2 + \frac{\theta}{1+\theta}(q_1 - p_2)^2\right] -$$

$$-2Kh\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \frac{1}{2}\tau^2 + \frac{\theta}{1+\theta}(\sigma_1 + \sigma_2)^2\right],$$

и интеграл

$$\int F\,ds_1\,ds_2,$$

распространенный по средней плоскости пластинки, будет потенциалом сил, вызываемых этой деформацией. Шесть неизвестных величин σ_1, σ_2, τ, p_1, p_2, q_1, которые являются функциями от s_1, s_2 и входят в выражение F, могут быть все выражены через производные ξ, η, ζ по s_1 и s_2; σ_1 и σ_2 определяются уравнениями (4), τ получим из уравнения

$$(1+\sigma_1)(1+\sigma_2)\tau = \frac{\partial\xi}{\partial s_1}\frac{\partial\xi}{\partial s_2} + \frac{\partial\eta}{\partial s_1}\frac{\partial\eta}{\partial s_2} + \frac{\partial\zeta}{\partial s_1}\frac{\partial\zeta}{\partial s_2}, \tag{10}$$

которое вытекает из уравнений (5) и (6), после перемножения и сложения их; тогда из уравнений (5) можно будет найти α_1, β_1, γ_1, а из уравнений (6) найти α_2, β_2, γ_2. Зная эти шесть косинусов, можно будет вычислить по известным формулам α_3, β_3, γ_3. Наконец, уравнения (7) позволят тогда определить через s_1 и s_2 функции p_1, p_2, q_1.

Если пластинка получит конечное искривление, то при вычислении формы, которую она может принять, вместо уравнений (4) и (10) воспользуемся следующим уравнениями (так как σ_1, σ_2, τ бесконечно малы)

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial s_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial s_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s_1}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{\partial\xi}{\partial s_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial s_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial s_2}\right)^2=1,$$

$$\frac{\partial\xi}{\partial s_1}\frac{\partial\xi}{\partial s_2}+\frac{\partial\eta}{\partial s_1}\frac{\partial\eta}{\partial s_2}+\frac{\partial\zeta}{\partial s_1}\frac{\partial\zeta}{\partial s_2}=0,$$

которые показывают, что σ_1, σ_2, τ обращаются в нуль, т. е. что элементы средней плоскости не претерпевают деформации.

Поверхность, удовлетворяющая этому условию, называется *развертывающейся* поверхностью[16]. Чтобы найти зависимость между формой пластинки, силами и давлениями, которые должны действовать на пластинку так, чтобы было равновесие, можно исходить из принципа возможных перемещений. Также и при этом можно принять σ_1, σ_2 и τ равными нулю, потому что при таком предположении можно удовлетворить уравнению, определяющему принцип возможных перемещений. Поэтому в случае пластинки с конечным искривлением можно написать

$$F=-\frac{2}{3}Kh^3\left[q_1^2+p_2^2+2p_1^2+\frac{\theta}{1+\theta}(q_1-p_2)^2\right].$$

Мы не будем подробно рассматривать этот случай, но сошлемся на книгу «Теория упругости твердого тела» Клебша, в которой впервые исследована конечная деформация бесконечно тонкой пластинки.

§ 2

Если пластинка искривлена бесконечно мало, то надо будет найти бесконечно малые перемещения точек средней плоскости, причем здесь уже нельзя пренебречь величинами σ_1, σ_2, τ. Определим теперь для этого случая выражение F, введя вместо s_1 и s_2 обозначения x и y.

Выберем систему осей ξ, η, ζ так, что ζ бесконечно мало, ξ бесконечно мало отличается от x, η — от y, и положим

$$\xi=x+u,\qquad \eta=y+v.$$

Итак, мы предположили, что u, v и ζ бесконечно малы по сравнению с толщиной пластинки, т. е. по сравнению с h; это предположение существенно потому, что из двух членов, из которых слагается F, один содержит множитель h^3, другой только h. При таком предположении достаточно принять во внимание в обоих членах только первые степени производных u, v, ζ. Тогда уравнения (4) и (10) дают

$$\sigma_1=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \sigma_2=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \tau=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

уравнения (5) и (6) дают

$$\alpha_1 = 1, \qquad \alpha_2 = -\frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \alpha_3 = -\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$
$$\beta_1 = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \beta_2 = 1, \qquad \beta_3 = -\frac{\partial \zeta}{\partial y},$$
$$\gamma_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \qquad \gamma_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \qquad \gamma_3 = 1,$$

и, наконец, уравнения (7) дадут

$$p_1 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y}, \quad p_2 = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}, \quad q_1 = -\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}.$$

Отбросим предположение, что u, v, ζ бесконечно малы сравнительно с h; тогда для p_1, p_2 q_1, которые входят только в член функции F, умноженный на h^2, всегда можно взять выведенные выражения, но при вычислении σ_1, σ_2, τ, которые входят в член функции F, содержащий множителем h, мы должны принять во внимание некоторые члены высшего порядка. Пренебрежем в F только теми членами, которые бесконечно малы по сравнению с удержанными, если положим

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2, \\ \sigma_2 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2. \\ \tau &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial y}. \end{aligned} \tag{11}$$

Вычислим работу, производимую силой, возникающей при расширении, т. е. вариацию

$$\delta \iint F\, dx\, dy. \tag{12}$$

Она состоит из двух частей, из которых первая содержит множитель h^3, вторая — множитель h; развернем сперва первую часть. Она будет иметь вид

$$-\frac{2}{3} K h^3 \delta \iint dx\, dy \left\{\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\, \partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)^2\right\}. \tag{12a}$$

Каждый член этого выражения можно преобразовать так же, как и первый член. А именно:

$$\delta \iint dx\, dy \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)^2 = 2 \iint dx\, dy \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\frac{\partial^2 (\delta\zeta)}{\partial x^2} = 2 \iint dx\, dy \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right] = 2 \iint dx\, dy \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\delta\zeta\right) + \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\delta\zeta\right].$$

Обозначим через dl элемент контура средней плоскости пластинки, через n — направленную внутрь нормаль к dl; тогда это выражение будет равно

$$2 \iint dx\, dy \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}\delta\zeta - 2 \int dl \cos(nx) \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} - \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}\delta\zeta\right).$$

С первой частью входящего сюда простого интеграла мы произведем еще одно преобразование. Припишем элементу dl одно из двух возможных направлений, именно то, которое получит ось x, если система координат будет повернута так, что ось y сделается параллельной нормали n.

Далее мы обозначим через φ угол, который опишет прямая, когда из положения, в котором она параллельна оси x, будет повернута так, чтобы она стала параллельной n; при этом направление поворота должно быть таким, что при повороте на прямой угол она стала бы параллельной оси y, если прежде была параллельной оси x. Тогда

$$\frac{\partial \delta\zeta}{\partial x} = \frac{\partial \delta\zeta}{\partial l} \sin\varphi + \frac{\partial \delta\zeta}{\partial n} \cos\varphi, \quad \cos(nx) = \cos\varphi.$$

Пользуясь тем, что интегрирование по l производится по замкнутому контуру, получим

$$\int dl \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} \sin\varphi\cos\varphi \frac{\partial \delta\zeta}{\partial l} = -\int dl \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\sin\varphi\cos\varphi\right)\delta\zeta;$$

откуда получим

$$\delta\iint dx\,dy\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)^2 = 2\iint dx\,dy \frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}\delta\zeta - 2\int dl \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cos^2\varphi\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n} +$$
$$2\iint dl\left[\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}\cos\varphi + \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\sin\varphi\cos\varphi\right)\right]\delta\zeta.$$

Преобразовав соответственным образом остальные члены, на которые распадается выражение (12а), найдем, что это выражение равно

$$= -\frac{4}{3}Kh^3\frac{1+2\theta}{1+3\theta}\iint dx\,dy\left(\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}\right)\delta\zeta +$$
$$+\frac{4}{3}Kh^3\int dl\left\{\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\sin^2\varphi + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\right\}\frac{\partial\delta\zeta}{\partial n} -$$
$$-\frac{4}{3}Kh^3\int dl\left\{\frac{\partial}{\partial l}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}(\sin^2\varphi - \cos^2\varphi)\right] +\right.$$
$$\left. + \frac{1+2\theta}{1+\theta}\left[\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3} + \frac{\partial^3\zeta}{\partial y\,\partial y^2}\right)\cos\varphi + \left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3\zeta}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right]\right\}\delta\zeta. \qquad (13)$$

Оно составляет часть работы, определяемой функцией (12).

Другая ее часть, которая содержит множитель h, на основании уравнений (4) и (10) будет равна

$$4Kh\iint dx\,dy\left[\frac{\partial\sigma_1}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial y} + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{dx}\right]\delta u +$$
$$+4Kh\int dl\left[\sigma_1\cos\varphi + \frac{1}{2}\tau\sin\varphi + \frac{\theta}{1+\theta}(\sigma_1+\sigma_2)\cos\varphi\right]\delta u +$$
$$+4Kh\iint dx\,dy\left[\frac{\partial\sigma_2}{dy} + \frac{1}{2}\frac{\partial\tau}{\partial x} + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial(\sigma_1+\sigma_2)}{\partial y}\right]\delta v +$$
$$+4Kh\int dl\left[\sigma_2\sin\varphi + \frac{1}{2}\tau\cos\varphi + \frac{\theta}{1+\theta}(\sigma_1+\sigma_2)\sin\varphi\right]\delta v +$$
$$+4Kh\iint dx\,dy\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}\sigma_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\tau + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\sigma_1+\sigma_2)\right] +\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial\zeta}{\partial y}\sigma_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\tau + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}(\sigma_1+\sigma_2)\right]\right\}\delta\zeta +$$
$$+4Kh\int dl\left\{\cos\varphi\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}\sigma_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\tau + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}(\sigma_1+\sigma_2)\right] +\right.$$
$$\left. + \sin\varphi\left[\frac{\partial\zeta}{\partial y}\sigma_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\tau + \frac{\theta}{1+\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}(\sigma_1+\sigma_1)\right]\right\}\delta\zeta. \qquad (14)$$

Далее мы покажем, как можно применить выражения (13) и (14), сумма которых определяет работу сил, производимых расширением, для перемещений, определяемых значениями δu, δv, $\delta\zeta$.

§ 3

Рассмотрим пластинку, на которую не действуют никакие силы. Предположим, что точки ее края укреплены так, что для них $\zeta = 0$, а u и v имеют заданные значения; требуется найти u, v, ζ для случая равновесия.

Мы удовлетворим уравнениям, которые дает принцип возможных перемещений, если положим $\zeta = 0$ и определим из уравнений

$$\begin{aligned} 2(1+2\theta)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2} + (1+\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (1+3\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} &= 0, \\ 2(1+2\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (1+\theta)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (1+3\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

так, чтобы у края u и v принимали заданное значение.

Пластинка, которая находится в таких условиях, называется *напряженной*; она называется *равномерно напряженной*, когда

$$u = ax, \quad v = ay,$$

где a — постоянное; очевидно, что этими выражениями уравнения (15) будут удовлетворены.

§ 4

Дальнейшие применения, которые мы дадим выражениям (13) и (14), относятся к колебаниям, и именно к так называемым *поперечным колебаниям* пластинки. При этом мы воспользуемся принципом Гамильтона и прежде всего заметим, что если обозначим через T живую силу, через μ — плотность пластинки, то

$$T = \mu h \iint dx\,dy \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)^2\right],$$

причем интегрирование распространено по поверхности пластинки. Отсюда следует, что

$$\delta\int T\,dt = -\,2\mu h \iiint dt\,dx\,dy \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\delta v + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\delta\zeta\right). \tag{16}$$

Предположим, что край пластинки или неподвижен или свободен, так что силы давления, действующие на него, не производят никакой работы. Тогда принцип Гамильтона будет выражен уравнением

$$\delta\int T\,dt + \delta\iiint F\,dt\,dx\,dy = 0, \tag{17}$$

члены которого имеют значения, определяемые (16), (13) и (14).

В том случае, если край пластинки свободен и ζ бесконечно мало по сравнению с толщиной пластинки, мы можем допустить, что u и v равны нулю, причем, сделав это, мы придем к уравнениям для *поперечных колебаний* пластинки. Они будут иметь вид

$$0 = \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} + \frac{2}{3}\,\frac{1+2\theta}{1+\theta}\,\frac{h^2 K}{\mu}\left(\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4} + \frac{\partial^4\zeta}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4\zeta}{\partial y^4}\right),$$

а для края пластинки найдем

$$0=\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\cos^2\varphi+2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\sin^2\varphi+\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right),$$

$$0=\frac{\partial}{\partial l}\left[\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi+\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)\right]+$$
$$+\frac{1+2\theta}{1+\theta}\left[\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\zeta}{\partial x\,\partial y^2}\right)\cos\varphi+\left(\frac{\partial^3\zeta}{\partial x^2\,\partial y}+\frac{\partial^3\zeta}{\partial y^3}\right)\sin\varphi\right]. \tag{18}$$

До сих пор удалось найти решение этих уравнений только для случая круглой пластинки. Мы придем к решению в этом случае следующим путем.

Положим

$$\frac{2}{3}\frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{h^2K}{\mu}=a^2,$$

$$\zeta=U\sin(4\lambda^2at),$$

где U — функция x и y, а λ — постоянное. Это предположение соответствует случаю, когда пластинка дает простой тон, продолжительность двойного колебания которого равна $\frac{\pi}{2\lambda^2a}$. При этом для U получим дифференциальное уравнение в частных производных

$$16\lambda^2U=\frac{\partial^4U}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4U}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4U}{\partial y^4}.$$

К этому надо добавить граничные условия, которые найдем из (18), подставив U вместо ζ. Предыдущее дифференциальное уравнение в частных производных можно заменить двумя уравнениями:

$$4\lambda^2V=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2},$$

$$4\lambda^2U=\frac{\partial^2V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2V}{\partial u^2}.$$

Сложив эти уравнения и вычтя из них

$$U=S+D,\qquad V=S-D,$$

получим

$$4\lambda^2S=\frac{\partial^2S}{\partial x^2}+\frac{\partial^2S}{\partial y^2},$$

$$-4\lambda^2D=\frac{\partial^2D}{\partial x^2}+\frac{\partial^2D}{\partial y^2}.$$

Введем вместо прямоугольных координат полярные, так что будет

$$x=r\cos\psi,\qquad y=r\sin\psi;$$

отсюда получим

$$4\lambda^2S=\frac{\partial^2S}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2S}{\partial\psi^2},$$

$$-4\lambda^2D=\frac{\partial^2D}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial D}{\partial r}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2D}{\partial\psi^2}.$$

Мы удовлетворим этим уравнениям, полагая

$$S=A\cos n\psi X,\qquad D=B\cos n\psi\,Y,$$

где n — целое число, A и B — произвольные постоянные, X и Y — функции r, которые удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2X}{dt^2}+\frac{1}{r}\frac{dX}{dr}-\left(\frac{n^2}{r^2}+4\lambda^2\right)X=0,$$

$$\frac{d^2Y}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dY}{dr}-\left(\frac{n^2}{r^2}-4\lambda^2\right)Y=0.$$

Положим $\lambda r=x$, тогда эти уравнения примут вид

$$\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dX}{dx}-\left(\frac{n^2}{x^2}+4\right)X=0,$$

$$\frac{d^2Y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dY}{dx}-\left(\frac{n^2}{x^2}-4\right)Y=0.$$

Найдем частное решение первого из этих уравнений, если положим

$$X=A_0x^{\varkappa}+A_2x^{\varkappa+2}+A_4x^{\varkappa+4}+\ldots;$$

тогда

$$\frac{dX}{dx}+\varkappa A_0x^{\varkappa-1}+(\varkappa+2)A_2x^{\varkappa+1}+(\varkappa+4)A_4x^{\varkappa+3}+\ldots,$$

$$\frac{d^2X}{dx^2}=\varkappa(\varkappa-1)A_0x^{\varkappa-2}+(\varkappa+2)(\varkappa+1)A_2x^{\varkappa}+(\varkappa+4)(\varkappa+3)A_4x^{\varkappa+2}+\ldots,$$

и указанное уравнение примет вид

$$0=A_0(\varkappa^2-n^2)x^{\varkappa-2}-4A_0x^{\varkappa}+A_2[(\varkappa+2)^2-n^2]x^{\varkappa}-4A_2x^{\varkappa+2}+$$
$$+A_4[(\varkappa+4)^2-n^2]x^{\varkappa+2}-4A_4x^{\varkappa+4}$$

. . . .

Мы удовлетворим ему, если положим

$$\varkappa^2-n^2=0,$$
$$A_2[(\varkappa+2)^2-n^2]=4A_0,$$
$$A_4[(\varkappa+4)^2-n^2]=4A_2,$$

. . . .

Этим уравнениям мы удовлетворим, если положим,

$$\varkappa=n,$$

$$A_2=\frac{A_0}{1\cdot n+1},\qquad A_4=\frac{A_2}{2\cdot n+2},\qquad A_6=\frac{A_4}{3\cdot n+3},\ldots,$$

где A_0 — произвольное постоянное. Таким образом, частным решением (которое мы обозначим через X_n) составленного для X дифференциального уравнения будет

$$X_n=\frac{x^n}{1\cdot2\cdot3\ldots n}\left(1+\frac{x^2}{1\cdot n+1}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot n+1\cdot n+2}+\ldots\right),$$

и соответственно для Y,

$$Y_n=\frac{x^n}{1\cdot2\ldots n}\left(1-\frac{x^2}{1\cdot n+1}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot n+1\cdot n+2}-\ldots\right).$$

Легко заметить, что оба эти бесконечных ряда сходятся при любых значениях их аргумента.

Упомянем еще о других частных значениях X и Y, хотя они не найдут применения в настоящей задаче. Положим

$$X=WX_n,$$

так что

$$\frac{dX}{dx} = W\frac{dX_n}{dx} + X_n\frac{dW}{dx},$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = W\frac{d^2X_n}{dx^2} + 2\frac{dX_n}{dx}\frac{dW}{dx} + X_n\frac{d^2W}{dx^2}.$$

Умножим эти уравнения последовательно на

$$-\left(\frac{n^2}{x^2}+4\right), \qquad \frac{1}{x}, \quad 1$$

и потом сложим их. Так как X и X_n есть решения рассматриваемого дифференциального уравнения, то мы получим

$$X_n\frac{d^2W}{dx^2} + \left(\frac{X_n}{x} + 2\frac{dX_n}{dx}\right)\frac{dW}{dx} = 0,$$

или, если положим $\frac{dW}{dx} = W'$,

$$\frac{dW'}{W'} + \left(\frac{1}{x} + 2\frac{\frac{dX_n}{dx}}{X_n}\right)dx = 0,$$

т. е.

$$\lg W' + \lg x + 2\lg X_n = \text{const},$$

или

$$W' = \text{const}\,\frac{1}{xX_nX_n};$$

следовательно,

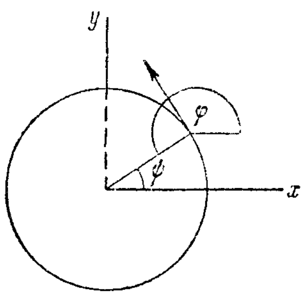
$$W = \text{const}\int\frac{dx}{xX_nX_n},$$

где нижний предел интеграла может быть выбран произвольным. Поэтому вторым частным значением X будет

$$X = X_n\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{xX_nX_n}$$

и соответственно для Y

$$Y = Y_n\int\limits_{x_0}^{x}\frac{dx}{xY_nY_n},$$



Фиг. 1

где x_0 — произвольное постоянное. Но эти значения X и Y, как видно из выражений для X_n и Y_n, для $x=0$, т. е. для $r=0$, бесконечны и потому не могут найти применения, если пластинка, как мы предполагаем, представляет полную площадь круга.

Поэтому мы положим

$$S = A\cos n\psi\, X_n, \qquad D = B\cos n\psi\, Y_n$$

и постараемся определить постоянные A, B, λ так, чтобы удовлетворить обоим граничным условиям.

Обозначим радиус пластинки через α. На основании определения, которое мы сделали при выводе выражения (13) для направления, в котором возрастает l, и для угла φ, мы будем иметь, кроме того, это видно и из фиг. 1,

$$l = \alpha\psi \quad \text{и} \quad \varphi = 180^\circ + \psi.$$

Следовательно, выведенные из (18) граничные условия будут

$$0 = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right),$$

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \psi}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r\, \partial \psi} - \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \psi}\right) + \frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2}\right),$$

или, если воспользоваться тем, что

$$4\lambda^2 V = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2},$$

то

$$0 = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + 4\lambda^2 \frac{\theta}{1+\theta} V,$$

$$0 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^3 U}{\partial r\, \partial \psi^2} - \frac{1}{r^3}\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} + 4\lambda^2 \frac{1+2\theta}{1+\theta}\frac{\partial V}{\partial r}.$$

Выразим теперь U и V через S и D, S и D — через X_n, Y_n и вторые производные X_n и Y_n, которые при этом войдут, — через силы X_n, Y_n и их первые производные при посредстве составленных для этих функций уравнений. Положим еще

$$\frac{1+2\theta}{1+\theta} = \gamma,$$

тогда мы найдем, что для $r = \alpha$, т. е. $x = \lambda\alpha$, должны быть удовлетворены уравнения

$$0 = A\left[n^2 X_n - x(n^2 - 4\gamma x^2)\frac{dX_n}{dx}\right] + B\left[n^2 Y_n - x(n^2 + 4\gamma x^2)\frac{dY_n}{dx}\right],$$

$$0 = A\left[(n^2 + 4\gamma x^2) X_n - x\frac{dX_n}{dx}\right] + B\left[(n^2 - 4\gamma x^2) Y_n - x\frac{dY_n}{dx}\right].$$

Обозначим определитель их через Δ, тогда λ получим из трансцендентного уравнения

$$\Delta = 0$$

и отношение $A:B$ определим из любого из двух предыдущих уравнений.

Обозначим через λ_{mn} корень уравнения $\Delta = 0$ и положим

$$W_{nm} = X_n\left[(n^2 - 4\gamma x^2) Y_n - x\frac{dY_n}{dx}\right]_{(x=\alpha\lambda_{nm})} - $$
$$- Y_n\left[(n^2 + 4\gamma x^2) X_n - x\frac{dX_n}{dx}\right]_{(x=\alpha\lambda_{nm})};$$

тогда

$$\zeta = C \sin(4\lambda_{nm}^2 at) W_{nm} \cos n\psi,$$

где C — произвольное постоянное. Узловые линии, соответствующие тонам, определяемым λ_{mn}, имеют уравнения

$$\cos n\psi = 0 \text{ и } W_{nm} = 0.$$

Первое из них представляет систему n диаметров, образующих равные углы между собой; второе — систему концентрических кругов. Относительно вычисления тонов и узловых кругов сошлемся на одну из работ*.

* Kirchhoff. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastichen Scheibe. Grellè's Journal, Bd. 40.

§ 5

Составим, наконец, дифференциальное уравнение для поперечных колебаний *напряженной мембраны*. Мы придем к этим уравнениям, если рассмотрим пластинку, закрепленную по краю, когда части ее перемещаются в ее плоскости u и v, а эти перемещения удовлетворяют уравнениям (15). Эти перемещения должны быть столь велики по сравнению с толщиной пластинки, чтобы при составлении уравнения (17) можно было пренебречь выражением (13) (по сравнению с (14)), и столь велики по сравнению с ζ, чтобы уравнения (11) можно было представить в виде

$$\sigma_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \sigma_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \tau = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Уравнение (17) будет выполнено, если примем, что u и v не зависят от времени, и определим ζ из дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{2K}{\mu}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right] +$$
$$+ \frac{2K}{\mu}\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right]$$

и условия, что на краю оно обращается в нуль.

Перемещения u, v должны удовлетворять дифференциальным уравнениям (15), но при этом они могут быть многозначными функциями x и y. В случае, о котором уже говорилось, когда мембрана *равномерно напряжена*, можно положить

$$u = ax, \qquad v = ay,$$

где a — постоянная. Тогда дифференциальное уравнение для ζ будет

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = \frac{2K}{\mu}\frac{1+3\theta}{1+\theta}a\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right).$$

Его можно легко решить, если мембрана прямоугольная или круглая. Тогда легко вычислить тоны, которые может давать мембрана, и узловые линии, им соответствующие. При прямоугольной форме мембраны будем иметь дело только с тригонометрическими функциями, при круглой форме — с функциями, которые при исследовании колебаний круглой пластинки мы обозначили через Y_n. Это так называемые басселевые функции. Узловые линии прямоугольной мембраны — прямые линии, параллельные ее сторонам, круглой мембраны — диаметры (которые образуют между собой равные углы) и круги (концентрические пластинки с краем в виде круга).

ПРИЛОЖЕНИЯ

ГУСТАВ РОБЕРТ КИРХГОФ

Биографическая справка

Густав Роберт Кирхгоф родился в Кенигсберге 12 марта 1824 г. Об был младшим сыном советника юстиции Карла Фридриха Кирхгофа.

В детстве Кирхгоф был живым и разговорчивым мальчиком; присущий ему в зрелом возрасте замкнутый и молчаливый характер выработался в нем лишь впоследствии.

Густав Кирхгоф и его братья посещали Клейнгорскую гимназию в Кенигсберге; уже в гимназические годы определились способности Густава к математике и физике. Один из братьев Густава впоследствии работал врачом в Берлине, другой — советником суда. Между братьями велась оживленная переписка, из которой можно почерпнуть некоторые сведения о характере Густава.

Закончив в 18 лет гимназию, Кирхгоф в 1842 г. поступил на физико-математический факультет Кенигсбергского университета. Университет дал ему глубокое математическое образование. Среди его преподавателей были известные математики и физики: Ришело, Бессель, Якоби, Франц Нейман. Наибольшим авторитетом среди студентов в Кенигсбергском университете в то время пользовался Франц Нейман (1798—1895), а в Берлинском — Густав Магнус (1802—1870).

Эти два физика вошли в историю науки не только благодаря значению их личных работ, но и как основатели физических школ. Под их влиянием развивались такие выдающиеся ученые XIX в., как Гельмгольц, Кирхгоф и Клаузиус.

Магнус был центром притяжения главным образом для физиков-экспериментаторов. У него была домашняя лаборатория, которую он предоставил в общее пользование. С 1843 г. на квартире Магнуса собирался коллоквиум, который послужил основанием образованному в 1845 г. Берлинскому физическому обществу. Идею организации общества подал Дю-Буа-Реймон. Основная организационная роль принадлежала физику Карстену. Первыми членами общества были Гельмгольц, Вернер Сименс и Клаузиус.

Франц Нейман был «отцом и Нестором» математической физики; он постоянно подчеркивал значение математики, дающей ясное и точное знание. Под математической физикой в то время разумелась физика, оперирующая дифференциальными уравнениями на основе представления о непрерывности материи. Именно в таком виде она развивалась Францем Нейманом. Во Франции ее разрабатывали главным образом Фурье и Коши; в Англии в сороковых годах XIX в.— Стокс и В. Томсон.

Сам Нейман перешел от вопросов чистой математики к математической физике под влиянием работ Фурье. В течение 50 лет (с 1826 г.) он работал в Кенигсберге. Основанная Якоби и Францем Нейманом так называемая кенигсбергская школа была первой крупной, длительное время процветавшей школой, имевшей влияние далеко за пределами Кенигсберга.

В семинаре Неймана Кирхгоф сделал в 1845 г. свою первую научную работу по электричеству. Влияние Неймана явно сказалось на изящной математической форме физических исследований Кирхгофа; он безусловно был самым выдающимся из учеников Неймана.

Кирхгоф в молодости сомневался в своем призвании, но под влиянием Неймана твердо решил посвятить себя изучению математики и физики. В университетские годы он писал брату Отто: «Нейман является теперь моим главным учителем, что я констатирую с большим удовлетворением... Благодаря ему кончились мои колебания относительно того, какой науке себя посвятить. Я решил посвятить себя физике, несмотря на скучные наблюдения и скучные расчеты» *.

В 1846 г. Кирхгоф закончил Кенигсбергский университет. Философский факультет университета выхлопотал для него редко присуждавшуюся стипендию на поездку с научной целью в Париж. По-видимому, осуществлению этой командировки помешали политические события во Франции **.

В 1848 г. Кирхгоф защитил диссертацию при Берлинском университете и был зачислен приват-доцентом. В том же году он стал действительным членом молодого Берлинского физического общества.

Благодаря помощи Магнуса и Якоби через два года Кирхгоф был приглашен в качестве экстраординарного профессора физики в Бреславль. Кирхгоф попал в Бреславль в 1850 г., а через год туда приехал из Марбурга Роберт Вильгельм Бунзен (1811—1899). И хотя Бунзен уже через год перешел в Гейдельбергский университет, между учеными завязалась большая личная и научная дружба, продолжавшаяся в течение всей жизни.

Перейдя в 1852 г. в Гейдельбергский университет в качестве профессора химии, Бунзен постарался привлечь туда Кирхгофа. В 1854 г. ему удалось это сделать, так как после отъезда Жоли освободилось место профессора физики. Кирхгоф отказался от приглашения в Бонн на место Плюккера, в Берлин на место Магнуса и принял предложение Бунзена о переезде в Гейдельберг. Через четыре года туда приехал Гельмгольц (тогда — профессор физиологии), позже — математик Кенигсбергер. Постепенно образовалась гейдельбергская школа математической физики, продолжавшая традиции кенигсбергской школы. В Гейдельберге Кирхгоф работал 20 лет (до 1874 г.) и написал свои лучшие работы. Здесь проходила его совместная деятельность с Бунзеном, приведшая к открытию спектрального анализа.

Вскоре после приезда в Гейдельберг Кирхгоф женился на дочери своего университетского преподавателя математики Ришело.

С 1863 г. значительно улучшилась обстановка работы Кирхгофа. В новом здании университета ему была отведена большая лаборатория и рядом квартира. Однако вскоре он повредил ногу и вынужден был долгое время пользоваться костылем. В 1869 г. его постигло большое несчастье: умерла жена. 2 июля 1869 г. Киргорф писал Дю-Буа-Раймону, с которым его связывала большая личная дружба: «Я имел в жизни много незаслуженного счастья; теперь ко мне пришло несчастье. Разрушена моя семья. Я хочу отвлечься научными занятиями, но работа удается плохо. Нож, которым я хочу резать, тупой». ***. Однако, несмотря на жалобы на плохую работоспособность, Кирхгоф в этом же году написал три работы.

---

* Naturwiss., H. 11, 1925, S. 208.

** Е. Варбург пишет, что Магнус и Якоби посоветовали Кирхгофу потратить деньги на жизнь в Берлине, и ничего не говорит о политических событиях того времени.

*** Naturwiss., H. 11, 1925, S. 109.

В 1872 г. он женился вторично.

Несмотря на ряд лестных приглашений, Кирхгоф не хотел покидать Гейдельберга, друзей, к которым был очень привязан. Но из-за недостатка средств Гейдельбергский университет приходил в упадок, и друзья Кирхгофа постепенно переезжали в другие университеты. Привязанность Кирхгофа к этому городу постепенно охладевала, и он откликнулся на приглашение (уже третье) переехать в столичный университет в Берлин.

В 1873 г. в Берлине приступили к строительству большой физической лаборатории. Однако из-за болезни глаз и острой боли в ноге экспериментальные занятия стали для Кирхгофа невозможными, и он ушел целиком в работы по математической физике.

В 1875 г. Крихгоф стал профессором теоретической физики Берлинского университета, но уже в 1876 г. перестал читать лекции и стал заниматься исключительно исследовательской работой. В 1881 г. он был избран ректором Берлинского университета, но по состоянию здоровья отказался. Однако в зимний период 1885/86 г., собрав последние силы, он прочел свой последний курс лекций.

В Берлине Кирхгоф прожил до самой смерти, которая наступила в 1887 г. от опухоли в мозгу.

Таковы основные вехи жизни Кирхгофа.

Русские физики высоко ценили научные труды Кирхгофа. Уже в 1863 г. он был избран членом-корреспондентом Петербургской Академии наук по представлению Б. С. Якоби и Веселовского. С 1870 г. он был членом Берлинской Академии наук и корреспондентом Парижской Академии наук.

А. Г. Столетов писал, что во время своей поездки в Берлин он «имел счастье несколько лет пользоваться лекциями и частными беседами Кирхгофа и смог пристально всмотреться в личность знаменитого учителя... Простота обращения, неутомимая внимательность в отношении к учащимся, постоянная деятельность и самообладание мысли, дар сжатой, но отчетливой речи,— вот что нас поражало в Кирхгофе. Во всем сказывались сильная воля, чувство долга, высокое и чуждое высокомерия самолюбие, любовь к порядку, терпение, упорная работа *. Для Кирхгофа, как об этом свидетельствуют все его ученики, была характерна исключительная научная добросовестность и правдивость. Он часто применял в своих лекциях слова «пожалуй», «вероятно», когда не был окончательно уверен в достоверности какого-либо положения.

В 1873 г. к Кирхгофу приезжал петербургский физик Боргман; в 1875—1876 гг. Умов во время своей поездки за границу знакомился с постановкой практических работ по физике у Кирхгофа. Он представил Кирхгофу свою статью «О стационарном движении электричества на проводящих поверхностях произвольного вида». Кирхгоф опубликовал в 1875 г. работу на эту тему, использовав результаты Умова **, но изменив доказательство.

Преемником Кирхгофа по кафедре теоретической физики стал Макс Планк.

Вся жизнь Кирхгофа была посвящена работе. Больцман хорошо сказал: «В жизни Кирхгофа не было ничего выдающегося, что соответствовало бы необычайности его гения. Его жизнь была обычной жизнью немецкого профессора университета. Великие события происходили исключительно в его голове» ***.

Кирхгоф уделял серьезное внимание преподавательской деятельности. Лекции его производили очень большое впечатление на слушателей и привлекали к нему учеников изо всех стран.

---

* А. Г. Столетов. Г. Р. Кирхгоф. Природа, № 2, 1873, стр. 178.

** В своих письмах Умов выражал недовольство этим поступком Кирхгофа.

*** L. Boltzmann. Populäre Schriften. Leipzig, 1905.

Кирхгоф сочетал в себе математический талант с умением наблюдать и экспериментировать. Опыты его были точными и изящными, часто производились с приборами собственного изобретения. Он организовал практический семинар, целью которого было облегчить для слушателей переход от прочитанных курсов к самостоятельной работе. В этом семинаре участники его знакомились с классическими методами физических измерений. Результаты всех работающих сравнивались между собой и с результатами, уже принятыми в науке. Темами для работ служили, например, измерения длины волны света, теплоты, выделяющейся при растворении соли и др. Каждый слушатель в начале года выбирал определенный день в неделю, когда он работал в физическом кабинете над избранной темой и задачей.

Учениками Кирхгофа были многие выдающиеся физики и математики: Макс Планк, Ф. Клейн, Карл Пирсон, Артур Шустер и др. Крупный немецкий физик Макс Лауэ писал, что своим решением посвятить себя физике он был обязан опубликованным лекциям Кирхгофа. Решающим фактором было «сознание того, как много можно высказать о природе при помощи математических методов» *. Макс Планк отмечает в автобиографии, что под руководством Кирхгофа он значительно расширил свой научный кругозор.

Все слушавшие Кирхгофа отмечали, что он не говорил ни одного лишнего слова и в короткое время сообщал богатейший материал. Однако тщательная обработанность лекций, «в которых была взвешена и стояла на своем месте каждая фраза» **, была связана с некоторой сухостью и однообразием читаемого курса, на что указывали Планк, Клейн и др.

В отличие от лекций Гельмгольца, Кирхгоф в своих лекциях никогда ничего не говорил о себе, проявлял большую скромность. По словам Ф. Клейна, «он читал наизусть гладко обработанную рукопись и скорее позволил бы себе посреди лекции заглянуть в нее, чем дал бы повод обвинить себя в небольшом отступлении от нее» ***.

Характеризуя мировоззрение Кирхгофа, В. И. Ленин говорит ****, что он признавал объективное существование изучаемой в науке реальности и объективную истинность человеческого познания.

Т. Н. Горнштейн

---

* М. Лауэ. История физики. Пер. с нем. М., Гостехиздат, 1956, стр. 174.

** М. Планк. Сб. статей. М., 1958, стр. 12.

*** Ф. Клейн. Лекции по истории математики в XIX столетии. М., ОНТИ, 1935, стр. 262.

**** См. В. И. Ленин. Сочинения, изд. 4, т. 14, стр. 153.

ПРИМЕЧАНИЯ *

[1] Обычно эти силы называются поверхностными силами; отнесенные к единице поверхности, они называются напряжениями.

[2] Если мы возьмем для нормали n к поверхности соприкасания некоторое определенное направление, то направления внутренних нормалей к противоположным поверхностям рассматриваемого бесконечно малого объема будут — одно совпадать с установленным направлением нормали к поверхности соприкасания, а другое ему противоположно. Поэтому, обозначая здесь через X_n компоненту давления, взятую по установленному направлению нормали к поверхности соприкасания, мы будем иметь в интеграле $\int X_n ds$ формулы (1) X_n положительным на одной стороне бесконечно малого объема и отрицательным — на противоположной.

[3] В случае разрывности перемещений, возможные перемещения двух прилегающих частиц поверхности соприкасания двух тел состоят из общего перемещения по нормали и скольжения одной по другой.

[4] Эти уравнения могут быть выведены таким же способом, как (28), причем множитель при постоянном Θ отпадает вследствие предположенной несжимаемости жидкости.

[5] Под моментом вращения здесь подразумевается проекция на ось равнодействующего момента сил давления.

[6] Под суммой компонент давления по оси здесь подразумевается проекция на ось равнодействующей давления.

[7] Поверхность жидкости можно уподобить упругой перепонке; элементарная работа, потребная для растяжения поверхности, пропорциональна приращению поверхности, следовательно, элементарная работа капиллярных сил при сжатии поверхности пропорциональна бесконечно малому уменьшению поверхности, т. е. потенциал капиллярных сил пропорционален поверхности.

[8] Сумма интегралов $\int ds_{31} z \cdot \cos(n_3 x) + \int ds_{23} z \cdot \cos(n_3 x) = 0$, так как эта сумма равна интегралу, распространенному по всей поверхности тела 3.

[9] При бесконечно малом перемещении, параллельном поверхности, приращения функции W с той и другой стороны поверхности отличаются друг от друга на $4\pi i$.

[10] Задавая V и $\dfrac{\partial V}{dn}$ на поверхности, мы определяем функцию V однозначно и внутри объема; другими словами, не может существовать двух различных функций V_1 и V_2, удовлетворяющих уравнению Лапласа внутри объема и рассматриваемым условиям на его поверхности.

[11] Для этого надо взять ось x в направлении скорости течения жидкости в центре шара.

[12] В этом месте линия тока, вообще, разветвляется на несколько линий.

[13] При перемещении вдоль линии тока в выражении для приращения потенциала скоростей $dV = \dfrac{\partial V}{\partial x} dx + \dfrac{\partial V}{\partial y} dy + \dfrac{\partial V}{\partial z} dz$ дифференциалы dx, dy, dz пропорциональны производным $\dfrac{\partial V}{\partial x}$, $\dfrac{\partial V}{\partial y}$, $\dfrac{\partial V}{\partial z}$; следовательно, dV пропорционально

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

[14] Если $\dfrac{\partial V_1}{\partial n}$ и $\dfrac{\partial V_2}{\partial n}$ даны с точностью до величин, для которых рассмотренный здесь интеграл равен нулю, то $\int ds \dfrac{\partial (V_1 - V_2)}{\partial n} = 0$, следовательно, $V_1 - V_2 = \text{const}$.

---

* Примечания составлены Л. С. Полаком.

[15] Тогда коэффициенты при dx, dy, dz в предыдущих уравнениях являются теми же самыми косинусами.

[16] Т. е. мы ищем вариацию $\delta\Omega$, соответствующую рассматриваемой вариации $\delta\varphi$ функции φ.

[17] Теорема Иоахимсталя. См., например, Э. Гурса. Курс математического анализа, т. I, § 250.

[18] В § 2 мы видели, что $u = +\infty$ представляет шар с бесконечно большим радиусом $r = \sqrt{u}$.

[19] Функция u_1 выражается эллиптическим интегралом, причем точки разветвления подынтегральной функции суть $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ и ∞; многозначность u_1 является следствием обхода вокруг этих точек на плоскости переменного u.

[20] Напомним, что здесь $\varphi = u_1$ есть потенциал скоростей, который непрерывно возрастает или убывает вдоль линии тока (лекция шестнадцатая, § 6).

[21] Вычисляя компоненты скорости $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, $\frac{\partial u_1}{\partial z}$ при помощи формул (18), (16), (15) и (12), можно показать, что на площади эллипса (19), когда $u = -c^2$, будет $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0$, тогда как $\frac{\partial u}{\partial z} \neq 0$, и можно убедиться, что при переходе через эту площадь $\frac{\partial u_1}{\partial z}$ изменяет знак на обратный.

[22] На основании данного выше значения скорости на бесконечности и принятого условия относительно знака $\frac{du_1}{du}$ имеем $\frac{du_1}{dr} = -\frac{2}{r^2}$, откуда $u_1 = \frac{2}{r}$.

[23] Заключить обвод эллипса в трубчатую поверхность необходимо потому, что, как это следует из формулы (26), на обводе эллипса $u=v=-c^2$ скорость обращается в бесконечность и необходимо убедиться, что интеграл имеет смысл.

[24] $c^2+u=x^2$. Значение u_1 выбрано так, чтобы при $u=\infty$ было $u_1=0$.

[25] Первый член разложения содержит $\rho^{-1/2}$.

[26] Так как для обеих сторон эллипса u_1 имеет одинаковое значение, равное интегралу (28), взятому вдоль края разреза, проведенного в плоскости u от точки $-c^2$ до бесконечности.

[27] Квадратный корень из формулы (26а) при $u=-c^2$ дает искомое значение du_1; чтобы получить $\frac{du_2}{du}$, надо обойти вокруг точки $-c^2$, что изменит знак корня на обратный.

[28] Применяя формулу § 7 предыдущей лекции $M = \frac{1}{4\pi}\int dt\,\frac{\partial u_1}{\partial n}$, найдем, что $M=2$.

[29] Потенциал в точке пластинки дан формулой (28), а электрическая масса равна двум.

[30] Вычисляя, как указано в примечании 21, компоненту скорости $\frac{\partial u_1}{\partial z}$, мы найдем, что при $v=-c^2$ она равна нулю. Заметим, однако, что на обводе эллипса (19) скорость обращается в ∞.

[31] Для перехода на другую сторону разреза надо в плоскости переменного u выполнить интегрирование вдоль обеих сторон разреза $(-c^2, \infty)$ от бесконечно удаленной точки, лежащей с одной стороны разреза, до бесконечно удаленной точки, лежащей с другой стороны разреза, взяв за начальное значение для u значение нуль. Интеграл вдоль этого пути равен удвоенному интегралу (28).

[32] Здесь следует добавить к φ постоянный множитель, имеющий измерение, обратное скорости W.

[33] Левая часть предыдущей формулы представляет выражение нормального к телу перемещения жидкой частицы, прилегающей к поверхности тела; так как в момент $t=t_1$ тело неподвижно, то это нормальное перемещение должно быть равно нулю.

[34] При замене тела жидкостью мы получим односвязное пространство, заполненное жидкостью, покоящейся в бесконечности.

[35] Так как произведение площади поперечного сечения q вихревой нити на угловую скорость ζ не зависит от времени, а q постоянно вследствие постоянства массы и длины элементарной вихревой нити, то ζ также не зависит от времени.

[36] Живая сила прямолинейной вихревой нити бесконечно велика, порядка логарифмической бесконечности, так как, с одной стороны, скорость на бесконечности не убывает достаточно быстро, а с другой стороны, вблизи бесконечно тонкой вихревой нити скорость бесконечно велика; но если мы имеем, например, две вихревые нити (пару вихрей с угловыми скоростями $+\zeta$ и $-\zeta$), то скорость на бесконечности равна нулю и живая сила для вихревых нитей конечной толщины будет конечной. Поэтому вихри наблюдаются обыкновенно парами.

[37] Условия (1) суть необходимые и достаточные условия того, чтобы функция Z была аналитической функцией z. См., например, Э. Гурса. Курс математического анализа, т. II, § 261.

[38] Эта теорема принадлежит Коши. См., например, Э. Гурса. Курс математического анализа, т. II, § 281.

[39] Эта теорема принадлежит Коши. См. там же, § 295.

[40] Когда точка ζ описывает стороны бесконечно малого клина с вершиной ζ_3 и с углом при вершине α, точка w описывает бесконечно малый прямолинейный отрезок. Следовательно, мы имеем (см. предыдущую лекцию, § 5)

$$w = A\zeta^n,$$

где $n\alpha=\pi$. Поэтому

$$\frac{dw}{d\zeta} = An\zeta^{n-1} = An\zeta^{\frac{\pi}{\alpha}-1},$$

и если $\alpha<\pi$, то при $\zeta=0$ производная равна нулю. Заметим, что соотношение (а) можно получить из соотношения, представляющего изображение серпа плоскости ζ на области плоскости W, ограничиваясь бесконечно малыми частями этих областей, прилегающими к рассматриваемым точкам, и соответственно удерживая лишь члены низшего порядка малости.

[41] Первая задача есть задача Дирихле, вторая — задача Неймана. В настоящее время существование функции ψ для задачи Дирихле установлено в весьма общих случаях.

[42] Если можно пренебречь величиной k^2U.

[43] Так как $\int \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz \right)$ равно разности значений потенциала скоростей в двух рассматриваемых точках, и движение отличается бесконечно мало от установившегося.

[44] На поверхности z будет функцией x, y, причем при сделанных предположениях абсолютное значение этой функции в рассматриваемой области бесконечно мало.

[45] Производные равны нулю, вследствие принятого направления оси x и плоскости xOy.

[46] Этот термин в таком понимании не удержался в науке.

БИБЛИОГРАФИЯ НАУЧНЫХ ТРУДОВ Г. КИРХГОФА *

1. Über den Durchgang eines elektrischen Stromes durch eine Ebene, insbesondere durch eine kreisförmige.— Ann Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1845, Bd 64, S. 497—514; 1846, Bd 67, S. 344—349.

То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 1—22. См. № 61.

То же, на фр. яз. под загл.: Mémoire sur la propagation de l'électricité dans une plaque conductrice.— Ann chim. et phys. Paris, 1854, t. 40, p. 115—127.

2. Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1747, Bd 72, S. 498—508.

То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 22—23. См. № 61.

3. Note relative à la théorie de l'équilibre et du mouvement d'une plaque elastique. C. r. Acad. sci., Paris, 1848, t. 27, p. 394—397.

4. Über die Anwendbarkeit der Formeln für die Intensitäten der galvanischen Ströme in einem Systeme linearer Leiter auf Systeme, die zum Teil nicht aus linearen Leitern bestehen.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1848, Bd 75, S. 189—205.

То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 33—49. См. № 61.

То же, сокращ. на фр. яз. под загл.: Mémoire sur les formules qui représentent l'intensité des courants électriques circulant dans un système de conducteurs non linéaires.— Ann. chim. et phys. Paris, 1854, t. 40, p. 327—333.

5. Note sur les vibrations d'une plaque circulaire.— C. r. Acad. sci. Paris, 1849, t. 29, p. 753—756.

6. Bestimmung der Konstanten, von welcher die Intensität induzierter electrischer Ströme abhängt.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1849, Bd 76, S. 412—426.

То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 118—131. См. № 61.

7. Über die Ableitung der Ohm'schen Gesetze, welche sich an die Theorie der Elektrostatik anschließt.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1849, Bd 78, S. 506—513.

То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 49—55. См. № 61.

То же, сокращ. на фр. яз. под загл.: Démonstration des lois de Ohm, fondée sur les principes ordinaires de l'électricité statique.— Ann. chim. et phys. Paris, 1854, t. 41, p. 496—500.

То же, сокращ. на англ. яз. под загл.: On a deducation of Ohms laws, in connexion with the theory of electro-statics.— London, Edinburgh a. Dublin Philos. Hag. a. J. Sci. London, 1850, v. 37, p. 463—468.

8. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe.— J. reine u. angew. Math. Crell. Berlin. 1850, Bd 40, S. 51—88.

То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 237—279. См. № 61.

9. Über die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1850, Bd 81, S. 258—264.

То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 279—285. См. № 61.

10. Über die Gleichungen des Gleichgewichtes eines elastischen Körpers.— Sitzungsber. Math.-Naturwiss. Kl. Kaiserl. Acad. Wiss. Wien, 1852, Bd 9, S. 762—773.

11. Über den induzierten Magnetismus eines unbegrenzten Zylinders von weichem Eisen.— J. reine u. angew. Math. Crell. Berlin, 1854, Bd 48, S. 348—376.

То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 193—223. См. № 61.

12. Über die Leitungsfähigkeit für Elektrizität von Kalium, Natrium, Lithium, Magnesium, etc.— Ann. Phys. u Chem. Poggendorff. Leipzig, 1857, Bd 100, S. 178—193.

13. Über die Bewegung der Elektrizität in Drähten.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1857, Bd 100, S. 193—217, 251—252.

То же.— Ges Abhandl., 1882. S. 131—154. См. № 61.

То же, на англ. яз. под загл.: On the notion of electricity in wires.— London, Edinburgh a. Dublin Philos. Mag. a. J. Sci., London, 1857, v. 13, p. 393—412.

* Библиография составлена Ю. Х. Копилевич.

То же, на фр. яз. сокращ. (со след. статьей, № 14) под загл.: Du mouvement de l'électricité dans les conducteurs — Ann. chim. et phys. Paris, 1859, t. 57, p. 238—256.
14. Über die Bewegung der Elektrizität in Leitern.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1857. Bd 102, S. 529—544.
То же.— Ges Abhandl., 1882, S. 154—168. См. № 61.
То же, на фр. яз. сокращ., вместе с предыдущей статьей, см. № 13.
15. Über das Sonnenspectrum.—Verhandl. Naturhist.-Med. Vereins zu Heidelborg, 1857—1859. S. 251—255.
16. Über einen Satz der mechanischen Wärmentheorie und einige Anwendungen desselben.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1858, Bd 103, S. 177—206.
То же.— Abhandlungen über mechanische Wärmentheorie, 1898, S. 31. См. № 72.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 454—482. См. № 61.
17. Bemerkung über die Spannung des Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkt nahe sind.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1858, Bd 103, S. 206—109.
То же.— Ges Abhandl., 1882, S. 482—485. См. № 61.
То же.— Abhandl. über mechanische Wärmentheorie, 1898, S. 32—35. См. № 72.
18. Über die thermoëlektrische Spannungsreihe.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1858, 103, S. 412—428.
19. Über die Spannung des Dampfes von Mischungen aus Wasser und Schwefelsäure.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1858, Bd 104, S. 612—622.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 485—494. См. № 61.
То же.— Abhandlungen über mechanische Wärmentheorie, 1898, S. 3—45. См. № 72.
20. Über die Frauenhofer'schen Linien.— Monatsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1859, S. 662—665.
То же.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1860, Bd 109, S. 148—150.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 564—566. См. № 61.
То же.— Abhandlungen über Emission and Absorption, 1898, S. 3—5. См. № 72.
То же, сокращ.— J. prakt. Chem. Erdmann. Leipzig, 1860, Bd 80, S. 480—482.
То же, на фр. яз. под загл.: Note sur les raies de Frauenhofer.— Ann. chim. et phys. Paris, 1860, t. 58, p. 254—256.
То же.— J. Pharmacie et Sci. accessoires. Paris, 1860, t. 37, p. 388—389.
То же, на англ. яз. под загл.: On the simultaneous emission and absorption of rays of the same definite refrangibility.— London, Edinburgh a. Dublin Philos. Mag. a. J. Sci. London, 1860, v. 19, p. 195—197.
21. Über den Zusammenhang zwischen Emission und Absorption von Licht und Wärme.— Monatsber K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1859, S. 783—787.
То же.— Ges. Abhandl., 188, S. 566—571. См. № 61.
То же.— Abhandlungen über Emission und Absorption, 1898, S. 6—10, См. № 72.
22. Über das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes.— J. reine u. angew. Math. Crell. Berlin, 1859, Bd 56, S. 285—313.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 285—316. См. № 61.
23. Erwiderung auf die Bemerkungen des Herrn Wällner bezüglich der Spannung des Wasserdampfes von wässerigen Lösungen.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1859, Bd 106, S. 322—325.
24. Über das Verhältniss der Querkontraktion zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1859, Bd 108, S. 369—392.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 316—339. См. № 61.
То же, на англ яз под загл.: On the relation of the lateral contraction to the longitudinal expansion in rods of spring steel.— London, Edinburgh. a. Dublin Philos. Mag. a. J. Sci. London, 1862, v. 23, p. 28—47.
То же, сокращ. на фр. яз. под загл.: Mémoire sur le rapport de l'allongement à la contraction transversale dans les barreaux d'acier trempé.— Ann. chim. et phys. Paris, 1860, t. 59. p. 498—505.
25. Über den Winkel der optischen Axen des Aragonits fur die verschiedenen Frauenhofer'schen Linien.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1859, Bd 108, S. 567—575.
То же.— Ges. Abhanl., 1882, S. 557—564. См. № 61.
То же, сокращ. на фр. яз. под загл.: Note sur la mesure des angles des axes optiques de l'arragonite relatifs aux diverses raies de Frauenhofer.— Ann. chim. et phys. Paris, 1860, t. 59, p. 488—491.
26. Über einen neuen Satz der Wärmenlehre.— Verhandl. Naturhist.-Med. Vereins Heidelberg, 1859—1860, S. 16—23.
То же.— Polytechn. J. J. G. Dingler u. E. M. Dingler. Stuttkart, 1860, Bd 157, S. 29—36.
То же, на англ. яз. под загл.: On a new proposition in the theory of heat.— London, Edinburgh a. Dublin Philos. Mag. a. J. Sci. London, 1861, v. 21, p. 241—247.
27. (Совместно с R. W. B u n s e n). Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1860, Bd 110, S. 160—189; 1861, Bd 113, S. 337—425.
То же.— J. prakt. Chem. Erdmann Leipzig, 1860, Bd 80, S. 449—477.
То же.— Ann. Chem. u. Pharmazie Liebig, Wöhler u. Kopp, 1861, Bd 118, S. 349—361.

То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 598—625. См. № 61.
То же.— Ostwalds Klassiker der exacten Wissenschaften. Leipzig, 1895. № 72, Herausg. v. W. Ostwald, 74 S. Ann. chim. et phys. Paris, 1861. t. 62. p. 452—486; 1862, t. 64, 257—311.
То же, на англ. яз. под загл.: On chemical analysis by spectrum observations.— Quart. J. Chem. Soc. London, 1861, v. 13, p. 270—288.
То же.— London, Edinburgh a. Dublin Philos. Mag. a. J. Sci. London, 1861, v. 22, p. 329—349, 398—510.
28. Auszug aus einem Schreiben an Erdmann (Über die Frauenhofer'schen Linien).— J. prakt Chem. Erdmann. Leipzig, 1860, Bd 80, S. 483—486.
То же., на англ яз. под загл.: On the chemical analysis of the solar atmosphere.— Chem. News or J. Pract. Chem. London, 1861, v. 3, p. 115—116
29. Über das Verhältniss zwischen dem Emissionsvermögen und dem Absorptionsvermögen der Körper für Wärme und Licht.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1860, Bd 109, S 275—301
То же.— Ges Abhandl., 1862, S. 571—598. См. № 61.
То же.— Abhandlungen über Emission und Absorption, 1898, S. 1—36. См. № 72.
То же, на фр. яз. под загл.: Note sur le rapport entre le pouvoir émissif et le pouvoir absorbant des corps pour la chaleur et la lumière.— Ann. chim. et phys. Paris, 1860. t. 59, p 124—128; 1861. t. 62, p 160—192.
30. Untersuchungen über das Sonnenspektrum und die Spektren der chemischen Elemente.— Abhandl. Kgl. Akad. Wiss. Berlin, 1861 (Phys.), S. 63—95; 1862 (Phys.), S. 227—240.
То же, отдельным изданием [вместе с № 29]— Berlin, 1862.
То же, на фр. яз. под загл.: Recherches sur le spectre solare et sur les spectres des corps simples.— Ann. chim. et phys. Paris, 1863, t. 68, p. 1—45.
То же. на итал. яз. под загл.: Sullo spettro solare, e sugli spettri degli elementi chimici.— Nuovo cimento. Pisa, 1862, t. 16. p. 199—232.
31. Über die Verteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln.— J. reine u. angew. Math. Crell. Berlin, 1861, Bd 59. S. 89—110.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 78—100. см. № 61.
32. Letter on the chemical analysis of the solar atmosphere.— London, Edinburgh a. Dublin Philos. Mag. a. J. Sci. London, 1861, v. 21, p. 185—188.
33. (Совместно с R. W. Bunsen). Die Spectren der Alkalien und alkalischen Erden.— Z. analyt. Chem. Fresenius, Wiesbaden, 1862, Bd 1, S. 1—2.
34. (Совместно с R. W. Bunsen). Kleiner Spectralapparat zum Gebrauch in Laboratorien.— Z. analyt. Chem. Fresenius. Wiesbaden, 1862, Bd 1, S. 139—140.
35. Sur le principe de l'égalité des pouvoires émissifs et absorbants.— Ann. chim. et phys. Paris, 1863, t. 68, p. 184—186.
36. On standards of electrical resistance.— Electrician. London, 1863, v. 4, p. 51.
37. Zur Geschichte der Spectralanalyse und der Analyse der Sonnenatmosphäre.— Ann Phys. u. Chem. Poggendorf. Leipzig, 1863, Bd 118, S. 94—111.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 625—641. См. № 61.
То же, на англ. яз. под загл.: Contributions towards the history of spectrum analysis and of the analysis of the solar atmosphere.— London, Edinburgh a. Dublin Philos. Mag. a. J. Sci. London, 1863, v. 25, p. 250—262.
38. Recherches sur le spectre solaire et sur les spectres des corps simples.— Ann. chim. et phys. Paris, 1864, v. 1, p. 396—411.
39. Zur Theorie der Entladung einer Leydener Flasche.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1864, Bd 121, S. 551—566.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 168—182. См. № 61.
То же, на фр. яз. под загл.: Sur la théorie de la décharge d'une bouteille de Leyde.— Arch. Sci. phys. et natur Genève, 1864, t. 21, p. 370—381.
40. Über das Ziel der Naturwissenschaften. Akad. Vortrag, 1865.
41. Sur les taches solaires.— C. r. Acad. Sci. Paris, 1867, t. 64, p. 396—400; 1867, v. 65, p. 644—646, 1046
42. [Schreiben gegen Faye's Einwürfe gegen die neuere Ansicht über Entstehung der Sonnenflecke].— Astron. Nachrichten. Kiel, 1867, Bd 69, S. 16—22.
43. Über den Einfluß der Wärmenleitung in einem Gase auf die Schallbewegung.— Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1868, Bd 13, S. 177—193.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 540—556. См. № 61.
То же, сокращ. на фр. яз. под загл.: Influence de la conductibilité des gaz pour la chaleur sur la vitesse du son.— Ann. chim. et phys. Paris, 1868, v. 15, p. 491—492.
44. Über die Kräfte, welche zwei unendlich dünne, starre Ringe in einer Flüssigkeit scheinbar auf einander ausüben können.— Monatsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1869, S. 881—887.
То же.— J. reine u. angew. Math. Crell. Berlin, 1870, Bd 71, S. 263—273.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 404—416. См. № 61.
45. Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen.— J. reine u. angew. Math. Crell. Berlin, 1869, Bd 70, S. 289—298.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 416—441. См. № 61.

46. Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit.— J. reine u. angew. Math. Crell. Berlin, 1870, Br 71, S. 237—262.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 376—403. См. № 61.
47. Zur Theorie des in einem Eisenkörper induzierten Magnetismus. (1870).—Ann. Phys. u. Chem. Poggendorff. Leipzig, 1871, Ergänzunsband 5, S. 1—15.
То же.— Ges. Abhandl., 1882. S. 223—237. См № 61.
48. Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik. Leipzig, 1874, Zweite Aufl. Leipzig, 1877, 466 S.
49. Über die stationären elektrischen Strömungen in einer gekrümmten leitenden Fläche.— Monatsber. K. Press. Akad. Wiss., Berlin, 1875, S 487—497.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 56—66. См. № 61.
50. Über die Reflexion und Brechung des Lichtes an der Grenze krystallinischer Mittel.— Abhandl. K. Akad. Wiss. Berlin, 1876, Phys. Abt. 2, S. 57—84.
51. Zur Theorie des Kondensators.— Monatsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1877, S. 144—162.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 101—118. См. № 61.
52. Zur Theorie der Bewegung der Elektrizität in unterseeischen oder unterirdischen Telegraphendrähten.— Monatsber. K. Preuss. Acad. Wiss. Berlin, 1877, S. 598—611.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 182—193. См. № 61.
53. Über stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit.— Monatsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1879, S. 395—409.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 428—442. См. № 61.
54. Über die Transwersalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt.— Monatsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin. 1879, S. 815—828.
То же.— Ann. Phys. u. Chem. Wiedemann. Leipzig, 1880, Bd. 11, S. 501—512.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 339—351. См. № 61.
55. Über die Messung elektrischer Leitungsfähigkeiten.— Monatsber. K. Preuss. Akad. Wiss, Berlin, 1880, S. 601—613.
То же.— Ann. Phys. u. Chem. Wiedemann. Leipzig, 1880, Bd 11, S. 801—811.
То же.— Ges Abhandl., 1882, S. 66—77. См № 61.
56. (Совместно с G. Hansemann). Über die Leitungsfähigkeit des Eisens für die Wärme.— Ann. Phys. u. Chem. Wiedemann. Leipzig, 1880, Bd 9, S. 1—47.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 495—539. См. № 61.
57. (Совместно с G. Hansemann). Versuche über stehende Schwingungen des Wassers.— Ann. Phys. u. Chem. Wiedemann. Leipzig, 1880, Bd 10, S. 337—347.
То же.— Ges. Abhandl., 1882, S. 442—454. См. № 61.
58. (Совместно с G. Hansemann). Über die Leitungsfähigkeiten der Metalle für Wärme und Elektrizität.— Ann. Phys. u. Chem. Wiedemann. Leipzig, 1881, Bd 13, S. 406—422.
То же.— Ges. Abhandl., 1891, S. 1—17. См. № 70.
59. Bemerkungen zu dem Aufsatze des Herrn Voigt «Theorie des leuchtenden Punktes» (1880).— J. reine u. angew. Math. Crell. Berlin, 1881, Bd 90, S. 34—38.
То же.— Ges. Abhandl., 1891, S. 17—22. См. № 70.
60. Zur Theorie der Lichtssrahlen.— Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1882, S. 641—669.
То же.— Ann. Phys. u. Chem. Wiedemann. Leipzig, 1883, Bd 18, S. 663—695.
То же.— Ges. Abhandl., 1891, S. 22—54. См. № 70.
То же, на фр. яз. под загл.: Sule changement sur la théorie des rayons lumineux.— Ann. sci. École Normale Supérieure. Paris, 1886, t. 3, p. 303—342.
61. Gesammelte Abhandlungen. Leipzig, 1882, 641 S.
62. Über die elektrischen Strömungen in einem Kreiszylinder.— Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1883, S. 519—524.
То же.— Ges. Abhandl., 1891, S. 54—59. См. № 70.
63. Zur Theorie der Diffusion von Gasen durch eine poröse Wand.— Amn. Phys. u. Chem. Wiedemann. Leipzig, 1884, Bd 21, S. 563—575.
То же.— Ges. Abhandl., 1891, S. 78—91. См. № 70.
64. Über die Formänderung, die ein fester elastischer Körper erfährt, wenn er magnetisch oder dielëktrisch polarisiert wird.— Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1884, S. 137—156.
То же.— Ann. Phys. u. Chem. Wiedemann. Leipzig, 1885, Bd 24, S. 52—74.
То же.— Ges. Abhandl., 1891, S. 91—113. См. № 70.
65. Über einige Anwendungen der Theorie der Formänderung, welche ein Körper erfährs, wenn er magnetisch oder dielektrisch polarisiert wird.— Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1884, S. 1155—1170.
То же.— Ann. Phys. u. Chem. Wiedemann Leipzig, 1885, Bd 25, S. 601—616.
То же.— Ges. Abhandl., 1891, S. 114—131. См. № 70.
66. Zur Theorie der Gleichgewichtsverteilung der Elektrizität auf zwei leitenden Kugeln.— Sitzungsber. K. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1885, S. 1007—1013.
То же.— Ann. Phys. u. Chem. Wiedemann. Leipzig, 1886, Bd 27, D. 673.
То же.— Ges. Abhandl., 1891, S. 131—137. См. № 70.
67. Beweis der Existenz des Potentials das an der Grenze des Betrachteten Raumes gegebene Werte hat für den Fall daß diese Grenze eine überall convexe Fläche ist.— Acta math. Stockholm, 1890—1891, t. 14, p. 179—183.

68. Vorlesungen über mathematische Physik. Zweiter Band. Mathematische Optik. Herausgeg. v. K. Hensel. Leipzig, 1891, 272 S.
69. Vorlesungen über electricizät und Magnetismus. Herausgeg. v. M. Planck. Leipzig, 1891, 228 S.
70. Gesammelte Abhandlungen. Nachtrag. Herausgeg. v. L. Boltzmann. Leipzig, 1891.
71. Vorlesungen über die Theorie der Wärme. Herausgeg. v. M. Planck. Leipzig, 1894, 210 S.
72. Abhandlungen über Emission und Absorption. Herausgeg. v. M. Planck.— Ostwalds Klassiker d. exakten Wissensch. № 100. Leipzig, 1898, 41 S.
73. Abhandlungen über mechanische Wärmenlehre. Herausgeg. v. M. Plack.— Ostwalds Klassiker d. exakten Wissensch., № 101. Leipzig, 1898, 48 S.

О ЖИЗНИ И ДЕЯТЕЛЬНОСТИ Г. КИРХГОФА

1. А. Г. Столетов. Г. Р. Кирхгоф.— Природа, СПб., 1873, № 2, с. 174—199.
То же, отд. изд. М., 1873.
То же, в кн.: А. Г. Столетов. Собрание сочинений, т. 2. М.— Л., 1941, с. 31—52.
2. Б. Меншуткин. Краткий очерк истории развития спектрального анализа. Одесса, 1895, с 17—20.
3. А. В. Нетушил и Г. Р. Фабрикант. Г. Ф. Кирхгоф.— Электричество, 1957, № 10, с. 71—73.
4. Б. И. Степанов. О законе Кирхгофа.— Изв. АН БССР. Минск, 1954, № 4, с. 125—129.
5. Т. Н. Горнштейн. Густав Роберт Кирхгоф и его исследования по тепловому излучению.— Труды Института истории естествознания и техники. М., 1960, т. 34, с. 110—156.
6. R. Helmholtz. Gustav Robert Kirchhoff.— Deutsche Rundschau. Berlin, 188, Bd. 54, S. 232—245.
То же на англ. яз.— Annual Report of the Board of regents of the Smithsonian Institution. Washington, 1889, S. 527--540.
7. L. Boltzmann. G. R. Kirchhoff, Festrede des 301 Gründungstages des Karl-Franzenes Universität zu Graz, geh. 15.XII 1887.
То же, в кн.: L. Boltzmann. Populäre Schriften. Leipzig, 1905.
8. W. Voigt. Zum Gedöchniss von G. Kirchhoff.— Abhandl. K. Ges. Wiss. Göttingen, 1889, Bd. 35 (Math.), S. 1—10.
9. A. Cotton. The present status of Kirchhoff's law. The Astrophys. J. Chicago, 1889, v. 32 p.
10. E. Warburg. Zur Erinnerung an Gustav Kirchhoff.— Naturwissenschaften. Berlin, 1925, H. 11, S. 205—212.
11. (Некролог) — Ber. Dtsch. chem. Ges. Berlin, 1887, Bd. 20, S. 2771—2777.
12. (Некролог) — Lumiere electrique. Paris, 1887, t. 26, p. 194—195.
13. (Некролог) — Nature. London, 1887, v. 36, p. 606—607.
14. (Некролог) — Proc. Amer. Acad. Arts a. Sci. Boston, 1888, v. 23, p. 370—375.
15. (Некролог) — Sitzungsber. Nath.— Phys. Kl. K. B. Akad. Wiss. München, 1889, Bd. 18, S. 181—186.
16. (Некролог) — Proc. Roy. Soc. London, 1890, v. 46, p. VI—IX.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЯ

Густав Кирхгоф

Механика.
Лекции по математической физике

Утверждено к печати
Институтом истории естествознания
и техники
Академии наук СССР

Редакторы Издательства *Г. Г. Гуськов и В. М. Медер*
Художник *С. В. Крылов*
Технический редактор *Т. В. Полякова*

РИСО АН СССР № 5-14В. Сдано в набор 6/VII 1962 г.
Подп. в печать 25/X—1962 г.
Формат 70×108¹/₁₆ Печ. л. 25,25 + 1 вкл. 34,75 усл. печ. л.
Уч.-издат. л. 24,4 (24,3+1 вкл.) Тираж 5300
Изд. № 269. Тип. зак. № 5259.

Цена 1 р. 91 к.

Издательство Академии наук СССР.
Москва, Б-62, Подсосенский пер.,

2-я типография Издательства АН СССР,
Москва, Г-99, Шубинский пер., 10

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
114	13 св.	введем	и введем
127	14 сн.	нуль,	нуль [8],
176	7 сн.	бесконечна.	бесконечна [18].
387	4 св.	Об	Он

Г. Кирхгоф. Механика.