

Дж.Клаудер, Э.Сударшан
ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ

Книга известных американских теоретиков Дж. Клаудера и Э. Сударшана представляет собой современный курс теоретической статистической оптики, в котором строго и вместе с тем достаточно ясно рассмотрены практически все основные вопросы этого нового актуального раздела физики.

Книга носит характер учебника — изложению квантовой теории предпослано рассмотрение классической статистической оптики, что облегчает знакомство с предметом. Вместе с тем она является первой монографией по этому вопросу и содержит ряд новых оригинальных результатов, публикуемых впервые.

Вопросы, рассматриваемые в книге, имеют большое значение для разработки теории оптических явлений, изучения процессов в лазерах, процессов регистрации излучения, рассеяния света и ряда других задач.

Книга рассчитана на физиков, научных работников и инженеров, специализирующихся в области квантовой оптики и радиофизики. Ее можно рекомендовать также как учебное пособие для аспирантов и студентов-старшекурсников соответствующих специальностей.

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Литература	13
Предисловие	14
Глава 1. Частично когерентный свет	17
§ 1. Введение	17
§ 2. Описание аналитического сигнала	21
§ 3. Статистика частично когерентного света	25
§ 4. Временные и пространственные свойства функции взаимной когерентности в процессе распространения сигнала	30
А. Теорема ван Циттерта — Цернике (34)	
Глава 2. Распределение фотоэлектрических отсчетов	37
§ 1. Постоянная интенсивность	37
А. Распределение Пуассона (33)	
§ 2. Случайные интенсивности	40
А. Статистика фотоотсчетов для малых временных интервалов (43)	
§ 3. Нахождение распределения интенсивности из распределения отсчетов	46
А. Независимые вклады (50)	
Глава 3. Полуклассическая теория фотоэлектрических отсчетов	55
§ 1. Случайные волновые поля	55
§ 2. Стохастические процессы	57
§ 3. Применения к частичной когерентности	61
А. Одиночные счетчики (64). Б. Несколько счетчиков (68). В. Полоса пропускания, размер счетчика и значение сглаживающих функций (74).	

§ 4. Заключение	76
Глава 4. Статистика поля	78
§ 1. Постановка динамической задачи	78
А. Причины появления статистики (79)	
§ 2. Преобразование флуктуационных уравнений	83
А. Усредненные уравнения для моментов (83). Б. Усредненное уравнение для характеристического функционала (85)	
§ 3. Марковские и немарковские процессы	88
А. Определения и различия (88). Б. Соотношения для марковских процессов (91)	
§ 4. Заключительные замечания	95
Глава 5. Статистические состояния в квантовой теории	97
§ 1. Введение	97
§ 1. Квантовый формализм и обозначения	98
А. Гильбертово пространство (98). Б. Линейные операторы (100). В. Статистические состояния (105).	
§ 3. Примеры статистических состояний в квантовой теории	109
А. Состояния поляризации монохроматического светового пучка (109). Б. Статистические состояния гармонического осциллятора (112). В. Статистические состояния нескольких осцилляторов (118). Г. Статистические состояния для бесконечного числа осцилляторов (121)	
§ 4. Заключение	124
Глава 6. Уравнения движения электромагнитного, поля	128
§ 1. Развитие во времени в квантовой теории	128
§ 2. Операторные уравнения для электромагнитного поля. Предварительные замечания	132
А. Общий подход к уравнениям поля (133)	
§ 3. Операторные уравнения для электромагнитного поля. Нерелятивистский анализ	134
А. Формулировка в конфигурационном пространстве (134). Б. Формулировка в импульсном пространстве (136). В. Операторы рождения и уничтожения (142)	
§ 4. Характерные свойства временной эволюции	144
А. Описание в конфигурационном пространстве (149)	
§ 5. Характерные свойства пространственной эволюции	151
Глава 7. Представление электромагнитного поля по когерентным состояниям	156
§ 1. Когерентные состояния. Основные свойства	156
А. Собственные состояния смещенного и сдвинутого осцилляторов (157). Б. Волновые пакеты с минимальной неопределенностью (161). В. Собственные векторы оператора уничтожения (162).	
§ 2. Фундаментальные свойства когерентных состояний для одной степени	164

свободы	
А. Предварительные замечания (164). Б. Непрерывное представление, основанное на когерентных состояниях (169). В. Примеры и специальные свойства представителей векторов и операторов по когерентным состояниям (177). Г. Связь с пространствами Сегала — Баргманна (190)	
§ 3. Когерентные состояния для нескольких степеней свободы	192
§ 4. Когерентные состояния для бесконечного числа степеней свободы. Приложение к электромагнитному полю	195
А. Общие свойства (195). Б. Приложение к электромагнитному полю (203)	
Глава 8. Квантовая теория оптических корреляционных явлений	212
§ 1. Квантовые корреляционные функции	212
А. Идеальные детекторы и скорости счета квантов (212). Б. Разложение по модам (219). В. Производящие функции (221)	
§ 2. Полная и частичная когерентность	223
А. Определения и полная когерентность (223). Б. Частичная когерентность (228).	
§ 3. Распределения фотоотсчетов	241
А. Скорости и отсчеты для одной нормальной моды (241). Б. Распределения отсчетов для поля излучения (250).	
§ 4. Оптическая теорема эквивалентности	255
А. "Диагональное" представление для одной степени свободы (255). Б. "Диагональное" представление для поля излучения (280)	
Глава 9. Конкретные состояния поля излучения	289
§ 1. Хаотические и тепловые состояния	289
А. Квантовая центральная предельная теорема (289). Б. Обобщение на случай многих степеней свободы (297). В. Хаотические и тепловые поля излучения (299). Г. Распределение фотоотсчетов для хаотических полей (309)	
§ 2. Феноменологические модели лазера	320
А. Идеальная модель (321). Б. Модель колебания с диффундирующей фазой (322). В. Модель, оперирующая с суперпозицией сигнала и шума (327)	
§ 3. Описание лазера с помощью модели связанных систем	332
А. Модель лазера (333)	
Глава 10. Интерферометрия интенсивности в квантовой оптике	344
§ 1. Интерферометрия интенсивности. Корреляция низшего порядка	344
А. Корреляция отсчетов (314). Б. Пространственная корреляция интенсивности (350)	
§ 2. Интерферометрия интенсивности в случае независимых источников	353
§ 3. Заключение	359

Библиография	362
Дополнение	332
I. Теория когерентности (383). II. Статистика фотоотсчетов; интерферометрия интенсивности (388). III. Статистические явления в нелинейной оптике (395). IV. Квантовая теория оптических полей; динамика и статистика процессов излучения и эволюции поля (404). V. Прием и гетеродинирование оптических сигналов (408). VI. Флуктуации в лазерах (411)	
Предметный указатель	422

Предметный указатель

Аналитический сигнал 21—24, 30, 61, 147, 206, 288	Даламбера оператор 77
Ансамбль световых полей 20	Детектор распределенный 216, 251, 253
— стационарный 25, 76	— тензор адмитанса 354
— тепловой 305	— точечный 213, 250
Бейкера — Хаусдорфа уравнение 162	— — идеальный 212
Белый шум 91	Диагональное представление по когерентным состояниям 247, 255
Броуновское движение 90	Диффузионное приближение 95, 340
Ван Циттерта — Цернике теорема 34	Закон сохранения тока 132
Видимость 18	Излучение квазимонохроматическое 27
— индекс 240	— лазера 20, 320
Волновое уравнение классическое 78	— поляризованное 21
Вынуждающая сила 88	— тепловое 20, 289
Гамильтона оператор 128	Источники тепловые 17
Гармонический осциллятор сдвинутый 160	— — искусственные 45, 350
— — смещенный 157	Когерентность, время 66
Гельмгольца уравнение 151	— высшего порядка 232
Гильберта — Шмидта норма 266	— квантовая теория 24, 212
— — оператор 266	— определение 224
Гильбертово пространство, векторы 98	— первого порядка 228
— — — норма 98	— полная 223—225
— — полный ортонормированный базис 99	— — критерии 225, 226
— — функциональное представление 169	— свойство 224
Грина теорема 32, 152	— степень 28, 237
— функция 32, 152	— частичная 20, 21, 37, 223
Гюйгенса принцип 34, 35	— — интерференционный закон 26
	— — классическая теория 21
	— — модель 19

- — скалярная теория 21
- Когерентные состояния для
 - бесконечного числа степеней свободы 195
 - — — нескольких степеней свободы 192
 - — непрерывность и аналитичность 107
- Коммутационные соотношения канонические 140
- Колмогорова — Чэпмена уравнение 92
- Корреляционный объем 346, 351
- Лазер, излучение 20, 320
 - модели 320—332
- Лапласа оператор 31
- Максвелла уравнение 132
- Манделя формула 41
- Марковские процессы 88
- Матрица плотности, диагональное представление 249, 251
 - — гильбертова пространства 106, 107
- Норма Гильберта — Шмидта 266
 - оператора 100
 - следовая 105, 264
- Оператор Гамильтона 128
 - Гильберта — Шмидта 266
 - Даламбера 77
 - дифференциальный 184
 - единичный 101
 - разложение 101, 169, 200
 - Лапласа 31
 - наблюдаемой величины 100
 - норма 100
 - нормально упорядоченный 182
 - ограниченный 100
 - рождения 113, 142
 - с конечным следом 103
 - — — каноническое разложение 104
 - следовая норма 105
 - сопряженный 102
 - унитарный 102
 - уничтожения 113, 142
 - упорядочивающий во времени 131
 - числа частиц 113, 118
- Отсчеты, группировка 43, 67
 - распределение 43
 - — для хаотических полей 309
 - — квантовомеханический вывод 241
 - — полуклассический вывод 38, 41, 55
 - — производящая функция 41
 - — случай тепловых полей 44
 - — формула Манделя 41
 - — характеристическая функция 40, 42
- Поле излучения, диагональное представление 251, 280
 - — полностью когерентное состояние 223
 - — распределение отсчетов 250
 - — свободное
 - — — представитель основного состояния 208
 - — стационарные состояния 304
 - — хаотическое 20, 290—320, 345
- Поляризация круговая 21, 110
 - линейная 21, 110
 - нулевая 110
 - степень 52, 112
 - частичная 21
 - эллиптическая 21
- Полярное разложение 104
- Представление Гейзенберга 130 — Шредингера 129
- Преобразование Гильберта 23
 - Лапласа 41
 - Фурье 22
- Приближение дальнего поля 35, 73
 - «волн вращающейся поляризации» 149, 334

- Пробная функция 61, 259
 Производящая функция для
 распределения отсчетов 41
 — — нормально упорядоченная 221
 Распределение гауссово 58
 — для идеального лазера 322
 — интенсивности 52
 — классическое, в фазовом
 пространстве 181
 — кумулянты 94
 — многомерное 54
 — — нормальное 309
 — — отсчетов 39, 43
 — пуассоновское 39, 116, 122
 — — многомерное 122, 206
 — равновесное тепловое 305
 — связанные моменты 93
 — семиинварианты 93
 — с неопределенной фазой 76
 — стационарное 76
 — тепловое 54, 119
 — умеренное 257 Резервуар 81, 334
 Скорость счета квантов 212
 Случайное блуждание 90
 Случайные функции 59
 Случайный процесс 20, 62
 Состояние, равновесное тепловое 307
 — смешанное 105, 106
 — чистое 107
 Стокса параметры 111
 Теория возмущения 38, 212
 Усеченная последовательность 199
 Условие минимальной
 неопределенности 161
 Фаза 19 факториальные моменты 42
 Флуктуационное (стохастическое)
 уравнение 80, 95, 333
 Фоккера — Планка уравнение 95
 — — — — обобщенное 333
 Фотоотсчеты, квантовая теория
 241—255
 — полуклассическая теория 55—
 76
 Функционал характеристический
 60—64, 85
 Функция автокорреляционная 65
 — вероятности 57
 — Грина 32, 152
 — квантовая корреляционная 212
 — пробная 59, 76, 259
 — производящая 41
 — характеристическая 34
 δ -функция Дирака 42, 47
 Хэнбери Брауна — Твисса
 эксперимент 71
 Центральная предельная теорема
 классическая 289
 — — — квантовая 289—291
 Шварца неравенство 26, 98
 Шредингера уравнение 128
 Электромагнитное поле, векторы
 поляризации 138
 — — временная эволюция 144
 — — квантовый гамильтониан 141
 — — операторы рождения и
 уничтожения 142, 204
 — — представление по когерентным
 состояниям 203
 — — пространственная эволюция
 151
 Энтропия 305, 306
 Эргодический процесс 20

Предисловие редактора перевода

I

Предлагаемая книга посвящена систематическому изложению современной статистической теории оптических полей, лежащей в основе бурно развивающейся в настоящее время статистической оптики.

Теоретические и экспериментальные исследования по статистической оптике имеют долгую историю. То обстоятельство, что обычные тепловые и газоразрядные источники света являются по существу генераторами случайных полей, было понято достаточно давно; выяснение особенностей протекания таких фундаментальных оптических явлений, как интерференция и дифракция в поле случайно модулированных электромагнитных волн, является предметом так называемой теории когерентности. Ряд важных результатов в этой области был получен в работах Верде, Лауэ, Винера, ван Циттерта, Цернике и др., относящихся к началу и 20-м годам текущего столетия; изложение классической формулировки теории когерентности является стандартным разделом многих учебников по оптике (весьма полное и последовательное изложение содержится в книге Борна и Вольфа [1]).

Другой круг оптических задач, в которых статистические явления играют решающую роль, связан с изучением рассеяния света — явления, многие черты которого получили ясную интерпретацию еще в работах Рэля, ранних работах Мандельштама, Бриллюэна, Рамана и др. (см., например, [2—4]).

Важным разделом статистической оптики, тесно прилегающим к изучению статистических явлений в источ-

никах света, является теория формы и ширины спектральных линий (см., например, монографию [5] и обзор [6]).

Следует отметить, однако, что в течение длительного времени статистическое описание, использовавшееся в перечисленных разделах оптики, не выходило, как правило, за пределы простой корреляционно-спектральной теории для стационарных гауссовых процессов. Последнее в значительной мере было связано с относительно скудными экспериментальными средствами, которыми располагала оптика; источники света были по существу генераторами стационарного гауссового шума, и в подавляющем большинстве случаев речь шла только об измерении спектральных плотностей излучения.

Сильное влияние на развитие статистической оптики оказали поэтому выполненные в 1956—1957 гг. опыты Хэнбери Брауна и Твисса [7], в которых впервые были измерены корреляционные функции интенсивности. Эти эксперименты по существу положили начало исследованию корреляций высших порядков для оптических полей; немаловажным оказалось и то обстоятельство, что, помимо принципиального значения для оптики, эти измерения позволяют усовершенствовать звездные интерферометры. Опыты Хэнбери Брауна и Твисса существенно стимулировали также интерес к вопросу о связи между статистикой фотоэмиссии и статистикой света, вызывающего фотоэмиссию, — области статистической оптики, которую принято сейчас называть статистикой фотоотсчетов.

Бурный период интенсивного и экстенсивного развития статистической оптики переживает в течение последнего десятилетия: революция в оптике, связанная с созданием лазеров, коснулась буквально всех ее разделов. Создание лазеров повысило прежде всего интерес к изучению статистических явлений в источниках света. Теперь оптика получила в свое распоряжение широкий ассортимент источников с весьма разнообразными, в том числе не гауссовыми, статистическими характеристиками.

Важной задачей современной статистической оптики является изучение флуктуационных явлений в лазерах

различных типов и разработка методов уменьшения амплитудных и фазовых флуктуаций лазерного излучения. Существенно подчеркнуть, что сказанное относится не только к сравнительно маломощным лазерам непрерывного действия, но также и к мощным и в особенности сверхмощным импульсным лазерам. Работы самого последнего времени показали, что статистические явления играют чрезвычайно важную роль в работе многомодовых твердотельных лазеров; в частности, наиболее адекватным описанием излучения оптических генераторов мощных сверхкоротких импульсов является статистическое описание.

Разумеется, проблемы, связанные с флуктуациями в лазерах, во многом аналогичны соответствующим проблемам, связанным с флуктуациями в автоколебательных системах радиодиапазона (ср. [9, 10]); имеются, однако, и существенные особенности, обусловленные квантовым характером флуктуаций, распределенными взаимодействиями, многомодовостью и т. п. Новый класс статистических задач в этой области связан с изучением оптических генераторов со случайной обратной связью, генераторов, принцип действия которых ближе к принципу действия ядерного реактора, нежели генератора радиодиапазона [11].

Работы по оптической связи и локации с помощью лазеров стимулировали весьма детальные исследования чувствительности оптических приемников (обзор современного состояния вопроса см. в [8]) и исследования по распространению световых пучков в статистически неоднородных средах (в частности, в атмосфере и в воде). Чрезвычайно интересные перспективы открылись и в изучении молекулярного рассеяния света; возможность выйти за пределы регистрации только спектров рассеянного излучения и использовать, в частности, статистику фотоотсчетов позволяет получить новую информацию о рассеивающей среде и процессе рассеяния.

Новым разделом статистической оптики, возникновение которого целиком обязано лазерам, является статистическая нелинейная оптика [12, 13]. Здесь можно указать по меньшей мере два круга статистических задач, являющихся предметом многочисленных теоретических

и экспериментальных работ, выполненных в течение последних 4—5 лет. Прежде всего это задачи, связанные со «статистикой излучения», т. е. с изучением влияния пространственной и временной когерентности излучения на протекание нелинейных оптических эффектов. Другой круг задач связан с изучением нелинейных эффектов в статистически неоднородных средах (нелинейное молекулярное рассеяние, генерация оптических гармоник и параметрические явления в неоднородных кристаллах, нелинейная дифракция и т. п.) и с влиянием квантовых шумов на протекание нелинейных эффектов.

Наконец, методы нелинейной оптики позволяют существенно расширить возможности интерферометрии интенсивности, широко используемой в последнее время для изучения тонкой временной структуры излучения мощных твердотельных лазеров.

Приведенный выше краткий перечень основных направлений современной статистической оптики показывает, таким образом, что статистические методы, статистические задачи проникли почти во все важнейшие разделы физической и прикладной оптики — ситуация, во многом сходная с процессом, происходившим в течение двух последних десятилетий в радиофизике. Резкое расширение объема экспериментальных исследований, возникновение широкого класса новых задач стимулировали исследования и по общей статистической теории оптических полей. Последнее десятилетие принесло ряд фундаментальных результатов, относящихся прежде всего к ее квантовой формулировке. Правда, и здесь многое было сделано еще в 30-х годах (принципиальное значение имеют, в частности, ранние работы Шредингера, в которых были введены так называемые когерентные состояния); кроме того, уже достаточно давно имелось ясное понимание того факта, что квантовая теория оптических полей является частью квантовой электродинамики. Тем не менее именно в работах, выполненных в 1961—1966 гг., была разработана эффективная квантовая методика описания оптических полей, что позволило придать квантовой оптике логическую завершенность и выявить ее связь с теорией, использующей классическое описание поля.

Разумеется, стремление к завершенности теоретической картины не является единственным аргументом в пользу квантования поля в оптической теории. Необходимость в последовательной квантовой теории возникает при рассмотрении флуктуаций в лазерах, параметрических усилителях и генераторах оптического диапазона, а также при исследовании статистики фотоотсчетов и т. п.

Квантовая теория оптических полей развивалась в последние годы Глаубером (который, в частности, ввел так называемые квантовые корреляционные функции), Манделем, Гордоном, М. Лэксом и др. Значительный вклад внесли здесь и авторы этой книги — руководитель теоретического отдела исследовательских лабораторий фирмы «Белл телефон» (США) Дж. Клаудер и профессор Сиракузского университета (США) Э. Сударшан. Клаудеру, в частности, принадлежит серия работ по использованию теории когерентных состояний в квантовой оптике; Сударшаном выполнены работы, позволяющие установить связь между квантовыми и классическими корреляционными функциями.

II

В предлагаемой книге в той или иной мере затронуты все основные вопросы современной статистической оптики. Однако в первую очередь — это книга по теоретической статистической оптике, причем центральное место в ней занимает квантовая формулировка статистических характеристик оптических полей (представление поля по когерентным состояниям, квантовые корреляционные функции) и квантовая теория фотоэлектрических отсчетов; именно в этих областях лежат и собственные научные интересы авторов.

Характерным для книги в целом является большое внимание авторов к математическим вопросам и использование весьма современного аппарата; следует отметить, что в оригинале книга вышла в серии «Монографии по математической физике», выпускаемой издательством «Бенджамин».

Вместе с тем изложение в книге построено достаточно систематично; в некоторых случаях изложению специальных вопросов предпосланы разделы, носящие учебный характер.

Содержание книги условно можно разбить на три части.

Первая часть, включающая гл. 1—4, содержит изложение основ классической статистической теории оптических полей и полуклассической теории фотоотсчетов. Несмотря на сжатость изложения, материал этих глав дает ясное представление о классической теории когерентности и теории фотоотсчетов (в последнем случае авторы наряду с простейшим вариантом теории, оперирующей с распределениями интенсивностей, излагают и теорию, использующую статистику самих полей), а также методах вычисления статистических характеристик полей в различных ситуациях.

Вторую — центральную часть книги — составляют гл. 5—8, посвященные квантовой теории. По существу это курс кинематики квантованного электромагнитного поля. Изложению основного материала (значительная часть которого носит оригинальный характер) авторы предпослали гл. 5, являющуюся вводной и предназначенную для напоминания основных сведений из квантовой механики.

В гл. 7 проводится систематическое изложение одного из центральных вопросов квантовой оптики — теории когерентных состояний. Последовательно рассматривается теория когерентных состояний для одной, двух и бесконечного числа степеней свободы — последний случай соответствует когерентным состояниям поля излучения. В этой главе, как и в следующей, содержится ряд не опубликованных ранее результатов, принадлежащих авторам.

В гл. 8 вводятся квантовые корреляционные функции, играющие по существу центральную роль в рассматриваемой теории; здесь же с их помощью строится квантовая теория фотоотсчетов.

Третья часть (гл. 9 и 10) посвящена приложениям квантовой теории когерентности к конкретным физическим задачам.

Материал гл. 9 выходит за рамки формальной теории, развивавшейся в предыдущих главах; здесь речь идет о специфических статистических свойствах излучения, генерируемого конкретными физическими системами. Обсуждаются некоторые модели тепловых источников и простейшие модели, описывающие статистические свойства лазерного излучения (колебание с диффундирующей фазой, суперпозиция регулярного сигнала и шума, модель одномодового излучения, связанного с ансамблем трехуровневых атомов), и вычисляются соответствующие распределения фотоотчетов. Здесь же кратко реферируются некоторые экспериментальные работы, посвященные изучению статистических свойств лазерного излучения.

Наконец, в короткой гл. 10 дана квантовая формулировка основных принципов интерферометрии интенсивности.

В целом предлагаемая книга является систематическим и современным изложением теоретической статистической оптики; ее можно рекомендовать студентам старших курсов, аспирантам и научным работникам, специализирующимся в области квантовой радиофизики и оптики. Ряд разделов книги, несомненно, представит интерес и для физиков, занимающихся теорией квантованных полей. Следует отметить, правда, что помимо предлагаемой книги к настоящему времени в области статистической оптики появился целый ряд других обобщающих работ. Среди них следует указать переведенные на русский язык обзор Вольфа и Мандела [14], монографию О'Нейла [15], небольшую книжку Франсона и Сланского [16] и курс лекций одного из создателей современной статистической оптики Глаубера [17]. Обстоятельный обзор экспериментальных работ по флуктуациям интенсивности излучения одномодовых и многомодовых лазеров выполнен Армстронгом и Смитом [18]. Ряд обзорных докладов по различным проблемам статистической оптики был представлен на Нью-йоркском симпозиуме по современной оптике (1967 г.) [20]; содержательные курсы лекций по теоретической и экспериментальной статистической оптике были прочитаны в международной летней школе по квантовой оптике в Варенне

(1967 г.) Глаубером, Ареки, Хаусом, Хакеном и др. [21]. Укажем, наконец, книгу Луиселла [19], материал которой во многом связан с теоретическими основами квантовой оптики. Тем не менее книга Клаудера и Сударшана занимает особое место в литературе по статистической оптике.

Эта книга является, пожалуй, единственной в настоящее время *монографией*, где получили достаточное отражение классический и квантовый аспекты теории; обзор Вольфа и Манделя носит скорее справочный характер, книги Франсона и Сланского и О'Нейла имеют дело только с классической теорией, а наиболее близкие по содержанию к книге Клаудера и Сударшана весьма интересные и глубокие лекции Глаубера во многих пунктах носят конспективный характер.

III

При переводе и редактировании книги встретились определенные текстовые и терминологические трудности; в некоторых главах изложение материала представлялось излишне конспективным.

Во всех этих случаях переводчиками и редактором сделаны подстрочные примечания. Переводы терминов, не имеющих общепринятого русского эквивалента, специально поясняются; одновременно дается и английское написание (сказанное относится в особенности к гл. 5, 7 и 8, где речь идет о квантовых характеристических функциях, теории представлений по когерентным состояниям и т. п.).

Книга Клаудера и Сударшана и сравнительно краткий список литературы, составленный авторами, ни в коей мере не претендуют на полноту освещения затронутых в книге вопросов; основная цель книги — изложить идейную сторону статистической оптики. Поэтому нам представлялось нецелесообразным загромождать основной текст ссылками на работы, не учтенные авторами или вышедшими после издания книги в США. Вместо этого к книге приложен список работ по статистической оптике, опубликованных в период с 1966 по первую половину 1969 г. (подробная библиография работ, опублико-

ванных до 1966 г., содержится в обзоре [14]). «Путеводителем» к нему служит краткое послесловие, написанное редактором и переводчиками.

Перевод книги выполнили А. С. Чиркин (гл. 1—5), Б. Я. Зельдович (гл. 6—8) и В. Г. Тункин (гл. 9, 10 и библиография).

С. Ахманов

ЛИТЕРАТУРА

1. Вогн М., Wolf E., Principles of Optics, London, 1965.
2. Волькенштейн М. В., Молекулярная оптика, М., 1951.
3. Фабелинский И. Л., Молекулярное рассеяние света, М., 1965.
4. Сушинский М. М., Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов, М., 1968.
5. Собельман И. И., Введение в теорию атомных спектров, М., 1963.
6. Раутиан С. Г., Собельман И. И., УФН, **90**, 209 (1966).
7. Hanbury Brown R., Twiss R. Q., Nature, **177**, 271 (1956); Proc. Roy. Soc., **A242**, 300 (1957); **A243**, 291 (1957).
8. Росс М., Лазерные приемники, изд-во «Мир», 1969.
9. Рытов С. М., Введение в статистическую радиофизику, М., 1968.
10. Малахов А. Н., Флуктуации в автоколебательных системах, М., 1966.
11. Басов Н. Г., Летохов В. С., УФН, **96**, № 4 (1968).
12. Бломберген Н., Нелинейная оптика, изд-во «Мир», 1966.
13. Ахманов С. А., Чиркин А. С., Изв. ВУЗ, Радиофизика, **13**, № 6 (1970).
14. Вольф Э., Мандель Л., УФН, **87**, № 3, 491 (1965).
15. О'Нейл Э., Введение в статистическую оптику, изд-во «Мир», 1966.
16. Франсон М., Сланский С., Когерентность в оптике, М., 1967.
17. Глаубер Р., Оптическая когерентность и статистика фотонов, в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», изд-во «Мир», 1966.
18. Armstrong J. A., Smith A. W., Progress in Optics, **6**, 213 (1967).
19. Louisell W. H., Radiation and Noise in Quantum Electronics, New York, 1965.
20. Modern Optics (Proc. Symposium, New York, 1967), New York, 1967.
21. Lectures at the International School of Physics «Enrico Fermi», XLII Course Quantum Optics, 1967, Varenna, Italy.

Предисловие

Некоторые достижения прошедшего десятилетия существенно изменили предмет и перспективы дальнейшего развития оптики — науки, история которой насчитывает многие десятилетия. В области эксперимента сюда относятся изобретение таких принципиально новых источников света, как лазеры, появление техники корреляции фотоотсчетов и возникшей на основе этой техники интерферометрии интенсивности. Все это оказало существенное влияние на теорию частичной когерентности и превратило ее в законченную и весьма общую теорию случайных полей. В теоретической области развивалась квантовая теория частичной когерентности, выявились общие моменты и различия классической и квантовой теории. Следует отметить, что, хотя исходные принципы здесь совершенно различны, многие аспекты и формулировки классической и квантовой теорий когерентности оказываются настолько близкими, что может даже возникнуть сомнение в целесообразности изучения обеих теорий.

Настоящая книга по своему духу и по использованному в ней общему подходу во многом перекрывается с циклом лекций, прочитанных Э. Сударшаном осенью 1963 г. в Бернском университете (Швейцария), а также с конспектом этих лекций, составленным автором. После начального периода квантовой формулировки теории когерентности многое было сделано в разработке формальной и технической стороны вопроса. Мы попытались включить в книгу эти более современные результаты настолько полным и логически непротиворечивым образом,

насколько это представляется разумным в настоящее время.

Наша работа предназначена для аспирантов и научных работников, стремящихся понять основы современной квантовой оптики. Для успешного усвоения материала читатель должен располагать знанием классической оптики и квантовой теории в объеме книг Дженкинса и Уайта и Шиффа¹⁾. Наша книга содержит изложение многих вопросов, ставших уже традиционными; при этом в некоторых пунктах наше изложение отличается от общепринятого. Вместе с тем мы полагаем, что многие моменты, затронутые в гл. 7—10, нельзя найти в имеющихся в настоящее время учебниках. Некоторые наши результаты, приводимые в книге, оригинальны и не были ранее опубликованы.

Следует указать на несколько работ, которые являются основополагающими в квантовой оптике и могут помочь читателю полнее понять предмет настоящей книги и близкие к нему вопросы. Среди них должны быть отмечены следующие:

1. Born M., Wolf E., Principles of Optics, Oxford, 1965.
2. Glauber R. J., Quantum Optics and Electronics (ed. C. DeWitt, A. Blandin, C. Cohen-Tannoudji), New York, 1964. (См. перевод в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиоп физика», изд-во «Мир», 1966.)
3. Mandel L., Wolf E., Coherence properties of optical fields, Rev. Mod. Phys., **37**, 231 (1965). [См. перевод: УФН, **87**, 491 (1965); **88**, 347, 819 (1966).]

В последней статье дана обширная библиография, которую мы не пытаемся здесь воспроизвести. Иногда в наш указатель литературы мы включали книги или статьи, которые не цитируются в тексте книги, но в которых можно найти дальнейшее обсуждение рассматриваемых вопросов.

¹⁾ Последняя книга имеется в русском переводе: Л. Шифф. Квантовая механика, ИЛ, 1957. Книга Дженкинса и Уайта на русский язык не переведена. — Прим. ред.

Необходимо сделать несколько замечаний относительно обозначений. Иногда вместо нескольких символов интегрирования или суммирования мы используем один, а также часто опускаем пределы суммирования или интегрирования, если они достаточно ясны из текста. Так как наше рассмотрение носит в основном теоретический характер, мы выбрали удобные электромагнитные единицы Хевисайда, в которых, кроме того, скорость света $c = 1$. Вместе с тем, поскольку наше обсуждение охватывает не только классическую, но и квантовую теорию когерентности, в уравнения явно входит постоянная Планка \hbar (или $\hbar = h/2\pi$). Угловая частота обозначается через ω , обычная частота — через ν ; иногда обе эти величины входят в одно и то же уравнение; они неизменно связаны соотношением $\omega = 2\pi\nu$.

Мы благодарны всем лицам, предложившим различного рода поправки и высказавшим критические замечания по поводу предварительных вариантов книги. Нам особенно хотелось бы выразить свою признательность Блаунту, Вольфу, Глауберу, Гордону, Лэксу, Манделю, Мак-Кенна, Мета, Пенделтону, Розенбергу и Уайтману. Выражаем также благодарность Чилметти и Джордану за составление конспектов лекций и А. Мерсье, благодаря которому авторы получили возможность приятно провести свой годовой академический отпуск в Бернском институте теоретической физики.

Наконец, мы хотим выразить нашу благодарность миссис Н. Каллен, мисс Д. Домански и мисс С. Талада и особенно миссис Б. Чиппендейл, миссис Де-Маттео и миссис М. Свилар за помощь в работе и подготовку машинописного экземпляра.

Рукопись этой книги была завершена в то время, когда один из авторов (Дж. Р. Клаудер) был сотрудником лаборатории фирмы «Белл телефон», которой мы выражаем свою признательность за поддержку.

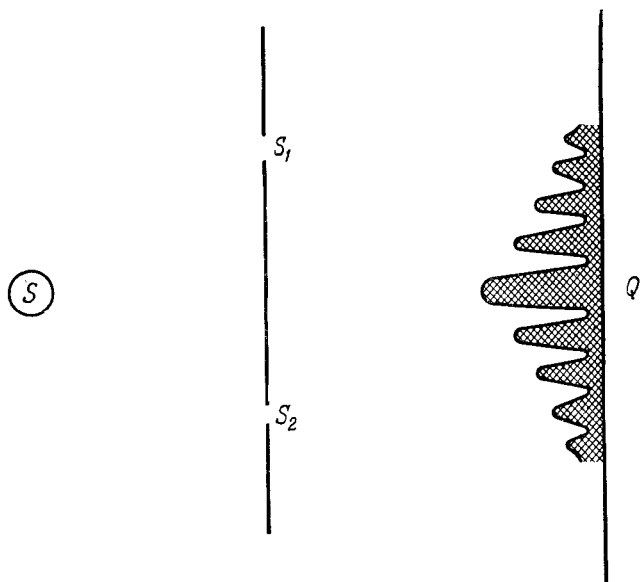
*Джон Р. Клаудер
Э. К. Г. Сударшан*

Частично когерентный свет

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Хотя геометрическая, или лучевая, оптика адекватно описывает многие явления, часто, как известно, важную роль играют волновые свойства света. Эти свойства существенны, например, для понимания экспериментов по дифракции и интерференции типа классического эксперимента Юнга с двумя отверстиями, показанного на фиг. 1. Этот известный и наглядный интерференционный эксперимент служит удобным исходным пунктом для обоснования вводимого ниже представления о частично когерентном свете.

Согласно обычной классической волновой теории, падение волны на два отверстия S_1 и S_2 приводит к появлению интерференционной картины, причем в зависимости от относительных интенсивностей может происходить полное гашение излучения в некоторых точках наблюдения Q . Возникновение такой резкой интерференционной картины тесно связано с существованием определенных фазовых соотношений; в таких случаях говорят, что два пучка являются когерентными. Однако представление об интерференции, приводящей к полному гашению излучения, не всегда соответствует экспериментальной ситуации. Так обстоит дело, например, для обычных тепловых источников S , если угол, под которым виден источник с экрана, не слишком мал, как на фиг. 1. Если такой источник перемещать в направлении к экрану (увеличивая таким образом опирающийся на него угол), то обычно интерференционная картина постепенно смазывается; иначе говоря, максимумы и минимумы интенсивности становятся относительно менее выраженными.



Фиг. 1. Схематическое представление интерференционного эксперимента с двумя отверстиями.

Свет от протяженного теплового источника S проходит через отверстия S_1 и S_2 и дает интерференционную картину, изображенную качественно. Интенсивность в точке Q обуславливается суперпозицией волн, прошедших через оба отверстия, и определяется геометрией эксперимента и природой источника света.

Для количественной характеристики резкости интерференционной картины можно ввести, следуя Майкельсону, *видность*, определяемую формулой

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\text{макс}} - I_{\text{мин}}}{I_{\text{макс}} + I_{\text{мин}}}. \quad (1.1)$$

Таким образом, можно видеть, что по мере того как источник приближается к экрану, видность \mathcal{V} уменьшается. Наконец, когда источник находится совсем близко у экрана, интерференционная картина может полностью смазаться, а видность \mathcal{V} обратится в нуль. В последнем случае мы имеем картину, аналогичную той, которая наблюдается, если источник и отверстия заменить двумя независимыми тепловыми источниками, расположенными

на месте отверстий. Другими словами, две достаточно удаленные точки на поверхности теплового источника типа лампы дают такую же интерференционную картину, какую мы интуитивно приписываем двум совершенно различным тепловым источникам. Это вполне естественно, поскольку даже в одном источнике достаточно удаленные друг от друга отдельные атомные излучатели, дающие вклад в суммарный оптический сигнал, имеют практически независимые предыстории поглощения и испускания энергии. Очевидно, когда источник расположен очень близко к экрану или когда источник и отверстия заменяются двумя независимыми тепловыми источниками, интерференционная картина исчезает вследствие полного отсутствия каких-либо определенных фазовых соотношений между излучениями источников. В течение времени, необходимого для фотографического наблюдения (которое, разумеется, превышает время характерных атомных переходов, имеющее порядок 10^{-9} сек), происходит много оптических колебаний (поскольку оптические частоты составляют примерно 10^{15} гц); этого времени достаточно для того, чтобы любая картина оказалась смазанной из-за полной независимости фазовых предысторий излучателей. В таком случае говорят, что два световых сигнала некогерентны.

Промежуточной по отношению к рассмотренным выше интерференционным картинам является картина частичной интерференции, которая обычно имеет место, когда источник S , как показано на фиг. 1, находится не слишком близко и не слишком далеко от отверстий. Тогда говорят о частичной когерентности сигналов. Ее описание носит несколько более общий характер, нежели описание двух предельных случаев, а именно полной когерентности и некогерентности. Представление о частичной когерентности соответствует самой общей классической модели. Именно такую модель мы будем рассматривать в первых четырех главах настоящей книги. Основным предметом остальных глав книги являются квантовые обобщения этой модели.

Вернемся к фиг. 1. Можно видеть, что свет, попадающий в различные точки, скажем в отверстия S_1 и S_2 , а следовательно, и в точку наблюдения Q , представляет

собой очень сложную суперпозицию свободно распространяющихся сигналов, посылаемых всеми атомными излучателями источника S . Для подробного и точного описания этого процесса в любой момент времени необходимо знать поведение каждого атомного излучателя, однако некоторые простые вопросы можно рассмотреть, располагая только ограниченными сведениями об атомах. Например, средняя интенсивность в точке S_1 может зависеть лишь от средних интенсивностей отдельных атомных излучателей, причем часто эти интенсивности можно считать одинаковыми для всех излучателей. Если не ограничиваться нахождением средних значений интенсивностей, то необходимо применить *статистический подход* и использовать *статистическое* описание оптических полей, поскольку они создаются большим числом существующих в действительности макроскопических источников.

Говоря математически, мы выбираем в качестве модели частично когерентного света *стохастический процесс*, т. е. предполагаем, что световая волна является *случайным полем*, каждая из возможных реализаций которого, если волны распространяются в вакууме, удовлетворяет классическому волновому уравнению. Усреднение по ансамблю возможных реализаций поля дает наблюдаемые средние величины. В свою очередь определенный ансамбль возможных полей задается в конечном счете источником, создающим излучение. Как мы покажем, статистическое описание пригодно как для лазерного, так и для теплового излучения, т. е. это описание применимо к самым разнообразным типам источников, если для каждого случая выбрать соответствующий статистический ансамбль.

Стало традицией при рассмотрении частичной когерентности применять теорию стационарных случайных процессов, а именно рассчитывать рассматриваемые средние величины при помощи усреднений по времени, а затем, опираясь на эргодическую гипотезу, приравнивать эти результаты к результатам, которые получились бы при усреднении по ансамблю световых полей. Мы применим с самого начала усреднение по ансамблю, поскольку, с одной стороны, оно не связано со стационар-

ными эргодическими процессами, для которых средние значения по определению не зависят от начала отсчета времени, и поскольку, с другой стороны, оно является самым удобным аналогом статистического описания, принятого в квантовой теории.

Статистическое описание находит применение не только при анализе эксперимента с двумя отверстиями и протяженными тепловыми источниками; оно должно применяться и при рассмотрении другого общего свойства света. Как известно, свет представляет собой поперечные волны, причем каждая волна обладает двумя различными возможными состояниями поляризации. Поляризованный свет можно описать точно, задавая компоненты линейной поляризации или компоненты круговой поляризации. Можно также использовать более общий подход и любую поляризованную волну рассматривать как эллиптически поляризованную. В другом предельном случае свет теплового источника содержит все поляризации с равной вероятностью, т. е. является неполяризованным. Такой свет при отражении от некоторых металлов или при прохождении через некоторые кристаллы приобретает определенную степень поляризации и становится частично поляризованным. Анализ частичной когерентности и частичной поляризации во многих отношениях сходен. Для простоты ограничимся сначала рассмотрением скалярной теории частичной когерентности, которая обычно соответствует световым волнам одинаковой поляризации. Более полное изложение классической теории частичной когерентности можно найти в работах Борна и Вольфа [1.1], гл. X, О'Нейла [1.3] и Берана и Паррента [1.2]¹⁾.

§ 2. ОПИСАНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО СИГНАЛА

Электромагнитное поле или, более определенно, его скалярный аналог, который мы здесь рассматриваем, описывается действительными функциями координат и времени; обозначим их через $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$. Сосредоточим пока

¹⁾ Цифры в квадратных скобках относятся к библиографии, помещенной в конце книги.

внимание на поведении $V^{(r)}(\mathbf{r}, t)$ в произвольной точке пространства \mathbf{r} , которую мы не будем задавать, и рассмотрим соответствующую действительную функцию времени $V^{(r)}(t)$. Для ряда целей в конечном счете физический интерес может представлять не само волновое поле $V^{(r)}(t)$. Например, многие физические явления определяются «огнивающей», или «средней интенсивностью», поля $V^{(r)}(t)$. Последнюю величину можно определить как среднее от $\frac{1}{2}\{V^{(r)}(t)\}^2$ по интервалам времени (например, порядка 10^{-9} сек), большим по сравнению с типичными оптическими периодами (10^{-15} сек), но малым по сравнению с интервалами, на которых происходят изменения огнивающей. Именно на такие средние интенсивности реагируют фотографические эмульсии, фотосчетчики, фотоэмиссионные процессы разного рода и т. д. Можно привести аналогичный пример из радиотехники. Так, на огнивающую радиосигнала реагирует квадратичный детектор с последующим фильтром низких частот (система, применяемая для приема амплитудно-модулированных сигналов). Чтобы исключить высокочастотные компоненты из члена $\frac{1}{2}\{V^{(r)}(t)\}^2$, не проводя усреднения по малым временным интервалам, можно применить математический прием, впервые введенный Габором [1.4].

Чтобы проиллюстрировать соответствующую процедуру, рассмотрим следующий идеализированный пример. Предположим, что для достаточно малого интервала времени можно положить $V^{(r)}(t) = 2A \cos 2\pi\bar{\nu}t$; тогда средняя интенсивность A^2 определяется выражением $V^*(t)V(t)$, где $V(t) \equiv A \exp(-i2\pi\bar{\nu}t)$ — комплексный сигнал с положительной частотой, связанный с исходным сигналом таким образом, что $V^{(r)}(t) = 2 \operatorname{Re}\{V(t)\}$. Следовательно, непосредственно используя $V(t)$ и $V^*(t)$, можно сразу же рассчитать необходимые физические характеристики поля.

В том случае, когда функции $V^{(r)}(t)$ имеют более общий вид, можно поступать следующим образом. Поскольку скалярное поле $V^{(r)}(t)$ действительно, для фурье-компоненты

$$\tilde{V}^{(r)}(\mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i \mathbf{v} t} V^{(r)}(t) dt \quad (1.2)$$

выполняется соотношение

$$\tilde{V}^{(r)}(-\nu) = \tilde{V}^{(r)*}(\nu). \quad (1.3)$$

Таким образом, соотношение (1.3) дает возможность определить всю функцию $\tilde{V}^{(r)}(\nu)$ по ее значениям при $\nu \geq 0$. Поэтому сопоставим действительному сигналу $V^{(r)}(t)$ *аналитический* сигнал $V(t)$, определяемый соотношением

$$V(t) \equiv \int_0^{\infty} e^{-2\pi i \nu t} \tilde{V}^{(r)}(\nu) d\nu \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \nu t} \tilde{V}(\nu) d\nu, \quad (1.4)$$

где $\tilde{V}(\nu) = \tilde{V}^{(r)}(\nu)$ при $\nu > 0$ и $\tilde{V}(\nu) \equiv 0$ при $\nu < 0$. По определению $V(t)$ содержит только положительные частоты ν . Действительный сигнал можно получить с помощью соотношения $V^{(r)}(t) = 2 \operatorname{Re} V(t)$. Из самого вида выражения

$$V(t + i\tau) \equiv \int_0^{\infty} e^{-2\pi \nu (it - \tau)} \tilde{V}^{(r)}(\nu) d\nu \quad (1.5)$$

ясно, что оно определяет функцию комплексного переменного $z = t + i\tau$, которая является аналитической в нижней полуплоскости $\tau < 0$, и что $V(t)$ — граничное значение этой аналитической функции при $\tau \rightarrow 0^-$. Кроме того, действительная и мнимая части функции $V(t)$ связаны друг с другом преобразованиями Гильберта. Это значит, что выполняются соотношения

$$V^{(i)}(t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(r)}(t')}{t' - t} dt', \quad (1.6a)$$

$$V^{(r)}(t) = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V^{(i)}(t')}{t' - t} dt', \quad (1.6б)$$

где $V(t) = 1/2[V^{(r)}(t) + iV^{(i)}(t)]$ и где символ \mathcal{P} указывает, что главное значение интеграла следует брать в сингулярной точке $t' = t$. Эти два соотношения, очевидно, эквивалентны тождеству $\tilde{V}(\nu) \equiv \varepsilon(\nu) \tilde{V}(\nu)$, где $\varepsilon(\nu) = \pm 1$,

$v \geq 0$, если выполнить фурье-преобразование по времени. Впоследствии мы увидим, что в квантовой теории удобнее всего рассматривать аналитические сигналы и что их введение устанавливает связь между классическим и квантовым описанием.

Аналитический сигнал, как и его действительную часть, необходимо считать функцией координат и времени $V(\mathbf{r}, t)$. Волновое уравнение линейно; отсюда следует, например, что амплитуда в точке Q в эксперименте с двумя отверстиями (см. фиг. 1) представляет собой линейную комбинацию амплитуд (с соответствующей задержкой во времени) двух волн, выходящих из отверстий S_1 и S_2 . Используя приближение, в котором поле на протяжении отверстий S_1 и S_2 принимается постоянным, получаем, что поле в точке Q должно, очевидно, описываться выражением вида

$$V(Q, t) = K_1 V(S_1, t - t_1) + K_2 V(S_2, t - t_2). \quad (1.7)$$

Здесь K_1 и K_2 — два не зависящие от времени коэффициента, о которых мы будем подробнее говорить позже, а t_1 и t_2 означают интервалы времени, в течение которых волны (имеющие скорость c) проходят соответственно расстояния $S_1 Q$ и $S_2 Q$. Если, как было показано выше, определить интенсивность I в точке (\mathbf{r}, t) следующим образом:

$$I(\mathbf{r}, t) = V^*(\mathbf{r}, t) V(\mathbf{r}, t), \quad (1.8)$$

то отсюда вытекает, что интенсивность в точке Q в момент времени t равна квадрату абсолютного значения (1.7):

$$\begin{aligned} I(Q, t) &= K_1^* K_1 V^*(S_1, t - t_1) V(S_1, t - t_1) + \\ &+ K_2^* K_2 V^*(S_2, t - t_2) V(S_2, t - t_2) + \\ &+ K_1^* K_2 V^*(S_1, t - t_1) V(S_2, t - t_2) + \\ &+ K_2^* K_1 V^*(S_2, t - t_2) V(S_1, t - t_1) = \\ &= K_1^* K_1 V^*(S_1, t - t_1) V(S_1, t - t_1) + \\ &+ K_2^* K_2 V^*(S_2, t - t_2) V(S_2, t - t_2) + \\ &+ 2 \operatorname{Re} \{ K_1^* K_2 V^*(S_1, t - t_1) V(S_2, t - t_2) \}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

§ 3. СТАТИСТИКА ЧАСТИЧНО КОГЕРЕНТНОГО СВЕТА

Как показано выше, излучение тепловых источников естественно рассматривать как суперпозицию случайных вкладов от большого числа атомов, причем вклад каждого атома меняется и, кроме того, зависит от их расположения внутри источника. Математически такие световые волны следует рассматривать как статистические переменные, иначе говоря, как флуктуирующие поля. В зависимости от особенностей источника флуктуировать могут фаза, амплитуда, частота или все три величины одновременно. Наш подход в принципе не отличается от подхода, используемого при рассмотрении тепловых шумов, генерируемых в радиоприемнике, за исключением того обстоятельства, что шумы радиоприемника лежат в таком диапазоне частот, где их непосредственное наблюдение не представляет труда.

Таким образом, мы будем считать, что скалярные амплитуды $V(\mathbf{r}, t)$ образуют статистический ансамбль, а физические величины, представляющие непосредственный интерес, могут быть определены путем статистического усреднения. Во многих практически интересных случаях статистический ансамбль можно считать *стационарным*, что означает независимость средних значений от начала отсчета времени. Обозначим статистическое усреднение угловыми скобками; тогда свойство стационарности означает, например, что среднее

$$\langle V^*(\mathbf{r}_1, \tau_1 + t) V(\mathbf{r}_2, \tau_2 + t) \rangle = \langle V^*(\mathbf{r}_1, \tau_1) V(\mathbf{r}_2, \tau_2) \rangle \quad (1.10)$$

не зависит от времени t .

Используя эти обозначения и соотношение (1.9), можно найти среднюю интенсивность в эксперименте с двумя отверстиями:

$$\begin{aligned} \langle I(Q, t) \rangle = \langle I(Q) \rangle = & K_1^* K_1 \langle I(S_1) \rangle + K_2^* K_2 \langle I(S_2) \rangle + \\ & + 2 \operatorname{Re} \{ K_1 K_2^* \langle V^*(S_2, t - t_2) V(S_1, t - t_1) \rangle \}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Чтобы выявить наиболее существенные особенности этого выражения, предположим, что отверстия одинаковы, и воспользуемся известным приближением Гюйгенса. Как мы покажем позже, в этом случае коэффициенты

K_1 и K_2 таковы, что произведение $K_1 K_2^*$ действительно и $K_1 K_2^* \approx |K_1|^2 \approx |K_2|^2 \equiv K^2$. При указанном условии, полагая $t = t_2$, получаем

$$\langle I(Q) \rangle = K^2 \{ \langle I(S_1) \rangle + \langle I(S_2) \rangle + 2 \operatorname{Re} \langle V^*(S_2, 0) V(S_1, t_2 - t_1) \rangle \}. \quad (1.12)$$

Теперь введем в рассмотрение имеющую фундаментальное значение функцию

$$\Gamma_{ij}(\tau) \equiv \langle V^*(\mathbf{r}_j, 0) V(\mathbf{r}_i, \tau) \rangle. \quad (1.13)$$

При $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_j$ функция Γ характеризует автокорреляцию сигнала $V(\mathbf{r}_i, t)$, а при $\mathbf{r}_i \neq \mathbf{r}_j$ — взаимную корреляцию двух сигналов. Назовем $\Gamma_{ij}(\tau)$ *функцией взаимной когерентности*. Если положить $I_1 = \Gamma_{11}(0)$ и $I_2 = \Gamma_{22}(0)$, то соотношение (1.12) можно представить в виде

$$\langle I(Q) \rangle = K^2 \{ I_1 + I_2 + 2 \operatorname{Re} \Gamma_{12}(t_2 - t_1) \}. \quad (1.14)$$

При этом

$$\operatorname{Re} \Gamma_{ij}(\tau) \leq |\Gamma_{ij}(\tau)| \leq (I_i I_j)^{1/2}. \quad (1.15)$$

Последнее следует из требования, что $\langle I(Q) \rangle \geq 0$ для любого значения I_1/I_2 ; этот результат является также следствием неравенства Шварца. Таким образом, если ввести величину

$$\gamma_{ij}(\tau) = \frac{\Gamma_{ij}(\tau)}{(I_i I_j)^{1/2}}, \quad (1.16)$$

то

$$\operatorname{Re} \gamma_{ij}(\tau) \leq |\gamma_{ij}(\tau)| \leq 1 \quad (1.17)$$

и

$$\langle I(Q) \rangle = K^2 \{ I_1 + I_2 + 2 (I_1 I_2)^{1/2} \operatorname{Re} \gamma_{12}(t_2 - t_1) \}. \quad (1.18)$$

Выберем систему единиц, в которой скорость света $c = 1$; тогда время $t_j = s_j$, где s_j — расстояние от S_j до Q . Соотношение (1.18), впервые выведенное Цернике [1.6], есть общий интерференционный закон для частично когерентных стационарных оптических полей.

Чтобы выяснить смысл величины γ_{12} , обратимся прежде всего к идеализированному случаю строго монохро-

матического света (флуктуации отсутствуют). Другими словами, положим

$$V(S_j, t - t_j) = |A_j| \exp[-2\pi i \nu(t - t_j)]. \quad (1.19)$$

Тогда из (1.13) и (1.16) получаем

$$\gamma_{12}(t_2 - t_1) = \exp[-2\pi i \nu(t_2 - t_1)]. \quad (1.20)$$

Следовательно, в рассматриваемом частном случае

$$I = K^2 \{I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} \cos[2\pi \nu(t_2 - t_1)]\}. \quad (1.21)$$

Выражение (1.21) описывает идеальную интерференционную картину от двух отверстий. Даже если в некоторой точке Q косинусоидальный член принимает нулевое значение, свет остается когерентным. Действительно, достаточно поместить в любом отверстии идеальную однородную фазосдвигающую пластинку, меняющую фазу волны равномерно по всему фронту, чтобы интерференционный член возник вновь.

В качестве следующего шага при рассмотрении функции γ_{12} предположим, что свет квазимонохроматический, т. е. занимает полосу частот $\Delta\nu$, которая гораздо меньше центральной частоты $\bar{\nu}$, т. е. $\Delta\nu/\bar{\nu} \ll 1$. Согласно этому предположению, можно принять

$$\gamma_{12}(t_2 - t_1) = |\gamma_{12}(t_2 - t_1)| \exp[-2\pi i \bar{\nu}(t_2 - t_1)], \quad (1.22)$$

где огибающая $|\gamma_{12}|$ мало меняется на периоде второго сомножителя в (1.22). В этом случае из (1.18) получаем

$$I = K^2 \{I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} |\gamma_{12}(t_2 - t_1)| \cos[2\pi \bar{\nu}(t_2 - t_1)]\}. \quad (1.23)$$

При большом числе периодов это выражение описывает интерференционную картину с гармоническим изменением интенсивности, аналогичную идеальной интерференционной картине от двух отверстий. Максимумы (минимумы) интенсивности соответствуют, очевидно, значениям косинуса, равным $+1$ (-1). Таким образом, видность такой интерференционной картины определяется выражением

$$\mathcal{V} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2(I_1 I_2)^{1/2} |\gamma_{12}(t_2 - t_1)|}{I_1 + I_2}, \quad (1.24a)$$

которое в частном случае $I_1 = I_2$ принимает вид

$$\mathcal{V} = |\gamma_{12}(t_2 - t_1)|. \quad (1.246)$$

Следовательно, в рассматриваемом примере функция $|\gamma_{12}|$ совпадает с видностью \mathcal{V} . Если $|\gamma_{12}| = 1$, видность когерентной волны максимальна; если $|\gamma_{12}| = 0$, интерференционные полосы отсутствуют (некогерентный свет). Наконец, в случае $0 < |\gamma_{12}| < 1$ картина интерференционных полос соответствует частично когерентному свету.

Хотя в общем случае, которому соответствует соотношение (1.18), наблюдаемое распределение интенсивности может и не иметь синусоидального характера, все же $|\gamma_{12}|$ разумно рассматривать как меру когерентности волновых полей. Действительно, помещая, как и в случае $|\gamma_{12}| = 1$, однородную фазосдвигающую пластинку на любое отверстие, можно получить любое значение $\text{Re } \gamma_{12}(\tau)$, лежащее в пределах $\pm |\gamma_{12}(\tau)|$. Если $|\gamma_{12}| = 1$, то волны $V(S_1, \tau)$ и $V^*(S_2, 0)$ полностью коррелированы, как и в выражении (1.21), и их можно назвать когерентными. При $\gamma_{12} = 0$ (а не только при $\text{Re } \gamma_{12} = 0$) волны некоррелированы и их можно назвать некогерентными. Наконец, при $0 < |\gamma_{12}| < 1$ поля можно назвать частично когерентными. Таким образом, во всех случаях $\gamma_{12}(\tau)$ естественно определить как комплексную степень когерентности, а величину $|\gamma_{12}(\tau)|$ — как *степень когерентности*.

В качестве следующего свойства функции взаимной когерентности отметим, что $\Gamma_{12}(\tau)$ является аналитическим сигналом в смысле (1.4). Это свойство есть следствие предполагаемой стационарности рассматриваемого статистического ансамбля. Действительно, пусть

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}(\tau) &= \langle V_2^*(t) V_1(t + \tau) \rangle = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-2\pi i [v_1(t + \tau) - v_2 t]\} \langle \tilde{V}_2^*(v_2) \tilde{V}_1(v_1) \rangle dv_1 dv_2 = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\{-2\pi i [v_1 \tau + t(v_1 - v_2)]\} \langle \tilde{V}_2^*(v_2) \tilde{V}_1(v_1) \rangle dv_1 dv_2. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Тогда вследствие стационарности, которая помимо других свойств означает независимость выражения (1.25) от времени t , среднее значение, стоящее под последним интегралом, должно иметь следующий вид:

$$\langle \tilde{V}_2^*(\mathbf{v}_2) \tilde{V}_1(\mathbf{v}_1) \rangle = \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \tilde{\Gamma}_{12}(\mathbf{v}_1), \quad (1.26)$$

где $\delta(\mathbf{v})$ — дельта-функция Дирака. В результате получаем

$$\Gamma_{12}(\tau) = \int_0^{\infty} e^{-2\pi i \nu \tau} \tilde{\Gamma}_{12}(\nu) d\nu. \quad (1.27)$$

Очевидно, $\Gamma_{12}(\tau)$ является аналитическим сигналом. Следует отметить, что в ансамблях, которые не являются стационарными, $\Gamma_{12}(\tau)$ может быть, однако, аналитическим сигналом, если *среднее значение* (1.25) не зависит от t или справедливо соотношение (1.26), что эквивалентно.

На основе интерференционных измерений, проводимых или с идеальной фазосдвигающей пластинкой, или — в случае квазимонохроматического света — путем измерения видности \mathcal{V} , можно определить степень когерентности $|\gamma_{12}(\tau)|$. Однако представляющее физический интерес спектральное распределение $\tilde{\Gamma}_{12}(\nu)$, вообще говоря, непосредственно связано с фурье-образом функции $\gamma_{12}(\tau)$, а не функции $|\gamma_{12}(\tau)|$. В связи с этим возникает вопрос, в какой мере можно использовать $|\gamma_{12}|$ для определения величины

$$\gamma_{12}(\tau) = \exp[i\varphi_{12}(\tau)] |\gamma_{12}(\tau)|. \quad (1.28)$$

Эту проблему, известную под названием «фазовой проблемы», изучали, в частности, Вольф [1.7], Кано и Вольф [1.8], Мета [1.9] и Нуссенцвайг [1.10]. Поскольку $\gamma_{12}(\tau)$ представляет собой нормированную функцию взаимной когерентности, она является аналитическим сигналом. Последнее свойство можно применить для определения фазовой функции $\varphi_{12}(\tau)$. Если предположить, например, что функция $\gamma_{12}(\tau)$ не имеет нулей в нижней полуплоскости комплексного τ , тогда функция

$$\ln \gamma_{12}(\tau) = \ln |\gamma_{12}(\tau)| + i\varphi_{12}(\tau) \quad (1.29)$$

остается аналитической в нижней полуплоскости и, следовательно, является аналитическим сигналом. Поэтому действительную и мнимую части выражения (1.29) можно связать преобразованием Гильберта и определить $\varphi_{12}(\tau)$ соотношением

$$\varphi_{12}(\tau) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln |\gamma_{12}(\tau')|}{\tau' - \tau} d\tau' \quad (1.30)$$

при условии, что интеграл сходится.

В основе этого расчета лежит предположение, что функция $\gamma_{12}(\tau)$ не имеет нулей в нижней полуплоскости комплексного τ . Если это предположение несправедливо, то можно показать, что выражение для γ_{12} содержит дополнительный коэффициент, называемый фактором Блашке:

$$\prod \left(\frac{\tau - \tau^{(j)}}{\tau - \tau^{(j)*}} \right), \quad (1.31)$$

где умножение распространено на все значения $\tau^{(j)}$, в которых функция $\gamma_{12}(\tau)$ в нижней полуплоскости обращается в нуль. Если мы не располагаем никакой дополнительной физической информацией, которая позволяла бы точно определить положение нулей функции $\gamma_{12}(\tau)$ и таким образом вычислить дополнительный фазовый множитель (1.31), то комплексная степень когерентности будет недоопределена. Нуссенцвайг рассмотрел отдельные спектральные распределения $\hat{\Gamma}_{12}(\nu)$, которые часто задают исходя из физических соображений, и показал, что в этих случаях комплексная степень когерентности не только содержит большое число нулей в нижней полуплоскости τ , но и что значение фазы, связанное с фактором Блашке, сравнимо с «минимальным» значением (1.30).

§ 4. ВРЕМЕННЫЕ И ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ВЗАИМНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ В ПРОЦЕССЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ СИГНАЛА

Рассмотрим теперь важное свойство функции взаимной когерентности, а именно покажем, что она удовлетворяет тому же волновому уравнению, что и скалярные

поля. В свободном пространстве как реальные поля, так и связанные с ними аналитические сигналы удовлетворяют обычному волновому уравнению, которое в системе единиц, где скорость света $c = 1$, имеет вид

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.32)$$

здесь

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

— оператор Лапласа. Умножая это уравнение на комплексно сопряженное решение $V^*(\mathbf{r}', t')$, получаем

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)V(\mathbf{r}, t)V^*(\mathbf{r}', t') = 0. \quad (1.33)$$

Поскольку уравнение (1.33) справедливо для каждой волны $V(\mathbf{r}, t)$ ансамбля, оно справедливо и для среднего по ансамблю, т. е.

$$\left(\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 0. \quad (1.34a)$$

Возьмем уравнение, комплексно сопряженное уравнению (1.34a), и поменяем местами штрихованные и нештрихованные координаты. В результате приходим к уравнению

$$\left(\nabla'^2 - \frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)\Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = 0. \quad (1.34б)$$

Впервые эти волновые уравнения для функции взаимной когерентности были получены Вольфом [1.11]. Следует подчеркнуть, что в отношении распространения функция взаимной когерентности ведет себя как волна, однако, если говорить о наблюдаемых величинах, то согласно (1.14) она ведет себя как интенсивность. Ни амплитуда волны V , ни интенсивность I не обладают одновременно обоими этими полезными свойствами.

Поскольку функция взаимной когерентности удовлетворяет волновым уравнениям (1.34), для нахождения интегрального представления функции Γ в произвольной точке пространства при помощи ее значений на некоторой поверхности можно применить теорему Грина. Чтобы получить интегральное представление функции Γ ,

исключим прежде всего t и t' из Γ и перейдем к частотам ν посредством соотношения

$$\Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \int_0^{\infty} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) e^{-2\pi i \nu (t-t')} d\nu, \quad (1.35)$$

которое имеет место вследствие предполагаемой стационарности ансамбля. В результате вместо (1.34) получаем

$$(\nabla^2 + k^2) \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) = 0, \quad (1.36a)$$

$$(\nabla'^2 + k^2) \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) = 0, \quad (1.36б)$$

где $k = k(\nu) \equiv 2\pi\nu$. Пусть $G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \equiv G(\mathbf{r}, \mathbf{s}; \nu)$ — функция Грина для уравнения (1.36a); тогда применение теоремы Грина к этому уравнению дает

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) &= \\ &= \int_S \left\{ G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \frac{\partial \tilde{\Gamma}}{\partial n}(\mathbf{s}, \mathbf{r}'; \nu) - \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{r}'; \nu) \right\} dS \end{aligned} \quad (1.37)$$

(более общее рассмотрение проведено в гл. 6, § 5). Здесь \mathbf{s} обозначает точку на поверхности S , dS — элемент площади поверхности и $\partial/\partial n$ — производная по направлению нормали к поверхности. Функцию Грина G можно выбрать разными способами. В частности, удобно выбрать функцию G так, чтобы она была равна нулю, если любой аргумент попадает на поверхность S . В этом случае в выражении (1.36) остается только второй член. Применяя теорему Грина с соответствующей функцией G к переменному \mathbf{r}' , получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) &= \\ &= \int_S \int_S \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \frac{\partial G^*}{\partial n'}(\mathbf{r}', \mathbf{s}') \tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{s}'; \nu) dS dS'. \end{aligned} \quad (1.38)$$

Здесь существенно, что значение функции $\tilde{\Gamma}$ в двух точках пространства определяется линейным соотношением из значений $\tilde{\Gamma}$, взятых на поверхности S . Аналогичные замечания, разумеется, относятся и к выражению (1.35), зависящему от времени.

Для иллюстрации предположим, что поверхность S является плоскостью $z = 0$ и что на этой плоскости функция $\tilde{\Gamma}$ не равна нулю в области, соответствующей конечной апертуре. В этом случае функцию Грина G легко выразить через *простейшую* функцию G_0

$$G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{e^{ik(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \quad (1.39)$$

Пользуясь, например, методом зеркальных изображений, G можно взять в виде

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \equiv G_0(\mathbf{r}, x', y', z') - G_0(\mathbf{r}, x', y', -z'), \quad (1.40)$$

где в правой части равенства точно определена зависимость от координаты \mathbf{r}' . Очевидно, $G = 0$, если точка \mathbf{r}' находится на поверхности S , т. е. $z' = 0$. (Легко видеть также, что $G = 0$, когда \mathbf{r} находится на S .)

Функции $\partial G/\partial n$, входящие в (1.38), определяют коэффициенты K , введенные в выражении (1.7). В обычном интерференционном эксперименте с двумя отверстиями мы имеем «светящуюся поверхность» S , состоящую из δ -образных источников, и квазимонохроматическое распределение частот. Иначе говоря, спектральная ширина функции $\tilde{\Gamma}$ гораздо меньше центральной частоты $\bar{\nu}$. Положим

$$R \equiv [(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2]^{1/2} \quad (1.41)$$

и примем, что в пределах спектральной ширины функции $\tilde{\Gamma}$ произведение $kR \gg 1$. В этом случае

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{ikR}}{2\pi R} \right) \approx \frac{ikz}{2\pi R^2} e^{ikR} \approx \frac{ikz}{2\pi R^2} e^{ikR} \equiv K e^{ikR}. \quad (1.42)$$

Здесь при переходе от первого приближенного выражения ко второму используется то обстоятельство, что спектральная ширина функции $\tilde{\Gamma}$ предполагается очень малой. Из уравнения (1.42) можно найти коэффициент K в (1.7); остающийся фазовый коэффициент $\exp(2\pi i\nu R)$ определяет временное запаздывание в (1.7). Таким образом мы непосредственно получаем свойства K , использованные при выводе соотношения (1.12).

А. Теорема ван Циттерта — Цернике

Важное свойство функции взаимной когерентности состоит в том, что частичная когерентность приобретает в самом процессе распространения. Это легче всего можно показать с помощью соотношения (1.38). Предположим, что поверхность S является поверхностью оптического источника и что свет обладает свойствами излучения теплового источника, например звезды. В этом случае, очевидно, поле в точке \mathbf{s} не зависит от поля в точке \mathbf{s}' , если расстояние $|\mathbf{s} - \mathbf{s}'|$ превышает «когерентную длину источника», которая составляет, например, не больше метра. Физически это означает, что световые источники статистически независимы на протяжении любого макроскопического интервала. Отсюда следует, что функция $\tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{s}'; \nu)$ должна обратиться в нуль, если расстояние $|\mathbf{s} - \mathbf{s}'|$ достаточно велико. Если в этом масштабе оставшаяся часть подынтегрального выражения в (1.38) изменяется достаточно медленно, то, не теряя точности, можно применить соотношение

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \mathbf{s}'; \nu) = \delta_S(\mathbf{s} - \mathbf{s}') \tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \nu), \quad (1.43)$$

где δ_S означает δ -функцию, взятую на поверхности. Следовательно, в этих предположениях (1.38) приводится к выражению

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) = \int_S \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \frac{\partial G^*}{\partial n}(\mathbf{r}', \mathbf{s}) \tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \nu) dS, \quad (1.44)$$

которое, вообще говоря, при $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ не обращается в нуль. Другими словами, поле, которое, скажем, статистически независимо в различных точках поверхности звезды, при распространении приобретает частичную пространственную когерентность. Теорема ван Циттерта — Цернике утверждает, что выражение (1.44) для функции взаимной когерентности можно интерпретировать иначе, чем это было сделано выше. Ван Циттерт и Цернике отметили, что формула для функции взаимной когерентности $\tilde{\Gamma}$ определяет также *амплитуду* поля в точке \mathbf{r} . Эту амплитуду можно построить с помощью принципа Гюй-

генса следующим образом: 1) точечный источник находится в точке \mathbf{r}' , излучение от которой затем распространяется [чему соответствует функция $\partial G^*/\partial n(\mathbf{r}', \mathbf{s})$] к различным точкам \mathbf{s} , находящимся на «апертуре», определяемой поверхностью S ; 2) в каждой точке \mathbf{s} на поверхности S излучение отражается, причем относительный коэффициент отражения равен $\tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \nu)$; 3) наконец, излучение от каждой точки \mathbf{s} поверхности распространяется $[\partial G/\partial n(\mathbf{r}, \mathbf{s})]$ в точку наблюдения \mathbf{r} . Утверждение о эквивалентности функции взаимной когерентности и волновой амплитуды, построенной описанным выше способом, и называют теоремой ван Циттерта — Цернике. В некоторых случаях функцию взаимной когерентности можно определить, не проводя усреднения по ансамблю, только путем построения волнового фронта. Дальнейший анализ теоремы ван Циттерта — Цернике можно найти в книгах Борна и Вольфа [1.1] и Берана и Паррента [1.2].

Интересно продолжить обсуждение соотношения (1.44) и получить приближение дальнего поля, особенно удобного для определения диаметров звезд. В этом случае для $\partial G/\partial n$ воспользуемся соотношением (1.42) и сделаем традиционные приближения дальнего поля: $r^2 = r'^2 = R^2 \gg s^2$; $R^2 \gg (\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2$. Отсюда следует, что фаза в (1.44) определяется выражением

$$k(R - R') = k(|\mathbf{r} - \mathbf{s}| - |\mathbf{r}' - \mathbf{s}|) \approx -\frac{k}{R} \mathbf{s} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.45)$$

Используя это обстоятельство в (1.42), получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \nu) &\equiv \tilde{\Gamma}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'; \nu) = \\ &= |K|^2 \int_S e^{-i(k/R) \mathbf{s} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \tilde{\Gamma}(\mathbf{s}, \nu) dS. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Это соотношение позволяет во всех практических случаях выразить функцию взаимной когерентности через фурье-образ распределения интенсивности источника. Применим этот результат к звезде, интенсивность которой имеет постоянное значение $\tilde{\Gamma}(\nu)$ по всему круглому

диску радиусом b ; тогда, подставляя $\mathbf{r}' = 0$, можно написать

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= |K|^2 \tilde{\Gamma}(\mathbf{v}) \int_0^b \int_0^{2\pi} e^{-i(k/R)sr \cos \varphi_s} ds d\varphi = \\ &= 2\pi |K|^2 \tilde{\Gamma}(\mathbf{v}) \int_0^b J_0\left(\frac{ksr}{R}\right) s ds = 2\pi \frac{Rb}{kr} |K|^2 \tilde{\Gamma}(\mathbf{v}) J_1\left(\frac{kbr}{R}\right), \end{aligned} \quad (1.47)$$

где J_0 и J_1 — обычные функции Бесселя. Для рассматриваемого квазимонохроматического света зависимость от частоты дается функцией $\tilde{\Gamma}(\mathbf{v})$, в то время как другие величины можно оценить для центральной частоты $\bar{\nu} = \bar{k}/2\pi$. Таким образом, соотношение (1.47) можно привести к виду

$$\Gamma(\mathbf{r}, \tau) = 2\pi \frac{Rb}{kr} |K|^2 \Gamma(\tau) J_1\left(\frac{\bar{k}br}{R}\right); \quad (1.48)$$

производя нормировку, получаем

$$\gamma(\mathbf{r}, \tau) = \gamma(\tau) \frac{2J_1(x)}{x}, \quad (1.49)$$

где $x = \bar{k}br/R$ и $\gamma(\tau) = \Gamma(\tau)/\Gamma(0)$. Первый нуль функции взаимной когерентности соответствует такому расстоянию r в пространстве, для которого $\bar{k}br \approx 3,83R$. Это соотношение позволяет определить радиус звезды b , если известно ее расстояние от Земли. Для звезды размером с Солнце ($b \approx 10^{11}$ см), находящейся на расстоянии в один световой год ($R \approx 10^{18}$ см), и для среднего волнового числа $\bar{k} \approx 10^5$ см⁻¹ ($\nu \approx 10^{15}$ гц) расстояние r , для которого $\gamma = 0$, несколько меньше 4 м. К сожалению, применение этого метода ограничено тем обстоятельством, что степень когерентности света от звезды, наблюдаемого в двух точках, находящихся на расстоянии около 4 м в направлении, перпендикулярном направлению распространения света, значительно уменьшается из-за атмосферных искажений. В гл. 3 описан способ, позволяющий устранить это ограничение.

Более полное изложение классической теории частичной когерентности и связанных вопросов можно найти в работах, приведенных в библиографии.

Распределение фотоэлектрических отсчетов

В предыдущей главе было дано статистическое описание частично когерентных полей. В этой и следующей главе мы проанализируем фотоэлектрические измерения, с помощью которых можно изучать статистику частично когерентного поля.

§ 1. ПОСТОЯННАЯ ИНТЕНСИВНОСТЬ

Существует несколько удобных способов, в которых для детектирования света используется механизм взаимодействия излучения с веществом. К ним относится, в частности, регистрация света с помощью фотопластинок и фотоэлектрических детекторов. Рассмотрим сначала безынерционное детектирование с помощью фотоэлектрических приемников, полностью пренебрегая ограничениями, связанными с конечностью полосы детектора. Как впервые было показано Эйнштейном, фотоэлектрический процесс имеет существенно квантовую природу. Теория этого явления основана на представлении о корпускулярных свойствах электромагнитного поля (т. е. о фотонах) и вследствие этого позволяет объяснить статистические закономерности процесса фотоэмиссии.

При полуклассическом подходе можно считать, что падающее электромагнитное поле изменяет статистику фотоэмиссии; увеличение интенсивности света приводит к увеличению средней скорости фотоэмиссии.

Количественную связь между интенсивностью и вероятностью фотоэмиссии (и, следовательно, отсчетов) можно вычислить методами обычной нестационарной

квантовомеханической теории возмущений. Результаты при этом согласуются с интуитивными представлениями. Пусть на фотоэлектрический счетчик падает излучение интенсивностью $I(t)$; тогда дифференциальная вероятность dp появления одного отсчета в интервале времени dt определяется выражением

$$dp(t) = \alpha I(t) dt = \alpha V^*(t) V(t) dt. \quad (2.1)$$

Параметр α — коэффициент, характеризующий чувствительность детектора; он зависит от площади детектора, средних спектральных характеристик падающего излучения и т. д.

Предположим пока, что интенсивность $I(t)$ не испытывает флуктуаций. Физически естественно также принять, что вероятности отсчетов в различных интервалах времени статистически независимы. Учитывая последнее и пользуясь дифференциальным законом (2.1), в этом случае нетрудно вывести общее распределение для числа фотоотсчетов в заданном интервале времени. Для наглядности рассмотрим некоторые свойства этого распределения.

А. Распределение Пуассона

Поскольку $[1 - dp(t')]$ представляет собой вероятность *отсутствия* отсчета в интервале времени от t' до $t' + dt'$, общая вероятность того, что отсчет не произойдет во всем интервале $t, t + T$, вследствие статистической независимости событий определяется произведением вероятностей, что символически можно представить в виде

$$, \prod_t^{t+T} [1 - dp(t')] \rightarrow \exp \left[- \int_t^{t+T} dp(t') \right];$$

точное значение произведения в левой части раскрывается правой частью выражения. Следовательно, вероятность отсутствия отсчета в течение указанного интервала времени просто равна

$$P_0(0, T + t, t) = \exp \left[- \alpha \int_t^{t+T} I(t') dt' \right].$$

Подчеркнем еще раз, что этот результат получен в предположении об отсутствии флуктуаций интенсивности. Подобным образом, вероятность $P_0(1, T + t, t)$ того, что в интервале времени $t, t + T$ произойдет *один* отсчет, определяется формулой

$$„\sum_{i''} dp(t'') \prod_t^{t+T} [1 - dp(t')]“ \rightarrow \int_t^{t+T} dp(t'') \exp \left[- \int_t^{t+T} dp(t') \right],$$

из которой следует

$$P_0(1, T + t, t) = \alpha \int_t^{t+T} I(t') dt' \exp \left[- \alpha \int_t^{t+T} I(t') dt' \right].$$

Из аналогичных соображений получаем, что в случае постоянной интенсивности $I(t')$ вероятность того, что в интервале времени $t, t + T$ произойдет n отсчетов, определяется выражением

$$P_0(n, T + t, t) = \frac{1}{n!} \left(\alpha \int_t^{t+T} I(t') dt' \right)^n \exp \left[- \alpha \int_t^{t+T} I(t') dt' \right], \quad (2.2)$$

которое представляет собой известное распределение Пуассона. Формула (2.2) дает распределение отсчетов, соответствующее источнику электромагнитного поля строго постоянной интенсивности, например идеальному лазеру.

Если ввести обозначение

$$\mu \equiv \alpha \int_t^{t+T} I(t') dt',$$

то (2.2) запишется в виде

$$P_0(n, T + t, t) \equiv P_0(n, \mu) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}.$$

Пользуясь последним выражением, нетрудно рассмотреть некоторые классические свойства распределения

Пуассона. Среднее число отсчетов равно

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P_0(n, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{(n-1)!} e^{-\mu} = \mu,$$

а для среднего квадрата имеем

$$\begin{aligned} \bar{n}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P_0(n, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \mu^n}{(n-1)!} e^{-\mu} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n-1) + 1] \frac{\mu^n}{(n-1)!} e^{-\mu} = \mu^2 + \mu. \end{aligned}$$

Важной характеристикой любого распределения является дисперсия $\sigma^2 = \overline{(n - \bar{n})^2} = \bar{n}^2 - (\bar{n})^2$, которая представляет собой меру флуктуаций n около среднего значения \bar{n} ; для распределения Пуассона

$$\sigma^2 = \mu^2 + \mu - \mu^2 = \mu = \bar{n}.$$

Свойства распределения удобно описывать посредством характеристической функции, которая для распределения Пуассона имеет вид

$$C_0(s, \mu) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{ins} P_0(n, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{ins} \mu^n}{n!} e^{-\mu} = e^{(e^{is} - 1)\mu}. \quad (2.3)$$

Эта функция содержит всю информацию о распределении $P_0(n, \mu)$. Например, из (2.3), производя повторное дифференцирование относительно s и полагая $s = 0$, можно получить различные моменты распределения. Ниже мы часто будем пользоваться аппаратом характеристических функций.

§ 2. СЛУЧАЙНЫЕ ИНТЕНСИВНОСТИ

В гл. 1 при анализе частично когерентного света мы интерпретировали волновые поля $V(t)$, а следовательно, и интенсивность $I(t)$ как случайные переменные. Чтобы учесть это свойство $I(t)$, следует провести усреднение пуассоновского распределения отсчетов

$P_0(n, T + t, t)$ по соответствующему распределению интенсивности. При расчете моментов и других величин интенсивность входит фактически только в одной комбинации. Обозначим

$$U = \int_t^{T+t} I(t') dt'. \quad (2.4)$$

Благодаря случайному характеру $I(t')$ величина U сама является случайной с некоторым распределением $p(U)$. Обобщенное распределение фотоотсчетов, учитывающее случайность U , определяется формулой Манделя [2.1]

$$P(n, T + t, t) \equiv \int_0^{\infty} \frac{(\alpha U)^n}{n!} e^{-\alpha U} p(U) dU \quad (2.5)$$

и не является уже пуассоновским. Весьма удобная производящая функция обобщенного распределения отсчетов дается выражением

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T + t, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n P(n, T + t, t) = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda \alpha U} p(U) dU. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Видно, что производящая функция Q фактически связана с $p(U)$ преобразованием Лапласа. Разлагая Q около значения $\lambda = 1$, получаем с учетом (2.5) и (2.6)

$$P(n, T + t, t) = \frac{1}{n!} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} Q(\lambda, T + t, t) \Big|_{\lambda=1}, \quad (2.7)$$

тогда как разложение около значения $\lambda = 0$ приводит к выражению

$$\begin{aligned} \overline{n(n-1) \dots (n-k+1)} &\equiv \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) P(n, T + t, t) = \\ &= (-1)^k \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} Q(\lambda, T + t, t) \Big|_{\lambda=0}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $k = 1, 2, \dots$. Эти величины обычно называют «факториальными моментами».

Характеристическая функция для распределения отсчетов

$$C(s, T+t, t) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{isn} P(n, T+t, t) \quad (2.9)$$

также может быть весьма удобной для вычислений. Само распределение отсчетов дается фурье-преобразованием

$$P(n, T+t, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-isn} C(s, T+t, t) ds. \quad (2.10)$$

В результате многократного дифференцирования в нуле получаем

$$\overline{n^k} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n^k P(n, T+t, t) = \left(-i \frac{\partial}{\partial s} \right)^k C(s, T+t, t) \Big|_{s=0}. \quad (2.11)$$

Следует отметить, что, хотя соотношения (2.5) и (2.6) сравнительно просты, распределение $p(U)$, равно как и U , являются производными величинами. Непосредственный же физический смысл имеет не величина U , а волновое поле $V(t)$. Именно последняя величина входит в микроскопические уравнения движения и именно ее статистику мы исследуем. В следующих главах эти вопросы будут рассмотрены более полно как с классической, так и с квантовой точки зрения.

Здесь же при анализе проблем фотоотсчетов выделим два круга вопросов. Далее в этой главе мы займемся непосредственно соотношением (2.5) и рассмотрим некоторые общие свойства, которыми обладает любое распределение $p(U)$. Этот анализ имеет одно физически наглядное приложение. Пусть время T достаточно мало, так что в течение интервала T величина $I(t)$ остается практически постоянной, $I(t) \approx I$. Разумеется, это зависит от природы источника; существуют искусственно синтезированные тепловые источники, для которых такое приближение имеет смысл для времен $T \leq 10^{-4}$ сек,

Если считать интенсивность I приблизительно постоянной, то можно принять

$$U = \int_t^{T+t} I(t) dt = IT. \quad (2.12)$$

Таким образом, распределение величины U соответствует распределению величины I , о которой мы имеем больше физических представлений. Вначале рассмотрим именно такую физическую модель.

В следующей главе мы проанализируем распределения фотоотсчетов, базирующиеся на более глубоких физических моделях, которые содержат ансамбли волновых полей $V(t)$, и, в частности, рассмотрим более подробно, чем в настоящей главе, их зависимость от T .

А. Статистика фотоотсчетов для малых временных интервалов

Для более ясного понимания эффектов, связанных с флуктуациями интенсивности в теории фотоотсчетов, рассмотрим прежде всего случай, когда применимо соотношение (2.12). Если рассматривать интенсивность I как случайную переменную с распределением $p(I)$, то распределение отсчетов можно записать в виде

$$P(n, T) = \int_0^{\infty} \frac{(\alpha IT)^n}{n!} e^{-\alpha IT} p(I) dI, \quad (2.13)$$

где опущена несущественная зависимость от t .

Одним из самых важных общих свойств обобщенного распределения $P(n, T)$ является *группировка отсчетов*, которая приводит к возрастанию дисперсии. Если принять с физической точки зрения естественное предположение о том, что $p(I)$ обладает всеми необходимыми моментами, то среднее число отсчетов равно

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \sum_{n=0}^{\infty} nP(n, T) = \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(\alpha IT)^n}{n!} e^{-\alpha IT} p(I) dI = \\ &= \int_0^{\infty} \alpha T I p(I) dI \equiv \alpha T \langle I \rangle, \end{aligned}$$

где различные моменты интенсивности определяются выражением

$$\langle I^n \rangle \equiv \int_0^{\infty} I^n p(I) dI. \quad (2.14)$$

Аналогично для среднего квадрата имеем [ср. (2.8)]

$$\begin{aligned} \bar{n}^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n, T) = \int_0^{\infty} [\alpha^2 T^2 I^2 + \alpha T I] p(I) dI = \\ &= \alpha^2 T^2 \langle I^2 \rangle + \alpha T \langle I \rangle; \end{aligned}$$

следовательно, дисперсия σ^2 равна

$$\sigma^2 = \bar{n}^2 - (\bar{n})^2 = \alpha T \langle I \rangle + \alpha^2 T^2 [\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2] \quad (2.15)$$

и всегда превосходит \bar{n} , если распределение $p(I)$ не является δ -функцией Дирака $\delta(I - I_0)$.

Примером распределения, представляющего особый физический интерес, является *тепловое распределение*

$$p(I) = I_0^{-1} e^{-I/I_0}, \quad (2.16)$$

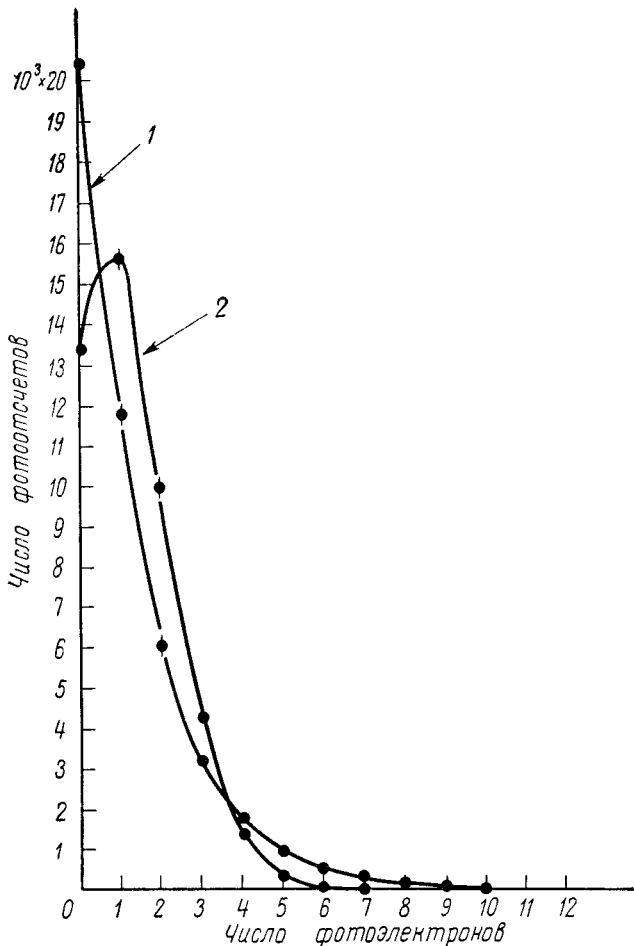
для которого моменты имеют вид

$$\begin{aligned} \langle I^n \rangle &= I_0^{-1} \int_0^{\infty} I^n e^{-I/I_0} dI = \\ &= I_0^n \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n! I_0^n. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Поскольку $\bar{n} = \alpha T \langle I \rangle = \alpha T I_0$, соотношение (2.15) приводит к дисперсии

$$\sigma^2 = \alpha T I_0 + \alpha^2 T^2 [2I_0^2 - I_0^2] = \bar{n} (1 + \bar{n}), \quad (2.18)$$

которая превышает значение, выведенное из распределения Пуассона.



Фиг. 2. Зависимость числа отсчетов $F(n)$ от числа фотоэлектронов для искусственного гауссова источника (1) и лазерного излучения (2). (По данным Ареки [2.4].)

Кривая 1 соответствует приближенному геометрическому распределению со средним числом фотоотсчетов $\bar{n} = \{F(0)/F(1) - 1\}^{-1} \approx 1,4$; кривая 2 соответствует приближенному распределению Пуассона с $\bar{n} = F(1)/F(0) \approx 1,2$. В этих экспериментах время наблюдения T было порядка $3 \cdot 10^{-5}$ сек.

Из (2.6) следует, что производящая функция этого распределения определяется выражением

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T) &= I_0^{-1} \int_0^{\infty} \exp\left(-\lambda \alpha I T - \frac{I}{I_0}\right) dI = \\ &= (1 + \lambda \alpha I_0 T)^{-1} = (1 + \lambda \bar{n})^{-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Наконец, распределение отсчетов для рассматриваемого случая вычисляется непосредственно из (2.5):

$$\begin{aligned} P(n, T) &= \frac{(\alpha T)^n}{I_0 n!} \int_0^{\infty} I^n \exp\left[-I\left(\alpha T + \frac{1}{I_0}\right)\right] dI = \\ &= \frac{(\alpha T)^n}{I_0 n!} \left(\alpha T + \frac{1}{I_0}\right)^{-(n+1)} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \\ &= (1 + \alpha I_0 T)^{-1} \left(1 + \frac{1}{\alpha I_0 T}\right)^{-n} = (1 + \bar{n})^{-1} (1 + \bar{n}^{-1})^{-n}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где $\bar{n} \equiv \alpha I_0 T$.

В своих экспериментах по фотоотсчетам Ареки [2.4] проверил характеризующее это распределение соотношение $P(n, T) \sim \gamma^n$, где $\gamma = (1 + \bar{n}^{-1})^{-1}$. Эксперимент был поставлен таким образом, что условие (2.12) выполнялось. Ареки показал также, что распределение Пуассона приближенно описывает фотоотсчеты при возбуждении высокостабилизированным лазером (фиг. 2). Ряд других распределений отсчетов, для которых условие (2.12) не выполняется, рассмотрен в следующей главе и в гл. 9, где используется квантовый подход.

§ 3. НАХОЖДЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОТСЧЕТОВ

Важные физические свойства частично когерентного излучения содержатся в самой природе статистического ансамбля. Естественно возникает вопрос, в какой мере с помощью распределения отсчетов $P(n, T + t, t)$ можно определить общее распределение $p(U)$ в (2.5). Прежде

всего докажем, что полное распределение отсчетов единственным образом определяет $p(U)$.

Характеристическая функция для распределения $p(U)$ дается фурье-преобразованием

$$C(s) = \int_0^{\infty} e^{tsU} p(U) dU. \quad (2.21)$$

Как и выше, моменты распределения $p(U)$, если они существуют, можно найти из $C(s)$ дифференцированием. Однако поскольку интенсивности не могут быть отрицательными, $C(s)$ является фактически граничным значением (при $t \rightarrow 0^+$) аналитической функции

$$C(s + it) \equiv \int_0^{\infty} e^{isU - tU} p(U) dU, \quad (2.22)$$

которая аналитична во всей верхней полуплоскости $t > 0$. Частичные сведения об этой функции в верхней полуплоскости содержатся в выражении

$$\begin{aligned} C(i\lambda\alpha) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha U} p(U) dU = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n \int_0^{\infty} \frac{(\alpha U)^n}{n!} e^{-\alpha U} p(U) dU = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n P(n, T + t, t) \end{aligned} \quad (2.23)$$

при действительном значении λ , лежащем в интервале $0 \leq \lambda \leq 1$. Однако благодаря особым свойствам аналитических функций функция $C(s + it)$ во всей верхней полуплоскости единственным образом определяется частичной информацией, содержащейся в (2.23). Таким образом, показано, что характеристическая функция, а следовательно, и распределение определяются единственным образом.

Явная связь распределения интенсивности с распределением отсчетов дается соотношением, полученным

Виддером [2.6]; она рассмотрена в книге Шохата и Тамаркина [2.7]. Здесь мы изложим этот вывод в несколько измененном виде. Введем для удобства обозначение $y \equiv \alpha U$ и определим величину $\hat{p}(y) = \alpha^{-1} p(U)$ так, что

$$P(n, T+t, t) = \int_0^{\infty} \frac{y^n}{n!} \hat{p}(y) e^{-y} dy. \quad (2.24)$$

Это соотношение естественно наводит на мысль о применении полиномов Лагерра $L_p(y)$ ($p = 0, 1, 2, \dots$):

$$L_p(y) \equiv \frac{1}{p!} e^y \frac{d^p}{dy^p} y^p e^{-y} = \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \frac{(-y)^k}{k!}, \quad (2.25)$$

удовлетворяющих условию ортогональности

$$\int_0^{\infty} L_p(y) L_q(y) e^{-y} dy = \delta_{pq}. \quad (2.26a)$$

Это условие простой заменой переменных можно привести к виду

$$2 \int_0^{\infty} L_p(2y) L_q(2y) e^{-2y} dy = \delta_{pq}. \quad (2.26b)$$

Теперь определим конечные линейные комбинации распределения отсчетов

$$\begin{aligned} \lambda_n &\equiv 2 \int_0^{\infty} L_n(2y) \hat{p}(y) e^{-y} dy = \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-2)^k P(k, T+t, t), \end{aligned} \quad (2.27)$$

где n — любое число. В силу условия ортогональности

$$\hat{p}(y) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m L_m(2y) e^{-y}. \quad (2.28)$$

Таким образом, в первоначальных обозначениях имеем

$$p(U) = \alpha \sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m L_m(2\alpha U) e^{-\alpha U}. \quad (2.29)$$

Соотношение (2.29) определяет $p(U)$ через $P(k, T+t, t)$.

В связи с соотношением (2.29) сделаем несколько замечаний, которые относятся также к аналогичным разложениям, рассматриваемым ниже. Как и в отношении любого разложения в ортогональные ряды, при интерпретации соотношения (2.29) следует проявлять осторожность. Чтобы ряд (2.29) сходиллся при любом значении U и, таким образом, определял функцию $p(U)$,

достаточно выполнения условия $\sum_{m=0}^{\infty} |\lambda_m| < \infty$, поскольку

для положительных аргументов αU справедливо неравенство $|L_m(2\alpha U)| \leq 1$. Если сумма коэффициентов λ_m сходится абсолютно, функция $p(U)$, определяемая соотношением (2.29), непрерывна. Однако при расчете часто приходится пользоваться сингулярными, или разрывными, распределениями $p(U)$. В качестве примера можно назвать часто применяемое прямоугольное распределение: $p(U) = U_0^{-1}$ при $0 \leq U \leq U_0$ и $p(U) = 0$ при $U > U_0$. В точке U_0 , в которой функция $p(U)$ сингулярна, или разрывна, представление в виде ряда (2.29), строго говоря, может быть несправедливым. В этом случае следует обратиться к более общей интерпретации ряда типа (2.29), а именно рассмотреть сходимость «в среднем». В частности, если ввести неполную сумму, зависящую от M ,

$$p_M(U) \equiv \alpha \sum_{m=0}^M \lambda_m L_m(2\alpha U) e^{-\alpha U}, \quad (2.30)$$

тогда справедливо представление (2.29) интегрируемой функции $p(U)$ в том смысле, что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |p(U) - p_M(U)| dU = 0. \quad (2.31)$$

Этот вид сходимости последовательности функций $p_M(U)$, $M = 1, 2, \dots$ часто называют L^1 сходимостью.

Ее можно применять здесь, поскольку мы имеем дело с плотностями вероятности. Такая сходимость означает, что для каждой ограниченной функции $b(U)$ последовательность приближенных средних значений

$$b_M \equiv \int b(U) p_M(U) dU, \quad M = 1, 2, \dots, \quad (2.32a)$$

сходится к точному значению

$$b \equiv \int b(U) p(U) dU. \quad (2.32b)$$

Приведем примеры функций $b(U)$, для которых приближенные средние значения сходятся к точным значениям: 1) $\exp(isU)$ для характеристической функции (2.21); 2) $\exp(-\lambda\alpha U)$ для производящей функции (2.6) и 3) $(n!)^{-1}(\alpha U)^n \exp(-\alpha U)$ для вероятности n отсчетов (2.5).

А. Независимые вклады

В заключение настоящей главы остановимся на применении производящей функции (и в равной мере характеристической функции) для анализа распределения. Опустим для удобства зависимость от времени и рассмотрим для простоты два распределения отсчетов и их производящие функции

$$Q_j(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} (1-\lambda)^n P_j(n) \quad (j = 1, 2). \quad (2.33)$$

Образую произведение функций Q_1 и Q_2 , находим

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &\equiv Q_1(\lambda) Q_2(\lambda) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} (1-\lambda)^{n_1+n_2} P_1(n_1) P_2(n_2) \equiv \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} (1-\lambda)^n P(n), \end{aligned} \quad (2.34)$$

где

$$P(n) \equiv \sum_{m=0}^n P_1(n-m) P_2(m). \quad (2.35)$$

Каждое значение $P(n)$, очевидно, положительно, и их сумма равна единице, так что (2.35) определяет «на-

стоящее» распределение. Таким образом, мы приходим к важному выводу, состоящему в том, что *произведение* производящих (или характеристических) функций дает новое распределение. Таким способом часто удобно конструировать распределения или выводить новые, особенно если их статистика определяется несколькими независимыми причинами.

Вследствие прямой связи между $Q(\lambda)$ и характеристической функцией распределения $p(U)$ распределение интенсивности дается интегральным преобразованием. В частности, из (2.6) находим

$$\begin{aligned} Q(\lambda) &= Q_1(\lambda) Q_2(\lambda) = \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \exp[-\lambda\alpha(U_1 + U_2)] p_1(U_1) p_2(U_2) dU_1 dU_2 = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda\alpha U} p(U) dU, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где

$$p(U) \equiv \int_0^U p_1(U - W) p_2(W) dW. \quad (2.37)$$

Последнее соотношение представляет собой распределение случайной переменной

$$U \equiv U_1 + U_2, \quad (2.38)$$

равной сумме двух *независимо* распределенных величин U_1 и U_2 , имеющих соответственно распределения p_1 и p_2 .

В качестве простого физического примера, иллюстрирующего применение этих формул, рассмотрим фотостатистику для малых времен T , для которых справедливо приближение $U_j = TI_j$. Предположим, что I_1 и I_2 представляют интенсивности двух линейно независимых мод поляризации падающей волны. Если эти моды статистически независимы и характеризуются тепловым распределением (2.16), то соответствующая производящая функция получается из (2.19):

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T) &= Q_1(\lambda, T) Q_2(\lambda, T) = \\ &= (1 + \lambda \bar{n}_1)^{-1} (1 + \lambda \bar{n}_2)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.39)$$

где для $j = 1, 2$ мы положили

$$\bar{n}_j = \alpha T \langle I_j \rangle = \alpha T I_{0j}. \quad (2.40)$$

Введем важный параметр

$$\mathcal{P} \equiv \left| \frac{\bar{n}_1 - \bar{n}_2}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} \right| = \left| \frac{I_{01} - I_{02}}{I_{01} + I_{02}} \right|, \quad (2.41)$$

который, как показано в гл. 5, можно связать со степенью поляризации падающего излучения. Не ограничивая общности, можно положить $I_{01} \geq I_{02}$. Тогда

$$I_{01} = \frac{1}{2} (1 + \mathcal{P}) I_0, \quad \bar{n}_1 = \frac{1}{2} (1 + \mathcal{P}) \bar{n}, \quad (2.42a)$$

$$I_{02} = \frac{1}{2} (1 - \mathcal{P}) I_0, \quad \bar{n}_2 = \frac{1}{2} (1 - \mathcal{P}) \bar{n}, \quad (2.42b)$$

где

$$I_0 \equiv I_{01} + I_{02}, \quad \bar{n} \equiv \bar{n}_1 + \bar{n}_2 = \alpha T I_0. \quad (2.43)$$

Из (2.39), преобразуя дробь

$$\frac{1}{(1 + \lambda \bar{n}_1)} \frac{1}{(1 + \lambda \bar{n}_2)} = \frac{1}{(\bar{n}_1 - \bar{n}_2)} \left[\frac{\bar{n}_1}{1 + \lambda \bar{n}_1} - \frac{\bar{n}_2}{1 + \lambda \bar{n}_2} \right], \quad (2.44)$$

можно получить распределение отсчетов и интенсивности. В частности, из (2.20) находим распределение отсчетов

$$P(n, T) = \frac{1}{\mathcal{P} \bar{n}} \left\{ \frac{1}{[1 + 2/(1 + \mathcal{P}) \bar{n}]^{n+1}} - \frac{1}{[1 + 2/(1 - \mathcal{P}) \bar{n}]^{n+1}} \right\}, \quad (2.45)$$

а из (2.16) — распределение интенсивности

$$p(I) = \frac{1}{\mathcal{P} I_0} \left\{ \exp \left[- \frac{2I}{(1 + \mathcal{P}) I_0} \right] - \exp \left[- \frac{2I}{(1 - \mathcal{P}) I_0} \right] \right\}. \quad (2.46)$$

Кроме того, отметим, что для теплового распределения, связанного с (2.44), в силу свойства $\bar{n}^2 = \bar{n}(1 + 2\bar{n})$ получаем для дисперсии отсчетов

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (\bar{n}_1 - \bar{n}_2)^{-1} [\bar{n}_1^2(1 + 2\bar{n}_1) - \bar{n}_2^2(1 + 2\bar{n}_2)] - \bar{n}^2 = \\ &= [(\bar{n}_1 + \bar{n}_2) + (\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2)] \equiv \bar{n} [1 + \varepsilon \bar{n}], \end{aligned} \quad (2.47a)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon &\equiv (\bar{n})^{-2} [\bar{n}_1^2 + \bar{n}_2^2] = \\ &= \frac{1}{2} (\bar{n})^{-2} [(\bar{n}_1 + \bar{n}_2)^2 + (\bar{n}_1 - \bar{n}_2)^2] = \\ &= \frac{1}{2} [1 + \mathcal{P}^2]. \end{aligned} \quad (2.476)$$

В гл. 5 показано, что для поляризованного света $\mathcal{P} = 1$ и $\varepsilon = 1$ [и значение σ^2 согласуется с результатом (2.18)], а для неполяризованного света $\mathcal{P} = 0$ и $\varepsilon = 1/2$.

Заметим, что если $\mathcal{P} = 0$, то $Q(\lambda) = (1 + \lambda\bar{n}/2)^{-2}$. В более общем случае, если

$$Q(\lambda) = \left(1 + \frac{\lambda\bar{n}}{N}\right)^{-N}, \quad (2.48)$$

что соответствует N статистически независимым «тепловым» переменным с одинаковыми распределениями, дисперсия отсчетов равна

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \overline{n^2} - \bar{n}^2 = \overline{n(n-1)} + \bar{n}(1 - \bar{n}) = \\ &= \bar{n}(1 - \bar{n}) + \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} Q(\lambda) \Big|_{\lambda=0} = \\ &= \bar{n}(1 - \bar{n}) + \left(1 + \frac{1}{N}\right) \bar{n}^2 = \bar{n} \left(1 + \frac{\bar{n}}{N}\right); \end{aligned} \quad (2.49)$$

здесь использован факториальный момент второго порядка, определяемый соотношением (2.8). Для эвристических целей часто оказывается полезной интерпретация общего распределения как совокупности независимых «тепловых» распределений, число которых (N для рассмотренного выше случая) можно найти, очевидно, непосредственно из дисперсии. Параметр вырождения δ (который выше был равен \bar{n}/N) представляет собой среднее заполнение на одну независимую переменную, или, как часто говорят, на одну «ячейку».

Если принять (2.48) в качестве адекватного приближения для полной производящей функции, то из

(2.6) следует, что соответствующее распределение переменной U определяется выражением

$$p(U) = \left(\frac{\alpha N}{\bar{n}} \right) \frac{U^{N-1}}{\Gamma(N)} e^{-\alpha N U / \bar{n}}. \quad (2.50)$$

Помимо этого, из (2.7) найдем распределение отсчетов

$$P(n) = \frac{(1 + \bar{n}/N)^{-N}}{n!} \left(\frac{\bar{n}}{\bar{n} + N} \right)^n \prod_{p=1}^n (p + N - 1). \quad (2.51)$$

В последующих главах с этой точки зрения будет интерпретировано несколько распределений.

Полуклассическая теория фотоэлектрических отсчетов

§ 1. СЛУЧАЙНЫЕ ВОЛНОВЫЕ ПОЛЯ

Рассмотрим теперь распределение фотоэлектрических отсчетов для произвольных частично когерентных световых пучков, падающих на счетчики. Для упрощения анализа будем по-прежнему использовать скалярное оптическое волновое поле. Ниже в основу расчета положена статистика поля; при вычислении распределения отсчетов $P(n, T + t, t)$ будем рассматривать волновое поле $V(\mathbf{r}, t)$ как случайную величину. Пусть в точке \mathbf{r}_i находится идеализированный «точечный» счетчик (переменную \mathbf{r}_i опускаем) и распределение отсчетов стационарно (так что можно опустить и t). В этом случае соотношение (2.5) имеет вид

$$P(n, T) = \frac{1}{n!} \left\langle \left(\alpha \int_0^T V^*(t') V(t') dt' \right)^n \times \right. \\ \left. \times \exp \left[- \alpha \int_0^T V^*(t') V(t') dt' \right] \right\rangle, \quad (3.1)$$

где угловые скобки означают усреднение по ансамблю полей V . Из этого соотношения непосредственно получаем значения среднего числа отсчетов

$$\bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n, T) = \left\langle \alpha \int_0^T V^*(t') V(t') dt' \right\rangle \quad (3.2)$$

и среднего квадрата числа отсчетов

$$\begin{aligned} \overline{n^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 P(n, T) = \\ &= \left\langle \alpha^2 \int_0^T \int_0^T V^*(t') V(t') V^*(t'') V(t'') dt' dt'' \right\rangle + \bar{n}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что для полного расчета среднего квадрата $\overline{n^2}$ недостаточно знать функцию взаимной когерентности Γ , определяемую соотношением (1.13). Если для анализа интерференционных явлений в частично когерентном излучении нам было достаточно только этой корреляционной функции, то теперь необходимо использовать корреляционную функцию четвертого порядка. Для вычисления моментов высших порядков необходимо знать корреляционные функции еще более высокого порядка. Как и в гл. 2, моменты удобно рассчитывать с помощью производящей функции

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T) &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda)^n P(n, T) = \\ &= \left\langle \exp \left[-\lambda \alpha \int_0^T V^*(t') V(t') dt' \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для вычисления $P(n, T)$ или $Q(\lambda, T)$ необходимы корреляционные функции поля $V(t')$ произвольно высокого порядка.

В (3.1)–(3.4) усреднение проводится по ансамблю случайных комплексных функций $V(t)$ (а не по одной переменной U , как в гл. 2). Такие усреднения играют важную роль для ряда физических и математических приложений; существует обширная литература, касающаяся их свойств. Здесь можно упомянуть книги Бартлетта [3.4], Рамакришнана [3.5] и сборник статей под редакцией Векса [3.2], в которых дано общее рассмотрение проблемы. Более специальный математический характер носят книги Дуба [3.7] и Гельфанда и Виленкина [3.6].

Ниже мы дадим краткий обзор свойств стохастических процессов (случайных функций) и методов их описания, пригодных для последовательного вычисления функции распределения отсчетов (3.1) или ее производящей функции (3.4). Свойства классических стохастических процессов не только непосредственно используются в настоящей главе, но будут важны и при квантовом рассмотрении.

§ 2. СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Напомним, что для описания распределения вероятности конечного числа n случайных переменных обычно задают функцию плотности вероятности $\rho_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$ для n величин x_j .

Как уже отмечалось ранее, эквивалентное описание может быть получено с помощью характеристической функции ¹⁾

$$C_n(s_1, s_2, \dots, s_n) = \int \dots \int \exp\left(i \sum x_j s_j\right) \rho_n(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n; \quad (3.5)$$

эта функция, определенная для всех действительных значений s_j , представляет собой фурье-образ ρ_n . Независимо от характера поведения ρ_n функция C_n всегда непрерывна и однозначно определяет ρ_n . Более того, любое среднее значение, которое существует, можно всегда найти, пользуясь функцией C_n . Вообще говоря, оба эти свойства не имеют места, если ρ_n определять через моменты. При этом может оказаться, что некоторые или все моменты бесконечны, однако даже в том случае, когда все они конечны, они могут неоднозначно определять функцию ρ_n .

В качестве примера определим характеристическую функцию, предполагая, что ρ_n представляет собой

¹⁾ Мы будем опускать пределы интегрирования, если они ясны из контекста или, как в данном случае, пробегают значения от $-\infty$ до $+\infty$.

гауссово распределение с отличным от нуля средним значением

$$\rho_n = \pi^{-n/2} (\det a_{jk})^{-1/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum (x_j - b_j) a_{jk} (x_k - b_k) \right], \quad (3.6)$$

где каждое суммирование производится от 1 до n . Тогда в результате непосредственных вычислений получаем выражение

$$C_n \equiv \langle \exp(i \sum x_j s_j) \rangle = \exp \left(i \sum s_j b_j - \frac{1}{2} \sum s_j a_{jk}^{-1} s_k \right), \quad (3.7)$$

где a_{jk}^{-1} — элементы матрицы, обратной по отношению к матрице с элементами a_{jk} . Замечая, что в экспоненту (3.7) входят только члены второго порядка и разлагая в ряд левую и правую части, получаем

$$\langle \sum x_j s_j \rangle = \sum s_j b_j, \quad (3.8a)$$

$$\langle (\sum x_j s_j)^2 \rangle - \langle \sum x_j s_j \rangle^2 = \sum s_j a_{jk}^{-1} s_k. \quad (3.8б)$$

Поэтому C_n можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \exp(i \sum x_j s_j) \rangle &= \\ &= \exp \left(i \sum s_j \langle x_j \rangle - \frac{1}{2} \sum s_j \langle \Delta x_j \Delta x_k \rangle s_k \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $\Delta x_j \equiv x_j - \langle x_j \rangle$. Это функциональное соотношение характерно для гауссового распределения и его, собственно, можно рассматривать вместо (3.6) в качестве его *определения*.

Если перейти к бесконечному числу случайных переменных, то соответствующая плотность вероятности будет иметь, вообще говоря, только эвристическое значение. В то же время характеристическая функция (теперь функционал) сохраняет смысл и является характеристикой случайного процесса в целом. В частности, если распространить пределы суммирования до бесконечности, то соотношение (3.9) можно рассматривать как характеристический функционал гауссова процесса с бесконеч-

ным числом случайных переменных. При этом следует иметь в виду одно ограничение. Если для конечного числа степеней свободы значение каждой величины s_j могло быть произвольным действительным числом, то теперь для сохранения свойств непрерывности и дифференцируемости последовательности s_j ($j = 1, 2, \dots$) следует выбирать таким образом, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{j=1}^{\infty} |s_j \langle x_j \rangle| < \infty, \quad (3.10a)$$

$$\sum_{j, k=1}^{\infty} s_j \langle \Delta x_j \Delta x_k \rangle s_k < \infty. \quad (3.10б)$$

Чтобы подчеркнуть ограниченный характер последовательностей s_j , удовлетворяющих (3.10), их называют *гладкими*, или *пробными*, последовательностями. Здесь нет необходимости конкретизировать какой-либо частный набор гладких последовательностей. Многие интересные результаты можно получить, не задавая более подробно полный набор подходящих последовательностей. Существенно то обстоятельство, что на допускаемые последовательности s_j следует налагать *некоторые* ограничения, иначе говоря, не каждая мыслимая последовательность s_j пригодна.

Часто удобнее применять другое возможное описание формы последовательности. Пусть функции $u_j(t)$ образуют полную ортогональную последовательность действительных функций одного переменного. Пользуясь этими функциями и случайными величинами x_j , можно образовать стохастическую переменную

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j u_j(t), \quad (3.11)$$

которая является случайной функцией времени. Подобным образом каждой гладкой последовательности можно сопоставить гладкую пробную функцию

$$s(t) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j u_j(t). \quad (3.12)$$

Пользуясь этими двумя величинами, характеристический функционал гауссова распределения можно записать следующим образом:

$$C \{s(t)\} = \left\langle \exp \left[i \int s(t) x(t) dt \right] \right\rangle = \exp \left[i \int s(t) \langle x(t) \rangle dt - \frac{1}{2} \int \int s(t') \langle \Delta x(t') \Delta x(t'') \rangle s(t'') dt' dt'' \right]. \quad (3.13)$$

Условия, которым должны удовлетворять функции $s(t)$, очевидно, имеют вид

$$\int |s(t) \langle x(t) \rangle| dt < \infty, \quad (3.14a)$$

$$\int \int s(t') \langle \Delta x(t') \Delta x(t'') \rangle s(t'') dt' dt'' < \infty. \quad (3.14b)$$

Как и в случае последовательностей s_j , обычно не требуется точно указывать полный набор гладких функций. В большинстве интересных для физики случаев можно считать, что подходящие гладкие функции бесконечно дифференцируемы и при $t \rightarrow \pm \infty$ спадают быстрее, чем t^{-n} , где n — любое положительное число.

Временное представление типа (3.13) удобно для анализа стационарных распределений, для которых

$$\langle x(t) \rangle = \langle x(0) \rangle = m \quad (3.15a)$$

и

$$\langle \Delta x(t') \Delta x(t'') \rangle = \langle \Delta x(t' - t'') \Delta x(0) \rangle. \quad (3.15b)$$

Последнее выражение можно записать в общей форме

$$\langle \Delta x(t') \Delta x(t'') \rangle = \int \exp[-2\pi i \nu (t' - t'')] \tilde{\mu}(\nu) d\nu, \quad (3.16)$$

где $\tilde{\mu}(\nu) \geq 0$. Если применить эти соотношения и ввести гладкую функцию, зависящую от частоты,

$$\tilde{s}(\nu) = \int \exp(2\pi i \nu t) s(t) dt, \quad (3.17)$$

то выражение (3.13) принимает вид

$$C \{\tilde{s}(\nu)\} = \exp \left[im\tilde{s}(0) - \frac{1}{2} \int \tilde{s}^*(\nu) \tilde{\mu}(\nu) \tilde{s}(\nu) d\nu \right]. \quad (3.18)$$

Полученный результат означает, что каждая спектральная компонента стационарного гауссова стохастического

процесса является величиной с независимым гауссовым распределением и относительной дисперсией $\tilde{\mu}(\nu)$.

Резюмируя анализ этого примера, отметим, что выражение (3.18) содержит все величины, необходимые для расчета произвольного момента стационарного гауссова стохастического процесса; сказанное означает, что моменты зависят, следовательно, только от величины m и одной функции $\tilde{\mu}(\nu)$. Следует также отметить, что условия стационарности можно вывести из (3.13), просто требуя выполнения равенства $C\{s(t)\} = C\{s(t+t_0)\}$ для любого t_0 и любых гладких функций $s(t)$.

В теории когерентности удобнее иметь дело не с действительными случайными волновыми полями, а с соответствующими аналитическими сигналами. Принимая во внимание соотношение (1.3), для действительных функций времени $S^{(r)}$ и $V^{(r)}$ прежде всего имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int S^{(r)}(t) V^{(r)}(t) dt &= \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \tilde{S}^{(r)*}(\nu) \tilde{V}^{(r)}(\nu) d\nu \equiv \\ &\equiv \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \tilde{S}^*(\nu) \tilde{V}(\nu) d\nu = \operatorname{Re} \int S^*(t) V(t) dt, \end{aligned} \quad (3.19)$$

где $V = 1/2[V^{(r)} + iV^{(i)}]$ — аналитический сигнал соответствующего волнового поля и $S = 1/2[S^{(r)} + iS^{(i)}]$ — аналитический сигнал соответствующей гладкой функции. Таким образом, применяя аналитические сигналы $V(t)$ и $S(t)$, характеристический функционал для любых распределений поля можно представить в виде

$$C\{S(t)\} \equiv \langle \exp \left[i \int S^{(r)} V^{(r)} dt \right] \rangle = \langle \exp \left[i \int (S^* V + S V^*) dt \right] \rangle. \quad (3.20)$$

Рассматриваемый ансамбль стационарен, если для любых $V(t)$ и $S(t)$ выполняется условие

$$C\{S(t+t_0)\} = C\{S(t)\}. \quad (3.21a)$$

В частотном представлении это условие принимает вид

$$C\{\tilde{S}(\nu) \exp(-2\pi i \nu t_0)\} = C\{\tilde{S}(\nu)\} \quad (3.21b)$$

для любых t_0 и $\tilde{S}(\nu)$.

Спектральные компоненты распределены независимо, если для всех $\tilde{S}_1(\nu)$ и $\tilde{S}_2(\nu)$, для которых $\tilde{S}_1(\nu) \tilde{S}_2(\nu) = 0$, выполняется условие

$$C \{ \tilde{S}_1(\nu) + \tilde{S}_2(\nu) \} = C \{ \tilde{S}_1(\nu) \} C \{ \tilde{S}_2(\nu) \}. \quad (3.22)$$

Для комплексных волновых полей часто имеет место другое условие, связанное с отсутствием достаточно полных сведений о фазе. Физически оно может появиться, например, если поля $V(t)$ и $e^{i\varphi}V(t)$, где фаза φ постоянна, рассматривать как равноценные. Равноправие фаз в этом случае можно обеспечить, полагая, что условие

$$C \{ e^{-i\varphi} S(t) \} = C \{ S(t) \} \quad (3.23)$$

выполнено для всех действительных φ и $S(t)$. В свою очередь это условие будет выполняться, если для некоторого функционала C_1 имеет место соотношение

$$C \{ S(t) \} = C_1 \{ S^*(t') S(t'') \}, \quad (3.24a)$$

или, в терминах гладкой спектральной функции,

$$C \{ \tilde{S}(\nu) \} = C_1 \{ \tilde{S}^*(\nu') \tilde{S}(\nu'') \}. \quad (3.24б)$$

Наконец, отметим, что удовлетворить как условию равноправия фаз, так и условию стационарности можно простым (но не единственным) способом, потребовав выполнения соотношения

$$C \{ \tilde{S}(\nu) \} = \bar{C} \{ \tilde{S}^*(\nu) \tilde{S}(\nu) \} \quad (3.25)$$

для некоторого приемлемого функционала \bar{C} .

Применим эти условия к конкретным случаям. Прежде всего рассмотрим опять случай гауссова распределения. Обобщая очевидным образом выражение (3.13), получаем характеристический функционал комплексного стационарного стохастического гауссова процесса с неопределенной фазой

$$\begin{aligned} C \{ S(t) \} &= \exp \left[- \int \int S^*(t') \langle V(t') V^*(t'') \rangle S(t'') dt' dt'' \right] = \\ &= \exp \left[- \int \int S^*(t') \Gamma(t' - t'') S(t'') dt' dt'' \right] = \\ &= \exp \left[- \int \tilde{S}^*(\nu) \tilde{\Gamma}(\nu) \tilde{S}(\nu) d\nu \right]; \end{aligned} \quad (3.26)$$

этот функционал удовлетворяет условиям (3.21) — (3.25). Физически $\tilde{\Gamma}(\nu)$ представляет среднюю энергию на частоте ν , содержащуюся в волновых полях, которые образуют определенный гауссов ансамбль.

В гл. 2 с помощью перемножения характеристических функций мы получили новые распределения. Покажем, что новые распределения можно также получить, считая некоторые параметры рассматриваемого распределения случайными величинами и усредняя соответствующим образом характеристический функционал.

Предположим сначала, что в (3.26) $\tilde{\Gamma}(\nu)$ имеет форму

$$\tilde{\Gamma}(\nu) = \tilde{G}(\nu) + p\tilde{H}(\nu), \quad (3.27)$$

где все члены положительны. Будем рассматривать \tilde{G} и \tilde{H} как заданные функции, а p — как новую дискретную случайную величину ($p = 0, 1, 2, \dots$) с распределением Пуассона, среднее значение которой $\langle p \rangle = \mu$. Полученный характеристический функционал для нового модифицированного распределения (с учетом случайного характера p) имеет вид

$$\begin{aligned} C\{S(t)\} &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mu^p}{p!} \exp \left[-\mu - \int |\tilde{S}|^2 (\tilde{G} + p\tilde{H}) d\nu \right] = \\ &= \exp \left\{ -\int |\tilde{S}|^2 \tilde{G} d\nu - \mu \left[1 - \exp \left(-\int |\tilde{S}|^2 \tilde{H} d\nu \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Хотя функционал (3.28) является стационарным, условие (3.22) не выполняется; таким образом, он не соответствует независимым распределениям для каждой частоты.

Рассмотрим другой пример. Возьмем теперь в (3.26) $\tilde{\Gamma}(\nu)$ в виде

$$\tilde{\Gamma}(\nu) = \tilde{G}(\nu) + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{K}(\nu_j) \delta(\nu - \nu_j), \quad (3.29)$$

где опять все члены положительны. Предположим, что функции \tilde{G} и \tilde{K} заданы, а частоты ν_j будем считать независимыми случайными переменными, каждая из которых равномерно распределена в интервале $|\nu| \leq F/2$.

Грубо говоря, $\tilde{\Gamma}(\nu)$ представляет собой случайную величину, состоящую из большого числа независимых δ -образных вкладов (ситуация, аналогичная дробовому шуму), амплитуды которых определяются функциями $\tilde{K}(\nu)$, а центральные частоты распределены равномерно. В пределе, когда $N \rightarrow \infty$, $F \rightarrow \infty$, причем величина $N/F = \rho$ остается конечной, можно получить результирующее модифицированное распределение (см. вывод Райса [3.3]) с характеристическим функционалом

$$C\{S(t)\} = \exp \left\{ - \int [|\tilde{S}|^2 \tilde{G} + \rho (1 - \exp[-\tilde{K}|\tilde{S}|^2])] d\nu \right\}. \quad (3.30)$$

Как и для функционала (3.26), мы имеем здесь независимое распределение для каждой частоты.

Вышеприведенное краткое рассмотрение должно дать хотя бы грубое представление о применении характеристических функционалов для изучения случайных функций. В дальнейшем мы введем другие случайные процессы и соответствующие характеристические функционалы помимо уже рассмотренных. Однако во всех случаях основные понятия остаются неизменными.

§ 3. ПРИМЕНЕНИЯ К ЧАСТИЧНОЙ КОГЕРЕНТНОСТИ

А. Одиночные счетчики

Теперь обратимся к моментам числа отсчетов, рассмотренным в начале настоящей главы. Согласно (3.3), величину $\overline{n^2}$ можно выразить через корреляционную функцию четвертого порядка, точное значение которой зависит от статистики.

Будем рассматривать излучение теплового источника (лампы, звезды и т. д.), описываемое стационарным гауссовым распределением с неопределенной фазой (лазерное излучение характеризуется иной моделью). Путем непосредственного разложения функционала (3.26), содержащего всю информацию об ансамбле, получаем

$$\begin{aligned} \frac{2^4}{4!} \left\langle \left[\operatorname{Re} \int S^*(t) V(t) dt \right]^4 \right\rangle = \\ = \frac{1}{2!} \left\{ \int \int S^*(t') \langle V(t') V(t'') \rangle S(t'') dt' dt'' \right\}^2. \quad (3.31) \end{aligned}$$

Это соотношение справедливо для произвольных гладких функций $S(t)$. Приравнявая соответствующие коэффициенты, находим, что соотношение (3.31) будет выполняться, если имеет место равенство¹⁾

$$\langle V^*(t_1) V(t_2) V^*(t_3) V(t_4) \rangle = \langle V^*(t_1) V(t_2) \rangle \langle V^*(t_3) V(t_4) \rangle + \\ + \langle V^*(t_1) V(t_4) \rangle \langle V^*(t_3) V(t_2) \rangle. \quad (3.32)$$

Таким образом, для представляющего специальный интерес вычисления величины $\overline{n^2}$ находим

$$\langle V^*(t') V(t') V^*(t'') V(t'') \rangle = \langle V^*(t') V(t') \rangle \langle V^*(t'') V(t'') \rangle + \\ + \langle V^*(t') V(t'') \rangle \langle V^*(t'') V(t') \rangle = \\ = \langle I(t') \rangle \langle I(t'') \rangle + |\Gamma(t' - t'')|^2, \quad (3.33)$$

где введена автокорреляционная функция ансамбля в точке \mathbf{r}_i :

$$\Gamma(t' - t'') = \langle V^*(t'') V(t') \rangle \quad (3.34)$$

[в гл. 1 она была обозначена через $\Gamma_{ii}(t' - t'')$]. Из (3.2) и (3.3) найдем дисперсию

$$\sigma^2 = \overline{n^2} - (\bar{n})^2 = \alpha^2 \int_0^T \int_0^T |\Gamma(t' - t'')|^2 dt' dt'' + \bar{n}. \quad (3.35)$$

Следовательно, имеется избыточный отсчет или группировка отсчетов, которая зависит от T и функции взаимной когерентности Γ .

Введем нормированную функцию γ (в гл. 1 γ_{ii}), которая определяется соотношением

$$\gamma(t' - t'') = \frac{\Gamma(t' - t'')}{\Gamma(0)} \quad (3.36)$$

¹⁾ В более общем случае соотношение (3.26) приводит к равенству

$$\left\langle \prod_{p=1}^n V^*(t_{2p-1}) V(t_{2p}) \right\rangle = \sum_P \prod_{p=1}^n \langle V^*(t_{2p-1}) V(t_{2P(p)}) \rangle,$$

где суммирование производится по $n!$ перестановкам P чисел $p \rightarrow P(p)$, $p = 1, \dots, n$.

и, согласно (1.17), удовлетворяет условию $|\gamma(t' - t'')| \leq 1$. Следуя Манделю [2.1], определим функцию

$$\begin{aligned} \xi(T) &\equiv \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T |\gamma(t' - t'')|^2 dt' dt'' = \\ &= \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) |\gamma(\tau)|^2 d\tau. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Функция $\xi(T)$ имеет размерность времени и представляет собой удобную неубывающую меру временной эволюции когерентности сигнала.

Из соотношения $|\gamma(t)| \leq 1$ следует, что $\xi(T) \leq T$. Если для некоторого начального интервала времени функция $\gamma(t)$ близка к единице, то $\xi(T) \approx T$. Если $\xi(T) < T$, то это указывает на наличие конечного интервала, в течение которого имеет место частичная когерентность. Если $\gamma(t)$ спадает до нуля с характерным временем \mathcal{T} (например, как функция $e^{-t/\mathcal{T}}$ или $\exp[-1/2(t/\mathcal{T})^2]$), то для больших $T \gg \mathcal{T}$ функция $\xi(T)$ становится почти постоянной и имеет следующее значение:

$$\xi(T) = \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) |\gamma(\tau)|^2 d\tau \approx 2\mathcal{T} \left(\int_0^\infty |\gamma(\mathcal{T}x)|^2 dx \right),$$

причем точная функциональная форма $\gamma(t)$ несущественна. Другими словами, $\xi(T) \approx c\mathcal{T}$, где c — постоянная порядка единицы, конечно, при условии, что интегралы сходятся. Предельное значение

$$\xi(\infty) = 2 \int_0^\infty |\gamma(\tau)|^2 d\tau \quad (3.38)$$

представляет собой возможную меру введенного ниже времени когерентности.

Поскольку

$$\bar{n} = \alpha \int_0^T \langle V^*(t') V(t') \rangle dt' = \alpha T \Gamma(0), \quad (3.39)$$

то вследствие стационарности дисперсию (3.35) можно представить в виде

$$\sigma^2 = \bar{n} \left[1 + \frac{\xi(T)}{T} \bar{n} \right], \quad (3.40)$$

где $\xi(T)$ определяется соотношением (3.37). Обращаясь к анализу, проведенному в гл. 2 [в частности, (2.49)], нетрудно видеть, что полученная дисперсия та же, что возникает для распределения фотонов, разделенных по $T/\xi(T)$ независимым «временным ячейкам», в каждой из которых имеет место тепловое распределение, а среднее заполнение ячейки, или параметр вырождения, определяется как $\delta = \bar{n}/[T/\xi(T)] = \bar{n}\xi(T)/T$. Как показал Мандель [3.12] в применении к фотоотсчетам, в случае стационарных гауссовых ансамблей для достаточно больших T правомерно предположить, что среднее число δ фотонов внутри интервала, соответствующего времени когерентности, имеет тепловое распределение и что соседние интервалы статистически независимы. При таких предположениях распределение отсчетов (3.1) переходит в распределение (2.51) с $N = T/\xi(T)$. Более точные приближения для стационарных гауссовых ансамблей и больших времен измерения T мы приведем в гл. 9, где излагается квантовый подход к задаче.

Результаты вычислений группировки отсчетов, выполненных для гауссова случая, фактически являются весьма общими. Любое классическое распределение приводит к избыточным отсчетам по отношению к пуассоновскому случаю и, следовательно, к такой же группировке, как в (3.40). Для сравнения приведем результаты расчета, аналогичного выполненному выше, но относящегося теперь к распределению волновых полей, характеризующему соотношением (3.28). В этом случае среднее число отсчетов равно

$$\bar{n} = \alpha T [G(0) + \mu H(0)], \quad (3.41)$$

в то время как дисперсия имеет вид

$$\sigma^2 = \bar{n} + 2\alpha^2 \int_0^T (T - \tau) |G(\tau) + \mu H(\tau)|^2 d\tau + \alpha^2 \mu \left[T^2 H^2(0) + 2 \int_0^T (T - \tau) |H(\tau)|^2 d\tau \right]. \quad (3.42)$$

Это выражение для σ^2 всегда содержит член, пропорциональный T^2 , тогда как выражение (3.40) асимптотически возрастает, в лучшем случае линейно, с увеличением T , поскольку время когерентности конечно. Как и следовало ожидать, эти два результата согласуются в пределе $\mu \rightarrow 0$.

Б. Несколько счетчиков

Вместо того чтобы рассматривать флуктуации отсчетов в одиночном счетчике, можно анализировать корреляции отсчетов в двух или большем числе различных счетчиков, освещаемых частично когерентным светом. Пусть функция координат и времени $V(\mathbf{r}, t)$ представляет волновое поле от протяженного источника. В этом случае естественно ожидать, что корреляции в статистике $V(\mathbf{r}, t)$ могут сохраниться, если различные сравниваемые сигналы принадлежат к пространственно разделенным точкам. Предположим, что два безынерционных счетчика находятся соответственно в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 и пусть

$$V_i(t) = V(\mathbf{r}_i, t), \quad (3.43)$$

$$I_i(t) = V_i^*(t) V_i(t). \quad (3.44)$$

Распределение отсчетов, соответствующее постоянной интенсивности в точке \mathbf{r}_i , описывается выражением, совпадающим с (2.2):

$$P_{0i}(n_i, T) = \frac{1}{n_i!} \left(\alpha_i \int_0^T I_i(t) dt \right)^{n_i} \exp \left[-\alpha_i \int_0^T I_i(t) dt \right]. \quad (3.45)$$

Поэтому, когда рассматриваемые интенсивности случайны, взаимная корреляционная функция отсчетов определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \overline{n_1 n_2} &= \sum_{n_1, n_2} n_1 n_2 \langle P_{01}(n_1, T) P_{02}(n_2, T) \rangle = \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \int_0^T \int_0^T \langle I_1(t') I_2(t'') \rangle dt' dt''; \end{aligned} \quad (3.46)$$

ее значение зависит от вида статистики.

Для иллюстрации рассмотрим комплексное волновое поле $V(\mathbf{r}, t)$ со стационарным гауссовым распределением с неопределенной фазой. В соответствии с анализом, проведенным в начале настоящей главы, такое распределение можно описывать с помощью характеристического функционала комплексных гладких функций $S(\mathbf{r}, t)$, зависящих как от пространственной координаты, так и от времени:

$$\begin{aligned} C\{S(\mathbf{r}, t)\} &= \exp \left\{ - \int \int S^*(\mathbf{r}_1, t_1) \langle V(\mathbf{r}_1, t_1) V^*(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \times \right. \\ &\quad \left. \times S(\mathbf{r}_2, t_2) d^3 r_1 d^3 r_2 dt_1 dt_2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Для детекторов, расположенных в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , пользуясь обозначением $S_i(t) = S(\mathbf{r}_i, t)$, $i = 1, 2$, получаем

$$C\{S_i(t)\} = \exp \left\{ - \sum_{i, j} \int \int S_i^*(t_1) \langle V_i(t_1) V_j^*(t_2) \rangle S_j(t_2) dt_1 dt_2 \right\}. \quad (3.48)$$

Из (3.48) можно найти все взаимные корреляционные функции. Отсюда, в частности, следует, что

$$\begin{aligned} \langle V_1^*(t') V_1(t') V_2^*(t'') V_2(t'') \rangle &= \langle V_1^*(t') V_1(t') \rangle \langle V_2^*(t'') V_2(t'') \rangle + \\ &\quad + \langle V_1^*(t') V_2(t'') \rangle \langle V_2^*(t'') V_1(t') \rangle. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Подставляя последнее выражение в (3.46), находим

$$\overline{n_1 n_2} = \bar{n}_1 \bar{n}_2 + \alpha_1 \alpha_2 \int_0^T \int_0^T |\Gamma_{12}(t' - t'')|^2 dt' dt'', \quad (3.50)$$

где, как и в (1.13),

$$\Gamma_{12}(t' - t'') \equiv \langle V_2^*(t'') V_1(t') \rangle \quad (3.51)$$

означает взаимную корреляционную функцию, и

$$\bar{n}_i = \alpha_i \int_0^T \langle V_i^*(t') V_i(t') \rangle dt' \equiv \alpha_i T \Gamma_{ii}(0). \quad (3.52)$$

Введем нормированную функцию

$$\gamma_{12}(\tau) = \frac{\Gamma_{12}(\tau)}{[\Gamma_{11}(0) \Gamma_{22}(0)]^{1/2}} \quad (3.53)$$

и величину

$$\xi_{12}(T) \equiv \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) |\gamma_{12}(\tau)|^2 d\tau, \quad (3.54)$$

которая, как и выше, является мерой временной зависимости функции взаимной когерентности сигналов. При использовании этой величины корреляция избыточных фотоотсчетов определяется выражением

$$\overline{\bar{n}_1 \bar{n}_2} - \bar{n}_1 \bar{n}_2 = \bar{n}_1 \bar{n}_2 \frac{\xi_{12}(T)}{T}, \quad (3.55)$$

которое показывает, что в пространственно разделенных счетчиках могут существовать корреляции интенсивности.

Помимо временной зависимости взаимной корреляции фотоотсчетов, интересно подробно проанализировать зависимость выражения (3.55) от пространственных координат. Для простоты будем считать, что ансамбль не только стационарен, но и однороден, т. е. на не слишком больших расстояниях не зависит от выбора начальной пространственной координаты. В этом случае можно положить

$$\langle V^*(\mathbf{r}_2, t_2) V(\mathbf{r}_1, t_1) \rangle = \Gamma(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, t_1 - t_2), \quad (3.56)$$

так что из соотношения (3.52) получаем

$$\bar{n}_i = \alpha_i \int_0^T \Gamma(0, 0) dt' = \alpha_i T \Gamma(0, 0) \quad (3.57)$$

независимо от местоположения детектора. Полагая $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, находим пространственную и временную зависимости взаимной корреляции избыточных фотоотчетов

$$\overline{n_1 n_2} - \bar{n}_1 \bar{n}_2 = \bar{n}_1 \bar{n}_2 \frac{\xi(\mathbf{r}, T)}{T}, \quad (3.58)$$

где

$$\xi(\mathbf{r}, T) = \frac{2}{T} \int_0^T (T - \tau) |\gamma(\mathbf{r}, \tau)|^2 d\tau \quad (3.59)$$

и

$$\gamma(\mathbf{r}, \tau) = \frac{\Gamma(\mathbf{r}, \tau)}{\Gamma(0, 0)}. \quad (3.60)$$

Примем для простоты, что для интересующей нас области расстояний значение T мало по сравнению со временем когерентности $\xi(\mathbf{r}, \infty)$. Тогда можно положить

$$\frac{\xi(\mathbf{r}, T)}{T} \approx |\gamma(\mathbf{r}, 0)|^2; \quad (3.61)$$

при этом корреляция избыточных отсчетов как функция расстояния \mathbf{r} счетчиков выражается через степень когерентности следующим образом:

$$\overline{n_1 n_2} - \bar{n}_1 \bar{n}_2 = \bar{n}_1 \bar{n}_2 |\gamma(\mathbf{r}, 0)|^2. \quad (3.62)$$

Хотя рассмотренные примеры соответствуют гауссовой модели, характеризуемой соотношением (3.48), из (3.46) следует, что временная и пространственная корреляции отсчетов имеют место для любого ансамбля, обладающего соответствующими корреляциями интенсивности.

ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ. Измерение корреляций фотоотчетов лежит в основе «интерферометрии интенсивности». В отношении измерения параметров звезд интерферометрия интенсивности, как показано Хэнбери Брауном и Твиссом [3.9], иногда обладает определенными преимуществами по сравнению с традиционной (амплитудной) интерферометрией. Предположим, что в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , где $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$, мы сравниваем амплитуды света, пришедшего от звезды, и исследуем

пространственную когерентность этих волн, скажем помещая в эти точки отверстия двухщелевого интерферометра. Таким образом, мы изучаем функцию (3.56) или, более точно, согласно (1.14), ее действительную часть. При прохождении света от звезды через атмосферу наблюдаемый сигнал изменяется из-за турбулентного движения воздуха, что приводит к изменению показателя преломления; возникают случайные, быстрые изменения фазы. Этот эффект можно учесть, производя замену

$$V_j(t) \rightarrow V_j(t) \exp [i\varphi_j(t)], \quad (3.63)$$

где $\varphi_j(t) = \varphi(\mathbf{r}_j, t)$ означает фазу на j -м детекторе. Следовательно, *наблюдаемая* функция взаимной когерентности отличается от таковой для *источника*:

$$\Gamma_{\text{набл}}(\mathbf{r}, t'', t') = \exp \{i[\varphi_1(t') - \varphi_2(t'')]\} \Gamma_{\text{ист}}(\mathbf{r}, t' - t''); \quad (3.64)$$

$\Gamma_{\text{набл}}$, вообще говоря, уже не является функцией разности времен; более того, величина $\text{Re} \Gamma_{\text{набл}}$ не равна $\text{Re} \Gamma_{\text{ист}}$.

Фазовые искажения играют очень важную роль в точных оптических измерениях и ограничивают точность измерений диаметров звезд с помощью интерферометра Майкельсона, обсуждавшихся в конце гл. 1. Даже при $t' = t''$ быстро меняющийся фазовый коэффициент в (3.64) не обращается в нуль, поскольку функции φ_1 и φ_2 могут быть различными и в значительной степени независимыми, как, например, для расстояния более 5 или 6 м.

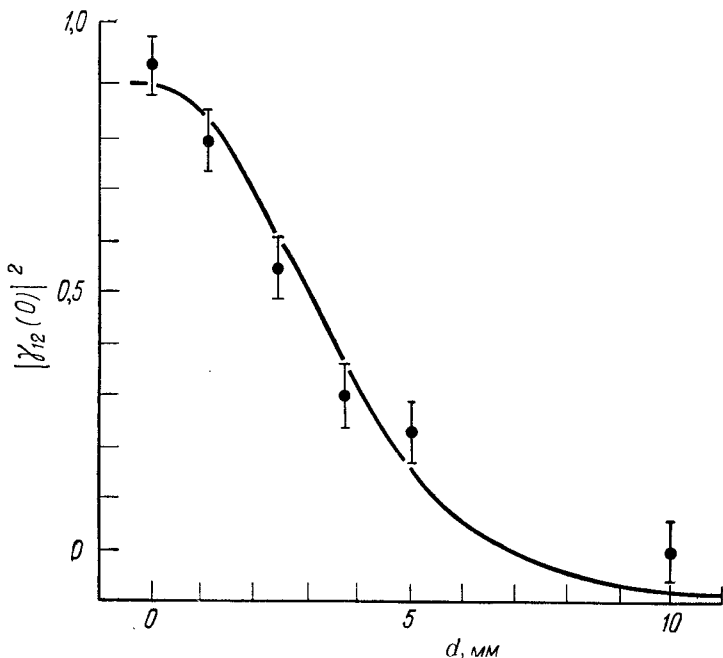
В интерферометрии интенсивности в пространственно разделенных точках исследуется корреляция интенсивностей, а не амплитуд. В силу (3.46) это можно осуществить, измеряя за время T корреляцию избыточных отсчетов (3.55), причем величиной, представляющей непосредственный интерес, является степень когерентности. Из (3.64) следует

$$|\gamma_{\text{набл}}(\mathbf{r}, \tau)| = |\gamma_{\text{ист}}(\mathbf{r}, \tau)|. \quad (3.65)$$

Поэтому фазовые искажения, которые сильно затрудняют амплитудную интерферометрию, здесь оказываются несущественными. Таким образом, интерферометрия интенсивности позволяет исследовать корреляции вол-

новых полей, характеризующих источник, на гораздо больших расстояниях между точками наблюдения, чем это было возможно ранее.

Рассмотрим пример. Пусть время T мало по сравнению со временем когерентности и применимо соотношение (3.62). Если, как в гл. 1, мы имеем дело с квазимонохроматическим излучением от однородно освещенного диска в приближении дальнего поля, то в качестве комплексной степени когерентности можно взять функцию (1.49). Для звезды радиусом b , которая находится от



Фиг. 3. Зависимость квадрата степени когерентности $|\gamma_{12}(0)|^2$ от расстояния d между фотодетекторами. (По данным Хэнбери Брауна и Твисса [3.9 в].)

Изображены теоретические и экспериментальные результаты, подтверждающие эффект Хэнбери Брауна – Твисса и полученные для ртутной дуговой лампы, а не для изображения звезды. Экспериментальные результаты представлены точками с соответствующими вертикальными отрезками, характеризующими доверительный интервал; сплошная кривая соответствует теоретически предсказанной зависимости, полученной с учетом спектрального распределения света и характеристик электронных схем.

Земли на расстоянии R и излучает на средней частоте $\bar{\nu} = \bar{k}/2\pi$, корреляция избыточных отсчетов при расстоянии между счетчиками r определяется выражением

$$\overline{n_1 n_2} - \bar{n}_1 \bar{n}_2 = \bar{n}_1 \bar{n}_2 \left(\frac{2J_1(x)}{x} \right)^2, \quad (3.66)$$

где $x = \bar{k}br/R$. Измеряя функцию взаимной корреляции (3.66) в зависимости от r , можно определить размер звезды, если расстояние R известно. Первый нуль корреляционной функции соответствует такому расстоянию r , для которого $\bar{k}br = 3,83R$. С помощью именно такой методики Хэнбери Браун и Твисс [3.9] увеличили базовое расстояние своего интерферометра до 183 м, что в 30 раз больше типичной базы в интерферометре Майкельсона, ограниченной флуктуациями в атмосфере. Результаты эксперимента по интерферометрии интенсивности излучения ртутной лампы представлены на фиг. 3.

В. Полоса пропускания, размер счетчика и значение сглаживающих функций

Выше мы рассматривали идеализированные безынерционные и точечные детекторы. Однако в разумных приближениях можно легко учесть эффекты, обусловленные конечной полосой пропускания и конечными размерами детектора. Пусть $\tilde{S}^*(\nu)$ — частотный адмитанс детектора, т. е. относительное изменение амплитуды и фазы волнового поля $V(\mathbf{r}, t)$ на частоте ν ; аналогично $a_i(\mathbf{r})$ — пространственный адмитанс i -го детектора, описывающий относительное изменение амплитуды и фазы $V(\mathbf{r}, t)$ в точке \mathbf{r} . В этом случае *эффективное* волновое поле $V_i^{\text{эфф}}(t)$ на i -м детекторе определяется выражением

$$V_i^{\text{эфф}}(t) = \int a_i(\mathbf{r}) S^*(t - t') V(\mathbf{r}, t') d^3r dt', \quad (3.67)$$

где $S^*(t)$ — фурье-образ функции $\tilde{S}^*(\nu)$ — представляет собой импульсную переходную функцию детектора. Эффективная интенсивность $I_i^{\text{эфф}}(t)$, определяющая скорость отсчетов i -го детектора, равна

$$I_i^{\text{эфф}}(t) = |V_i^{\text{эфф}}(t)|^2. \quad (3.68)$$

Для выяснения характера изменений, возникающих в результате перехода к эффективному полю (3.67), рассмотрим для простоты только эффекты, обусловленные конечной полосой частот, т. е. положим $a_i(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ для *отдельного* счетчика в случае гауссова распределения.

Из (3.32) получаем

$$\begin{aligned} \langle V_e^*(t_1) V_e(t_2) V_e^*(t_3) V_e(t_4) \rangle &= \langle V_e^*(t_1) V_e(t_2) \rangle \langle V_e^*(t_3) V_e(t_4) \rangle + \\ &+ \langle V_e^*(t_1) V_e(t_4) \rangle \langle V_e^*(t_3) V_e(t_2) \rangle, \end{aligned} \quad (3.69)$$

где введено обозначение

$$V_e(t) \equiv V_i^{\text{эфф}}(t) = \int S^*(t - t') V(\mathbf{r}_i, t') dt'. \quad (3.70)$$

Полагая $I_e = |V_e|^2$, для первых двух моментов отсчетов имеем

$$\bar{n} = \alpha \int_0^T \langle I_e(t') \rangle dt', \quad (3.71a)$$

$$\bar{n}^2 = \alpha^2 \int_0^T \int_0^T \langle I_e(t') I_e(t'') \rangle dt' dt'' + \bar{n}. \quad (3.71b)$$

Пользуясь этими выражениями, получаем для среднего значения и дисперсии отсчетов

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \alpha \int_0^T dt \int \int S^*(t - t_1) S(t - t_2) \Gamma(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \\ &= \alpha T \int |\tilde{S}(\nu)|^2 \tilde{\Gamma}(\nu) d\nu, \end{aligned} \quad (3.72)$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \bar{n}^2 - (\bar{n})^2 = \\ &= \alpha^2 \int_0^T \int_0^T dt' dt'' \int \int \int \int S^*(t' - t_2) S(t' - t_1) S^*(t'' - t_4) \times \\ &\times S(t'' - t_3) \Gamma(t_2 - t_3) \Gamma(t_4 - t_1) dt_1 dt_2 dt_3 dt_4 + \bar{n} = \\ &= \alpha^2 \int_0^T \int_0^T dt' dt'' \left| \int \exp[-2\pi i \nu (t' - t'')] \times \right. \\ &\quad \left. \times |\tilde{S}(\nu)|^2 \tilde{\Gamma}(\nu) d\nu \right|^2 + \bar{n}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Таким образом, формулы для моментов отсчетов, учитывающие конечность полосы пропускания, качественно аналогичны формулам, полученным выше. Если в области частот, где функция $\tilde{\Gamma}(\nu)$ отлична от нуля, $\tilde{S}(\nu) \approx 1$, то моменты отсчетов совпадают с таковыми для безынерционного детектора. Однако, когда функция $\tilde{S}(\nu)$ уже спектра функции $\tilde{\Gamma}(\nu)$, статистика фотоотсчетов в значительной степени определяется характеристиками детектора и слабо зависит от свойств источника. Аналогичные замечания справедливы, если учесть конечные размеры детектора посредством функции $a_i(\mathbf{r})$.

В общем случае изменения волновых полей, описываемые соотношением (3.67), можно отразить с помощью специальных сглаживающих функций

$$S_{i,t}^*(\mathbf{r}, t') \equiv a_i(\mathbf{r}) S^*(t - t'), \quad (3.74)$$

которые должны появиться в характеристических функциях (3.47). Таким образом, можно считать, что гладкие функции $S(\mathbf{r}, t')$ отражают пространственные и частотные ограничения, вносимые любым процессом измерения. Следовательно, помимо сугубо формального значения описание стохастических переменных с помощью характеристических функционалов и гладких функций имеет глубокое физическое обоснование.

§ 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой и предыдущих главах мы с классической и полуклассической точек зрения рассмотрели описание частично когерентных оптических явлений и соответствующих моментов фотоотсчетов. Существенное значение для анализа имело введение ансамбля классических аналитических сигналов $V(\mathbf{r}, t)$, подчиняющихся волновому уравнению. Хотя мы рассматривали главным образом стационарные распределения с неопределенной фазой, эти специальные условия не имеют существенного значения. В следующих главах будут рассмотрены ансамбли, на которые не наложено таких ограничений.

Учет векторного характера полей в развитой теории не представляет трудностей. Все особенности, связанные с векторным характером поля излучения, мы обсудим

при квантовом рассмотрении. Соответствующие обобщения нашего классического и полуклассического рассмотрения на случай векторных полей можно найти в работах Борна и Вольфа [1.1], Манделя [2.1], О'Нейла [1.3], Берана и Паррента [1.2] и Манделя и Вольфа [3.11].

В классической теории частичной когерентности возникает много других интересных вопросов. Среди них следует отметить связь между формальным распределением Бозе — Эйнштейна для фотоотсчетов, временем когерентности и т. д. и аналогичными понятиями статистической механики и теории информации. Рассмотрение этих вопросов проведено в статье Габора [3.8] и в цитируемой в ней литературе.

Статистика поля

§ 1. ПОСТАНОВКА ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

В предыдущих главах показано, как, применяя теорию стохастических процессов, можно развить теорию частичной когерентности и определить полуклассическую статистику фотоотчетов. С физической точки зрения открытым, однако, остается вопрос о выборе соответствующего статистического описания поля. Во многих случаях именно в этом заключается сущность проблемы; число общих методов ее решения весьма ограничено. Поэтому каждую конкретную задачу следует рассматривать отдельно в свете ее физического происхождения.

В настоящей главе мы весьма кратко остановимся на ряде характерных статистических задач и покажем, каким образом следует формулировать уравнения, приводящие к их решению. Прежде чем обратиться к деталям решения определенной задачи, предпочтительнее сначала рассмотреть некоторые общие характерные свойства, присущие большинству стохастических проблем, и сформулировать общие принципы их анализа. Хотя здесь приводится классическое рассмотрение, многие методы и формальные соотношения имеют точные аналоги в квантовой теории.

Упростим задачу, считая волновое поле скалярным $V(\mathbf{r}, t) \equiv V(x)$, и рассмотрим следующие уравнения общего вида¹⁾:

$$\square V(x) = j(x) = j(x; V, \{\psi_k\}), \quad (4.1a)$$

$$\square \psi_k(x) = F_k(x) = F_k(x; V, \{\psi_j\}). \quad (4.1b)$$

¹⁾ Здесь $\square \equiv \nabla^2 - (\partial^2/\partial t^2)$ — оператор Даламбера.

Физический смысл этих уравнений состоит в следующем: поле $V(x)$ динамически зависит от источника $j(x)$, свойства которого в свою очередь определяются самим полем V и конечным числом других полей $\{\psi_k\}$. Аналогичная интерпретация применима к второй группе уравнений. Не совсем строго ψ_k можно называть «материальными полями» (или «полями источников») для «поля излучения» V .

В (4.1) подразумевается локальная зависимость j и F_k от полей V или ψ_k (по крайней мере локальная во времени). При этом условии поле $V(x)$ зависит от источника $j(x)$, который в свою очередь определяется значениями поля в той же самой пространственно-временной точке. Проблемы, которые описываются уравнениями общего вида (4.1), можно грубо разделить на ряд категорий.

А. Причины появления статистики

1. Рассмотрим поле V в области, не имеющей источников; тогда для свободного поля получаем уравнение, обсуждавшееся в гл. 1:

$$\square V(x) = 0. \quad (4.2)$$

Функция $V(x)$ удовлетворяет гиперболическому дифференциальному уравнению второго порядка, которое имеет единственное решение, определяемое начальными условиями. Однако можно пренебречь точными значениями начальных условий и, таким образом, получить правильные сведения только о некоторых частных вопросах, касающихся поведения $V(x)$. Например, для гармонической волны, излучаемой генератором, нельзя получить информацию о значении фазы в данный момент, если пренебречь начальным значением фазы.

Решение уравнения (4.2), которое можно записать следующим образом:

$$V(x) \equiv V(x; V_0), \quad (4.3)$$

где V_0 обозначает начальные условия (или их совокупность), представляет собой случайную величину с распределением, зависящим от распределения начальной случайной величины V_0 .

2. Неопределенность, вводимую начальными условиями, можно распространить на все связанные уравнения (4.1). Предположим, как и раньше, что решение таких уравнений имеет вид

$$V(x) = V(x; V_0, \{\psi_{k0}\}), \quad (4.4a)$$

$$\psi_k(x) = \psi_k(x; V_0, \{\psi_{l0}\}). \quad (4.4b)$$

Если все или часть начальных условий остаются неопределенными, то $V(x)$ и все $\psi_k(x)$ можно интерпретировать как случайные процессы с распределениями, зависящими от распределений начальных случайных переменных V_0 и $\{\psi_{k0}\}$.

В свою очередь источник $j(x)$ можно рассматривать как вторичный случайный процесс

$$j(x) = j(x; V, \{\psi_k\}), \quad (4.5)$$

задаваемый случайными процессами V и всеми ψ_k .

3. Рассмотренная выше картина для некоторых частных случаев допускает существенное упрощение. Может случиться, что число излучателей, создающих источник $j(x)$, так велико, что статистика источника $j(x)$, определяемого соотношением (4.5), не зависит от особенностей распределений переменных V и ψ_k . Это обстоятельство является следствием известной центральной предельной теоремы, или закона больших чисел, которая, грубо говоря, утверждает, что сумма большого числа независимых случайных величин обладает гауссовым распределением. В гл. 9 эта теорема будет рассмотрена более подробно в квантовой форме. Здесь мы хотим лишь подчеркнуть, что свойства $j(x)$ могут оказаться более простыми. В рассматриваемом случае естественно считать, что основное уравнение принимает вид

$$\square V(x) = j(x) \quad (4.6)$$

и что его решение

$$V(x) = V(x; j) \quad (4.7)$$

(здесь опущена явная зависимость от V_0) представляет собой случайный процесс, определяемый некоторым исходным процессом $j(x)$. Уравнения типа (4.6) называются «флуктуационными». Примером физической си-

туации, для которой сделанные упрощения применимы, является тепловое излучение, испускаемое большим числом атомных излучателей, как, например, это имеет место для лампы или звезды.

Хотя источник $j(x)$ может и не обладать гауссовой статистикой, такой случайный источник часто не совсем строго связывают с «термостатом», или «резервуаром». Независимость $j(x)$ от реакции $V(x)$ свидетельствует об «устойчивости» термостата.

Рассматриваемый случай отличается от предыдущих примеров в двух отношениях. С одной стороны, он значительно проще, поскольку поле V связано с j линейным преобразованием [уравнение (4.6) линейно]. С другой стороны, исходная случайная переменная $j(x)$ является случайной функцией координат и времени, в то время как в прежних случаях (только со случайными начальными условиями) основные величины были только случайными функциями координат. Иногда это слишком дорогая цена за полученные упрощения.

4. В ряде случаев, когда предыдущее упрощение налагает слишком жесткие ограничения, можно допустить, что источник не реагирует на детали распределения *некоторых* случайных величин $\{\psi_k\}$. Пусть имеется только два источника; тогда уравнения запишутся в виде

$$\square V(x) = j(x; V, \psi_1, \psi_2), \quad (4.8a)$$

$$\square \psi_1(x) = F_1(x; V, \psi_1, \psi_2), \quad (4.8б)$$

$$\square \psi_2(x) = F_2(x; V, \psi_1, \psi_2). \quad (4.8в)$$

Можно принять, что эти уравнения детерминированы, а флуктуируют только начальные условия. Предположим также, что ψ_2 описывает характерные черты термостата, состоящие в том, что на него не оказывают возмущающего влияния распределение $V(x)$ или $\psi_1(x)$ и что он представляет собой источник для V и ψ_1 , статистика которых в широких пределах не зависит от их начального вида. Предположим, что последнее уравнение для ψ_2 можно решить с постоянными V и ψ_1 ; пусть решение имеет вид $f(x)$. Как характеристика термостата величина $f(x)$ по предположению не зависит от $V(x)$ и $\psi_1(x)$.

Подставляя это решение в (4.8), получаем систему флуктуационных уравнений

$$\square V(x) = j(x; V, \psi_1, f), \quad (4.9a)$$

$$\square \psi_1(x) = F_1(x; V, \psi_1, f), \quad (4.9б)$$

которые можно интерпретировать следующим образом. Поле V определяется как решение связанной системы уравнений, в которой источники зависят не только от величин V и ψ_1 , но и от «внешней» случайной функции $f(x)$. Нетрудно обобщить эти уравнения на несколько «внешних» случайных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ или предположить, что каждое поле имеет свой собственный термостат.

Как и в предыдущих примерах, основные уравнения могут существенно зависеть от полной пространственно-временной предыстории функции $f(x)$. Сложным может быть не только распределение функции $f(x)$; в общем случае может и не существовать простого линейного соотношения между $V(x)$ и случайным процессом $f(x)$.

5. В качестве последнего примера рассмотрим кратко атмосферную турбулентность, упомянутую в гл. 3. Можно считать, что эффект этого типа обуславливается случайными изменениями показателя преломления, которые влияют не на источник, а на условия распространения. Таким образом, оператор Даламбера \square становится случайным, поскольку скорость распространения в среде испытывает флуктуации. Эту задачу можно проанализировать методом, описанным в гл. 3, где уравнение решалось для заданного показателя преломления $n(x)$; при этом поле

$$V(x) = V(x; n) \quad (4.10)$$

рассматривается как случайное, статистика которого определяется случайной величиной $n(x)$. В форме (4.10) задача не является более общей, нежели задача, описываемая уравнениями (4.9), хотя причины стохастического поведения в этих случаях физически различны.

Общая модель. Будем в дальнейшем исходить из общих уравнений (4.9) и для определенности запишем их

в виде

$$\square V(x) = V^3(x) + \psi^2(x) + f(x), \quad (4.11a)$$

$$\square \psi(x) = V(x)\psi(x) + g(x). \quad (4.11б)$$

Здесь у поля источника ψ индекс 1 опущен и введены две случайные вынуждающие силы f и g (в некоторых случаях это может быть одна и та же сила). Эти уравнения напоминают уравнения классической электродинамики или уравнения, описывающие волны в нелинейном диэлектрике, и т. д. Существенной особенностью анализируемых уравнений является их нелинейность и наличие случайных сил.

В некоторых случаях эти уравнения можно линеаризовать в «рабочей точке», иначе говоря, рассматривать систему линейных уравнений, справедливых для малых отклонений,

$$v(x) \equiv V(x) - V_0(x), \quad (4.12a)$$

$$\varphi(x) \equiv \psi(x) - \psi_0(x), \quad (4.12б)$$

где $V_0(x)$ и $\psi_0(x)$ — известные регулярные функции. Мы не будем здесь подробно рассматривать довольно простые результаты, получающиеся в таких случаях.

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФЛУКТУАЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Усредненные уравнения для моментов

Уравнения (4.9) и (4.11) не являются «обычными» дифференциальными уравнениями в частных производных, поскольку в них имеются случайные члены. Для решения этих уравнений в классическом смысле обычно требуется найти прежде всего точное решение $V(x) = V(x; f)$ при заданном $f(x)$. На деле такая процедура оказывается слишком сложной и фактически излишней. Наблюдаемые величины и существенные свойства решений определяются усреднением по случайным членам $f(x)$. Мы можем преобразовать уравнение (4.9) или (4.11) к дифференциальным уравнениям в частных производных для наблюдаемых величин, переходя к усредненным уравнениям

$$\langle \square V(x) \rangle = \square \langle V(x) \rangle = \langle j(x; V, \psi_1, f) \rangle, \quad (4.13a)$$

$$\langle \square \psi_1(x) \rangle = \square \langle \psi_1(x) \rangle = \langle F_1(x; V, \psi_1, f) \rangle. \quad (4.13б)$$

Значение этой процедуры сразу выявляется наглядно, если рассмотреть усредненные уравнения (4.11):

$$\square \langle V(x) \rangle = \langle V^3(x) \rangle + \langle \psi^2(x) \rangle + \langle f(x) \rangle, \quad (4.14a)$$

$$\square \langle \psi(x) \rangle = \langle V(x) \psi(x) \rangle + \langle g(x) \rangle. \quad (4.14б)$$

Хотя эти динамические уравнения не содержат флуктуационных членов, они недоопределены, поскольку, например, $\langle V(x) \rangle$ зависит от величины $\langle V^3(x) \rangle$, о которой мы ничего не знаем, пока не решим самих уравнений.

Чтобы выявить наиболее существенные особенности задачи, рассмотрим одно нелинейное уравнение

$$\square V(x) = V^3(x) + f(x), \quad (4.15)$$

где $f(x)$ — случайная вынуждающая сила. Чтобы получить информацию о $\langle V^3(x) \rangle$, можно рассмотреть уравнение, получающееся при умножении (4.15) на $V(y)V(z)$ с последующим усреднением по ансамблю

$$\langle [\square_x V(x) - V^3(x) - f(x)] V(y) V(z) \rangle = 0,$$

или в другом виде:

$$\square_x \langle V(x) V(y) V(z) \rangle = \langle V^3(x) V(y) V(z) \rangle + \langle f(x) V(y) V(z) \rangle. \quad (4.16)$$

Таким образом, для вычисления момента или корреляции третьего порядка необходимо знать корреляцию пятого порядка и т. д. до бесконечности.

Эти уравнения можно в некоторой степени систематизировать, вводя последовательность функций

$$G_{rs}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) = \langle f(x_1) \dots f(x_r) V(y_1) \dots V(y_s) \rangle \quad (4.17)$$

Эти функции порознь симметричны по переменным x и y и для любых r и s связаны основными динамическими уравнениями

$$\begin{aligned} \square_{y_1} G_{rs}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s) &= \\ &= G_{rs+2}(x_1, \dots, x_r; y_1, \dots, y_s, y_1, y_1) + \\ &+ G_{r+1s-1}(x_1, \dots, x_r, y_1; y_2, \dots, y_s). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Таким способом первоначальная задача сводится к бесконечной последовательности связанных уравнений. Естественно, что аналогичный набор связанных уравнений имеет место для более сложного взаимодействия в (4.11).

Уравнения, подобные (4.18), встречаются во многих областях физики: нелинейной оптике, статистической механике, теории турбулентности и т. д. Кроме того, фактически аналогичные уравнения описывают средние величины в квантовой теории. В библиографии приведен краткий обзор работ, в которых рассматриваются такие проблемы, соответствующие уравнения и их приближенные решения.

Б. Усредненное уравнение для характеристического функционала

При помощи соответствующего характеристического функционала можно дать удобную формальную классификацию связанных уравнений (4.18). Будем рассматривать $V(x)$ и $f(x)$ для простоты как действительные поля. В этом случае соответствующий характеристический функционал можно взять в виде

$$C\{S, s\} = \left\langle \exp \left\{ i \int [S(y)V(y) + s(y)f(y)] d^4y \right\} \right\rangle. \quad (4.19)$$

Предположим, что статистика вынуждающей силы задана; тогда можно считать известным функционал

$$C\{0, s\} = \left\langle \exp \left[i \int s(y)f(y) d^4y \right] \right\rangle. \quad (4.20)$$

С другой стороны, необходимые физические величины определяются через $V(x)$, поэтому попытаемся найти функционал

$$C\{S, 0\} = \left\langle \exp \left[i \int S(y)V(y) d^4y \right] \right\rangle. \quad (4.21)$$

Как заданные, так и неизвестные распределения определяются как частные случаи совместного среднего значения (4.19). Это обстоятельство является важной и общей характерной чертой анализа флуктуационных уравнений посредством характеристического функционала.

Уравнение для $C\{S, s\}$ можно вывести при помощи соответствующих *функциональных производных*, которые вводятся как весовые функции, связанные с производными по направлению. Другими словами, функциональные производные

$$\frac{\delta C(S, s)}{\delta S(x)}, \quad \frac{\delta C(S, s)}{\delta s(x)}$$

определяются из соотношений

$$\int E(x) \frac{\delta C\{S, s\}}{\delta S(x)} d^4x \equiv \frac{d}{d\tau} C\{S + \tau E, s\} \Big|_{\tau=0}, \quad (4.22a)$$

$$\int e(x) \frac{\delta C\{S, s\}}{\delta s(x)} d^4x \equiv \frac{d}{d\tau} C\{S, s + \tau e\} \Big|_{\tau=0}, \quad (4.22b)$$

где $E(x)$ и $e(x)$ — заданные гладкие функции общего вида. Как уже отмечалось в предыдущей главе, в качестве аргументов для характеристических функционалов следует, вообще говоря, брать только подходящие гладкие функции.

В качестве простого примера рассмотрим прежде всего функциональные производные от функционала

$$C_1\{S\} \equiv \int S^2(x) d^4x.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} C_1\{S + \tau E\} \Big|_{\tau=0} &= \frac{d}{d\tau} \left\{ \int [S^2 + 2\tau SE + \tau^2 E^2] d^4x \right\} \Big|_{\tau=0} = \\ &= 2 \int E(x) S(x) d^4x, \end{aligned}$$

причем при вычислении предполагается квадратичная интегрируемость E и S . Следовательно, в рассматриваемом примере

$$\frac{\delta C_1\{S\}}{\delta S(x)} = 2S(x).$$

Как и в классическом анализе, некоторые функционалы могут быть недифференцируемыми. Например, формально видно, что

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta S(x')} \frac{\delta}{\delta S(x)} C_1\{S\} &= 2 \frac{\delta}{\delta S(x')} S(x) = \\ &= 2 \frac{d}{d\tau} [S(x) + \tau \delta(x - x')] \Big|_{\tau=0} = 2\delta(x - x'); \quad (4.23) \end{aligned}$$

следовательно, в частности

$$\frac{\delta^2}{\delta S(x)^2} C_1 \{S\} = 2\delta(0) = \infty.$$

Однако вторая функциональная производная в одной точке не обязательно дает бесконечность. Например, функция

$$C_2 \{S\} = \left(\int E_0(x) S(x) d^4x \right)^2,$$

где $E_0(x)$ — заданная гладкая функция, приводит к значению

$$\frac{\delta^2 C_2 \{S\}}{\delta S(x)^2} = 2E_0^2(x).$$

Для правомерности выкладок будем считать, что функционалы имеют необходимые производные.

Теперь нетрудно преобразовать (4.15) в уравнение для характеристического функционала. Из (4.19) элементарно получаются соотношения

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{\delta}{\delta S(x)} \right)^p C \{S, s\} = \\ = \langle V^p(x) \exp \left\{ i \int [S(y) V(y) + s(y) f(y)] d^4y \right\} \rangle, \end{aligned} \quad (4.24a)$$

$$\begin{aligned} \left(-i \frac{\delta}{\delta s(x)} \right)^q C \{S, s\} = \\ = \langle f^q(x) \exp \left\{ i \int [S(y) V(y) + s(y) f(y)] d^4y \right\} \rangle, \end{aligned} \quad (4.24b)$$

откуда ясно, что C удовлетворяет уравнению

$$-i \square \frac{\delta}{\delta S(x)} C = \left\{ \left[-i \frac{\delta}{\delta S(x)} \right]^3 + \left[-i \frac{\delta}{\delta s(x)} \right] \right\} C$$

или, после сокращения на общий множитель i ,

$$\square \frac{\delta}{\delta S(x)} C \{S, s\} = \left[-\frac{\delta^3}{\delta S(x)^3} + \frac{\delta}{\delta s(x)} \right] C \{S, s\}. \quad (4.25)$$

Решение, которое мы ищем, удовлетворяет уравнению (4.20) и обладает хорошим поведением для больших значений $S(x)$. Функциональное дифференциальное уравнение содержит всю бесконечную цепочку связанных

уравнений (4.18). Действительно, эти уравнения можно получить непосредственно из (4.25), разлагая экспоненты в степенной ряд и приравнивая соответствующие степени после выполнения необходимых функциональных дифференцирований

С практической точки зрения число точно разрешимых нелинейных уравнений вида (4.18) или (4.25) очень мало. Вообще говоря, уравнения (4.18) предпочтительнее, поскольку в этом случае легче ограничить бесконечную цепочку уравнений и получить систему, допускающую приближенные решения. Способы решения функциональных дифференциальных уравнений типа (4.25) пока не разработаны.

§ 3. МАРКОВСКИЕ И НЕМАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

А. Определения и различия

В теории стохастических процессов существуют задачи, описание которых во многих отношениях аналогично гамильтоновой формулировке классической механики или классической теории поля. Такое описание характеризуется набором N уравнений первого порядка по времени, решения которых однозначно определяются тем же числом начальных условий. Для анализа таких уравнений обычно необходимо удвоить число основных переменных величин, так же как в классической механике, в которой число координат x_k удваивается при переходе к переменным x_k и p_k в фазовом пространстве. Для наших целей такие уравнения первого порядка можно записать в общей форме

$$\dot{\psi}_k = F_k(\{\psi_k\}, \{f_m\}, t), \quad (4.26)$$

где $k = 1, \dots, N$. Здесь поле V и его временная производная представлены в виде двух полей, входящих в совокупность $\{\psi_k\}$. Функции f_m соответствуют феноменологически вводимым случайным вынуждающим силам. В соответствии с гамильтоновым приближением предположим, что все аргументы функций F_k берутся в одно и то же время (хотя они могут относиться к различным областям пространства). Далее будем рассматривать только временные свойства уравнений (4.26).

Для заданного набора вынуждающих сил уравнения (4.26) приводят к однозначной зависимости величин ψ_k от их значений в предшествующие моменты времени. Если же силы $\{f_m\}$ имеют стохастический характер, то уже нельзя считать, что поведение *распределения* величин ψ_k в данный момент однозначно определяется их распределением в некоторый предшествующий момент. Чтобы сделать смысл этого замечания более ясным, введем обозначение

$$\psi_k(t) \equiv \Psi_k(t, \{f_m\}; \{\varphi_i\}, \tau) \quad (4.27)$$

для того решения уравнения (4.26), которое соответствует заданной предыстории вынуждающих сил и удовлетворяет при $t = \tau$ начальному условию

$$\psi_k(\tau) = \varphi_k, \quad (4.28)$$

не зависящему от $\{f_m\}$. Тогда распределение величин ψ_k в момент времени t формально определяется соотношением

$$\begin{aligned} \rho(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_k\}, \tau) &\equiv \left\langle \prod_k \delta[\psi_k - \psi_k(t)] \right\rangle = \\ &= \left\langle \prod_k \delta[\psi_k - \Psi_k(t, \{f_m\}; \{\varphi_i\}, \tau)] \right\rangle. \end{aligned} \quad (4.29)$$

При $t = \tau$ распределение имеет следующий вид:

$$\rho(\{\psi_k\}, \tau | \{\varphi_k\}, \tau) = \left\langle \prod_k \delta(\psi_k - \varphi_k) \right\rangle = \prod_k \delta(\psi_k - \varphi_k), \quad (4.30)$$

что дает нам основание рассматривать (4.29) как условное распределение (см. следующую главу). Для времен $t > \tau$ распределение величин ρ в силу (4.29) отражает особенности ансамбля вынуждающих сил $\{f_m\}$. Каждое решение (4.27) зависит от значений вынуждающих сил только в интервале τ, t . Однако эти значения, соответствующие данному моменту времени, можно связать с событиями в предшествующие моменты (т. е. для $t < \tau$). В этом случае $\rho(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_k\}, \tau)$ зависит не только от начальных условий $\{\varphi_k\}$ в момент времени τ , но и от свойств ансамбля в прошлом.

Для проверки этих зависимостей можно представить себе *избранные изменения* ансамбля случайных

вынуждающих сил. Для этого будем *отбрасывать* предыстории, которые в прошлом не удовлетворяли какому-либо условию, а затем рассчитаем значение (4.29) в модифицированном ансамбле. Такие изменения будут влиять на $p(\{\psi_k\}, t|\{\varphi\}, \tau)$ в большей или меньшей степени, что может служить мерой независимости ансамбля случайных сил от свойств в прошлом.

Весьма важные процессы, для которых распределение (4.29) *совершенно не зависит* от изменений свойств ансамбля в прошлом, называются марковскими. Все другие процессы носят название немарковских. В некоторых случаях число начальных условий может быть увеличено настолько, что немарковская система становится марковской. В качестве примера рассмотрим объем, содержащий соударяющиеся молекулы газа. Положение одной молекулы можно определить из уравнения

$$m\ddot{x}(t) = f(t), \quad (4.31)$$

где случайная сила f описывает влияние других молекул. Очевидно, что поведение $x(t)$ в будущем зависит от предыстории случайной силы, поскольку рассматриваемые молекулы все время взаимодействуют с другими молекулами. Тем не менее этот процесс можно, конечно, представить как многомерный марковский, если ввести примерно 10^{23} величин, необходимых для задания распределения начальных условий для всех молекул.

На практике эту трудность обходят, *предполагая*, что соударения происходят упруго, а значение случайной силы не зависит от ее предыстории (является δ -коррелированным). Например, классическая задача о случайном блуждании (винеровский процесс) описывается уравнением (4.31), если предположить, что $f(t)$ определяется выражением

$$\langle \exp \left[i \int s(t') f(t') dt' \right] \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} a \int \dot{s}^2(t') dt' \right], \quad (4.32)$$

которое является частным случаем выражения (3.18) при $m = 0$ и $\bar{\mu}(v) = 4\pi^2 a v^2$. Классическое броуновское движение также подчиняется уравнению (4.31), но связано с

другим стохастическим процессом, характеризуемым выражением

$$\langle \exp \left[i \int s(t') f(t') dt' \right] \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} b \int s^2(t') dt' \right], \quad (4.33)$$

где $\tilde{\mu}(v) = b$. Этот процесс, характеризуемый постоянной спектральной плотностью, часто называют «белым шумом». Что касается поведения переменных x , то для задачи о случайном блуждании оно является марковским, а для броуновского движения — немарковским. Чтобы броуновское движение представляло собой марковский процесс, необходимо рассмотреть условные распределения как координат, так и скоростей молекул. Различия в этих случаях физически ясны. Следует отметить, однако, что когда протекание процесса $f(t')$ зависит от его предыстории (как это будет иметь место, если изменить с помощью фильтра его спектр, так что $\int \tilde{\mu}(v) dv < \infty$), процесс x не будет марковским и его нельзя превратить в таковой путем задания любого конечного числа начальных условий.

В некоторых случаях физическая задача удовлетворяет марковским условиям или соответствующей идеализации, относящейся к вынуждающим силам. Однако, если эти условия не выполняются, следует учитывать немарковский характер процесса, включая эффекты инерционности во взаимодействии между системой и термостатом. Некоторые наиболее «очаровательные» стохастические задачи соответствуют немарковским процессам.

Б. Соотношения для марковских процессов

В частных случаях марковских процессов можно вывести несколько важных соотношений для условного распределения. Обратимся опять к распределению (4.29), но изменим предысторию ансамбля, рассматривая среднее значение

$$\langle \prod_k \delta[\psi_k - \Psi_k(t, \{f_m\}; \{\varphi_l, \tau)] \prod_l \delta[\varphi_l - \Psi_l(\tau, \{f_m\}; \{\lambda_r, 0]) \rangle. \quad (4.34)$$

Здесь наложено ограничение на предшествующее поведение вынуждающих сил, а именно мы считаем, что оно согласуется с эволюцией параметров поля от значения $\{\lambda_r\}$ в нулевой момент времени до значения $\{\varphi_l\}$ в момент времени τ . Согласно предположению о марковском характере процесса, это изменение не должно влиять на результат (4.29), за исключением возможного появления численного коэффициента A , связанного с отсутствием нормировки ансамбля. Таким образом, среднее значение (4.34) должно иметь вид

$$\rho(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_l\}, \tau) A. \quad (4.35)$$

Далее, полагая $t = \tau$ и используя (4.28) [ср. (4.30)], нетрудно получить

$$A \equiv \rho(\{\varphi_l\}, \tau | \{\lambda_r\}, 0). \quad (4.36)$$

Интегрируя (4.34) по переменным $\{\varphi_l\}$ и пользуясь свойством δ -функций в подынтегральном выражении, получаем известное уравнение Колмогорова — Чепмена

$$\begin{aligned} \int \dots \int \rho(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_l\}, \tau) \rho(\{\varphi_l\}, \tau | \{\lambda_r\}, 0) d^N \varphi_l = \\ = \left\langle \prod_k \delta[\psi_k - \Psi_k(t, \{f_m\}; \{\lambda_r\}, 0)] \right\rangle = \\ = \rho(\{\psi_k\}, t | \{\lambda_r\}, 0). \end{aligned} \quad (4.37)$$

В дифференциальной форме это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \rho(\{\psi_k\})}{\partial t} = \int \dots \int K(\{\psi_k\}, \{\varphi_l\}) \rho(\{\varphi_l\}) d^N \varphi_l, \quad (4.38)$$

где не играющие роли аргументы опущены и введено интегральное ядро

$$K(\{\psi_k\}, \{\varphi_l\}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \rho(\{\psi_k\}, t | \{\varphi_l\}, \tau) |_{\tau=t}. \quad (4.39)$$

Для стационарного распределения K не зависит от времени.

Действие интегрального ядра можно представить также другим образом, а именно посредством дифференциального оператора, который в некоторых случаях можно адекватно аппроксимировать оператором конеч-

ного порядка. Общее выражение для такого дифференциального оператора можно получить следующим образом. Обозначим характеристическую функцию распределения $p(\{\psi_k\})$ через

$$C(\{s_k\}) \equiv \exp[W(\{s_k\})] = \langle \exp(i \sum s_k \psi_k) \rangle = \\ = \int \dots \int \exp(i \sum s_k \psi_k) p(\{\psi_k\}) d^N \psi_k; \quad (4.40)$$

тогда

$$p(\{\psi_k\}) = \\ = (2\pi)^{-N} \int \dots \int \exp[-i \sum s_k \psi_k + W(\{s_k\})] d^N s_k. \quad (4.41)$$

Из последнего соотношения непосредственно следует

$$\frac{\partial p(\{\psi_k\})}{\partial t} \equiv \dot{p}(\{\psi_k\}) = \\ = (2\pi)^{-N} \int \dots \int \dot{W}(\{s_k\}) \exp[-i \sum s_k \psi_k + W(\{s_k\})] d^N s_k = \\ = \dot{W}\left(\left\{i \frac{\partial}{\partial \psi_k}\right\}\right) (2\pi)^{-N} \int \dots \\ \dots \int \exp[-i \sum s_k \psi_k + W(\{s_k\})] d^N s_k = \\ = \dot{W}\left(\left\{i \frac{\partial}{\partial \psi_k}\right\}\right) p(\{\psi_k\}), \quad (4.42)$$

где $\dot{W} = \partial W / \partial t$. Как и в гамильтоновой формулировке механики, уравнение определяет последующее распределение p по заданным начальным условиям. Для стационарного распределения \dot{W} является постоянным, не зависящим от времени оператором.

Удобно выразить W через кумулянты распределения (называемые также семинвариантами, или «связанными моментами»), которые выражаются как нелинейные комбинации различных моментов случайных величин. Самое простое соотношение между обычными и связанными моментами получается для производящего функционала, который имеет вид

$$\exp[W(\{s_k\})] = \langle \exp(i \sum s_k \psi_k) \rangle \equiv \\ \equiv \exp\{\langle [\exp(i \sum s_k \psi_k) - 1] \rangle_{CB}\}, \quad (4.43)$$

где $\langle \dots \rangle$ и $\langle \dots \rangle_{\text{св}}$ означают соответственно обычные и связанные моменты. Из этого соотношения следует, что W можно разложить в ряд

$$\begin{aligned} W(\{s_k\}) &= \left\langle \left[\exp \left(i \sum s_k \psi_k \right) - 1 \right]_{\text{св}} \right\rangle = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(i)^n}{n!} \sum_{k_1, \dots, k_n} s_{i_1} \dots s_{i_n} \langle \psi_{k_1} \dots \psi_{k_n} \rangle_{\text{св}}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Коэффициенты ряда представляют собой кумулянты. С помощью (4.43) их можно выразить через обычные моменты. В частности, при разложении по степеням s_1 несколько первых кумулянт определяются следующим образом (для одной переменной $\psi_1 \equiv \psi$):

$$\langle \psi \rangle_{\text{св}} = \langle \psi \rangle, \quad (4.45a)$$

$$\langle \psi^2 \rangle_{\text{св}} = \langle \psi^2 \rangle - \langle \psi \rangle^2, \quad (4.45б)$$

$$\langle \psi^3 \rangle_{\text{св}} = \langle \psi^3 \rangle - 3 \langle \psi^2 \rangle \langle \psi \rangle + 2 \langle \psi \rangle^3, \quad (4.45в)$$

$$\langle \psi^4 \rangle_{\text{св}} = \langle \psi^4 \rangle - 3 \langle \psi^2 \rangle^2 - 4 \langle \psi^3 \rangle \langle \psi \rangle + 12 \langle \psi^2 \rangle \langle \psi \rangle^2 - 6 \langle \psi \rangle^4. \quad (4.45г)$$

Для гауссовых процессов кумулянты выше второго порядка равны нулю. В случае приближенного анализа распределения (4.41) предпочтительнее, чтобы были равны нулю кумулянты (а не моменты) высшего порядка, поскольку это по существу соответствует анализу корреляций низшего порядка и пренебрежению корреляциями высокого порядка. Такое описание часто оказывается адекватным или по крайней мере является удобным отправным пунктом [хотя, строго говоря, если $W(\{s_k\})$ представляет собой полином, он должен быть второго порядка, чтобы соотношение (4.43) соответствовало точной характеристической функции].

Как при точном, так и при приближенном рассмотрении, комбинируя (4.42) и (4.44), можно получить соотношение

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(\{\psi_k\})}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k_1, \dots, k_n} \left(\frac{\partial}{\partial \psi_{k_1}} \dots \frac{\partial}{\partial \psi_{k_n}} \right) \times \\ &\times \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_{k_1} \dots \psi_{k_n} \rangle_{\text{св}} \right\} p(\{\psi_k\}), \end{aligned} \quad (4.46)$$

которое известно под названием стохастического уравнения. Если суммирование обрывается при $n = 2$, тогда (4.46) представляет собой известное уравнение Фоккера — Планка. В диффузионном приближении все члены выше $n = 2$ опускаются, что и приводит к уравнению Фоккера — Планка.

§ 4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В заключение подчеркнем опять общность анализа флуктуационных уравнений с помощью характеристических функционалов. Даже в «чистых» случаях (см. выше п. 1 и 2), когда имеется неопределенность только в начальных условиях, описанная методика приводит к совершенно общим решениям. Например, для функционала

$$C \{s\} \equiv \left\langle \exp \left[i \int s(t') x(t') dt' \right] \right\rangle \quad (4.47)$$

простое уравнение $\ddot{x} = 0$ принимает вид

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\delta C \{s\}}{\delta s(t)} = 0. \quad (4.48)$$

Чтобы найти общее решение этого уравнения, заметим, что: 1) можно ограничиться рассмотрением функций $s(t')$, которые обращаются в нуль для достаточно больших положительных и отрицательных значений t' ; 2) для таких функций однозначно определяются и моменты

$$s_p \equiv \int t'^p s(t') dt', \quad (4.49)$$

а моменты в свою очередь однозначно определяют функцию; 3) функционал C можно рассматривать как функцию величин s_p , $p = 0, 1, 2, \dots$. Согласно правилу дифференцирования, получаем соотношение

$$\frac{\delta}{\delta s(t)} C \equiv \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\delta s_p}{\delta s(t)} \frac{\partial C}{\partial s_p} = \sum_{p=0}^{\infty} t^p \frac{\partial C}{\partial s_p}, \quad (4.50)$$

которое отображает полную временную зависимость. В соответствии с (4.48) C может зависеть только от s_0

и s_1 . В частности, вследствие того что C является характеристическим функционалом, имеем

$$\begin{aligned} C\{s\} &= C\left(\int s(t') dt', \int t's(t') dt'\right) \equiv \\ &\equiv \int \exp\left\{i\left[x_0 \int s(t') dt' + v_0 \int t's(t') dt'\right]\right\} p(x_0, v_0) dx_0 dv_0. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Естественно интерпретировать x_0 и v_0 как начальные координаты и скорость. Заметим, в частности, что

$$C\{s\} = \exp\left[-a\left(\int s(t') dt'\right)^2 - b\left(\int t's(t') dt'\right)^2\right] \quad (4.52)$$

является решением уравнения (4.48), соответствующего независимым нормально распределенным x_0 и v_0 .

Хотя случай свободных частиц чрезвычайно прост, следует подчеркнуть, что найденное общее решение (4.48) содержит все решения с произвольными распределениями начальных значений. Все представляющие интерес временные корреляции также можно найти из решения, полученного в виде характеристического функционала. Такие решения, как мы видели выше, представляют интерес даже в том случае, когда на частицы действуют случайные силы. Отметим также то обстоятельство, что в своем анализе мы ограничились рассмотрением подходящего подкласса гладких функций и выбрали соответствующую параметризацию (например, $\{s_p\}$). Это может оказаться полезным и в более общих случаях.

К динамическим уравнениям и их анализу с помощью характеристических функций мы вернемся в гл. 9.

Статистические состояния в квантовой теории

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

До сих пор анализ электромагнитного поля (точнее, его идеализированного представления в виде действительного скалярного поля $V^{(c)}$) был сугубо классическим. Статистический ансамбль, обуславливающий как эффекты частичной когерентности при интерференции, так и непурассоновскую статистику фотоотсчетов, имел строго классическое происхождение. Результаты классической теории частичной когерентности хорошо подтверждаются экспериментально; классическое рассмотрение удовлетворительно объясняет качественные особенности корреляции и флуктуаций фотоэлектрических отсчетов. Однако при строгом анализе следует, конечно, принимать во внимание квантовую природу поля излучения. В конечном счете квантовый анализ, к которому мы приходим в силу логической необходимости, должен давать результаты, качественно подобные результатам, получаемым в классической теории. Существует не только качественное сходство между квантовыми и классическими результатами; как будет показано в следующих главах, имеет место *тождественность в формулировках*, которая при использовании определенной схемы интерпретации позволяет изложить предшествующие классические результаты на квантовом языке.

В этой главе мы рассмотрим некоторые основные понятия квантовой механики, лежащие в основе такого анализа, а именно гильбертово пространство, линейные операторы, вычисление следа, обращая особое внимание на статистическое описание квантовых состояний. Ниже будут рассмотрены примеры для систем с конечным

числом состояний, для систем, обладающих одной и конечным числом степеней свободы, и, наконец, для некоторых систем с бесконечным числом степеней свободы, которые необходимы для описания поля излучения.

§ 2. КВАНТОВЫЙ ФОРМАЛИЗМ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Формулировка квантовой теории (как для самых простых, так и самых сложных систем) влечет за собой представление наблюдаемых и различных динамических переменных в виде линейных операторов, действующих в гильбертовом векторном пространстве. Сами же векторы в свою очередь соответствуют чистым состояниям системы.

А. Гильбертово пространство

Гильбертово пространство во многих отношениях аналогично известному трехмерному евклидову векторному пространству. В элегантных обозначениях Дирака [5.1] векторы гильбертова пространства обозначаются символами «кет» (например, $|\psi\rangle$) с разными индексами. Как и в обычном векторном анализе, различные векторы гильбертова пространства можно складывать или умножать на комплексные скалярные величины и таким образом получать новые векторы. Число линейно независимых векторов определяет измерение D гильбертова пространства, которое может быть конечным или счетно бесконечным. Определим для каждой пары векторов $|\psi\rangle$ и $|\lambda\rangle$ комплексное число

$$\langle\lambda|\psi\rangle, \quad (5.1)$$

называемое скалярным произведением по аналогии со скалярным произведением в векторном анализе. Это произведение линейно по вектору $|\psi\rangle$ и подчиняется двум условиям:

$$\langle\lambda|\psi\rangle = \langle\psi|\lambda\rangle^*, \quad \langle\psi|\psi\rangle \geq 0, \quad (5.2)$$

причем в последнем соотношении равенство имеет место в том и только в том случае, когда $|\psi\rangle = 0$ (нулевой вектор). Неравенство Шварца означает, что

$$|\langle\lambda|\psi\rangle|^2 \leq \langle\lambda|\lambda\rangle \langle\psi|\psi\rangle, \quad (5.3)$$

причем равенство имеет место, когда и только когда $|\lambda\rangle = \alpha|\psi\rangle$ для некоторого комплексного числа α . Если $|\psi\rangle = 0$, то $\langle\lambda|\psi\rangle = 0$ для всех $|\lambda\rangle$ и наоборот. Если для данных векторов $|\lambda\rangle$ и $|\psi\rangle$, ни один из которых не является нулевым вектором, $\langle\lambda|\psi\rangle = 0$, то такие векторы называются ортогональными. Величина, или норма, каждого вектора конечна и определяется выражением

$$\| |\psi\rangle \| \equiv \langle\psi|\psi\rangle^{1/2} \geq 0. \quad (5.4)$$

Если норма равна 1, то векторы называются нормированными. Из (5.3) непосредственно вытекает неравенство

$$\| |\lambda\rangle + |\psi\rangle \| \leq \| |\lambda\rangle \| + \| |\psi\rangle \|. \quad (5.5)$$

В каждом гильбертовом пространстве может быть введен «полный ортонормированный базис», а именно набор векторов $\{ |n\rangle \}$, $n = 1, 2, \dots, D$, для которых $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ и которые накрывают¹⁾ гильбертово пространство. Каждый вектор $|\psi\rangle$ можно разложить по набору векторов $\{ |n\rangle \}$:

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^D \psi_n |n\rangle = \sum_{n=1}^D |n\rangle \langle n|\psi\rangle \quad (5.6)$$

в полной аналогии с разложением по ортонормированному базису в общепринятом векторном анализе. Квадрат нормы, выраженный через коэффициенты разложения (5.6), имеет вид

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{n=1}^D |\psi_n|^2 = \sum_{n=1}^D \langle\psi|n\rangle \langle n|\psi\rangle. \quad (5.7)$$

Если $D < \infty$, то коэффициенты ψ_n могут быть произвольными комплексными числами. Чтобы норма имела конечное значение при $D = \infty$, сумма квадратов коэффициентов $\{ \psi_n \}$ должна быть конечной. Далее, из свойства полноты гильбертова пространства следует, что каждой последовательности с конечной суммой квадратов отвечает определенный вектор $|\psi\rangle$, причем этот класс векторов полностью исчерпывает гильбертово пространство.

¹⁾ См. примечание на стр. 169. — Прим. ред.

Последнее замечание является ключевым моментом, связанным с представлением абстрактных векторов гильбертова пространства при помощи последовательностей комплексных чисел; фактически именно такими были первоначальный математический подход, развитый Гильбертом, и первоначальная формулировка квантовомеханического описания, данная Гейзенбергом. Можно сказать, что базисные векторы $|n\rangle$ «порождают» представление вектора $|\psi\rangle$ с помощью последовательностей комплексных чисел $\psi_n = \langle n|\psi\rangle$. В обозначениях Дирака скалярное произведение равно

$$\langle \lambda | \psi \rangle = \sum_{n=1}^D \langle \lambda | n \rangle \langle n | \psi \rangle \quad (5.8)$$

по аналогии со скалярным произведением обычных векторов, выраженным через их компоненты.

Б. Линейные операторы

Наблюдаемые и динамические величины представляются линейными операторами, т. е. линейными преобразованиями, превращающими один вектор в другой. Иначе говоря, если A представляет собой оператор, тогда $A|\psi\rangle$ является преобразованным вектором, а $\langle \lambda | A | \psi \rangle$ — его скалярным произведением с вектором $|\lambda\rangle$. Операторы можно складывать, а также умножать на комплексные числа или на другие операторы, получая таким образом новые операторы. Единичный оператор I оставляет все векторы и операторы без изменений. Для краткости мы будем часто писать численный коэффициент c , в действительности означающий оператор cI ¹⁾.

Если для всех нормированных векторов $|\lambda\rangle$ и $|\psi\rangle$ $|\langle \lambda | A | \psi \rangle| \leq b < \infty$, то оператор A называется ограниченным. Наименьшее значение b называется нормой оператора A и обозначается $\|A\|$. В конечномерном гильбертовом пространстве каждый оператор ограничен, однако это не справедливо для пространства с беско-

¹⁾ Динамические величины удобно обозначать как « q -числа» при квантовом рассмотрении и как « c -числа» при классическом рассмотрении. Часто оператор, равный произведению единичного оператора на число, также называют c -числом.

нечным числом измерений. Детальное изучение неограниченных операторов представляет собой серьезное математическое исследование, поэтому мы вынуждены рассматривать такие операторы эвристически, обращаясь главным образом к физической интуиции. Появление используемого ниже не вполне четкого понятия «почти все» (suitably many) как раз и связано с трудностями, обусловленными неограниченными операторами.

В представлении гильбертова пространства последовательностями $\{\psi_n\}$ оператору A соответствует матрица $\{A_{mn}\}$ с элементами

$$A_{mn} = \langle m | A | n \rangle. \quad (5.9)$$

Элемент A_{mn} можно интерпретировать как m -ю компоненту вектора $A|n\rangle$. Из (5.6) и (5.9) следует, что вектор $A|\psi\rangle$ в свою очередь может быть представлен с помощью последовательности $\{(A\psi)_m\}$, где

$$\begin{aligned} (A\psi)_m &= \langle m | A | \psi \rangle = \sum_{n=1}^D \langle m | A | n \rangle \langle n | \psi \rangle = \\ &= \sum_{n=1}^D A_{mn} \psi_n. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Очевидно, что единичному оператору I соответствует единичная матрица, поскольку $\langle m | I | n \rangle = \langle m | n \rangle = \delta_{mn}$.

В обозначениях Дирака имеем следующее основное соотношение:

$$I = \sum_{n=1}^D |n\rangle \langle n|, \quad (5.11)$$

которое называют разложением единичного оператора. Вектор $|n\rangle$, записанный в виде $\langle n|$ (соответствующее обозначение носит название «бра»-вектора), называют сопряженным. Из обозначения $A = |n\rangle \langle m|$ естественно вытекает определение $\langle \lambda | A | \psi \rangle \equiv \langle \lambda | n \rangle \langle m | \psi \rangle$. Подставляя единичный оператор в вышеприведенную формулу, нетрудно видеть, что соотношения (5.8) и (5.10) являются простыми тождествами. Соотношение (5.11) справедливо для произвольного полного ортонормированного базиса $\{|n\rangle\}$.

Оператор A^\dagger , сопряженный оператору A , определяется соотношением

$$\langle \lambda | A^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | A | \lambda \rangle^*, \quad (5.12)$$

которое должно выполняться для всех (или почти всех) $|\lambda\rangle$ и $|\psi\rangle$. Если $AA^\dagger = A^\dagger A = I$, то $A^\dagger = A^{-1}$ и оператор A является унитарным. Для унитарного оператора A имеем $\|A|\psi\rangle\| = \||\psi\rangle\|$ для любого вектора $|\psi\rangle$. Если $A^\dagger = A$, то оператор A называется эрмитовым. Из (5.12) следует, что значение $\langle \psi | A | \psi \rangle$ для эрмитова оператора всегда действительно. Эрмитов оператор A , удовлетворяющий условию $\langle \psi | A | \psi \rangle \geq 0$ для всех (или почти всех) $|\psi\rangle$, называют положительным. В конечномерном гильбертовом пространстве каждому эрмитову оператору соответствует полный набор ортогональных собственных векторов и действительных собственных значений, для которых имеет место соотношение

$$A | a_n \rangle = a_n | a_n \rangle. \quad (5.13)$$

Если оператор A положителен, то $a_n \geq 0$. В представлении базиса $|a_n\rangle$ оператор A диагонален, т. е. $\langle a_m | A | a_n \rangle = a_n \delta_{nm}$. В гильбертовом пространстве с бесконечным числом измерений можно таким образом диагонализировать не каждый эрмитов оператор, даже если он ограничен.

Два момента, относящиеся к используемым нами эрмитовым операторам, заслуживают комментариев. Будем предполагать, что эрмитовы операторы, с которыми мы имеем дело, обладают полными спектральными разложениями и являются, таким образом, самосопряженными по математической терминологии. Это свойство означает, что эрмитов оператор A порождает унитарное преобразование $U(s) = \exp(isA)$, где s — действительное число, и что величина $\langle \psi | \exp(isA) | \psi \rangle$ допускает представление

$$\langle \psi | e^{isA} | \psi \rangle = \int e^{isa} d\sigma(a), \quad (5.14)$$

где σ — некоторая (вероятностная) мера, определяемая величинами $|\psi\rangle$ и A . Чтобы найти пример оператора,

который является эрмитовым в элементарном смысле, но не удовлетворяет соотношению (5.14), достаточно рассмотреть оператор $-i\hbar\partial/\partial x$, действующий в гильбертовом пространстве функций $f(x)$, определенных для $x > 0$. В физике обычно вводят ненормируемые собственные векторы (нормировка на δ -функцию) $|A'\rangle$ для значения A' эрмитовых операторов A с непрерывным спектром. Мы не будем пользоваться такими векторами, подчеркнем только, что неосмотрительное их применение может иногда приводить к неприятностям. Пусть, например, A и B — эрмитовы операторы, которые удовлетворяют соотношению $AB = BA + iB$, и пусть для некоторого действительного A' имеет место соотношение $A|A'\rangle = A'|A'\rangle$. Тогда $B|A'\rangle$ также является собственным вектором оператора A с комплексным собственным значением $A' + i$, что противоречит свойству эрмитовости оператора A . Чтобы избежать этих затруднений, считают либо $|A'\rangle$, либо $B|A'\rangle$ ненормированным.

Предположим, что в бесконечномерном пространстве ($D = \infty$) мы рассматриваем положительный эрмитов оператор, который *обладает* полным набором собственных векторов и собственных значений (5.13). Тогда оператор A можно представить следующим образом:

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n\rangle a_n \langle a_n|, \quad (5.15)$$

где коэффициенты $a_n \geq 0$ действительны. Если $a_n \leq b < \infty$, то оператор A ограничен, в противном случае нет. Важный частный случай ограниченных операторов мы имеем, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty. \quad (5.16)$$

В этом случае существует след оператора A , а именно

$$\text{Sp}(A) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \langle a_n| A |a_n\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty, \quad (5.17)$$

и A называют оператором с конечным следом (traceable). В связи с этим результатом можно привести несложную математическую теорему: для положительных эрмитовых операторов A значение $\text{Sp}(A)$ не зависит

от того, какой полный ортонормированный базис используется для оценки суммы (например, это могут и не быть собственные векторы данного оператора). Таким образом, значение следа $\text{Sp}(A)$ является свойством, *присущим непосредственно* самому оператору. Далее, более сложная математическая теорема утверждает, что если оператор A положителен и эрмитов, а его след $\text{Sp}(A)$ конечен, то такой оператор *обязательно* обладает полным ортонормированным набором собственных векторов и соответствующих собственных значений, для которых выполняются (5.15) и (5.16).

В случае пространства с бесконечным числом измерений класс операторов, у которых существует след $\text{Sp}(A)$, не ограничен рассмотренными положительно определенными эрмитовыми операторами. Однако каждый оператор T с конечным следом имеет полярное разложение (polar decomposition) $T = VA$, где A — положительный эрмитов оператор с конечным следом вида (5.15) и оператор V — изометрический, т. е. обладающий свойством $V^\dagger V = I$. Такое разложение является аналогом полярной формы $z = e^{i\varphi}r$, справедливой для произвольного комплексного числа z . Оператор V обладает следующим свойством: он преобразует любой ортонормированный набор векторов $\{|\psi_n\rangle\}$ в другой ортонормированный набор векторов $\{|\lambda_n\rangle\}$. С учетом соотношения (5.15) отсюда следует, что каждый оператор T с конечным следом допускает *каноническое разложение*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n\rangle \beta_n \langle \psi_n |, \quad (5.18)$$

где $\beta_n \geq 0$ — действительные коэффициенты, удовлетворяющие условию $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n < \infty$, а $\{|\lambda_n\rangle\}$ и $\{|\psi_n\rangle\}$ — полные ортонормированные базисы. Соотношение (5.18) можно также рассматривать как каноническое *определение* таких операторов, для которых след можно найти однозначно. Отсюда, в частности, следует

$$\text{Sp}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \langle \psi_n | \lambda_n \rangle. \quad (5.19)$$

Этот ряд сходится абсолютно и в силу неравенства Шварца (5.3) ограничен величиной

$$|\text{Sp}(T)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \equiv \|T\|_1.$$

Это выражение определяет полезное понятие «следовой нормы» (trace-class norm), относящееся к операторам T с конечным следом; оно отличается от понятия нормы оператора $\|T\|$. Соотношение (5.17) показывает, что для положительных эрмитовых операторов с конечным следом $\text{Sp}(A) = \|A\|_1$, тогда как в остальных случаях имеет место неравенство. Каноническое разложение (5.18) и следовая норма $\|T\|_1$ используются в гл. 8.

В гильбертовом пространстве с конечным числом измерений ($D < \infty$) каждый оператор имеет конечный след. Следовательно, каждый оператор допускает каноническое разложение, подобное (5.18), но содержащее только первые D членов.

В. Статистические состояния

Чистые состояния. В квантовой теории нормированные векторы $|\psi\rangle$ гильбертова пространства соответствуют чистым состояниям системы. Пусть эрмитов оператор \mathcal{O} соответствует наблюдаемой физической величине, тогда среднее значение \mathcal{O} в состоянии $|\psi\rangle$ равно действительному числу

$$\langle \mathcal{O} \rangle \equiv \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle. \quad (5.20)$$

В свою очередь высшие моменты \mathcal{O} определяются действительными выражениями

$$\langle \mathcal{O}^n \rangle \equiv \langle \psi | \mathcal{O}^n | \psi \rangle. \quad (5.21)$$

Если оператор \mathcal{O} неограничен, то для некоторых состояний значения $\langle \mathcal{O}^n \rangle$ могут быть неопределенными. Однако, как и в классической теории вероятности, характеристическая функция распределения \mathcal{O} в состоянии $|\psi\rangle$, задаваемая соотношением

$$C_{\mathcal{O}}(s) = \langle \psi | e^{is\mathcal{O}} | \psi \rangle, \quad (5.22)$$

где оператор $\exp(is\mathcal{O})$ унитарен, всегда определена для любых \mathcal{O} и $|\psi\rangle$.

Как обычно, каждая характеристическая функция $S_\psi(s)$ представляет собой непрерывную функцию s и является фурье-образом распределения наблюдаемых значений, соответствующих оператору \mathcal{O} ¹⁾. Эти наблюдаемые значения имеют разброс, т. е. обладают отличной от нуля дисперсией, если состояние $|\psi\rangle$ не является собственным вектором оператора \mathcal{O} . Но даже если вектор $|\psi\rangle$ есть собственный вектор для одного оператора, он не может быть собственным вектором операторов, соответствующих всем наблюдаемым физическим величинам (поскольку не все операторы коммутируют). Следовательно, в любом чистом состоянии всегда некоторые наблюдаемые величины испытывают случайный разброс, описываемый определенным распределением. Таким образом, вероятностный подход неизбежен.

Два состояния мы считаем физически эквивалентными, если одинаковы средние значения всех наблюдаемых величин (или все их характеристические функции). Поскольку все эрмитовы операторы в принципе соответствуют наблюдаемым величинам, функции $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ отвечают одинаковым состояниям, когда и только когда $|\psi_1\rangle = e^{i\varphi} |\psi_2\rangle$. Иначе говоря, $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ тождественны, если не говорить о возможном скалярном коэффициенте с модулем, равным единице.

Чистое состояние можно описывать также с помощью матрицы плотности

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|; \quad (5.23)$$

при этом правило расчета средних значений определяется следующим образом:

$$\langle\mathcal{O}\rangle \equiv \text{Sp}(\rho\mathcal{O}) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle n|\psi\rangle\langle\psi|\mathcal{O}|n\rangle = \langle\psi|\mathcal{O}|\psi\rangle \quad (5.24)$$

в полной аналогии с (5.20). Поскольку матрица ρ имеет вид (5.15), она, очевидно, является эрмитовой положительной матрицей с конечным следом. Более того, поскольку функция $|\psi\rangle$ нормирована,

$$\rho^2 = |\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle\psi| = \rho. \quad (5.25)$$

¹⁾ В дальнейшем всюду для краткости вместо этой полной формулировки пишется «характеристическая функция \mathcal{O} ». — Прим. ред.

Матрицы плотности для двух физически эквивалентных чистых состояний строго тождественны: $\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| = |\psi_2\rangle\langle\psi_2| = \rho_2$. В качестве резюме отметим, что каждое чистое состояние системы может быть отождествлено с положительной эрмитовой матрицей плотности ρ , для которой $\rho^2 = \rho$ и след $\text{Sp}(\rho) = 1$.

Смешанные состояния. В общей теории вероятности обычно имеют дело с множеством условных распределений. Предположим для примера, что $p(T|S, M, H)$ означает условное распределение температуры T наружного воздуха для штата S Соединенных Штатов в течение месяца M и в течение часа H дня. Однако если имеется «размазанная» статистика, относящаяся к температуре T утром \mathcal{M} в течение лета \mathcal{P} для всех штатов Новой Англии $\mathcal{N}\mathcal{E}$, то соответствующее (все еще условное) распределение определяется усреднением

$$p(T|\mathcal{N}\mathcal{E}, \mathcal{P}, \mathcal{M}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Усреднение по Новой Англии} \\ \text{в летние месяцы и утренние} \\ \text{часы} \end{array} \right\} p(T|S, M, H).$$

Такое усреднение («размазывание») более чистых условий неизбежно приводит к распределению, которое является более «широким», чем исходное.

Поучительно обратиться к более специальному примеру. Распределения фотоэлектрических отсчетов, рассмотренные в гл. 2 и гл. 3, были выведены в два этапа. Сначала с помощью соотношения (2.2) мы определяли условное распределение отсчетов для интенсивности, имеющей значение $I(t)$. Потом нашли окончательное распределение отсчетов, усредняя условное распределение по соответствующему распределению интенсивностей; см., например (2.10) или (3.1). Как уже несколько раз отмечалось, дисперсия отсчетов при усреднении по интенсивности всегда возрастает¹⁾.

Способ, примененный для вычисления распределения отсчетов, иллюстрирует удобный и наглядный метод

¹⁾ Распределения (4.29) и (4.30) также, очевидно, являются условными распределениями.

определения любого распределения вероятности. Сначала необходимо определить *чистые* распределения, т. е. такие условные распределения, в которых все остальные существенные параметры постоянны, затем следует провести усреднение по распределениям этих параметров.

Применим описанный способ для нахождения распределения наблюдаемых значений произвольной величины \mathcal{O} в квантовой теории. Каждое чистое распределение, задаваемое своей характеристической функцией, определяется соотношением

$$C_{\mathcal{O}}(s | \rho_{\alpha}) = \text{Sp}(\rho_{\alpha} e^{is\mathcal{O}}) = \langle \psi_{\alpha} | e^{is\mathcal{O}} | \psi_{\alpha} \rangle. \quad (5.26)$$

Как видно из обозначений, это распределение условно по состоянию системы, задаваемому матрицей плотности ρ_{α} (или вектором $|\psi_{\alpha}\rangle$). Если полные сведения о состоянии системы отсутствуют, то следует провести усреднение распределения (5.26) по различным ρ_{α} . Обозначим через α набор неизвестных переменных величин в ρ_{α} и пусть $\mu(\alpha)$ (с возможными δ -функциями) — нормированное распределение значений α . Тогда, пользуясь линейными свойствами следа, найдем соответствующую (и все еще условную) характеристическую функцию

$$\begin{aligned} C_{\mathcal{O}}(s) &\equiv C_{\mathcal{O}}(s | \rho) = \int \mu(\alpha) d\alpha \text{Sp}(\rho_{\alpha} e^{is\mathcal{O}}) = \\ &= \text{Sp}\left(\left[\int \mu(\alpha) \rho_{\alpha} d\alpha\right] e^{is\mathcal{O}}\right) \equiv \\ &\equiv \text{Sp}(\rho e^{is\mathcal{O}}), \end{aligned} \quad (5.27)$$

где

$$\rho \equiv \int \mu(\alpha) \rho_{\alpha} d\alpha. \quad (5.28)$$

Теперь независимо от того, какими являются фактически величины α или каков вид распределения $\mu(\alpha)$, имеет место примечательное свойство матрицы плотности ρ . Очевидно, матрица плотности ρ положительна, эрмитова и удовлетворяет условию $\text{Sp}(\rho) = 1$. Таким образом, в соответствии с замечаниями, сделанными в

связи с соотношением (5.15), видно, что ρ всегда имеет каноническое разложение

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n\rangle \beta_n \langle \psi_n|, \quad (5.29)$$

где $\beta_n \geq 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1$, а $\{|\psi_n\rangle\}$ образует полный ортонормированный базис.

Таким образом, общее состояние системы соответствует матрице плотности ρ в виде (5.29). Среднее значение эрмитовой наблюдаемой величины \mathcal{O} определяется соотношением $\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Sp}(\rho \mathcal{O})$, тогда как характеристическая функция распределения наблюдаемых значений \mathcal{O} дается выражением

$$C_{\mathcal{O}}(s) = \text{Sp}(\rho e^{is\mathcal{O}}). \quad (5.30)$$

Чистые состояния удовлетворяют условию $\rho^2 = \rho$, но для смешанных состояний, для которых в сумме (5.29) содержится более одного члена, это условие не выполняется. Для конечномерного гильбертова пространства полученные выше результаты изменятся только в том отношении, что сумма в (5.29) будет иметь конечное число членов.

Для более наглядного пояснения этих свойств приведем несколько примеров.

§ 3. ПРИМЕРЫ СТАТИСТИЧЕСКИХ СОСТОЯНИЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

А. Состояния поляризации монохроматического светового пучка

Рассмотрим состояния поляризации светового пучка в качестве примера системы с конечным числом линейно независимых состояний. Мы упрощаем задачу, фиксируя дополнительные оптические степени свободы, соответствующие направлению распространения и цвету (частоте) волны. В этом случае пучок света имеет два независимых состояния, каковыми могут быть две линейные поляризации. Как строго показано в следующей главе, направления поляризаций перпендикулярны направлению распространения.

Статистические состояния такой идеализированной системы не обязательно должны соответствовать поляризованному свету. В одном предельном случае, а именно в случае нулевой поляризации, когда никакое направление не выделено, мы имеем смешанное состояние; другому предельному случаю 100%-ной поляризации отвечают чистые состояния. Смешанные состояния для нашего рассмотрения можно образовать из чистых состояний.

Поскольку возможны только два независимых состояния поляризации, мы применим двумерное гильбертово пространство ($D = 2$). Таким образом, чистое состояние можно представить нормированным двухкомпонентным вектором

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \langle\psi|\psi\rangle = |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1. \quad (5.31)$$

Значения u_j определяют характер поляризации. Например, при $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$ (или наоборот) свет линейно поляризован. Если $u_1 = \pm iu_2$, свет циркулярно поляризован. В общем случае, когда ни одно из вышеприведенных условий не выполняется, свет поляризован эллиптически.

Матрица плотности чистого состояния (5.31) представляет собой эрмитову матрицу второго порядка со следом, равным единице:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} (u_1^* u_2^*) = \begin{pmatrix} u_1^* u_1 & u_2^* u_1 \\ u_1^* u_2 & u_2^* u_2 \end{pmatrix}. \quad (5.32)$$

Особенно удобное представление ρ , справедливое для смешанных и чистых состояний, получается при использовании стоксовых параметров¹⁾. Для чистого состояния (5.31) эти параметры определяются следующим образом:

$$s_0 = u_1^* u_1 + u_2^* u_2 = 1, \quad (5.33a)$$

$$s_1 = u_1^* u_2 + u_2^* u_1, \quad (5.33б)$$

$$s_2 = i(u_2^* u_1 - u_1^* u_2), \quad (5.33в)$$

$$s_3 = u_1^* u_1 - u_2^* u_2. \quad (5.33г)$$

¹⁾ См. книгу Борна и Вольфа [1.1], гл. X.

В любом случае (и в частности, для чистого состояния) можно положить

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} s_0 + s_3 & s_1 - is_2 \\ s_1 + is_2 & s_0 - s_3 \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

Если ввести обычные матрицы Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

и обозначить единичную матрицу через σ_0 , то можно написать

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{2} (s_0 \sigma_0 + s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2 + s_3 \sigma_3) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} (1 + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \quad (5.35)$$

В свою очередь s_j , $j = 0, 1, 2, 3$, можно найти из ρ с помощью соотношения

$$s_j = \text{Sp}(\rho \sigma_j). \quad (5.36)$$

Заметим также, что (5.34) приводит к выражению

$$\det(\rho) = \frac{1}{4} (s_0^2 - \mathbf{s}^2). \quad (5.37)$$

В обозначениях Стокса чистые состояния представляются *единичными векторами* \mathbf{s} , $\mathbf{s}^2 = 1$. Это условие является следствием равенства нулю детерминанта матрицы ρ , записанной в виде (5.32), откуда в силу (5.37) вытекает, что $\mathbf{s}^2 = s_0^2 = 1$.

Смешанные состояния в свою очередь получаются из чистых состояний. Пусть ρ_α означает семейство чистых состояний, определяемых соответствующим семейством единичных векторов $\mathbf{s}_\alpha = \text{Sp}(\rho_\alpha \boldsymbol{\sigma})$. Тогда, согласно общей формулировке (5.28),

$$\begin{aligned} \rho &= \int \mu(\alpha) \rho_\alpha d\alpha = \frac{1}{2} \left[1 + \boldsymbol{\sigma} \cdot \int \mu(\alpha) \mathbf{s}_\alpha d\alpha \right] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} (1 + \mathbf{s} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \end{aligned} \quad (5.38)$$

Вследствие усреднения по различным единичным векторам значение \mathbf{s} в (5.38) всегда удовлетворяет условию

$s^2 < 1$, что является отличительным свойством смешанных состояний. Следует иметь в виду, что различные распределения $\mu(\alpha)$, очевидно, могут приводить к одинаковым векторам s и, следовательно, к одинаковым матрицам ρ . Короче говоря, одно и то же состояние может быть вызвано различными причинами.

Степень поляризации \mathcal{P} , независимо от вида поляризации (линейная, круговая, и т. д.), определяется выражением

$$\mathcal{P}^2 \equiv s^2. \quad (5.39a)$$

Если ρ_1 и ρ_2 — собственные значения матрицы ρ , то из соотношений $\text{Sp}(\rho) = \rho_1 + \rho_2 = 1$ и $\det(\rho) = \rho_1\rho_2$ в сочетании с (5.37) получаем

$$\mathcal{P}^2 = 1 - 4 \det(\rho) = (\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2 = (\rho_1 - \rho_2)^2. \quad (5.39b)$$

Примем $\rho_i = \bar{n}_i / (\bar{n}_1 + \bar{n}_2)$, $i = 1, 2$; тогда из соотношения (5.39b) следует, что параметр, определенный соотношением (2.41), можно рассматривать как степень поляризации.

Если перейти к общим формулировкам, то можно сказать, что для чистого состояния степень поляризации $\mathcal{P} = 1$, а для смешанного состояния $\mathcal{P} < 1$. Полностью хаотическое состояние имеет степень поляризации $\mathcal{P} = 0$ и задается матрицей плотности

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.40)$$

Такое излучение можно разложить по любым двум ортогональным поляризациям с одинаковыми вероятностями. Свет теплового источника неполяризован в том смысле, что $\mathcal{P} = 0$.

Б. Статистические состояния гармонического осциллятора

Гармонический осциллятор занимает центральное место в квантовой механике вообще и в квантовой оптике в частности, поэтому рассмотрим его более подробно. Введем эрмитов оператор координаты Q и сопряженный ему эрмитов оператор импульса P , удовле-

творяющие каноническому коммутационному соотношению

$$[Q, P] \equiv QP - PQ = i\hbar. \quad (5.41)$$

Разумеется, эти операторы вообще характеризуют одну степень свободы и применимы не только к осцилляторам.

Операторы рождения и уничтожения. Свойства операторов Q и P особенно удобно изучать с помощью операторов уничтожения a и рождения a^\dagger , определяемых соответственно соотношениями

$$a \equiv \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} Q + i\left(\frac{1}{2\omega\hbar}\right)^{1/2} P, \quad (5.42a)$$

$$a^\dagger \equiv \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} Q - i\left(\frac{1}{2\omega\hbar}\right)^{1/2} P. \quad (5.42b)$$

В теории осциллятора ω интерпретируется как угловая частота исследуемого осциллятора. Из (5.41) следует коммутационное соотношение

$$[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1. \quad (5.43)$$

В результате умножения (5.43) на a справа и на a^\dagger слева получаем соотношения

$$Na = a(N - 1), \quad (5.44a)$$

$$Na^\dagger = a^\dagger(N + 1). \quad (5.44b)$$

Здесь введен оператор числа частиц (квантов)

$$N \equiv a^\dagger a, \quad (5.45)$$

который, очевидно, положителен и эрмитов. Повторное применение этих соотношений приводит к выражениям

$$Na^m = a^m(N - m), \quad (5.46a)$$

$$Na^{\dagger m} = a^{\dagger m}(N + m) \quad (5.46b)$$

для всех $m = 0, 1, 2, \dots$. Далее, имеем

$$a^{\dagger m} a^m = N(N - 1)(N - 2) \dots (N - [m - 1]) \quad (5.47)$$

для любых $m \geq 1$. Левая часть соотношения (5.47) заведомо положительна для любых m . Следовательно, распределение собственных значений оператора числа

частиц N не может быть непрерывным. Действительно, если бы существовал непрерывный спектр собственных значений, то существовали бы такие приближенные собственные состояния оператора N , для которых ни один из множителей в правой части (5.47) не был бы равен нулю, причем при соответствующем значении m некоторые из множителей (например, один) могли бы стать отрицательными.

Предположим поэтому, что для некоторого действительного числа оператор N имеет одно нормированное собственное состояние

$$N |n\rangle = n |n\rangle. \quad (5.48)$$

Соотношение (5.47) снова приводит к противоречию, если n не является целым неотрицательным числом. Чтобы показать, что n действительно целые положительные числа, начнем для удобства с $n = 0$ и основного состояния $|0\rangle$. Из (5.46б) следует, что

$$N (a^{+m} |0\rangle) = a^{+m} (N + m) |0\rangle = m (a^{+m} |0\rangle). \quad (5.49)$$

Следовательно, $a^{+m} |0\rangle$ пропорционально $|m\rangle$ для каждого $m \geq 1$. То обстоятельство, что данное утверждение не бессодержательно, следует из ненулевого условия нормировки

$$\langle 0 | a^m a^{+m} |0\rangle = m!, \quad (5.50)$$

которое является следствием более общего соотношения

$$a^m a^{+m} = (N + 1)(N + 2) \dots (N + m) \quad (5.51)$$

для $m \geq 1$. Поэтому в качестве нормированных собственных векторов оператора N с собственным значением n можно принять

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{+n} |0\rangle. \quad (5.52)$$

Эти векторы удовлетворяют, например, соотношениям

$$a^+ |n\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \quad (5.53a)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle, \quad (5.53б)$$

которые отвечают соответственно увеличению и уменьшению числа фотонов на единицу.

Наше предварительное рассмотрение оператора числа частиц N мы закончим нижеследующим замечанием. Предположим, что существует дополнительный параметр вырождения, указывающий, например, что имеют место L линейно независимых основных состояний $|0, l\rangle, l = 1, 2, \dots, L$, для которых $N|0, l\rangle = 0$. Тогда, как следует из предыдущего рассмотрения, существуют L полных наборов состояний $|n, l\rangle$. Однако операторы a и a^\dagger не могут смешивать состояния с разными l . Чтобы избавиться от этого вырождения, постулируем, что *каждый* оператор может быть представлен в виде функции операторов a и a^\dagger . Другими словами, по предположению квантование заключается в использовании *неприводимых* представлений операторов Q и P (в представлении Шредингера неприводимые операторы x и $-i\hbar \partial/\partial x$ появляются автоматически). При этом может быть только *один набор* $|n\rangle, n = 0, 1, 2, \dots$, который образует полный ортонормированный базис для бесконечномерного гильбертова пространства. При рассмотрении осциллятора удобно нумеровать состояния, соответствующие собственным значениям оператора числа частиц N , начиная с нуля. Это приводит к очевидной и простой модификации формул, полученных при общем рассмотрении.

Статистические состояния. Важный набор матриц плотности чистого состояния представляют собой матрицы, образованные из собственных состояний оператора N , а именно $\rho_n = |n\rangle \langle n|$. В свою очередь важный набор смешанных состояний определяется выражением

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n |n\rangle \langle n|. \quad (5.54)$$

Для гармонического осциллятора, находящегося в тепловом равновесии при температуре T (или обратной температуре $\beta \equiv 1/kT$, где k — постоянная Больцмана), вес равен

$$\beta_n = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) e^{-n\beta\hbar\omega}, \quad (5.55)$$

поскольку (как показано в следующей главе) оператор энергии, или гамильтониан, $\mathcal{H} = \hbar\omega N$, и поэтому

собственные значения энергии $E_n = \hbar\omega n$. Для среднего числа заполнения в тепловом состоянии получаем

$$\begin{aligned}\langle N \rangle &= \text{Sp}(\rho N) = \sum_{n=0}^{\infty} n e^{-n\beta\hbar\omega} (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) = \\ &= \frac{1}{e^{\beta\hbar\omega} - 1},\end{aligned}\quad (5.56)$$

где, введя $y = \exp(-\beta\hbar\omega)$, мы использовали соотношение

$$\begin{aligned}(1 - y) \sum_{n=0}^{\infty} n y^n &= (1 - y) y \frac{d}{dy} \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \\ &= (1 - y) y \frac{d}{dy} \frac{1}{1 - y} = \frac{y}{1 - y} = \frac{1}{y^{-1} - 1}.\end{aligned}$$

В результате находим

$$\bar{E} = \hbar\omega \langle N \rangle = \frac{\hbar\omega}{e^{\beta\hbar\omega} - 1}. \quad (5.57)$$

Характеристическая функция для оператора N имеет вид

$$\begin{aligned}C_N(s) &= \text{Sp}(\rho e^{isN}) = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) e^{-n(\beta\hbar\omega - is)} = \\ &= \frac{1 - e^{-\beta\hbar\omega}}{1 - e^{-\beta\hbar\omega + is}}.\end{aligned}\quad (5.58)$$

В следующих главах мы будем интересоваться случаями, когда β_n в (5.54) соответствуют распределению Пуассона

$$\beta_n = \frac{1}{n!} \mu^n e^{-\mu}. \quad (5.59)$$

При этих условиях среднее число частиц равно

$$\langle N \rangle = \text{Sp}(\rho N) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} \mu^n e^{-\mu} = \mu, \quad (5.60)$$

а для характеристической функции оператора N имеем

$$\begin{aligned} C_N(s) &= \text{Sp}(\rho e^{isN}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu^n e^{isn} e^{-\mu} = \\ &= \exp[(e^{is} - 1)\mu], \end{aligned} \quad (5.61)$$

т. е. она похожа на чисто классическое выражение (2.3).

Имеется большое число других матриц плотности, которые тоже могут представлять интерес. Хотя все такие матрицы имеют каноническое разложение (5.29), иногда удобно применять другую форму записи и выражать их через собственные состояния $|m\rangle$ оператора числа частиц, имеющие важный физический смысл. Для каждого вектора $|\psi_n\rangle$, входящего в (5.29), можно написать разложение

$$|\psi_n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{n,m} |m\rangle, \quad (5.62)$$

так что

$$\begin{aligned} \rho &= \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n\rangle \beta_n \langle \psi_n| = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m, m'=0}^{\infty} \psi_{n,m} |m\rangle \beta_n \langle m'| \psi_{n,m'}^* = \\ &= \sum_{m, m'=0}^{\infty} |m\rangle \rho(m, m') \langle m'|, \end{aligned} \quad (5.63)$$

где, очевидно,

$$\rho(m, m') = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_{n,m} \beta_n \psi_{n,m'}^* = \langle m | \rho | m' \rangle. \quad (5.64)$$

Последняя форма в соотношении (5.63) соответствует матрицам самого общего вида. Чтобы матрица ρ была в действительности матрицей плотности, она должна обладать следующими свойствами: 1) матрица ρ должна быть эрмитовой, $\rho(m', m) = \rho(m, m')^*$; 2) должна быть положительной суммой

$$\sum_{m, m'=0}^{\infty} c_m^* \rho(m, m') c_{m'} \geq 0 \quad (5.65)$$

(при условии что сумма квадратов коэффициентов $\{c_n\}$ конечна); 3) след оператора ρ должен быть конечным:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho(m, m) = 1. \quad (5.66)$$

При $\rho(m, m') = \beta_m \delta_{m, m'}$ приходим к рассмотренному выше частному случаю (5.54).

В. Статистические состояния нескольких осцилляторов

Рассмотрим K независимых осцилляторов с угловыми частотами ω_k , $k = 1, 2, \dots, K$. Каждый осциллятор описывается своими операторами координаты Q_k и импульса P_k , удовлетворяющими соотношениям

$$[Q_k, Q_{k'}] = [P_k, P_{k'}] = 0, \quad (5.67a)$$

$$[Q_k, P_{k'}] = i\hbar \delta_{kk'}. \quad (5.67b)$$

Введем для каждого осциллятора операторы уничтожения и рождения

$$a_k = \left(\frac{\omega_k}{2\hbar}\right)^{1/2} Q_k + i \left(\frac{1}{2\omega_k \hbar}\right)^{1/2} P_k, \quad (5.68a)$$

$$a_k^\dagger = \left(\frac{\omega_k}{2\hbar}\right)^{1/2} Q_k - i \left(\frac{1}{2\omega_k \hbar}\right)^{1/2} P_k \quad (5.68b)$$

и соответствующие операторы числа частиц

$$N_k \equiv a_k^\dagger a_k, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (5.69)$$

К каждому в отдельности из рассматриваемых осцилляторов полностью применим проведенный выше анализ. Существенно отметить то обстоятельство, что собственные векторы какого-либо *одного* оператора N_k не покрывают всего гильбертова пространства (поскольку теперь представление для любого из операторов Q_k и P_k приводимо). Если же предположить, что набор Q_k , P_k , $k = 1, 2, \dots, K$, является неприводимым, то тогда

набор единичных собственных векторов всех операторов N_k , обозначаемый

$$|n_1, n_2, \dots, n_K\rangle = |\{n_k\}\rangle, \quad (5.70)$$

образует полный ортонормированный базис¹⁾

Многие результаты, полученные выше для одного осциллятора, легко обобщить. Чистые состояния с определенными числами заполнения определяются выражением

$$\rho_{\{n_k\}} = |\{n_k\}\rangle\langle\{n_k\}|, \quad (5.71)$$

а частный класс матриц плотности имеет вид

$$\rho = \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \beta_{\{n_k\}} |\{n_k\}\rangle\langle\{n_k\}|. \quad (5.72)$$

Последняя форма, конечно, эквивалентна общему выражению (5.29), поскольку набор всех последовательностей $\{n_k\}$ счетен.

Особый интерес представляет тепловое распределение K независимых осцилляторов, для которых гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^K \hbar\omega_k a_k^\dagger a_k = \sum_{k=1}^K \hbar\omega_k N_k. \quad (5.73)$$

В этом случае

$$\beta_{\{n_k\}} = \prod_{k=1}^K (1 - \exp[-\beta\hbar\omega_k]) \exp(-n_k\beta\hbar\omega_k). \quad (5.74)$$

В результате получаем выражение

$$\bar{E} = \text{Sp}(\rho\mathcal{H}) = \sum_{k=1}^K \frac{\hbar\omega_k}{\exp(\beta\hbar\omega_k) - 1}, \quad (5.75)$$

¹⁾ Эти соображения можно изложить несколько иначе, а именно исходить из того, что N_1, N_2, \dots, N_K образуют полный набор коммутирующих операторов, собственные векторы которых однозначно определяются (с точностью до несущественного общего фазового коэффициента) набором соответствующих собственных значений.

которое представляет собой сумму выражений (5.57), записанных для различных частот. Характеристическая функция E имеет вид произведения

$$C_E(s) = \text{Sp}(\rho e^{is\mathcal{H}}) = \prod_{k=1}^K \frac{1 - \exp(-\beta \hbar \omega_k)}{1 - \exp[-\hbar \omega_k (\beta - is)]}, \quad (5.76)$$

что указывает на независимость вклада от каждого осциллятора.

Для многомерного пуассоновского распределения, для которого

$$\beta_{\{n_k\}} = \prod_{k=1}^K \frac{1}{n_k!} \mu_k^{n_k} \exp(-\mu_k), \quad (5.77)$$

средние числа заполнения, очевидно, равны $\langle N_k \rangle = \mu_k$. Следовательно, снова применяя (5.73), получаем

$$\bar{E} = \text{Sp}(\rho \mathcal{H}) = \hbar \sum_{k=1}^K \omega_k \mu_k, \quad (5.78)$$

в то время как характеристическая функция для E равна

$$\begin{aligned} C_E(s) &= \text{Sp}(\rho e^{is\mathcal{H}}) = \\ &= \exp \left[\sum_{k=1}^K (\exp[i\hbar \omega_k s] - 1) \mu_k \right]. \end{aligned} \quad (5.79)$$

Для нескольких осцилляторов можно получить формулу, подобную (5.63), пользуясь разложением единичного оператора

$$I = \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} |\{n_k\}\rangle \langle \{n_k\}|. \quad (5.80)$$

Таким образом, любую матрицу плотности ρ можно представить в виде

$$\rho = \sum_{\{m_k\}, \{m'_k\}=0}^{\infty} |\{m_k\}\rangle \rho(\{\{m_k\}, \{m'_k\}\}) \langle \{m'_k\}|, \quad (5.81)$$

где

$$\rho(\{\{m_k\}, \{m'_k\}\}) \equiv \langle \{m_k\} | \rho | \{m'_k\} \rangle. \quad (5.82)$$

Эти коэффициенты удовлетворяют очевидным требованиям эрмитовости, положительности и конечного значения следа, которые записываются по аналогии с (5.65) и (5.66).

Г. Статистические состояния для бесконечного числа осцилляторов

Теперь рассмотрим переход ($K \rightarrow \infty$) к бесконечному числу осцилляторных степеней свободы $Q_k, P_k, k = 1, 2, \dots$, при физически естественных предположениях, что оператор полного числа частиц

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \quad (5.83)$$

и оператор полной энергии

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar \omega_k N_k \quad (5.84)$$

остаются хорошо определенными. Для правомерности этого достаточно, чтобы полный ортонормированный базис в гильбертовом пространстве состоял из собственных векторов операторов числа частиц

$$|n_1, n_2, \dots\rangle \equiv |\{n_k\}\rangle, \quad (5.85)$$

для каждого из которых собственные значения удовлетворяют условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k < \infty. \quad (5.86)$$

Это означает, что для любого такого базисного вектора $|\{n_k\}\rangle$ только конечное число собственных значений n_k положительно. Такие последовательности $\{n_k\}$ снова являются счетными, так что применимо общее рассмотрение.

Следует отметить, что, помимо векторов, удовлетворяющих условию (5.86), в гильбертовом пространстве существуют другие векторы, для которых числа заполнения для всех осцилляторов не равны нулю. Например,

если $\{n_k\} = \{\delta_{kl}\}$ (т. е. $n_l = 1$, а все другие n_k обращаются в нуль), то выражение

$$|\psi\rangle = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l} |\{\delta_{kl}\}\rangle \quad (5.87)$$

представляет собой настоящий нормируемый вектор, для которого

$$\langle N_k \rangle \equiv \langle \psi | N_k | \psi \rangle = \frac{1}{k^2} > 0 \quad (5.88)$$

при любом $k \geq 1$. Разумеется необязательно, чтобы значение $\langle N_k \rangle$ стремилось к нулю для больших k . В качестве контрпримера достаточно заменить δ_{kl} на $l^4 \delta_{kl}$. Для такого состояния $\langle N_k \rangle = k^2$ и, следовательно, $\langle N \rangle = \infty$.

Заметим снова, что для любой матрицы плотности ρ и эрмитовой наблюдаемой \mathcal{O} соответствующая характеристическая функция (5.30) является непрерывной по s . Применяя ее к оператору числа частиц N , получаем, что функция

$$C_N(s) = \text{Sp}(\rho e^{isN}) \quad (5.89)$$

должна быть непрерывна по s . В свою очередь это свойство может накладывать ограничение на набор параметров, описывающих данную матрицу плотности. В частном случае многомерного пуассоновского распределения из условия непрерывности функции

$$C_N(s) = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} (e^{is} - 1) \mu_k \right] \equiv \exp [(e^{is} - 1) \langle N \rangle] \quad (5.90)$$

вытекает, что

$$\langle N \rangle \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k < \infty. \quad (5.91)$$

Таким образом, не всякая последовательность $\{\mu_k\}$ средних (пуассоновских) чисел заполнения приводит к матрице плотности; это справедливо только для последовательностей, удовлетворяющих условию (5.91).

Далее, чтобы установить непрерывность по s функции

$$C_E(s) = \text{Sp}(\rho e^{is\mathcal{E}C}) \quad (5.92)$$

для многомерного пуассоновского распределения, следует рассмотреть функцию

$$C_E(s) = \exp \left[\sum_{k=1}^{\infty} (\exp [i\hbar\omega_k s] - 1) \mu_k \right]. \quad (5.93)$$

Из неравенства

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{\infty} (\exp [i\hbar\omega_k s] - 1) \mu_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\exp [i\hbar\omega_k s] - 1| \mu_k \leq \\ &\leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k = 2 \langle N \rangle < \infty \end{aligned} \quad (5.94)$$

следует, что при выполнении условия (5.91) функция (5.93) непрерывна. Отметим, что это условие не приводит к требованию о конечности значения

$$\bar{E} = \hbar \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \mu_k,$$

хотя несомненно, что в физических системах $\bar{E} < \infty$.

Качественно аналогичные условия применимы к тепловому распределению бесконечного числа осцилляторов. Для характеристической функции оператора N из (5.58) находим

$$C_N(s) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \exp [-\beta\hbar\omega_k])}{(1 - \exp [-\beta\hbar\omega_k + is])}. \quad (5.95)$$

Функция $C_N(s)$ непрерывна, если произведение сходится к ненулевому значению. Для проверки сходимости можно применить теорему фон Неймана, согласно которой произведение $\prod_{k=1}^{\infty} z_k$, в котором все $z_k \neq 0$, сходится к ненулевому значению, когда и только когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} |1 - z_k| < \infty.$$

Поскольку $\omega_k > 0$, ни один множитель в (5.95) не равен нулю, и названная теорема применима. Рассматриваемая

сумма сходится, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| 1 - \frac{1 - \exp(-\beta \hbar \omega_k)}{1 - \exp(-\beta \hbar \omega_k + is)} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_k) |1 - e^{is}|}{|1 - \exp(-\beta \hbar \omega_k + is)|} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\beta \hbar \omega_k) < \infty. \quad (5.96)$$

Как нетрудно видеть, условие (5.96) является необходимым и достаточным. В следующей главе будет показано, что условие (5.96) может выполняться и для осцилляторов поля излучения.

Наконец, по аналогии с (5.96) нетрудно убедиться, что для непрерывности характеристической функции энергии

$$C_E(s) = \text{Sp}(\rho e^{is\mathcal{H}}) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \exp[-\beta \hbar \omega_k])}{(1 - \exp[-(\beta - is)\hbar \omega_k])} \quad (5.97)$$

необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=1}^{\infty} \exp(-\beta \hbar \omega_k) < \infty. \quad (5.98)$$

Помимо рассмотренных примеров, существует много других матриц плотности, часть из которых мы рассмотрим в следующих главах. Пока, имея в виду соотношения (5.85) и (5.86), можно считать, что соотношения (5.80) — (5.82) определяют общую матрицу плотности в представлении чисел заполнения.

§ 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный анализ и особенно последний пример позволяют сделать выводы двоякого рода. Прежде всего не только для одной или нескольких степеней свободы, но и при бесконечном числе степеней свободы для построения квантовой теории вполне достаточно

определенного общепринятого сепарабельного гильбертова пространства (со счетным базисом). Хотя в литературе встречаются утверждения противоположного толка, несепарабельные пространства (с несчетным базисом) не являются необходимыми для квантового рассмотрения, по крайней мере если речь идет об интересующем нас классе задач. Далее, последовательность матриц плотности можно попытаться обобщить на случай бесконечного числа степеней свободы ($K = \infty$) (как это можно сделать, например, для последовательности матриц $\rho_{(K)}$, каждая из которых соответствует первым K степеням свободы). Тогда на параметры можно наложить такие ограничения, что предельная матрица будет также представлять собой матрицу плотности. Простейшим рассмотренным примером этого типа было многомерное пуассоновское распределение, на которое налагалось ограничение (5.91).

Сделанный здесь вывод можно сформулировать и в более общем виде. Предел матриц плотности не обязательно должен представлять собой матрицу плотности в обычном смысле, когда пределы определяются через пределы ожидаемых значений соответствующих матриц. Эта особенность присуща отнюдь не только проблемам, связанным с бесконечным числом степеней свободы, — с ней мы сталкиваемся в самых простых ситуациях. Рассмотрим частицу, которая свободно движется внутри ящика объемом $\Omega < \infty$ и гамильтониан которой имеет вид $\mathcal{H}_\Omega = p^2/2m$. Для каждого значения объема Ω тепловое распределение

$$\rho_\Omega = \exp(-\beta\mathcal{H}_\Omega) \quad (5.99)$$

представляет собой матрицу плотности (ненормированную, но с конечным следом), тогда как предельная матрица

$$\lim_{\Omega \rightarrow \infty} \rho_\Omega \equiv \rho_\infty = \exp(-\beta\mathcal{H}_\infty) \quad (5.100)$$

не является матрицей с конечным следом, хотя она и ограничена.

Физическая система, характеризуемая полной пространственной трансляционной инвариантностью, не

может обладать точным тепловым распределением, описываемым матрицей плотности. Для нас представляет особый интерес одна из таких систем, а именно свободное поле излучения, заданное по всему пространству. Чтобы такой системе отвечало распределение, физически имеющее смысл теплового распределения (задача, весьма важная для нас), можно идти двумя путями. С одной стороны, можно определить поле излучения во всем пространстве, но требовать, чтобы оно было тепловым только в конечной области (например, в пределах Млечного пути!), а в остальной части пространства вакуумно-подобным. С другой стороны, можно представить себе конечный объем квантования $\Omega \equiv L^3$ (кубический ящик) с периодическими граничными условиями, являющийся в этом случае физическим пространством, в котором рассматривается проблема. Мы будем, как это обычно принято, пользоваться вторым способом, т. е. рассматривать конечные объемы квантования. Именно в этом смысле поле излучения удовлетворяет условию (5.98) и обладает тепловым распределением, определяемым матрицей плотности.

При использовании больших объемов квантования соответствующая матрица плотности позволяет рассчитать средние значения большого числа физических величин, которые во всех практических случаях не зависят от величины объема. При этом при переходе к пределу бесконечного объема результаты не только имеют смысл, но часто и упрощаются (как, например, при вычислении средней тепловой энергии единицы объема). Некоторые из наших результатов, касающиеся ожидаемых значений, приведены в форме, соответствующей бесконечному объему квантования.

Наконец, следует отметить, что разрабатываемые в настоящее время в квантовой статистической механике математические методы¹⁾ позволяют непосредственно рассматривать тепловые состояния в бесконечных объ-

¹⁾ Представление об обобщенных состояниях квантовых систем было введено Сегалом [5.8]. Рассмотрение этих современных математических методов (C^* -алгебр) и их применение в квантовой теории дано также Гаагом и Каствлером [5.9].

емах. Это достигается путем обобщения понятия «состояний» системы, под которыми подразумеваются теперь не только состояния, описываемые точными матрицами плотности, но и состояния, описываемые последовательностью точных матриц плотности, соответствующих конечным объемам. Физическая интерпретация такого подхода аналогична интерпретации более известного (и используемого нами) подхода, при котором различные ожидаемые значения оцениваются сначала для системы, находящейся в большом объеме, а затем совершается переход к пределу бесконечного объема.

Уравнения движения электромагнитного поля

§ 1. РАЗВИТИЕ ВО ВРЕМЕНИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

В предыдущей главе было подробно разъяснено, что состояние квантовомеханической системы задается матрицей плотности ρ и с ее помощью определяются различные распределения вероятности. Матрица плотности ρ может параметрически зависеть от ряда величин, например температуры, времени и объема, в который заключена система. Эти параметры характеризуют условные свойства матрицы плотности, подобно тому как аналогичные параметры представляют собой условные переменные в классических выражениях для плотности вероятности.

В гл. 4 мы подчеркивали, что марковские процессы играют важную роль в классической теории вероятности. Для марковских процессов функция распределения в будущем линейным образом определяется через функцию распределения в настоящем. Другими словами, функция распределения подчиняется линейному дифференциальному уравнению первого порядка по времени — стохастическому уравнению.

В квантовой механике марковские системы играют столь же фундаментальную роль. В этом случае состояние системы подчиняется линейному уравнению первого порядка, которое является просто обычным уравнением Шредингера. В частности, для состояния $|\psi\rangle = |\psi(t)\rangle$ уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \mathcal{H} |\psi\rangle, \quad (6.1)$$

где \mathcal{H} — гамильтониан системы. Этот оператор эрмитов, и, кроме того, здесь мы предполагаем, что он не зависит

от времени. Для матрицы плотности чистого состояния $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$; отсюда следует уравнение

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [\mathcal{H}, \rho]. \quad (6.2)$$

В силу линейности отсюда непосредственно получаем, что все (или почти все) матрицы плотности подчиняются тому же линейному уравнению движения (6.2).

Можно найти символическое решение уравнения (6.1):

$$|\psi(t)\rangle = e^{-it\mathcal{H}/\hbar} |\psi(0)\rangle \equiv U(t) |\psi(0)\rangle. \quad (6.3)$$

Так как гамильтониан эрмитов, эволюционный оператор $U(t)$, преобразующий начальное состояние $|\psi(0)\rangle$ в $|\psi(t)\rangle$, унитарен и поэтому сохраняет норму состояния. Из этого формального решения легко получить выражение для матрицы плотности чистого состояния:

$$\begin{aligned} \rho(t) &= |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| = U(t) |\psi(0)\rangle\langle\psi(0)| U(t)^{-1} = \\ &= U(t) \rho(0) U(t)^{-1}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Из линейности следует, что решение для произвольной матрицы плотности дается тем же соотношением

$$\rho(t) = U(t) \rho(0) U(t)^{-1}. \quad (6.5)$$

Отметим, что такой подход, в котором рассматривается эволюционирующее во времени состояние системы, носит название представления Шредингера; этот подход наиболее соответствует понятиям классической теории вероятности.

Существует, однако, альтернативный способ рассмотрения временной эволюции, который оказывается удобным в ряде случаев. Происхождение этого способа связано с тем, что предсказания теории, которые могут быть проверены на эксперименте, определяются исключительно средними значениями различных операторов в соответствующем статистическом состоянии. Имея это в виду, можно следующим образом переписать выражение

для зависящего от времени среднего значения произвольной наблюдаемой:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{O}(t) \rangle &\equiv \text{Sp}[\rho(t)\mathcal{O}] = \text{Sp}[U(t)\rho U(t)^{-1}\mathcal{O}] = \\ &= \text{Sp}[\rho U(t)^{-1}\mathcal{O}U(t)] \equiv \text{Sp}[\rho\mathcal{O}(t)]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Здесь использована инвариантность следа при циклических перестановках операторов. Кроме этого, в (6.6) мы просто положили $\rho = \rho(0)$ и определили зависящую от времени наблюдаемую $\mathcal{O}(t)$ соотношением

$$\mathcal{O}(t) = U^{-1}(t)\mathcal{O}U(t). \quad (6.7)$$

Следовательно, можно получить выражение для всех средних значений, если вместо того чтобы рассматривать эволюцию оператора ρ , описываемую соотношением (6.5), принять, что *каждая* наблюдаемая \mathcal{O} эволюционирует согласно (6.7). Такой способ описания временной эволюции в квантовой механике называется представлением Гейзенберга.

Следует обратить особое внимание на различие между этими двумя эволюционными уравнениями. В дифференциальной форме они имеют вид

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho = [\mathcal{H}, \rho], \quad (6.8)$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{O} = [\mathcal{H}, \mathcal{O}]. \quad (6.9)$$

Применимость того или иного уравнения в данной задаче зависит от того, каким представлением мы пользуемся. Ниже в этой главе мы будем пользоваться представлением Гейзенберга.

Когда гамильтониан зависит от времени (что вполне возможно при наличии внешних источников), то почти все предыдущие уравнения остаются справедливыми, если под \mathcal{H} понимать $\mathcal{H}(t)$. Существенно изменится только определение эволюционного оператора $U(t)$ через $\mathcal{H}(t)$. Будем считать для простоты, что гамильтониан $\mathcal{H}(t)$ кусочно-постоянен, т. е.

$$\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}(t_j), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad t_{j+1} - t_j \equiv \Delta_j. \quad (6.10)$$

Тогда правильное выражение для унитарного эволюционного оператора $U(t)$, $t_l \leq t < t_{l+1}$ имеет вид

$$U(t) = e^{-i(t-t_l)\mathcal{H}_l/\hbar} \prod_{j=0}^{l-1} e^{-i\Delta_j\mathcal{H}_j/\hbar}. \quad (6.11)$$

Это выражение, вообще говоря, отличается от оператора

$$U'(t) = \exp \left[-\frac{i}{\hbar}(t-t_l)\mathcal{H}_l - \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^{l-1} \Delta_j \mathcal{H}_j \right]. \quad (6.12)$$

Истинное решение (6.11) удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t) = \mathcal{H}_l U(t), \quad t_l \leq t < t_{l+1}, \quad (6.13)$$

как и следовало ожидать; в то же время U' , вообще говоря, не удовлетворяет этому уравнению.

Удобно ввести упорядочивающий по времени оператор T , определяемый соотношением

$$U(t) \equiv T \{U'(t)\}. \quad (6.14)$$

Этот оператор формально упорядочивает различные члены, входящие в разложение $U'(t)$, таким образом, что во всех произведениях операторов множители берутся в порядке возрастания временных аргументов. Используя конкретный вид $U'(t)$, можно написать

$$U(t) = T \left\{ \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t \mathcal{H}(t') dt' \right] \right\}, \quad (6.15)$$

где в качестве начального момента мы произвольно выбрали $t_0 = 0$. В этом общем виде $U(t)$ есть эволюционный оператор для произвольного зависящего от времени эрмитового оператора Гамильтона $\mathcal{H}(t)$; именно такой оператор $U(t)$ нужно подставлять в приведенные выше формулы, начиная с (6.3).

Стоит, пожалуй, заметить, что для большей наглядности мы вели рассмотрение без особых предосторожностей. Так как \mathcal{H} в общем случае не является ограниченным оператором, его нельзя применять к произвольному вектору $|\psi\rangle$; нельзя и образовать его коммутатор

с произвольной матрицей ρ . Если гамильтониан \mathcal{H} не зависит от времени, то мы предполагаем, что он обладает требуемым свойством (называемым в математике «самосопряженностью»), так что оператор $\exp(-it\mathcal{H}/\hbar)$ может быть определен и фактически является унитарным. Значительно меньше известно о том, какими свойствами должен обладать гамильтониан $\mathcal{H}(t)$ для того, чтобы соотношение (6.15) являлось определением унитарного оператора; такие случаи мы рассматриваем эвристически. Однако, когда оператор $U(t)$ определен, каждое состояние и каждая матрица плотности в представлении Шредингера или каждая ограниченная наблюдаемая в представлении Гейзенберга будут эволюционировать именно так, как указано выше.

§ 2. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

При наличии внешних источников j_ν электромагнитное поле удовлетворяет уравнениям Максвелла, которые в соответствующих (хевисайдовых) единицах и во всем своем релятивистском великолепии имеют вид

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu, \quad (6.16a)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}^* = 0 \quad \left(F_{\mu\nu}^* \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right), \quad (6.16b)$$

где $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ — полностью антисимметричный тензор Леви-Чивита. В квантовой теории антисимметричное тензорное поле $F_{\mu\nu}$ и источники j_ν являются эрмитовыми операторными функциями, а (6.16) — операторными уравнениями. Чтобы существовало какое-либо решение, ток, очевидно, должен удовлетворять закону сохранения $\partial_\mu j^\mu = 0$.

Если мы сможем найти операторные решения уравнений (6.16), то далее с помощью не зависящей от времени матрицы плотности ρ можно будет выразить различные ожидаемые значения, относящиеся к электромагнитному полю. В настоящей главе мы рассмотрим первую часть этой общей программы.

А. Общий подход к уравнениям поля

Здесь уместно обсудить общий подход к описанию квантованного поля излучения, развиваемый в этой главе. Чтобы система уравнений (6.16) представляла собой правильно поставленную задачу для $F_{\mu\nu}$, необходимо предположить, что j^μ есть заданное внешнее операторное поле, динамически не реагирующее на распределение того поля, которое мы намереваемся определить с помощью j^μ . Нетрудно понять, что такая задача является в значительной степени модельной и что она взята нами с педагогическими целями в силу ее математической простоты. Существуют, однако, физические ситуации, которые с хорошей точностью описываются как раз таким набором уравнений. С подобной ситуацией мы встречаемся, например, в случае существенно макроскопического источника, когда поле не может заметно изменить его или, точнее говоря, когда не возникает когерентных и макроскопических эффектов поля, достаточных для возмущения источника. Такой подход приводит к тому, что мы исключаем микроскопическое рассмотрение определенных явлений, но вполне согласуется с феноменологическим подходом к большинству задач. Это нетрудно понять, поскольку можно предполагать, что данное операторное поле j^μ совпадает с операторным решением, определенным из невыписанной нами *связанной* системы «полных уравнений поля». Таким образом, выводы, которые можно сделать на основе «половины» уравнений поля, не содержат какой-либо принципиальной некорректности.

Тем не менее мы введем важное упрощающее предположение относительно процессов, обуславливающих появление источников j_ν . Поскольку нас интересуют главным образом поля, генерируемые тепловыми источниками или источниками типа лазера, можно считать, что источник в значительной мере локализован в пространстве и во времени. Конкретнее, если говорить о локализации во времени, то мы воспользуемся процедурой «адиабатического включения», т. е. будем считать, что в отдаленном прошлом и далеком будущем поле свободно и не связано с источниками. Поэтому наш подход

будет неправильно описывать связь поля излучения с мириадами микроскопических виртуальных процессов (например, с рождением электронно-позитронных пар), так как обычно принято считать, что такие источники присутствуют во всех точках пространства и времени. Следовательно, мы не будем включать связь с виртуальными полями в наши источники, а вместо этого сконцентрируем свое внимание на «конкретных» источниках (атомах и т. д.), обуславливающих те процессы, которые мы пытаемся исследовать. Таким образом, мы приходим к необходимости наложить на наши решения подходящие граничные условия в отдаленном прошлом и далеком будущем.

Наконец, рассматривая поле излучения в присутствии заданных внешних источников, мы уже нарушаем лоренц-инвариантность. Это просто означает, что внешние источники можно считать выделяющими определенную лоренцеву систему координат. Поэтому уже нет необходимости сохранять явную релятивистскую формулировку. Напротив, мы можем с выгодой воспользоваться другой альтернативой — обычным нерелятивистским подходом, который позволяет лучше понять физический смысл получаемых результатов.

§ 3. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ. НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ АНАЛИЗ

А. Формулировка в конфигурационном пространстве

Начнем наше рассмотрение, переписав уравнения Максвелла в виде ¹⁾

$$\dot{\mathbf{H}} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad \dot{\mathbf{E}} = \nabla \times \mathbf{H} - \mathbf{j}, \quad (6.17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho. \quad (6.18)$$

Здесь $\dot{\mathbf{H}} = \partial \mathbf{H} / \partial t$ и т. д., и мы выбираем такую систему единиц, в которой $c = 1$. Первые два уравнения представляют собой самые настоящие уравнения движения,

¹⁾ Не следует путать плотность заряда и матрицу плотности, которые обычно обе обозначаются буквой ρ .

тогда как два последних являются связями, т. е. условиями внутренней согласованности, налагаемыми в каждый момент времени. Эти условия должны выполняться, чтобы уравнения имели какое-нибудь решение.

Связь $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ обычно «разрешают» с помощью соотношения $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$, но выбор \mathbf{A} при этом не однозначен, поскольку величина \mathbf{A} определена с точностью до произвольного градиента. Так как мы уже отказались от явной ковариантности, мы вправе выбрать удобное и важное для физики решение этого уравнения связи, а именно такое, в котором присущая уравнению $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ неопределенность была бы исключена с самого начала.

Чтобы найти такое решение, отметим прежде всего, что любое векторное поле $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ с хорошим поведением (операторное или c -числовое) можно разложить на поперечную и продольную части

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^T + \mathbf{V}^L, \quad (6.19)$$

которые обладают следующими свойствами:

$$\nabla \cdot \mathbf{V}^T \equiv 0, \quad \nabla \times \mathbf{V}^L \equiv 0. \quad (6.20)$$

Несколько ниже мы укажем, как производится такое разложение, а пока предположим лишь, что оно справедливо. Тогда видно, что связь $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ является условием для \mathbf{H}^L и не налагает никаких условий на \mathbf{H}^T . Следовательно, несвязанные переменные \mathbf{H}^T можно однозначно выразить через новые переменные \mathbf{A}^T :

$$\mathbf{H}^T = \nabla \times \mathbf{A}^T. \quad (6.21)$$

(Тогда первое из уравнений Максвелла принимает просто вид $\dot{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{E}^T$.)

Остающиеся уравнения Максвелла запишутся теперь следующим образом:

$$\dot{\mathbf{E}}^L = -\mathbf{j}^L, \quad \nabla \cdot \mathbf{E}^L = \rho \quad \text{и} \quad \dot{\mathbf{E}}^T = \nabla \times \mathbf{H}^T - \mathbf{j}^T.$$

Первые два из этих уравнений представляют собой просто формулировку закона сохранения заряда. В действительности они не являются динамическими, поскольку, как будет ясно из дальнейшего, \mathbf{E}^L определяется как

функция координат и времени непосредственно через ρ . Третье же уравнение является динамическим. Пользуясь общим операторным тождеством

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) - \nabla^2 \mathbf{V},$$

два основных динамических уравнения можно привести к виду

$$\dot{\mathbf{A}}^T = -\mathbf{E}^T, \quad (6.22a)$$

$$\dot{\mathbf{E}}^T = -\nabla^2 \mathbf{A}^T - \mathbf{j}^T. \quad (6.22б)$$

Б. Формулировка в импульсном пространстве

Для наглядности проведем параллельный вывод уравнений (6.22) в импульсном пространстве. Введем полевые переменные, зависящие от импульсов:

$$\mathcal{H}(\mathbf{k}) \equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{H}(\mathbf{x}) d^3x, \quad (6.23a)$$

$$\mathcal{E}(\mathbf{k}) \equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) d^3x, \quad (6.23б)$$

$$\mathcal{J}(\mathbf{k}) \equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{j}(\mathbf{x}) d^3x, \quad (6.23в)$$

$$\tilde{\rho}(\mathbf{k}) \equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \rho(\mathbf{x}) d^3x. \quad (6.23г)$$

Пока мы рассматриваем $\Omega^{-1/2}$ как некий еще не определенный нормировочный множитель. Для каждой точки \mathbf{k} импульсного пространства вводится тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов $\mathbf{e}_j(\mathbf{k})$, $j = 1, 2, 3$, таких, что $\mathbf{e}_3(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = k \equiv |\mathbf{k}|$. Это значит, что для каждого $\mathbf{k} \neq 0$ вектор $\mathbf{e}_3(\mathbf{k})$ параллелен \mathbf{k} , тогда как $\mathbf{e}_1(\mathbf{k})$ и $\mathbf{e}_2(\mathbf{k})$ ортогональны \mathbf{k} . Всякое векторное поле

$$\mathcal{V}(\mathbf{k}) \equiv \Omega^{-1/2} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{V}(\mathbf{x}) d^3x \quad (6.24)$$

допускает при каждом \mathbf{k} разложение

$$\mathcal{V}(\mathbf{k}) = \sum_I \mathbf{e}_I(\mathbf{k}) [\mathbf{e}_I(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{V}(\mathbf{k})] \equiv \mathcal{V}^T(\mathbf{k}) + \mathcal{V}^L(\mathbf{k}), \quad (6.25)$$

где продольная и поперечная части определяются соотношениями

$$\mathcal{Y}^L(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{e}_3(\mathbf{k}) [\mathbf{e}_3(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{Y}^0(\mathbf{k})], \quad (6.26a)$$

$$\mathcal{Y}^T(\mathbf{k}) \equiv \mathbf{e}_1(\mathbf{k}) [\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{Y}^0(\mathbf{k})] + \mathbf{e}_2(\mathbf{k}) [\mathbf{e}_2(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{Y}^0(\mathbf{k})]. \quad (6.26b)$$

Мы имеем два тождества

$$\mathbf{k} \cdot \mathcal{Y}^T(\mathbf{k}) \equiv 0, \quad \mathbf{k} \times \mathcal{Y}^L(\mathbf{k}) \equiv 0, \quad (6.27)$$

которые с точностью до множителя i являются просто формой записи тождества (6.20) в импульсном пространстве. Заметим также, что если положить

$$\mathcal{H}^T(\mathbf{k}) \equiv i\mathbf{k} \times \mathcal{A}^T(\mathbf{k}), \quad (6.28)$$

то для \mathcal{A}^T можно получить *единственное* решение следующим образом:

$$\mathbf{k} \times \mathcal{H}^T(\mathbf{k}) = i\mathbf{k} \times [\mathbf{k} \times \mathcal{A}^T(\mathbf{k})] = -ik^2 \mathcal{A}^T(\mathbf{k}),$$

т. е.

$$\mathcal{A}^T(\mathbf{k}) = \frac{i\mathbf{k} \times \mathcal{H}^T(\mathbf{k})}{k^2}. \quad (6.29)$$

Полученные выражения можно непосредственно применить к уравнениям Максвелла, причем необходимо произвести обычную замену $\nabla \rightarrow i\mathbf{k}$ под знаком преобразования Фурье. Преобразованные уравнения имеют вид

$$\dot{\mathcal{H}} = -i\mathbf{k} \times \mathcal{E}, \quad \dot{\mathcal{E}} = i\mathbf{k} \times \mathcal{H} - \mathcal{J}, \quad (6.30)$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathcal{H} = 0, \quad i\mathbf{k} \cdot \mathcal{E} = \tilde{\rho}. \quad (6.31)$$

Уравнения связей записываются следующим образом:

$$i\mathbf{k} \cdot \mathcal{H}^L = 0, \quad i\mathbf{k} \cdot \mathcal{E}^L = \tilde{\rho}; \quad (6.32)$$

их решения можно написать сразу:

$$\mathcal{H}^L(\mathbf{k}) = 0, \quad \mathcal{E}^L(\mathbf{k}) = -\frac{i\mathbf{k}\tilde{\rho}(\mathbf{k})}{k^2}. \quad (6.33)$$

Эти уравнения выполняются в любой момент времени; мы видим, что плотность заряда $\rho(\mathbf{x}, t)$ полностью определяет поле $\mathbf{E}^L(\mathbf{x}, t)$, как и отмечалось выше. Кроме

того, из (6.30) и (6.32) следует соотношение $ik \cdot \dot{\mathcal{E}}^L = = -ik \cdot \mathcal{J}^L = \dot{\rho}$, которое является формулировкой закона сохранения тока в импульсном пространстве.

С учетом (6.28) и (6.29) два остающихся (динамических) уравнения принимают вид

$$\dot{\mathcal{A}}^T(\mathbf{k}) = -\mathcal{E}^T(\mathbf{k}), \quad (6.34a)$$

$$\dot{\mathcal{E}}^T(\mathbf{k}) = k^2 \mathcal{A}^T(\mathbf{k}) - \mathcal{J}^T(\mathbf{k}), \quad (6.34б)$$

где две компоненты \mathcal{J}^T независимы и на них не наложено никаких связей. В этой формулировке видно фундаментальное преимущество перехода к импульсному пространству: степени свободы поля, отвечающие различным значениям индекса \mathbf{k} , являются динамическими независимыми.

Необходимо, впрочем, сделать существенную оговорку к высказанному утверждению. Поскольку $\mathbf{A}^T(\mathbf{x})$, $\mathbf{E}^T(\mathbf{x})$ и $\mathbf{j}^T(\mathbf{x})$ — эрмитовы поля, из соотношений (6.23) вытекает

$$[\mathcal{A}^T(\mathbf{k})]^\dagger = \mathcal{A}^T(-\mathbf{k}), \quad (6.35a)$$

$$[\mathcal{E}^T(\mathbf{k})]^\dagger = \mathcal{E}^T(-\mathbf{k}), \quad (6.35б)$$

$$[\mathcal{J}^T(\mathbf{k})]^\dagger = \mathcal{J}^T(-\mathbf{k}). \quad (6.35в)$$

Следовательно, в этих переменных поведение величин с индексом $-\mathbf{k}$ полностью определяется поведением величин с индексом $+\mathbf{k}$. Это означает, что лишь половина всего \mathbf{k} -пространства нумерует динамические независимые переменные.

Векторы поляризации. Следует сделать несколько замечаний по поводу единичных поперечных векторов \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Они не определены однозначно и должны лишь удовлетворять условию $\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_2(\mathbf{k}) = 0$. Если ввести другую пару единичных векторов, повернутую по отношению к первой на угол θ в плоскости, ортогональной \mathbf{k} , то уравнение (6.26б) останется неизменным. Для векторов, которые мы молчаливо предполагали действительными, направления \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 отвечают направлениям линейной поляризации \mathbf{k} -й моды. Можно также работать с

левой и правой круговыми поляризациями, введя векторы

$$\mathbf{e}_+(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) + i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})], \quad (6.36a)$$

$$\mathbf{e}_-(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\mathbf{e}_1(\mathbf{k}) - i\mathbf{e}_2(\mathbf{k})] \quad (6.36б)$$

Такие векторы можно построить для любой пары действительных векторов поляризации \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Этому комплексному базису отвечают две поперечные компоненты поля

$$\mathcal{Y}'_{\pm}(\mathbf{k}) = e_{\pm}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathcal{Y}'(\mathbf{k}), \quad (6.37)$$

которые в свою очередь соответствуют компонентам с правой и левой круговой поляризацией. Если изменить базис, повернув пару \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 на угол θ , то мы получим новые компоненты с круговой поляризацией, связанные со старыми простым соотношением

$$\mathcal{Y}'_{\pm}(\mathbf{k}) = e^{\pm i\theta} \mathcal{Y}'_{\pm}(\mathbf{k}). \quad (6.38)$$

В любом случае два поперечных направления соответствуют некоторому выбору ортогональных направлений поляризации для поперечных мод поля излучения.

Индексы поляризации. Два ортогональных направления поляризации удобно обозначать индексами, и мы условимся, что греческие индексы (как правило, λ) принимают значения 1, 2 или +, — соответственно для базисных векторов с линейной или круговой поляризациями. Следовательно, любое поперечное векторное поле \mathcal{Y}'^T имеет компоненты \mathcal{Y}'^T_{λ} , где подразумевается, что базис выбран соответствующим образом. В частности, с помощью поляризационных компонент наши динамические уравнения (6.34) записываются в виде

$$\mathcal{A}'^T_{\lambda}(\mathbf{k}) = -\mathcal{E}'^T_{\lambda}(\mathbf{k}), \quad (6.39a)$$

$$\mathcal{E}'^T_{\lambda}(\mathbf{k}) = k^2 \mathcal{A}'^T_{\lambda}(\mathbf{k}) - \mathcal{F}'^T_{\lambda}(\mathbf{k}). \quad (6.39б)$$

Таким образом, независимыми оказываются динамические переменные, отвечающие не только разным значениям \mathbf{k} , но и разным поляризациям.

Для простоты ниже мы опускаем индекс T у всех поперечных полей.

Коммутационные соотношения. Прежде чем решать динамические уравнения (6.39), сформулируем соответствующие граничные условия. В классической теории граничные условия представляют собой просто начальные значения функций \mathcal{A}_λ и \mathcal{E}_λ . В квантовой теории все эти переменные являются операторами, и мы должны выбрать операторы \mathcal{A}_λ и \mathcal{E}_λ в соответствии с каноническими коммутационными соотношениями.

Для простоты и надежности представим себе, что электромагнитное поле заключено в большой кубический ящик размером L^3 , и наложим на наши решения периодические граничные условия. Интегрирование по объему [как в соотношении (6.23)] производится по ячейке размером L^3 , причем нормировка выбирается так, чтобы $\Omega \equiv L^3$. Чтобы выполнялось условие периодичности, следует считать, что в разложениях Фурье могут фигурировать лишь значения \mathbf{k} с компонентами

$$k_j = \frac{2\pi}{L} n_j, \quad (6.40)$$

где n_j , $j = 1, 2, 3$, — произвольные целые числа. Однако мы принимаем, что любая компонента поля равна нулю, если все $n_j \equiv 0$, т. е. полностью исключаем из рассмотрения точку $\mathbf{k} = 0$.

В силу соотношений (6.35) независимые динамические переменные нумеруются лишь половиной точек \mathbf{k} -пространства. Теперь важно обеспечить в таком полупространстве выполнение следующего обычного коммутационного соотношения между эрмитовыми каноническими переменными:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + \mathcal{A}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \mathcal{E}_{\lambda'}(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}} + \mathcal{E}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}') e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{x}}] = \\ = -i\hbar \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \end{aligned}$$

Выделяя в явном виде зависимость от времени, нетрудно видеть, что эти соотношения будут выполняться для

всех \mathbf{k} лишь в том случае, если положить

$$[\mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}, t), \mathcal{E}_{\lambda'}^+(\mathbf{k}', t)] = [\mathcal{A}_\lambda^+(\mathbf{k}, t), \mathcal{E}_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)] = -i\hbar\delta_{\lambda\lambda'}\delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (6.41)$$

а все остальные одновременные коммутаторы считать равными нулю. В этом последнем соотношении \mathbf{k} и \mathbf{k}' могут пробегать *все* \mathbf{k} -пространство. Предполагается, что эти соотношения выполняются в любой момент t , в частности они должны выполняться в качестве начального условия для решения.

Наряду с этим мы будем предполагать, что для всех совпадающих времен t имеют место соотношения

$$[\mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}, t), \mathcal{F}_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)] = 0, \quad (6.42a)$$

$$[\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{k}, t), \mathcal{F}_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)] = 0. \quad (6.42б)$$

Эти соотношения не означают, что оператор \mathcal{A} (или \mathcal{E}) должен коммутировать с \mathcal{F} при несовпадающих временах; они отражают лишь то обстоятельство, что источник \mathcal{F} возникает за счет системы (например, совокупности атомов), динамически независимой от самого поля излучения. Все физические модели строятся так, что эти два условия выполняются¹⁾.

Гамильтониан. Соответствующий квантовый гамильтониан нетрудно найти, исходя из известного классического выражения. Мы можем также вывести гамильтониан, опираясь на наши уравнения движения и коммутационные соотношения (6.41) и (6.42). Оба способа приводят к выражению, которое можно записать в виде

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mathbf{k}} [\mathcal{E}_\lambda^+(\mathbf{k}) \mathcal{E}_\lambda(\mathbf{k}) + \omega^2 \mathcal{A}_\lambda^+(\mathbf{k}) \mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}) - \hbar\omega - \mathcal{F}_\lambda^+(\mathbf{k}) \mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}) - \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}) \mathcal{A}_\lambda^+(\mathbf{k})], \quad (6.43)$$

где $\omega^2 \equiv \mathbf{k}^2$ и вычтена бесконечная постоянная (энергия нулевых колебаний) для того, чтобы гамильтониан \mathcal{H}

¹⁾ Впрочем, соотношение (6.42б) может не выполняться в моделях, где свойства среды рассматриваются феноменологически и оператор тока \mathcal{F} или поляризации среды \mathcal{P} выражается через операторы поля \mathcal{E} , т. е. $\mathcal{P} = \alpha\mathcal{E} + \chi\mathcal{E}^2 + \theta\mathcal{E}^3 + \dots$. — Прим. ред.

был хорошо определен. Поучительно убедиться в том, что динамические уравнения (6.39) действительно являются операторными уравнениями в гейзенберговском представлении, в котором записан приведенный выше гамильтониан. Так как в общем случае внешний источник явно зависит от времени, наш гамильтониан также зависит от времени, $\mathcal{H} = \mathcal{H}(t)$.

В. Операторы рождения и уничтожения

Вместо того чтобы работать с \mathcal{E} и \mathcal{A} , можно ввести соответствующие операторы рождения и уничтожения и выразить через них различные величины. Введем определение

$$a_{\lambda}(\mathbf{k}) = (2\hbar\omega)^{-1/2} [\omega \mathcal{A}_{\lambda}(\mathbf{k}) - i\mathcal{E}_{\lambda}(\mathbf{k})], \quad (6.44a)$$

$$a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) = (2\hbar\omega)^{-1/2} [\omega \mathcal{A}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) + i\mathcal{E}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})]. \quad (6.44б)$$

Если для ясности снова ввести зависимость от времени, то из (6.41) следует, что для всех точек \mathbf{k} -пространства

$$[a_{\lambda}(\mathbf{k}, t), a_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}', t)] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}, \quad (6.45a)$$

$$[a_{\lambda}(\mathbf{k}, t), a_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)] = [a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}, t), a_{\lambda'}^{\dagger}(\mathbf{k}', t)] = 0. \quad (6.45б)$$

Таким образом, мы пришли к одновременным коммутационным соотношениям для бесконечного числа операторов рождения и уничтожения, которые обсуждались в предыдущей главе.

В этих переменных преобразованный гамильтониан принимает вид

$$\mathcal{H} = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \left\{ \hbar\omega N_{\lambda}(\mathbf{k}) - \left(\frac{\hbar}{2\omega} \right)^{1/2} [\mathcal{F}_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_{\lambda}(\mathbf{k}) a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k})] \right\}, \quad (6.46)$$

где

$$N_{\lambda}(\mathbf{k}) \equiv a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}(\mathbf{k}) \quad (6.47)$$

есть оператор числа квантов на (λ, \mathbf{k}) -й моде. С помощью (6.46) мы выразили гамильтониан всего электромагнитного поля в виде суммы гамильтонианов независимых осцилляторов с приложенными к ним внешними силами, причем каждой точке \mathbf{k} -пространства и поляризации λ соответствует один осциллятор. При этом на

$\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k})$ наложено ограничение $\mathcal{F}_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) = \mathcal{F}_\lambda(-\mathbf{k})$; это является следствием того обстоятельства, что мы, как уже говорилось выше, используем только половину \mathbf{k} -пространства.

Как указывалось в гл. 5, для того чтобы гамильтониан \mathcal{H} свободного поля был хорошим оператором, оператор полного числа квантов

$$N = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} N_\lambda(\mathbf{k}) \quad (6.48)$$

сам должен быть хорошим оператором. В данном случае мы предполагаем, что как N , так и \mathcal{H} — хорошие операторы. Это обеспечивает выполнение коммутационных соотношений (6.45) во все моменты времени.

Согласованность теплового распределения. В заключение убедимся, что свободное поле излучения (в ящике!) действительно удовлетворяет условию (5.98), необходимому и достаточному для того, чтобы матрица плотности ρ теплового распределения была хорошо определенной. Используя соотношение $\omega^2 = \mathbf{k}^2$, соотношение (6.40) и неравенство¹⁾

$$|\mathbf{n}| \equiv (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2)^{1/2} \geq \frac{1}{\sqrt{3}} (|n_1| + |n_2| + |n_3|) \equiv \sum (\mathbf{n}),$$

можно показать, что

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda, \mathbf{k}} e^{-\beta \hbar \omega} &= 2 \sum_{\mathbf{n}} e^{-2\pi\beta \hbar |\mathbf{n}|/L} \leq \\ &\leq 2 \sum_{\mathbf{n}} e^{-2\pi\beta \hbar \sum (\mathbf{n})/L} = 2 \left[\left(\text{th} \frac{\pi\beta \hbar}{\sqrt{3}L} \right)^{-3} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Таким образом, эта сумма конечна, что и требовалось показать.

¹⁾ Это неравенство эквивалентно утверждению, что

$$\sum_{r, s=1}^3 (|n_r| - |n_s|)^2 \geq 0.$$

§ 4. ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА ВРЕМЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ

Явное уравнение для $\mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}, t)$ можно получить непосредственно из (6.39), исключая $\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{k}, t)$; оно имеет вид

$$\ddot{\mathcal{A}}_\lambda(\mathbf{k}) = -\omega^2 \mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}) + \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}). \quad (6.50)$$

Это есть просто основное уравнение для осциллятора, на который действует внешняя сила.

Еще более простой вид имеет уравнение для $a_\lambda(\mathbf{k}, t)$, которое также следует из (6.39):

$$i\dot{a}_\lambda(\mathbf{k}) = \omega a_\lambda(\mathbf{k}) - (2\hbar\omega)^{-1/2} \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}). \quad (6.51)$$

Оператор $a_\lambda^\dagger(\mathbf{k})$ подчиняется уравнению, сопряженному с уравнением (6.51).

Решение уравнения (6.51) можно написать сразу:

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega t} a_\lambda(\mathbf{k}, 0) + i(2\hbar\omega)^{-1/2} e^{-i\omega t} \int_0^t e^{i\omega t'} \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt', \quad (6.52a)$$

где в качестве начального момента мы произвольно выбрали $t = 0$. Если же выбрать $t = -\infty$ в качестве начального момента, то получается следующее важное решение:

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) + i(2\hbar\omega)^{-1/2} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{i\omega t'} \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \quad (6.52b)$$

Здесь

$$a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) \equiv e^{-i\omega t} a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) \quad (6.53)$$

обозначает форму оператора уничтожения в отдаленном прошлом, когда влиянием источника по предположению можно пренебречь. Поскольку здесь мы *принимает*, что ток $\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t)$ задан, в обоих случаях с тем же правом можно считать «заданными» проинтегрированные по времени выражения. Например, можно положить

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) + \mathcal{K}_\lambda(\mathbf{k}, t), \quad (6.54)$$

где заданный неэрмитов оператор \mathcal{H}_λ связан с током соотношением

$$\mathcal{H}_\lambda(\mathbf{k}, t) = i(2\hbar\omega)^{-1/2} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{i\omega t'} \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \quad (6.55)$$

Мы видим, что \mathcal{H}_λ зависит от источников \mathcal{F}_λ нелокально по времени.

Мы уже отмечали сохраняющийся характер исходного четырех-вектора тока и предполагаемые свойства коммутации (6.42) поперечных компонент тока с переменными, характеризующими поле излучения. Другое важное условие, которому должен удовлетворять внешний ток, вытекает из следующих соображений. Наше решение для $a_\lambda(\mathbf{k}, t)$ должно удовлетворять одновременным каноническим коммутационным соотношениям (6.45) при всех t . Так как a_λ^{in} уже удовлетворяют этим соотношениям, отсюда следует, что для \mathcal{H}_λ должны выполняться условия

$$\begin{aligned} [a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t), \mathcal{H}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}', t)] + [\mathcal{H}_\lambda(\mathbf{k}, t), a_{\lambda'}^{in\dagger}(\mathbf{k}', t)] + \\ + [\mathcal{H}_\lambda(\mathbf{k}, t), \mathcal{H}_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}', t)] = 0 \end{aligned} \quad (6.56a)$$

и

$$\begin{aligned} [a_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t), \mathcal{H}_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)] + [\mathcal{H}_\lambda(\mathbf{k}, t), a_{\lambda'}^{in}(\mathbf{k}', t)] + \\ + [\mathcal{H}_\lambda(\mathbf{k}, t), \mathcal{H}_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)] = 0 \end{aligned} \quad (6.56b)$$

вместе с сопряженными равенствами. Чтобы решение (6.52) действительно существовало, оператор $\mathcal{H}_\lambda(\mathbf{k}, t)$ должен удовлетворять указанным условиям, а это налагает ограничения на внешний ток $\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t)$ при несовпадающих временах.

По существу предыдущие равенства дают формальное решение выбранных нами динамических уравнений. Однако два довольно очевидных и важных частных случая заслуживают специального рассмотрения. Если внешний ток \mathcal{F}_λ равен нулю при всех t , то равен нулю и оператор \mathcal{H}_λ , и мы получаем просто решение для свободного поля

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega t} a_\lambda^{in}(\mathbf{k}). \quad (6.57)$$

Другая простейшая возможность состоит в том, что внешний ток \mathcal{F}_λ пропорционален *единичному оператору* при всех t . Следовательно, оператор \mathcal{K}_λ тоже пропорционален единичному оператору, так что можно положить

$$\mathcal{K}_\lambda(\mathbf{k}, t) = c_\lambda(\mathbf{k}, t), \quad (6.58)$$

где c_λ есть заданная c -числовая функция. Это дает обычное решение с c -числовым внешним источником

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega t} a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) + c_\lambda(\mathbf{k}, t). \quad (6.59)$$

Очевидно, что в обоих частных случаях a_λ и a_λ^\dagger удовлетворяют необходимым одновременным коммутационным соотношениям (6.45). Более того, только в этих случаях (т. е. когда ток $\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t)$ пропорционален единичному оператору при всех t) операторы поля $\mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}, t)$ и $\mathcal{E}_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)$ в один и тот же момент времени t могут составлять неприводимое семейство операторов. То же самое полностью относится и к операторам $a_\lambda(\mathbf{k}, t)$ и $a_{\lambda'}^\dagger(\mathbf{k}', t)$, а следовательно, и к их форме в отдаленном прошлом a_λ^{in} и $a_{\lambda'}^{in\dagger}$. Если в некоторый момент t пропорциональность между током $\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t)$ и единичным оператором нарушается, то из уравнения (6.42) непосредственно следует, что операторы $\mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}, t)$ и $\mathcal{E}_{\lambda'}(\mathbf{k}', t)$ должны быть приводимыми, как и следовало ожидать.

Наконец, из (6.54) и (6.55) можно непосредственно получить закон изменения других величин. Например, для величины

$$\mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} [a_\lambda(\mathbf{k}, t) + a_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}, t)] \quad (6.60)$$

имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}, t) &= \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} [e^{-i\omega t} a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) + e^{i\omega t} a_\lambda^{in\dagger}(-\mathbf{k})] + \\ &+ \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} [\mathcal{K}_\lambda(\mathbf{k}, t) + \mathcal{K}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}, t)] = \\ &= \cos \omega t \mathcal{A}_\lambda^{in}(\mathbf{k}) - \omega^{-1} \sin \omega t \mathcal{E}_\lambda^{in}(\mathbf{k}) + \\ &+ \int_{-\infty}^t \omega^{-1} \sin \omega(t-t') \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \end{aligned} \quad (6.61a)$$

Объединяя первые два члена, получаем

$$\mathcal{A}_\lambda(\mathbf{k}, t) = \mathcal{A}_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) + \int_{-\infty}^t \omega^{-1} \sin \omega(t-t') \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \quad (6.61б)$$

Эти соотношения и дают искомые решения уравнения (6.50). Решение для электрического поля \mathcal{E}_λ получается, согласно (6.39а), дифференцированием по времени:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\lambda(\mathbf{k}, t) = & \cos \omega t \mathcal{E}_\lambda^{in}(\mathbf{k}) + \omega \sin \omega t \mathcal{A}_\lambda^{in}(\mathbf{k}) - \\ & - \int_{-\infty}^t \cos \omega(t-t') \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt', \quad (6.62а) \end{aligned}$$

или, если объединить первые два члена,

$$\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{k}, t) = \mathcal{E}_\lambda^{in}(\mathbf{k}, t) - \int_{-\infty}^t \cos \omega(t-t') \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t') dt'. \quad (6.62б)$$

Средние значения и аналитические сигналы. Рассмотрим теперь два трудных и часто возникающих вопроса. Хотя мы уже потребовали, что наши решения должны удовлетворять каноническим коммутационным соотношениям, этим отнюдь не заканчивается физическая конкретизация какого-либо частного решения. Например, наблюдаемые значения поля \mathcal{E}_λ распределены со средним значением

$$\langle \mathcal{E}_\lambda(\mathbf{k}, t) \rangle \equiv \text{Sp} [\rho \mathcal{E}_\lambda(\mathbf{k}, t)], \quad (6.63)$$

которое определяется с помощью матрицы плотности ρ , представляющей состояние системы. Особенно удобно работать с полем $a_\lambda(\mathbf{k}, t)$, с которым линейно связаны остальные величины. Для среднего значения этой величины имеем следующее основное соотношение:

$$\begin{aligned} \langle a_\lambda(\mathbf{k}, t) \rangle = & e^{-i\omega t} \langle a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) \rangle + \\ & + i(2\hbar\omega)^{-1/2} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{i\omega t'} \langle \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t') \rangle dt'. \quad (6.64а) \end{aligned}$$

Если бы матрицу плотности выбрать, например, так, что $\langle a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) \rangle = 0$, то соотношение (6.64а) будет иметь вид классического (т. е. c -числового) решения волнового уравнения с такими источниками $\langle \mathcal{F}_\lambda \rangle$, что решение обращается в нуль в отдаленном прошлом. Основной вывод, который можно отсюда сделать, заключается в следующем. В классической теории с помощью надлежащих граничных условий для самих полей можно подобрать физически подходящее решение, в частности такое, которое *обращается* в нуль в отдаленном прошлом до того, как были включены источники. В квантовой теории аналогичное операторное решение никогда не обращается в нуль, а принимает некоторый вполне определенный вид в силу ограничения, налагаемого каноническими коммутационными соотношениями. Здесь именно конкретизация состояния ρ отбирает физически существенный эффект однородного члена, в частности свойство давать нуль при усреднении.

Продолжая аналогию между (6.64а) и классическим c -числовым решением, рассмотрим второй вопрос. Как бы мы ни выбрали величину $\langle a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) \rangle$, вклад первого члена в полное решение всегда является аналитическим сигналом, так как $\omega = |\mathbf{k}| > 0$. При этом естественно задать вопрос, при каких условиях, налагаемых на среднее от тока, выражение (6.64а) представляет собой аналитический сигнал. Нетрудно совершить фурье-преобразование по времени соотношения (6.64а); это дает

$$\langle \tilde{a}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{v}) \rangle = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k) \langle a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) \rangle + \\ + i(2\pi)^{-1} (2\hbar\omega)^{-1/2} [\pi\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k) + i(\mathbf{v} - \mathbf{v}_k)^{-1}] \langle \tilde{J}_\lambda(\mathbf{k}, \mathbf{v}) \rangle, \quad (6.64б)$$

где $\mathbf{v}_k = \omega/2\pi = |\mathbf{k}|/2\pi$. Поскольку оператор $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ эрмитов, а векторы поляризации действительны, имеем

$$\langle \tilde{\mathcal{F}}_\lambda(-\mathbf{k}, -|\mathbf{v}|) \rangle = \langle \tilde{\mathcal{F}}_\lambda^\dagger(-\mathbf{k}, -|\mathbf{v}|) \rangle^* = \langle \tilde{\mathcal{F}}_\lambda(\mathbf{k}, |\mathbf{v}|) \rangle^*,$$

откуда

$$\langle \tilde{a}_\lambda(-\mathbf{k}, -|\mathbf{v}|) \rangle = \\ = (2\pi)^{-1} (2\hbar\omega)^{-1/2} (|\mathbf{v}| + \mathbf{v}_k)^{-1} \langle \tilde{\mathcal{F}}_\lambda(-\mathbf{k}, -|\mathbf{v}|) \rangle = \\ = (2\pi)^{-1} (2\hbar\omega)^{-1/2} (|\mathbf{v}| + \mathbf{v}_k)^{-1} \langle \tilde{\mathcal{F}}_\lambda(\mathbf{k}, |\mathbf{v}|) \rangle^*. \quad (6.65)$$

Таким образом, если средний ток $\langle \tilde{\mathcal{F}}_\lambda(\mathbf{k}, \nu) \rangle$ не равен нулю для некоторого \mathbf{k} и $\nu > 0$, то *всегда* найдется мода (например, $-\mathbf{k}$), в которой есть отрицательные частоты. Поэтому, строго говоря, выражение (6.64а) представляет собой аналитический сигнал лишь для исчезающего среднего тока.

Однако в квазимонохроматическом приближении, которое часто является достаточным для квантовой оптики, разброс Δk разрешенных значений \mathbf{k} в среднем токе чрезвычайно мал по сравнению с центральным значением \bar{k} . Следовательно, относительная амплитуда любой отрицательно-частотной части выражения (6.64) чрезвычайно мала, а именно имеет величину порядка $\Delta k/\bar{k}$. Пренебрежение такими членами часто называют приближением «волн вращающейся поляризации».

А. Описание в конфигурационном пространстве

Обратное преобразование наших основных операторных решений в конфигурационное пространство производится наиболее изящно, если мы представим, что объем квантования есть все пространство; тогда можно положить, например,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathcal{A}(\mathbf{k}, t) d^3k \quad (6.66)$$

[что соответствует выбору нормировки $\Omega = (2\pi)^3$ в (6.23)]. В этом случае из (6.61а) следует

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = & - \int [D(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) \dot{\mathbf{A}}^{in}(\mathbf{y}) + \dot{\mathbf{D}}(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) \mathbf{A}^{in}(\mathbf{y})] d^3y + \\ & + \int D_R(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-t') \mathbf{J}(\mathbf{y}, t') d^3y dt', \end{aligned} \quad (6.67)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x}, t) & \equiv - (2\pi)^{-3} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{\sin kt}{k} d^3k = \\ & = - (4\pi|\mathbf{x}|)^{-1} [\delta(|\mathbf{x}|-t) - \delta(|\mathbf{x}|+t)], \end{aligned} \quad (6.68)$$

$$\begin{aligned} D_R(\mathbf{x}, t) & = (4\pi|\mathbf{x}|)^{-1} \delta(|\mathbf{x}|-t) \quad t > 0, \\ & = 0 \quad t < 0. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Две D -функции, определенные выше, представляют собой функции Грина для волнового уравнения. Аналогичное уравнение выполняется также и для электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. Напомним, что все эти уравнения относятся к *поперечным* операторным полям; как уже говорилось, для простоты мы опускаем индекс T , явно указывающий на поперечность.

Первые два члена в (6.67), очевидно, определяют решение однородного волнового уравнения (которое соответствует физическому решению в отсутствие тока \mathbf{J}). Следовательно, можно переписать (6.67) в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}^{in}(\mathbf{x}, t) + \int D_R(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - t') \mathbf{J}(\mathbf{y}, t') d^3y dt', \quad (6.70)$$

аналогичном (6.61б). Как указывалось выше, если ток $\mathbf{J}(\mathbf{y}, t)$ пропорционален единичному оператору при всех \mathbf{y} и t , то решение имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}^{in}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}(\mathbf{x}, t), \quad (6.71)$$

где $\mathbf{C}(\mathbf{x}, t)$ есть некоторое поперечное c -числовое поле.

Заметим, что физический смысл средних значений поля, таких, как $\langle \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \rangle$, непосредственно переносится сюда из проведенного выше рассмотрения в импульсном пространстве. В частности, хотя однородный член $\mathbf{A}^{in}(\mathbf{x}, t)$ необходим в операторном решении, его ожидаемое значение может равняться нулю. В последнем случае среднее поле полностью определяется полем, возникающим за счет источника. Вместе с тем следует отметить, что однородный операторный член отвечает физически важным полевым флуктуациям вакуума, в том числе и в тех областях, в которых не сказывается действие источников.

Для большей ясности рассмотрение в конфигурационном пространстве мы проводили довольно смело. Строго говоря, $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ не является эрмитовым оператором; для получения такового необходимо сначала выбрать гладкую пробную функцию $f(\mathbf{x})$, которая при желании может быть сильно локализована вблизи любой точки, и образовать оператор

$$\mathbf{A}_f(t) = \int f(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) d^3x,$$

который уже является настоящим эрмитовым оператором. Имея в виду это обстоятельство, мы и впредь будем опускать требуемые процедуры сглаживания.

§ 5. ХАРАКТЕРНЫЕ СВОЙСТВА ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЭВОЛЮЦИИ

Свойства операторов поля по отношению к эволюции в пространстве столь же важны в квантовой оптике, как и по отношению к эволюции во времени. В гл. I обсуждались некоторые аспекты пространственной эволюции для классических явлений. Для изучения квантового случая возьмем снова конечный объем квантования ($\Omega = L^3$) и перепишем основное динамическое уравнение (6.22) для функций от \mathbf{x} и ν , которые определяются следующим образом:

$$\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \nu t} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) dt. \quad (6.72)$$

Если, как обычно, положить $\omega = 2\pi\nu$, то (опуская по-прежнему индекс поперечности T) находим

$$-i\omega\tilde{\mathbf{A}} = -\tilde{\mathbf{E}}, \quad (6.73a)$$

$$-i\omega\tilde{\mathbf{E}} = -\nabla^2\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{j}}. \quad (6.73b)$$

Исключая $\tilde{\mathbf{E}}$, получаем

$$(\nabla^2 + \omega^2)\tilde{\mathbf{A}} = -\tilde{\mathbf{j}}, \quad (6.74)$$

т. е. просто неоднородное векторное уравнение Гельмгольца.

Нам нужно найти решение этого уравнения, отвечающее распространению в пространстве для некоторых не вполне общих условий. Пусть источник ограничен определенной областью пространства (тепловой источник или лазер); нас интересуют значения поля вне источника. Точнее говоря, нас интересует поле в тех точках пространства, где $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ при всех t и где, следовательно, $\tilde{\mathbf{j}}(\mathbf{x}, \nu) \equiv 0$. Разобьем все пространство на интересующую нас область R , свободную от источников, и дополнительную к ней область R' , которая целиком

или частично заполнена источниками. Для точек, лежащих внутри R , имеем, очевидно,

$$\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \nu) = \int_R \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) d^3y, \quad (6.75)$$

где интегрирование производится по области R .

Введем теперь функцию Грина $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu)$, для которой

$$(\nabla_x^2 + \omega^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) = (\nabla_y^2 + \omega^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.76)$$

Существует несчетное количество таких функций Грина, одна из которых есть, конечно, простейшая функция Грина G_0 , введенная в гл. 1. Ниже мы выберем наиболее удобную для нас функцию Грина. Подставляя (6.76) в (6.75) и учитывая, что в области R источников нет, получаем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \nu) &= \int_R \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) (\nabla_y^2 + \omega^2) \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) (\nabla_y^2 + \omega^2) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) \right] d^3y = \\ &= \int_R \frac{\partial}{\partial y_i} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) \frac{\partial}{\partial y_i} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) \frac{\partial}{\partial y_i} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) \right] d^3y = \\ &= \int_S \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) \frac{\partial}{\partial n} \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) - \tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) \frac{\partial}{\partial n} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) \right] dS. \end{aligned} \quad (6.77)$$

В последнем выражении интегрирование по \mathbf{y} проводится по поверхности S , разделяющей R и R' . Обычно источник сосредоточен в конечном объеме, так что область R может содержать удаленные участки пространства.

В этом случае можно было бы ожидать, что поверхностный интеграл в (6.77) содержит вклад от «бесконечно удаленной сферы». Напомним, однако, что, согласно принятому предположению, система находится

в большом объеме квантования L^3 и на нее наложены периодические граничные условия. Такое пространство замкнуто и не имеет границ в полной аналогии с окружностью в одномерном случае или с тором — в двумерном.

Особенно удобно выбрать функцию $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu)$ таким образом, чтобы она была равна нулю, когда точка \mathbf{y} лежит на S [как в последней строке соотношения (6.77)]. В рассмотренном в гл. 1 простом примере, в котором поверхность S совпадала с плоскостью $z = 0$, мы нашли подходящую функцию G методом изображений. Однако для более общей поверхности S этот метод не пригоден. Наметим в общих чертах стандартное доказательство того, что требуемая функция Грина (удовлетворяющая однородным граничным условиям Дирихле) существует в весьма общем случае. Пусть не содержащая источников область R , по которой происходит интегрирование в (6.77), является *связной* областью. Грубо говоря, это означает, что любую пару точек в R можно связать некоторой линией, целиком лежащей внутри R .

Будем теперь рассматривать область R как полость в смысле теории электромагнитного поля. Тогда можно попытаться найти (скалярные) собственные функции — стоячие волны $\psi_n(\mathbf{x})$, являющиеся собственными решениями уравнения

$$\nabla^2 \psi_n(\mathbf{x}) + \omega_n^2 \psi_n(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.78)$$

с граничным условием, состоящим в том, что $\psi_n(\mathbf{x})$ обращается в нуль на границе S области R . Можно также рассматривать (6.78) как уравнение на собственные значения для некоторой одночастичной квантовомеханической задачи. В шредингеровском представлении уравнение на собственные значения энергии в конфигурационном пространстве имеет вид

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi_n(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{x}) = E_n \psi_n(\mathbf{x}).$$

Полагая теперь $V(\mathbf{x}) = 0$ в области R и $V(\mathbf{x}) = +\infty$ в области R' , мы приходим к квантовой задаче о свободной частице, заключенной в «ящик» (определяемый областью R) с граничным условием $\psi(\mathbf{x}) = 0$ на «стенках

ящика» (определяемых поверхностью S). Соответствующее уравнение совпадает с (6.78), где $\omega_n^2 = 2mE_n/\hbar^2$. Для обеих задач, как известно, существует полная система ортонормированных функций ψ_n , $n = 1, 2, \dots$, удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n^*(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.79)$$

Пользуясь этой информацией, мы можем сразу же написать искомую функцию Грина нашей исходной задачи

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n^*(\mathbf{x}) \psi_n(\mathbf{y})}{\omega_n^2 - \omega^2}. \quad (6.80)$$

Она удовлетворяет уравнению (6.76) и, очевидно, обращается в нуль, если \mathbf{y} (или \mathbf{x}) лежит на S . Следует отметить, что все обычные резонансные свойства полости без потерь проявляются в членах, входящих в G . В квантовой задаче каждый такой член по-прежнему выполняет свою традиционную роль выделения частот.

Теперь, убедившись в существовании нужной нам функции Грина, легко вывести наиболее важные следствия этого факта. В частности, уравнение (6.77) упрощается и принимает вид

$$\ddot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, \nu) = - \int_S \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) \ddot{\mathbf{A}}(\mathbf{y}, \nu) dS. \quad (6.81)$$

Последнее уравнение означает, что оператор поперечного потенциала в произвольной точке \mathbf{x} области R , свободной от источников, линейно связан с операторами поперечного потенциала на поверхности S , окружающей R . Кроме того, (6.81) показывает, что поведение операторов определяется для каждой частоты независимо.

Столь же интересной является временная форма уравнения (6.81). Полагая

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \equiv - \int \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \nu) e^{-2\pi i \nu t} d\nu, \quad (6.82)$$

получаем, что операторы поля удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \int_S \int K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t') \mathbf{A}(\mathbf{y}, t') dS dt'. \quad (6.83)$$

Разумеется, нет ничего удивительного в том, что поперечный векторный потенциал подчиняется таким соотношениям. Любая величина, подчиняющаяся волновому уравнению для свободного поля в области R , удовлетворяет аналогичным соотношениям. Например, путем сходных рассуждений можно показать, что электрическое поле $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ в точке \mathbf{x} , лежащей в области R , удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \int_S \int K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t') \mathbf{E}(\mathbf{y}, t') dS dt'. \quad (6.84)$$

Эти фундаментальные выражения, устанавливающие связь между полем в пустом пространстве и его значениями на поверхности S , без каких-либо изменений фигурируют и в классической теории, рассмотренной в первых двух главах. Следствия из этих законов распространения, получающиеся в классической теории, имеют свои аналоги в квантовой теории. В частности, теорема ван Циттерта — Цернике, изложенная в гл. 1, имеет прямой квантовый аналог.

Представление электромагнитного поля по когерентным состояниям

§ 1. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА

Представление о когерентных состояниях, которые будут играть столь важную роль в нашем квантовостатистическом описании поля излучения, имеет свою большую и интересную историю. Суть ее содержится уже в той части квантовой механики, которая относится к системам с одной степенью свободы. Пусть, как в гл. 5, величины Q и P образуют (неприводимую) каноническую пару операторов $[Q, P] = i\hbar$; и кроме того (выбирая для простоты круговую частоту равной единице), положим $a = (Q + iP)/\sqrt{2\hbar}$, $a^\dagger = (Q - iP)/\sqrt{2\hbar}$ и $N = a^\dagger a$. Свойства этих операторов и собственных состояний $|n\rangle$ оператора числа частиц (квантов) с $n = 0, 1, 2, \dots$ были довольно подробно разобраны в гл. 5. Здесь мы возобновим это рассмотрение, приступая к изучению когерентных состояний, т. е. векторов вида

$$|z\rangle \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle, \quad (7.1)$$

определенных для произвольных комплексных чисел z . Следует сделать несколько замечаний по поводу обозначений. В правой части равенства (7.1) фигурирует линейная комбинация собственных состояний $|n\rangle$ оператора числа квантов с коэффициентами, зависящими от z . Эта линейная комбинация определяет новый вектор, который мы обозначаем самим комплексным числом z . Следует, однако, отчетливо понимать, что состояние $|1\rangle$ — собственное состояние оператора N —

резко отличается от записываемого таким же образом состояния $|1\rangle$, которое мы получаем, положив в (7.1) $z = 1$.

С педагогической точки зрения представляется целесообразным ввести и другое обозначение для $|z\rangle$, в котором были бы явно выделены действительная и мнимая части z . Полагая

$$z \equiv \frac{q + ip}{\sqrt{2\hbar}}, \quad (7.2)$$

где q и p — два произвольных действительных c -числа, можно ввести определение

$$|z\rangle \equiv |p, q\rangle \equiv \exp\left[-\frac{1}{4\hbar}(p^2 + q^2)\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q + ip)^n}{(2\hbar)^{n/2} (n!)^{1/2}} |n\rangle. \quad (7.3)$$

Сопряженные когерентные состояния определяются аналогичными равенствами

$$\langle z| = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{(n!)^{1/2}} \langle n|, \quad (7.4a)$$

$$\langle z| = \langle p, q| = \exp\left[-\frac{1}{4\hbar}(p^2 + q^2)\right] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q - ip)^n}{(2\hbar)^{n/2} (n!)^{1/2}} \langle n|. \quad (7.4b)$$

Особого внимания заслуживает то обстоятельство, что сопряженное состояние также обозначается буквой z , хотя в коэффициенты разложения в ряд фактически входят степени z^* .

А. Собственные состояния смещенного и сдвинутого осцилляторов

Смещенный осциллятор. Наиболее важную роль, с нашей точки зрения, играет соотношение между когерентными состояниями и собственными решениями для смещенного (или сдвинутого) гармонического осциллятора. Рассмотрим подробнее решение для основного состояния гармонического осциллятора, у которого, как обычно, масса и круговая частота выбраны равными

единице. Это решение удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{H}|0\rangle = \frac{1}{2}\{P^2 + Q^2 - \hbar\}|0\rangle = 0. \quad (7.5)$$

Здесь приведен гамильтониан системы, у которой в основном состоянии средние координата и импульс равны нулю:

$$\langle 0|Q|0\rangle = \langle 0|P|0\rangle = 0. \quad (7.6)$$

Далее, одним из наиболее важных следствий коммутационных соотношений является такое свойство:

$$U[p, q]^{-1}(\alpha P + \beta Q)U[p, q] = \alpha(P + p) + \beta(Q + q); \quad (7.7)$$

здесь α и β — произвольные параметры, а $U[p, q]$ — унитарный оператор

$$U[p, q] \equiv e^{i(pQ - qP)/\hbar}. \quad (7.8)$$

По существу действие $U[p, q]$ на оба оператора P и Q выражается в их смещении на c -числа, равные соответственно p и q . Ясно, что $U[p, q]^{-1} = U[-p, -q]$. Свойство (7.7) доказывается проще всего, если заметить, что для двух произвольных операторов X и Y имеет место равенство

$$e^Y X e^{-Y} = X + [Y, X] + \frac{1}{2!}[Y, [Y, X]] + \dots \quad (7.9)$$

В нашем случае этот ряд обрывается после второго члена.

Рассмотрим теперь соотношение

$$\begin{aligned} 0 &= U[p, q]\mathcal{H}|0\rangle = U[p, q]\mathcal{H}U[p, q]^{-1}U[p, q]|0\rangle = \\ &= \frac{1}{2}\{(P - p)^2 + (Q - q)^2 - \hbar\}U[p, q]|0\rangle, \end{aligned} \quad (7.10)$$

которое получается в результате повторного использования (7.7). Очевидно, что состояние

$$|p, q\rangle \equiv U[p, q]|0\rangle \quad (7.11)$$

является основным состоянием аналогичного осциллятора, у которого координата смещена на q , а импульс —

на p . В частности, средние координата и импульс теперь уже не равны нулю и определяются выражениями

$$\begin{aligned} \langle p, q | Q | p, q \rangle &= \langle 0 | U [p, q]^{-1} Q U [p, q] | 0 \rangle = \\ &= \langle 0 | (Q + q) | 0 \rangle = q, \end{aligned} \quad (7.12a)$$

$$\langle p, q | P | p, q \rangle = p, \quad (7.12б)$$

второе из которых выводится аналогично первому. Ниже мы подробно покажем, что определенные здесь состояния $|p, q\rangle$ совпадают с когерентными состояниями (7.3). По очевидным причинам мы будем называть рассмотренный пример случаем «смещенного осциллятора».

Другое интересное свойство получается, если рассмотреть временную эволюцию основного состояния $|p, q\rangle$ смещенного осциллятора под действием несмещенного гамильтониана $\mathcal{H} = 1/2\{P^2 + Q^2 - \hbar\}$. Позже мы покажем, что

$$e^{-it\mathcal{H}/\hbar} |p, q\rangle = |p_{\text{кл}}(t), q_{\text{кл}}(t)\rangle, \quad (7.13)$$

где $p_{\text{кл}}(t)$ и $q_{\text{кл}}(t)$ — решения для классического осциллятора

$$q_{\text{кл}}(t) = q \cos t + p \sin t, \quad (7.14a)$$

$$p_{\text{кл}}(t) = -q \sin t + p \cos t, \quad (7.14б)$$

удовлетворяющие начальным условиям $p_{\text{кл}}(0) = p$ и $q_{\text{кл}}(0) = q$. Другими словами, состояние $|p, q\rangle$ в процессе временной эволюции переходит в другое состояние того же самого рода, определяемое зависящими от времени значениями параметров p и q . Образно говоря, состояние $|p, q\rangle$ меняет со временем не свой вид, а лишь средние координату и импульс, причем изменение последних происходит в соответствии с классическими уравнениями движения.

Эволюция состояний $|p, q\rangle$ согласно классическим уравнениям движения имеет место для произвольно малых значений p и q . Это, однако, не означает, что полученным решениям можно дать строго классическую (т. е. не вероятностную и т. д.) интерпретацию. Поскольку $\hbar > 0$, измеряемые значения импульса и координаты будут иметь отличный от нуля разброс.

Сдвинутый осциллятор. Представление о когерентных состояниях можно ввести несколько иным способом с помощью следующих рассуждений. Рассмотрим исходный несмещенный гамильтониан типа (7.5), но теперь уже в присутствии внешних c -числовых сдвигающих членов p и q , связанных соответственно с операторами P и Q таким образом, что

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2} \{P^2 + Q^2 - \hbar\} - pP - qQ. \quad (7.15a)$$

Это можно назвать случаем «сдвинутого осциллятора» в противоположность рассмотренному выше случаю «смещенного осциллятора». Тем не менее состояния $|p, q\rangle$ по-прежнему являются собственными векторами гамильтониана \mathcal{H}' . Чтобы понять это, достаточно заметить, что

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2} \{(P - p)^2 + (Q - q)^2 - \hbar\} - \frac{1}{2} \{p^2 + q^2\}. \quad (7.15b)$$

Следовательно, используя (7.10), получаем

$$\mathcal{H}' |p, q\rangle = -\frac{1}{2} \{p^2 + q^2\} |p, q\rangle. \quad (7.16)$$

Это значит, что $|p, q\rangle$ является собственным вектором оператора \mathcal{H}' с собственным значением

$$E = -\frac{1}{2} \{p^2 + q^2\}. \quad (7.17)$$

Более того, если сдвигающие члены зависят от времени [т. е. если в (7.15a) $p = p(t)$ и $q = q(t)$], то из предыдущего следует, что состояние $|p(t), q(t)\rangle$ является собственным вектором зависящего от времени гамильтониана $\mathcal{H}' = \mathcal{H}'(t)$ сдвинутого осциллятора в каждый момент времени t , и соответствующее собственное значение $E = E(t) = -\frac{1}{2} \{p^2(t) + q^2(t)\}$.

Подводя итог, заметим, что когерентные состояния $|p, q\rangle$ являются основными состояниями смещенных или сдвинутых осцилляторов. В последующем рассмотрении мы часто будем пользоваться этими свойствами когерентных состояний.

Б. Волновые пакеты с минимальной неопределенностью

Когерентные состояния возникают и в связи с совершенно другой задачей, а именно при рассмотрении условий минимальной неопределенности. Такой аспект имеет, собственно, мало общего с квантовой оптикой, однако он настолько традиционен, что мы считаем себя не вправе не уделить ему некоторого внимания.

Для краткости обозначим снова среднее от оператора \mathcal{O} по нормированному состоянию $|\psi\rangle$ через

$$\langle \mathcal{O} \rangle \equiv \langle \psi | \mathcal{O} | \psi \rangle \quad (7.18)$$

и, кроме того, положим

$$\Delta P \equiv P - \langle P \rangle, \quad (7.19a)$$

$$\Delta Q \equiv Q - \langle Q \rangle. \quad (7.19b)$$

Тогда (сначала с помощью неравенства треугольника, а затем с помощью неравенства Шварца) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \hbar &= \frac{1}{2} |\langle [Q, P] \rangle| = \frac{1}{2} |\langle [\Delta Q, \Delta P] \rangle| \leq \\ &\leq |\langle \Delta Q \Delta P \rangle| \leq \langle \Delta Q^2 \rangle^{1/2} \langle \Delta P^2 \rangle^{1/2}, \end{aligned} \quad (7.20)$$

т. е. принцип неопределенности Гейзенберга в его обычном виде. Чтобы получить состояние с минимальной неопределенностью, нужно каждое из неравенств в (7.20) обратить в равенство. Неравенство Шварца переходит в равенство при $\Delta Q |\psi\rangle = -ir \Delta P |\psi\rangle$; для того чтобы превратить в равенство неравенство треугольника, величина r должна быть действительной; наконец, для согласования с соотношением $[Q, P] = i\hbar$ величина r должна быть положительной. Для дальнейшего выберем¹⁾ $r = 1$, что приводит к условию

$$(Q + iP) |\psi\rangle = (\langle Q \rangle + i \langle P \rangle) |\psi\rangle \quad (7.21a)$$

или, после деления на $\sqrt{2\hbar}$, к условию

$$a |\psi\rangle = \langle a \rangle |\psi\rangle. \quad (7.21b)$$

¹⁾ Случай $r \neq 1$ отвечает осцилляторам с круговой частотой $\omega = r^{-1}$. Здесь мы будем рассматривать случай единичной круговой частоты.

Таким образом, состояния с минимальной неопределенностью являются собственными векторами оператора уничтожения. Как мы сейчас покажем, эти собственные векторы и есть когерентные состояния.

В. Собственные векторы оператора уничтожения

Третий аспект вопроса о когерентных состояниях, который мы хотим здесь обсудить, заключается в том факте, что эти состояния являются собственными векторами оператора $a = (Q + iP)/\sqrt{2\hbar}$. Это свойство является одной из причин (но отнюдь не единственной) их полезности в квантовой оптике.

Мы заведомо знаем один собственный вектор оператора a . Это основное состояние $|0\rangle$; соответствующее собственное значение равно нулю. Поэтому рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} 0 &= U[p, q] a |0\rangle = U[p, q] a U[p, q]^{-1} U[p, q] |0\rangle = \\ &= \left[a - \frac{(q + ip)}{\sqrt{2\hbar}} \right] |p, q\rangle, \end{aligned} \quad (7.22)$$

пользуясь (7.7) и определением a . В обозначениях (7.2) можно записать (7.22) в виде

$$a |z\rangle \equiv a |p, q\rangle = \frac{q + ip}{\sqrt{2\hbar}} |p, q\rangle \equiv z |z\rangle. \quad (7.23)$$

Тем самым мы установили, что состояния $|p, q\rangle = U[p, q] |0\rangle$ действительно являются собственными векторами оператора уничтожения.

Докажем, наконец, что состояния $|p, q\rangle$ представляют собой когерентные состояния, определяемые соотношением (7.1) [или (7.3)]. Наиболее простой способ доказательства состоит в использовании разновидности формулы Бейкера — Хаусдорфа, которая в том случае, когда коммутатор $Z = [X, Y]$ коммутирует как с X , так и с Y , записывается следующим образом:

$$e^{X+Y} = e^{-1/2 [X, Y]} e^X e^Y, \quad (7.24)$$

Доказательство формулы (7.24). Прежде всего из (7.9) получаем

$$\begin{aligned} e^Y e^X &= (e^Y e^X e^{-Y}) e^Y = \exp(e^Y X e^{-Y}) e^Y = \\ &= \exp(X + [Y, X]) e^Y = e^{-Z} e^X e^Y, \end{aligned}$$

так как $Z = [X, Y]$ коммутирует с X и Y . Итерируя, находим

$$(e^Y e^X)^n \equiv \exp(-\beta_n Z) e^{nX} e^{nY} = e^Y e^X (e^Y e^X)^{n-1},$$

что приводит к рекуррентному соотношению $\beta_n = n + \beta_{n-1}$ для β_n . Так как $\beta_1 = 1$, то отсюда следует, что $\beta_n = n(n+1)/2$. Заметим, наконец, что

$$e^{Y+X} \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{Y/n} e^{X/n})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\beta_n Z}{n^2}\right) e^X e^Y = e^{-1/2 [X, Y]} e^X e^Y,$$

Тем самым равенство (7.24) установлено.

Представим показатель экспоненты в выражении для $U[p, q]$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{i[pQ - qP]}{\hbar} &= \frac{i[p(a + a^\dagger) + iq(a - a^\dagger)]}{\sqrt{2\hbar}} = \\ &= \frac{(q + ip)a^\dagger}{\sqrt{2\hbar}} - \frac{(q - ip)a}{\sqrt{2\hbar}} \equiv \\ &\equiv za^\dagger - z^*a. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Применяя соотношение (7.24), в котором положим $X = za^\dagger$ и $Y = -z^*a$, получаем

$$\begin{aligned} U[p, q] &= \exp(za^\dagger - z^*a) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp(za^\dagger) \exp(-z^*a). \end{aligned} \quad (7.26)$$

Следовательно, учитывая свойство $a^p|0\rangle = 0$, $p=1, 2, \dots$, находим

$$\begin{aligned} U[p, q]|0\rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp(za^\dagger) \exp(-z^*a)|0\rangle = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp(za^\dagger)|0\rangle = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle, \end{aligned} \quad (7.27)$$

где в последнем равенстве мы воспользовались соотношением (5.52) для того, чтобы ввести $|n\rangle$.

Соотношение (7.27) устанавливает искомую связь когерентных состояний (7.1) с основными состояниями сдвинутого осциллятора, состояниями с минимальной неопределенностью и собственными состояниями оператора уничтожения; получение этой связи и было нашей задачей. Сделав эти традиционные замечания, которые послужат для ориентировки, мы должны перейти теперь к более широкому изучению свойств когерентных состояний с тем, чтобы заложить надежный фундамент для их использования в квантовой оптике.

§ 2. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ

Многие из обсуждаемых далее свойств когерентных состояний являются простыми обобщениями таких свойств, проследить которые легче всего на примере одной степени свободы, и поэтому мы продолжим наш анализ на этом уровне.

А. Предварительные замечания

Сосредоточим внимание на записи когерентных состояний с помощью комплексной переменной в виде

$$|z\rangle \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \quad (7.28a)$$

и сопряженных состояний в виде

$$\langle z| \equiv \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \langle n| \frac{z^{*n}}{(n!)^{1/2}}. \quad (7.28b)$$

Мы уже неявным образом установили, что все когерентные векторы $|z\rangle$ являются *нормированными*. Действительно, в силу унитарности оператора $U[p, q]$ из (7.3) следует

$$\langle z|z\rangle = \langle 0|U[p, q]^{-1}U[p, q]|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1. \quad (7.29)$$

Определим более общий матричный элемент $\langle z | z' \rangle$ для двух когерентных состояний:

$$\begin{aligned} \langle z | z' \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|z'|^2\right) \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{z^{*m} z'^n}{(m! n!)^{1/2}} \langle m | n \rangle = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|z'|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n} z'^n}{n!} = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + z^* z' - \frac{1}{2}|z'|^2\right). \end{aligned} \quad (7.30)$$

Это соотношение можно записать также в виде

$$\begin{aligned} \langle z | z' \rangle &= \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[|z|^2 - z^* z' - z'^* z + |z'|^2 - (z^* z' - z'^* z)\right]\right\} = \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}|z - z'|^2 + \frac{1}{2}(z^* z' - z'^* z)\right\} = \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2}|z - z'|^2 + i \operatorname{Im}(z^* z')\right\}, \end{aligned} \quad (7.31)$$

откуда непосредственно вытекает, что

$$|\langle z | z' \rangle| = \exp\left\{-\frac{1}{2}|z - z'|^2\right\}. \quad (7.32)$$

Последнее выражение, очевидно, никогда не равно нулю. Таким образом, совокупность когерентных состояний $|z\rangle$ со всеми возможными комплексными z есть семейство нормированных состояний, в котором никакие два состояния не ортогональны друг другу, поскольку для любых z и z' имеем $0 < |\langle z | z' \rangle| \leq 1$. Однако практически можно сказать, что $|\langle z | 0 \rangle| \approx 0$, если $|z| \gg 1$. С точки зрения физики это означает, что величина энергии $|E| = \frac{1}{2}\{p^2 + q^2\}$ для соответствующего сдвинутого осциллятора [ср. (7.17)] должна быть много больше расстояния между квантованными энергетическими уровнями, которое для осциллятора с единичной частотой в точности равно \hbar .

Свойства когерентных состояний как собственных векторов. Выше уже отмечалось, что состояния $|z\rangle$ являются собственными состояниями оператора уничтожения a с собственным значением z , т. е.

$$a |z\rangle = z |z\rangle. \quad (7.33)$$

Легко видеть, что когерентные состояния являются единственными собственными состояниями оператора a . Из (7.33) следует

$$\langle z' | a | z \rangle = z \langle z' | z \rangle \quad (7.34a)$$

и комплексно сопряженное равенство

$$\langle z | a^\dagger | z' \rangle = z^* \langle z | z' \rangle, \quad (7.34b)$$

Это соотношение формально можно представить в виде соотношения между сопряженными состояниями

$$\langle z | a^\dagger = z^* \langle z |. \quad (7.35)$$

Заметим, однако, что (7.35) имеет в точности тот же смысл, что и более привычное соотношение (7.33).

Если $F(a)$ обозначает функцию от a более или менее общего вида, то из (7.33) следует

$$F(a) | z \rangle = F(z) | z \rangle. \quad (7.36a)$$

Аналогично для достаточно общей функции $G(a^\dagger)$ из (7.35) следует

$$\langle z | G(a^\dagger) = G(z^*) \langle z |, \quad (7.36b)$$

что в сущности эквивалентно (7.36a).

Рассматривая равенство (7.33), естественно поставить вопрос, существует ли какое-нибудь собственное состояние (назовем его $|\lambda; ?\rangle$), такое, что

$$a^\dagger |\lambda; ?\rangle = \lambda |\lambda; ?\rangle. \quad (7.37)$$

Легко показать, что ни одного такого состояния *не существует*. Используя выражение, сопряженное (5.53б), получаем, что из (7.37) должно вытекать соотношение

$$\langle n | a^\dagger |\lambda; ?\rangle = \sqrt{n} \langle n-1 | \lambda; ?\rangle = \lambda \langle n | \lambda; ?\rangle \quad (7.38)$$

для $n = 1, 2, \dots$, тогда как для $n = 0$ из (7.37) мы получили бы

$$\langle 0 | a^\dagger |\lambda; ?\rangle = \lambda \langle 0 | \lambda; ?\rangle = 0. \quad (7.39)$$

Если $\lambda = 0$, то из (7.38) следует $\langle n-1 | \lambda; ?\rangle = 0$, $n = 1, 2, \dots$, т. е. $|\lambda; ?\rangle = 0$. Если $\lambda \neq 0$, то $\langle 0 | \lambda; ?\rangle = 0$, что после повторного применения (7.38) дает $\langle n | \lambda; ?\rangle = 0$ для $n = 1, 2, \dots$, и поэтому $|\lambda; ?\rangle = 0$. Следовательно, не существует ненулевых состояний, удовлетворяющих соотношению (7.37).

Непрерывность и аналитичность. Рассмотрим теперь некоторые вопросы, касающиеся *непрерывности* когерентных состояний $|z\rangle$. Так как $|z\rangle = |p, q\rangle$ есть основное состояние сдвинутого осциллятора (7.15а), то физически правдоподобно, что состояния $|z\rangle$ и $|z'\rangle$ приблизительно совпадают для соседних точек в комплексной плоскости, которые тогда, как легко представить интуитивно, соответствуют почти идентичным сдвигающим силам. В справедливости этих аргументов можно убедиться, воспользовавшись нормой вектора [см. (5.4)], на которой основана обычная мера «расстояния» между двумя векторами. В общем случае мы имеем соотношение

$$\| |z\rangle - |z'\rangle \|^2 = 2[1 - \operatorname{Re} \langle z | z'\rangle] \leq 2(|z| + |z'|)|z - z'|, \quad (7.40)$$

которое доказывается следующим образом. Если

$A \equiv -\ln \langle z | z'\rangle = 1/2 |z - z'|^2 - i \operatorname{Im} z^* z'$, то

$$2 - e^{-A} - e^{-A^*} = \left(\int_0^A + \int_0^{A^*} \right) e^{-x} dx = \int_0^1 (Ae^{-Ax} + A^*e^{-A^*x}) dx \leq$$

$$\leq 2 \int_0^1 |Ae^{-Ax}| dx \leq 2 \int_0^1 |A| dx = 2|A| \leq 2(|\operatorname{Re} A| +$$

$$+ |\operatorname{Im} A|) = |z - z'|^2 + |z^* z' - z'^* z| \leq 2(|z| + |z'|)|z - z'|,$$

откуда и вытекает (7.40). Отсюда видно, что, когда z сходится в комплексной плоскости к z' , соответствующие векторы $|z\rangle$ сходятся к $|z'\rangle$ «по норме», или, как еще говорят, «сильно» сходятся.

Рассмотрим далее непрерывность векторов $|z\rangle$ в матричных элементах. Предположим, что $|\psi\rangle$ означает произвольный вектор гильбертова пространства, и рассмотрим функцию

$$\psi(z) \equiv \langle z | \psi \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{(n!)^{1/2}} \langle n | \psi \rangle, \quad (7.41)$$

где z принимает значения из комплексной плоскости. Из неравенства Шварца [ср. (5.3)] следует, что любая

такая функция $\psi(z)$ ограничена:

$$|\psi(z)| = |\langle z | \psi \rangle| \leq \langle \psi | \psi \rangle^{1/2} = \| |\psi\rangle \| < \infty \quad (7.42)$$

и непрерывна по z в силу соотношения

$$\begin{aligned} |\psi(z) - \psi(z')| &= |(\langle z | - \langle z' |) | \psi \rangle| \leq \\ &\leq \| |z\rangle - |z'\rangle \| \cdot \| |\psi\rangle \| \leq \\ &\leq \{2(|z| + |z'|)|z - z'|\}^{1/2} \| |\psi\rangle \|, \end{aligned} \quad (7.43)$$

вытекающего из (7.40).

Функции $\psi(z)$ имеют, однако, даже более сильные свойства, чем непрерывность. Сумма (7.41) абсолютно сходится для всех комплексных z . Поскольку $|\langle n | \psi \rangle| \leq \| |\psi\rangle \|$, это означает, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^*|^n}{(n!)^{1/2}} |\langle n | \psi \rangle| \leq \| |\psi\rangle \| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z^*|^n}{(n!)^{1/2}}; \quad (7.44)$$

последний ряд сходится, так как отношение n -го члена к $(n-1)$ -му стремится к нулю как $|z^*|/\sqrt{n}$. Но всюду абсолютно сходящийся ряд по комплексной переменной *определяет* целую функцию. Таким образом, выражение

$$\exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right)\psi(z) \equiv f(z^*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{*n}}{(n!)^{1/2}} \langle n | \psi \rangle \quad (7.45)$$

определяет целую функцию от z^* для всякого вектора $|\psi\rangle$. Иначе говоря, можно положить

$$\psi(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right)f(z^*). \quad (7.46)$$

Это означает, что любая функция $\psi(z)$ задается [за исключением общего множителя $\exp(-1/2|z|^2)$] целой аналитической функцией. Отсюда с очевидностью следует, например, что каждая функция $\psi(z)$ есть бесконечно дифференцируемая функция от z и от z^* (или от p и q , где $z = (q + ip)/\sqrt{2\hbar}$). Допустима, однако, не всякая це-

лая функция, так как на любую из функций $f(z^*)$ наложено ограничение

$$|f(z^*)| = \left| \psi(z) \exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) \right| \leq \| |\psi\rangle \| \exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right). \quad (7.47)$$

Смысл функций $\psi(z)$ выяснится ниже при рассмотрении других замечательных свойств когерентных состояний, к чему мы и переходим.

Б. Непрерывное представление, основанное на когерентных состояниях

«Разложение единицы». При традиционном квантовомеханическом подходе часто отыскивают полный набор коммутирующих наблюдаемых и в качестве базисной системы векторов используют систему их общих собственных векторов. Например, « n -базис» определяет полную ортогональную систему векторов $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, являющихся собственными векторами оператора числа квантов N . В свою очередь, как уже указывалось в гл. 5, этот базис порождает каноническое функциональное представление гильбертова пространства с помощью функций от n (последовательностей), определенных равенством $\psi_n = \langle n | \psi \rangle$. Такой подход, который во многих случаях оказывается весьма плодотворным, основан на фундаментальной теореме Стоуна и фон Неймана. Грубо говоря, эта теорема утверждает, что всякий эрмитов оператор порождает связанное с ним функциональное представление гильбертова пространства.

Значительно меньше известно, вообще говоря, о «базисах», порождаемых собственными векторами неэрмитовых операторов, таких, как оператор уничтожения a . В действительности априори нельзя гарантировать, что собственные векторы $|z\rangle$ накрывают¹⁾ гильбертово пространство.

Например (правые) собственные векторы оператора a^\dagger не накрывают никакого пространства, поскольку,

¹⁾ Термин «накрывает» (в оригинале span) здесь использован для краткости. Речь идет о том, что соответствующий набор векторов образует базис гильбертова пространства, т. е. любой вектор пространства можно представить в виде линейной комбинации векторов из указанного набора. — *Прим. ред.*

как было показано выше, оператор a^\dagger не имеет собственных векторов. В качестве другого примера рассмотрим осциллятор Ферми, которому соответствуют операторы вида

$$a_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad a_f^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad N_f = a_f^\dagger a_f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы оператора N_f накрывают двумерное гильбертово пространство; напротив, у оператора a_f есть всего лишь один собственный вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (соответствующее собственное значение равно нулю), и он, естественно, не может накрывать указанного пространства.

К счастью, однако, когерентные состояния $|z\rangle$ со всеми возможными z накрывают гильбертово пространство. Впервые этот факт был отмечен, по-видимому, фон Нейманом в его книге по квантовой теории [5.4]. Нейман указывает, что подмножество всех когерентных состояний $|z\rangle$, для которых $z = \sqrt{\pi}(l + im)$, где l и m — произвольные целые числа, уже накрывает гильбертово пространство. Физический смысл этого состоит в том, что полная система состояний определяется такими векторами $|p, q\rangle$, для которых точки p и q образуют прямоугольную решетку в фазовом пространстве с плотностью одно состояние на «ячейку Планка» объемом $h = 2\pi\hbar$.

Далее, если уже подмножество когерентных состояний накрывает все гильбертово пространство и, таким образом, по нашей терминологии, является полной системой, то все множество когерентных состояний может быть названо переполненным. Это значит, что должны существовать определенные *линейные зависимости* между когерентными состояниями, и ниже мы приведем некоторые из них. Прежде чем продемонстрировать это, мы еще раз повторим утверждение о том, что система собственных векторов $|z\rangle$ оператора уничтожения не только полна, но и переполнена.

Из полноты когерентных состояний вытекает следующее *фундаментальное следствие*: обращение в нуль функции $\psi(z) = \langle z | \psi \rangle$ для всех z влечет за собой обра-

щение в нуль вектора $|\psi\rangle$; обратное, разумеется, также справедливо. Таким образом, абстрактные векторы $|\psi\rangle$ могут быть поставлены в одно-однозначное соответствие с комплексными ограниченными функциями $\psi(z) = \langle z|\psi\rangle$. Аналогия с одно-однозначным соответствием между векторами гильбертова пространства $|\psi\rangle$ и последовательностями $\{\psi_n\}$ (где $\psi_n = \langle n|\psi\rangle$) очевидна; она наводит на мысль о том, что мы можем представить абстрактное гильбертово пространство \mathfrak{H} с помощью линейного класса функций (скажем, \mathfrak{C}), содержащего $\psi(z) = \langle z|\psi\rangle$ для каждого $|\psi\rangle \in \mathfrak{H}$.

Чтобы окончательно определить наше представление, мы должны превратить линейное пространство функций \mathfrak{C} в гильбертово пространство, введя соответствующее скалярное произведение. Как подчеркивалось в гл. 5, при использовании канонической процедуры Дирака ключевую роль играет формула разложения единицы по одномерным проекционным операторам [см. (5.11)]. В данном случае наши определения скалярных произведений и других подобных величин по внешнему виду будут формально идентичны приведенным в гл. 5, если мы сможем доказать основное «разложение единицы» вида

$$I = \frac{1}{\pi} \int d^2z |z\rangle \langle z|, \quad (7.48)$$

где

$$d^2z \equiv d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z)$$

и интегрирование распространяется на всю комплексную плоскость¹⁾. Разумеется, истинный смысл соотношения (7.48) определяется формулой для матричных элементов

$$\langle \lambda|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int \langle \lambda|z\rangle \langle z|\psi\rangle d^2z \quad (7.49)$$

для произвольных $|\lambda\rangle$ и $|\psi\rangle$. Потому для доказательства соотношения (7.48) сосредоточимся на соотношении (7.49), в котором подынтегральное выражение есть обычная функция.

¹⁾ Впервые разложение единицы вида (7.48) с целью образования функционального представления гильбертова пространства было использовано Клаудером [7.4]. В своем эвристическом выводе соотношения (7.48) мы следуем этой работе.

Элементарное доказательство соотношения (7.49) производится непосредственно. Используя разложение (7.41), получаем, что желаемый результат имеет вид

$$\langle \lambda | \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z \exp(-|z|^2) \sum_{m, n=0}^{\infty} \frac{z^{*m} z^n}{(m! n!)^{1/2}} \langle \lambda | m \rangle \langle n | \psi \rangle. \quad (7.50)$$

Если поменять местами суммирование и интегрирование и ввести полярные координаты, т. е. $z = r e^{i\theta}$, $d^2z = r dr d\theta$, то, очевидно,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \sum_{m, n=0}^{\infty} \langle \lambda | m \rangle \langle n | \psi \rangle (m! n!)^{-1/2} \times \\ & \times \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} r^{m+n} e^{i\theta(n-m)} \exp(-r^2) r dr d\theta = \\ & = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda | n \rangle \langle n | \psi \rangle (n!)^{-1} \int_0^{\infty} r^{2n+1} \exp(-r^2) dr = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda | n \rangle \langle n | \psi \rangle = \langle \lambda | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (7.51)$$

что и требовалось показать.

Строгое доказательство соотношения (7.49) проводится несколько по-другому, причем главным моментом является обоснование перестановки пределов. Покажем сначала, что

$$\langle \psi | \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z |\langle z | \psi \rangle|^2.$$

С помощью стандартных теорем для любого конечного R легко находим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta |\langle z | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{m, n=0}^{\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta e^{i\theta(n-m)} \times \\ & \times \langle \psi | m \rangle \langle n | \psi \rangle (m! n!)^{-1/2} r^{m+n} \exp(-r^2) = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle n | \psi \rangle|^2 \gamma_n(R), \end{aligned}$$

где

$$\gamma_n(R) \equiv 2(n!)^{-1} \int_0^R r^{2n+1} \exp(-r^2) dr.$$

Очевидно, $0 < \gamma_n(R) < 1$ для всех n и R , в то время как $\lim_{R \rightarrow \infty} \gamma_n(R) = 1$ для всех n . Поскольку произведение $\langle n | \psi \rangle$ квадратично суммируемо (т. е. вектор $|\psi\rangle$ нормируем), то легко показать (в силу равномерной сходимости приведенных ниже рядов), что

$$\begin{aligned} \langle \psi | \psi \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |\langle n | \psi \rangle|^2 = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{R \rightarrow \infty} |\langle n | \psi \rangle|^2 \gamma_n(R) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\langle n | \psi \rangle|^2 \gamma_n(R) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2z |\langle z | \psi \rangle|^2; \end{aligned}$$

таким образом, мы получили искомое соотношение. Соответствующий результат для $\langle \lambda | \psi \rangle$ получается в силу линейности. Исползованный способ доказательства соотношения (7.49) заимствован из работы Баргманна [7.6].

Соотношение (7.48), которое, как мы показали, является искомым «разложением единицы» по одномерным проекционным операторам, позволяет автоматически получить (на основе канонической процедуры Дирака) ряд свойств, перечисленных ниже и относящихся к соответствующему непрерывному представлению гильбертова пространства.

Представители (representatives) векторов: $\langle z | \psi \rangle$ для всех $|\psi\rangle$.

Скалярное произведение

$$\langle \lambda | \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z \langle \lambda | z \rangle \langle z | \psi \rangle. \quad (7.52)$$

Представители операторов: $\langle z | \mathcal{B} | z' \rangle$ для произвольного оператора \mathcal{B} .

Преобразование вектора

$$\langle z | \mathcal{B} | \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 z' \langle z | \mathcal{B} | z' \rangle \langle z' | \psi \rangle. \quad (7.53)$$

Преобразование оператора

$$\langle z | \mathcal{B}_1 \mathcal{B}_2 | z'' \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 z' \langle z | \mathcal{B}_1 | z' \rangle \langle z' | \mathcal{B}_2 | z'' \rangle. \quad (7.54)$$

Соответствующий канонический набор разложений векторов и операторов дается следующими соотношениями:

Разложение вектора

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 z |z\rangle \langle z | \psi \rangle. \quad (7.55)$$

Разложение оператора

$$\mathcal{B} = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 z_1 d^2 z_2 |z_1\rangle \langle z_1 | \mathcal{B} | z_2 \rangle \langle z_2|. \quad (7.56)$$

Соотношения (7.55) и (7.56) можно рассматривать как формулы обратного преобразования от функционального представления гильбертова пространства по когерентным состояниям к абстрактному представлению.

Воспроизводящее ядро. Одна из главных особенностей функционального представления, основанного на переполненном наборе состояний, состоит в появлении воспроизводящих ядер.

Пусть \mathcal{B} в (7.53) есть единичный оператор I . Тогда получаем

$$\langle z | \psi \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 z' \langle z | z' \rangle \langle z' | \psi \rangle. \quad (7.57)$$

Это означает, что представитель $\langle z | \psi \rangle$ любого вектора удовлетворяет интегральному уравнению с воспроизводящим ядром

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(z; z') &\equiv \langle z | z' \rangle = \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} |z|^2 + z^* z' - \frac{1}{2} |z'|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.58)$$

Далее, если положить $|\psi\rangle = |z''\rangle$, то из (7.57) получаем

$$\langle z | z'' \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2 z' \langle z | z' \rangle \langle z' | z'' \rangle, \quad (7.59)$$

т. е. ядро является решением интегрального уравнения, порождаемого им. По существу уравнение (7.59) есть условие идемпотентности, которому удовлетворяет ядро \mathcal{K} . Это значит, что \mathcal{K} ведет себя подобно проекционному оператору при действии на произвольные квадратично интегрируемые функции от z (и от z^*); к представлению же гильбертова пространства¹⁾ относятся лишь те из функций, которые удовлетворяют соотношению (7.57).

Всякая функция, являющаяся представителем операторов (проще говоря, матричный элемент) $\langle z | \mathcal{B} | z' \rangle$, удовлетворяет аналогичным интегральным уравнениям. Полагая в (7.54) либо \mathcal{B}_1 , либо \mathcal{B}_2 равным I , получаем

$$\begin{aligned} \langle z | \mathcal{B} | z'' \rangle &= \frac{1}{\pi} \int d^2 z' \langle z | z' \rangle \langle z' | \mathcal{B} | z'' \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2 z' \langle z | \mathcal{B} | z' \rangle \langle z' | z'' \rangle. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Как и (7.57), соотношения (7.60) являются очевидными следствиями основного разложения единицы (7.48). Но поскольку

$$\langle z | z' \rangle \neq 0 \quad \text{при} \quad z \neq z', \quad (7.61)$$

то эти соотношения в действительности являются ограничениями, которым должны подчиняться представители векторов и операторов

Стоит отметить еще одно следствие представления такого типа. Именно, положив $\mathcal{B} = I$ в (7.56), получим

$$I = \frac{1}{\pi^2} \int d^2 z_1 d^2 z_2 |z_1\rangle \langle z_1 | z_2\rangle \langle z_2 |, \quad (7.62)$$

что следует сравнить с нашим исходным соотношением

$$I = \frac{1}{\pi} \int d^2 z |z\rangle \langle z |.$$

Мы имеем два явно различных разложения одного и того же оператора по одной и той же системе состояний; первая формула содержит суперпозицию «внешних произведений различных векторов» $|z_1\rangle \langle z_2|$, в то время как вторая — суперпозицию «внешних произведений одинако-

¹⁾ Обширная и общая теория гильбертовых пространств, основанная на воспроизводящих ядрах, была развита Аронсзайном [7.8].

вых векторов» $|z\rangle\langle z|$, т. е. проекционных операторов. Возможность существования большого числа разложений или представлений является следствием переполненности системы когерентных состояний, что проявляется в свойстве (7.61). Заметим также, что в следующей главе будет, в частности, рассматриваться аналогичная множественность разложения по когерентным состояниям для ряда других операторов.

Линейные зависимости. Одним из наиболее характерных свойств переполненной системы векторов является наличие линейной зависимости между базисными векторами. Одно из таких соотношений получается из (7.55), если положить $|\psi\rangle = |z'\rangle$:

$$|z'\rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2z |z\rangle \langle z|z'\rangle. \quad (7.63)$$

Это равенство выражает $|z'\rangle$ через все когерентные состояния.

Два других соотношения также представляют интерес. Выразим z в полярных координатах, так что [как и в (7.51)]

$$|z\rangle = |re^{i\theta}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}r^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n e^{in\theta}}{(n!)^{1/2}} |n\rangle. \quad (7.64)$$

Отсюда легко получить

$$\int_0^{2\pi} e^{ip\theta} |re^{i\theta}\rangle d\theta = 0, \quad p = 1, 2, \dots \quad (7.65)$$

Умножая на $r^p r$ и интегрируя по всем r , имеем

$$\int z^p |z\rangle d^2z = 0, \quad p = 1, 2, \dots \quad (7.66)$$

С другой стороны, любое конечное число различных когерентных состояний $|z_l\rangle$, $l = 1, 2, \dots, L$, составляет ряд линейно независимых векторов. Это значит, что равенство

$$\sum_{l=1}^L c_l |z_l\rangle = 0 \quad (7.67)$$

имеет место лишь в том случае, когда все $c_l = 0$. Доказательство этого свойства мы предоставляем читателю.

В. Примеры и специальные свойства представителей векторов и операторов по когерентным состояниям

ПРИМЕРЫ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ ВЕКТОРОВ. Рассмотрим некоторые конкретные примеры известных квантовых состояний, чтобы пояснить использование и свойства непрерывного представления по когерентным состояниям. Один из простейших примеров — собственные состояния гармонического осциллятора; каждое из них в соответствии с (7.4а) имеет свое функциональное представление

$$\langle z | n \rangle = (n!)^{-1/2} z^{*n} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right). \quad (7.68)$$

Важно понимать, чему соответствуют эти функции: их следует сопоставить с обычными функциями Эрмита, которые являются собственными функциями осциллятора в шредингеровском представлении. Как мы уже указывали, при использовании этого наиболее фундаментального представления векторам $|\psi\rangle$ соответствуют функции $\psi(x)$ одной действительной переменной, оператору Q — умножение на x , а оператору P — дифференцирование $-i\hbar\partial/\partial x$. Далее, уравнение на собственные значения энергии для гармонического осциллятора с единичными массой и угловой частотой имеет вид

$$\frac{1}{2}\left(-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 - \hbar\right)\psi(x) = E\psi(x). \quad (7.69)$$

В большинстве учебников по квантовой механике показывается, что это уравнение обладает (нормируемыми) решениями, если $E = n\hbar$, $n = 0, 1, 2, \dots$; эти решения просто связаны с функциями Эрмита, определяемыми следующим равенством:

$$h_n(y) \equiv \frac{(-1)^n}{[2^n n! \sqrt{\pi}]^{1/2}} \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) \frac{d^n}{dy^n} \exp(-y^2). \quad (7.70)$$

В частности, для нормированных собственных решений уравнения (7.69) имеем

$$\varphi_n(x) = \hbar^{-1/4} h_n(\hbar^{-1/2}x). \quad (7.71)$$

Приведем в качестве примера явное выражение $\varphi_n(x)$ при $n = 1, 2$:

$$\varphi_0(x) = (\pi\hbar)^{-1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{2\hbar}\right), \quad (7.72a)$$

$$\varphi_1(x) = (\pi\hbar)^{-1/4} \sqrt{\frac{2}{\hbar}} x \exp\left(-\frac{x^2}{2\hbar}\right). \quad (7.72б)$$

Во всяком случае, главным здесь является то обстоятельство, что абстрактные состояния, представляемые функциями Эрмита (в единицах \hbar) $\varphi_n(x)$, для каждого n совпадают с состояниями, представляемыми функциями $\langle z|n\rangle$.

Шредингеровское представление векторов является столь традиционным и играет в физике столь важную роль, что полезно иметь более общую связь между ним и представлением функциями $\langle z|\psi\rangle$. Возьмем снова запись в фазовом пространстве

$$\begin{aligned} \langle p, q|\psi\rangle &= \langle 0|e^{i(qP-pQ)/\hbar}|\psi\rangle = \\ &= \langle 0|e^{1/2iqP/\hbar}e^{-ipQ/\hbar}e^{1/2iqP/\hbar}|\psi\rangle. \end{aligned} \quad (7.73)$$

Последнее соотношение получается в результате двукратного применения соотношения (7.24). В шредингеровском представлении (7.73) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle p, q|\psi\rangle &= \int \varphi_0^*\left(x - \frac{q}{2}\right) e^{-ipx/\hbar} \psi\left(x + \frac{q}{2}\right) dx = \\ &= (\pi\hbar)^{-1/4} \int \exp\left[-\frac{(x - q/2)^2}{2\hbar} - \frac{ipx}{\hbar}\right] \psi\left(x + \frac{q}{2}\right) dx, \end{aligned} \quad (7.74)$$

где мы воспользовались соотношением

$$\exp\left(\frac{iqP}{2\hbar}\right)\psi(x) = \exp\left(\frac{1}{2}q\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) = \psi\left(x + \frac{q}{2}\right), \quad (7.75)$$

справедливым для произвольной функции $\psi(x)$. Соотношение (7.74) позволяет перевести любой шредингеровский представитель в представитель $\langle p, q|\psi\rangle$ из фазового пространства. Ясно, что и функцию $\psi(y)$ можно восстановить по $\langle p, q|\psi\rangle$ с помощью преобразования Фурье

$$\psi(y) = [2\pi\hbar\varphi_0^*(-y)]^{-1} \int \langle p, 2y|\psi\rangle dp. \quad (7.76)$$

Существует несколько соотношений такого типа, позволяющих определить $\psi(y)$.

Можно воспользоваться свойствами аналитичности для того, чтобы получить еще более простой способ нахождения $\langle p, q | \psi \rangle$. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \langle p, 0 | \psi \rangle &= (\pi\hbar)^{-1/4} \int \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar} - \frac{1/2x^2}{\hbar}\right) \psi(x) dx \equiv \\ &\equiv \exp\left(-\frac{1/4p^2}{\hbar}\right) g(p). \end{aligned} \quad (7.77)$$

Из сравнения с (7.46) видно, что $g(p) = f(-ip/\sqrt{2\hbar})$, так что в силу аналитичности f можно непосредственно найти $\langle p, q | \psi \rangle$. В частности, имеем

$$\langle p, q | \psi \rangle = \exp\left[-\frac{1}{4\hbar}(p^2 + q^2)\right] g(p + iq) \quad (7.78a)$$

или

$$\langle z | \psi \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) g(i\sqrt{2\hbar}z^*), \quad (7.78б)$$

где

$$g(p) \equiv (\pi\hbar)^{-1/4} \exp\left(\frac{1/4p^2}{\hbar}\right) \int \exp\left(-\frac{ipx}{\hbar} - \frac{1/2x^2}{\hbar}\right) \psi(x) dx. \quad (7.79)$$

В качестве иллюстрации выберем функцию

$$\psi(x) = \varphi_{0, \omega}(x) = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{1/2\omega x^2}{\hbar}\right), \quad (7.80)$$

являющуюся основным состоянием осциллятора с произвольной угловой частотой ω . Тогда, воспользовавшись основным гауссовым интегралом (при $\text{Re } A > 0$)

$$(2\pi)^{-1/2} \int \exp\left(-ixB - \frac{x^2}{2A}\right) dx = \sqrt{A} \exp\left(-\frac{1}{2}AB^2\right),$$

получаем

$$g(p) = \left[\frac{1}{2}(\omega^{1/2} + \omega^{-1/2})\right]^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{4\hbar} \frac{1-\omega}{1+\omega} p^2\right], \quad (7.81)$$

откуда (обозначая $|\psi\rangle$ через $|0_\omega\rangle$)

$$\langle z | 0_\omega \rangle = \left[\frac{1}{2}(\omega^{1/2} + \omega^{-1/2})\right]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{1}{2}|z|^2 + \frac{1}{2} \frac{1-\omega}{1+\omega} (z^*)^2\right\} \quad (7.82a)$$

или

$$\langle p, q | 0_\omega \rangle = \left[\frac{1}{2} (\omega^{1/2} + \omega^{-1/2}) \right]^{-1/2} \times \quad (7.826)$$

$$\times \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar(1+\omega)} [p^2 + \omega q^2 + i(1-\omega)pq] \right\}.$$

Если $\omega = 1$, то эти соотношения непосредственно сводятся к приведенным выше соотношениям для $|0_1\rangle = |0\rangle$.

Замечание. Следует подчеркнуть, что (7.82) не является «естественным» непрерывным представлением по когерентным состояниям для основного состояния осциллятора с частотой ω ; в естественном представлении используются основные состояния сдвинутого осциллятора, который сам имеет естественную частоту ω . Действительно, все такие естественные непрерывные представления по когерентным состояниям являются формально идентичными, если они выражены как функции z (т. е. все функции $\langle z | \psi \rangle$ совпадают), но отличаются по своему физическому содержанию в силу определения $z = (\omega^{1/2}q + i\omega^{-1/2}p)/\sqrt{2\hbar}$, используемого при построении $\langle p, q | \psi \rangle$. Ниже мы подробнее познакомимся с различными случаями такого рода, когда будем иметь дело одновременно с несколькими различными осцилляторами.

Вероятностная интерпретация $|\langle z | \psi \rangle|^2$. Сейчас самый подходящий момент для того, чтобы расширить наши представления о физическом смысле величины $|\langle z | \psi \rangle|^2$. Предположим, что мы имеем дело с материальной частицей в одномерном пространстве. Тогда, как известно, шредингеровская волновая функция $\psi(x)$ есть амплитуда вероятности (более точно, $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ есть плотность вероятности) нахождения частицы в точке x . Ясно, что такие события являются *взаимоисключающими*, т. е. в результате измерения в данный момент времени частица будет найдена в одной и только одной точке x . Следовательно, распределение $\rho(x)$ может быть в принципе почти любым.

С другой стороны, заметим прежде всего, что величина $|\langle p, q | \psi \rangle|^2$ не есть плотность вероятности того, что частица находится в точке q и имеет импульс p . Это скорее относительная частота того, что частица при измерении будет обнаружена в состоянии, соответствующем основному состоянию осциллятора, у которого средняя координата есть q , а средний импульс равен p . Квантовомеханически эти «события» не являются взаи-

моисключающими, так как в силу (7.61) два таких состояния до некоторой степени схожи. Поэтому, используя $\rho(z) = |\langle z | \psi \rangle|^2$, мы имеем дело в сущности со стохастическим описанием на основе зависимых вероятностей.

В качестве грубой классической аналогии такого описания представьте себе, что Вы с завязанными глазами стреляете, не целясь, в листы газет, лежащие на полу. Пусть $p(n)$ означает относительную вероятность того, что страница номер n будет продырявлена. Если все листы лежат отдельно и не перекрываются, то события (какой-то из листов оказался продырявленным) взаимно исключают друг друга. Однако если некоторые из листов перекрываются, то события, вообще говоря, становятся невзаимоисключающими и, как следствие этого, появляются ограничения на величины $p(n)$. Например, если листы 1 и 2 лежат точно один над другим, то заведомо будет $p(1) = p(2)$. Если не нарушены соответствующие ограничения, то такой способ стохастического описания с помощью зависимых вероятностей не содержит каких-либо неправильностей.

Возвращаясь теперь к распределению $\rho(p, q) = |\langle p, q | \psi \rangle|^2$, заметим, что для макроскопических участков фазового пространства с площадью $E \gg h = 2\pi\hbar$ выражение $\hbar^{-1} \int_E \rho(p, q) dp dq$, несмотря на зависимость вероятностей, есть достаточно точная мера вероятности найти частицу внутри ячейки E . Именно благодаря этому свойству $\rho(p, q)$ обладает многими чертами обычного классического распределения в фазовом пространстве $\rho_{\text{кл}}(p, q)$ ¹⁾.

ПРИМЕРЫ ОПЕРАТОРОВ. Обратимся теперь к некоторым операторам и посмотрим, как они выглядят и как действуют в непрерывном представлении по когерентным состояниям. Сосредоточимся вначале на представлении с помощью интегрального ядра $\langle z | \mathcal{B} | z' \rangle$ для оператора \mathcal{B} [см. (7.53) и (7.54)].

¹⁾ В таком духе распределение $\rho(p, q)$ рассматривали Хусими [7.11], Кано [7.12], Мита и Сударшан [7.10], а также Мак-Кенна и Фриш [7.13].

Для простоты предположим, что оператор \mathcal{B} диагонален в представлении по числам заполнения, т. е. $\langle n | \mathcal{B} | m \rangle = b_n \delta_{nm}$. Воспользовавшись (7.28a), получаем

$$\mathcal{B} | z' \rangle = \exp \left(-\frac{1}{2} | z' |^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z')^n}{(n!)^{1/2}} b_n | n \rangle, \quad (7.83)$$

и, следовательно,

$$\langle z | \mathcal{B} | z' \rangle = \exp \left(-\frac{1}{2} | z |^2 - \frac{1}{2} | z' |^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n (z^* z')^n}{n!} \quad (7.84)$$

есть как раз требуемое интегральное ядро. Если \mathcal{B} представляет собой эволюционный оператор осциллятора $\exp(-itN)$, то $b_n = \exp(-int)$, и мы получаем

$$\begin{aligned} \langle z | e^{-itN} | z' \rangle &= \exp \left(-\frac{1}{2} | z |^2 - \frac{1}{2} | z' |^2 \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^* e^{-it} z')^n}{n!} = \\ &= \exp \left(-\frac{1}{2} | z |^2 + z^* e^{-it} z' - \frac{1}{2} | z' |^2 \right) = \\ &= \langle z | e^{-it} z' \rangle = \langle e^{it} z | z' \rangle. \end{aligned} \quad (7.85)$$

Заметим, что матричные элементы эволюционного оператора получаются путем простого преобразования аргументов у воспроизводящего ядра $\langle z | z' \rangle$. Следствием этого является тот факт, что под действием эволюционного оператора когерентное состояние $| z \rangle$ переходит в новое когерентное состояние $| z_{\text{КЛ}}(t) \rangle \equiv | e^{-it} z \rangle$. Очевидно, что $z_{\text{КЛ}}(t) = e^{-it} z$ есть просто комплексное решение для классического осциллятора, и мы предоставляем читателю сформулировать эти соображения, пользуясь представлением о фазовом пространстве, в котором должны выполняться соотношения (7.13) и (7.14).

Рассмотрим теперь несколько более общие операторы и соответствующие им интегральные ядра. Одними из простейших являются ядра, соответствующие *нормально упорядоченным операторам*. Пусть оператор \mathcal{B} зависит от a^\dagger и a [т. е. $\mathcal{B} = \mathcal{B}(a^\dagger, a)$] таким образом, что в каждом множителе все операторы рождения a^\dagger стоят слева от всех операторов уничтожения a . Если предположить,

что \mathcal{B} разлагается в степенной ряд по a и a^\dagger , то этот ряд имеет вид

$$\mathcal{B}(a^\dagger, a) = \sum_{r, s=0}^{\infty} b_{rs} (a^\dagger)^r a^s \quad (7.86)$$

с подходящими комплексными коэффициентами b_{rs} . Тогда из (7.36) сразу вытекает

$$\begin{aligned} \langle z | \mathcal{B}(a^\dagger, a) | z' \rangle &= \mathcal{B}(z^*, z') \langle z | z' \rangle = \\ &= \sum_{r, s=0}^{\infty} b_{rs} (z^*)^r (z')^s \langle z | z' \rangle, \end{aligned} \quad (7.87)$$

причем последняя форма записи следует из (7.86), если это разложение существует.

Понятие нормально упорядоченного оператора столь важно, что полезно ввести *операцию нормального упорядочения*, обозначаемую двоеточиями справа и слева. Назначение этой операции состоит в такой перестановке операторов уничтожения и рождения в их произведениях (при полном пренебрежении их некоммутативностью!), чтобы все a^\dagger встали слева от всех a . В рассмотренном выше примере: $\mathcal{B} := \mathcal{B}$, так как по предположению оператор \mathcal{B} уже был записан в нормальной форме. Однако обычно $: \mathcal{O} : \neq \mathcal{O}$. Например, если $\mathcal{O} = aa^\dagger$, то $:aa^\dagger: \equiv \equiv a^\dagger a = aa^\dagger - 1 \neq aa^\dagger$, что следует из коммутационных соотношений.

Важно понимать, что нормальное упорядочение есть в сущности соотношение между символами и что результирующий оператор зависит от исходного символического представления оператора \mathcal{O} . Например, хотя $[a, a^\dagger] = 1$, но для $: [a, a^\dagger] :$ имеем $: [a, a^\dagger] : = 0$, что отличается от $: 1 : = 1$. Поэтому, чтобы определить $: \mathcal{O} :$, нужно принять некоторую конкретную символическую форму для \mathcal{O} . Проще и логичнее всего выбрать символическую форму для \mathcal{O} , отвечающую некоторой заранее заданной функциональной форме $\mathcal{O} = \mathcal{O}(a^\dagger, a)$. Тогда будет выполняться соотношение

$$\langle z | : \mathcal{O}(a^\dagger, a) : | z' \rangle \equiv \mathcal{O}(z^*, z') \langle z | z' \rangle. \quad (7.88)$$

Поскольку произвольный оператор \mathcal{W} может быть представлен в виде $\mathcal{W}(a^\dagger, a)$, то ясно, что подходящими

перестановками символов (учитывая должным образом соотношение $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$) оператор \mathcal{W} можно превратить в нормально упорядоченный. Иными словами, для каждого оператора \mathcal{W} существует соответствующий оператор $\mathcal{W}_n(a^\dagger, a)$, такой, что $\mathcal{W} = : \mathcal{W}_n :$. Это представление удобно для некоторых применений, и ниже мы опишем способ, который в ряде случаев помогает определить \mathcal{W}_n .

Для некоторых \mathcal{O} мы можем записать $: \mathcal{O} :$ в явном виде с помощью более привычных операторных выражений. Для этих целей оказывается полезной следующая производящая формула:

$$\begin{aligned} : \exp(za^\dagger - z^*a) : &= \exp(za^\dagger) \exp(-z^*a) = \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp(za^\dagger - z^*a), \end{aligned} \quad (7.89)$$

выполняющаяся в силу (7.26). Рассмотрим, в частности, пример $\mathcal{O}(a^\dagger, a) = \exp(\tau a^\dagger a)$, для которого имеем

$$\begin{aligned} \langle z | : \exp(\tau a^\dagger a) : | z' \rangle &\equiv \exp(\tau z^* z') \langle z | z' \rangle = \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}|z|^2 + (1 + \tau)z^* z' - \frac{1}{2}|z'|^2\right]. \end{aligned} \quad (7.90)$$

Если сравнить это выражение с (7.85) и положить $(1 + \tau) \equiv e^{-it}$ или $-it \equiv \ln(1 + \tau)$, то получим

$$: \exp(\tau a^\dagger a) : = \exp[\ln(1 + \tau)(a^\dagger a)], \quad (7.91a)$$

или, что эквивалентно,

$$: \exp[(e^{-it} - 1)a^\dagger a] : = \exp[-it(a^\dagger a)]. \quad (7.91b)$$

Очевидно, если $\tau \rightarrow -1$ (или если $it \rightarrow +\infty$), то

$$: \exp(-a^\dagger a) : = |0\rangle\langle 0|. \quad (7.92)$$

Представление с помощью дифференциальных операторов. Помимо представления различных операторов с помощью интегральных ядер существует другое весьма важное их представление. Рассмотрим сначала оператор a^\dagger . Из (7.35) следует

$$\langle z | a^\dagger | \psi \rangle = z^* \langle z | \psi \rangle.$$

Это показывает, что в пространстве представления функциями $\langle z | \psi \rangle$ оператор a^\dagger представляется умножением

на z^* . (Грубой аналогией этого является шредингеровское представление, где Q представляется умножением на x .) Чтобы найти столь же простое представление для a , заметим прежде всего, что в силу явного вида $\langle z|z'\rangle$ имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \langle z|a|z'\rangle &= z' \langle z|z'\rangle = \\ &= z' \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + z^*z' - \frac{1}{2}|z'|^2\right) = \\ &= \left(\frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 + z^*z' - \frac{1}{2}|z'|^2\right) = \\ &= \left(\frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \langle z|z'\rangle. \end{aligned} \quad (7.93)$$

Но последнее выражение в (7.93) справедливо, очевидно, и для произвольной линейной суммы $\sum c_p |z'_p\rangle$. В свою очередь отсюда следует, что $\langle z|a|\psi\rangle = (z/2 + \partial/\partial z^*) \langle z|\psi\rangle$; это означает, что в пространстве функций $\langle z|\psi\rangle$ оператор a можно представить дифференциальным оператором $(z/2 + \partial/\partial z^*)$. (Грубой аналогией этого является оператор $P = -i\hbar d/dx$ в шредингеровском представлении.) Следовательно, в этом представлении основное коммутационное соотношение принимает вид

$$\langle z|[a, a^\dagger]|\psi\rangle = \left[\frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial z^*}, z^*\right] \langle z|\psi\rangle = \langle z|\psi\rangle. \quad (7.94)$$

В более общей формулировке можно сказать, что действие произвольного оператора $\mathcal{W}^\circ = \mathcal{W}^\circ(a^\dagger, a)$ представляется с помощью соответствующего дифференциального оператора в частных производных, а именно

$$\langle z|\mathcal{W}^\circ(a^\dagger, a)|\psi\rangle = \mathcal{W}^\circ\left(z^*, \frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \langle z|\psi\rangle. \quad (7.95)$$

Далее, если воспользоваться записью $\langle z|\psi\rangle = \exp(-1/2|z|^2)f(z^*)$ и операторным тождеством

$$\exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) \frac{\partial}{\partial z^*} \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) = \frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{z}{2}, \quad (7.96)$$

то легко получить

$$\begin{aligned} \langle z | \mathcal{W}^\rho(a^\dagger, a) | \psi \rangle &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \mathcal{W}^\rho\left(z^*, \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \times \\ &\times \exp\left(\frac{1}{2}|z|^2\right) \langle z | \psi \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \mathcal{W}^\rho\left(z^*, \frac{\partial}{\partial z^*}\right) f(z^*). \end{aligned} \quad (7.97)$$

В качестве примера применения этих формул получим еще раз свойства эволюционного оператора $\exp(-ita^\dagger a)$. В частности, с помощью тождества (7.55) находим

$$\begin{aligned} \langle z | \exp[-it(a^\dagger a)] | \psi \rangle &= \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp\left(-itz^* \frac{\partial}{\partial z^*}\right) f(z^*) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \exp\left(-it \frac{\partial}{\partial \ln z^*}\right) f(\exp[\ln z^*]) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) f(\exp[\ln z^* - it]) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) f(e^{-it} z^*) = \langle e^{it} z | \psi \rangle, \end{aligned} \quad (7.98)$$

что справедливо в силу последнего равенства в формуле (7.85).

Запись через дифференциальные операторы (7.95) можно, разумеется, применить для получения матричных элементов оператора \mathcal{W}^ρ по когерентным состояниям, если положить $|\psi\rangle = |z'\rangle$. В частности,

$$\langle z | \mathcal{W}^\rho(a^\dagger, a) | z' \rangle = \mathcal{W}^\rho\left(z^*, \frac{z}{2} + \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \langle z | z' \rangle. \quad (7.99)$$

В этом выражении частные производные действуют на все стоящие справа от них члены; среди таких имеются z^* из $\langle z | z' \rangle$, а также, возможно, некоторые множители z^* из самого оператора \mathcal{W}^ρ . Поскольку для $\langle z | z' \rangle$ имеется явное выражение, можно воспользоваться операторным тождеством

$$(\langle z | z' \rangle)^{-1} \frac{\partial}{\partial z^*} \langle z | z' \rangle = \frac{\partial}{\partial z^*} - \frac{z}{2} + z' \quad (7.100)$$

[аналогичным (7.96)], чтобы найти явные выражения для некоторых производных. Именно, получаем

$$\langle z | \mathcal{W}^\rho(a^\dagger, a) | z' \rangle = \langle z | z' \rangle \mathcal{W}^\rho\left(z^*, z' + \frac{\partial}{\partial z^*}\right), \quad (7.101)$$

где оставшиеся производные действуют как раз на те z^* , которые содержатся в самом \mathscr{W} . Ясно, что если оператор \mathscr{W} нормально упорядочен (все a расположены справа), то в выражении для \mathscr{W} все производные стоят справа от всех z^* и дают нуль, поскольку действуют лишь на члены, не зависящие от z^* . В этом случае мы лишь снова получили выражение (7.87) для матричных элементов нормально упорядоченных операторов. Однако соотношения (7.99) и (7.101) выполняются независимо от того, является ли оператор \mathscr{W} нормально упорядоченным.

Диагональные матричные элементы. Отметим теперь еще одно фундаментальное следствие, вытекающее из общих свойств когерентных состояний, которое легче всего получить из свойств аналитичности. Предположим, что диагональные матричные элементы оператора \mathscr{W} равны нулю:

$$\langle z | \mathscr{W} | z \rangle = 0 \quad (7.102)$$

при всех z . Что отсюда следует? Для операторов \mathscr{W} разумного вида произвольные матричные элементы равны

$$\begin{aligned} \langle z | \mathscr{W} | z' \rangle = \\ = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2 - \frac{1}{2}|z'|^2\right) \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{(z^*)^n (z')^m}{(n! m!)^{1/2}} \langle n | \mathscr{W} | m \rangle, \end{aligned} \quad (7.103)$$

откуда видно, что для выполнения условия (7.102) целая функция двух комплексных переменных z^* и z' (а именно двойной ряд) должна равняться нулю на подмножестве $z' = z$. Однако из теории функций нескольких комплексных переменных известно, что если такая функция двух переменных равна нулю на подмножестве $z' = z$ при всех z (или даже при z из определенных последовательностей!), то она равна нулю тождественно. Другими словами, если $\langle z | \mathscr{W} | z \rangle = 0$ при всех z , то $\langle z | \mathscr{W} | z' \rangle = 0$ при всех z и z' , и это просто означает, что $\mathscr{W} \equiv 0$. Обратная теорема очевидна.

Отсюда следует важный вывод, состоящий в том, что оператор \mathscr{W} однозначно определяется своими диагональными матричными элементами $\mathscr{W}(z) \equiv \langle z | \mathscr{W} | z \rangle$ или в нашем фазовом пространстве величиной $W(p, q) \equiv \langle p, q | \mathscr{W} | p, q \rangle$. Таким образом, операторы \mathscr{W} могут

быть представлены соответствующими функциями $W(z)$. [Следует отчетливо понимать, что когда мы представляем операторы \mathscr{W} функциями $W(z) = \langle z | \mathscr{W} | z \rangle$, мы имеем дело с совершенно другим видом «представления», чем то, в котором мы представляем векторы $|\psi\rangle$ функциями $\psi(z) = \langle z | \psi \rangle$.]

Теперь, установив единственность диагональных матричных элементов как представителей операторов, отметим некоторые их свойства. Для данного оператора $\mathscr{W}(a^\dagger, a)$ диагональные матричные элементы можно получить непосредственно из (7.101), если положить $z' = z$:

$$\langle z | \mathscr{W}(a^\dagger, a) | z \rangle = \mathscr{W}\left(z^*, z + \frac{\partial}{\partial z^*}\right). \quad (7.104)$$

Наряду с этим положим $z' = z$ в (7.88). Это дает

$$\langle z | : \mathcal{O}(a^\dagger, a) : | z \rangle = \mathcal{O}(z^*, z). \quad (7.105)$$

Содержание последних двух соотношений можно выразить одним соотношением, написав

$$\begin{aligned} \langle z | \mathscr{W}(a^\dagger, a) | z \rangle &= \mathscr{W}\left(z^*, z + \frac{\partial}{\partial z^*}\right) \equiv \\ &\equiv \mathscr{W}_n(z^*, z) = \langle z | : \mathscr{W}_n(a^\dagger, a) : | z \rangle, \end{aligned} \quad (7.106)$$

где \mathscr{W}_n есть соответствующая функция z^* и z , возникающая после выполнения дифференцирований $\partial/\partial z^*$ внутри \mathscr{W} [так, как если бы справа от $\mathscr{W}(z, z^* + \partial/\partial z^*)$ в (7.104) стояла «единица»]. Соотношение (7.106) дает логически простой рецепт для перехода от оператора $\mathscr{W}(a^\dagger, a)$ к тому же самому оператору, но записанному теперь в нормальной форме, а именно

$$: \mathscr{W}_n(a^\dagger, a) : = \mathscr{W}(a^\dagger, a). \quad (7.107)$$

Например, если $\mathscr{W} = aa^\dagger$, то

$$\begin{aligned} \langle z | aa^\dagger | z \rangle &= \left(z + \frac{\partial}{\partial z^*}\right) z^* = zz^* + 1 \equiv \mathscr{W}_n(z^*, z) = \\ &= \langle z | : (aa^\dagger + 1) : | z \rangle, \end{aligned}$$

откуда следует уже известное равенство $aa^\dagger = a^\dagger a + 1$.

Соотношения приведенного выше типа, позволяющие получать нормально упорядоченные формы операторов, фактически в квантовую теорию поля впервые ввел Андерсон [7.14]. В последние годы их использование в квантовых задачах теории когерентности изучали Луиселл [7.2], Лэкс [7.15] и другие. Главную особенность подхода этих авторов можно охарактеризовать, если обратиться к операторному уравнению $i\hbar(\partial/\partial t)U(t) = \mathcal{H}U(t)$ [ср. (6.13)], которому подчиняется эволюционный оператор $U(t)$. Это операторное уравнение можно представить в виде дифференциального уравнения в частных производных с помощью следующей цепочки равенств:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_n(z^*, z, t) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle z | U(a^\dagger, a, t) | z \rangle = \\ &= \langle z | \mathcal{H}(a^\dagger, a) U(a^\dagger, a, t) | z \rangle = \\ &= \mathcal{H}\left(z^*, z + \frac{\partial}{\partial z^*}\right) U\left(z^*, z + \frac{\partial}{\partial z^*}, t\right) = \\ &= \mathcal{H}\left(z^*, z + \frac{\partial}{\partial z^*}\right) U_n(z^*, z, t). \end{aligned} \quad (7.108)$$

Используя решение этого уравнения U_n , можно непосредственно записать нормально упорядоченную форму оператора U :

$$U(a^\dagger, a, t) = : U_n(a^\dagger, a, t) :. \quad (7.109)$$

На этом мы заканчиваем наше рассмотрение примеров и свойств векторов и операторов в непрерывных представлениях по когерентным состояниям. Необходимо добавить, что мы рассматривали операторы в основном эвристически, игнорируя все вопросы об области применимости. Совершенно ясно, однако, что наши замечания применимы ко всякому ограниченному оператору, а также к неограниченным операторам с достаточно хорошим поведением, например ко всем многочленам по a и a^\dagger . Нетрудно придумать операторы, к которым наше рассмотрение не приложимо; например, уже в (7.83) и (7.84) возникают трудности для таких операторов \mathcal{B} , у которых $b_n = (n!)^\sigma$ с $\sigma \geq 1/2$. Читателю предлагается также обдумать менее очевидные трудности, возникающие при $1 > \sigma \geq 1/2$.

Г. Связь с пространствами Сегала — Баргманна

Выше мы уже отмечали, что каждой функции $\psi(z)$ с помощью определенного множителя сопоставляется целая аналитическая функция z^* , а именно

$$\langle z | \psi \rangle = \psi(z) = \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) f(z^*).$$

Очевидно, $f(z^*)$ однозначно определяет $\psi(z)$ и наоборот. Следовательно, мы можем рассматривать саму аналитическую функцию $f(z^*)$ как функциональный представитель абстрактного вектора $|\psi\rangle$. Каждый член этого функционального представления является целой аналитической функцией. Если $f_j(z^*)$ есть целая аналитическая функция, соответствующая вектору $|\psi_j\rangle$, то скалярное произведение можно определить, очевидно, цепочкой равенств

$$\begin{aligned} \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle &= \frac{1}{\pi} \int d^2z \langle \psi_1 | z \rangle \langle z | \psi_2 \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} \int d^2z [f_1(z^*)]^* \exp(-|z|^2) f_2(z^*) \equiv \\ &\equiv \int [f_1(z^*)]^* f_2(z^*) d\mu, \end{aligned} \quad (7.110)$$

где мы положили

$$d\mu \equiv (\pi)^{-1} \exp(-|z|^2) d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z). \quad (7.111)$$

Интуитивно ясно, что, приняв (7.110) в качестве определения скалярного произведения, мы образовали гильбертово пространство, составленное из целых функций $f(z^*)$. Такие пространства использовались Сегалом [7.5] и Баргманном [7.6] в различных квантовых задачах, их свойства подробно рассмотрены в статье Баргманна [7.6]¹⁾.

Связь между пространствами Сегала — Баргманна и непрерывными представлениями по когерентным состояниям была отмечена Швебером [7.7]. Простая связь между $\langle z | \psi \rangle$ и $f(z^*)$ показывает, что многие черты непрерывных представлений по когерентным состояниям при-

¹⁾ В цитированных работах обычно используется обозначение $f(z)$ для функции, которую мы обозначаем через $f(z^*)$.

сущи также и пространствам Сегала — Баргманна и что не совпадают лишь очень немногие свойства. Из всех этих характерных черт упомянем лишь, что свойства аналитичности, находящиеся, очевидно, на первом плане в формулировке Сегала — Баргманна, позволили Баргманну внести некоторую ясность в вопрос о переполненности системы когерентных состояний $|z\rangle$.

Баргманн называет характеристическим набором \mathfrak{S}^* комплексных значений z^* набор, удовлетворяющий следующему условию: если $f(z^*) = 0$ при всех $z^* \in \mathfrak{S}^*$, то $f(z^*) = 0$ для всех z^* . Это означает соответственно, что если $\psi(z) = 0$ при всех $z \in \mathfrak{S}$, то $|\psi\rangle = 0$ ¹⁾. Баргманн приводит два примера характеристических наборов. а) Любой бесконечный набор точек в комплексной плоскости, сходящийся к конечному пределу. Этот пример прямо вытекает из свойств аналитичности и включает в себя в качестве частных случаев более привычные примеры, а именно отрезок линии или открытую последовательность в комплексной плоскости. б) Любая бесконечная последовательность a_ν , $a_\nu \neq 0$, такая, что

$$\sigma = \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{-2-\eta} = \infty \quad (7.112)$$

для некоторого $\eta > 0$. Этот пример построен с учетом свойств, которыми обладают целые аналитические функции, удовлетворяющие условию (7.47).

Заметим, что найденный фон Нейманом характеристический (т. е. «полный») набор, определенный соответствующей квадратной решеткой точек в комплексной плоскости (о котором мы уже упоминали), есть третий пример характеристического набора, не являющийся частным случаем примеров «а» или «б».

За недостатком места мы не останавливаемся на интересном использовании когерентных состояний и связанных с ними величин в качестве производящих функций для различных состояний и операторов. Эта идея разрабатывалась еще Фоком на заре квантовой теории.

¹⁾ По нашей физической терминологии набор векторов $\{|z\rangle\}$; $z \in \mathfrak{S}$ является полным.

Она же лежит в основе элегантного подхода Швингера к квантовой теории поля, до известной степени сходного с упоминавшимся в гл. 4.

§ 3. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Свойства когерентных состояний для нескольких степеней свободы являются прямыми обобщениями наших предыдущих замечаний, относившихся к одной степени свободы. Мы ограничимся некоторыми определениями и вопросами размерности, предоставляя остальное воображению читателя.

Пусть мы имеем дело с K степенями свободы; им соответствуют операторы числа квантов $N_k = a_k^\dagger a_k$, $k = 1, 2, \dots, K$ и их общий набор нормированных собственных векторов

$$|n_1, n_2, \dots, n_K\rangle = |\{n_k\}\rangle,$$

введенных выше [см. (5.70)]. Тогда соответствующие когерентные состояния зависят от K комплексных переменных и по аналогии с (7.1) определяются соотношением

$$\begin{aligned} |z_1, z_2, \dots, z_K\rangle &= |\{z_k\}\rangle = \\ &= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k'=1}^K \exp\left(-\frac{1}{2}|z_{k'}|^2\right) \frac{(z_{k'})^{n_{k'}}}{(n_{k'}!)^{1/2}} \right\} |\{n_k\}\rangle \quad (7.113) \end{aligned}$$

вместе с очевидным определением сопряженных векторов $\langle\{z_k\}|$.

Эти состояния являются, разумеется, основными состояниями K независимых сдвинутых осцилляторов при соответствующих внешних силах. Аналогично $|\{z_k\}\rangle$ является общим собственным вектором операторов $a_{k'}$:

$$a_{k'} |\{z_k\}\rangle = z_{k'} |\{z_k\}\rangle \quad (7.114)$$

для всех $k' = 1, 2, \dots, K$.

Перекрытие двух когерентных состояний есть просто

$$\begin{aligned} \langle \{z_k\} | \{z'_k\} \rangle &= \prod_{k=1}^K \exp \left\{ -\frac{1}{2} |z_k|^2 + z_k^* z'_k - \frac{1}{2} |z'_k|^2 \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{2} |z_k|^2 - z_k^* z'_k + \frac{1}{2} |z'_k|^2 \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\sum_{k=1}^K \left[\frac{1}{2} |z_k - z'_k|^2 - i \operatorname{Im} (z_k^* z'_k) \right] \right\}, \quad (7.115) \end{aligned}$$

где последнее равенство следует непосредственно из (7.31). Нормированность и непрерывность состояний $|\{z_k\}\rangle$ и аналитичность функций $f(\{z_k^*\}) \equiv \exp(i/2 \sum |z_k|^2) \langle \{z_k\} | \psi \rangle$ также получаются сразу.

Основная формула (7.48) для разложения единицы записывается в следующей более общей форме:

$$I = \frac{1}{\pi^K} \int \dots \int |\{z_k\}\rangle \langle \{z_k\}| \prod_{k=1}^K d^2 z_k, \quad (7.116)$$

где $d^2 z_k = d(\operatorname{Re} z_k) d(\operatorname{Im} z_k)$ и интегрирование распространяется на все $2K$ -мерное пространство. Доказательство этого разложения проводится аналогично доказательству для случая одной степени свободы. Удобно записать π^{-K} и элемент объема более компактно:

$$\pi^{-K} \prod_{k=1}^K d^2 z_k = d\mu(\{z_k\}), \quad (7.117)$$

так что (7.116) просто принимает вид

$$I = \int |\{z_k\}\rangle \langle \{z_k\}| d\mu(\{z_k\}). \quad (7.118)$$

Весь аппарат непрерывного представления можно ввести с помощью (7.118). Формула для скалярного произведения записывается следующим образом:

$$\langle \lambda | \psi \rangle = \int \langle \lambda | \{z_k\} \rangle \langle \{z_k\} | \psi \rangle d\mu(\{z_k\}) \quad (7.119)$$

и т. д. У операторов существуют оба представления: с помощью интегральных ядер и с помощью дифференциальных операторов. Заметим, что операция нормального упорядочения $::$ обобщается так, что все операторы рождения a_k^\dagger должны стоять слева от *всех* операторов уничтожения $a_{k'}$ в каждом множителе.

Здесь мы хотели бы обратить внимание на ту роль, которую играют круговые частоты ω_k в задаче с несколькими гармоническими осцилляторами. Когда мы имеем дело одновременно с несколькими гармоническими осцилляторами, мы, вообще говоря, не можем путем выбора единиц сделать все круговые частоты равными единице. Поэтому удобнее всего показать явно роль каждой из частот ω_k .

Операторы физических «координат» и «импульсов» Q_k и P_k связаны с a_k и a_k^\dagger соотношениями (5.68). Аналогичным образом можно ввести фазовое пространство для K степеней свободы с помощью разложения

$$z_k \equiv \left(\frac{\omega_k}{2\hbar}\right)^{1/2} q_k + i\left(\frac{1}{2\omega_k\hbar}\right)^{1/2} p_k \quad (7.120)$$

для каждого k . Как обычно, определим $|\{p_k, q_k\}\rangle = |\{z_k\}\rangle$. В этих переменных функциональный представитель состояния $|0\rangle = |\{0\}\rangle$, отвечающего основному состоянию по каждому из K осцилляторов, имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_0(\{p_k, q_k\}) &= \langle\{p_k, q_k\} | 0\rangle = \\ &= \exp\left[-\frac{1}{4\hbar} \sum_{k=1}^K (\omega_k^{-1} p_k^2 + \omega_k q_k^2)\right]. \end{aligned} \quad (7.121)$$

Если переписать это выражение несколько иначе:

$$\exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \left[\frac{1/2(p_k^2 + \omega_k^2 q_k^2)}{\hbar\omega_k}\right]\right\},$$

то оно принимает легко запоминающуюся форму:

$$\begin{aligned} \text{Основное состояние} &= \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{2} \sum_{\text{осцил}} \left[\frac{\text{(Энергия классического осциллятора)}}{\text{(Расстояние между квантовыми уровнями)}}\right]\right\}. \end{aligned} \quad (7.122)$$

Стоит отметить небольшую отличительную особенность разложения единицы (7.118), записанного в фазовом пространстве. В частности,

$$I = \int |\{p_k, q_k\}\rangle \langle\{p_k, q_k\}| d\mu(\{p_k, q_k\}), \quad (7.123)$$

где, как непосредственно следует из (7.117) и (7.120),

$$d\mu(\{p_k, q_k\}) = \prod_{k=1}^K \frac{dp_k dq_k}{2\pi\hbar} \quad (7.124)$$

и интегрирование распространяется по всему K -мерному фазовому пространству. С помощью этого соотношения нетрудно проверить, что функция (7.121) удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} 1 &= \int \langle 0|\{p_k, q_k\rangle \langle\{p_k, q_k\}| 0\rangle d\mu(\{p_k, q_k\}) = \\ &= \int |\varphi_0(\{p_k, q_k\})|^2 d\mu(\{p_k, q_k\}). \end{aligned} \quad (7.125)$$

§ 4. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЧИСЛА СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМУ ПОЛЮ

А. Общие свойства

Теперь произведем переход ($K \rightarrow \infty$) к бесконечному числу степеней свободы, необходимому для описания электромагнитного поля. Как и в гл. 5, осуществим этот переход в предположении, что

$$N = \sum_{k=1}^{\infty} N_k \quad (7.126)$$

и

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{\infty} \hbar\omega_k N_k \quad (7.127)$$

являются хорошо определенными операторами. Как уже отмечалось в гл. 5, для этого достаточно, чтобы каждое из общих собственных состояний операторов числа квантов

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = |\{n_k\}\rangle \quad (7.128)$$

удовлетворяло условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} n_k < \infty; \quad (7.129)$$

иначе говоря, их множество должно быть счетным.

Чтобы определить когерентные состояния для бесконечного числа степеней свободы, рассмотрим сначала состояние вида

$$|A\rangle \equiv \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{(z_{k'})^{n_{k'}}}{(n_{k'}!)^{1/2}} \right\} |\{n_k\}\rangle \quad (7.130)$$

и посмотрим, при каких значениях z_k оно является настоящим вектором. Из свойств ортогональности $|\{n_k\}\rangle$ получаем

$$\begin{aligned} \langle A | A \rangle &= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \prod_{k'=1}^{\infty} \frac{|z_{k'}|^{2n_{k'}}}{(n_{k'}!)} = \\ &= \prod_{k'=1}^{\infty} \sum_{n_{k'}=0}^{\infty} \frac{|z_{k'}|^{2n_{k'}}}{(n_{k'}!)} = \exp \left\{ \sum_{k'=1}^{\infty} |z_{k'}|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (7.131)$$

Чтобы выражение (7.131) было конечным, величины $\{z_k\}$ должны удовлетворять неравенству

$$\sum_{k'=1}^{\infty} |z_{k'}|^2 < \infty. \quad (7.132)$$

Поскольку все векторы должны иметь конечную норму, в последующем изложении мы будем считать условие (7.132) выполненным. Отсюда, очевидно, вытекает следующее фундаментальное следствие: допустимые последовательности $\{z_k\}$ сами образуют гильбертово пространство \mathfrak{Z} (отличающееся от квантовомеханического гильбертова пространства \mathfrak{S}) со скалярным произведением

$$(\{z_k\}, \{z'_k\}) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} z_k^* z'_k \quad (7.133a)$$

и квадратом нормы

$$\|\{z_k\}\|^2 = (\{z_k\}, \{z_k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^2. \quad (7.133б)$$

Иными словами, аргумент $\{z_k\}$ вектора гильбертова пространства $|\{z_k\}\rangle \in \mathfrak{H}$ сам является вектором другого, по-прежнему бесконечномерного, гильбертова пространства: $\{z_k\} \in \mathfrak{Z}$. В некоторых случаях нам придется представлять вектор из пространства \mathfrak{Z} не в виде последовательности $\{z_k\}$, а в другой форме.

Имея постоянно в виду ограничение (7.132), можно теперь определить в качестве искомым когерентных состояний векторы

$$\begin{aligned} |z_1, z_2, \dots\rangle &= |\{z_k\}\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{k'=1}^{\infty} |z_{k'}|^2\right) |A\rangle = \\ &= \sum_{\{n_k\}=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k'=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} |z_{k'}|^2\right) \frac{(z_{k'})^{n_{k'}}}{(n_{k'}!)^{1/2}} \right\} |\{n_k\}\rangle \end{aligned} \quad (7.134)$$

наряду с их сопряженными $\langle\{z_k\}|$.

Состояния $|\{z_k\}\rangle$ являются не только основными состояниями сдвинутых осцилляторов, но и общими собственными векторами операторов

$$a_{k'} |\{z_k\}\rangle = z_{k'} |\{z_k\}\rangle \quad (7.135)$$

для любого $k' = 1, 2, \dots$. В силу (7.132) получаем

$$\lim_{k' \rightarrow \infty} a_{k'} |\{z_k\}\rangle = \lim_{k' \rightarrow \infty} z_{k'} |\{z_k\}\rangle = 0. \quad (7.136)$$

Отсюда вытекает, что для достаточно больших значений k любое когерентное состояние имеет приблизительно тот же вид, что и основное состояние осциллятора. С другой стороны, для любого наперед заданного значения k' существуют когерентные состояния со сколь угодно большим значением $z_{k'}$.

Перекрытие двух таких когерентных состояний определяется пределом выражения (7.115) при $K \rightarrow \infty$, откуда получаем

$$\begin{aligned} \langle \{z_k\} | \{z'_k\} \rangle &= \prod_{k=1}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} |z_k|^2 + z_k^* z'_k - \frac{1}{2} |z'_k|^2 \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} |z_k|^2 - z_k^* z'_k + \frac{1}{2} |z'_k|^2 \right] \right\} = \\ &= \exp \left\{ -\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} |z_k - z'_k|^2 - i \operatorname{Im} (z_k^* z'_k) \right] \right\}. \quad (7.137) \end{aligned}$$

Все вопросы сходимости бесконечных произведений и интегралов связаны, конечно, с выполнением фундаментального ограничения (7.132).

Вычисления, аналогичные проведенным после соотношения (7.40), показывают, что

$$\| \{z_k\} - \{z'_k\} \|^2 \leq 2 (\| \{z_k\} \| + \| \{z'_k\} \|) \cdot \| \{z_k - z'_k\} \|. \quad (7.138)$$

Следовательно, два когерентных состояния близки, если отвечающие им последовательности $\{z_h\}$ близки как векторы в \mathfrak{Z} . Из этого свойства вытекает важное следствие, имеющее физический смысл. Пусть задан вектор $\{z_h\}$ с $z_h \neq 0$ при всех k . Из физических соображений можно предположить, что состояние $\{z_h\}$ приближенно можно заменить на состояние $\{z'_k\}$, для которого $z_k \equiv z'_k$ для $k \leq M$ и $z'_k \equiv 0$ для $k > M$ при достаточно большом M . Назовем такую последовательность *усеченной последовательностью* и обозначим ее $\{z_{k,M}\}$. Это значит, что

$$z_{k,M} \equiv z_k \quad (k \leq M), \quad z_{k,M} \equiv 0 \quad (k > M). \quad (7.139)$$

Тогда из (7.138) и из неравенства $\| \{z_{k,M}\} \| \leq \| \{z_k\} \|$ следует

$$\| \{z_k\} - \{z_{k,M}\} \|^2 \leq 4 \| \{z_k\} \| \left\{ \sum_{k=M+1}^{\infty} |z_k|^2 \right\}^{1/2}. \quad (7.140)$$

Эту величину действительно можно сделать произвольно малой при достаточно больших M , что подтверждает наше интуитивное предположение.

Основные функции в непрерывном представлении по когерентным состояниям даются выражением

$$\psi(\{z_k\}) = \langle \{z_k\} | \psi \rangle \quad (7.141)$$

для любого $|\psi\rangle \in \mathfrak{H}$. Поскольку состояния $|\{n_k\}\rangle$ образуют полную систему, то таким свойством обладают и когерентные состояния. В действительности, как и раньше, системы когерентных состояний переполнены. Для одной степени свободы мы отмечали, что для нахождения полных правильных подмножеств когерентных состояний можно воспользоваться соображениями аналитичности. Те же аргументы применимы, очевидно, и для случая нескольких степеней свободы, а также и для конечного числа из бесконечного множества степеней свободы в проведенном выше рассмотрении. Мы хотим, однако, заострить внимание на полном правильном подмножестве состояний другого вида, которые возникают лишь в случае бесконечного числа степеней свободы.

Пусть известно, что

$$\psi(\{z_{k,M}\}) = 0 \quad (7.142)$$

для всех $\{z_k\}$ и для всех M , т. е. для всех усеченных последовательностей. Тогда для произвольного состояния $|\{z_k\}\rangle$ отсюда следует

$$\begin{aligned} |\langle \{z_k\} | \psi \rangle| &\leq |\langle \{z_{k,M}\} | \psi \rangle| + |(\langle \{z_k\} | - \langle \{z_{k,M}\} |) | \psi \rangle| \leq \\ &\leq \| |\{z_k\}\rangle - |\{z_{k,M}\}\rangle \| \cdot \| |\psi\rangle \| \leq \\ &\leq 2 \| |\psi\rangle \| \cdot \| \{z_k\} \|^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{k=M+1}^{\infty} |z_k|^2 \right\}^{1/4}. \end{aligned} \quad (7.143)$$

Последняя величина при достаточно больших M может быть сделана сколь угодно малой. Короче говоря, из (7.142) вытекает, что $\psi(\{z_k\})$, а следовательно, и $|\psi\rangle$ обращается в нуль для всех последовательностей $\{z_k\}$. Нетрудно сформулировать более общее утверждение, состоящее в том, что $|\psi\rangle$ определяется значениями

$\psi(\{z_k\})$ для любого множества последовательностей $\{z_k\}$, которое плотно в \mathfrak{Z} .

«Разложение единицы». Перейдем к обобщению нашего обычного разложения единицы по когерентным состояниям на случай бесконечного числа степеней свободы и к определению соответствующего скалярного произведения для функционального представления. По аналогии с (7.118) и (7.119) естественно было бы ожидать, что искомые соотношения запишутся следующим образом:

$$I = \int |\{z_k\}\rangle \langle\{z_k\}| d\mu(\{z_k\}) \quad (7.144)$$

и

$$\langle\lambda|\psi\rangle = \int \langle\lambda|\{z_k\}\rangle \langle\{z_k\}|\psi\rangle d\mu(\{z_k\}). \quad (7.145)$$

Однако в написанном виде эти соотношения совершенно не определены, так как здесь необходимо вычислять интеграл по бесконечному числу переменных. Из интуитивных соображений следует, что должно выполняться соотношение

$$\langle\lambda|\psi\rangle = \lim_{M \rightarrow \infty} \int \langle\lambda|\{z_{k,M}\}\rangle \langle\{z_{k,M}\}|\psi\rangle d\mu(\{z_{k,M}\}), \quad (7.146)$$

где

$$d\mu(\{z_{k,M}\}) \equiv \pi^{-M} \prod_{k=1}^M d^2 z_k. \quad (7.147)$$

Интуитивное обоснование соотношения (7.146) состоит просто в следующем. Поскольку мы имеем дело лишь с непрерывными функциями $\langle\{z_k\}|\psi\rangle$ и т. д., всякая функция, как отмечалось выше, полностью определяется своими значениями на плотном подмножестве. Интеграл (7.146) определен просто как предел последовательности интегралов, у которых подынтегральные выражения вычислены на плотной последовательности при M , становящемся сколь угодно большим.

Суть доказательства соотношения (7.146) можно сформулировать так. Введем сначала последователь-

ность проекционных операторов P_M , $M = 1, 2, \dots$, каждый из которых определяется свойством

$$\langle \{z_k\} | P_M | \{z'_k\} \rangle = \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|z_k|^2 + |z'_k|^2) + \sum_{k=1}^M z_k^* z'_k \right]. \quad (7.148)$$

Грубо говоря, это означает, что P_M есть оператор проектирования на основное состояние для всех степеней свободы с $k > M$. Отсюда ясно, что $P_M P_{M'} = P_{M'} P_M = P_M$ при $M \leq M'$ и что

$$\lim_{M \rightarrow \infty} P_M = I. \quad (7.149)$$

Далее, прямые вычисления гауссовых интегралов дают

$$\int \langle \{z'_k\} | \{z_{k,M}\} \rangle \langle \{z_{k,M}\} | \{z''_k\} \rangle d\mu(\{z_{k,M}\}) = \langle \{z'_k\} | P_M | \{z''_k\} \rangle \quad (7.150)$$

в силу определения (7.148). Согласно стандартным теоремам, отсюда следует, что

$$P_M = \int | \{z_{k,M}\} \rangle \langle \{z_{k,M}\} | d\mu(\{z_{k,M}\}). \quad (7.151)$$

Следовательно, для произвольных $|\psi\rangle$ и $|\lambda\rangle$ имеет место равенство

$$\begin{aligned} \langle \lambda | \psi \rangle &= \lim_{M \rightarrow \infty} \langle \lambda | P_M | \psi \rangle = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \langle \lambda | \{z_{k,M}\} \rangle \langle \{z_{k,M}\} | \psi \rangle d\mu(\{z_{k,M}\}), \end{aligned} \quad (7.152)$$

что и доказывает справедливость соотношения (7.146). Наконец, сопоставляя (7.149) и (7.151), мы видим

$$I = \lim_{M \rightarrow \infty} \int | \{z_{k,M}\} \rangle \langle \{z_{k,M}\} | d\mu(\{z_{k,M}\}); \quad (7.153)$$

такой вид принимает наше обычное разложение единицы в данном случае. Соотношения (7.152) и (7.153) и являются обобщениями соотношений (7.119) и (7.118) на случай бесконечного числа степеней свободы. В качестве сокращенной записи точных предельных соотношений мы часто будем использовать просто (7.144) и

(7.145), смысл которых определяется точными соотношениями (7.153) и (7.152).

Непрерывное представление. Установив смысл нашего обычного разложения единицы, мы можем взять весь аппарат непрерывного представления по когерентным состояниям из нашего предыдущего рассмотрения. В частности, представление операторов может быть задано с помощью интегрального ядра $\langle \{z_k\} | \mathcal{B} | \{z'_k\} \rangle$:

$$\langle \{z_k\} | \mathcal{B} | \psi \rangle = \int \langle \{z_k\} | \mathcal{B} | \{z'_k\} \rangle \langle \{z'_k\} | \psi \rangle d\mu(\{z'_k\}). \quad (7.154)$$

Существует и представление дифференциальными операторами, аналогичное (7.95). Если $\mathcal{W}^\rho(\{a_k^+\}, \{a_k\})$ зависит от операторов рождения и уничтожения, то

$$\langle \{z_k\} | \mathcal{W}^\rho(\{a_k^+\}, \{a_k\}) | \psi \rangle = \mathcal{W}^\rho\left(\{z_k^*\}, \left\{ \frac{z_k}{2} + \frac{\partial}{\partial z_k^*} \right\}\right) \langle \{z_k\} | \psi \rangle. \quad (7.155)$$

Нормально упорядоченные операторы удовлетворяют соотношению

$$\langle \{z_k\} | : \mathcal{O}(\{a_k^+\}, \{a_k\}) : | \{z'_k\} \rangle = \mathcal{O}(\{z_k^*\}, \{z'_k\}) \langle \{z_k\} | \{z'_k\} \rangle; \quad (7.156)$$

кроме того, имеет место соотношение [ср. (7.106)]

$$\begin{aligned} \langle \{z_k\} | \mathcal{W}^\rho(\{a_k^+\}, \{a_k\}) | \{z_k\} \rangle &= \\ &= \mathcal{W}^\rho\left(\{z_k^*\}, \left\{ z_k + \frac{\partial}{\partial z_k^*} \right\}\right) \equiv \mathcal{W}_n(\{z_k^*\}, \{z_k\}) = \\ &= \langle \{z_k\} | : \mathcal{W}_n(\{a_k^+\}, \{a_k\}) : | \{z_k\} \rangle, \end{aligned} \quad (7.157)$$

связывающее \mathcal{W}^ρ и $:\mathcal{W}_n:$ через их диагональные матричные элементы.

Аналогичным образом

$$| \psi \rangle = \int | \{z_k\} \rangle \langle \{z_k\} | \psi \rangle d\mu(\{z_k\}) \quad (7.158)$$

и

$$\mathcal{B} = \int \int | \{z_k\} \rangle \langle \{z_k\} | \mathcal{B} | \{z'_k\} \rangle \langle \{z'_k\} | d\mu(\{z_k\}) d\mu(\{z'_k\}) \quad (7.159)$$

можно рассматривать соответственно как представления абстрактных векторов $|\psi\rangle$ и операторов \mathcal{B} . Нетрудно обобщить на этот случай дальнейшие замечания, сделанные ранее при рассмотрении одной степени свободы.

Совершенно ясно, что всему нашему рассмотрению, включая соотношения (7.152) и (7.153), соответствует совершенно аналогичная формулировка в фазовом пространстве. В последнем случае основное внимание должно быть сосредоточено на величинах q_k и p_k , которые для всех k определяются следующим образом:

$$z_k = \left(\frac{\omega_k}{2\hbar}\right)^{1/2} q_k + i\left(\frac{1}{2\omega_k\hbar}\right)^{1/2} p_k. \quad (7.160)$$

Заметим, что в этой формулировке допустимые последовательности в фазовом пространстве в силу (7.132) должны удовлетворять условию

$$\frac{1}{2\hbar} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_k^{-1} p_k^2 + \omega_k q_k^2) < \infty. \quad (7.161)$$

Представитель основного состояния получается непосредственно из (7.137):

$$\begin{aligned} \Phi_0(\{p_k, q_k\}) &= \langle \{p_k, q_k\} | 0 \rangle = \\ &= \exp \left[-\frac{1}{4\hbar} \sum_{k=1}^{\infty} (\omega_k^{-1} p_k^2 + \omega_k q_k^2) \right]. \end{aligned} \quad (7.162)$$

Очевидно, и это выражение имеет схематический вид (7.122). Рассмотрение свойства фазового пространства мы продолжим после того, как будут разобраны свойства поля излучения.

Б. Приложение к электромагнитному полю

Как было показано в гл. 6, электромагнитное поле можно рассматривать как совокупность гармонических осцилляторов, находящихся под действием внешних сил. Если считать, что система находится в большом кубическом объеме квантования $\Omega = L^3$, то соответствующие независимые нормальные моды обычно обозначаются

индексами λ и \mathbf{k} , причем λ представляет собой поляризационный индекс, а \mathbf{k} — переменную импульса, квантованную в соответствии с (6.40). Значение $\mathbf{k} \equiv 0$ исключается явно. Обозначение двумя индексами λ, \mathbf{k} соответствует использованному выше обозначению одним индексом k .

В настоящем рассмотрении мы ограничимся свободным полем излучения и полем излучения при наличии c -числовых источников. Как уже отмечалось в гл. 6, только в этих случаях возможно неприводимое квантование, при котором собственные состояния операторов числа квантов или когерентных состояний действительно покрывают все гильбертово пространство. Тогда оператор уничтожения (λ, \mathbf{k}) -й моды в зависящей от времени форме определяется в соответствии с (6.59) выражением

$$a_{\lambda}(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega t} a_{\lambda}^{in}(\mathbf{k}) + c_{\lambda}(\mathbf{k}, t), \quad (7.163)$$

где круговая частота есть просто $\omega = \omega_{\lambda, \mathbf{k}} = |\mathbf{k}|$. Из (6.55) получаем выражения для $c_{\lambda}(\mathbf{k}, t)$ через c -числовой ток $\mathcal{F}_{\lambda}(\mathbf{k}, t)$:

$$c_{\lambda}(\mathbf{k}, t) = i(2\hbar\omega)^{-1/2} e^{-i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{i\omega t'} \mathcal{F}_{\lambda}(\mathbf{k}, t') dt'. \quad (7.164)$$

Будем считать $\{|n_{\lambda}(\mathbf{k})\rangle\}$ собственными состояниями операторов

$$N_{\lambda}^{in}(\mathbf{k}) = a_{\lambda}^{in\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda}^{in}(\mathbf{k}). \quad (7.165)$$

Тогда когерентные состояния $\{|z_{\lambda}(\mathbf{k})\rangle\}$, определяемые соотношениями типа (7.143) для всех λ и \mathbf{k} , удовлетворяют условию

$$a_{\lambda}^{in}(\mathbf{k}) |z_{\lambda}(\mathbf{k})\rangle = z_{\lambda}(\mathbf{k}) |z_{\lambda}(\mathbf{k})\rangle. \quad (7.166)$$

В свою очередь зависящие от времени операторы уничтожения удовлетворяют соотношению

$$a_{\lambda}(\mathbf{k}, t) |z_{\lambda}(\mathbf{k})\rangle = [e^{-i\omega t} z_{\lambda}(\mathbf{k}) + c_{\lambda}(\mathbf{k}, t)] |z_{\lambda}(\mathbf{k})\rangle, \quad (7.167)$$

и, таким образом, когерентные состояния являются также и собственными состояниями оператора $a_{\lambda}(\mathbf{k}, t)$. Введем сокращенное обозначение

$$z_{\lambda}(\mathbf{k}, t) \equiv e^{-i\omega t} z_{\lambda}(\mathbf{k}) + c_{\lambda}(\mathbf{k}, t), \quad (7.168)$$

что является в действительности просто комплексной формой классического решения уравнений Максвелла с источниками.

Если по аналогии с формулой (6.15) принять

$$U(t) = T \left\{ \exp \left[- \left(\frac{i}{\hbar} \right) \int_{-\infty}^t \mathcal{H}(t') dt' \right] \right\} \quad (7.169)$$

за эволюционный оператор с гамильтонианом \mathcal{H} , заданным соотношением (6.46), то

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = U(t)^{-1} a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) U(t). \quad (7.170)$$

Умножая (7.167) на $U(t)$, получаем

$$a_\lambda^{in}(\mathbf{k}) U(t) | \{z_\lambda(\mathbf{k})\} \rangle = z_\lambda(\mathbf{k}, t) U(t) | \{z_\lambda(\mathbf{k})\} \rangle. \quad (7.171)$$

Это означает, что

$$U(t) | \{z_\lambda(\mathbf{k})\} \rangle = e^{i\varphi(t)} | \{z_\lambda(\mathbf{k}, t)\} \rangle, \quad (7.172)$$

где $\varphi(t)$ — некоторая фазовая функция. Можно показать, что

$$\varphi(t) = \sum_{\lambda, \mathbf{k}} \int_{-\infty}^t \mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t') (2\hbar\omega)^{-1/2} \operatorname{Re} [z_\lambda(\mathbf{k}, t')] dt', \quad (7.173)$$

где $\varphi(t)$ зависит и от начального состояния, и от действовавшей силы. Резюмируя, можно сказать, что при наличии внешнего s -числового источника $\mathcal{F}_\lambda(\mathbf{k}, t)$ когерентное состояние переходит (с точностью до фазового множителя) в другое когерентное состояние, полностью определяемое классическим решением при наличии источника.

Общим приложением этого фундаментального результата является описание процесса испускания и поглощения фотонов s -числовым источником. Выясним, например, какое распределение для $\{n_\lambda\}$ будет обнаружено в момент t за счет действия источника. Из (7.134), очевидно, следует

$$\begin{aligned} p(\{n_\lambda(\mathbf{k})\} | t) &= | \langle \{n_\lambda(\mathbf{k})\} | U(t) | \{z_\lambda(\mathbf{k})\} \rangle |^2 = \\ &= | \langle \{n_\lambda(\mathbf{k})\} | \{z_\lambda(\mathbf{k}, t)\} \rangle |^2 = \\ &= \prod_{\lambda, \mathbf{k}} \frac{|z_\lambda(\mathbf{k}, t)|^{2n_\lambda(\mathbf{k})}}{[n_\lambda(\mathbf{k})]!} \exp[-|z_\lambda(\mathbf{k}, t)|^2]. \quad (7.174) \end{aligned}$$

Мы получили просто многомерное распределение Пуассона для любых t , причем

$$\langle n_\lambda(\mathbf{k}) \rangle = |z_\lambda(\mathbf{k}, t)|^2. \quad (7.175)$$

Эти результаты приводятся обычно для излучения из вакуумного состояния [для которого $z_\lambda(\mathbf{k}) = 0$]; в этом случае $z_\lambda(\mathbf{k}, t) = c_\lambda(\mathbf{k}, t)$ при всех λ, \mathbf{k} [см. (7.164)].

Свободное поле. Рассмотрим теперь частный случай свободного поля излучения без внешних токов. Тогда для каждой из мод имеем просто

$$a_\lambda(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega t} a_\lambda^{in}(\mathbf{k}), \quad (7.176a)$$

$$z_\lambda(\mathbf{k}, t) = e^{-i\omega t} z_\lambda(\mathbf{k}). \quad (7.176б)$$

Удобно ввести некоторые сокращенные обозначения для соответствующих динамических переменных. Пусть $\mathbf{e}_\lambda(k)$ обозначает поперечный вектор поляризации [входящий в (6.25) и последующие соотношения] и определим поперечные векторы

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}, t) = \sum_\lambda \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}, t), \quad (7.177a)$$

$$\mathbf{z}(\mathbf{k}, t) = \sum_\lambda \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) z_\lambda(\mathbf{k}, t), \quad (7.177б)$$

которые, очевидно, удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{a}(\mathbf{k}, t) |\{z\}\rangle = \mathbf{z}(\mathbf{k}, t) |\{z\}\rangle, \quad (7.178)$$

где $|\{z\}\rangle \equiv |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle$. Аналогично введем определения

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{k}, t), \quad (7.179a)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar}{2\omega}\right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{z}(\mathbf{k}, t); \quad (7.179б)$$

$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ являются *положительно-частотными функциями*, или аналитическими сигналами в смысле

гл. 1. Положим также

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = -\dot{\mathbf{A}}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{k}, t), \quad (7.180a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) = -\dot{\mathbf{V}}(\mathbf{x}, t) = \frac{i}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^{1/2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \mathbf{z}(\mathbf{k}, t) \quad (7.180б)$$

и

$$\mathbf{H}^{(+)}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t),$$

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{V}(\mathbf{x}, t).$$

Когерентные состояния, очевидно, представляют собой собственные состояния всех этих положительно-частотных операторов, а именно

$$\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t) |\{z\}\rangle = \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) |\{z\}\rangle, \quad (7.181a)$$

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t) |\{z\}\rangle = \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) |\{z\}\rangle, \quad (7.181б)$$

$$\mathbf{H}^{(+)}(\mathbf{x}, t) |\{z\}\rangle = \mathbf{n}(\mathbf{x}, t) |\{z\}\rangle. \quad (7.181в)$$

Сопряженные операторы являются отрицательно-частотными операторами и обозначаются так:

$$[\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t)]^{\dagger} \equiv \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{x}, t), \quad (7.182a)$$

$$[\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{x}, t)]^{\dagger} \equiv \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{x}, t), \quad (7.182б)$$

$$[\mathbf{H}^{(+)}(\mathbf{x}, t)]^{\dagger} \equiv \mathbf{H}^{(-)}(\mathbf{x}, t). \quad (7.182в)$$

Из формы записи ясно, что все положительно-частотные (а следовательно, и все отрицательно-частотные) операторы коммутируют между собой.

Придерживаясь принятой нами системы, запишем некоторые из приведенных выше выражений в фазовом пространстве, что позволит связать их с более привычными физическими величинами. По аналогии с (6.44a) и (6.35) положим

$$\mathbf{z}(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{\omega}{2\hbar}\right)^{1/2} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t) - i \left(\frac{1}{2\omega\hbar}\right)^{1/2} \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{k}, t), \quad (7.183)$$

где разделение на первый и второй члены основано на условии

$$\tilde{\mathbf{a}}^*(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{a}}(-\mathbf{k}, t), \quad (7.184a)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^*(\mathbf{k}, t) = \tilde{\mathbf{e}}(-\mathbf{k}, t). \quad (7.184b)$$

В силу этих условий функции

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t), \quad (7.185a)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}, t) \equiv \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{k}, t) \quad (7.185b)$$

действительны. Нам представится случай воспользоваться соотношением

$$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k}, t) = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t) \quad (7.186)$$

и его действительной формой в конфигурационном пространстве

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k}, t). \quad (7.187)$$

Формулировку в фазовом пространстве легче всего дать с помощью действительных поперечных векторов $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{a}(\mathbf{x})$; ей можно придать еще более привычный для физика вид, если использовать $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ и «производную» от $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, а именно $\mathbf{h}(\mathbf{x})$.

Представитель основного состояния. Функции $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ [или $\mathbf{h}(\mathbf{x})$], очевидно, определяют последовательность $\{z_\lambda(\mathbf{k})\}$ и тем самым когерентное состояние. Чтобы подчеркнуть этот факт, введем другое обозначение для когерентных состояний:

$$|\mathbf{e}, \mathbf{a}\rangle \equiv |\mathbf{e}, \mathbf{h}\rangle \equiv |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle. \quad (7.188)$$

Хотя форма с независимыми модами наиболее удобна для конкретных расчетов, представляется поучительным привести запись в фазовом пространстве.

Рассмотрим основной пример, а именно выведем выражение для представителя основного состояния как

функционала от \mathbf{e} и \mathbf{h} . Из (7.177б) и (7.183) следует

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\lambda, \mathbf{k}} |z_{\lambda}(\mathbf{k})|^2\right) &= \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{z}(\mathbf{k})|^2\right) = \\ &= \exp\left(-\frac{1}{4\hbar} \sum_{\mathbf{k}} [\omega^{-1} |\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{k})|^2 + \omega |\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k})|^2]\right). \end{aligned} \quad (7.189)$$

Воспользовавшись соотношением

$$|\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k})|^2 = [\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k})^*] \cdot [\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k})] = \mathbf{k}^2 |\tilde{\mathbf{a}}(\mathbf{k})|^2 \quad (7.190)$$

и равенством $\omega^2 = \mathbf{k}^2$, перепишем (7.189) в форме

$$\exp\left(-\frac{1}{4\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \omega^{-1} [|\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{k})|^2 + |\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k})|^2]\right). \quad (7.191)$$

Последнее выражение принимает наиболее элегантный вид, если записать его в конфигурационном пространстве и перейти в пределе к бесконечному объему. Используя соотношения

$$\tilde{\mathbf{e}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{L^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{e}(\mathbf{x}) d^3x, \quad (7.192a)$$

$$\tilde{\mathbf{h}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{L^{3/2}} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{h}(\mathbf{x}) d^3x \quad (7.192б)$$

(и комплексно сопряженные им!), а также соотношение

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{k}|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{k}|} d^3k = \frac{1}{2\pi^2} \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}, \quad (7.193)$$

легко получить, что (7.191) принимает вид

$$\begin{aligned} \varphi_0(\mathbf{e}, \mathbf{h}) &= \langle \mathbf{e}, \mathbf{h} | 0 \rangle = \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{8\pi^2\hbar} \int \int \frac{[\mathbf{e}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}(\mathbf{y}) + \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}(\mathbf{y})]}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2} d^3x d^3y\right\}. \end{aligned} \quad (7.194)$$

С физической точки зрения это есть выражение для амплитуды вероятности найти основное состояние поля излучения в таком смещенном основном состоянии, для которого

$$\langle \mathbf{E}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{e}(\mathbf{x}), \quad (7.195a)$$

$$\langle \mathbf{H}(\mathbf{x}) \rangle = \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (7.195б)$$

(как если бы оно получалось под действием внешнего источника). Следует заметить, что с формальной точки зрения вектор гильбертова пространства \mathfrak{Z} , представленный ранее последовательностью $\{z_\lambda(\mathbf{k})\}$, здесь представлен парой действительных функций $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{h}(\mathbf{x})$, квадрат нормы которых определяется двойным интегралом в (7.194)¹).

Наш второй пример является простым обобщением первого. Именно

$$\langle \mathbf{e}, \mathbf{h} | \mathbf{e}', \mathbf{h}' \rangle = \exp \left\{ - \sum_{\mathbf{k}} [|\mathbf{z}(\mathbf{k}) - \mathbf{z}'(\mathbf{k})|^2 - i \operatorname{Im} \mathbf{z}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{z}'(\mathbf{k})] \right\}, \quad (7.196)$$

что следует из (7.137). Здесь появился единственный новый член, а именно

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \sum_{\mathbf{k}} \operatorname{Im} \mathbf{z}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{z}'(\mathbf{k}) = \\ &= \frac{1}{2\hbar} \sum_{\mathbf{k}} [\tilde{\mathbf{e}}^*(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{a}}'(\mathbf{k}) - \tilde{\mathbf{a}}^*(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{e}}'(\mathbf{k})] = \\ &= \frac{i}{2\hbar} \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{\omega^2} [\tilde{\mathbf{e}}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{h}}'(\mathbf{k}) + \mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{h}}^*(\mathbf{k}) \cdot \tilde{\mathbf{e}}'(\mathbf{k})]. \end{aligned} \quad (7.197)$$

В конфигурационном пространстве и в пределе бесконечного объема находим

$$\Phi = \frac{1}{2\hbar} \int [\mathbf{e}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}'(\mathbf{x}) - \mathbf{a}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}'(\mathbf{x})] d^3x. \quad (7.198)$$

Воспользовавшись соотношением

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \frac{i k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{\omega^2} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{i k e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x}-\mathbf{y})}}{|\mathbf{k}|^2} d^3k = \nabla \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{y}|}, \quad (7.199)$$

¹) Этот интеграл есть «число квантов» в классическом электромагнитном поле \mathbf{e} и \mathbf{h} . См. работу: Я. Б. Зельдович, ДАН СССР, 163, № 6, 1359 (1965). — Прим. перев.

можно переписать (7.198) в виде

$$\Phi = \frac{1}{8\pi h} \int \int \left[\mathbf{e}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \times \mathbf{h}'(\mathbf{y}) - \mathbf{h}(\mathbf{x}) \cdot \nabla \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \times \right. \\ \left. \times \mathbf{e}'(\mathbf{y}) \right] d^3x d^3y. \quad (7.200)$$

Ясно, что, должным образом комбинируя (7.200) и (7.194), можно найти явное выражение для $\langle \mathbf{e}, \mathbf{h} | \mathbf{e}', \mathbf{h}' \rangle$. Разумеется, все эти выражения заведомо калибровочно инвариантны

В последующих главах мы обсудим еще ряд свойств когерентных состояний поля излучения.

Квантовая теория оптических корреляционных явлений

§ 1. КВАНТОВЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

А. Идеальные детекторы и скорости счета квантов

Вернемся теперь к изучению взаимодействия поля излучения с веществом, имея в виду описание систем счета фотонов. Полное рассмотрение таких систем требует весьма сложного анализа, поэтому, следуя Глауберу [8.1], мы подойдем к проблеме в некотором роде феноменологически. Системы, которые имеются здесь в виду, «детектируют» фотоны с помощью процесса *поглощения* фотонов. К числу таких систем относятся обычные фотосчетчики, фотоионизационные схемы, фотопластинки и т. д. В процессе детектирования фотон поглощается; соответственно меняется и состояние детектирующей системы. Идеализируя задачу, детектор можно рассматривать как совокупность огромного числа идентичных независимых элементарных систем (например, атомов), каждая из которых первоначально находится в своем основном состоянии. После поглощения (перехода в возбужденное состояние) данной элементарной системой можно пренебречь, если (для простоты) не учитывать на этом этапе процессы многократного поглощения. Поскольку детекторы обычно размещаются вне источников, поле излучения можно считать свободно распространяющимся, если не говорить об его взаимодействии с детектором. Опять-таки для простоты мы рассматриваем взаимодействие с детектором в низшем исчезающем порядке теории возмущений.

Анализ взаимодействия мы будем производить в довольно общем виде, но полезно иметь ясное представление о некоторых положениях, лежащих в основе изложения. Исходный гамильтониан взаимодействия, харак-

теризующий поле и атом, равен $-\frac{1}{2}e[\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{p}]$. Оператор поля \mathbf{A} отвечает однофотонному переходу в поле, в то время как оператор \mathbf{p} импульса отвечает соответствующему атомному переходу. Этот переход может быть запрещен в силу правил отбора; тогда следует разлагать $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в ряд Тейлора вблизи центра атома до тех пор, пока не появится первый исчезающий член. Для простоты будем считать, что для нашего рассмотрения достаточно пользоваться неразложенным гамильтонианом взаимодействия.

Точечные детекторы. В качестве первого примера предположим, что происходит поглощение фотона с вектором поляризации \mathbf{e} в точке \mathbf{r} в момент времени t . Оператор $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t)$, определяемый соотношением (7.179а), представляет собой оператор уничтожения, который соответствует уничтожению фотона в точке \mathbf{r} в момент t . Для оператора, выделяющего фотоны с поляризацией \mathbf{e} , здесь можно просто написать

$$A^{(+)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e} \cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t).$$

Согласно стандартным правилам квантовой механики¹⁾, вероятность перехода в единицу времени из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$ поля излучения за счет поглощения соответствующего фотона с требуемой точностью пропорциональна

$$|\langle f | A^{(+)}(\mathbf{r}, t) | i \rangle|^2. \quad (8.1)$$

Коэффициент пропорциональности — скажем α — содержит квадрат модуля матричного элемента перехода атомной системы и, помимо этого, ряд несущественных множителей. Если теперь предположить, что детектор достаточно велик и имеет достаточно широкое распределение состояний, то коэффициент α можно считать не зависящим от начального или конечного состояний поля излучения, а также от того, в какой момент времени и в какой точке происходит детектирование. Следовательно, полную скорость перехода (вероятность в

¹⁾ См., например, учебник Шиффа [5.2]. Мы имеем в виду вычисление вероятности переходов в единицу времени в первом порядке теории возмущений. См. также работу Глаубера [8.2].

единицу времени) из состояния $|i\rangle$ за счет поглощения подходящего фотона можно определить как сумму по полной системе конечных состояний поля излучения, которая при этом принимает просто вид

$$\begin{aligned} \sum_f \alpha |\langle f|A^{(+)}(\mathbf{r}, t)|i\rangle|^2 &= \alpha \sum_f \langle i|A^{(-)}(\mathbf{r}, t)|f\rangle \langle f|A^{(+)}(\mathbf{r}, t)|i\rangle = \\ &= \alpha \langle i|A^{(-)}(\mathbf{r}, t)A^{(+)}(\mathbf{r}, t)|i\rangle. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Наше рассмотрение дает грубое представление о том, какие предположения были сделаны при выводе (8.2). Конечно, строго говоря, никакой реальный детектор не является столь простым, как предполагалось выше; мы специально идеализировали рассмотрение, чтобы сконцентрировать внимание на наиболее существенных моментах, которые допускают достаточно хорошее приближенное описание. Таким образом, наш результат применим к модели или, точнее, к идеализированному детектору. Однако в дальнейшем мы не будем делать этих различий и ниже будем называть подобную систему просто детектором. Более того, временно будем пренебрегать коэффициентом α (или выберем единицы так, чтобы $\alpha = 1$).

Имея в распоряжении такие детекторы, попытаемся описать более сложные опыты по счету фотонов. Для простоты обозначений сохраним и здесь предположение о том, что мы имеем дело с фотонами с заданной поляризацией \mathbf{e} . Пусть нас интересует амплитуда перехода, отнесенная к квадрату временного интервала для процесса поглощения фотона в (пространственно-временной) точке $\mathbf{r}_1 t_1$ и поглощения другого фотона в точке $\mathbf{r}_2 t_2$. По существу это совместная плотность вероятности появления двух событий. Короче говоря, речь идет об описании корреляционного опыта типа известного эксперимента Хэнбери Брауна и Твисса. Соответствующий матричный элемент имеет вид

$$\langle f|A^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2)A^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1)|i\rangle. \quad (8.3)$$

С помощью соображений, аналогичных изложенным выше, приходим к следующему выражению для интере-

сующей нас скорости переходов:

$$\langle i | A^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) A^{(-)}(\mathbf{r}_2, t_2) A^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) A^{(+)}(\mathbf{r}_1, t_1) | i \rangle. \quad (8.4)$$

Поскольку все положительно-частотные операторы $A^{(+)}(\mathbf{r}, t)$ коммутируют между собой [так же, как и сопряженные им операторы $A^{(-)}(\mathbf{r}, t)$], взаимный порядок двух множителей с индексом (+) [как и двух множителей с индексом (-)] не существен. Важно отметить, однако, что рассматриваемые операторы стоят в *нормальном порядке*: все операторы рождения расположены слева от всех операторов уничтожения.

По аналогии с опытом по двухфотонным совпадениям можно рассматривать, по крайней мере в принципе, опыты с n -фотонными совпадениями, в которых измеряется совместная вероятность того, что n фотонов, каждый с вектором поляризации \mathbf{e} , были поглощены в точках $\mathbf{r}_k, t_k, k = 1, \dots, n$. По аналогии с предыдущим получаем для искомой вероятности выражение

$$\langle i | \prod_{k=1}^n A^{(-)}(\mathbf{r}_k, t_k) \prod_{l=1}^n A^{(+)}(\mathbf{r}_l, t_l) | i \rangle, \quad (8.5)$$

которое, очевидно, снова является средним значением нормально упорядоченного оператора. Подчеркнем, что из-за некоммутативности операторов $A^{(+)}$ и $A^{(-)}$ это выражение, вообще говоря, отличается от

$$\langle i | \prod_{k=1}^n \{A^{(-)}(\mathbf{r}_k, t_k) A^{(+)}(\mathbf{r}_k, t_k)\} | i \rangle. \quad (8.6)$$

Произведем теперь еще два непосредственных обобщения основного выражения (8.5). Первое связано с рассмотрением фотонов различных поляризаций. Если обозначить декартовы компоненты поперечного вектора-потенциала индексом j , то вся возможная информация о поляризациях содержится в выражении

$$\langle i | \prod_{k=1}^n A_{j_k}^{(-)}(\mathbf{r}_k, t_k) \prod_{l=1}^n A_{j_l}^{(+)}(\mathbf{r}_l, t_l) | i \rangle, \quad (8.7)$$

являющимся тензорным обобщением выражения (8.5). Теперь в действительности компонента j_k играет такую

же роль, как и переменные \mathbf{r}_k, t_k , поэтому тройку переменных (\mathbf{r}_k, t_k, j_k) удобнее сокращенно обозначать одной индексной переменной x_k . Имея это в виду, запишем выражение (8.7) в более простой форме

$$\langle i | \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{l=1}^n A^{(+)}(x_l) | i \rangle. \quad (8.8)$$

Заметим, наконец, что (8.8) есть в действительности совместная плотность вероятности при условии, что в качестве начального состояния системы было задано чистое состояние. Если начальное состояние точно не известно, то необходимо произвести усреднение по возможным начальным состояниям. Как показано в гл. 5, в результате мы приходим к обобщению выражения (8.8):

$$\left\langle \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{l=1}^n A^{(+)}(x_l) \right\rangle \equiv \text{Sp} \left\{ \rho \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{l=1}^n A^{(+)}(x_l) \right\}, \quad (8.9)$$

здесь ρ — матрица плотности, отвечающая начальному состоянию.

Распределенные детекторы. Приведенные выше соображения можно обобщить на тот случай, когда идеализированные счетчики непосредственно чувствительны не к самому полю в точке \mathbf{r} и t , а к значению поля, усредненному по пространственному и временному интервалу. Как и в гл. 3, можно предположить, что k -й детектор реагирует на эффективное поле, определяемое, например, следующим образом:

$$\begin{aligned} A_e^{(+)}(x) &\equiv A_j^{(+)\text{эфф}}(\mathbf{r}, t) = \\ &= \sum \int S_{jj'}^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') A_{j'}^{(+)}(\mathbf{r}', t') d^3x' dt'. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Здесь тензор $S_{jj'}^*$ — обобщенный адмитанс k -го детектора, который «пробует» поле в различных точках пространства и времени и определяет таким образом «эффективное поле». Для таких счетчиков искомая вероятность от-

счетов n -го порядка, отнесенная к n -й степени временного интервала, по-прежнему дается выражением типа (8.9). Однако каждый оператор снабжен теперь индексом e , что в силу (8.10) отвечает учету свойств детектора. При таком обобщении можно учесть и то обстоятельство, что каждый из детекторов имеет различный адмитанс.

Из линейности соотношения (8.10) следует, что все свойства для счетчиков любого типа содержатся в корреляционных функциях

$$\begin{aligned}
 G^{(n, n)}(x_1, x_2, \dots, x_n; x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n}) &\equiv \\
 &\equiv \left\langle \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{l=n+1}^{2n} A^{(+)}(x_l) \right\rangle = \\
 &= \text{Sp} \left\{ \rho \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{l=n+1}^{2n} A^{(+)}(x_l) \right\}, \quad (8.11)
 \end{aligned}$$

где каждая полевая переменная имеет свой собственный аргумент. Зная эти корреляционные функции и соответствующие адмитансы детекторов, можно вывести все выражения для скоростей счета n -фотонных корреляций. Легко убедиться и в обратном, а именно показать, что функции (8.11) можно извлечь из информации о скоростях отсчетов при всевозможных расположениях счетчиков. Короче говоря, функции $G^{(n, n)}$ в (8.11) при всех аргументах x_1, \dots, x_{2n} и для всех n можно рассматривать как информацию о поле излучения, которую можно непосредственно извлечь из опытов по многократным фотонным совпадениям. Все эти выражения представляют собой средние значения нормально упорядоченных произведений операторов, причем в каждый член входит равное число операторов рождения и уничтожения.

Поскольку каждая полевая переменная имеет теперь свой собственный индекс x , можно получить выражения

$$\left\langle \prod_{k=1}^n E^{(-)}(x_k) \prod_{l=n+1}^{2n} E^{(+)}(x_l) \right\rangle, \quad (8.12)$$

$$\left\langle \prod_{k=1}^n H^{(-)}(x_k) \prod_{l=n+1}^{2n} H^{(+)}(x_l) \right\rangle \quad (8.13)$$

или различные смешанные формы из A , E и H . При этом мы взяли соответствующие производные и воспользовались (поперечными!) уравнениями Максвелла $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$. Таким образом, все эти величины тесно связаны друг с другом. Действительно, Глаубер в своем рассмотрении использует скорости счета, определяемые выражением (8.12), а не (8.11). На практике различие между этими двумя определениями невелико. Для квазимонохроматического излучения они пропорциональны друг другу во всех задачах. Вместе с тем выражение (8.13), по-видимому, наиболее подходит (даже в квазимонохроматическом поле) для описания n -фотонных скоростей счета в случае счетчика, в котором используются магнитные дипольные переходы (такие переходы возникают за счет первого члена разложения $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ в ряд Тейлора вблизи центра атома). Для простоты мы и в дальнейшем ограничимся рассмотрением корреляционных функций, полученных с помощью поперечного вектора-потенциала.

Корреляционные функции смешанного порядка. Функции $G^{(n, n)}$ образуют, очевидно, подсемейство в целой иерархии корреляционных функций $G^{(n, m)}$, в которых числа операторов рождения и уничтожения не обязательно совпадают. Эти функции определяются как очевидные обобщения выражения (8.11):

$$\begin{aligned} G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &\equiv \\ &\equiv \left\langle \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{l=n+1}^{n+m} A^{(+)}(x_l) \right\rangle = \\ &= \text{Sp} \left\{ \rho \prod_{k=1}^n A^{(-)}(x_k) \prod_{l=n+1}^{n+m} A^{(+)}(x_l) \right\} \quad (8.14) \end{aligned}$$

и все являются средними значениями нормально упорядоченных операторов. Для многих целей удобно анализировать всю совокупность корреляционных функций для того, чтобы получить информацию о специальных корреляционных функциях $G^{(n, n)}$, относящихся к n -фотонным корреляциям счета.

Все функции $G^{(n, m)}$ удовлетворяют довольно очевидным свойствам симметрии. Эти функции полностью сим-

метричны по n переменным x_1, x_2, \dots, x_n и, помимо этого, полностью симметричны по m переменным $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$. Кроме того, очевидно, имеет место соотношение

$$\begin{aligned} [G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m})]^* &= \\ &= G^{(m, n)}(x_{n+1}, \dots, x_{n+m}; x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (8.15)$$

которое является отражением того факта, что $[A^{(+)}(x)]^+ = A^{(-)}(x)$. При $n = m$ последнее соотношение устанавливает связь между зависимостью функции $G^{(n, n)}$ от первой группы переменных x_1, \dots, x_n и ее зависимостью от второй группы переменных x_{n+1}, \dots, x_{2n} .

Поскольку мы рассматриваем свободное поле излучения, каждая из функций $G^{(n, m)}$ по каждому из своих аргументов удовлетворяет волновому уравнению свободного поля

$$\left(\nabla_l^2 - \frac{\partial^2}{\partial t_l^2}\right) G^{(n, m)}(\dots, \mathbf{r}_l, t_l, \dots) = 0. \quad (8.16)$$

Поведение функции $G^{(n, m)}$ в различающиеся моменты времени можно получить, зная ее значения в какой-то один общий момент, например при $t = 0$. Эти свойства распространения выявляются наиболее четко, если сначала ввести описание в терминах нормальных мод, как это было сделано в гл. 7.

Б. Разложение по модам

В соответствии с (7.179а) операторы уничтожения, отвечающие нормальным модам (которые появляются при квантовании в «ящике» объемом L^3), можно представить в виде

$$\begin{aligned} a_\lambda(\mathbf{k}, t) &= \mathbf{e}_\lambda^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{k}, t) = \\ &= \frac{1}{L^{3/2}} \left(\frac{2\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{e}_\lambda^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{x}, t) d^3x. \end{aligned} \quad (8.17a)$$

Сопряженное соотношение для соответствующих операторов рождения (λ, \mathbf{k}) -й моды имеет вид

$$a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}, t) = \mathbf{e}_{\lambda}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{a}^{\dagger}(\mathbf{k}, t) = \\ = \frac{1}{L^{3/2}} \left(\frac{2\omega}{\hbar} \right)^{1/2} \int \mathbf{e}^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \mathbf{e}_{\lambda}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{x}, t) d^3x. \quad (8.176)$$

Для простоты обозначений переменную, характеризующую моду, будем кратко указывать с помощью индекса k ; т. е. положим $a_k(t) = a_{\lambda}(\mathbf{k}, t)$ и $a_k^{\dagger}(t) = a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}, t)$.

Предположим теперь, что мы выполнили многократное преобразование функции Фурье $G^{(n, m)}$ и произвели умножение на нужные векторы поляризации и нормировочные множители. В результате мы, очевидно, придем к величине

$$\mathcal{G}^{(n, m)}(k_1, t_1, \dots, k_n, t_n; k_{n+1}, t_{n+1}, \dots, k_{n+m}, t_{n+m}) = \\ = \text{Sp} \left\{ \rho \prod_{r=1}^n a_{k_r}^{\dagger}(t_r) \prod_{s=n+1}^{n+m} a_{k_s}(t_s) \right\}. \quad (8.18)$$

Зависимость от времени в этом выражении совершенно элементарна. В силу (7.176а) имеем

$$a_k(t) = \exp(-i\omega_k t) a_k(0) \equiv \exp(-i\omega_k t) a_k, \quad (8.19)$$

откуда следует

$$\mathcal{G}^{(n, m)}(k_1, t_1, \dots, k_n, t_n; k_{n+1}, t_{n+1}, \dots, k_{n+m}, t_{n+m}) = \\ = \prod_{r=1}^n \exp(i\omega_{k_r} t_r) \prod_{s=n+1}^{n+m} \exp(-i\omega_{k_s} t_s) \mathcal{G}^{(n, m)}(k_1, 0, \dots, k_n, 0; \\ k_{n+1}, 0, \dots, k_{n+m}, 0). \quad (8.20)$$

Это выражение наглядно демонстрирует тот факт, что все многовременное поведение функции $G^{(n, m)}$ определяется значениями, которые она принимает, если все временные аргументы положить равными нулю. Следовательно, чтобы получить информацию об общей

(n, m) -й корреляционной функции, можно вообще опустить временные аргументы и рассматривать выражение

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(n, m)}(k_1, \dots, k_n; k_{n+1}, \dots, k_{n+m}) &\equiv \left\langle \prod_{r=1}^n a_{k_r}^+ \prod_{s=n+1}^{n+m} a_{k_s} \right\rangle = \\ &= \text{Sp} \left\{ \rho \prod_{r=1}^n a_{k_r}^+ \prod_{s=n+1}^{n+m} a_{k_s} \right\}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

Все нужные величины можно получить из выражения (8.21), взятого при $t = 0$. В полной аналогии с $G^{(n, m)}$ функции $\mathcal{G}^{(n, m)}$, очевидно, симметричны по n первым и по m последним аргументам и удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}^{(n, m)}(k_1, \dots, k_n; k_{n+1}, \dots, k_{n+m})]^* &= \\ &= \mathcal{G}^{(m, n)}(k_{n+1}, \dots, k_{n+m}; k_1, \dots, k_n). \end{aligned} \quad (8.22)$$

В. Производящие функции

Информацию, содержащуюся во всех корреляционных функциях (8.21), можно весьма удобным способом объединить, воспользовавшись *нормально упорядоченным производящим функционалом*

$$\begin{aligned} C_N(\{u_k\}) &\equiv \left\langle \exp \left(\sum_1^{\infty} u_k a_k^+ \right) \exp \left(- \sum_1^{\infty} u_k^* a_k \right) \right\rangle = \\ &= \text{Sp} \left\{ \rho \exp \left(\sum_1^{\infty} u_k a_k^+ \right) \exp \left(- \sum_1^{\infty} u_k^* a_k \right) \right\}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Этот функционал определен для всех комплексных последовательностей $\{u_k\}$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|^2 < \infty. \quad (8.24)$$

Очевидно, что (8.23) содержит все корреляционные функции. Действительно, дифференцированием функционала (8.23) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(n, m)}(k_1, \dots, k_n; k_{n+1}, \dots, k_{n+m}) &= \\ &= \left\{ \prod_{r=1}^n \frac{\partial}{\partial u_{k_r}} \prod_{s=n+1}^{n+m} \left(- \frac{\partial}{\partial u_{k_s}^*} \right) \right\} C_N(\{u_k\}) \Big|_{\{u_k\}=0}. \end{aligned} \quad (8.25)$$

С нормально упорядоченным производящим функционалом тесно связана величина, которую можно назвать «характеристическим функционалом» $C(\{u_k\})$ для матрицы плотности ρ . С учетом (7.26) эту величину можно определить так:

$$C(\{u_k\}) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_1^{\infty} |u_k|^2\right) C_N(\{u_k\}) = \\ = \langle \exp\left[\sum_1^{\infty} (u_k a_k^+ - u_k^* a_k)\right] \rangle = \text{Sp} \left\{ \rho \exp\left[\sum_1^{\infty} (u_k a_k^+ - u_k^* a_k)\right] \right\}. \quad (8.26)$$

Следует отметить, что для любой последовательности $\{u_k\}$, удовлетворяющей условию (8.24), функционал $C(\{u_k\})$ есть среднее значение унитарного оператора [который является непосредственным обобщением на случай бесконечного числа степеней свободы оператора $U[p, q]$, определяемого соотношением (7.26)]. Подобно тому как характеристические функции (фурье-образы) полностью определяют классические вероятности, аналогичный им функционал $C(\{u_k\})$ полностью определяет квантовомеханическую матрицу плотности ρ .

Разумеется, нет особой необходимости использовать разложение по модам для образования производящих функционалов. Снова ограничиваясь для простоты корреляциями при $t = 0$, мы можем с тем же правом рассматривать нормально упорядоченный производящий функционал, задаваемый соотношением

$$C_N\{\mathbf{S}\} = \langle \exp(\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^{(-)}) \exp(-\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{A}^{(+)}) \rangle, \quad (8.27)$$

где все операторы берутся при $t = 0$ и введено сокращенное обозначение

$$\mathbf{S}^* \cdot \mathbf{A}^{(+)} \equiv \int \mathbf{S}^*(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}) d^3x \equiv [\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^{(-)}]^\dagger. \quad (8.28)$$

Наряду с этим можно рассматривать тесно связанный с (8.27) характеристический функционал

$$C\{\mathbf{S}\} = \langle \exp(\mathbf{S} \cdot \mathbf{A}^{(-)} - \mathbf{S}^* \cdot \mathbf{A}^{(+)}) \rangle. \quad (8.29)$$

В дальнейшем нам представится возможность воспользоваться нормально упорядоченными производящими функционалами и связанными с ними характеристическими функционалами. Еще раз подчеркнем, что любой из этих функционалов полностью определяет состояние системы. Повторим также, что корреляции скоростей счета связаны лишь с функциями $G^{(n, n)}$ и не имеют прямого отношения к функциям $G^{(n, m)}$ при $n \neq m$.

§ 2. ПОЛНАЯ И ЧАСТИЧНАЯ КОГЕРЕНТНОСТЬ

A. Определения и полная когерентность

Как мы видели выше, информация о скоростях счета в корреляционных измерениях содержится в функциях $G^{(n, n)}$ (или $\mathcal{G}^{(n, n)}$), определенных для произвольных аргументов. На основе этой информации мы должны решить, какие из состояний системы заслуживают названия *полностью когерентных*.

Для классического случая в гл. 1 уже отмечалось, что обычно различают когерентные, частично когерентные и полностью некогерентные поля. Решающей величиной для свойств когерентности, которая используется при описании всех классических интерференционных опытов, является функция взаимной когерентности, которая для скалярного поля (или для заданной поляризации) определяется следующим образом:

$$\Gamma^{(1, 1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \equiv \Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \equiv \langle V^*(\mathbf{r}', t') V(\mathbf{r}, t) \rangle. \quad (8.30)$$

Используется также нормированная форма

$$\gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \equiv \frac{\Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')}{[\Gamma(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t) \Gamma(\mathbf{r}', t'; \mathbf{r}', t')]^{1/2}}, \quad (8.31)$$

которая называется комплексной степенью когерентности и удовлетворяет неравенствам $0 \leq |\gamma| \leq 1$ при всех значениях аргументов. Ранее мы показали, что если для двух пространственных точек \mathbf{r} и \mathbf{r}' при всех t и t' выполняется условие $|\gamma| = 1$, то наблюдаемая интерференционная картина будет такой же, как и для полностью детерминированного поля, и поэтому поле можно считать

когерентным. Если $|\gamma| = 0$ для всех t и t' , то поле считают некогерентным, в то время как при $0 < |\gamma| < 1$ — частично когерентным.

В квантовом случае роль $\Gamma^{(1,1)}$ играет корреляционная функция $G^{(1,1)}$. Поскольку функция $G^{(1,1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}, t)$ пропорциональна числу фотонов, попадающих в точку \mathbf{r} в интервале времени от t до $t + dt$, она также пропорциональна интенсивности почернения фотоэмульсии при такой экспозиции. Для различных пространственно-временных точек функция $G^{(1,1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$ связана с интенсивностью, наблюдаемой в опыте с двумя щелями, точно так же, как функция $\Gamma^{(1,1)}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t')$. Обе эти величины удовлетворяют волновому уравнению для свободных полей и обе являются аналитическими сигналами по t и по $-t'$.

Чтобы пойти дальше этого сравнения, постараемся уточнить довольно неопределенное понятие «когерентности». Умышленно придерживаясь общего подхода, будем говорить, что «свойство когерентности» статистического ансамбля есть наблюдаемый аспект, содержащийся в каждом члене ансамбля. Различные ансамбли будут иметь, вообще говоря, различные свойства когерентности. Наряду с этим один и тот же ансамбль может иметь различные наборы свойств когерентности в зависимости от того, какая группа величин считается «наблюдаемой». Это наводит на мысль называть свойствами относительной когерентности такие свойства, которые удовлетворяют критериям свойства когерентности для подгруппы наблюдаемых. Иначе говоря, критерии свойства относительной когерентности являются необходимыми, но, вообще говоря, не достаточными критериями свойства когерентности. Интуитивно ясно, что чем большее число свойств когерентности имеется у данного ансамбля, тем меньше наблюдаемые различия между членами ансамбля. Можно сказать, что полная когерентность существует в том случае, когда все члены ансамбля идентичны в отношении всех своих наблюдаемых свойств¹⁾.

¹⁾ Точное обобщение этих понятий на основе теории меры самоочевидно. Мы ограничимся менее строгим изложением.

Для иллюстрации предположим, что в нашем распоряжении имеется система рулеток, каждая из которых выдает комплексное число. Ансамбль состоит из чисел, выданных совокупностью M одинаковых рулеток. Пусть z_μ обозначает число, зарегистрированное в μ -й рулетке, $\mu = 1, \dots, M$ ($M \gg 1$). Если мы можем наблюдать и амплитуду, и фазу z_μ , то наш ансамбль будет полностью когерентным в том случае, когда есть такое число z , что $z_\mu = z$ для всех μ . Чтобы проверить когерентность математически, мы можем при желании поступить следующим образом. Пусть a обозначает случайную комплексную переменную, которая, как обычно, принимает значения, допустимые для ансамбля. Тогда полностью когерентный ансамбль должен удовлетворять равенству

$$M^{-1} \sum_{\mu} z_{\mu}^n \equiv \langle a^n \rangle = z^n = \langle a \rangle^n$$

для всех $n \geq 1$. Если мы знаем лишь, что $\langle a^n \rangle = \langle a \rangle^n$, скажем для $n = 1, 2$ и 6 , то, имея только эту информацию, можно лишь сказать, что ансамбль относительно когерентен. С другой стороны, предположим, что в принципе мы можем наблюдать только *модуль* z_μ . Тогда для полностью когерентного ансамбля $|z_\mu| = |z|$ для всех μ и для всех n выполняется равенство $\langle a^{*n} a^n \rangle = \langle z^{*n} z^n \rangle = \langle a^* a \rangle^n$. Последний пример не налагает в сущности никаких ограничений на значение $\langle a^{*n} a^m \rangle$ при $n \neq m$.

Будучи безусловно грубым, наш пример тем не менее позволяет мотивировать определение *полностью когерентного состояния* поля излучения. В квантовой теории мы называем состояние поля излучения полностью когерентным, если корреляционные функции (8.11), соответствующие наблюдаемым (в принципе) величинам — корреляциям отсчетов, — при всех значениях аргументов и для всех n обладают свойством

$$G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) = \prod_{k=1}^n V^*(x_k) \prod_{l=n+1}^{2n} V(x_l), \quad (8.32)$$

где $V(x) = V(\mathbf{r}, t, j)$, или в векторном виде $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ — некоторая функция. Функция \mathbf{V} должна, очевидно, удовлетворять свободному волновому уравнению и быть аналитическим сигналом. Функция \mathbf{V} полностью определяется соотношением (8.32) с точностью до единственного общего фазового множителя. Это условие факторизации не налагается в явном виде на корреляционные функции $G^{(n, m)}$ с $n \neq m$.

В каком-то смысле, конечно, вопрос о том, что считать в принципе наблюдаемым, а что нет, зависит от определения. Основное правило квантовой теории утверждает, что эрмитовы переменные, например электрическое или магнитное поля (должным образом усредненные по небольшой области пространства), рассматриваются как наблюдаемые и что, проявив достаточное терпение, в принципе возможно осуществить опыты по измерению распределения средних значений $E(x)$ или $H(x)$. Вполне правдоподобно (нам нет необходимости вдаваться в детали), что эта информация даст нам возможность вывести (комплексное) среднее значение величины $A^{(+)}(x)$, а именно $G^{(0, 1)}(x)$. Более того, можно было бы вывести все $G^{(n, m)}$, обращаясь к аналогичным мысленным экспериментам над подходящими эрмитовыми переменными. При таком подходе будем называть состояние излучения «полностью когерентным», если для всех m и n при всех значениях аргументов выполняется условие

$$G^{(n, m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) = \prod_{k=1}^n V^*(x_k) \prod_{l=n+1}^{n+m} V(x_l). \quad (8.33)$$

Нетрудно видеть, что такие полностью когерентные состояния поля излучения представляют собой чистые когерентные состояния и ничего более. Однако мы будем следовать общепринятой практике и называть когерентными состояниями такие состояния, для которых выполняется лишь условие факторизации для $G^{(n, n)}$. Это соответствует наблюдаемой «на практике» информации, для получения которой достаточно лишь экспериментов

со счетчиками¹⁾. Совершенно ясно, что когерентные состояния являются также полностью когерентными и в этом смысле, но помимо них существуют и другие состояния, обладающие свойством (8.32).

Заслуживает упоминания и другая форма условия полной когерентности. Функции $\mathcal{G}^{(n, m)}$, определяемые соотношением (8.18), получаются фактически из функций $G^{(n, m)}$ в результате преобразования Фурье по каждому из своих пространственных аргументов. Если функцию $G^{(n, m)}$ можно представить в виде произведения отдельных членов, то, очевидно, это же справедливо и для ее фурье-образа. Временная зависимость факторизованной функции должна согласовываться с общим видом временной зависимости в (8.20). Таким образом, мы сразу приходим к другому критерию полной когерентности. Он состоит в том, что для некоторой последовательности $\{z_k\}$ и при всех n должно выполняться соотношение

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(n, n)}(k_1, \dots, k_n; k_{n+1}, \dots, k_{2n}) = \\ = \left\langle \prod_{r=1}^n a_{k_r}^{\dagger} \prod_{s=n+1}^{2n} a_{k_s} \right\rangle = \prod_{r=1}^n z_{k_r}^* \prod_{s=n+1}^{2n} z_{k_s}. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Отсюда видно, что полная когерентность есть свойство состояния ρ в определенный момент, скажем при $t = 0$. Если средние значения, взятые по состоянию ρ , удовлетворяют этим требованиям согласованности, то поле излучения полностью когерентно во всем пространстве и в любой момент времени.

Приведем в заключение еще одну форму условия полной когерентности. Замечая, что $G^{(1, 1)}(x, x) = V^*(x)V(x)$,

¹⁾ В оптическом диапазоне, безусловно, практически наиболее удобно получать именно такую информацию. Это связано с тем, что с помощью доступных схем даже с наносекундными (10^{-9}) временами разрешения трудно определить что-либо, кроме поведения огибающей сигналов с несущими частотами порядка 10^{15} гц. (Приведенное утверждение относится лишь к простым счетчикам. Системы, использующие биения изучаемого света с сигналом от оптического гетеродина, в принципе позволяют измерять фазу оптического колебания даже при сравнительно плохих временах разрешения электронных схем. — Прим. перев.)

сразу же получаем соотношение

$$|G^{(n, n)}(x_1, x_2, \dots, x_{2n})|^2 = \prod_{k=1}^{2n} G^{(1, 1)}(x_k, x_k), \quad (8.35)$$

выполняющееся при всех n . Ниже мы покажем, что это условие влечет за собой выполнение (8.32) и что, таким образом, эти два условия эквивалентны.

Б. Частичная когерентность

Если условие (8.32) не удовлетворяется, то мы имеем частичную когерентность того или иного рода. Было бы идеально, если в каждом таком случае мы могли ввести определенный параметр, характеризующий степень когерентности, подобно тому, как это оказалось удобным при рассмотрении двухщелевого интерференционного опыта. Однако в настоящее время ни одно из конкретных определений не является универсальным в этом отношении. Нельзя надеяться, что с помощью одного или нескольких параметров удастся отразить сущность *всех* форм частичной когерентности, которые могут проявляться во *всех* возможных экспериментах.

Когерентность первого порядка. Тем не менее интересно обсудить следствия одного особенно любопытного случая, когда имеет место нечто меньшее, нежели полная когерентность. Выше мы определили свойство относительной когерентности как такое, для которого выполняется ряд критериев свойства когерентности (но не обязательно все). Следуя Глауберу [8.2], будем говорить, что поле излучения имеет «когерентность первого порядка», если известно, что для некоторой функции $V(x)$ и при всех x и y выполняется соотношение¹⁾

$$G^{(1, 1)}(x, y) = V^*(x) V(y). \quad (8.36)$$

¹⁾ Следует отметить, что экспериментатор, вооруженный интерферометром (а не фотосчетчиками), может извлечь информацию лишь о $G^{(1, 1)}$. Если он обнаружит, что соотношение (8.36) выполняется, то будет считать (в той мере, в какой он может судить об этом) поле «полностью когерентным» в соответствии с нашим определением.

Выясним теперь, что можно получить, рассматривая корреляционные функции $G^{(n, n)}$ высших порядков.

Обсуждение этого вопроса начнем с соотношения

$$|G^{(1, 1)}(x, y)|^2 = G^{(1, 1)}(x, x) G^{(1, 1)}(y, y), \quad (8.37)$$

являющегося прямым следствием соотношения (8.36).

Для простоты обозначений будем писать здесь G вместо $G^{(1, 1)}$. Покажем сначала, что в действительности и (8.36) следует из (8.37). Если положить

$$G(x, y) = e^{\omega(x, y) + i\varphi(x, y)} = G^*(y, x), \quad (8.38)$$

где ω и φ — действительные функции, то из (8.37) получим

$$\omega(x, y) = \frac{1}{2} [\omega(x, x) + \omega(y, y)].$$

Следовательно, вводя обозначение $B(x) \equiv \exp[1/2\omega(x, x)]$, можно написать

$$G(x, y) = B(x) B(y) e^{i\varphi(x, y)} = \langle A^{(-)}(x) A^{(+)}(y) \rangle. \quad (8.39)$$

В силу основного определения $G(x, y)$ удовлетворяет условию (для всех конечных сумм с произвольными коэффициентами c_h)

$$\begin{aligned} \sum_{j, k} c_j^* c_k G(x_j, x_k) &= \sum_{j, k} c_j^* c_k B(x_j) B(x_k) \exp[i\varphi(x_j, x_k)] \equiv \\ &\equiv \sum_{j, k} d_j^* d_k \exp[i\varphi(x_j, x_k)] \geq 0, \end{aligned} \quad (8.40)$$

так как приведенное выражение есть среднее значение положительного оператора. Для любого конечного набора точек матрица M с элементами $M_{jk} \equiv \exp[i\varphi(x_j, x_k)]$ эрмитова и положительна, и каждый из элементов удовлетворяет условию $|M_{jk}| \equiv 1$. Взяв эти условия для трех произвольных точек (т. е. для соответствующей матрицы размерностью 3×3), получаем $M_{12} M_{23} M_{31} = 1$, так как в противном случае мы имели бы $\det(M) = 2\operatorname{Re}(M_{12} M_{23} M_{31} - 1) < 0$. Но это условие означает, что для трех произвольных точек должно выполняться соотношение

$$\varphi(x, y) + \varphi(y, z) + \varphi(z, x) = 0; \quad (8.41)$$

это, как мы покажем, налагает жесткие ограничения на вид функции $\varphi(x, y)$. Если при фиксированном z положить $\alpha_z(y) \equiv -\varphi(y, z)$, то

$$\varphi(x, y) = \alpha_z(y) - \alpha_z(x). \quad (8.42)$$

В свою очередь $\alpha_z(y)$ отличается от $\alpha_0(y)$ (т. е. от α_z при $z = 0$) на константу, так как разность $\alpha_z(y) - \alpha_0(y) = \alpha_z(y)$ не зависит от y . Иными словами, существует действительная функция $\alpha(y) = \alpha_0(y)$, определенная однозначно (с точностью до аддитивной константы) соотношением (8.41), так что $\varphi(x, y) = \alpha(y) - \alpha(x)$. Отсюда следует, что

$$G(x, y) = B(x)B(y)e^{-i[\alpha(x) - \alpha(y)]} = V^*(x)V(y). \quad (8.43)$$

Заметим, что с помощью этих соображений мы не можем *определить* величину $\alpha(x)$ (даже с точностью до константы), но можем сделать вывод, что она существует, и отсюда заключить, что функцию $G(x, y)$ можно представить в виде произведения двух функций. Следовательно, (8.36) и (8.37) эквивалентны.

Используя разложение по модам, перепишем (8.36) в эквивалентном (при $t = 0$) виде [ср. (8.21)]. Для некоторой последовательности $\{z_l\}$ имеем

$$\langle a_k^+ a_l \rangle = z_k^* z_l \quad (8.44)$$

для всех k и l . Будем предполагать, что последовательность $\{z_k\}$ не равна тождественно нулю, тогда оператор

$$b \equiv \sum u_l a_l \equiv \frac{\sum z_l^*}{(\sum z_m^* z_m)^{1/2}} a_l \quad (8.45)$$

будет удовлетворять соотношениям

$$[b, b^+] = \sum u_l u_k^* [a_l, a_k^+] = \sum u_l u_l^* = 1 \quad (8.46)$$

и

$$\langle b^+ b \rangle = \sum u_l u_k^* \langle a_k^+ a_l \rangle = \sum u_l u_k^* z_k^* z_l = \sum z_m^* z_m > 0. \quad (8.47)$$

Следовательно, b есть обычным образом нормированный оператор уничтожения, для которого $\langle b^+ b \rangle \neq 0$.

Будем теперь считать переход от a_l к $b \equiv b_1$ первым в целой цепочке преобразований, которые возникают при унитарной замене базиса типа

$$b_m \equiv \sum u_{ml} a_l, \quad (8.48)$$

где

$$\sum u_{ml} u_{nl}^* = \delta_{mn}. \quad (8.49)$$

Ясно, что $u_{ll} \equiv u_l \equiv z_l^* / (\sum z_k^* z_k)^{1/2}$, и из соотношения ортогональности (8.49) получаем

$$\begin{aligned} \langle b_m^+ b_n \rangle &= \sum u_{mk}^* z_k^* u_{nl} z_l = \sum u_{mk}^* u_{1k} u_{nl} u_{1l}^* (\sum z_\rho^* z_\rho) = \\ &= \delta_{m1} \delta_{n1} (\sum z_\rho^* z_\rho). \end{aligned} \quad (8.50)$$

В частности, для операторов числа квантов $b_m^+ b_m$

$$\langle b_m^+ b_m \rangle = 0 \quad (m \neq 1). \quad (8.51)$$

Так как оператор числа квантов имеет положительное среднее значение в любом состоянии, кроме основного, это условие означает просто, что моды, описываемые операторами b_m и b_m^+ , совершенно не заселены при всех $m \neq 1$. Таким образом, все поле есть *поле единственной моды* (не обязательно нормальной!), удовлетворяющей единственному ограничению (8.47).

Введем определение нормированных собственных состояний оператора числа квантов, соответствующего этой единственной моде:

$$|\tilde{n}\rangle \equiv (n!)^{-1/2} (b^+)^n |0\rangle; \quad (8.52)$$

тогда матрица плотности ρ будет иметь следующий общий вид:

$$\rho = \sum_{n, m=0}^{\infty} |\tilde{n}\rangle \rho_{nm} \langle \tilde{m} |, \quad (8.53)$$

причем для нее должно выполняться условие

$$\langle b^+ b \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} n \rho_{nn} = \sum_k z_k^* z_k. \quad (8.54)$$

Корреляционные функции высших порядков определяются либо из (8.21), либо из аналогичного соотношения, содержащего b_m^\dagger и b_m . Однако в соответствии с (8.51) или (8.53) лишь члены с $b = b_1$ могут давать ненулевой вклад. Члены $\langle b^{\dagger n} b^m \rangle$ удобно описывать с помощью относительных выражений

$$g_{n,m} \equiv \frac{\langle b^{\dagger n} b^m \rangle}{\langle b^\dagger b \rangle^{1/2(n+m)}}. \quad (8.55)$$

Из этого определения и соотношения $a_l = \sum u_{ml}^* b_m$ получаем

$$\begin{aligned} \langle a_{k_1}^\dagger \dots a_{k_n}^\dagger a_{l_1} \dots a_{l_m} \rangle &= u_{k_1} \dots u_{k_n} u_{l_1}^* \dots u_{l_m}^* \langle b^{\dagger n} b^m \rangle = \\ &= z_{k_1}^* \dots z_{k_n}^* z_{l_1} \dots z_{l_m} \frac{\langle b^{\dagger n} b^m \rangle}{\left(\sum z_p^* z_p \right)^{1/2(n+m)}} = \\ &= g_{n,m} \cdot (z_{k_1}^* \dots z_{k_n}^* z_{l_1} \dots z_{l_m}). \end{aligned} \quad (8.56)$$

Наконец, после умножения на требуемые множители и многократного преобразования Фурье приходим к выражению

$$\begin{aligned} G^{(n,m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &= \\ &= g_{n,m} \prod_{k=1}^n V^*(x_k) \prod_{l=n+1}^{n+m} V(x_l). \end{aligned} \quad (8.57)$$

Таков общий вид, который принимает (n, m) -я корреляционная функция для поля, когерентного в первом порядке.

Поскольку нас интересуют корреляции фотоотчетов, ограничимся вначале рассмотрением корреляционных функций $G^{(n,n)}$. Для них, очевидно, имеем¹⁾

$$\begin{aligned} G^{(n,n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) &= \\ &= g_n \prod_{k=1}^n V^*(x_k) \prod_{l=n+1}^{2n} V(x_l), \end{aligned} \quad (8.58)$$

¹⁾ Этот результат для $G^{(n,n)}$ впервые был получен Титулаефом и Глаубером [8.3].

где мы положили

$$g_n \equiv g_{n,n} \equiv \frac{\langle b^{+n} b^n \rangle}{\langle b^+ b \rangle^n}. \quad (8.59)$$

Все эти коэффициенты — действительные неотрицательные числа. Совокупность чисел $\{g_n\}$ вместе с функцией $V(x)$, как нетрудно понять, характеризует скорости отсчетов для поля, когерентного в первом порядке. Если $g_n = 1$, $n = 1, 2, \dots, M$, то, следуя Глауберу, говорят, что поле имеет когерентность M -го порядка. Это связано с тем, что если $g_n = 1$ при всех n , то поле полностью когерентно, так как при этом $G^{(n,n)}$ имеет канонический вид (8.32). Условия (8.35) для $n \geq 2$ вместе с (8.58), очевидно, означают, что $g_n = 1$ при всех n ; поэтому вся совокупность соотношений (8.35) указывает на полную когерентность поля, как уже отмечалось выше.

Поучительно привести некоторые примеры матриц плотности и посмотреть, каковы соответствующие выражения для g_n . Если положить $M \equiv b^+ b$, то из (5.47) вытекает

$$g_n = \frac{\langle M \cdot (M-1) \cdot (M-2) \dots (M-[n-1]) \rangle}{\langle M \rangle^n} \equiv \frac{\langle M! / (M-n)! \rangle}{\langle M \rangle^n}. \quad (8.60)$$

Следовательно, если $\rho = |\tilde{m}\rangle \langle \tilde{m}|$ — чистое собственное состояние оператора числа квантов, то

$$g_n = \frac{m!}{m^n (m-n)!}; \quad (8.61)$$

при всех $n > m$ функции g_n обращаются в нуль. Если

$$\rho = \frac{\exp(-\beta M)}{\langle \exp(-\beta M) \rangle}, \quad (8.62)$$

что имеет место для «теплового» (или хаотического) распределения единственной возможной моды, то

$$g_n = n! \quad (8.63)$$

Доказательство соотношения (8.63). Если положить $\lambda \equiv e^{-\beta}$, то

$$\begin{aligned} \text{Sp} \left\{ \frac{M!}{(M-n)! e^{-\beta M}} \right\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \frac{m!}{(m-n)!} = \lambda^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m = \\ &= \lambda^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \frac{1}{1-\lambda} = \frac{n! \lambda^n}{(1-\lambda)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Следовательно, для $n = 0$ и $n = 1$

$$\text{Sp} \{e^{-\beta M}\} = (1 - \lambda)^{-1}, \quad \text{Sp} \{Me^{-\beta M}\} = \lambda (1 - \lambda)^{-2}.$$

Сопоставляя эти свойства, находим

$$g_n = \frac{[\lambda (1 - \lambda)^{-1}]^{-n} n! \lambda^n}{(1 - \lambda)^n} = n!,$$

что и требовалось.

Такое поле не может обладать когерентностью выше первого порядка. Для полной когерентности необходимо, чтобы $g_n = 1$ и тем самым $\langle b^{+n} b^n \rangle = \langle b^+ b \rangle^n$ для всех n . Следовательно, мы видим, что общее соотношение

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \langle b^{+n} b^n \rangle &= \langle : \exp(\lambda b^+ b) : \rangle = \langle \exp[\ln(1 + \lambda) b^+ b] \rangle = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (1 + \lambda)^m \rho_{mm} \end{aligned} \quad (8.64)$$

приводит к частному случаю

$$\sum_m (1 + \lambda)^m \rho_{mm} = \exp(\lambda \langle b^+ b \rangle). \quad (8.65)$$

откуда вытекает

$$\begin{aligned} \rho_{mm} &= \frac{1}{m!} \frac{d^m}{d\lambda^m} \exp(\lambda \langle b^+ b \rangle) \Big|_{\lambda=-1} = \\ &= \frac{\langle b^+ b \rangle^m}{m!} \exp(-\langle b^+ b \rangle). \end{aligned} \quad (8.66)$$

Таким образом, для полной когерентности необходимо, чтобы диагональные матричные элементы ρ_{mm} имели распределение Пуассона.

Следует отметить, что результат (8.57) имеет прямой аналог в обычном классическом рассмотрении функции $\Gamma^{(n, m)}$. Нетрудно видоизменить изложенный вывод (или дать ему иную интерпретацию) и показать, что условие когерентности первого порядка $|\gamma| \equiv 1$, или

$$|\Gamma^{(1, 1)}(x, y)|^2 = \Gamma^{(1, 1)}(x, x) \Gamma^{(1, 1)}(y, y), \quad (8.67)$$

приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n, m)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) &= \\ &= \gamma_{n, m} \prod_{k=1}^n V^*(x_k) \prod_{l=n+1}^{n+m} V(x_l) \end{aligned} \quad (8.68)$$

с некоторой функцией $V(x)$. Здесь коэффициенты:

$$\gamma_{n, m} \equiv \frac{\langle v^{*n} v^m \rangle}{\langle v^* v \rangle^{1/2(n+m)}} \quad (8.69)$$

определены с помощью некоторого классического ансамбля для одной комплексной переменной v . По аналогии с (8.58) можно написать

$$\begin{aligned} \Gamma^{(n, n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) &= \\ &= \gamma_n \prod_{k=1}^n V^*(x_k) \prod_{l=n+1}^{2n} V(x_l), \end{aligned} \quad (8.70)$$

где величины

$$\gamma_n \equiv \gamma_{n, n} \equiv \frac{\langle v^{*n} v^n \rangle}{\langle v^* v \rangle^n} \quad (8.71)$$

являются, очевидно, действительными положительными коэффициентами. Если же положить $X = v^* v$ и ввести определение (при соответствующем $\sigma \geq 0$)

$$\langle X^n \rangle \equiv \int_0^\infty X^n \sigma(X) dX, \quad (8.72)$$

то $\gamma_n \equiv \langle X^n \rangle / \langle X \rangle^n$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1} - \gamma_n &= \int_0^\infty \left(\frac{X}{\langle X \rangle} - 1 \right) \frac{X^n}{\langle X \rangle^n} \sigma(X) dX \geq \\ &\geq \int_0^\infty \left(\frac{X}{\langle X \rangle} - 1 \right) \frac{X^n}{\langle X \rangle^n} \sigma(X) dX - \\ &- \int_0^\infty \left(\frac{X}{\langle X \rangle} - 1 \right) \left(\frac{X^n}{\langle X \rangle^n} - 1 \right) \sigma(X) dX = \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{X}{\langle X \rangle} - 1 \right) \sigma(X) dX = 0, \end{aligned} \quad (8.73)$$

т. е. γ_n образуют неубывающую последовательность

$$1 \equiv \gamma_1 \leq \gamma_2 \leq \gamma_3 \leq \dots \leq \gamma_n \leq \dots \quad (8.74)$$

В силу этого свойства обычное классическое рассмотрение, очевидно, не может дать адекватного описания скоростей отсчетов для всех когерентных в первом порядке полей. Действительно, как мы уже видели, если в таком поле содержится не более m фотонов, то $g_n \equiv 0$ для всех $n > m$, что находится в прямом противоречии с требованием $\gamma_n \geq 1$ при всех n .

Необходимо отметить одно важное обстоятельство: при получении соотношений (8.58) [или даже их классических аналогов (8.70)], вытекающих из условия когерентности первого порядка, существенное значение имеет тот факт, что $G(x, y) \equiv V^*(x)V(y)$ во всем пространстве или что $\langle a_k^\dagger a_l \rangle \equiv z_k^* z_l$ для всех мод. Если эти соотношения известны лишь приближенно, то простая запись типа (8.58), вообще говоря, невозможна. Предположим, например, что вместо $\langle b_2^\dagger b_2 \rangle = 0$ [ср. (8.51)] имеем

$$\langle b_2^\dagger b_2 \rangle = \varepsilon, \quad (8.75)$$

где ε — произвольно малое, но положительное число, например $\varepsilon = 10^{-137}$. Что касается заселенности второй моды, то матрицу плотности можно взять в виде

$$\rho = \alpha |0\rangle \langle 0| + \beta \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2} |\tilde{n}_2\rangle \langle \tilde{n}_2|. \quad (8.76)$$

Здесь α и β выбраны так, чтобы выполнялись соотношения $\text{Sp}(\rho) = 1$ и $\text{Sp}(\rho b_2^\dagger b_2) = \varepsilon$; это означает, что β — малое ($\sim \varepsilon$), но положительное число. Тем не менее выражение для $G^{(2,2)}$ [или $\mathcal{G}^{(2,2)}$] содержит член

$$\text{Sp} \{ \rho (b_2^\dagger)^2 b_2^2 \} = -\varepsilon + \beta \sum_{n_2=1}^{\infty} \frac{1}{n_2} = \infty. \quad (8.77)$$

Следовательно, вклад второй моды, будучи совершенно незначительным в корреляционной функции $G^{(1,1)}$, полностью доминирует в $G^{(2,2)}$ и во всех корреляционных функциях высшего порядка. Это, очевидно,

нарушает справедливость общего результата (8.58). Если не исключить все примеры аналогичного типа на основании физических соображений¹⁾, то для определения корреляционных функций высших порядков трудно предложить что-либо другое, кроме прямых измерений.

Степени когерентности. В заключение приведем ряд определений, которые использовались различными авторами при рассмотрении частичной когерентности. Глаубер [8.2] ввел ряд нормированных корреляционных функций

$$g^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n}) = \frac{G^{(n, n)}(x_1, \dots, x_{2n})}{\prod_{k=1}^{2n} \{G^{(1, 1)}(x_k, x_k)\}^{1/2}}. \quad (8.78)$$

Здесь мы можем рассматривать функции $g^{(n)}$ как квантовые обобщения классической комплексной степени когерентности γ . Если $G^{(1, 1)}(x, x) = 0$ для некоторого значения x , то числитель тоже обращается в нуль; в таких случаях мы будем определять $g^{(n)}$ из условия непрерывности (если это окажется возможным). Из (8.35) с очевидностью вытекает, что выполнение условия

$$|g^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n})| = 1 \quad (8.79)$$

для всех значений аргументов и всех n обеспечивает полную когерентность поля. Вместе с тем из (8.58) следует, что для поля, когерентного в первом порядке,

$$|g^{(n)}(x_1, \dots, x_{2n})| = g_n \quad (8.80)$$

при любых значениях всех координат. Выше при рассмотрении очень важного примера, а именно случая

1) В этой связи надо отметить следующее. Пусть в математическое ожидание случайной величины x вносят основной вклад «далекие хвосты» функции распределения, полная вероятность которых $\sim \varepsilon \ll 1$. (В приведенном выше примере $x = b_2^{+2} b_2^{-2}$.) Тогда достоверное измерение этого математического ожидания требует чрезвычайно большого числа опытов, $N \gg 1/\varepsilon$. (Более строго: $N \gg \langle \Delta x^2 \rangle / \langle x \rangle^2$.) Поэтому само утверждение о существовании такого среднего (в приведенном примере $\langle x \rangle = G^{(2, 2)} = \infty$) не поддается экспериментальной проверке с помощью конечного числа опытов $N_0 < 1/\varepsilon$ и, следовательно, носит нефизический характер. — Прим. перев.

хаотического поля, которое обладает когерентностью первого порядка. Мы видели, что $g_n = n!$, следовательно, функции $g^{(n)}$ не обязательно должны быть меньше единицы.

Иной подход использовал Мета [8.5] в своем рассмотрении, проводившемся с целью обобщения классической степени когерентности γ . Мета следующим образом определяет последовательность «комплексных степеней когерентности четного порядка»:

$$g^{(n, n)}(x_1, \dots, x_{2n}) \equiv \frac{G^{(n, n)}(x_1, \dots, x_{2n})}{\left\{ \prod_{k=1}^{2n} G^{(n, n)}(x_k, x_k, \dots, x_k) \right\}^{1/2n}}. \quad (8.81)$$

Чтобы эта величина была определена, поле должно содержать n или более фотонов. Для определения всей последовательности $g^{(n, n)}$ нужно, чтобы в поле содержалось бесконечное число фотонов. Даже при такой нормировке величина $g^{(n, n)}$ все еще может быть сколь угодно большой. В самом деле, чтобы знаменатель выражения (8.81) не обращался в нуль, в каждой точке должно присутствовать n или более фотонов. Однако это условие может и не выполняться. Отвлекаясь от этих трудностей, Мета показал, что если для данного $n (= n_0)$ и для всех значений аргументов

$$|g^{(n, n)}(x_1, \dots, x_{2n})| = 1, \quad (8.82)$$

то это условие выполняется для всех $n \geq n_0$ и для всех аргументов.

Приведенный результат можно получить примерно так. Для $n = 1$ определения Меты и Глаубера совпадают, т. е. $g^{(1)} = g^{(1, 1)}$, поэтому условие

$$|g^{(1, 1)}(x, y)| = 1 \quad (8.83)$$

приводит к когерентности первого порядка. Отсюда следует, что функция $G^{(n, n)}$ определяется соотношением (8.58); если все $g_n \neq 0$, то нетрудно видеть, что соотношение (8.82) выполняется для всех n . Тогда, согласно рассмотрению Меты, поле, когерентное в первом порядке, будет считаться и «полностью когерентным в четных порядках».

В заключение обсудим определение, которое было введено и подробно исследовано Сударшаном [8.4]. При этом он в значительной мере руководствовался желанием использовать такие величины, которые являются более непосредственными обобщениями классической степени когерентности и в то же время могут служить удобной мерой чистоты возбужденных мод. Чтобы отличать настоящее определение от использованных предыдущих примеров, мы можем назвать эти степени «индексами когерентности». Именно, рассмотрим «индекс когерентности порядка n », определяемый соотношением

$$S^{(n, n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n}) \equiv \frac{G^{(n, n)}(x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{2n})}{[G^{(n, n)}(x_1, \dots, x_n; x_n, \dots, x_1) G^{(n, n)}(x_{2n}, \dots, x_{n+1}; x_{n+1}, \dots, x_{2n})]^{1/2}} \quad (8.84)$$

Если знаменатель обращается в нуль при некоторых аргументах, то то же происходит и с числителем; тогда $S^{(n, n)}$ определяется из соображений непрерывности (если это возможно). Чтобы величина $S^{(n, n)}$ была определена при всех n , в поле должно присутствовать бесконечное число фотонов. Для $n = 1$ величина $S^{(1, 1)}$ совпадает с $g^{(1, 1)}$ и $g^{(1)}$. Следовательно, если $|S^{(1, 1)}(x_1; x_2)| = 1$ при всех аргументах, то поле «когерентно в первом порядке». Если к тому же все $g_n \neq 0$, то из (8.58) непосредственно следует, что в этом случае

$$|S^{(n, n)}(x_1, \dots, x_{2n})| = 1 \quad (8.85)$$

для всех n . Более того, как и при рассмотрении соотношения (8.81), можно показать, что из справедливости соотношения (8.85) для данного $n (= n_0)$ и для всех значений аргументов вытекает его справедливость для всех $n \geq n_0$ и всех аргументов (для которых эти функции определены). В обоих случаях поле излучения есть поле единственной моды, как в случае когерентности первого порядка, плюс примесь других состояний, в каждом из которых находится не более $n_0 - 1$ фотона. Поскольку величина $S^{(n, n)}$ чувствительна лишь к состояниям с числом фотонов не меньше n , то указанная примесь не повлияет на $S^{(n_0, n_0)}$.

Заслуживают упоминания две важные особенности индексов когерентности. Прежде всего покажем, что

$$0 \leq |S^{(n, n)}(x_1, \dots, x_{2n})| \leq 1 \quad (8.86)$$

при всех n и при всех аргументах, для которых отношение (8.84) определено. Возьмем произвольные операторы \mathcal{A} и \mathcal{B} и вспомним разложение (5.18) матрицы плотности, а также неравенство Шварца (5.3). Отсюда следует

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}^\dagger \mathcal{B} \rangle| &= \left| \sum_n \beta_n \langle \psi_n | \mathcal{A}^\dagger \mathcal{B} | \psi_n \rangle \right| \leq \\ &\leq \sum_n \beta_n |\langle \psi_n | \mathcal{A}^\dagger \mathcal{B} | \psi_n \rangle| \leq \\ &\leq \sum_n \left\{ \beta_n \langle \psi_n | \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} | \psi_n \rangle \right\}^{1/2} \left\{ \beta_n \langle \psi_n | \mathcal{B}^\dagger \mathcal{B} | \psi_n \rangle \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \left\{ \sum_n \beta_n \langle \psi_n | \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} | \psi_n \rangle \right\}^{1/2} \left\{ \sum_m \beta_m \langle \psi_m | \mathcal{B}^\dagger \mathcal{B} | \psi_m \rangle \right\}^{1/2} = \\ &= \langle \mathcal{A}^\dagger \mathcal{A} \rangle^{1/2} \langle \mathcal{B}^\dagger \mathcal{B} \rangle^{1/2}, \end{aligned} \quad (8.87)$$

т. е. обобщенное неравенство Шварца. Полагая

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= A(x_n) A(x_{n-1}) \dots A(x_1), \\ \mathcal{B} &= A(x_{n+1}) A(x_{n+2}) \dots A(x_{2n}), \end{aligned}$$

получаем требуемое неравенство для $S^{(n, n)}$.

Вторая особенность индекса когерентности, которую мы хотели бы подчеркнуть, связана с его интерпретацией как индекса видности. Как уже говорилось, величина $1 \pm |\gamma_{12}(\tau)|$ описывает относительные экстремумы интенсивности в соответствующем эксперименте с двумя щелями [см. (1.23)]. Поэтому естественно считать, что величина

$$1 \pm |S^{(n, n)}(x_1, \dots, x_{2n})|$$

представляет экстремумы n -кратных корреляций интенсивности в указанных точках. Следовательно, величину

$$\mathcal{V}^{(n, n)} = |S^{(n, n)}(x_1, \dots, x_{2n})| \quad (8.88)$$

можно рассматривать как обобщенный «индекс видности». Из сделанных выше замечаний следует, что

если для некоторого n_0 измерения дают $\mathcal{U}^{(n_0, n_0)} \equiv 1$, то можно с уверенностью утверждать, что в поле возбуждена одна мода, описываемая модовой функцией $V(x)$ и моментами $g_{n, m}$ [см. (8.55)], плюс примесь состояний, в каждом из которых находится не более $n_0 - 1$ фотона. Для того чтобы измерить такую величину интерферометрическими методами, в общем случае необходимо использовать системы, позволяющие осуществить нелинейное смешивание пучков и получить таким образом волновые поля, пропорциональные произведению амплитуд волновых полей в нескольких точках.

Согласно (8.11), любую из нормированных корреляционных функций можно интерпретировать как нормированные формы скоростей многофотонных совпадений. Измерение этих последних дает один из возможных способов определения величин $g^{(n)}$, $g^{(n, n)}$ и рассмотренных здесь индексов когерентности $S^{(n, n)}$.

§ 3. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОТООТСЧЕТОВ

А. Скорости и отсчеты для одной нормальной моды

Прежде чем переходить к выводу выражения для распределения отсчетов (наблюдаемых на конечном отрезке времени) для произвольного состояния поля, удобно провести рассмотрение более простого случая в предположении, что возбуждена только одна нормальная мода поля излучения. Обсудим на этом примере как скорость счета, так и распределения отсчетов для конечных интервалов времени.

Введем следующие простые обозначения операторов рождения и уничтожения для нашей выделенной нормальной моды:

$$a^{\dagger}(t) = e^{i\omega t} a^{\dagger}, \quad (8.89a)$$

$$a(t) = e^{-i\omega t} a. \quad (8.89б)$$

Скорости счета, соответствующие такому полю, можно представить в виде

$$\pi(p) = \alpha_0^p \langle a^{\dagger}(t_1) \dots a^{\dagger}(t_p) a(t_p) \dots a(t_1) \rangle. \quad (8.90)$$

Коэффициент α_0 связан с множителем квантовой эффективности α через разложение поперечного вектора-потенциала по нормальным модам. В частности, непосредственно из (7.179а) следует, что

$$\alpha_0 = \frac{a\hbar}{2\omega L^3}. \quad (8.91)$$

В силу (8.89) скорость $\pi(p)$ в действительности не зависит от всех временных аргументов:

$$\pi(p) = \alpha_0^p \langle (a^\dagger)^p a^p \rangle. \quad (8.92)$$

Следовательно, в частности, $\pi(p)$ есть скорость одно-временного поглощения p фотонов, скажем при $t = 0$.

Интересно заметить, что величину $\pi(p)$, рассматриваемую как скорость одновременного поглощения p фотонов, можно вывести с помощью несколько иных соображений. Если считать, что мы имеем дело с «событием», при котором само поле теряет p фотонов, то возможно несколько взаимно исключающих способов осуществления этого события. В частности, можно определить скорость в предположении, что имеется p или $p + 1, \dots$ или в общем случае $p + n$ фотонов с вероятностью

$$P(p + n) \equiv \text{Sp} \{ \rho | p + n \rangle \langle p + n | \}. \quad (8.93)$$

Заметим далее, что число способов, которыми можно выбрать p фотонов из имеющихся $p + n$ фотонов, равно $p! \binom{p+n}{p} = (p+n)!/n!$, если рассматривать каждый определенный порядок выбора как отдельный способ. Пренебрегая множителем пропорциональности α_0^p , видим, что скорость одновременного поглощения p фотонов описывается выражением

$$\pi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p+n)!}{n!} P(p+n). \quad (8.94)$$

В соответствии с (5.52)

$$\frac{\sqrt{(p+n)!}}{\sqrt{n!}} |p+n\rangle = \frac{(a^\dagger)^{p+n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle = (a^\dagger)^p |n\rangle,$$

поэтому находим

$$\begin{aligned} \pi(p) &= \sum_{n=0}^{\infty} \text{Sp} \{ \rho (a^+)^p | n \rangle \langle n | a^p \} = \\ &= \text{Sp} \{ \rho a^{+p} a^p \} = \langle (a^+)^p a^p \rangle, \end{aligned} \quad (8.95)$$

т. е. ту величину, которую мы и намеревались получить. Для ясности здесь предполагалось, что имеется лишь одна мода, но это не играет существенной роли для хода рассуждений.

Следующая наша задача состоит в выводе формулы для вероятностей отсчетов из скоростей счета по-прежнему в предположении, что возбуждена только одна нормальная мода. Иначе говоря, мы хотим знать вероятность того, что детектор регистрирует m фотонов за временной интервал T . Приведем два различных способа вывода выражений для $P(m, T)$.

Многоатомный детектор. Первый метод нахождения $P(m, T)$ приблизительно аналогичен использованному Глаубером [8.2]. Представим себе детектор, состоящий из N атомов, где N — очень большое число, которое в конце мы устремим к бесконечности. Предположим далее, что $s^p \langle a^{+p} a^p \rangle$ есть скорость поглощения p фотонов заданными атомами, число которых также равно p (подразумевается, что все атомы действуют как независимые идентичные системы!). Здесь s — чувствительность отдельного атомного детектора, которую мы считаем чрезвычайно малой, порядка N^{-1} . Так как скорость столь мала, вероятность того, что p заданных атомов за время T поглотят p фотонов, дается выражением

$$s^p \int_0^T \dots \int_0^T \langle a^{+p} a^p \rangle dt_1 \dots dt_p = s^p T^p \langle a^{+p} a^p \rangle = \langle : (sT a^+ a)^p : \rangle, \quad (8.96)$$

причем время T должно удовлетворять условию $\langle : (sT a^+ a)^p : \rangle \ll 1$. Из этого выражения следует, что вероятность события, в котором $p-1$ заданных атомов

поглощают и один заданный атом не поглощает, есть

$$\begin{aligned} \langle : (sT a^\dagger a)^{p-1} : \rangle - \langle : (sT a^\dagger a)^p : \rangle = \\ = \langle : (sT a^\dagger a)^{p-1} (1 - sT a^\dagger a) : \rangle. \quad (8.97) \end{aligned}$$

Методом индукции получаем, что вероятность события, в котором $p-r$ заданных атомов поглощают фотоны и r заданных атомов не поглощают их, по истечении времени T есть

$$\langle : (sT a^\dagger a)^{p-r} (1 - sT a^\dagger a)^r : \rangle. \quad (8.98)$$

Теперь найдем вероятность $P(m, T)$ того, что точно m фотонов были поглощены в N -атомном детекторе. Она, очевидно, равна произведению числа различных способов, которыми можно получить этот процесс, на элементарную вероятность каждого события, а именно

$$P(m, T) = \frac{N!}{(N-m)! m!} \langle : (sT a^\dagger a)^m (1 - sT a^\dagger a)^{N-m} : \rangle. \quad (8.99)$$

В пределе, когда $N \rightarrow \infty$ и $s \rightarrow 0$, а $Ns = \alpha_0$ является конечным, находим

$$P(m, T) = \left\langle : \frac{(\alpha_0 T a^\dagger a)^m}{m!} \exp(-\alpha_0 T a^\dagger a) : \right\rangle. \quad (8.100)$$

Так как мы перешли к пределу $s \rightarrow 0$, это выражение должно быть справедливым при всех T .

Пределы применимости. Практически говоря, такое заключение вполне верно, но в строгом смысле (8.100) не может выполняться при всех T . Чтобы понять, что это довольно общее свойство, удобно воспользоваться производящей функцией

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T) &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} (1-\lambda)^m P(m, T) = \\ &= \langle : \exp(-\lambda \alpha_0 T a^\dagger a) : \rangle = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^p}{p!} \alpha_0^p T^p \langle a^{\dagger p} a^p \rangle = \\ &= \langle \exp(\ln[1 - \lambda \alpha_0 T] a^\dagger a) \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \lambda \alpha_0 T)^n P(n). \quad (8.101) \end{aligned}$$

Здесь мы применили соотношение (7.91а); $P(n)$ есть распределение фотонов в нашей выделенной моде. Чтобы функция $P(m, T)$ представляла собой настоящее распределение при всех T , т. е.

$$0 \leq P(m, T) \leq 1, \quad \sum_{m=0}^{\infty} P(m, T) = 1, \quad (8.102)$$

очевидно, должно выполняться условие $0 \leq Q(\lambda, T) \leq 1$ для всех T , пока $0 \leq \lambda \leq 1$. Рассмотрим, однако, чистое состояние с нечетным числом n_0 фотонов, для которого $P(n_0) = 1$, а все остальные $P(n)$ равны нулю. В этом случае при $0 < \lambda \leq 1$ получим $Q(\lambda, T) = (1 - \lambda \alpha_0 T)^{n_0} < 0$ при достаточно больших T , а именно при всех $T > (\lambda \alpha_0)^{-1} \geq \alpha_0^{-1}$.

Нетрудно показать, что ограничение этого типа является вполне общим и что для произвольного состояния $P(m, T)$ представляет собой настоящее распределение лишь при условии

$$T \leq \frac{1}{\alpha_0} = \frac{2\omega L^3}{\alpha \hbar}. \quad (8.103)$$

Кроме того, предельное распределение при $T = \alpha_0^{-1}$ есть как раз

$$P(m, \alpha_0^{-1}) = P(m). \quad (8.104)$$

Именно, в момент α_0^{-1} распределение отсчетов, принятых детектором, становится просто распределением фотонов в единственной нормальной моде поля.

Появление объема квантования в условии (8.103) показывает, что верхняя граница α_0^{-1} может быть сделана сколь угодно большой; таким образом, и вопрос становится в значительной мере академическим. Тем не менее поучительно понять причину ограничений этого типа. Предположим, например, что в нормальной моде содержится как раз один фотон, так что

$$P(m, T) = \langle 1 | : \frac{(\alpha_0 T a^\dagger a)^m}{m!} \exp(-\alpha_0 T a^\dagger a) : | 1 \rangle, \quad (8.105)$$

или, конкретнее,

$$P(0, T) = 1 - \alpha_0 T, \quad (8.106a)$$

$$P(1, T) = \alpha_0 T, \quad (8.106b)$$

и все остальные члены равны нулю. Ограничение $\alpha_0 T \ll 1$ здесь совершенно очевидно, но более важен тот факт, что этот результат по существу неправилен в любом случае: скорости, которые мы вывели с помощью теории возмущений, не учитывают должным образом распада начального состояния при временной эволюции.

Более удовлетворительный результат для примера с одним фотоном можно получить следующим образом. Начальные скорости, вычисленные по теории возмущений, по-прежнему верны, а именно

$$\pi(1) = \alpha_0 \langle a^\dagger a \rangle = \alpha_0, \quad \pi(p) \equiv 0, \quad p \geq 2. \quad (8.107)$$

В самом деле, α_0 есть правильная скорость поглощения фотона в *любой* данный момент времени при условии, что до этого не было зарегистрировано ни одного фотона. Поэтому величина $1 - \alpha_0 dt$ в любой данный момент времени представляет собой вероятность того, что фотон не будет зарегистрирован в интервале dt при условии, что фотоны не были зарегистрированы и до этого момента. Отсюда вытекает (в духе вычислений, приведенных в гл. 2)

$$P(0, T) = \left\langle \prod_t^{t+T} (1 - \alpha_0 dt) \right\rangle = \exp(-\alpha_0 T) \quad (8.108a)$$

и как следствие

$$P(1, T) = 1 - P(0, T) = 1 - \exp(-\alpha_0 T); \quad (8.108b)$$

с физической точки зрения такой результат значительно разумнее, нежели (8.106). Для времен, удовлетворяющих условию $\alpha_0 T \ll 1$, оба результата, очевидно, совпадают.

Стоит, пожалуй, заметить, что аналогичные ограничения налагаются на распределение (8.100) для любого состояния, для которого скорости счета $\pi(p)$ равны нулю при $p \geq M$ (для некоторого $M \geq 2$). Поэтому сле-

дует остерегаться чересчур буквальной интерпретации выражения (8.100) в применении ко всем состояниям и произвольным интервалам времени, пока размер «ящика» $L < \infty$. Тем не менее после того как мы обсудим случай, когда поле обладает всеми модами, и более физические состояния поля излучения, станет ясно, что эти трудности не имеют значения с практической точки зрения.

«Диагональное» представление по когерентным состояниям. Наш второй способ вывода распределения отсчетов $P(m, T)$ несколько отличается от использованного выше, хотя приводит к такому же результату. Напомним, что при выводе распределения Пуассона для отсчетов в гл. 2 существенное значение имело предположение о статистической независимости событий (т. е. отсчетов), происходящих в различных временных интервалах. Здесь ответ на вопрос о статистических зависимостях этих отсчетов содержится в выражении для скорости счета. Совместная вероятность того, что p фотонов будут зарегистрированы в моменты t_1, \dots, t_p в интервалах dt_1, \dots, dt_p , есть

$$\alpha_0^p \langle a^{\dagger p} a^p \rangle dt_1 \dots dt_p. \quad (8.109)$$

События будут статистически независимы, если вероятность можно представить в виде произведения элементарных вероятностей для отдельных событий, т. е. если для всех p

$$\alpha_0^p \langle a^{\dagger p} a^p \rangle dt_1 \dots dt_p = \prod_{l=1}^p \{ \alpha_0 \langle a^{\dagger} a \rangle dt_l \}. \quad (8.110)$$

Это, очевидно, просто означает, что для всех p должно выполняться условие

$$\langle a^{\dagger p} a^p \rangle = (\langle a^{\dagger} a \rangle)^p. \quad (8.111)$$

Именно такое условие выполняется для матрицы плотности чистого когерентного состояния $\rho = |z\rangle\langle z|$.

Так как для когерентного состояния отсчеты в разных временных интервалах статистически независимы,

можно просто привести результаты вычислений гл. 2 для элементарной скорости $\pi(1) = dp(t)/dt$, а именно

$$\frac{dp(t)}{dt} = \alpha_0 \langle a^\dagger a \rangle = \alpha_0 \langle z | a^\dagger a | z \rangle = \alpha_0 |z|^2. \quad (8.112)$$

В частности, получаем, что распределение отсчетов [ср. (2.2)] имеет вид

$$P(m, T | z) = \frac{(\alpha_0 T |z|^2)^m}{m!} \exp(-\alpha_0 T |z|^2). \quad (8.113)$$

Это есть распределение Пуассона со средним значением $\bar{m} = \alpha_0 T |z|^2$, и оно справедливо при *всех* T . Мы добавили индекс z , чтобы помнить, что имеем дело с когерентным состоянием.

Если воспользоваться общим соотношением (7.105) для диагональных матричных элементов упорядоченных операторов, то можно написать

$$\begin{aligned} P(m, T | z) &= \langle z | : \frac{(\alpha_0 T a^\dagger a)^m}{m!} \exp(-\alpha_0 T a^\dagger a) : | z \rangle = \\ &= \text{Sp} \left\{ |z\rangle \langle z| : \frac{(\alpha_0 T a^\dagger a)^m}{m!} \exp(-\alpha_0 T a^\dagger a) : \right\}. \end{aligned} \quad (8.114)$$

Для тех матриц плотности, которые могут быть записаны в виде нормированной линейной суперпозиции операторов проектирования на когерентные состояния:

$$\rho = \frac{1}{\pi} \int \Phi(z) |z\rangle \langle z| d^2z, \quad (8.115)$$

распределение отсчетов в соответствии с (8.100) можно получить непосредственно из формулы

$$\begin{aligned} P(m, T) &= \frac{1}{\pi} \int \Phi(z) P(m, T | z) d^2z = \\ &= \text{Sp} \left\{ \rho : \frac{(\alpha_0 T a^\dagger a)^m}{m!} \exp(-\alpha_0 T a^\dagger a) : \right\} = \\ &= \left\langle : \frac{(\alpha_0 T a^\dagger a)^m}{m!} \exp(-\alpha_0 T a^\dagger a) : \right\rangle. \end{aligned} \quad (8.116)$$

Если $\Phi(z)$ есть обычная плотность вероятности, то определенное таким образом распределение $P(m, T)$ с необходимостью будет настоящим распределением при всех T .

Ниже мы познакомимся с замечательным результатом (являющимся точным в смысле теории распределений); он состоит в том, что *всякую* матрицу плотности ρ можно записать в «диагональном» представлении (8.115) по когерентным состояниям. Совершенно очевидно, что весовая функция φ не может всегда быть положительной, так как иначе нельзя было бы построить матрицу плотности любых чистых состояний, за исключением когерентных. Необходимость отрицательных значений весовой функции видна также из того факта, что в противном случае распределения отсчетов $P(m, T)$ были бы для произвольного состояния настоящими распределениями при всех T , а мы уже приводили контр-примеры, показывающие, что это не так [см., например, (8.106)].

Следует подчеркнуть, что такие отрицательные весовые функции не приводят к каким-либо трудностям до тех пор, пока не нарушены основные правила. Поясним роль отрицательных весовых функций на простом примере. Предположим, что $P_2(n)$ и $P_3(n)$ являются настоящими распределениями вероятности; тогда такой же является и их взвешенная сумма $P_1(n) \equiv \frac{1}{2}P_2(n) + \frac{1}{2}P_3(n)$. Следовательно, соотношение

$$P_3(n) \equiv 2P_1(n) - P_2(n) \equiv \sum_{\alpha=1}^2 \varphi_{\alpha} P_{\alpha}(n) \quad (8.117)$$

определяет настоящее распределение вероятности и включает нормированную ($\sum \varphi_{\alpha} = 1$) линейную комбинацию весовых функций с отрицательными членами. Все свойства $P_3(n)$ можно вывести из (8.117). В частности, моменты равны $\langle n^p \rangle_3 = \sum \varphi_{\alpha} \langle n^p \rangle_{\alpha}$ и т. д.

Стоит отметить, что «диагональное» представление (8.115) для ρ приводит к выражению для квантовых распределений отсчетов [первая строка в (8.116)], которое формально совпадает с выражением, получающимся при стандартном классическом вычислении этого распределения. В этой формальной связи весовая функция $\varphi(z)$ является аналогом классического распределения. Мы увидим, что эта аналогия может быть плодотворно использована во многих приложениях.

Б. Распределения отсчетов для поля излучения

Точечные детекторы. Руководствуясь рассмотрением, проведенным для одной моды, не представляет большого труда определить распределение отсчетов для поля излучения. Рассмотрим вначале счетчик, чувствительность которого локализована в точке x пространства и одинакова для всех поляризаций. Тогда, согласно (8.9), скорость счета для совместного наблюдения n фотонов в точке \mathbf{r} в моменты t_1, t_2, \dots, t_n дается выражением

$$\alpha \sum_{\text{Поляриз.}} \left\langle \prod_{k=1}^n A^{(-)}(t_k) \prod_{l=1}^n A^{(+)}(t_l) \right\rangle. \quad (8.118)$$

Здесь мы опустили общую переменную \mathbf{r} и не выписали явно векторные индексы для A . Предположим, что эту скорость можно представить в виде произведения

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \left\{ \alpha \sum_{\text{Поляриз.}} \langle A^{(-)}(t_k) A^{(+)}(t_k) \rangle \right\} = \\ = \prod_{k=1}^n \left\{ \alpha \langle \mathbf{A}^{(-)}(t_k) \cdot \mathbf{A}^{(+)}(t_k) \rangle \right\} \end{aligned} \quad (8.119)$$

для всех n и всех временных аргументов. В действительности это есть просто свойство когерентного состояния поля излучения, для которого $\rho = |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle \langle \{z_\lambda(\mathbf{k})\}|$. В таком состоянии отсчеты в отдельных временных интервалах статистически независимы; кроме того, в обозначениях (7.181a) элементарная скорость счета имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha \langle \mathbf{A}^{(-)}(t) \cdot \mathbf{A}^{(+)}(t) \rangle &= \alpha \langle \{z_\lambda(\mathbf{k})\} | \mathbf{A}^{(-)}(t) \cdot \mathbf{A}^{(+)}(t) | \{z_\lambda(\mathbf{k})\} \rangle = \\ &= \alpha \mathbf{V}^*(t) \cdot \mathbf{V}(t) = \alpha |\mathbf{V}(t)|^2. \end{aligned} \quad (8.120)$$

Следовательно, здесь снова применимы те соображения, которые были использованы в гл. 2 для вывода пуассоновской статистики, и для когерентного состояния находим

$$\begin{aligned} P(m, T+t, t | \{z_\lambda(\mathbf{k})\}) = \\ = \frac{\left(\alpha \int_t^{T+t} |\mathbf{V}(t')|^2 dt' \right)^m}{m!} \exp \left[-\alpha \int_t^{T+t} |\mathbf{V}(t')|^2 dt' \right]. \end{aligned} \quad (8.121)$$

Это распределение, разумеется, не обязательно должно быть стационарным (не зависящим от t).

Для тех матриц плотности, которые можно представить как линейные суперпозиции вида

$$\rho = \int \Phi(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}) |\{z_\lambda(\mathbf{k})\}\rangle \langle\{z_\lambda(\mathbf{k})\}| d\mu(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}) \quad (8.122)$$

[ниже мы придадим этому утверждению точный смысл, примерно аналогично тому, как это было сделано в связи с формулой (7.153)], получаем

$$\begin{aligned} P(m, T+t, t) &= \\ &= \int \Phi(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}) P(m, T+t, t | \{z_\lambda(\mathbf{k})\}) d\mu(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}) = \\ &= \left\langle : \frac{\left(\alpha \int_t^{T+t} \mathbf{A}^{(-)}(t') \cdot \mathbf{A}^{(+)}(t') dt' \right)^m}{m!} \times \right. \\ &\times \exp \left[-\alpha \int_t^{T+t} \mathbf{A}^{(-)}(t') \cdot \mathbf{A}^{(+)}(t') dt' \right] : \rangle, \quad (8.123) \end{aligned}$$

что и представляет собой искомое решение. В действительности, так же как и в случае одной моды, любую матрицу плотности ρ можно представить в виде (8.122) в смысле теории распределений, о чем подробнее будет сказано ниже. Следовательно, (8.123) представляет собой искомое распределение отсчетов для точечного счетчика и произвольного состояния ρ . Далее, производящая функция имеет вид

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T+t, t) &\equiv \sum_{m=0}^{\infty} (1-\lambda)^m P(m, T+t, t) = \\ &= \left\langle : \exp \left[-\lambda \alpha \int_t^{T+t} \mathbf{A}^{(-)}(t') \cdot \mathbf{A}^{(+)}(t') dt' \right] : \right\rangle. \quad (8.124) \end{aligned}$$

РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ ДЕТЕКТОРЫ. Рассмотрим теперь распределенный счетчик, который чувствителен в какой-то области пространства и времени. Для начала предположим, что можно рассматривать простой адмитанс

$\mathbf{S}^*(\mathbf{r}, t)$, который определяет относительную амплитуду и фазу вклада, вносимого полем. Это просто означает, что эффективное поле, входящее в выражения для скорости n -фотонных отсчетов, имеет вид

$$\mathbf{A}_e^{(+)}(t') = \int \mathbf{S}^*(\mathbf{r}, t' - t_1) \cdot \mathbf{A}_e^{(+)}(\mathbf{r}, t_1) d^3r dt_1. \quad (8.125)$$

В дополнение к этому можно также предположить, что специфические свойства \mathbf{S}^* не поддаются точному контролю, так что следует усреднить по различным возможным адмитансам. Для однофотонной скорости счета отсюда следует, что величину $\alpha \langle \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle$ необходимо заменить величиной общего вида

$$\sum \alpha \langle \mathbf{A}_e^{(-)}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{A}_e^{(+)}(\mathbf{r}, t') \rangle \equiv \alpha \langle \mathbf{A}^{(-)} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}^{(+)} \rangle, \quad (8.126)$$

где суммирование производится по подходящим \mathbf{S}^* и введено сокращенное обозначение

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(-)} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}^{(+)} &\equiv \int \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \mathbf{Y}(\mathbf{r}_1, t' - t_1; \mathbf{r}_2, t' - t_2) \cdot \\ &\cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}_2, t_2) d^3r_1 d^3r_2 dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (8.127)$$

Здесь тензор \mathbf{Y} представляет пространственные и временные спектральные свойства детектора. Практически наиболее важной идеализацией является случай, когда

$$\mathbf{Y} = \sigma(\mathbf{r}_1) \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \delta(t' - t_1) \delta(t' - t_2), \quad (8.128)$$

где $\sigma(\mathbf{r})$ — относительная плотность детектирующих атомов; она равна нулю вне детектора. В этом случае имеем просто

$$\mathbf{A}^{(-)} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}^{(+)} = \int \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t') \cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t') \sigma(\mathbf{r}) d^3r. \quad (8.129)$$

Для когерентного состояния n -фотонные скорости отсчетов по-прежнему могут быть представлены в виде произведения элементарных скоростей

$$\begin{aligned} \alpha \langle \mathbf{A}^{(-)} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}^{(+)} \rangle &= \alpha \mathbf{V}^* \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V} \equiv \\ &\equiv \alpha \int \mathbf{V}^*(\mathbf{r}_1, t_1) \cdot \mathbf{Y}(\mathbf{r}_1, t' - t_1; \mathbf{r}_2, t' - t_2) \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}_2, t_2) \times \\ &\times d^3r_1 d^3r_2 dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (8.130)$$

Отсюда следует, что распределение отсчетов этого «Y-детектора» для когерентного состояния определяется вместо (8.121) выражением

$$P_Y(m, T+t, t | \{z_\lambda(\mathbf{k})\}) = \frac{\left\{ \alpha \int_t^{T+t} (\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V}) dt' \right\}^m}{m!} \exp \left\{ -\alpha \int_t^{T+t} (\mathbf{V}^* \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{V}) dt' \right\}. \quad (8.131)$$

Тем не менее можно по-прежнему представить произвольную матрицу ρ в виде (8.122); тогда получаем, что для Y-детектора и состояния ρ

$$P_Y(m, T+t, t) = \int \varphi(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}) P_Y(m, T+t, t | \{z_\lambda(\mathbf{k})\}) d\mu(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}) = \left\langle : \frac{\left\{ \alpha \int_t^{T+t} \mathbf{A}^{(-)} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}^{(+)} dt' \right\}^m}{m!} \exp \left\{ -\alpha \int_t^{T+t} \mathbf{A}^{(-)} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}^{(+)} dt' \right\} : \right\rangle. \quad (8.132)$$

Модифицированная производящая функция, очевидно, имеет вид

$$Q_Y(\lambda, T+t, t) = \sum_{m=0}^{\infty} (1-\lambda)^m P_Y(\lambda, T+t, t) = \left\langle : \exp \left\{ -\lambda \alpha \int_t^{T+t} [\mathbf{A}^{(-)} \cdot \mathbf{Y} \cdot \mathbf{A}^{(+)}] dt' \right\} : \right\rangle. \quad (8.133)$$

Резюмируя, можно сказать, что, каковы бы ни были спектральные свойства детектора, распределения отсчетов являются по существу взвешенными распределениями Пуассона с весовой функцией $\varphi(\{z_\lambda(\mathbf{k})\})$, описывающей состояние ρ , и совершенно не зависят от свойств счетчика.

Случай нескольких детекторов. Обобщим полученные результаты на случай нескольких счетчиков, расположенных в различных местах. Для получения этого

результата заметим снова, что для когерентного состояния отсчеты в разные моменты времени и в разных точках статистически независимы. Для такого состояния совместная вероятность того, что q -й счетчик ($q = 1, 2, \dots, Q$) зарегистрирует m_q отсчетов за отрезок времени от t_q до $\tau_q \equiv t_q + T_q$, равна

$$\begin{aligned}
 P(\mathbf{m}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{t} | \{z_\lambda(\mathbf{k})\}) &\equiv \\
 &\equiv P(m_1, \dots, m_Q; \tau_1, \dots, \tau_Q; t_1, \dots, t_Q | \{z_\lambda(\mathbf{k})\}) = \\
 &= \prod_{q=1}^Q P_{Y_q}(m_q, \tau_q, t_q | \{z_\lambda(\mathbf{k})\}), \quad (8.134)
 \end{aligned}$$

где последние выражения определены в (8.131). Следовательно, совместное распределение отсчетов для произвольного состояния имеет вид

$$P(\mathbf{m}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{t}) = \int \varphi(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}) P(\mathbf{m}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{t} | \{z_\lambda(\mathbf{k})\}) d\mu(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}). \quad (8.135)$$

Выражения для $P(\mathbf{m}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{t})$ и для соответствующей производящей функции $Q(\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\tau}, \mathbf{t})$ в виде средних от нормально упорядоченных операторов очевидны, и мы их не выписываем. В последней главе мы еще будем иметь возможность обсудить совместные распределения отсчетов для некоторых случаев, представляющих экспериментальный интерес.

Свойства в случае бесконечного объема квантования. В заключение остается выяснить еще одну проблему, относящуюся ко всем рассмотренным распределениям отсчетов. Приведенные выше результаты все еще зависят неявным образом от величины объема квантования через их зависимость от параметра L . Мы уже видели, что некоторые распределения (для единственной нормальной моды) имели смысл лишь при временах, меньших чем $2\omega L^3/(\alpha\hbar)$. Эти технические трудности исчезают при переходе к пределу $L \rightarrow \infty$. Чтобы окончательно определить общие распределения отсчетов и их производящие функции для Y -детектора, можно считать, что предельный переход $L \rightarrow \infty$ включен в соотношения (8.132) и (8.133).

Основное свойство, благодаря которому распределения отсчетов асимптотически не зависят от L и тем самым хорошо ведут себя в пределе $L \rightarrow \infty$, состоит в том, что поля излучения с конечной полной энергией имеют вид волновых пакетов. Но сигнал типа волнового пакета может находиться вблизи реального (конечных размеров!) детектора лишь в течение конечного интервала времени. Как следствие этого, например, распределение для одного детектора $P(m, T + t, t)$ принимает при $T \rightarrow \infty$ свой предельный вид, определяемый интервалом времени, в течение которого волновой пакет находится вблизи детектора; оно не растет по величине до бесконечности, как это имело место для единственной нормальной моды в конечном объеме квантования.

§ 4. ОПТИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Выше уже говорилось о том, что любую матрицу плотности в определенном смысле можно представить в «диагональном» виде (8.115) или (8.122). Полезность такого представления была уже продемонстрирована; так, с его помощью быстро выводится распределение отсчетов. Действительно, как мы увидим, это представление оказывается чрезвычайно удобным вычислительным инструментом в ряде приложений. Чтобы глубже понять диагональное представление и придать ему точный смысл, особенно удобно начать с рассмотрения одной степени свободы.

А. «Диагональное» представление для одной степени свободы

Эвристические замечания. Общую проблему, которую мы собираемся рассмотреть, можно сформулировать так: необходимо представить оператор T в диагональном виде

$$T = \int \varphi(z) |z\rangle \langle z| d\mu. \quad (8.136)$$

Здесь мы положили $d\mu = \pi^{-1} d^2z$, чтобы включить в запись π^{-1} , и несколько обобщили соотношение (8.115), чтобы рассматривать более общие операторы, нежели

просто матрицу плотности. Основной вопрос состоит в следующем: какие операторы можно представить в таком виде и каковы соответствующие весовые функции $\varphi(z)$? Ясно, что если $z = x + iy$, то для функции вида

$$\varphi(z) = \pi \delta(z - z_0) \equiv \pi \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \quad (8.137)$$

получаем, что оператор $T = |z_0\rangle \langle z_0|$, т. е. представляет собой оператор проектирования на когерентное состояние. Если $\varphi(z) \equiv 1$, то мы приходим к основному разложению единицы (7.48).

Для операторов более общего вида удобно начать следующим образом. Рассмотрим диагональные матричные элементы по когерентным состояниям

$$\begin{aligned} T(z') &\equiv \langle z' | T | z' \rangle = \int \varphi(z) \langle z' | z \rangle \langle z | z' \rangle d\mu = \\ &= \int \varphi(z) \exp(-|z' - z|^2) d\mu. \end{aligned} \quad (8.138)$$

В гл. 7 мы уже видели, что оператор T полностью определяется этими диагональными матричными элементами. Следовательно, если вес $\varphi(z)$ удовлетворяет соотношению (8.138), то он автоматически удовлетворяет и более общему соотношению (8.136). Выражение (8.138) есть интеграл типа свертки, и это предоставляет нам возможность применять преобразование Фурье ко всем встречающимся выражениям. С этой целью воспользуемся формулировкой в фазовом пространстве, чтобы сосредоточить внимание на действительной и мнимой частях z . Иными словами, рассмотрим

$$\begin{aligned} T(p', q') &\equiv \langle p', q' | T | p', q' \rangle = \\ &= \int \varphi(p, q) \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar} [(p' - p)^2 + (q' - q)^2]\right\} d\mu, \end{aligned} \quad (8.139)$$

где теперь $d\mu = dp dq / (2\pi\hbar)$. Если ввести определения

$$\tilde{T}(x, k) \equiv \int e^{i(xp - kq)/\hbar} T(p, q) d\mu, \quad (8.140a)$$

$$\tilde{\varphi}(x, k) \equiv \int e^{i(xp - kq)/\hbar} \varphi(p, q) d\mu \quad (8.140б)$$

и заметить, что

$$\exp\left[-\frac{1}{2\hbar}(x^2+k^2)\right] = \int e^{i(xp-kq)/\hbar} \exp\left[-\frac{1}{2\hbar}(p^2+q^2)\right] d\mu, \quad (8.141)$$

то из теоремы о свертке следует

$$\tilde{T}(x, k) = \tilde{\varphi}(x, k) \exp\left[-\frac{1}{2\hbar}(x^2+k^2)\right].$$

Мы видим, таким образом, что

$$\tilde{\varphi}(x, k) = \tilde{T}(x, k) \exp\left[\frac{1}{2\hbar}(x^2+k^2)\right]. \quad (8.142)$$

Фактически мы пришли к утверждению, что всякий оператор T имеет диагональное представление¹⁾ с весом $\varphi(z)$, определяемым как фурье-образ от $\tilde{T}(x, k) \exp[(1/2\hbar)(x^2+k^2)]$.

Следовательно, чтобы придать смысл соотношению (8.136), нужно понять, что представляет собой преобразование Фурье соотношения (8.142). Ясно, что если (8.142) определяет абсолютно интегрируемую функцию, то фурье-образ хорошо определен, но так будет отнюдь не всегда. Чтобы глубже понять диагональное представление, нужно подробнее изучить величину $\tilde{T}(x, k)$. В этой связи уместно напомнить некоторые положения теории распределений²⁾, поскольку именно она придает

¹⁾ Соображения, показывающие исключительную общность диагонального представления операторов, впервые были высказаны Сударшаном [8.7].

²⁾ Употребляемый авторами термин «distribution» переводится здесь и ниже как «распределение». В советской математической литературе ему соответствует термин «обобщенная функция» — см., например, книгу Гельфанда и Шилова (И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов, Обобщенные функции, вып. 1, М., 1958). Употребление при переводе термина «распределение» связано еще и с тем, что в том же тексте авторы пользуются выражением *generalized function* (обобщенная функция), придавая ему смысл, несколько отличный от смысла термина *distribution*. Заметим также, что встречающееся ниже выражение «tempered distribution» мы переводим [следуя русскому изданию книги Шварца (Л. Шварц, Математические методы для физических наук, изд-во «Мир», 1965)] как «умеренное распределение»; в советской литературе иногда употребляется также выражение «обобщенная функция умеренного роста». — *Прим. перев.*

точный смысл понятию δ -функции Дирака и его обобщениям.

Распределения. Хотя большинство читателей интуитивно представляют себе δ -функцию как пикообразную сингулярную функцию, правильнее рассматривать ее как функционал или как разновидность оператора. Именно, для заданного класса функций она сопоставляет этим функциям комплексные числа, определяемые как значения функций, вычисленные при определенном значении аргумента. Символически обычно пишут (и мы уже неоднократно пользовались такой записью!)

$$f(x_0) = \int \delta(x - x_0) f(x) dx, \quad (8.143)$$

хотя, строго говоря, в правой части мы злоупотребляем обозначениями, поскольку не существует какой-либо величины, которая могла бы служить подынтегральным выражением при классическом определении интеграла по Лебегу. Существуют два способа, позволяющих сделать понятие $\delta(x - x_0)$ точным. В первом из них интеграл уже не используют, а просто считают, что $\delta_{x_0}\{f\} \equiv f(x_0)$, т. е. рассматривают δ_{x_0} как функционал, который сопоставляет функции ее значение в точке x_0 . Во втором подходе, более известном под названием теории обобщенных функций¹⁾, действие δ_{x_0} определяется с помощью равенства

$$f(x_0) = \lim_{M \rightarrow \infty} \int \delta_M(x - x_0) f(x) dx, \quad (8.144)$$

где $\delta_M(x)$ — некоторая последовательность функций с хорошим поведением [например, $\delta_M(x) = (M/\pi)^{1/2} \exp(-Mx^2)$]; для каждой из этих функций интеграл имеет смысл. Существует, очевидно, много последовательностей, которые могут служить определением данного распределения. Во всяком случае, удобно *определить* символическую правую часть равенства (8.143) с помощью одного из двух способов; это, конечно, неявно всегда и подразумевается.

¹⁾ См. примечание 2 на стр. 257. — *Прим. перев.*

Независимо от того, какое из определений было выбрано, δ -функция не определена для всех функций $f(x)$, так как x_0 может оказаться точкой разрыва. Отсюда берет начало понятие *пробных функций* (это как раз те самые гладкие функции, о которых шла речь в гл. 3!), т. е. понятие класса функций, на которых может быть определено данное распределение. Например, для δ -функции допустимые пробные функции должны быть непрерывными. Во многих случаях, однако, в качестве пробных функций удобно брать не все те функции, для которых определено данное распределение. Благодаря этому можно будет рассматривать одновременно несколько распределений, а также их линейные комбинации. Классическим примером здесь является множество таких пробных комплексных функций $f(x)$ действительной переменной x , каждая из которых бесконечное число раз дифференцируема и спадает на бесконечности быстрее любой отрицательной степени x (часто это кратко обозначается термином «быстро убывающая функция»). На каждой такой функции можно определить распределения, включающие любое конечное число производных δ -функции, или такие распределения, которые растут на бесконечности, как некоторый полином. В связи с таким свойством подобные распределения называют «умеренными распределениями»¹⁾, а пространство пробных функций называют пространством пробных функций для умеренных распределений и обозначают символом \mathcal{S} . Иначе говоря, умеренные распределения являются линейными функционалами²⁾ в пространстве \mathcal{S} : каждому элементу из \mathcal{S} они ставят в соответствие комплексное число. Отсюда не вытекает, что любое данное распределение (скажем, δ -функция) не может быть определено на более широком классе функций; это скорее значит,

1) Интерпретация понятия «полиномиального роста» требует осторожности. Хотя e^x не является умеренным распределением, функция $e^x \exp(-e^x)$ является умеренным распределением, поскольку это есть производная от ограниченной функции $-i \exp(-e^x)$.

2) Строго говоря, умеренные распределения суть непрерывные линейные функционалы; однако мы пренебрежем этим усложнением, так как определение непрерывности по пробным функциям требует рассмотрения неоправданно сложных топологий.

что удобно ограничиться рассмотрением некоторых конкретных пространств (например, \mathcal{S}), свойства которых поддаются подробному анализу.

Другое классическое пространство пробных функций, обозначаемое символом \mathcal{D} , состоит из комплексных функций $f(x)$ действительного переменного x , каждая из которых бесконечное число раз дифференцируема и равна нулю вне конечной области. Примером такой функции является $f(x) = \exp[-(1-x^2)^{-2}]$ при $|x| \leq 1$ и $f(x) \equiv 0$ во всех остальных точках. Поскольку этот класс пробных функций уже, чем \mathcal{S} , соответственно класс допустимых распределений будет в данном случае шире. В частности, функция $\varphi(x) = \exp(x^2)$ является распределением в \mathcal{D} [так как $\int \varphi(x) f(x) dx \equiv \varphi\{f\}$ определяет линейный функционал в \mathcal{D}], но это не умеренное распределение.

Фурье-преобразования от распределений определяются с помощью соответствующих фурье-преобразований их пространств пробных функций. Например, для каждой пробной функции $f(x)$ из \mathcal{S} можно ввести функцию

$$\tilde{f}(y) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-iyx} f(x) dx. \quad (8.145)$$

Нетрудно видеть, что это преобразование отображает пространство \mathcal{S} само на себя, так как фурье-образ бесконечно дифференцируемой быстро убывающей функции обладает теми же самыми свойствами. Следовательно, если по аналогии с формулой Парсеваля определить распределение $\tilde{\varphi}$ таким образом, чтобы равенство $\tilde{\varphi}\{\tilde{f}^*\} \equiv \varphi\{f^*\}$ выполнялось для всех $f(x)$ из \mathcal{S} (где φ — умеренное распределение), то и само это распределение будет умеренным. Например, если $\varphi = \delta(x - x_0)$, то $\tilde{\varphi} = (2\pi)^{1/2} \exp(-iyx_0)$; последнее распределение, очевидно, хорошо определено на всем пространстве \mathcal{S} .

Конечно, очень удобно, если преобразование Фурье оставляет инвариантным заданный класс пробных функций (а вместе с ними, следовательно, и соответствующие им распределения). Однако это не означает, что так должно быть всегда. Мы можем рассматривать также фурье-преобразование пробных функций из \mathcal{D} , каждая из которых обращается в нуль вне конечного интервала.

Соответствующие фурье-образы этих функций, определенные согласно (8.145), не могут также обращаться в нуль вне конечного интервала (поскольку являются граничными значениями целых функций). Следовательно, образуемое ими пространство (обозначаемое символом \mathcal{L}) не имеет с пространством \mathcal{D} ни одной общей функции, за исключением нулевой функции $f(x) = \tilde{f}(y) \equiv 0$. Следует отметить, однако, что так как \mathcal{D} является подпространством по отношению к \mathcal{S} , то то же самое относится к пространству фурье-образов \mathcal{L} . Распределения в \mathcal{D} [например, $\exp(-1/2x^2)$] могут быть также распределениями и в \mathcal{L} , но поскольку пространства различны, то так будет, вообще говоря, не всегда. Тем не менее каждое распределение $\tilde{\varphi}$ в \mathcal{L} получается путем фурье-преобразования распределения φ в \mathcal{D} с помощью тождества $\tilde{\varphi}\{\tilde{f}^*\} \equiv \varphi\{f\}$ для всех $f(x)$ из \mathcal{D} . На основе этого процесса можно ввести новые распределения, однако они полностью определены своими значениями на своем собственном пространстве пробных функций \mathcal{L} (даже если их и нельзя определить на \mathcal{D}). Подчеркнем еще раз, что распределения характеризуются тем классом пробных функций, на котором они определены.

Как уже отмечалось, обычно распределения определяются не через значения их функционалов (и соответствующих интегралов), а скорее, скажем, с помощью последовательности функций. В некоторых случаях даже затруднительно наглядно представить себе распределение в виде функции. Например, хотя функция $\delta''(x)$ равна нулю при $x \neq 0$, невозможно указать ее значение при $x = 0$. Еще труднее наглядно представить себе распределение на \mathcal{L} , являющееся фурье-образом от $\exp(x^2)$. Этот пример лишний раз показывает, насколько полезно определять распределения последовательностями настоящих наглядных и интегрируемых функций. Все наши распределения могут быть определены с помощью последовательностей, и именно таким способом мы будем пользоваться для придания различным распределениям точного смысла.

Приложение к «диагональным» представлениям. Характер функции $T(p, q)$ [см. (8.139)] зависит от конкрет-

ного вида оператора T . Если T — ограниченный оператор, то $T(p, q)$ — ограниченная непрерывная бесконечно дифференцируемая функция. Особый интерес представляют для нас те случаи, когда T — оператор с конечной следовой нормой (это включает случай матрицы плотности). Любой такой оператор может быть записан в канонической форме (5.18). В частности, для этих операторов

$$\begin{aligned} T(p, q) &= \langle p, q | T | p, q \rangle = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \langle p, q | \lambda_j \rangle \langle \psi_j | p, q \rangle, \end{aligned} \quad (8.146)$$

где β_j — некоторая абсолютно суммируемая последовательность, а $|\lambda_j\rangle$ и $|\psi_j\rangle$ — ортонормированные базисы. Для таких операторов из неравенства Шварца в непрерывном представлении вытекает, что

$$\begin{aligned} \int |T(p, q)| d\mu &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| \int |\langle p, q | \lambda_j \rangle \langle \psi_j | p, q \rangle| d\mu \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j| \equiv \|T\|_1 < \infty. \end{aligned} \quad (8.147)$$

Следовательно, фурье-образ — функция $\tilde{T}(x, k)$ — является непрерывной ограниченной (величиной $\|T\|_1$) функцией для каждого оператора с конечной следовой нормой. Отсюда получаем, что

$$\tilde{\varphi}(x, k) \equiv \tilde{T}(x, k) \exp\left[\frac{1}{2\hbar}(x^2 + k^2)\right] \quad (8.148)$$

является непрерывной функцией для каждого оператора с конечной следовой нормой. Существует верхняя граница этой функции

$$|\tilde{\varphi}(x, k)| \leq \|T\|_1 e^{(x^2 + k^2)/2\hbar}. \quad (8.149a)$$

В действительности, как будет показано ниже,

$$|\tilde{\varphi}(x, k)| \leq \|T\|_1 e^{(x^2 + k^2)/4\hbar}. \quad (8.149b)$$

Ясно, что все такие функции $\tilde{\varphi}(x, k)$ определяют распределения на \mathcal{D}_2 — пространстве функций $f(x, k)$ двух пе-

ременных; эти функции бесконечно дифференцируемы и равны нулю вне конечной области пространства x, k^1). Это очевидно, поскольку интеграл

$$\int \tilde{\varphi}(x, k) f(x, k) d\mu \quad (8.150)$$

(где $d\mu = dx dk / 2\pi\hbar$) хорошо определен для всех таких $f(x, k)$. В связи с диагональным представлением операторов с конечным следом для нас наиболее интересны фурье-образы таких функций. В общем случае такой фурье-образ является распределением, а не функцией.

Чтобы придать смысл такому фурье-образу в общем случае, воспользуемся представлением с помощью последовательностей. Именно, введем функции $\tilde{\varphi}_M(x, k)$, которые стремятся (в некотором смысле) к $\tilde{\varphi}(x, k)$ при $M \rightarrow \infty$; кроме того, предположим, что у каждой из этих функций существует фурье-образ $\varphi_M(p, q)$ — функция с хорошим поведением. Иными словами, с помощью весовых функций $\varphi_M(p, q)$ мы определяем последовательность операторов

$$T_M = \int f_M(p, q) |p, q\rangle \langle p, q| d\mu, \quad (8.151)$$

стремящуюся к заданному оператору T . Если бы нас интересовали только матричные элементы общего вида $\langle \lambda | T | \psi \rangle$, то было бы достаточно построить такую последовательность T_M , чтобы для всех $|\lambda\rangle$ и $|\psi\rangle$

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \langle \lambda | T_M | \psi \rangle = \langle \lambda | T | \psi \rangle. \quad (8.152)$$

В действительности, однако, нам требуется значительно более сильное ограничение, поскольку мы хотим вычислять следы различных выражений, содержащих матрицу плотности.

Те операторы, средние значения которых нужны нам для нахождения распределений отсчетов, являются в действительности ограниченными операторами. Средние

¹⁾ Хотя этот результат нам и не понадобится, отметим, что если T — любой ограниченный оператор или полином по a^\dagger и a , то $\tilde{\varphi}(x, k)$ всегда является распределением на \mathcal{D}_2 , хотя и не обязательно задается функцией.

значения ограниченных операторов определены для *каждого* состояния системы, и с общей квантовомеханической точки зрения они составляют максимальный общий класс наблюдаемых физических величин. В самом деле, такой класс содержит унитарный оператор, определяющий характеристическую функцию $C_b(s) \equiv \text{Sp}(\rho e^{is\hat{b}})$ для распределения любой мыслимой наблюдаемой. Если нас интересует представление матрицы плотности с помощью последовательности, то для того, чтобы такая последовательность имела практическую ценность, она должна допускать прямое вычисление среднего значения каждого ограниченного оператора. Иначе говоря, мы хотели бы, чтобы для каждого ограниченного оператора B выполнялось соотношение

$$\text{Sp}(TB) = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Sp}(T_M B), \quad (8.153)$$

а это значительно более сильное ограничение, нежели (8.152).

Чтобы дать практически более удобную формулировку этого требования, рассмотрим последовательность операторов с конечной следовой нормой, определяемую равенством

$$Y_M \equiv T - T_M \equiv \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(M)} |\lambda_j^{(M)}\rangle \langle \psi_j^{(M)}|, \quad (8.154)$$

где последнее соотношение является следствием канонической формы (5.18). Тогда, очевидно, для всякого ограниченного оператора B имеем

$$\begin{aligned} |\text{Sp}(Y_M B)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j^{(M)}| \cdot |\langle \psi_j^{(M)} | B | \lambda_j^{(M)} \rangle| \leq \\ &\leq \|B\| \sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j^{(M)}| \equiv \|B\| \cdot \|Y_M\|_1. \end{aligned} \quad (8.155)$$

Следовательно, если операторы T_M сходятся к T по так называемой «следовой норме», а именно так, что

$$\|T - T_M\|_1 \rightarrow 0 \quad (8.156)$$

при $M \rightarrow \infty$, то для каждого ограниченного оператора будет обеспечено выполнение формулы (8.153) для средних значений, к чему мы и стремились.

Нетрудно придумать последовательности операторов T_M , которые просто сходились бы к T . Для этого достаточно заменить $\tilde{f}(x, k)$ последовательностью функций $\tilde{f}_M(x, k)$, которые стремятся к $\tilde{f}(x, k)$. Суть проблемы состоит в отыскании такой последовательности, для которой выполнялось бы условие (8.156). Имеется два доказательства существования таких последовательностей¹⁾. Мы не будем повторять целиком ни одно из них, а наметим в общих чертах метод, принадлежащий Рокка [8.10], поскольку это проливает свет на некоторые интересные аспекты задачи.

Нам понадобятся некоторые дополнительные свойства; приведем их в основном без доказательств и лишь покажем, что эти свойства вполне правдоподобны. Из (7.8), (7.88) и (8.140) следует, что

$$\begin{aligned} \langle p, q | T | p, q \rangle &= \int \tilde{T}(x, k) e^{i(kq - xp)/\hbar} d\mu = \\ &= \int \tilde{T}(x, k) \langle p, q | : U[k, x] : | p, q \rangle d\mu. \end{aligned} \quad (8.157)$$

Поскольку диагональные элементы однозначно определяют T , получаем

$$T = \int \tilde{T}(x, k) : U[k, x] : d\mu \equiv \int t(x, k) U[k, x] d\mu, \quad (8.158)$$

где

$$t(x, k) \equiv \frac{\tilde{T}(x, k)}{\langle 0 | U[k, x] | 0 \rangle} = \tilde{T}(x, k) \exp\left[\frac{1}{4\hbar}(x^2 + k^2)\right]. \quad (8.159)$$

Следует отметить, что $t(x, k)$ является «весовой функцией Вейля» в известном вейлевском представлении операторов. Если перемножить два оператора, записанных в этом представлении, то в силу правил коммутации

$$\begin{aligned} AB &= \int a(x, k) b(x', k') U[k, x] U[k', x'] d\mu d\mu' = \\ &= \int a(x, k) b(x', k') \exp\left[\frac{i}{2\hbar}(kx' - xk')\right] \times \\ &\times U[k + k', x + x'] d\mu d\mu' \equiv \int (a \star b)(x, k) U[k, x] d\mu, \end{aligned} \quad (8.160)$$

¹⁾ Главный результат, о котором ниже будет идти речь, получили независимо Клаудер [8.9] и Рокка [8.10].

где величина

$$(a \star b)(x, k) \equiv \int a(x-x', k-k') b(x', k') \exp\left[\frac{i}{2\hbar}(kx' - xk')\right] d\mu' \quad (8.161)$$

носит название «свертки с умножением» (twisted convolution product).

Из классического анализа известно, что всякая функция $\tau(x)$ из L^1 дается произведением двух функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ из L^2 , а именно $\tau(x) = \alpha(x)\beta(x)$. Далее, из неравенства Шварца вытекает

$$\int |\tau(x)| dx = \int |\alpha(x)\beta(x)| dx \leq \left\{ \int |\alpha(x)|^2 dx \int |\beta(x)|^2 dx \right\}^{1/2}. \quad (8.162)$$

Для определенного типа операторов, действующих в гильбертовом пространстве, выполняются примерно аналогичные соотношения. В частности, всякий оператор T с конечной следовой нормой является произведением двух операторов A и B (так называемых операторов Гильберта — Шмидта): $T = AB$. Далее, имеет место соотношение, аналогичное (8.162):

$$\|T\|_1 = \|AB\|_1 \leq \|A\|_2 \cdot \|B\|_2, \quad (8.163)$$

где величина

$$\|A\|_2 \equiv \{\text{Sp}(A^\dagger A)\}^{1/2} \quad (8.164)$$

носит название «нормы Гильберта—Шмидта» (она, вообще говоря, отличается от $\|A\|$ и от $\|A\|_1$). Всякий оператор, для которого величина (8.164) конечна, принадлежит к классу операторов Гильберта—Шмидта. Этот класс замкнут по отношению к сложению операторов и умножению их на c -число и может быть превращен в гильбертово пространство (составленное из операторов!), если определить скалярное произведение соотношением

$$(A, B) \equiv \text{Sp}(A^\dagger B).$$

Предположим, что мы аппроксимируем $T = AB$ последовательностью $T_M = A_M B_M$, где A_M и B_M — операторы Гильберта — Шмидта. Тогда

$$\begin{aligned} \|T_M - T\|_1 &= \|A_M B_M - A_M B + A_M B - AB\|_1 \leq \\ &\leq \|A_M(B_M - B)\|_1 + \|(A_M - A)B\|_1 \leq \\ &\leq \|B_M - B\|_2 \cdot \|A_M\|_2 + \|A_M - A\|_2 \cdot \|B\|_2. \end{aligned} \quad (8.165)$$

Следовательно, чтобы обеспечить сходимость T_M по следовой норме, достаточно, чтобы как A_M , так и B_M сходились по норме Гильберта—Шмидта; это и является ключевым пунктом в рассуждениях Рокка.

Как мы сейчас покажем, такая характеристика требуемой сходимости особенно удобна. С учетом (8.157) и (8.147) получаем

$$\text{Sp}(T) = \int \langle p, q | T | p, q \rangle d\mu = \tilde{T}(0, 0) = t(0, 0). \quad (8.166)$$

Для оператора Гильберта—Шмидта B находим

$$\|B\|_2^2 = \text{Sp}(B^\dagger B) = (b^\dagger \star b)(0, 0) \equiv \int |b(x, k)|^2 d\mu, \quad (8.167)$$

где $b^\dagger(x, k) \equiv b^*(-x, -k)$. Это соотношение наглядно показывает, что класс операторов Гильберта—Шмидта B связан с пространством L^2 функций $b(x, k)$, причем связь отдельных элементов дается представлением Вейля (8.158). Отсюда видно, что если весовые функции Вейля $a_M(x, k) \rightarrow a(x, k)$ и $b_M(x, k) \rightarrow b(x, k)$ сходятся в смысле нормы в L^2 , то операторы $T_M = A_M B_M \rightarrow T = AB$ сходятся по следовой норме. Интуитивно ясно (это является также классическим результатом), что $a(x, k)$ [или $b(x, k)$] можно аппроксимировать (по норме в L^2) последовательностью пробных функций $a_M(x, k) \in \mathcal{D}_2$ [или $b_M(x, k) \in \mathcal{D}_2$], каждая из которых бесконечно дифференцируема и равна нулю вне конечной области. «Свертка с умножением» двух таких функций

$$\begin{aligned} t_M(x, k) &\equiv \\ &\equiv \int a_M(x - x', k - k') b_M(x', k') \exp\left[\frac{i}{2\hbar}(kx' - xk')\right] d\mu' \end{aligned} \quad (8.168)$$

также бесконечно дифференцируема и равна нулю вне конечной области. Следовательно, функция

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_M(x, k) &\equiv t_M(x, k) \exp\left[\frac{1}{4\hbar}(x^2 + k^2)\right] \equiv \\ &\equiv \tilde{T}_M(x, k) \exp\left[\frac{1}{2\hbar}(x^2 + k^2)\right] \quad (8.169)\end{aligned}$$

бесконечно дифференцируема и спадает на бесконечности быстрее любой отрицательной степени $(x^2 + k^2)$ (поскольку в действительности она равна нулю вне конечной области!). Как отмечалось ранее, фурье-образ $\varphi_M(p, q)$ любой такой функции тоже бесконечно дифференцируем и быстро убывает на бесконечности. Так как $\varphi_M(p, q)$ — весовая функция в диагональном представлении, мы полностью выполнили намеченную программу. Подведем итог.

Всякий оператор T с конечной следовой нормой может быть представлен последовательностью операторов с конечной следовой нормой

$$T_M \equiv \int \varphi_M(p, q) |p, q\rangle \langle p, q| d\mu, \quad (8.170a)$$

где функции $\varphi_M(p, q)$ бесконечно дифференцируемы и спадают на бесконечности быстрее любой обратной степени и где

$$\|T - T_M\|_1 \rightarrow 0. \quad (8.170b)$$

Конкретный пример последовательности φ_M приведен ниже.

Несколько расширяя рассуждения Рокка, можно получить нужный для физики результат, относящийся к матрице плотности. Так как всякая матрица плотности положительна, ее можно представить в виде $\rho = B^\dagger B$, где B — оператор Гильберта — Шмидта. Следовательно, можно взять такую аппроксимирующую последовательность $A_M = B_M^\dagger$ [т. е. $a_M(x, k) = b_M^*(-x, -k)$], что $\rho_M \equiv B_M^\dagger B_M$ будет положительным оператором при всех M . При таком выборе $\tilde{\varphi}_M^*(x, k) = \tilde{\varphi}_M(-x, -k)$, откуда следует, что функция $\varphi_M(p, q)$ действительна. Поскольку нормировку можно обеспечить тривиальным

способом, всякую матрицу ρ можно рассматривать как возможную матрицу плотности. Таким образом, можно утверждать следующее:

Всякую матрицу ρ можно представить последовательностью матриц плотности

$$\rho_M \equiv \int \varphi_M(p, q) |p, q\rangle \langle p, q| d\mu, \quad (8.171a)$$

где действительные функции $\varphi_M(p, q)$ бесконечно дифференцируемы и спадают на бесконечности быстрее любой обратной степени и где

$$\|\rho - \rho_M\|_1 \rightarrow 0. \quad (8.171b)$$

Ниже мы рассмотрим примеры матриц плотности, представляющие интерес для физики, хотя большая часть результатов применима к произвольным операторам с конечной следовой нормой.

Отметим еще раз то свойство, о котором говорилось в самом начале наших рассуждений. Именно, для любого ограниченного оператора B имеем

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= \text{Sp}(\rho B) = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Sp}(\rho_M B) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Sp} \int \varphi_M(p, q) |p, q\rangle \langle p, q| B d\mu = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \int \varphi_M(p, q) \langle p, q| B |p, q\rangle d\mu \equiv \\ &\equiv \int \varphi(p, q) \langle p, q| B |p, q\rangle d\mu \equiv \\ &\equiv \int \varphi(z) \langle z| B |z\rangle d\mu. \end{aligned} \quad (8.172)$$

При получении третьей строки было использовано неравенство

$$\int |\varphi_M(p, q)| d\mu < \infty,$$

тогда как два последних выражения определяют распределение $\varphi(p, q)$ — или в комплексной форме $\varphi(z)$ — с помощью хорошо определенной предельной процедуры. Разумеется, не всякое распределение $\varphi(z)$, определенное таким образом, является «ненадежным»; многие из них

соответствуют функциям с хорошим поведением, для которых последнее выражение можно рассматривать как определенный в обычном смысле интеграл.

Следует отметить ту роль (на первый взгляд не существенную), которую играет в нашем основном результате (8.172) свойство единственности оператора B при заданных диагональных элементах $\langle z|B|z\rangle$. Ясно, что если бы для некоторого $B \neq 0$ все эти диагональные элементы обращались в нуль, то из (8.172) вытекал бы абсурдный результат для многих матриц плотности.

Приведем другую формулировку нашего основного результата (8.171), выявляющую практическое удобство аппроксимации. Ограничимся такими операторами, для которых $\|B\| \leq 1$. Это подмножество ограниченных операторов включает все унитарные операторы или операторы проектирования. Оно включает также такие представляющие физический интерес операторы, средние значения которых дают распределения отсчетов.

Из свойства

$$|\text{Sp}(\rho B) - \text{Sp}(\rho_M B)| \leq \|\rho - \rho_M\|_1 \cdot \|B\| \leq \|\rho - \rho_M\|_1, \quad (8.173)$$

справедливого при всех $\|B\| \leq 1$, видно, что средние значения всех таких операторов могут быть *равномерно* аппроксимированы.

Иными словами, для *любой* матрицы плотности ρ , описывающей систему, среднее $\langle B \rangle \equiv \text{Sp}(\rho B)$ *любого* ограниченного оператора ($\|B\| \leq 1$) может быть *равномерно* (т. е. независимо от конкретного вида B) с *произвольной* точностью представлено с помощью интеграла, понимаемого в обычном смысле:

$$\int \varphi(\rho, q) \langle \rho, q | B | \rho, q \rangle d\mu, \quad (8.174)$$

где $\varphi(\rho, q)$ — бесконечно дифференцируемая действительная быстро убывающая функция.

Конкретные представления последовательностями.

Выше уже отмечалось, что функция $\varphi(z)$ может быть представлена последовательностью весовых функций $\varphi_M(z)$ с хорошим поведением. Чтобы в реальных случаях выбрать подходящую последовательность, можно

обратиться к проведенному выше построению. Например, пусть состояние задано в виде $\rho = B^\dagger B$. Не теряя общности, можно выбрать единственный оператор B , исходя из требования, что $B = B^\dagger \geq 0$, а именно $B = \rho^{1/2}$.

Заметим, что из (8.140а) следует

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x, k) &= \int e^{-i(kq - xp)/\hbar} \langle p, q | T | p, q \rangle d\mu = \\ &= \int \exp[-(uz^* - u^*z)] \langle p, q | T | p, q \rangle d\mu, \end{aligned} \quad (8.175)$$

где

$$u \equiv \frac{(x + ik)}{(2\hbar)^{1/2}}, \quad z \equiv \frac{(q + ip)}{(2\hbar)^{1/2}}. \quad (8.176)$$

Используя свойства когерентных состояний как собственных векторов и соотношение (7.26), можно написать

$$\begin{aligned} \tilde{T}(x, k) &= \int \langle p, q | \exp(-ua^\dagger) T \exp(u^*a) | p, q \rangle d\mu = \\ &= \text{Sp} \{ \exp(-ua^\dagger) T \exp(u^*a) \} = \\ &= \text{Sp} \{ T \exp(u^*a) \exp(-ua^\dagger) \} = \\ &= \text{Sp} \{ T \exp(u^*a - ua^\dagger) \} \exp\left(\frac{1}{2} |u|^2\right). \end{aligned} \quad (8.177)$$

Учитывая (8.159), получаем

$$\begin{aligned} t(x, k) &= \text{Sp} \{ T U^\dagger [k, x] \} = \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \langle \psi_j | U^\dagger [k, x] | \psi_j \rangle. \end{aligned} \quad (8.178)$$

Этот ряд абсолютно сходится и определяет ограниченную непрерывную функцию. Очевидно, $|t(x, k)| \leq \sum |\beta_j| = \|T\|_1$, откуда с учетом (8.159) и (8.148) сразу следует неравенство (8.149б). В свою очередь весовая функция Вейля для $B = \rho^{1/2}$ имеет вид

$$b(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j^{1/2} \langle \psi_j | U^\dagger [k, x] | \psi_j \rangle. \quad (8.179)$$

Здесь в общем случае имеет место сходимость в смысле L^2 . Заданный элемент $b(x, k)$ из L^2 можно в принципе

непосредственно аппроксимировать пробными функциями из \mathcal{D}_2 с тем, чтобы с помощью (8.168) определить подходящую последовательность.

Можно, однако, аппроксимировать непосредственно $t(x, k)$ вместо того, чтобы использовать аппроксимации для $b(x, k)$. В этом случае устанавливают существование в последовательности с тремя индексами такой подпоследовательности

$$t_M(x, k) \equiv t_{N[M], L[M]}^{J[M]}(x, k), \quad (8.180)$$

которая обеспечивает желательные свойства $\varphi_M(p, q)$ и T_M , а именно $\|T_M - T\|_1 \rightarrow 0$. Основная последовательность с тремя индексами имеет вид

$$\begin{aligned} t_{N,L}^J(x, k) &\equiv \exp[-W_L(x, k)] t_N^J(x, k) \equiv \\ &\equiv \exp[-W_L(x, k)] \sum_{j=1}^J \beta_j \langle \psi_j; N | U^+[k, x] | \psi_j; N \rangle, \end{aligned} \quad (8.181)$$

где мы положили

$$|\psi_j; N\rangle \equiv \sum_{n=0}^N |n\rangle \langle n | \psi_j \rangle. \quad (8.182)$$

Здесь $|n\rangle$ — обычные собственные состояния осциллятора и введена функция (в системе единиц, в которой $\hbar = 1$)

$$W_L(x, k) \equiv f(x - L) + f(-x - L) + f(k - L) + f(-k - L) \quad (8.183)$$

с

$$\begin{aligned} f(y) &\equiv y^4 \exp\left(-\frac{1}{y^2}\right) & (y \geq 0), \\ f(y) &\equiv 0 & (y < 0). \end{aligned} \quad (8.184)$$

Такая последовательность, весьма запутанная и громоздкая с точки зрения практического применения, удовлетворяет, тем не менее, требуемому критерию сходимости по следовой норме. Усечение ряда и аппроксимация состояний [см. (8.182)] введены для того, чтобы сделать $t_N^J(x, k)$ пробной функцией из \mathcal{S}_2 (бесконечно дифференцируемой и быстро убывающей); множитель

$\exp(-W_L)$ обеспечивает быстрое убывание (и бесконечную дифференцируемость) функции

$$\tilde{\varphi}_{N,L}^J(x, k) \equiv t_{N,L}^J(x, k) \exp\left[\frac{1}{4\hbar}(x^2 + k^2)\right]. \quad (8.185)$$

Заметим, что если $t(x, k)$ сама уже оказывается пробной функцией из \mathcal{S}_2 , то достаточно рассматривать просто

$$t_M(x, k) \equiv \exp[-W_M(x, k)] t(x, k) \quad (8.186)$$

или, иными словами,

$$\tilde{\varphi}_M(x, k) \equiv \exp[-W_M(x, k)] \tilde{\varphi}(x, k). \quad (8.187)$$

В этом случае $\varphi_M(p, q)$ является пробной функцией из \mathcal{S}_2 и $\|T_M - T\|_1 \rightarrow 0$, что и требовалось.

Сразу же добавим, что приведенные здесь конкретные последовательности не единственны; в некоторых случаях могут оказаться полезными и другие последовательности.

Смысл и некоторые примеры. Каким бы ни было состояние ρ системы, среднее *любого* ограниченного оператора определяется соотношением (8.172). Особенно просты выражения для нормально упорядоченных операторов $B = : \mathcal{O}(a^\dagger, a) :$, именно

$$\begin{aligned} \langle : \mathcal{O}(a^\dagger, a) : \rangle &= \frac{1}{\pi} \int \varphi(z) \langle z | : \mathcal{O}(a^\dagger, a) : | z \rangle d^2z = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \varphi(z) \mathcal{O}(z^*, z) d^2z. \end{aligned} \quad (8.188)$$

Нормально упорядоченная производящая функция [см. (8.23)] имеет вид

$$\langle \exp(ua^\dagger) \exp(-u^*a) \rangle = \frac{1}{\pi} \int \varphi(z) \exp(uz^* - u^*z) d^2z. \quad (8.189)$$

Можно считать, что она связана с фурье-образом функции φ . Именно, если

$$u \equiv \frac{x + ik}{\sqrt{2\hbar}},$$

то

$$\langle \exp(ua^\dagger) \exp(-u^*a) \rangle = \tilde{\varphi}(-x, -k). \quad (8.190a)$$

Умножая слева на $\exp(-1/2|u|^2)$, получаем общее соотношение для характеристической функции состояния ρ :

$$\begin{aligned} \langle \exp(ua^\dagger - u^*a) \rangle &= \langle U[k, x] \rangle = \\ &= \tilde{\varphi}(-x, -k) \exp\left[-\frac{1}{4\hbar}(x^2 + k^2)\right]. \end{aligned} \quad (8.190б)$$

В качестве другого примера рассмотрим еще раз производящую функцию (8.101) при $0 \leq \lambda\alpha_0 T < 1$. Соотношение (8.101) означает, что производящая функция для распределения отсчетов есть среднее от

$$Q_\lambda \equiv \exp(\ln[1 - \lambda\alpha_0 T] a^\dagger a) (= : \exp(-\lambda\alpha_0 T a^\dagger a) :). \quad (8.191)$$

Поскольку $\ln[1 - \lambda\alpha_0 T] \leq 0$, этот оператор удовлетворяет условию $\|Q_\lambda\| = 1$. Так как Q_λ — ограниченный оператор, наверняка имеем

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T) &\equiv \langle Q_\lambda \rangle = \langle : \exp(-\lambda\alpha_0 T a^\dagger a) : \rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \varphi(z) \exp(-\lambda\alpha_0 T |z|^2) d^2z. \end{aligned} \quad (8.192)$$

Распределение отсчетов дается соотношением

$$Q(\lambda, T) = \sum_{m=0}^{\infty} (1 - \lambda)^m P(m, T), \quad (8.193а)$$

или, в операторной форме,

$$Q_\lambda = \sum_{m=0}^{\infty} (1 - \lambda)^m \mathcal{P}_m, \quad (8.193б)$$

где

$$\mathcal{P}_m \equiv : \frac{(\alpha_0 T a^\dagger a)^m}{m!} \exp(-\alpha_0 T a^\dagger a) :. \quad (8.194)$$

Эти операторы неотрицательны при $\alpha_0 T \leq 1$, как это следует из замечаний, сделанных ранее в связи с

(8.103). При $\lambda = 0$ имеем $Q_0 = I = \sum_{m=0}^{\infty} \mathcal{P}_m$, так что $\|\mathcal{P}_m\| \leq 1$

при всех m . Свойство ограниченности позволяет утверждать, что

$$\begin{aligned} P(m, T) &= \langle \mathcal{P}_m \rangle = \left\langle : \frac{(\alpha_0 T a^\dagger a)^m}{m!} \exp(-\alpha_0 T a^\dagger a) : \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\pi} \int \varphi(z) \frac{(\alpha_0 T |z|^2)^m}{m!} \exp(-\alpha_0 T |z|^2) d^2z. \end{aligned} \quad (8.195)$$

В действительности можно утверждать даже большее, если обратиться к результату, полученному в связи с (8.174). Из него следует, что для любого состояния ρ определенной нормальной моды величины $P(m, T)$ можно вычислять при всех m и всех $T \leq \alpha_0^{-1}$ с произвольной точностью (например, с точностью $\pm 10^{-137}$) с помощью соотношения (8.195), где $\varphi(z)$ — бесконечно дифференцируемая быстро убывающая функция. Это свойство дает нам значительно больше, чем мы могли бы получить, рассматривая скорости отсчетов $\alpha_0^m \langle a^{\dagger m} a^m \rangle$. Мало того, что в общем случае их нельзя равномерно аппроксимировать; для многих состояний поля эти скорости или бóльшая их часть даже не существуют¹⁾!

Соотношения (8.188) и (8.195) со всей ясностью показывают, что диагональное представление позволяет вычислять нормально упорядоченные квантовомеханические выражения с помощью соотношений, *формально похожих* на классические выражения, если последние записаны в терминах аналитических сигналов. Такое сходство по форме играет важную роль не только потому, что может служить мнемоническим правилом и облегчать построение требуемых выражений, — оно дает нам в руки сравнительно простое и мощное средство изучения различных величин в квантовой теории когерентности. Сходство по форме отнюдь не означает, что квантовая теория *физически* эквивалентна классической, но говорит лишь о том, что ее можно привести к *формально* эквивалентному виду. Именно в таком смысле следует сформулировать «оптическую теорему эквивалентности» и именно так ее следует интерпретировать в общем случае.

Для большинства физических примеров, обычно встречающихся в тепловых или лазерных задачах, $\varphi(z)$ фактически является положительной действительной функцией, так что ее можно интерпретировать как нормальную плотность вероятности. В следующей главе в связи с конкретными моделями мы обсудим примеры, очень похожие на классические, а пока подробнее рассмотрим частный случай матрицы плотности, когда

¹⁾ См. примечание на стр. 237. — *Прим. перев.*

вес $\varphi(z)$ в самом деле является распределением рассмотренного выше типа и вида.

В качестве такого примера¹⁾ возьмем матрицу плотности $\rho_\omega = |0_\omega\rangle\langle 0_\omega|$ — чистое состояние, отвечающее основному состоянию осциллятора с частотой $\omega \neq 1$. Чтобы найти для этого состояния вес $\varphi(p, q)$, записанный в фазовом пространстве, заметим прежде всего (обозначив $\rho_\omega \equiv T_\omega$), что в соответствии с (7.82б)

$$\langle p, q | T_\omega | p, q \rangle = |\langle p, q | 0_\omega \rangle|^2 = \\ = \frac{1}{2} (\omega^{1/2} + \omega^{-1/2}) \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar(1+\omega)} [p^2 + \omega q^2] \right\}. \quad (8.196)$$

Далее,

$$\tilde{T}_\omega(x, k) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\hbar} [(1+\omega)x^2 + (1+\omega^{-1})k^2] \right\}; \quad (8.197)$$

нормировочный множитель легко определяется из условия $\tilde{T}_\omega(0, 0) = \text{Sp}(\rho_\omega) = 1$. Наконец, фурье-образ искомого веса, согласно (8.148), имеет вид

$$\tilde{\varphi}_\omega(x, k) = \exp \left\{ -\frac{1}{4\hbar} [(\omega-1)x^2 + (\omega^{-1}-1)k^2] \right\}. \quad (8.198)$$

Это выражение при $\omega < 1$ (или при $\omega > 1$) растет как экспонента от квадрата x (или k). Таким образом, вопрос о нахождении распределений $\tilde{\varphi}(x, k)$, определенных на пробных функциях в \mathcal{D}_2 (бесконечно дифференцируемых и равных нулю вне конечной области), является отнюдь не академическим.

Чтобы придать этому примеру смысл распределения в диагональном представлении, возможны два подхода. В прагматическом подходе исходят просто из общих выражений (8.190) для средних значений. В частности, получаем

$$\langle U[k, x] \rangle = \langle 0_\omega | U[k, x] | 0_\omega \rangle = \\ = \tilde{\varphi}_\omega(-x, -k) \exp \left[-\frac{1}{4\hbar} (x^2 + k^2) \right] = \\ = \exp \left\{ -\frac{1}{4\hbar} [\omega^{-1}k^2 + \omega x^2] \right\}. \quad (8.199)$$

¹⁾ Отметим, что этот пример имеет непосредственный физический смысл. Процесс нарастания колебаний одномодового параметрического генератора из квантовых флуктуаций приводит именно к таким состояниям. Подробнее об этом см. в работе: В. Р. Молю, R. J. Glauber, Phys. Rev., 160, 1076 (1967). — Прим. перев.

По случайным причинам это выражение совпадает с (7.121) при $K = 1$ для осциллятора с круговой частотой $\omega \neq 1$. Средние значения операторов, отличающихся от операторов Вейля $U[k, x]$, можно теперь извлечь в силу линейности из той информации, которая содержится в (8.199). Во многих отношениях при таком прагматическом подходе распределение $\varphi(z)$ рассматривают как функционал и задают теми значениями, которые он принимает для производящего ряда ограниченных операторов. Линейные суммы таких операторов позволяют построить все ограниченные операторы. В качестве производящего ряда при этом используются нормально упорядоченные производящие функции или характеристические функции.

Наоборот, в систематическом подходе стараются описать распределение непосредственно, скажем с помощью последовательности весовых функций $\varphi_M(z)$. Так как функция $t(x, k) = \langle U[-k, -x] \rangle$, заданная выражением (8.199), является, очевидно, бесконечно дифференцируемой и быстро убывающей, то для адекватного описания достаточно рассматривать весовые функции, являющиеся фурье-образами от

$$\bar{\varphi}_M(x, k) = \exp \left\{ -W_M(x, k) - \frac{1}{4\hbar} [(\omega - 1)x^2 + (\omega^{-1} - 1)k^2] \right\}, \quad (8.200)$$

где W_M (при $M = L$) определяется соотношением (8.183). Разумеется, отнюдь не легко явно найти функции $\varphi_M(p, q)$, хотя мы совершенно уверены в том, что они существуют и обладают соответствующими свойствами.

Комбинации типа свертки. В некоторых случаях при рассмотрении случайной переменной удобно разделить ее на два (или даже большее число) члена: $z = \alpha + \beta$, каждый из которых обладает собственными флуктуациями, описываемыми соответствующими распределениями. Здесь можно рассматривать

$$\rho_2 = \int \varphi_2(\beta) |\alpha + \beta\rangle \langle \alpha + \beta| d\mu(\beta) \quad (8.201a)$$

как матрицу плотности, получающуюся за счет флуктуаций только величины β , входящей в z . Аналогично можно рассматривать

$$\rho_1 = \int \varphi_1(\alpha) |\alpha + \beta\rangle \langle \alpha + \beta| d\mu(\alpha) \quad (8.201б)$$

как матрицу плотности, получающуюся за счет флуктуаций только величины α , входящей в z . Совместные флуктуации величин α и β приводят к матрице плотности

$$\begin{aligned} \rho &= \int \varphi_1(\alpha) \varphi_2(\beta) |\alpha + \beta\rangle \langle \alpha + \beta| d\mu(\alpha) d\mu(\beta) \equiv \\ &\equiv \int \varphi_1(\alpha) * \varphi_2(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha| d\mu(\alpha), \end{aligned} \quad (8.202)$$

где

$$\varphi(\alpha) \equiv \varphi_1(\alpha) * \varphi_2(\alpha) \equiv \int \varphi_1(\alpha - \beta) \varphi_2(\beta) d\mu(\beta). \quad (8.203а)$$

Это выражение напоминает обычную комбинацию типа свертки плотностей вероятности в классической теории вероятностей.

Переходя к представлению в фазовом пространстве, имеем

$$\varphi(p, q) \equiv \int \varphi_1(p - p', q - q') \varphi_2(p', q') d\mu', \quad (8.203б)$$

что после преобразования Фурье дает

$$\tilde{\varphi}(x, k) \equiv \tilde{\varphi}_1(x, k) \tilde{\varphi}_2(x, k). \quad (8.204)$$

В общем случае, когда $\varphi(z)$ представляет собой распределение, можно начать рассмотрение с соотношения (8.204). Если распределения φ_1 , φ_2 и φ таковы, что ρ_1 , ρ_2 и ρ суть настоящие матрицы плотности, то соотношение (8.204) будет справедливо; при этом все три функции $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ и $\tilde{\varphi}$ являются непрерывными функциями рассмотренного выше типа. Однако, даже если $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ описывают матрицы плотности, функция $\tilde{\varphi}(x, k)$, определяемая равенством (8.204), не обязательно отве-

чает матрице плотности¹⁾. В качестве примера можно взять функцию $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2 = \tilde{\varphi}_\omega(x, k)$ из (8.198) с $\omega < 1/2$ или $\omega > 2$; при этом $\tilde{\varphi}$ не удовлетворяет неравенству (8.149б). С другой стороны, важно отметить, что если $\tilde{\varphi}_1$ и $\tilde{\varphi}_2$ отвечают матрицам плотности, то модифицированная свертка, определяемая соотношением

$$\tilde{\varphi}(x, k) \equiv \tilde{\varphi}_1(s_1x, s_1k) \tilde{\varphi}_2(s_2x, s_2k), \quad s_1^2 + s_2^2 = 1, \quad (8.205)$$

всегда приводит к диагональному весу $\varphi(\alpha)$, описывающему матрицу плотности²⁾.

Описание с помощью двойного интеграла. Выше мы стремились придать точный смысл диагональному представлению

$$\rho = \frac{1}{\pi} \int \varphi(z) |z\rangle \langle z| d^2z, \quad (8.206)$$

в котором ρ записывается в виде суперпозиции «внешних произведений одинаковых векторов», или операторов проектирования на когерентные состояния. Всегда существует другое представление. Именно, согласно общему правилу (7.56), можно написать

$$\rho = \frac{1}{\pi^2} \int \int |z_1\rangle \langle z_1| \rho |z_2\rangle \langle z_2| d^2z_1 d^2z_2. \quad (8.207)$$

Это выражение есть суперпозиция «внешних произведений различных векторов» $|z_1\rangle \langle z_2|$. Следует отчетливо

¹⁾ Смысл этого замечания состоит в следующем. Матрица плотности должна обладать тремя свойствами (см. гл. 5): 1) эрмитовостью, 2) нормированностью и 3) неотрицательностью. Из композиционного закона (8.203) или (8.204) легко видеть, что свойства 1 и 2 для результирующей матрицы автоматически следуют из тех же свойств составляющих. В то же время неотрицательность результирующей матрицы может нарушаться и при выполнении этого свойства для каждой из составляющих. Иначе говоря, хотя квантовая теория и позволяет весовой функции принимать отрицательные значения, свойство 3 налагает в этом случае некоторые ограничения на вид функции $\varphi(z)$. Как раз эти ограничения могут не выполняться для произвольных сверток вида (8.203б). В отличие от этого в классической теории эквивалентом свойства 3 является простое неравенство $\varphi(z) \geq 0$; такое неравенство, очевидно, сохраняется при композиционном законе (8.203б). — *Прим. перев.*

²⁾ Показать это легче всего с помощью техники «сокращения», которую рассматривали Клаудер и Мак-Кенна [7.20]; однако анализ такого подхода увел бы нас слишком далеко от основной темы.

понимать, что это два совершенно различных представления одного и того же оператора; подобная ситуация встречалась уже для случая единичного оператора [см. (7.62)]. Ясно, что весовая функция $\langle z_1 | \rho | z_2 \rangle$ в общем случае обладает значительно лучшим поведением, чем распределение $\varphi(z)$. В этой связи Глаубер считает, что в том случае, когда функция $\varphi(z)$ сингулярна, представление двойным интегралом предпочтительнее диагонального представления. Мы считаем, однако, что лучше, как говорится, заплатить дороже и использовать распределения $\varphi(z)$ (что было нами тщательно и точно оговорено). В итоге это оказывается выгодным из-за значительного упрощения и большой эвристической ценности формул, получаемых в диагональном представлении. Можно было бы возразить, что использование последовательностей для определения распределений вносит в описание дополнительный предельный переход и что такая последовательность, вообще говоря, не единственна. Хотя такие критические замечания, безусловно, справедливы, они в равной мере относятся и к представлению (8.207) с помощью двойного интеграла. Достаточно напомнить, что лишнее интегрирование само определяется с помощью предельного перехода и что из-за переполненности когерентных состояний подынтегральное выражение (а тем самым и последовательность, связанная с определением интеграла) не единственно.

Б. «Диагональное» представление для поля излучения

Основываясь на приведенных выше рассуждениях, займемся исследованием диагонального представления для операторов в случае бесконечного числа степеней свободы; это представление символически может быть записано в виде

$$T = \int \varphi(\{z_k\} | \{z_k\}) \langle \{z_k\} | d\mu(\{z_k\}). \quad (8.208)$$

Здесь мы использовали сокращенное обозначение k для индексов моды λ , \mathbf{k} и написали z_k вместо $z_\lambda(\mathbf{k})$. Поскольку мы будем применять это диагональное представление главным образом к матрице плотности, вна-

чале ограничимся рассмотрением операторов T с конечной следовой нормой.

Как и при рассмотрении одной степени свободы, постараемся охарактеризовать T такой последовательностью операторов с конечной следовой нормой T_M , для которой $\|T - T_M\|_1 \rightarrow 0$, чтобы соотношение

$$\text{Sp}(TB) = \lim_{M \rightarrow \infty} \text{Sp}(T_M B) \quad (8.20)$$

выполнялось для всех ограниченных операторов B . Следует отметить, что записанные в абстрактном виде эти требования в точности совпадают с соответствующими требованиями в случае одной степени свободы. Грубо говоря, единственное отличие состоит в том, какое представление операторов рождения и уничтожения используется. В случае одной степени свободы принималось, что сами операторы a и a^\dagger образуют неприводимую систему, тогда как в рассматриваемом случае мы требуем, чтобы весь набор операторов $\{a_k\}$ и $\{a_k^\dagger\}$ образовывал неприводимую систему.

Существует, конечно, промежуточный случай, когда можно ограничиться конечным числом степеней свободы, т. е. когда состояния $|z_1 \dots, z_k\rangle$ накрывают все гильбертово пространство. Тогда диагональные представления полностью аналогичны таковым в случае одной степени свободы, за исключением очевидного увеличения числа рассматриваемых переменных. Мы не станем обсуждать полное описание случая конечного числа степеней свободы, поскольку читатель сам без труда сможет должным образом модифицировать приведенные выше рассуждения. Тем не менее для рассмотрения поля излучения нам потребуются некоторые из этих обобщений; ниже они будут приводиться без подробных доказательств.

Подобно тому как это делалось при доказательстве основного разложения единицы (7.153), определим сначала интегрирование бесконечного порядка с помощью последовательности, каждый член которой включает лишь конечное число переменных из всего бесконечного множества. Для этого вспомним операторы проектирования

P_N [см. (7.148)], которые определяются следующим образом:

$$\langle \{z_k\} | P_N | \{z'_k\} \rangle \equiv \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (|z_k|^2 + |z'_k|^2) + \sum_{k=1}^N z_k^* z'_k \right\}. \quad (8.210)$$

Действие оператора P_N сводится к проектированию на основное состояние для всех степеней свободы с $k > N$. Вооружившись этими операторами проектирования, определим последовательность операторов с конечной следовой нормой соотношением

$$T^N \equiv P_N T P_N \quad (8.211)$$

для всех N . Покажем прежде всего, что операторы T^N при $N \rightarrow \infty$ сходятся к T по следовой норме.

Воспользовавшись соотношением $\|BT\|_1 \leq \|T\|_1 \|B\|$, выполняющимся для произвольного оператора T с конечной следовой нормой и произвольного ограниченного оператора B , получим

$$\begin{aligned} \|T^N - T\|_1 &= \|P_N T P_N - T\|_1 \leq \\ &\leq \|P_N (T P_N - T)\|_1 + \|(P_N - I) T\|_1 \leq \\ &\leq \|T (P_N - I)\|_1 + \|(P_N - I) T\|_1, \end{aligned} \quad (8.212)$$

так как $\|P_N\| \leq 1$. Рассмотрим второй член в (8.212); первый член полностью аналогичен ему. Если $T \equiv AC$, где как A , так и C — операторы Гильберта—Шмидта, то из (8.163) имеем

$$\|(P_N - I) AC\|_1 \leq \|(P_N - I) A\|_2 \cdot \|C\|_2. \quad (8.213)$$

Используя запись A в общем виде

$$A = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j |\mu_j\rangle \langle \varphi_j|, \quad (8.214)$$

где $|\mu_j\rangle$ и $|\varphi_j\rangle$ — векторы двух полных ортонормированных базисов и [см. (8.164)]

$$\|A\|_2^2 \equiv \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 < \infty, \quad (8.215)$$

получаем

$$\|(P_N - I) A\|_2^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j|^2 \langle \mu_j | (I - P_N) | \mu_j \rangle. \quad (8.216)$$

Сопоставляя этот результат и условие (8.215) со сходимостью матричного элемента общего вида $\langle \lambda | P_N | \psi \rangle \rightarrow \langle \lambda | \psi \rangle$ [ср. (7.152)], с очевидностью получаем, что для достаточно больших N величина (8.216) может быть сделана сколь угодно малой. Поскольку те же рассуждения приложимы и к первому члену в (8.212), то отсюда вытекает

$$\|T^N - T\|_1 = \|P_N T P_N - T\|_1 \rightarrow 0. \quad (8.217)$$

Таким образом, последовательность T^N сходится к T по следовой норме, что и требовалось доказать.

Покажем, далее, что для оператора T^N фактически существенны лишь первые N степеней свободы. Для этого заметим, что соотношение

$$P_N T^N P_N = P_N (P_N T P_N) P_N = P_N T P_N = T^N \quad (8.218)$$

в непрерывном представлении записывается в виде

$$\begin{aligned} \langle \{z_k\} | T^N | \{z'_k\} \rangle &= \int \int \langle \{z_k\} | P_N | \{z''_k\} \rangle \langle \{z''_k\} | T^N | \{z'''_k\} \rangle \times \\ &\times \langle \{z'''_k\} | P_N | \{z'_k\} \rangle d\mu(\{z''_k\}) d\mu(\{z'''_k\}), \end{aligned} \quad (8.219)$$

где каждый из интегралов определен в смысле (7.152). Не нужно явно вычислять такой интеграл, чтобы понять, что (8.210) влечет за собой соотношение

$$\begin{aligned} \langle \{z_k\} | T^N | \{z'_k\} \rangle &= \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} (|z_k|^2 + |z'_k|^2) \right] \times \\ &\times F_N(z_1, \dots, z_N; z'_1, \dots, z'_N) = \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} (|z_k|^2 + |z'_k|^2) \right] \times \\ &\times \langle \{z_{k,N}\} | T^N | \{z'_{k,N}\} \rangle. \end{aligned} \quad (8.220)$$

Здесь $\{z_{k,N}\}$ обозначает *усеченную последовательность* ($z_{k,N} \equiv 0$ при $k > N$), подробно обсуждавшуюся в связи

с (7.139). Таким образом, как и предполагалось, в T^N фактически входят лишь первые N степеней свободы.

В диагональном представлении оператор T^N будет, очевидно, иметь характерный вид

$$T^N = \int \varphi^N(\{z_{k,N}\}) |\{z_{k,N}\}\rangle \langle \{z_{k,N}\}| d\mu(\{z_{k,N}\}). \quad (8.221)$$

Здесь интегрирование проводится лишь по конечному числу ($2N$) переменных. Совершенно ясно, что это выражение удовлетворяет условию $P_N T^N = T^N P_N = T^N$, необходимому для выполнения соотношения (8.220). Из этого свойства оператора T^N следует, что диагональные матричные элементы по когерентным состояниям, комплексные амплитуды которых образуют усеченную последовательность, удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} \langle \{z'_{k,N}\} | T^N | \{z'_{k,N}\} \rangle &= T^N(\{z'_{k,N}\}) = \\ &= \int \varphi^N(\{z_{k,N}\}) |\langle \{z'_{k,N}\} | \{z_{k,N}\} \rangle|^2 d\mu(\{z_{k,N}\}). \end{aligned} \quad (8.222)$$

Это соотношение есть просто аналог основного уравнения свертки (8.138) для случая N степеней свободы. С этого соотношения должен был бы начинаться анализ диагонального представления для N степеней свободы. С помощью вычислений, аналогичных проведенным выше, можно показать, что непрерывные функции $\tilde{\varphi}^N(x_1, \dots, x_N; k_1, \dots, k_N)$, являющиеся фурье-образами функций $\varphi^N(\{z_{k,N}\})$, представляют собой распределения на пробных функциях из \mathcal{D}_{2N} . Исходя из аналогии с рассуждениями, с помощью которых было получено соотношение (8.169), мы утверждаем, что каждое из требуемых распределений можно представить последовательностью пробных функций $\tilde{\varphi}_L^N(x_1, \dots, x_N; k_1, \dots, k_N)$ из \mathcal{S}_{2N} (т. е. бесконечно дифференцируемых и быстро убывающих) и что операторы

$$T_L^N \equiv \int \varphi_L^N(\{z_{k,N}\}) |\{z_{k,N}\}\rangle \langle \{z_{k,N}\}| d\mu(\{z_{k,N}\}) \quad (8.223)$$

определены с помощью функций $\varphi_L^N(\{z_{k,N}\})$, каждая из которых принадлежит \mathcal{S}_{2N} . Более того, можно утверждать, что для любого N

$$\|T^N - T_L^N\|_1 \rightarrow 0 \quad (8.224)$$

при $L \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что двойная последовательность операторов T_L^N , заданная соотношением (8.223), удовлетворяет условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{L \rightarrow \infty} \|T - T_L^N\|_1 = 0 \quad (8.225)$$

в силу неравенства

$$\|T - T_L^N\|_1 \leq \|T - T^N\|_1 + \|T^N - T_L^N\|_1. \quad (8.226)$$

Чтобы довести наши рассуждения до конца, заметим, что из последовательности с двумя индексами всегда можно выбрать подпоследовательность с одним индексом, сходящуюся к тому же пределу. Например, для любого заданного N выберем $L = L[N]$ как такое наименьшее целое число, для которого

$$\|T^N - T_{L[N]}^N\|_1 \leq \|T - T^N\|_1 + \frac{1}{N}. \quad (8.227)$$

Ясно, что при таком выборе последовательность, определяемая соотношением

$$T_N \equiv T_{L[N]}^N, \quad (8.228)$$

обладает требуемым свойством сходимости, поскольку

$$\|T - T_N\|_1 = \|T - T_{L[N]}^N\|_1 \leq 2\|T - T^N\|_1 + \frac{1}{N} \rightarrow 0.$$

Следовательно, если ввести функции

$$\varphi_N(\{z_{k,N}\}) \equiv \varphi_{L[N]}^N(\{z_{k,N}\}), \quad (8.229)$$

то можно сформулировать следующее фундаментальное утверждение:

Всякий оператор T с конечной следовой нормой можно представить последовательностью операторов T_N , каждый из которых обладает диагональным представлением

$$T_N = \int \varphi_N(\{z_{k,N}\}) |\{z_{k,N}\}\rangle \langle \{z_{k,N}\}| d\mu(\{z_{k,N}\}), \quad (8.230a)$$

где $\varphi_N(\{z_{k,N}\})$ — бесконечно дифференцируемая быстро убывающая функция, причем для этой последовательности

$$\|T - T_N\|_1 \rightarrow 0. \quad (8.230b)$$

Если $T = \rho$ — матрица плотности, то $\rho^N \equiv P_N \rho P_N$ — эрмитов неотрицательный оператор. Из нашей последовательности всегда можно опустить любые начальные члены (число их по крайней мере конечно), для которых $\rho^N = 0$; впредь мы будем пренебрегать ими. Как и в случае одной степени свободы, мы можем выбрать каждый член двойной последовательности ρ_L^N эрмитовым и неотрицательным. Более того, в последовательности с одним индексом $\rho_N \equiv \rho_{L[N]}^N$, определяемой, например, в смысле условия (8.227), действительные функции $\varphi_N \equiv \varphi_{L[N]}^N$ можно нормировать так, чтобы $\text{Sp}(\rho_N) = 1$. Тем самым мы установили следующее:

Всякую матрицу плотности ρ можно представить последовательностью матриц плотности ρ_N , каждая из которых обладает диагональным представлением

$$\rho_N = \int \varphi_N(\{z_{k,N}\}) |\{z_{k,N}\}\rangle \langle\{z_{k,N}\}| d\mu(\{z_{k,N}\}), \quad (8.231a)$$

где $\varphi_N(\{z_{k,N}\})$ — бесконечно дифференцируемая быстро убывающая действительная функция, причем для этой последовательности

$$\|\rho - \rho_N\|_1 \rightarrow 0. \quad (8.231b)$$

Ниже мы сосредоточим свое внимание на матрицах плотности.

Условие сходимости (8.231b) и интегрируемости функций φ_N позволяет утверждать, что для произвольного ограниченного оператора B

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= \text{Sp}(\rho B) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Sp}(\rho_N B) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \varphi_N(\{z_{k,N}\}) \langle\{z_{k,N}\}| B |\{z_{k,N}\}\rangle d\mu(\{z_{k,N}\}) \equiv \\ &\equiv \int \varphi(\{z_k\}) \langle\{z_k\}| B |\{z_k\}\rangle d\mu(\{z_k\}), \end{aligned} \quad (8.232)$$

где распределение (на функциях $\langle\{z_k\}| B |\{z_k\}\rangle$ бесконечного числа переменных) в последней строке определено с помощью предыдущей строки. Более того, теперь мы можем определить правую часть соотношения

$$\rho = \int \varphi(\{z_k\}) |\{z_k\}\rangle \langle\{z_k\}| d\mu(\{z_k\}) \quad (8.233)$$

с помощью предела выражения (8.231a) при $N \rightarrow \infty$, или с тем же правом с помощью формулы (8.232) для среднего значения произвольного ограниченного оператора. Именно в таком смысле следует понимать диагональное представление при его использовании в проведенном выше выводе распределений отсчетов.

Существует также и аналог утверждения, высказанного в связи с (8.174). Именно, если рассматривать только такие ограниченные операторы, для которых $\|B\| \leq 1$, то средние значения всех таких операторов могут быть равномерно и с произвольной точностью аппроксимированы выражениями типа

$$\int \varphi_N(\{z_k, N\}) \langle \{z_k, N\} | B | \{z_k, N\} \rangle d\mu(\{z_k, N\}), \quad (8.234)$$

где N — конечное число, а φ_N — пробная функция из \mathcal{P}_{2N} .

Как обычно, формула для среднего значения принимает особенно простой вид для нормально упорядоченных операторов $B = : \mathcal{O}(\{a_k^+, \{a_k\}) :$. В этом случае

$$\langle : \mathcal{O}(\{a_k^+, \{a_k\}) : \rangle = \int \varphi(\{z_k\}) \mathcal{O}(\{z_k^*, \{z_k\}) d\mu(\{z_k\}). \quad (8.235)$$

В частности, нормально упорядоченный производящий функционал (8.23) определяется соотношением

$$\begin{aligned} C_N(\{u_k\}) &\equiv \left\langle \exp\left(\sum_1^\infty u_k a_k^+\right) \exp\left(-\sum_1^\infty u_k^* a_k\right) \right\rangle = \\ &= \int \varphi(\{z_k\}) \exp\left[\sum_1^\infty (u_k z_k^* - u_k^* z_k)\right] d\mu(\{z_k\}). \end{aligned} \quad (8.236a)$$

Сравнивая с (8.190a), получаем

$$\begin{aligned} C_N(\{u_k\}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{\varphi}_N(-x_1, \dots, -x_N; -k_1, \dots, -k_N) \equiv \\ &\equiv \tilde{\varphi}(\{-x_k\}, \{-k_k\}), \end{aligned} \quad (8.236b)$$

где $u_k \equiv (x_k + ik_k) / \sqrt{2\hbar}$.

Нет необходимости повторять вывод распределений отсчетов $P(m, T+t, t)$ и т. п., который был проведен ранее. Читатель может легко убедиться в том, что операторы, средние значения которых определяют, например, $P(m, T+t, t)$ и $Q(\lambda, T+t, t)$, в (8.132) и (8.133) действительно являются ограниченными операторами. В самом деле, оператор, среднее значение которого в произвольном состоянии не превосходит единицы (а из физических соображений следует, что P и Q должны удовлетворять этому условию), по определению является ограниченным оператором с нормой, не превосходящей единицы. Тем самым проведенный анализ придает сделанным ранее выводам точный смысл.

При рассмотрении поля излучения существуют прямые аналоги тех комбинаций типа свертки и представлений с помощью двойного интеграла, которые обсуждались для случая одной степени свободы, однако мы не будем приводить здесь эти довольно очевидные обобщения.

В заключение этой главы сделаем следующее замечание. Диагональное представление позволяет дать такую формулировку квантовой теории оптической когерентности, которая по существу во всех отношениях эквивалентна формулировке классической теории, если в последней проводить описание в терминах аналитических сигналов. Именно этот замечательный результат составляет сущность оптической теоремы эквивалентности¹⁾.

¹⁾ Оптическая теорема эквивалентности была открыта Сударшаном [8.7].

Конкретные состояния поля излучения

§ 1. ХАОТИЧЕСКИЕ И ТЕПЛОВЫЕ СОСТОЯНИЯ

Подавляющее большинство макроскопических полей, возникающих естественным путем, являются по своим свойствам тепловыми. Рассмотрим этот важный случай несколько подробнее. Начнем с вывода соответствующих состояний, а позднее обсудим некоторые свойства полученных решений.

А. Квантовая центральная предельная теорема

КЛАССИЧЕСКАЯ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА. Один из основных результатов классической теории вероятности заключается в том, что распределение случайной величины

$$x = N^{-1/2} \sum_{n=1}^N x_n, \quad (9.1)$$

равной сумме независимых и «подобным образом» распределенных случайных величин x_n , при больших N является гауссовым. Как следует из соотношения (3.9), среднее и дисперсия такого распределения определяются выражениями

$$\langle x \rangle = N^{-1/2} \sum_{n=1}^N \langle x_n \rangle, \quad (9.2a)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta x)^2 \rangle &= N^{-1} \sum_{n, m=1}^N [\langle x_n x_m \rangle - \langle x_n \rangle \langle x_m \rangle] = \\ &= N^{-1} \sum_{n=1}^N [\langle x_n^2 \rangle - \langle x_n \rangle^2] \end{aligned} \quad (9.2b)$$

соответственно. Так как среднее и дисперсия гауссова распределения обязательно должны быть конечными, то для того, чтобы распределение величины x приближалось к нормальному, необходимо существование и $\langle x_n \rangle$ и $\langle x_n^2 \rangle$. Наличие множителя N гарантирует сходимость выражения для дисперсии при больших N в случае «подобным образом» и, в частности, одинаково распределенных величин x_n . Если среднее $\langle x \rangle$ становится исчезающе малым, то без потери общности можно считать, что среднее каждой величины x_n равно нулю. Как мы сейчас покажем, аналогичная центральная предельная теорема справедлива в квантовой теории при сходных и не очень сильных предположениях. Начнем анализ со случая одной степени свободы.

Квантовый аналог для случая одной степени свободы. Как было показано в гл. 7, состояние одной степени свободы (не обязательно нормальной моды) переводится из основного $|0\rangle\langle 0|$ в когерентное $|z\rangle\langle z|$ внешним вынуждающим источником, характеризуемым величиной z . Далее, если мы представим, что z состоит из большого числа N вкладов, то можно положить

$$|z\rangle\langle z| = |N^{-1/2} \sum z_n\rangle\langle N^{-1/2} \sum z_n|. \quad (9.3)$$

Интуитивно ясно, что тепловое или хаотическое поле — это такое поле, амплитуда которого складывается из очень большого числа малых вкладов, причем распределение каждого из них можно считать независимым.

Пусть $r_n(z_n)$ — распределение (в смысле гл. 8) элементарного вклада z_n . Предполагая, что каждый из вкладов z_n может флуктуировать, мы приходим эвристически к матрице плотности

$$\begin{aligned} \rho &= \int \varphi(z) |z\rangle\langle z| d\mu(z) \equiv \\ &\equiv \int \left| N^{-1/2} \sum z_n \right\rangle \left\langle N^{-1/2} \sum z_n \right| \prod_{n=1}^N r_n(z_n) d\mu(z_n). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Следовательно, выражение для $\varphi(z)$ дается многократной сверткой, аналогичной обсуждавшейся в гл. 8. Используя соотношение (8.204) и учитывая множители $N^{-1/2}$,

мы получаем выражение для фурье-образа стоящей в (9.4) весовой функции

$$\tilde{\varphi}(x, k) = \prod_{n=1}^N \tilde{r}_n \left(\frac{x}{N^{1/2}}, \frac{k}{N^{1/2}} \right). \quad (9.5)$$

Это выражение представляет собой простое обобщение многократной свертки (8.205). Итак, мы убеждаемся в том, что если $r_n(z_n)$ — диагональный вес для матрицы плотности ρ_n при всех n (что мы предполагаем), то $\varphi(z)$ представляет хорошую диагональную весовую функцию, дающую правильное выражение для матрицы плотности ρ при всех N . Тогда из (8.149б) вытекает, что

$$|\tilde{\varphi}(x, k)| \leq \exp \left[\frac{1}{4\hbar} (x^2 + k^2) \right], \quad (9.6)$$

так как $\|\rho\|_1 = \text{Sp}(\rho) = 1$; но это сразу следует из (9.5) при учете соотношения

$$|\tilde{r}_n(x, k)| \leq \exp \left[\frac{1}{4\hbar} (x^2 + k^2) \right]. \quad (9.7)$$

Чтобы понять суть дела, остановимся на случае одинаковых распределений \tilde{r}_n , $\tilde{r}_n \equiv \tilde{r}$. Тогда мы, очевидно, имеем

$$\tilde{\varphi}(x, k) = \left[\tilde{r} \left(\frac{x}{N^{1/2}}, \frac{k}{N^{1/2}} \right) \right]^N. \quad (9.8)$$

Предполагая, что для достаточно малых x и k

$$\tilde{r}(x, k) \approx 1 - \frac{A}{2\hbar} (x^2 + k^2), \quad (9.9)$$

получаем

$$\tilde{\varphi}(x, k) \approx \left[1 - \frac{A}{2\hbar N} (x^2 + k^2) \right]^N.$$

Последнее выражение для бесконечно больших N принимает вид

$$\tilde{\varphi}(x, k) = \exp \left[- \frac{A}{2\hbar} (x^2 + k^2) \right] \quad (9.10)$$

для всех x и k . Для справедливости этого выражения достаточно, чтобы функция \tilde{r} была дважды дифференцируема в начале координат и имела там исчезающе

малые первые производные. [Иначе говоря, это есть условие, налагаемое на первые два момента r ; точнее, $\langle a \rangle = 0$, $\langle a^\dagger a \rangle < \infty$, где матрица плотности определяется распределением $r(z)$.] В дальнейшем будем считать, что эти условия для \tilde{r} выполнены. При этом не обязательно предполагать, что $\tilde{r}(x, k)$ зависит только от $x^2 + k^2$. Например, следующим членом в возможном разложении \tilde{r} в степенной ряд может быть $(x^2 + 2k^2)^2 + x^4$. Тем не менее результирующая функция $\tilde{\varphi}$ зависит только от $x^2 + k^2$. Более того [ср. (8.190a)],

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger a \rangle &= \int r(z) |z|^2 d\mu(z) = \\ &= -\frac{\hbar}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial k^2} \right) \tilde{r}(x, k) \Big|_{x=k=0} = A, \end{aligned} \quad (9.11)$$

откуда следует, что $A \geq 0$. Если $A = 0$, то $\tilde{\varphi}(x, k) \equiv 1$ и для матрицы плотности имеем $\rho = |0\rangle\langle 0|$. Мы можем поэтому исключить этот случай и принять $A > 0$. Тогда получаем, что весовая функция $\tilde{\varphi}(x, k)$ является стандартной гауссовой и поэтому таковым же является диагональный вес $\varphi(p, q)$. Точнее говоря,

$$\varphi(p, q) = A^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2\hbar A} (p^2 + q^2) \right], \quad (9.12)$$

что при использовании комплексной величины z принимает вид

$$\varphi(z) = \frac{1}{\langle N \rangle} \exp \left(\frac{-|z|^2}{\langle N \rangle} \right), \quad (9.13)$$

где мы положили $A = \langle |z|^2 \rangle = \langle N \rangle$. Нормальное распределение (9.13) для $\varphi(z)$ аналогичным путем вывел Глаубер [8.1].

Общее решение. Соотношение (9.13) представляет собой основной результат настоящего параграфа, но пока мы только коснулись вопроса о его фундаментальной роли. По-прежнему будем считать, что распределение r одинаково для всех вкладов z_n , так что соотношение (9.8) остается в силе. Как и раньше, будем полагать, что функция \tilde{r} дважды дифференцируема в начале координат, а ее первые производные обращаются там в нуль,

но теперь для малых x и k заменим соотношение (9.9) выражением с квадратичным членом общего вида

$$\tilde{r}(x, k) \approx 1 - \frac{1}{2\hbar} (Bx^2 + 2Cxk + Dk^2). \quad (9.14)$$

Повторяя вывод, приведенный выше, получаем для произвольно больших N

$$\tilde{\varphi}(x, k) = \exp \left[-\frac{1}{2\hbar} (Bx^2 + 2Cxk + Dk^2) \right], \quad (9.15)$$

что справедливо при всех x и k . Однако в отличие от соотношения (9.10) теперь нельзя утверждать, что квадратичная форма в экспоненте обязательно положительна. Иными словами, $\tilde{\varphi}$ может возрасть в некоторых направлениях [естественно, в согласии с (9.6)]. Действительно, легко привести примеры диагональных распределений $\tilde{r}(x, k)$ (являющихся пробными функциями в \mathcal{S}_2), для которых результирующее «тепловое» распределение (9.15) характеризуется отрицательным значением B . Это объясняется тем, что функция $\tilde{\varphi}(x, k)$ в конечном счете чувствительна к поведению $\tilde{r}(x, k)$ только вблизи начала координат и возможен случай, когда $\tilde{r}(x, k)$ при возрастании x сначала, скажем, достигает значения больше единицы, а затем быстро падает до нуля.

Нужно подчеркнуть, что, несмотря на такое странное поведение, результирующие распределения получаются строго тепловыми! Положим сначала $C = 0$, поскольку в этом простейшем случае сохраняются нужные свойства. Соответственно для достаточно малых x и k примем

$$\tilde{r}(x, k) \approx 1 - \frac{1}{2\hbar} (Bx^2 + Dk^2). \quad (9.16)$$

Для некоторой матрицы плотности ρ_0 имеем теперь [ср. (8.169) и (8.178)]

$$\begin{aligned} \text{Sp} \{ \rho_0 U^+ [k, x] \} &= \tilde{r}(x, k) \exp \left[-\frac{1}{4\hbar} (x^2 + k^2) \right] \approx \\ &\approx 1 - \frac{1}{2\hbar} \left[\left(B + \frac{1}{2} \right) x^2 + \left(D + \frac{1}{2} \right) k^2 \right]; \end{aligned} \quad (9.17)$$

последнее выражение справедливо для достаточно малых x и k . Применяя к (9.17) принцип неопределенности, получаем

$$\langle P^2 \rangle \langle Q^2 \rangle = \hbar^2 \left(B + \frac{1}{2} \right) \left(D + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{1}{4} \hbar^2. \quad (9.18)$$

Поскольку каждый сомножитель положителен, имеем

$$B + \frac{1}{2} > 0, \quad D + \frac{1}{2} > 0 \quad \text{и} \quad \left(B + \frac{1}{2} \right) \left(D + \frac{1}{2} \right) \geq \frac{1}{4}. \quad (9.19)$$

Если $B = D$, то $B \geq 0$; но если $B \neq D$, то либо B , либо D может быть отрицательным (например, $B = -1/8$, $D = 2$). Если положить

$$b = 1 + 2B \quad \text{и} \quad d = 1 + 2D, \quad (9.20)$$

то

$$b > 0, \quad d > 0 \quad \text{и} \quad bd \geq 1. \quad (9.21)$$

Далее, из (8.169) и (8.178) в общем случае следует

$$\tilde{\varphi}(x, k) = \text{Sp} \{ \rho U^+ [k, x] \} \exp \left[\frac{1}{4\hbar} (x^2 + k^2) \right], \quad (9.22)$$

где $\tilde{\varphi}$ — весовая функция, связанная с матрицей плотности ρ . В нашем случае мы приходим с помощью (9.15) и (9.20) к точному соотношению

$$\text{Sp} \{ \rho U^+ [k, x] \} = \exp \left[- \frac{1}{4\hbar} (bx^2 + dk^2) \right]. \quad (9.23)$$

Вышеприведенные условия для b и d , как легко показать, означают, что ρ есть истинная матрица плотности, описываемая выражением

$$\rho \equiv \frac{e^{-\beta' \mathcal{H}'}}{\text{Sp} e^{-\beta' \mathcal{H}'}}. \quad (9.24)$$

Здесь «гамильтониан»

$$\mathcal{H}' = \frac{1}{2} (P^2 + \omega'^2 Q^2 - \hbar \omega') \equiv \hbar \omega' N', \quad (9.25)$$

«угловая частота»

$$\omega' \equiv \left(\frac{b}{d} \right)^{1/2}, \quad (9.26)$$

а «обратная температура» определяется из соотношения [ср. (5.56)]

$$\langle N' \rangle = \frac{1}{e^{\beta' \hbar \omega'} - 1} = \frac{1}{2} [(bd)^{1/2} - 1]. \quad (9.27)$$

Если $b = d$ (т. е. $B = D$), то мы получаем определенные тепловые распределения, описываемые соотношением (9.10) при $A = \langle N' \rangle$. Когда $b \neq d$, получаются другие тепловые распределения. С таким случаем мы сталкивались ранее [см. (8.198)], где имели $b = \omega$ и $d = \omega^{-1}$. Так как при этом $BD = -(4\omega)^{-1}(1 - \omega)^2 \leq 0$, то значение либо B , либо D должно быть отрицательным, если $\omega \neq 1$. В этом примере, очевидно, $\omega' = \omega$ и $\beta' = \infty$, т. е. ρ' соответствует вырожденному тепловому ансамблю при нулевой «температуре» и является как раз оператором проектирования на основное состояние гамильтониана \mathcal{H}' , что соответствует примеру, приведенному для иллюстрации соотношения (8.198).

Совершенно аналогичные выводы справедливы, если множитель C в (9.15) отличен от нуля. В этом случае соответствующий осцилляторный гамильтониан \mathcal{H}' содержал бы произведения P и Q .

В результате мы видим, что при очень общих условиях (по существу достаточно двойная дифференцируемость \tilde{r} , или, что эквивалентно, существование первых двух моментов r) квантовомеханическая матрица плотности для бесконечного числа подобным образом распределенных вкладов строго соответствует тепловому распределению.

Тот странный факт, что B или D могут принимать отрицательные значения, вовсе не указывает на ошибку в наших рассуждениях. Появление отрицательных B и D означает, что мы разложили матрицу плотности для рассматриваемого хаотического источника в ряд не по наиболее «благоприятным» когерентным состояниям. Например, если бы мы снова разложили состояние ρ_ω в (8.198) по когерентным состояниям для частоты ω , то получили бы $\tilde{q}(x, k) = 1$. Этот результат имеет более ясный смысл, чем другой, возрастающий экспоненциально. Вообще, применяя произвольные линейные преобразования операторов P и Q , согласующиеся с соотношением

$[Q, P] = i\hbar$, и используя соответствующие когерентные состояния, мы можем перевести все тепловые весовые функции вида (9.15) в основную гауссову форму (9.10) с неотрицательной дисперсией.

Если предположить, что там, где это необходимо, был произведен переход к «благоприятным» когерентным состояниям, то мы можем следующим образом подытожить наши результаты: при наличии очень большого числа независимых и подобным образом распределенных вынуждающих членов матрица плотности для одной степени свободы определяется с помощью весовой функции

$$\tilde{\varphi}(x, k) = \exp \left[-\frac{1}{2\hbar} A(x^2 + k^2) \right],$$

откуда для канонической диагональной весовой функции получаем

$$\varphi(z) = \frac{1}{\langle N \rangle} \exp \left(-\frac{|z|^2}{\langle N \rangle} \right), \quad (9.28)$$

где $A = \langle |z|^2 \rangle = \langle N \rangle$. При $\langle N \rangle = 0$ этот результат можно представить в виде $\varphi(z) = \pi \delta(z)$, где δ — двумерная δ -функция, определяемая соотношением (8.137). Отсюда вытекает важное следствие: результирующее каноническое распределение является фазоинвариантным, $\varphi(z) = \varphi(|z|)$, независимо от того, как оно возникло.

Довольно легко понять, что то же самое распределение $\varphi(z)$ применимо даже в тех случаях, когда индивидуальные распределения $r_n(z_n)$ не идентичны, но в достаточной мере «схожи» (аналогично тому, как это требуется для вывода центральной предельной теоремы). Мы не будем здесь приводить доказательство этого положения. Закончим рассмотрение случая одной степени свободы прямой демонстрацией того, что гауссова весовая функция $\varphi(z)$ ведет к знакомому оператору плотности для теплового состояния. Конкретнее, мы можем написать

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\pi} \int \varphi(z) |z\rangle \langle z| d^2z = \\ &= \frac{1}{\pi \langle N \rangle} \int \exp \left[-|z|^2 (1 + \langle N \rangle^{-1}) \right] \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{z^n z^{*m}}{(n! m!)^{1/2}} |n\rangle \langle m| d^2z = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\langle N \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int |z|^{2n} \exp[-|z|^2(1 + \langle N \rangle^{-1})] |n\rangle \langle n| d|z|^2 = \\
&= \frac{1}{\langle N \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} (1 + \langle N \rangle^{-1})^{-n+1} |n\rangle \langle n| = \\
&= \frac{1}{1 + \langle N \rangle} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle} \right)^n |n\rangle \langle n|, \quad (9.29)
\end{aligned}$$

т. е. мы получаем распределение, имеющее такой же вид геометрического ряда, что и распределение Бозе — Эйнштейна. Положим

$$e^{-\beta\hbar\omega} \equiv \frac{\langle N \rangle}{1 + \langle N \rangle}, \quad (9.30)$$

тогда

$$\rho = (1 - e^{-\beta\hbar\omega}) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\beta\hbar\omega} |n\rangle \langle n|. \quad (9.31)$$

Так как уровни энергии осциллятора $E_n = n\hbar\omega$, то соотношение (9.31), как это показано ниже, описывает равновесное тепловое состояние.

Б. Обобщение на случай многих степеней свободы

В качестве предварительного шага для получения тепловых или хаотических состояний поля излучения проведем непосредственное обобщение нашего предыдущего анализа на случай многих степеней свободы. Как и раньше, будем считать, что они могут и не быть нормальными модами поля излучения. Пусть $r(\{z_k\})$, $k = 1, \dots, K$, обозначает диагональное распределение идентично распределенных элементарных вкладов. Тогда для фурье-образов \tilde{r} и $\tilde{\varphi}$ выполняется соотношение, аналогичное (9.8), а именно

$$\tilde{\varphi}(\{x_k\}, \{k_k\}) = \left[\tilde{r} \left(\left\{ \frac{x_k}{N^{1/2}} \right\}, \left\{ \frac{k_k}{N^{1/2}} \right\} \right) \right]^N. \quad (9.32)$$

Если на \tilde{r} наложены соответствующие условия, аналогичные рассмотренным ранее, то эта функция при

$N \rightarrow \infty$ имеет предел, который можно записать в общем виде

$$\tilde{\varphi}(\{x_k\}, \{k_k\}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \sum_{r,s} (x_r B_{rs} x_s + 2x_r C_{rs} k_s + k_r D_{rs} k_s) \right\}. \quad (9.33)$$

Здесь B , C и D — определенным образом выбранные матрицы. Элементы этих матриц имеют вид

$$B_{rs} = B_{sr} = \frac{1}{\hbar} \langle P_r P_s \rangle - \frac{1}{2} \delta_{rs}, \quad (9.34a)$$

$$D_{rs} = D_{sr} = \frac{1}{\hbar} \langle Q_r Q_s \rangle - \frac{1}{2} \delta_{rs}, \quad (9.34б)$$

$$C_{rs} = -\frac{1}{2\hbar} \langle P_r Q_s + Q_s P_r \rangle. \quad (9.34в)$$

Они действительны, так как являются средними значениями эрмитовых переменных. В очевидных матричных обозначениях показатель экспоненты в (9.33) записывается в виде

$$(xk) \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ k \end{pmatrix},$$

где C^T — транспонированная матрица C . Отсюда видно, что полная квадратичная форма действительна и симметрична и поэтому может быть диагонализирована путем ортогонального преобразования переменных x и k . Если новые переменные, возникшие в результате этого преобразования, обозначить тоже x и k , то (9.33) принимает вид

$$\tilde{\varphi}(\{x_k\}, \{k_k\}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \sum_k (B_k x_k^2 + D_k k_k^2) \right\}.$$

Наконец, изменением масштаба, сохраняющим соотношение $[Q_s, P_r] = i\hbar \delta_{rs}$, приводим это выражение к каноническому виду

$$\tilde{\varphi}(\{x_k\}, \{k_k\}) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\hbar} \sum_k A_k (x_k^2 + k_k^2) \right\}, \quad (9.35)$$

где $A_k \geq 0$ для любого k , в соответствии с проведенным выше обсуждением. Суть этих замечаний состоит в сле-

дующем: используя возможность свободного выбора угловых частот ω_k и канонических переменных, мы всегда можем, как и раньше, выбрать такие «благоприятные» когерентные состояния в диагональном представлении для хаотического поля, для которых функцию $\tilde{\varphi}$ можно представить в каноническом виде (9.35). Для таких «благоприятных» когерентных состояний диагональная весовая функция записывается в виде

$$\varphi(\{z_k\}) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\langle N_k \rangle} \exp\left(-\frac{|z_k|^2}{\langle N_k \rangle}\right), \quad (9.36)$$

где $A_k = \langle |z_k|^2 \rangle = \langle N_k \rangle$. Если $\langle N_k \rangle = 0$ для некоторого k , то, очевидно, множитель в (9.36) можно представить в виде $\delta(z_k)$.

Прежде чем переходить к пределу $K \rightarrow \infty$, заметим, что из (9.36) вытекает следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle \{z'_k\} | \rho | \{z'_k\} \rangle &= \int \varphi(\{z_k\}) |\langle \{z'_k\} | \{z_k\} \rangle|^2 d\mu(\{z_k\}) = \\ &= \prod_{k=1}^K \int \frac{1}{\langle N_k \rangle} \exp\left(-\frac{|z_k|^2}{\langle N_k \rangle} - |z'_k - z_k|^2\right) d\mu(z_k) = \\ &= \prod_{k=1}^K \frac{1}{1 + \langle N_k \rangle} \exp\left[\frac{-|z'_k|^2}{1 + \langle N_k \rangle}\right]. \end{aligned} \quad (9.37)$$

Как подчеркивалось в гл. 7, эти диагональные элементы однозначно определяют матрицу ρ .

В. Хаотические и тепловые поля излучения

В гл. 8 было доказано, что любую матрицу плотности поля излучения можно представить в виде (8.231), т. е. как предел последовательности записанных в диагональном виде операторов, каждый из которых отвечает конечному числу степеней свободы. Здесь было бы естественным принять

$$\varphi_K(\{z_k, K\}) = \prod_{k=1}^K \frac{1}{\langle N_k \rangle} \exp\left(-\frac{|z_k|^2}{\langle N_k \rangle}\right) \quad (9.38)$$

в качестве усеченного диагонального веса для K степеней свободы и определить

$$\rho = \lim_{K \rightarrow \infty} \rho_K = \lim_{K \rightarrow \infty} \int \Phi_K(\{z_k, K\}) |\{z_k, K\}\rangle \langle \{z_k, K\}| d\mu(\{z_k, K\}) \quad (9.39)$$

как матрицу плотности для хаотического поля. Однако при такой процедуре, как было отмечено в гл. 5, нельзя ожидать, что всякая последовательность средних чисел заполнения $\langle N_k \rangle$ определяет истинную матрицу плотности ρ . Для выбора подходящих последовательностей необходимо иметь в виду, что в соответствии с (9.37)

$$\begin{aligned} \langle \{z_k\} | \rho | \{z_k\} \rangle &= \lim_{K \rightarrow \infty} \langle \{z_k, K\} | \rho_K | \{z_k, K\} \rangle = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \langle N_k \rangle} \exp \left[- \frac{|z_k|^2}{1 + \langle N_k \rangle} \right]. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Очевидно,

$$\langle \{z_k\} | \rho | \{z_k\} \rangle \leq \langle 0 | \rho | 0 \rangle = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \langle N_k \rangle}. \quad (9.41)$$

Если это бесконечное произведение сходится к нулю, то все диагональные элементы ρ для когерентного состояния обращаются в нуль и, следовательно, обращается в нуль и сама матрица плотности ρ . Поскольку это заведомо нежелательно, многократное произведение должно сходиться к некоторому не равному нулю числу. Это имеет место при

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle N_k \rangle < \infty, \quad (9.42)$$

что можно вывести из замечаний, сделанных в связи с (5.95).

При выполнении условия (9.42) для последовательностей $\langle N_k \rangle$ не только ρ является истинной матрицей плотности, но, более того, в (9.39) имеет место сходимость по следовой норме $\|\rho - \rho_K\|_1 \rightarrow 0$. Из этого, в ча-

стности, следует, что для *любого* ограниченного оператора

$$\begin{aligned} \langle B \rangle &= \text{Sp}(\rho B) = \lim_{K \rightarrow \infty} \text{Sp}(\rho_K B) = \\ &= \lim_{K \rightarrow \infty} \int \varphi_K(\{z_{k, K}\}) \langle \{z_{k, K}\} | B | \{z_{k, K}\} \rangle d\mu(\{z_{k, K}\}). \end{aligned} \quad (9.43)$$

В частности, в соответствии с (8.236) и (9.35) нормально упорядоченная производящая функция $C_N(\{u_k\})$ записывается в виде

$$\begin{aligned} C_N(\{u_k\}) &= \text{Sp} \left(\rho \exp \left[\sum_1^{\infty} u_k a_k^+ \right] \exp \left[- \sum_1^{\infty} u_k^* a_k \right] \right) = \\ &= \exp \left(- \sum_1^{\infty} \langle N_k \rangle |u_k|^2 \right). \end{aligned} \quad (9.44)$$

Если ввести оператор

$$J^+ \equiv \sum_{k=1}^{\infty} u_k a_k^+, \quad (9.45)$$

то оказывается, что (9.44) имеет довольно простую структуру

$$\langle e^{J^+} e^{-J} \rangle = e^{-\langle J^+ J \rangle}. \quad (9.46)$$

Эта формула особенно удобна, так как позволяет сразу найти результат для оператора

$$J^+ \equiv \int \mathbf{S}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t) d^4x, \quad (9.47)$$

который в силу уравнений свободного поля является оператором типа (9.45). При этом нормально упорядоченный производящий функционал для поперечного потенциала принимает вид

$$\begin{aligned} C_N\{\mathbf{S}\} &= \langle e^{J^+} e^{-J} \rangle = e^{-\langle J^+ J \rangle} = \\ &= \exp \left\{ - \sum \int S_j(\mathbf{r}, t) G_{jk}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') S_k^*(\mathbf{r}', t') d^4x d^4x' \right\}, \end{aligned} \quad (9.48)$$

где $j, k = 1, 2, 3$ и

$$G_{jk}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') \equiv \langle A_j^{(-)}(\mathbf{r}, t) A_k^{(+)}(\mathbf{r}', t') \rangle \quad (9.49)$$

является корреляционной функцией второго порядка. Следует еще раз отметить, что в настоящих примерах распределение полностью определяется корреляционной функцией второго порядка.

Из (7.179а) вытекает, что эти выражения, используя нормальные моды поля излучения, можно записать в виде

$$G_{jk}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \frac{\hbar}{2(\omega\omega')^{1/2}} \{ \exp [i(\mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) - i(\omega't' - \omega t)] \times \langle a_j^\dagger(\mathbf{k}) a_k(\mathbf{k}') \rangle \}. \quad (9.50)$$

Входящая сюда сумма для произвольно больших объемов квантования переходит в интеграл $\left[\sum_{\mathbf{k}} \rightarrow (L/2\pi)^3 \int d^3k \right]$:

$$G_{jk}(\mathbf{r}, t; \mathbf{r}', t') = \frac{L^3}{(2\pi)^6} \int \int d^3k d^3k' \frac{\hbar}{2(\omega\omega')^{1/2}} \{ \dots \} \quad (9.51)$$

где выражение в фигурных скобках совпадает с входящим в (9.50). Если ввести функцию

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}, \nu) = \sum_{\lambda} \mathbf{e}_{\lambda}(\mathbf{k}) \tilde{S}_{\lambda}(\mathbf{k}, \nu) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} + i\omega t} \mathbf{S}(\mathbf{x}, t) d^4x, \quad (9.52)$$

то можно написать

$$C_N\{\mathbf{S}\} = \exp \left\{ -\frac{L^3}{(2\pi)^3} \sum \int \frac{\hbar}{2(\omega\omega')^{1/2}} \tilde{S}_{\lambda}(\mathbf{k}, \nu) \langle a_{\lambda}^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') \rangle \times \right. \\ \left. \times \tilde{S}_{\lambda'}^*(\mathbf{k}', \nu') d^3k d^3k' \right\}. \quad (9.53)$$

Очевидно, только поперечные компоненты $\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}, \nu)$ вносят вклад в (9.53), и мы далее будем считать поле \mathbf{S} чисто поперечным. Эти соотношения применимы в общем случае; при этом не обязательно, чтобы состояние было стационарным или однородным и изотропным в пространстве и т. д.

Однако в тех случаях, когда состояние можно считать стационарным, однородным и изотропным, соотношение

(9.53) существенно упрощается. При этих условиях имеем

$$\frac{L^3}{(2\pi)^3} \langle a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') \rangle \approx \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') N(\nu), \quad (9.54)$$

где

$$N(\nu) \equiv \langle a_\lambda^\dagger(\mathbf{k}) a_\lambda(\mathbf{k}) \rangle \quad (9.55)$$

для любой поляризации λ и значения \mathbf{k} , удовлетворяющего соотношению $|\mathbf{k}| = \omega = 2\pi\nu$. Используя эти свойства, находим, что

$$C_N\{\mathbf{S}\} = \exp\left\{-\int \frac{\hbar}{2\omega} |\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}, \nu)|^2 N(\nu) d^3k\right\}. \quad (9.56)$$

Ограничимся в дальнейшем более узким классом пробных функций, пригодных для описания детектора, локализованного в точке \mathbf{R} и чувствительного к фотонам произвольной поляризации. В частности, ограничимся пробными функциями вида

$$\tilde{\mathbf{S}}(\mathbf{k}, \nu) \equiv (2\pi)^{-3/2} \mathbf{e}_\lambda(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{R}} \tilde{S}(\nu). \quad (9.57)$$

В этом случае C_N становится независимым от \mathbf{k} , \mathbf{R} и λ . Таким образом, мы можем рассматривать C_N как функционал, зависящий от $\tilde{S}(\nu)$. Производя подстановку $d^3k \rightarrow 4\pi k^2 dk$, $k = 2\pi\nu$ и полагая

$$\tilde{\Gamma}(\nu) \equiv \hbar\nu N(\nu), \quad (9.58)$$

легко получаем

$$C_N\{\tilde{S}(\nu)\} = \exp\left\{-\int_0^\infty |\tilde{S}(\nu)|^2 \tilde{\Gamma}(\nu) d\nu\right\}. \quad (9.59)$$

Это интегральное выражение становится точным при стремлении объема к бесконечности.

Полученное соотношение выражает существенное свойство важного класса состояний. Подчеркнем, что проведенное выше рассмотрение хаотических полей приводит к гауссовым случайным процессам, однако при этом дисперсия остается неопределенной. Даже в стационарном однородном и изотропном случае, в котором

выполняется соотношение (9.59), конкретная (действительная, неотрицательная) функция $\tilde{\Gamma}(\nu)$ остается произвольной.

Следует отметить, что нормально упорядоченные характеристические функции для хаотических полей имеют ту же общую структуру, которая была указана в гл. 3 для случая классических полей. Величина \hbar может появиться только либо в функции G_{jk} в общем соотношении (9.48), либо в функции $\tilde{\Gamma}(\nu)$ в производном соотношении (9.59).

Стационарные состояния. Особое значение во многих отношениях имеют стационарные состояния поля излучения. В представлении Шредингера, в котором со временем изменяется только матрица плотности, условие независимости от времени можно записать в виде

$$\rho(t) = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar} \rho e^{i\mathcal{H}t/\hbar} = \rho, \quad (9.60)$$

т. е. матрица плотности ρ должна коммутировать с \mathcal{H} . Представим себе снова, что поле излучения ограничено большим, но конечным объемом квантования L^3 и наложены периодические граничные условия. В этом случае спектр \mathcal{H} дискретен и имеет конечную кратность. Введем ортонормированные собственные состояния гамильтониана \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} |E_n, \alpha_m\rangle = E_n |E_n, \alpha_m\rangle, \quad (9.61)$$

где E_n — собственные значения энергии, а параметр вырождения α_m отмечает состояния с фиксированной энергией. Стационарные матрицы плотности диагональны в энергетическом представлении; следовательно, они имеют каноническую форму

$$\rho = \sum_{n,m} \beta_{nm} |E_n, \alpha_m\rangle \langle E_n, \alpha_m|, \quad (9.62)$$

где величина

$$\beta_{nm} \equiv \langle E_n, \alpha_m | \rho | E_n, \alpha_m \rangle \quad (9.63)$$

удовлетворяет условиям $0 \leq \beta_{nm} \leq 1$ и

$$\sum_{n,m} \beta_{nm} = 1. \quad (9.64)$$

Нужно подчеркнуть два момента. Соотношение (9.62), вообще говоря, не означает, что $\rho = F(\mathcal{H})$, так как тогда величина

$$\beta_{nm} = \langle E_n, \alpha_m | F(\mathcal{H}) | E_n, \alpha_m \rangle = F(E_n) \quad (9.65)$$

не зависела бы от переменной m . Далее, стационарные состояния типа (9.62) включают значительно больше случаев, чем обсуждавшиеся выше стационарные хаотические поля.

Энтропия и равновесное тепловое распределение. Выделим состояния поля излучения, соответствующие равновесным тепловым распределениям. Равновесие означает, что состояние не меняется во времени, т. е. что ρ — матрица плотности стационарного состояния. Тепловой характер состояния проявляется в том, что это есть состояние с наибольшим беспорядком или с максимальной энтропией.

Энтропия $S(\rho)$ какого-либо состояния системы определяется соотношением¹⁾

$$S(\rho) = - \text{Sp}(\rho \ln \rho). \quad (9.66)$$

Если матрицу плотности представить в канонической диагональной форме

$$\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \\ 0 \leq \beta_n \leq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = 1, \quad (9.67)$$

то вышеприведенное соотношение принимает вид

$$S(\rho) = - \text{Sp} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \ln \beta_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| \right\} = - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \ln \beta_n. \quad (9.68)$$

Для любого *чистого* состояния мы можем выбрать $\beta_1 = 1$, $\beta_n = 0$, $n > 1$, поэтому $S(\rho) = 0$. Для любого *смешанного* состояния

$$S(\rho) > 0.$$

¹⁾ См., например, книгу фон Неймана [5.4].

Интуитивно ясно, что чем больше энтропия какого-то состояния, тем меньше мы о нем знаем. Рассмотрим матрицу размерностью 2×2 , которая использовалась в гл. 5 при обсуждении поляризации монохроматического пучка. Если $\beta_1 \equiv \beta$ и $\beta_2 \equiv 1 - \beta$, то состояние с матрицей плотности

$$\rho = \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

обладает энтропией

$$S(\rho) \equiv S(\beta) = -\beta \ln \beta - (1 - \beta) \ln (1 - \beta).$$

Энтропия максимальна, когда

$$S'(\beta) = -1 - \ln \beta + 1 + \ln (1 - \beta) = 0,$$

т. е. при $\beta = 1/2$, и, таким образом, соответствует матрице плотности, содержащей наименьшую информацию: $\rho = 1/2$.

В общем случае для двух матриц плотности ρ_1 и ρ_2 и параметра α , лежащего в пределах $0 \leq \alpha \leq 1$, выполняется соотношение

$$S(\alpha \rho_1 + (1 - \alpha) \rho_2) \geq \alpha S(\rho_1) + (1 - \alpha) S(\rho_2), \quad (9.69)$$

т. е. энтропия смеси превышает взвешенные суммы энтропий составляющих эту смесь компонент. Рассмотрим теперь *составную* систему, которую удобно описывать с помощью двух индексов n и m . Для такой системы

$$\rho = \sum_{n, m} \gamma_{n, m} |\psi_{n, m}\rangle \langle \psi_{n, m}|,$$

и энтропия равна

$$S(\rho) = - \sum_{n, m} \gamma_{n, m} \ln \gamma_{n, m}.$$

В частном случае, когда две системы *независимы*, что характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} \gamma_{n, m} &\equiv \lambda_n \mu_m, \\ \sum_n \lambda_n &= \sum_m \mu_m = 1, \end{aligned}$$

энтропия равна сумме энтропий, рассчитанных независимо для каждой системы:

$$\begin{aligned} S(\rho) &= - \sum_{n,m} \lambda_n \mu_m \ln(\lambda_n \mu_m) = \\ &= - \sum_n \lambda_n \ln \lambda_n - \sum_m \mu_m \ln \mu_m. \end{aligned} \quad (9.70)$$

Можно предложить обозначение, подчеркивающее, с одной стороны, независимость этих систем, а с другой стороны, то обстоятельство, что матрица плотности всей системы равна произведению матриц плотности отдельных компонент

$$S(\rho_1 \otimes \rho_2) = S(\rho_1) + S(\rho_2). \quad (9.71)$$

Определим равновесное тепловое состояние как состояние с максимальным значением энтропии $S(\rho)$ при данном среднем значении энергии $E = \langle \mathcal{H} \rangle = \text{Sp}(\rho \mathcal{H})$. Чтобы найти это состояние, обратимся к общему представлению матрицы плотности (9.62) для равновесных состояний и рассмотрим

$$\begin{aligned} \bar{S}(\rho) &= - \text{Sp}(\rho \ln \rho) - \beta [\text{Sp}(\rho \mathcal{H}) - E] + \mu [\text{Sp}(\rho) - 1] = \\ &= - \sum_{n,m} \beta_{nm} \ln \beta_{nm} - \\ &- \beta \left(\sum_{n,m} \beta_{nm} E_n - E \right) + \mu \left(\sum_{n,m} \beta_{nm} - 1 \right). \end{aligned} \quad (9.72)$$

Здесь β и μ — множители Лагранжа, обеспечивающие выполнение необходимых связей и позволяющие найти экстремум величины \bar{S} путем независимой вариации каждого множителя β_{nm} . Должно выполняться условие

$$\frac{\partial}{\partial \beta_{nm}} \bar{S}(\rho) = -1 - \ln \beta_{nm} - \beta E_n + \mu = 0.$$

Отсюда для β_{nm} получаем решение

$$\beta_{nm} = \exp(\mu - 1 - \beta E_n) \equiv Z^{-1} \exp(-\beta E_n); \quad (9.73)$$

оно не зависит от m [следовательно, $\rho = F(\mathcal{H})$].

Используя нормировку $\text{Sp}(\rho) = 1$, определяем Z :

$$Z = \sum_{n,m} \exp(-\beta E_n) = \sum_n N_n \exp(-\beta E_n), \quad (9.74)$$

где N_n — степень вырождения уровня E_n . Величина Z называется статистической суммой и играет важную роль. Основываясь на сделанных ранее замечаниях, находим

$$Z = \text{Sp}(e^{-\beta \mathcal{H}}), \quad (9.75)$$

$$\rho = Z^{-1} e^{-\beta \mathcal{H}}. \quad (9.76)$$

Энергия системы записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} E &= \text{Sp}(\rho \mathcal{H}) = Z^{-1} \text{Sp}(e^{-\beta \mathcal{H}} \mathcal{H}) = \\ &= \sum_{n, m} \beta_{nm} E_n = Z^{-1} \sum_{n, m} \exp(-\beta E_n) E_n, \end{aligned} \quad (9.77a)$$

что можно представить в виде

$$E = - \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(\beta) = \frac{\text{Sp}(\mathcal{H} e^{-\beta \mathcal{H}})}{\text{Sp}(e^{-\beta \mathcal{H}})}. \quad (9.77b)$$

Преобразуя (5.75), получаем для поля излучения выражение

$$E = \sum_{\lambda, k} \frac{\hbar |k|}{e^{\beta \hbar |k|} - 1}, \quad (9.78)$$

которое для больших, но конечных объемов квантования L^3 можно аппроксимировать выражением

$$E = 2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{\hbar |k|}{e^{\beta \hbar |k|} - 1} = \frac{L^3}{\pi^2 \hbar^3 \beta^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx. \quad (9.79)$$

Можно показать¹⁾, что последний интеграл равен $\pi^4/15$, и мы приходим к классическому решению ($\beta \equiv 1/\kappa T$)

$$E = \frac{\pi^2}{15} \frac{L^3}{\hbar^3 \beta^4} = \frac{\pi^2}{15} \frac{(\kappa T)^4 L^3}{\hbar^3}, \quad (9.80)$$

где κ — постоянная Больцмана, а T — абсолютная температура. Интегрируя (9.77b) с учетом условия нормировки $Z(\infty) = 1$, получаем для $Z(\beta)$ приближенное выражение

$$Z(\beta) = \exp \left[\left(\frac{\pi^2}{45} \right) \left(\frac{L}{\hbar \beta} \right)^3 \right]. \quad (9.81)$$

¹⁾ См., например, книгу Ландау и Лифшица [9.1].

Из (9.80) вытекает, что E однозначно определяет β и поэтому полностью определяет равновесное тепловое состояние.

Наше тепловое состояние является, очевидно, частным случаем описываемых соотношением (9.56) хаотических состояний, для которых $N(\nu) = (e^{\beta h \omega} - 1)^{-1}$. Понятие теплового состояния является настолько важным и фундаментальным, что различные хаотические состояния часто нестрого называют «тепловыми». Это отчасти оправдано, так как вполне общие хаотические состояния могут возникнуть и чаще всего возникают как отфильтрованные тепловые состояния, например при поглощении атмосферой излучения Солнца.

Г. Распределение фотоотсчетов для хаотических полей

Для простоты ограничимся обсуждением точечного детектора, расположенного в точке \mathbf{R} стационарного поля излучения. Чтобы можно было сравнить наши формулы с формулами, полученными другими авторами, будем считать, что присутствует только одна мода поляризации e_λ . Положим

$$A^{(+)}(t) \equiv e_\lambda \cdot \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{R}, t), \quad (9.82a)$$

$$V(t) \equiv e_\lambda \cdot \mathbf{V}(\mathbf{R}, t). \quad (9.82b)$$

Тогда, приняв в соотношении (8.124) $t \equiv -T/2$ и воспользовавшись диагональным представлением для матрицы плотности, получим

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T) &= \left\langle : \exp \left[-\lambda \alpha \int_{-T/2}^{T/2} A^{(-)}(t') A^{(+)}(t') dt' \right] : \right\rangle = \\ &= \int \varphi(\{z_k\}) \exp \left[-\lambda \alpha \int_{-T/2}^{T/2} V^*(t') V(t') dt' \right] d\mu(\{z_k\}). \quad (9.83) \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{A}^{(+)}$ и \mathbf{V} связаны между собой соотношением (7.181a), а $\varphi(\{z_k\})$ — нормальное распределение, которое благодаря разложению по когерентным состояниям имеет вид (9.38). Для таких нормальных распределений

расчет среднего, входящего в (9.83), является типичной задачей теории шумов.

Удобнее, не пользуясь соотношением (9.83), вывести пригодное для настоящего случая распределение непосредственно из (9.59). Так как при выводе выражения для $Q(\lambda, T)$ нас интересует временной интервал только от $-T/2$ до $T/2$, в соотношении (9.59) можно ограничиться функциями $\tilde{S}(v)$, для которых $S(t)$ обращается в нуль при $|t| \geq T/2$. Это позволяет нам разложить все нужные величины в ряд Фурье на временном интервале T . Положим

$$S(t) \equiv T^{-1/2} \sum_l s_l \exp(-2\pi i v_l t), \quad (9.84a)$$

$$V(t) \equiv T^{-1/2} \sum_l v_l \exp(-2\pi i v_l t), \quad (9.84б)$$

$$\Gamma(t) \equiv T^{-1} \sum_l \Gamma_l \exp(-2\pi i v_l t), \quad (9.84в)$$

где $v_l = l/T$. Так как и $V(t)$ и $\Gamma(t)$ — аналитические сигналы, индекс суммирования l пробегает значения от $l=0$ до $+\infty$. Чтобы найти распределение θ для переменных v_l , можно написать, используя (9.59) и (9.84),

$$\begin{aligned} C_N\{\tilde{S}\} &= \exp\left[-\sum_l (s_l^* s_l \Gamma_l)\right] = \left\langle \exp\left[\sum_l (s_l^* v_l - s_l v_l^*)\right] \right\rangle = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int \theta_L(\{v_l\}) \exp\left[\sum_0^L (s_l^* v_l - s_l v_l^*)\right] \prod_0^L d\mu(v_l), \end{aligned} \quad (9.85)$$

где, как обычно, $d\mu(v) = \pi^{-1} d^2 v$. Замечая, что интеграл

$$\int \frac{1}{\Gamma} \exp\left[-\frac{|v|^2}{\Gamma} + (s v^* - s^* v)\right] \pi^{-1} d^2 v = \exp(-|s|^2 \Gamma)$$

распадается на два действительных интеграла, получаем

$$\theta_L(\{v_l\}) = \prod_{l=0}^L \frac{1}{\Gamma_l} \exp\left(-\frac{|v_l|^2}{\Gamma_l}\right); \quad (9.86)$$

таким образом можно определить искомые весовые функции для переменных v_l . Следует отметить, что это

распределение в общем случае отличается от (9.38). Наконец, соотношение

$$\int \frac{1}{\Gamma} \exp\left(-\frac{|v|^2}{\Gamma} - \lambda \alpha |v|^2\right) \pi^{-1} d^2v = \frac{1}{1 + \lambda \alpha \Gamma}$$

(которое получается просто из условия нормировки и замены переменных) позволяет определить $Q(\lambda, T)$ с помощью усреднения:

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T) &= \left\langle \exp\left(-\lambda \alpha \sum_l v_l^* v_l\right) \right\rangle = \\ &= \lim_{L \rightarrow \infty} \int \theta_L(\{v_l\}) \exp\left(-\lambda \alpha \sum_{l=0}^L v_l^* v_l\right) \prod_{l=0}^L d\mu(v_l) = \\ &= \prod_l \frac{1}{1 + \lambda \alpha \Gamma_l} = \exp\left[-\sum_l \ln(1 + \lambda \alpha \Gamma_l)\right]. \end{aligned} \quad (9.87)$$

Условие сходимости выражения (9.87) имеет просто вид $\sum_l \Gamma_l < \infty$. Важные величины Γ_l , входящие в это выражение, определяются соотношением

$$\Gamma_l = \int_{-T/2}^{T/2} \Gamma(t) \exp\left(\frac{2\pi i l t}{T}\right) dt. \quad (9.88)$$

Общее и точное соотношение (9.87) имеет несколько простых предельных форм. Когда T значительно меньше времени когерентности, можно заменить $\Gamma(t)$ на $\Gamma(0) \exp(-2\pi i \nu_0 t)$, где ν_0 — центральная частота излучения. В нашем рассмотрении с помощью гармонического анализа [ср. (9.84в)] $\nu_0 = l_0/T$ для некоторого $l_0 \gg 1$. Следовательно, из (9.88) вытекает, что $\Gamma_{l_0} = T\Gamma(0)$, а все другие Γ_l равны нулю. Тогда получаем

$$Q(\lambda, T) = \frac{1}{1 + \lambda \alpha \Gamma_{l_0}} = \frac{1}{1 + \lambda \alpha T \Gamma(0)}; \quad (9.89)$$

это выражение представляет собой производящую функцию для бозе-эйнштейновского, или геометрического распределения фотоотсчетов [см. (2.20)]. Из (2.19) следует, что

$$P(m, T) = (1 + \bar{m})^{-1} (1 + \bar{m}^{-1})^{-m},$$

где $\bar{m} = \alpha T \Gamma(0)$.

В следующем приближении для малых T мы можем учесть медленные изменения модуля $\Gamma(t)$. В частности, если положить

$$\Gamma(t) \equiv \Gamma_0(t) \exp(-2\pi i \nu_0 t) \equiv \Gamma(0) \gamma_0(t) \exp(-2\pi i \nu_0 t), \quad (9.90)$$

где $\Gamma_0(t) \approx \Gamma(0)$ в интервале $|t| \leq T/2$, то наибольший член в (9.88) имеет вид

$$\Gamma_{l_0} = \int_{-T/2}^{T/2} \Gamma_0(t) dt.$$

Остальные члены

$$\Gamma_{l_0+l} = \int_{-T/2}^{T/2} \Gamma_0(t) e^{2\pi i l t/T} dt$$

предполагаются очень малыми при всех $l \neq 0$. Можно разложить логарифм в выражении (9.87) для $Q(\lambda, T)$ в ряд по степеням этих малых членов. Если в разложении оставить только члены первого порядка малости, то получим

$$Q(\lambda, T) = \frac{1}{1 + \lambda \alpha \Gamma_{l_0}} \exp\left(-\sum' \lambda \alpha \Gamma_{l_0+l}\right) \equiv \frac{1}{1 + \lambda \bar{m}_1} \exp(-\lambda \bar{m}_2), \quad (9.91)$$

где штрих у знака суммы означает, что член $l=0$ из суммы опущен. Однако для определения соответствующих параметров не нужно в явном виде проводить суммирование в экспоненте. Из соотношения

$$Q(\lambda, T) = \sum_{m=0}^{\infty} (1-\lambda)^m P(m, T) \quad (9.92)$$

и соотношения (3.39) вытекает, что в общем случае

$$\bar{m} = -\frac{\partial}{\partial \lambda} Q(\lambda, T) |_{\lambda=0} = \alpha T \Gamma(0). \quad (9.93)$$

С помощью (9.91) получаем

$$\bar{m} = \bar{m}_1 + \bar{m}_2 = \alpha T \Gamma(0); \quad (9.94)$$

далее, принимая во внимание (9.90), имеем

$$\bar{m}_1 \equiv \alpha \int_{-T/2}^{T/2} \Gamma_0(t) dt = \alpha \Gamma(0) \int_{-T/2}^{T/2} \gamma_0(t) dt, \quad (9.95a)$$

$$\bar{m}_2 \equiv \alpha T \Gamma(0) - \bar{m}_1 = \alpha \Gamma(0) \int_{-T/2}^{T/2} [1 - \gamma_0(t)] dt. \quad (9.95b)$$

В правой части соотношения (9.91) стоит произведение производящих функций для распределения Бозе — Эйнштейна и для распределения Пуассона. Отсюда результирующее распределение фотоотсчетов в соответствии с (2.35) дается сверткой

$$P(m, T) = \sum_{n=0}^m P_1(m-n, T) P_2(n, T), \quad (9.96)$$

где распределения P_1 и P_2 имеют вид

$$P_1(m, T) \equiv (1 + \bar{m}_1)(1 + \bar{m}_1^{-1})^m, \quad (9.97a)$$

$$P_2(m, T) \equiv \frac{(\bar{m}_2)^m e^{-\bar{m}_2}}{m!}. \quad (9.97b)$$

Дисперсия результирующего распределения определяется выражением

$$\sigma^2 = \overline{(\Delta m)^2} = \bar{m} + \bar{m}_1^2 = \bar{m} + (1+r)^{-2} \bar{m}^2, \quad (9.98)$$

где $r = \bar{m}_2/\bar{m}_1$.

Для иллюстрации предыдущих соотношений возьмем в качестве примера $\gamma_0(t) = \exp(-\gamma|t|)$. В этом случае имеем

$$\bar{m}_1 = \alpha \Gamma(0) T \left(\frac{1}{2} \gamma T \right)^{-1} [1 - e^{-\gamma T/2}] \approx \alpha \Gamma(0) T \left[1 - \frac{1}{4} \gamma T \right] \quad (9.99a)$$

и

$$\bar{m}_2 = \alpha \Gamma(0) T - \bar{m}_1 \approx \frac{1}{4} \alpha \Gamma(0) \gamma T^2; \quad (9.99b)$$

последние выражения в (9.99a) и (9.99b) получены в предположении, что $\gamma T \ll 1$. В (9.98) множитель $r \approx \gamma T/4$.

Обратимся теперь к рассмотрению соотношения (9.87) для другого предельного случая, в котором время T больше времени когерентности. Тогда можно считать Γ_l медленно меняющейся функцией l . Если это так, то можно перейти к непрерывному приближению и заменить сумму \sum_l интегралом $T \int dv$ аналогично тому, как это было сделано при выводе соотношения (9.79) для больших объемов квантования. В этом случае

$$Q(\lambda, T) = \exp \left[- \sum_l \ln(1 + \lambda \alpha \Gamma_l) \right] = \\ = \exp \left\{ - T \int_0^\infty dv \ln [1 + \lambda \alpha \tilde{\Gamma}(v)] \right\}, \quad (9.100)$$

где можно выбрать [ср. (9.88)]

$$\tilde{\Gamma}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(t) e^{2\pi i v t} dt \quad (9.101)$$

в качестве спектра мощности для стационарного гауссова процесса.

В общем случае полное распределение фотоотсчетов $P(m, T)$ сложным образом зависит от формы спектра мощности. Из определения (9.92) вытекают два метода нахождения распределения фотоотсчетов. В первом методе

$$P(m, T) = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} Q(\lambda, T) \Big|_{\lambda=1}. \quad (9.102)$$

Во втором методе $1 - \lambda$ заменяется на e^{is} . Тогда для $P(m, T)$ получаем интеграл

$$P(m, T) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ -ism - T \int_0^\infty dv \ln [1 + \right. \\ \left. + (1 - e^{is}) \alpha \tilde{\Gamma}(v)] \right\} ds. \quad (9.103)$$

Можно упростить последнее выражение при следующих разумных предположениях. Выведенные выражения

справедливы при больших T и относительно широком спектре $\tilde{\Gamma}(\nu)$. И то и другое способствует тому, чтобы величина \bar{m} была значительно больше единицы. Тогда разумно предположить, что $P(m, T)$ является медленно меняющейся функцией m . Мы можем аппроксимировать ее (с помощью интерполяции) гладкой функцией $p(x, T)$, проходящей через точки $p(x_m, T) \approx \bar{m}P(m, T)$, где $x_m \equiv m/\bar{m}$. При этом для функции $p(x, T)$ во всех случаях выполняется условие нормировки

$$\int_0^{\infty} p(x, T) dx = \sum_{m=0}^{\infty} p(x_m, T) \frac{1}{\bar{m}} = 1. \quad (9.104)$$

Чтобы идти дальше, заметим, что

$$\begin{aligned} \bar{m}P(m, T) &= (2\pi)^{-1} \bar{m} \int_{-\pi}^{\pi} \exp \left\{ -is\bar{m}x_m - \right. \\ &\quad \left. - T \int_0^{\infty} d\nu \ln [1 + (1 - e^{is}) \alpha \tilde{\Gamma}(\nu)] \right\} ds = \\ &= (2\pi)^{-1} \int_{-\pi\bar{m}}^{\pi\bar{m}} \exp \left\{ -iyx_m - \right. \\ &\quad \left. - T \int_0^{\infty} d\nu \ln [1 + (1 - e^{iy/\bar{m}}) \alpha \tilde{\Gamma}(\nu)] \right\} dy. \end{aligned} \quad (9.105)$$

Аппроксимацию гладкой функцией получаем, заменяя пределы интегрирования по $y (=s\bar{m})$ на $\pm\infty$ и оставляя под знаком логарифма только первые члены разложения по степеням y . Иначе говоря, мы полагаем

$$\begin{aligned} p(x, T) \equiv (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -iyx - \right. \\ \left. - T \int_0^{\infty} d\nu \ln [1 - i\bar{m}^{-1}y\alpha \tilde{\Gamma}(\nu)] \right\} dy. \end{aligned} \quad (9.106)$$

Так как соотношение (9.106) можно рассматривать как предел соотношения (9.105) при $\bar{m} \rightarrow \infty$, $m \rightarrow \infty$, $\tilde{\Gamma}(\nu) \rightarrow \infty$, $x_m \rightarrow x$ и фиксированном $\bar{m}^{-1}\tilde{\Gamma}(\nu)$, то, очевид-

но, что $\rho(x, T)$ обращается в нуль при $x < 0$ и что $\rho(x, T) \geq 0$ для $x \geq 0$. Предыдущее условие представляется также правдоподобным в силу хорошего поведения подынтегрального выражения (аналитического в верхней половине плоскости y). Очевидно, результирующее распределение удовлетворяет условию нормировки (9.104). При $\bar{m} \gg 1$ для всех практических целей можно взять в качестве распределения фотоотсчетов

$$P(m, T) \equiv (\bar{m})^{-1} \rho\left(\frac{m}{\bar{m}}, T\right), \quad (9.107)$$

где $\rho(x, T)$ определяется соотношением (9.106).

Приведем два примера для иллюстрации предыдущих соотношений, выведенных для значений T , превышающих время когерентности. Предположим сначала, что спектр $\tilde{\Gamma}(\nu)$ имеет прямоугольную форму, т. е. равен постоянной величине b в некотором интервале положительных частот ν . С помощью (9.94) можно связать αb со средним числом отсчетов:

$$\bar{m} = \alpha T \int \tilde{\Gamma}(\nu) d\nu = \alpha T b \nu.$$

Введем также среднюю скорость счета $\omega \equiv \bar{m}/T$. Следовательно, параметр

$$\alpha b = \frac{\omega}{\nu} \equiv \mu$$

выражается через измеримые величины. Вооруженные этими определениями, мы можем написать

$$Q(\lambda, T) = e^{-T\nu \ln[1+\lambda\alpha b]} = e^{-(\bar{m}/\mu) \ln[1+\lambda\mu]} = (1 + \lambda\mu)^{-\bar{m}/\mu}. \quad (9.108)$$

Так как

$$\overline{m(m-1)} = \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} Q(\lambda, T) \Big|_{\lambda=0} = \bar{m}(\mu + \bar{m}),$$

дисперсия отсчетов равна

$$\sigma^2 = \overline{(\Delta m)^2} = \bar{m}(1 + \mu) = \bar{m} \left(1 + \frac{\bar{m}}{\nu T}\right). \quad (9.109)$$

Сравнивая с (3.40), получаем, что время когерентности [ср. (3.38)]

$$\xi(\infty) \equiv 2 \int_0^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau \quad (9.110)$$

В настоящем случае равно γ^{-1} . Непосредственным разложением по теореме биномов находим

$$\begin{aligned} P(m, T) &= \frac{(1 + \mu)^{-\bar{m}/\mu}}{m!} \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right)^m \frac{\Gamma(m + \bar{m}/\mu)}{\Gamma(\bar{m}/\mu)} = \\ &= \frac{(1 + \mu)^{-\bar{m}/\mu}}{m!} \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right)^m \prod_{p=1}^m \left(p + \frac{\bar{m}}{\mu} - 1 \right). \end{aligned} \quad (9.111)$$

Если $\mu = \bar{m}$, то $P(m, T)$ есть распределение Бозе — Эйнштейна

$$P(m, T) = (1 + \mu)^{-1} \left(\frac{\mu}{1 + \mu} \right)^m.$$

Соотношение (9.106) можно использовать для нахождения подходящей гладкой функции, определяющей распределение при $\bar{m} \gg 1$. В настоящем случае имеем

$$\begin{aligned} p(x, T) &= (2\pi)^{-1} \int \exp \left\{ -iyx - \frac{\bar{m}}{\mu} \ln \left[1 - iy \frac{\mu}{\bar{m}} \right] \right\} dy = \\ &= (2\pi)^{-1} \int \left[1 - iy \frac{\mu}{\bar{m}} \right]^{-\bar{m}/\mu} e^{-iyx} dy = \\ &= \frac{\bar{m}}{\mu} \left[\Gamma \left(\frac{\bar{m}}{\mu} \right) \right]^{-1} \left(\frac{x\bar{m}}{\mu} \right)^{(\bar{m}/\mu)-1} e^{-x\bar{m}/\mu}. \end{aligned} \quad (9.112a)$$

Следовательно, из (9.107)

$$P(m, T) = \mu^{-1} \left[\Gamma \left(\frac{\bar{m}}{\mu} \right) \right]^{-1} \left(\frac{m}{\mu} \right)^{(\bar{m}/\mu)-1} e^{-m/\mu}. \quad (9.112б)$$

В качестве второго примера, физически, по-видимому, более интересного, возьмем спектр, имеющий лоренцевскую форму

$$\tilde{\Gamma}(\nu) = \frac{b'}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2}, \quad (9.113)$$

где $\omega_0 \gg \gamma$. Постоянная $\alpha b'$ связана со средним числом отсчетов соотношением

$$\bar{m} \equiv \omega T = \alpha T \int \tilde{\Gamma}(\nu) d\nu = \frac{1}{2} \frac{\alpha T b'}{\gamma},$$

в котором мы нижний предел интегрирования заменили на $-\infty$. Отсюда $\alpha b' = 2\omega\gamma$, так что можно положить

$$Q(\lambda, T) = \exp \left\{ - (2\pi)^{-1} T \int d\omega \ln \left[1 + \frac{2\lambda\omega\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} \right] \right\}. \quad (9.114)$$

С помощью интеграла общего вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{a^2 + x^2}{b^2 + x^2} \right) dx = 2\pi(a - b)$$

соотношение (9.114) можно представить следующим образом:

$$Q(\lambda, T) = \exp \{ - T [(\gamma^2 + 2\lambda\omega\gamma)^{1/2} - \gamma] \}. \quad (9.115a)$$

Это соотношение впервые было получено Гренандером, Поллаком и Слепяном [9.2], а затем заново выведено Глаубером [8.2] в связи с задачами квантовой оптики. Введем опять величину $\mu = \omega/\gamma$; тогда

$$Q(\lambda, T) = \exp \left\{ - \frac{\bar{m}}{\mu} [(1 + 2\lambda\mu)^{1/2} - 1] \right\}. \quad (9.115b)$$

Для линии с лоренцевской формой $|\gamma(\tau)| = \exp(-\gamma|\tau|)$, поэтому в данном примере время когерентности

$$\xi(\infty) = 2 \int_0^{\infty} |\gamma(\tau)|^2 d\tau = 2 \int_0^{\infty} e^{-2\gamma\tau} d\tau = \gamma^{-1}. \quad (9.116)$$

Таким образом, дисперсия отсчетов опять определяется соотношением (9.109). Распределение отсчетов, вытекающее из (9.115), является довольно сложным, и мы только приведем результат, полученный Глаубером [8.1]:

$$P(m, T) = \frac{1}{m!} \left(\frac{2\Omega T}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{\gamma\omega T}{\Omega} \right)^m K_{m-1/2}(\Omega T) e^{\gamma T}. \quad (9.117)$$

Здесь мы ввели обозначение

$$\Omega \equiv (\gamma^2 + 2\omega\gamma)^{1/2},$$

а $K_{m-1/2}$ — модифицированная функция Ганкеля полуцелого порядка.

По сравнению с выражением (9.117) более простой и наглядной является асимптотическая форма для гладкой функции $p(x, T)$, характеризующей это распределение при больших \bar{m} . Из (9.106) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} p(x, T) &= \\ &= (2\pi)^{-1} \int \exp \left\{ -iyx - T \int dv \ln [1 - i\bar{m}^{-1}ya\bar{\Gamma}(v)] \right\} dy = \\ &= (2\pi)^{-1} \int \exp \left\{ -iyx - \frac{\bar{m}}{\mu} \left[\left(1 - 2iy \frac{\mu}{\bar{m}} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\} dy, \end{aligned} \quad (9.118)$$

что является табличным преобразованием Фурье. Отсюда получаем выражение

$$p(x, T) = \left(\frac{\bar{m}}{2\pi\mu x^3} \right)^{1/2} \exp \left[-\frac{\bar{m}}{2\mu} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \right], \quad (9.119a)$$

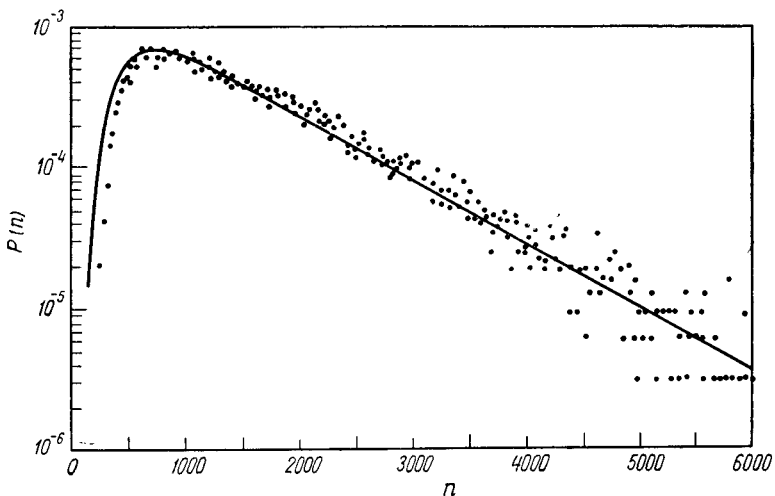
которое было выведено Гренандером, Поллаком и Слепяном [9.2]. Следовательно, с помощью (9.107) находим

$$P(m, T) = \frac{\bar{m}}{(2\pi\mu m^3)^{1/2}} \exp \left[-\frac{1}{2\mu} \left(\sqrt{m} - \frac{\bar{m}}{\sqrt{m}} \right)^2 \right], \quad (9.119б)$$

что было получено Глаубером [9.3] как асимптотическая форма выражения (9.117).

Эксперименты по счету фотонов для излучения тепловых источников были выполнены Фридом и Хаусом [9.4]; результаты приведены на фиг. 4. Данные Фрида и Хауса сопоставлялись с некоторыми теоретическими формулами. Наилучшее совпадение имело место с рассчитанной Баракатом и Глаубером [9.5] для лоренцевского спектра формулой, вытекающей из точного соотношения (9.87). Время счета в этих экспериментах слишком мало, чтобы можно было применить соотношение (9.117) или (9.119б).

Выведенные нами выражения для распределения отсчетов и их производящих функций справедливы не только для рассмотренного нами случая точечного детектора. Например, Глаубер показал, что аналогичные выражения справедливы для плоскополяризованной волны, падающей на тонкий плоский детектор. Если детектор имеет более сложную структуру или если в течение времени T поле нельзя считать стационарным, то выражения имеют значительно более сложную форму. В любом



Фиг. 4. Распределение вероятности для числа зарегистрированных фотоэлектронов (распределение фотоотсчетов). Экспериментальные результаты взяты из работы Фрида и Хауса [9.4a]; теоретические — из неопубликованных расчетов Бараката и Глаубера.

Точками показаны экспериментальные результаты, полученные для излучения источника теплового типа, в качестве которого использовался недовозбужденный лазер. Длительность выборки $T = 10^{-3}$ сек, число выборок равно 13 093. Сплошной линией показана теоретическая кривая, построенная на основе точного соотношения (9.87) в предположении лоренцевской формы линии.

случае производящая функция Q дается многократным гауссовым интегралом, который сводится к обратному детерминанту бесконечного ранга. Только в частном случае, которому соответствует соотношение (9.87), можно было непосредственно диагонализировать этот детерминант и представить его в виде произведения его собственных значений. В задачах такого рода подобная простота является скорее исключением, чем правилом.

§ 2. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЛАЗЕРА

Основываясь на разумных физических идеализациях, можно дать феноменологическое описание лазера. Такое описание может основываться на полуклассических представлениях, что позволяет определить весовые функции

в диагональном представлении для матрицы плотности. Основная идея сходна с той, на которой базировались наши выводы для общих хаотических полей. Как и раньше, источник z , возбуждающий поле излучения, разлагается на несколько компонент z_n ; при этом должны быть проведены соответствующие усреднения по их индивидуальным распределениям. Хотя для некоторых из этих моделей можно ввести очень простые эквивалентные гамильтонианы, мы не будем здесь этого делать. Значение этих моделей заключается в их интуитивной связи с классической теорией случайных процессов, и именно такой подход мы будем использовать. Ниже будет проведено краткое обсуждение более реалистических моделей, когда оправдано полное квантовое рассмотрение.

Начнем с замечания, что в том случае, когда стабилизированный внешний источник z_0 возбуждает одну нормальную моду, система находится в состоянии $|z_0\rangle\langle z_0|$. Это соответствует диагональному весу

$$\rho(z) = \pi \delta(z - z_0) = \pi \delta(x - x_0) \delta(y - y_0),$$

где $z \equiv x + iy$. Заметим далее, что в шредингеровском представлении матрица плотности имеет вид

$$\rho(t) = |\exp(-i\omega_0 t) z_0\rangle \langle \exp(-i\omega_0 t) z_0|$$

и не соответствует стационарному состоянию, так как, например, величина $\langle a(t) \rangle = \exp(-i\omega_0 t) z_0$ зависит от t .

А. Идеальная модель

На оптических частотах мы едва ли можем располагать какими-либо сведениями о начальной фазе осциллятора, поэтому приведенную выше матрицу плотности нужно усреднить по фазе θ_0 величины $z_0 = \exp(i\theta_0) |z_0|$. Сравнение с разложением (7.1) показывает, что результирующая матрица плотности имеет вид

$$\rho = \exp(-|z_0|^2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |z_0|^{2n} |n\rangle \langle n| \quad (9.120)$$

и, очевидно, является стационарной. Это состояние удобно также характеризовать с помощью диагонального веса

$$\varphi(z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \pi \delta(z - \exp(i\theta_0)|z_0|) d\theta_0.$$

Вспомним, что если $x + iy \equiv re^{i\theta}$, то для углов θ в интервале $-\pi < \theta \leq \pi$ можно положить

$$\delta(x - x_0) \delta(y - y_0) = r^{-1} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0).$$

Множитель r^{-1} нужен только для того, чтобы исключить r в выражении для элемента площади $dx dy = r dr d\theta$. Следовательно, можно написать

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= (2)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |z|^{-1} \delta(|z| - |z_0|) \delta(\theta - \theta_0) d\theta_0 = \\ &= (2|z|)^{-1} \delta(|z| - |z_0|) = \delta(|z|^2 - |z_0|^2). \end{aligned} \quad (9.121)$$

Мы можем рассматривать это выражение как идеальное распределение для лазера. Очевидно, амплитудные флуктуации в этой модели отсутствуют, поэтому статистика отсчетов является пуассоновской. Далее, все корреляционные функции четного порядка совпадают с корреляционными функциями для чистых когерентных состояний, как, например, в случае

$$\langle a^\dagger(t) a(0) \rangle = \exp(i\omega_0 t) |z_0|^2.$$

Б. Модель колебания с диффундирующей фазой

Перейдем теперь к следующему примеру, а именно рассмотрим корреляционные функции для одной моды

$$G = \langle a^\dagger(t_1) \dots a^\dagger(t_n) a(t_{n+1}) \dots a(t_{2n}) \rangle. \quad (9.122)$$

Если интересующее нас состояние является когерентным $|z_0\rangle$, а рассматриваемая мода представляет собой нормальную моду с частотой ω_0 , то

$$G = \exp\left(i \sum_1^n \omega_0 t_l - i \sum_{n+1}^{2n} \omega_0 t_l\right) |z_0|^{2n}. \quad (9.123)$$

В предлагаемой модели мы будем считать, что величина $|z_0|$ стабилизирована, но существуют *фазовые* флуктуации. Предположим прежде всего, что вместо $a(t) = \exp(-i\omega_0 t)a$ мы имеем

$$a(t) = \exp \left[-i \int_0^t \omega(t') dt' \right] a_0, \quad (9.124)$$

где $\omega(t')$ — некоторая заданная функция, принимающая значения, близкие к ω_0 . Изменения частоты могут возникнуть, например, из-за флуктуаций параметров резонатора.

С квантовомеханической точки зрения это означает, что феноменологический гамильтониан для такой системы имеет вид $\mathcal{H} = \hbar\omega(t')a^\dagger a$, т. е. явно зависит от времени. Такая модель, конечно, слишком искусственна, но мы можем интерпретировать ее следующим образом. Так как полный гамильтониан излучения содержит суперпозицию по множеству осцилляторов, флуктуации в стенках резонатора — медленные по сравнению с оптическими частотами — могут адиабатически переводить резонанс с одного осциллятора на другой. Поскольку в данной модели мы пренебрегаем амплитудными флуктуациями, вместо нескольких осцилляторных переменных можно использовать *одну*.

Если мы примем во внимание возможный случайный характер функций $\omega(t')$, то соответствующая корреляционная функция G определяется как среднее по ансамблю этих функций. Обозначая это среднее угловыми скобками, получаем, что нам необходимо рассмотреть величину

$$\begin{aligned} G &= \left\langle \exp \left[i \sum_1^n \int_0^{t_l} \omega(t') dt' - i \sum_{n+1}^{2n} \int_0^{t_l} \omega(t') dt' \right] \right\rangle |z_0|^{2n} \equiv \\ &\equiv \left\langle \exp \left[i \int s(t') \omega(t') dt' \right] \right\rangle |z_0|^{2n}. \end{aligned} \quad (9.125)$$

Здесь функция

$$s(t') \equiv - \int_{-\infty}^{t'} \left[\sum_1^n \delta(t-t_l) - \sum_{n+1}^{2n} \delta(t-t_l) \right] dt \quad (9.126)$$

равна нулю, если t' меньше или больше, чем t_1, \dots, t_{2n} , в противном случае она принимает целые значения. Например, если $n = 1$ и $t_1 > t_2$, то

$$\begin{aligned} s(t') &= 0 & (t' < t_2), \\ s(t') &= 1 & (t_2 < t' < t_1), \\ s(t') &= 0 & (t_1 < t'). \end{aligned} \quad (9.127)$$

В данном случае непосредственный физический интерес представляет характеристический функционал случайного процесса, а не рассматриваемое обычно распределение вероятности.

Среднее, входящее в (9.125), аналогично средним, возникающим в ряде различных по своей природе физических задач. Искомое решение легко получить для очень большого класса стационарных случайных процессов, включающих в качестве частных случаев процессы, обычно встречающиеся в физике. Каждое рассматриваемое здесь распределение характеризуется двумя действительными функциями $f(t)$ и $\hat{G}(t)$; последняя играет роль причинной функции Грина в том смысле, что

$$\hat{G}(t) \equiv 0 \quad (t < 0).$$

Характеристический функционал любого процесса дается в случае произвольной гладкой функции $s(t)$ выражением

$$\begin{aligned} \langle \exp \left[i \int s(t') \omega(t') dt' \right] \rangle &= \\ &= \exp \left\{ i \omega_0 \int s(t') dt' - \int f \left[\int s(t'') \hat{G}(t'' - t') dt'' \right] dt' \right\}. \end{aligned} \quad (9.128)$$

Мы можем рассматривать в данном случае $f(y)$ как довольно произвольную функцию¹⁾, для которой $f(y) = f(-y) \geq 0$ и $f(0) = f'(0) = 0$.

¹⁾ Точнее говоря, функция $-f(y)$ должна быть показателем экспоненты так называемого бесконечно делюмого процесса. Достаточно широкий класс таких функций дается выражением, указывающим на их общий характер:

$$f(y) = ky^2 + \int [1 - \cos(\lambda y)] \sigma(\lambda) d\lambda,$$

где $k \geq 0$ и величина $\lambda^2 \sigma(\lambda) / (1 + \lambda^2)$ неотрицательна и интегрируема. Функция, входящая в соотношение (3.30), является функцией

Для ознакомления приведем без доказательства несколько основных свойств указанных выше распределений. Из (9.128) в общем случае следует

$$\langle \omega(t) \rangle = \omega_0, \quad (9.129a)$$

$$C(t) \equiv \langle \Delta\omega(t) \Delta\omega(0) \rangle = f''(0) \int_0^{\infty} \hat{G}(t') \hat{G}(t+t') dt', \quad (9.129b)$$

где $\Delta\omega(t) \equiv \omega(t) - \langle \omega(t) \rangle$. Эти результаты можно получить, подставляя в (9.128) $s(t') = b\delta(t' - t) + c\delta(t')$, затем разлагая (9.128) по степеням b и c и анализируя члены первого порядка по b и c . При $f(y) = ky^2$ процесс является гауссовым и (9.129) определяет весь ансамбль [ср. (3.13)]. Если для произвольной функции f принять, что

$$\begin{aligned} \hat{G}(t) &\equiv Ae^{-Rt} & (t > 0), \\ \hat{G}(t) &\equiv 0 & (t < 0), \end{aligned} \quad (9.130)$$

то

$$\langle \Delta\omega(t) \Delta\omega(0) \rangle = e^{-Rt} f''(0) \frac{A^2}{2R} \quad (9.131)$$

и процесс является марковским; для любой другой функции $\hat{G}(t)$ процесс будет немарковским. Особый интерес в случае марковского процесса представляет условное распределение

$$\begin{aligned} P(\omega, t | \omega_1) &= (2\pi)^{-1} \int \exp \left[iy(\omega - \omega_1 e^{-Rt}) - \right. \\ &\quad \left. - iy\omega_0(1 - e^{-Rt}) - \int_0^t f(Aye^{-Rt'}) dt' \right] dy, \end{aligned} \quad (9.132)$$

которое можно вывести из (9.128). Стационарный марковский гауссов процесс обычно известен физикам под названием процесса Орнштейна — Уленбека.

именно такого типа. В этом случае $\sigma(\lambda)$ есть плотность вероятности нормального распределения. Более глубоко с затронутым вопросом можно ознакомиться по работам Лукача [3.1] и Гельфанда и Виленкина [3.6].

МАЛОЕ ВРЕМЯ КОРРЕЛЯЦИИ. С помощью соотношения (9.128) точное выражение для нормально упорядоченной корреляционной функции целого ряда процессов сводится к квадратурам. Существенное упрощение можно провести, когда время корреляции процесса $\omega(t)$ очень мало. В случае марковского процесса это имеет место при большом R , а вообще в том случае, когда область, в которой локализована функция $\hat{G}(t)$, достаточно мала. Предположим, что

$$\tau \equiv \int_0^{\infty} \hat{G}(t') dt' \neq 0; \quad (9.133)$$

тогда можно подставить в (9.128) $\hat{G}(t) \approx \tau \delta(t)$. При этом получаем

$$\begin{aligned} \langle \exp \left[i \int s(t') \omega(t') dt' \right] \rangle &= \\ &= \exp \left\{ i \omega_0 \int s(t') dt' - \int f[\tau s(t')] dt' \right\}. \end{aligned} \quad (9.134)$$

В частном случае, когда $n = 1$, функция $s(t')$ определяется соотношениями (9.127). Полагая $t_1 = t > 0$ и $t_2 = 0$, имеем

$$\langle \exp \left[i \int_0^t \omega(t') dt' \right] \rangle = \exp [i \omega_0 t - t f(\tau)].$$

Результат для $t < 0$ можно получить, учитывая стационарность процесса,

$$\begin{aligned} \langle \exp \left[i \int_0^{-t} \omega(t') dt' \right] \rangle &= \langle \exp \left[i \int_t^0 \omega(t') dt' \right] \rangle = \\ &= \langle \exp \left[-i \int_0^t \omega(t') dt' \right] \rangle = \langle \exp \left[i \int_0^t \omega(t') dt' \right] \rangle^*. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что для произвольного t

$$\langle \exp \left[i \int_0^t \omega(t') dt' \right] \rangle = \exp [i \omega_0 t - |t| f(\tau)]. \quad (9.135)$$

При этих условиях мы неизбежно приходим к лоренцевской форме спектра для корреляционной функции $\langle a^+(t)a(0) \rangle$ с шириной линии $f(\tau)$.

В том случае, когда τ можно рассматривать как «малый» аргумент функции f , ширине $f(\tau)$ лоренцевской линии можно дать более ясное физическое толкование. Из (9.129б) вытекает, что

$$\begin{aligned} \int C(t) dt &= f''(0) \int \int \hat{G}(t') \hat{G}(t+t') dt dt' = \\ &= f''(0) \left[\int \hat{G}(t) dt \right]^2 = f''(0) \tau^2. \end{aligned} \quad (9.136)$$

Мы говорим, что аргумент τ мал, если в разложении $f(\tau)$ можно положить

$$f(\tau) \approx f(0) + \tau f'(0) + \frac{1}{2} \tau^2 f''(0) = \frac{1}{2} \int C(t) dt, \quad (9.137)$$

где мы сохранили только первый исчезающий член. Для гауссовой диффузии соотношение (9.137) является точным. В этом случае из (9.135) следует

$$\langle a^+(t)a(0) \rangle = \exp(i\omega_0 t - \xi |t|) |z_0|^2, \quad (9.138)$$

где ширина линии

$$\xi = \frac{1}{2} \int C(t) dt = \int_0^{\infty} \langle \Delta\omega(t) \Delta\omega(0) \rangle dt. \quad (9.139)$$

Таким образом, ξ есть интеграл по времени от автокорреляционной функции частотных флуктуаций.

Конкретные примеры, приведенные выше, должны иллюстрировать корреляции различного типа, содержащиеся в (9.128). Однако нужно подчеркнуть, что в этом анализе предполагается наличие только фазовых флуктуаций, т. е. принимается, что какие-либо корреляции в статистике фотоотсчетов отсутствуют.

В. Модель, оперирующая с суперпозицией сигнала и шума

Простая физическая модель, в которой имеются амплитудные флуктуации (и, следовательно, корреляция отсчетов!), состоит в следующем. Предположим, что в

любой фиксированный момент времени амплитуда нашей нормальной моды может быть записана в виде

$$z(t) = \exp(-i\omega_0 t + i\theta_0) z_0 + z_n(t). \quad (9.140)$$

Здесь z_0 и ω_0 рассматриваются как постоянные величины, фазы θ_0 распределены равномерно, а z_n — независимый шумовой источник с гауссовым распределением. Диагональный вес φ , соответствующий такой сумме, определяется как свертка распределений входящих в нее слагаемых. В частности, в соответствии с (8.203а) можно написать

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \int \varphi_1(z') \varphi_2(z - z') d\mu(z') = \\ &= \frac{1}{\pi \langle N \rangle} \int \int (2|z'|)^{-1} \delta(|z'| - |z_0|) \times \\ &\times \exp\left(-\frac{|z - e^{i\theta'} z'|^2}{\langle N \rangle}\right) |z'| d|z'| d\theta' = \\ &= (2\pi \langle N \rangle)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left(\frac{-|z - e^{i\theta'} z_0|^2}{\langle N \rangle}\right) d\theta'. \end{aligned}$$

Разложим экспоненту в подынтегральном выражении

$$\begin{aligned} |z - e^{i\theta'} z_0|^2 &= |z|^2 + |z_0|^2 - |z_0| (z^* e^{i\theta'} + z e^{-i\theta'}) = \\ &= |z|^2 + |z_0|^2 - 2|z_0| |z| \cos(\theta' - \theta). \end{aligned}$$

Вспоминая определение модифицированной функции Бесселя первого рода

$$I_0(x) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos \theta} d\theta,$$

нетрудно видеть, что¹⁾

$$\varphi(z) = \langle N \rangle^{-1} I_0\left(\frac{2|z||z_0|}{\langle N \rangle}\right) \exp\left[-\left(\frac{|z|^2 + |z_0|^2}{\langle N \rangle}\right)\right]. \quad (9.141)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОТСЧЕТОВ. Для времен T , малых по сравнению с временем когерентности, производящая

¹⁾ Этот результат был впервые получен Райсом [3.3].

функция $Q(\lambda, T)$ для распределения отсчетов дается выражением [ср. (8.101)]

$$\begin{aligned} Q(\lambda, T) &= \langle : \exp(-\lambda \alpha T a^\dagger a) : \rangle = \\ &= \int \varphi(z) \exp(-\lambda \alpha T |z|^2) d\mu(z) = \\ &= \langle N \rangle^{-1} \int_0^\infty I_0\left(\frac{2|z||z_0|}{\langle N \rangle}\right) \times \\ &\times \exp\left[-\lambda \alpha T |z|^2 - \frac{|z|^2 + |z_0|^2}{\langle N \rangle}\right] d|z|^2. \end{aligned} \quad (9.142)$$

С помощью известного интеграла

$$\int_0^\infty I_0(2\sqrt{bx}) e^{-ax} dx = \frac{1}{a} e^{b/a}$$

выражение (9.142) можно записать в виде

$$Q(\lambda, T) = \frac{1}{1 + \lambda \alpha T \langle N \rangle} \exp\left[-\frac{\lambda \alpha T |z_0|^2}{1 + \lambda \alpha T \langle N \rangle}\right]. \quad (9.143)$$

Очевидно, при $\langle N \rangle \rightarrow 0$ распределение отсчетов становится пуассоновским, а при $|z_0|^2 \rightarrow 0$ — геометрическим (Бозе — Эйнштейна).

Чтобы получить общее распределение отсчетов, положим сначала

$$r = \frac{\alpha T \langle N \rangle}{1 + \alpha T \langle N \rangle}, \quad s = \frac{\alpha T |z_0|^2}{1 + \alpha T \langle N \rangle}$$

и перепишем знаменатель в (9.143) в виде

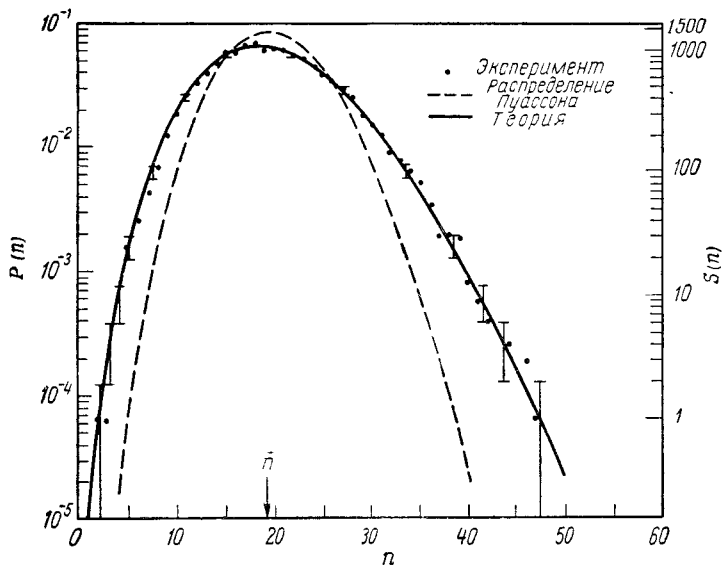
$$\begin{aligned} 1 + \lambda \alpha T \langle N \rangle &= 1 + \alpha T \langle N \rangle - (1 - \lambda) \alpha T \langle N \rangle = \\ &= (1 + \alpha T \langle N \rangle) [1 - (1 - \lambda) r]. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем

$$Q(\lambda, T) = \frac{1}{1 + \alpha T \langle N \rangle} \frac{1}{1 - (1 - \lambda) r} \exp\left[-\frac{\lambda s}{1 - (1 - \lambda) r}\right].$$

Теперь, воспользовавшись тождеством

$$\lambda s \equiv -rs(1 - \lambda)(r^{-1} - 1) + s[1 - (1 - \lambda)r],$$



Фиг. 5. Распределение вероятности фотоотсчетов для гелий-неонового лазера, работающего в режиме, близком к пороговому, при длительности выборки 10^{-5} сек. (По данным Фрида и Хауса [9.46].)

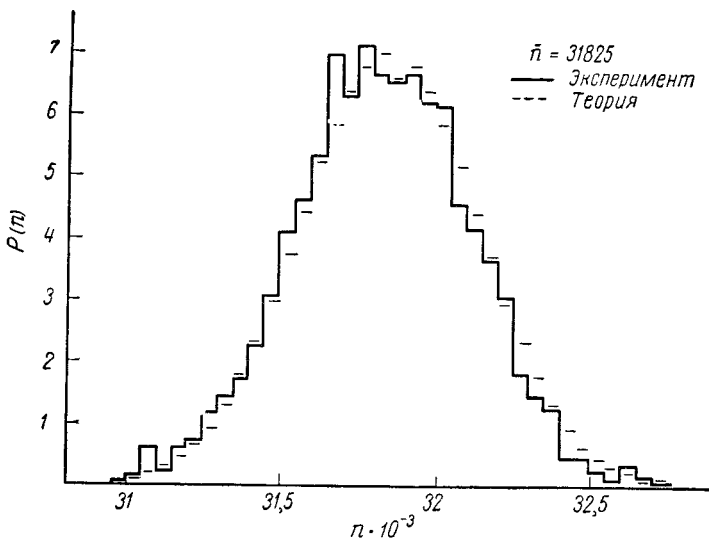
Экспериментальные результаты показаны точками и вертикальными прямыми, определяющими доверительный интервал; число выборок равно 15894, $\Delta\nu \approx 260$ гц. Теоретические результаты, полученные на основе модели сигнала, на который налагается шум [см. (9.144)], показаны сплошной линией. Для сравнения штриховой линией изображено пуассоновское распределение.

находим

$$Q(\lambda, T) = \frac{e^{-s}}{1 + \alpha T \langle N \rangle} \frac{1}{1 - (1 - \lambda)r} \exp \left[\frac{s(r^{-1} - 1)(1 - \lambda)r}{1 - (1 - \lambda)r} \right].$$

Производящая функция для полиномов Лагерра [определяемых соотношением (2.25)] записывается следующим образом:

$$\frac{1}{1-t} \exp \left(\frac{-xt}{1-t} \right) = \sum_{m=0}^{\infty} t^m L_m(x).$$



Фиг. 6. Распределение вероятности фотоотсчетов для гелий-неонового лазера, работающего в режиме, близком к пороговому, при длительности выборки 10^{-2} сек. (По данным Мейджила и Сони [9.10].)

Экспериментальные результаты представлены гистограммой, проведенной сплошной линией, а теоретические результаты, полученные на основе модели сигнала, на который налагаются шумы [см. (9.144)], показаны пунктирными линиями.

Искомое распределение отсчетов при учете (9.92) имеет вид

$$\begin{aligned}
 P(m, t) &= \frac{e^{-s}}{1 + \alpha T \langle N \rangle} r^m L_m(-s(r^{-1} - 1)) = \\
 &= \frac{(\alpha T \langle N \rangle)^m}{(1 + \alpha T \langle N \rangle)^{m+1}} \exp\left[-\frac{\alpha T |z_0|^2}{1 + \alpha T \langle N \rangle}\right] \times \\
 &\times L_m\left(-\frac{|z_0|^2}{\langle N \rangle (1 + \alpha T \langle N \rangle)}\right), \quad (9.144)
 \end{aligned}$$

что впервые было показано Глаубером [9.3]. Это распределение можно представить как функцию его среднего значения и дисперсии, воспользовавшись соотношениями

$$\bar{m} = \alpha T (\langle N \rangle + |z_0|^2), \quad (9.145a)$$

$$\sigma^2 = (\overline{\Delta m})^2 = \bar{m} + \alpha^2 T^2 \langle N \rangle [2|z_0|^2 + \langle N \rangle]. \quad (9.145b)$$

Фрид и Хаус [9.4], а также Мейджил и Сони [9.10] провели эксперименты по фотостатистике с использованием гелий-неонового лазера, работающего в режиме, близком к порогу генерации; полученные результаты сравнивались с приведенными выше выражениями (фиг. 5 и 6). Обе группы получили удовлетворительное согласие с распределением (9.144). Кроме того, в тех случаях, когда время наблюдения T удовлетворяло условию $\alpha T \langle N \rangle \geq 1$, но было достаточно малым по сравнению с временем когерентности [чтобы выполнялось соотношение (9.142)], были обнаружены измеримые отклонения от статистики Пуассона. В экспериментах Мейджила и Сони время изменялось в пределах $10^{-4} \text{ сек} \leq T \leq 10^{-1} \text{ сек}$. При $T \leq 10^{-4} \text{ сек}$ наблюдаемые распределения следуют закону Пуассона, в то время как при $T \geq 10^{-1} \text{ сек}$ результаты не согласуются с (9.144). Согласно оценке авторов, в их экспериментах величина $\langle N \rangle / |z_0|^2$ составляла около $5 \cdot 10^{-5}$.

§ 3. ОПИСАНИЕ ЛАЗЕРА С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

Ряд авторов в качестве модели лазера рассматривали совокупность взаимодействующих идеализированных систем. Подробное изучение таких моделей проводили Лэкс [9.11], Скали и Лэмб [9.14], Хакен [9.12], Заурман [9.13] и другие авторы. Модели, для которых можно получить решение, были рассмотрены Шваблом и Тиррингом [9.15]. Несколько упрощенных динамических моделей для различного рода систем обсуждаются в последней главе книги Луиселла [7.2].

Мы не сможем уделить здесь достаточно внимания всем этим работам, а остановимся лишь на одной фундаментальной модели. Эта модель не только представляет интерес сама по себе, но и позволяет обратить внимание читателя на общее свойство подобных задач, которое, как нам кажется, недостаточно освещено в имеющейся литературе. Это свойство заслуживает изучения не только в связи со статистической теорией лазеров, но и в связи с другими задачами квантовой статистики.

Прежде чем переходить к непосредственному обсуждению, сформулируем в общем виде суть наших замечаний. В тех случаях, когда рассматриваемая задача является существенно марковской даже при наличии взаимодействия с «резервуаром», можно написать для полной матрицы плотности уравнение первого порядка по времени. Если матрицу плотности в диагональном представлении выразить с помощью веса $\varphi = \varphi(t)$, то тогда можно искать уравнение первого порядка, описывающее изменение во времени функции φ . В той степени, в какой φ ведет себя как классическое распределение, такое уравнение первого порядка, согласно гл. 4, соответствует стохастическому уравнению (или, как его часто называют, обобщенному уравнению Фоккера — Планка). Мы видели в гл. 8, что диагональные веса φ часто представляют собой распределения, а не «добрые старые» плотности вероятности классического типа. Это свойство может привести к необычному виду стохастических уравнений, в которых отдельные коэффициенты диффузии могут оказаться *отрицательными*. Может также оказаться, что матрица диффузии в диффузионном приближении [которое получается, например, если в сумме в (4.46) ограничиться членами с $n \leq 2$] *не положительна*. Такое поведение характерно не только для лазера, но имеет место в очень простых моделях; можно полагать, что оно является довольно общим. По нашему мнению, такие стохастические уравнения представляют самостоятельный интерес, особенно потому, что они являются весьма удобным уравнением для s -числа.

А. Модель лазера

Модель, которую мы кратко рассмотрим ниже, изучали несколько авторов, в особенности Лэкс [9.11]. В этой модели предполагается наличие одной существенной моды поля излучения, описываемой оператором уничтожения b . Предполагается также наличие N ($N \gg 1$) трехуровневых атомов, описываемых операторами уничтожения a_{jm} , $j = 0, 1, 2$, $m = 1, \dots, N$. Рассматривается только взаимодействие этих атомов с полем, но не друг с другом. Как поле, так и атомы испытывают

воздействие со стороны индивидуальных «резервуаров», имитирующих действие других мод излучения, фононов в стенках резонатора, накачки и т. д.

В шредингеровском представлении матрица плотности для комбинированной системы, включающей поле и атомы, удовлетворяет уравнению движения

$$\begin{aligned} \dot{\rho} = & -\frac{i}{\hbar} [(\mathcal{H}_a + \mathcal{H}_b), \rho] + \mu [(Mb^\dagger - M^\dagger b), \rho] + \\ & + \sum_{m=1}^N \sum_{i,j=0}^2 \omega_{ij} \left\{ (a_{im}^\dagger a_{jm}) \rho (a_{jm}^\dagger a_{im}) - \right. \\ & - \frac{1}{2} (a_{jm}^\dagger a_{jm}) \rho - \frac{1}{2} \rho (a_{jm}^\dagger a_{jm}) \left. \right\} - \\ & - \frac{\gamma}{2} \left\{ [\bar{n}bb^\dagger + (\bar{n} + 1)b^\dagger b] \rho + \rho [\bar{n}bb^\dagger + (\bar{n} + 1)b^\dagger b] \right\} + \\ & + \gamma \left\{ (\bar{n} + 1)b\rho b^\dagger + \bar{n}b^\dagger\rho b \right\}. \end{aligned} \quad (9.146)$$

В этом уравнении

$$\mathcal{H}_b = \hbar\omega_b b^\dagger b, \quad \mathcal{H}_a = \sum_{m,j} \epsilon_j a_{jm}^\dagger a_{jm} \quad (9.147)$$

— гамильтонианы соответственно для свободного излучения и для свободных атомов (ϵ_j — энергия j -го атомного уровня). Член

$$i\hbar\mu (Mb^\dagger - M^\dagger b) \quad (9.148)$$

описывает основное взаимодействие между полем и поляризацией

$$M = \sum_{m=1}^N a_{1m}^\dagger a_{2m}, \quad (9.149)$$

интенсивность которого определяется величиной μ (грубо говоря, атомным дипольным моментом). Нужно иметь в виду, что члены вида Mb и $M^\dagger b^\dagger$, строго говоря, тоже являются членами взаимодействия, но для квазимонохроматического излучения они далеки от резонанса и ими в приближении «волн вращающейся поляризации» можно пренебречь [см. обсуждение в связи с соотношением (6.65)].

Модель лазера будет полной, если учесть эффекты, связанные с наличием резервуаров. Эти эффекты описываются оставшимися членами в (9.146). Первые из этих членов соответствуют переходам с уровня i на уровень j , вызываемым взаимодействием с резервуаром и характеризующимся вероятностью ω_{ij} . Отрицательные члены этого типа уменьшают заселенность уровня j за счет перехода на уровень i и, как можно показать, обуславливают затухание атомной поляризации. Наконец, γ — коэффициент затухания поля. В представлении чисел заполнения для мод поля можно получить следующий результат: отрицательные члены дают затухание ρ_{nm} , пропорциональное ρ_{nm} , в то время как положительные члены дают увеличение ρ_{nm} , пропорциональное $\rho_{n+1, m+1}$ и $\rho_{n-1, m-1}$. Параметр \bar{n} есть среднее число фотонов при равновесии с резервуаром. Дальнейшее обсуждение и обоснование настоящей модели можно найти в статьях Лэкса, особенно в статье [9.11].

Интересный подход к этим уравнениям был развит Гордоном [9.16]. В его методе используется диагональное представление для полевой моды и аналогичное представление для атомной системы. Поскольку все атомы можно рассматривать одинаковым образом, общее воздействие на атомную систему можно описать с помощью четырех макроскопических параметров. Примем

$$\sigma_m = N^{-1} [(N - \mathcal{N}_1 - \mathcal{N}_2) a_{0m}^\dagger a_{0m} + \mathcal{N}_1 a_{1m}^\dagger a_{1m} + \\ + \mathcal{N}_2 a_{2m}^\dagger a_{2m} + \mathcal{M} a_{2m}^\dagger a_{1m} + \mathcal{M}^* a_{1m}^\dagger a_{2m}] \quad (9.150)$$

в качестве элементарной матрицы плотности для m -го атома и

$$\sigma_a = \prod_{m=1}^N \sigma_m \quad (9.151)$$

в качестве канонической матрицы плотности для N атомов. Каждая элементарная матрица плотности описывается одними и теми же параметрами \mathcal{N}_1 , \mathcal{N}_2 , \mathcal{M} и \mathcal{M}^* , которые для краткости будем обозначать \mathcal{E}_k , $k = 1, 2, 3, 4$. Используя каноническую матрицу плотности

(9.151) и диагональное представление для полевой моды, Гордон приходит к рассмотрению величины

$$\rho(t) \equiv \int \varphi(z, \mathcal{X}_k, t) \sigma(z, \mathcal{X}_k) d\mu(z, \mathcal{X}_k), \quad (9.152)$$

где

$$\sigma(z, \mathcal{X}_k) \equiv |z\rangle \langle z| \sigma_a \quad (9.153a)$$

и

$$\begin{aligned} d\mu(z, \mathcal{X}_k) &\equiv d\mu(z) d^4\mathcal{X}_k \equiv \\ &\equiv \pi^{-1} d(\operatorname{Re} z) d(\operatorname{Im} z) d\mathcal{V}_1 d\mathcal{V}_2 d(\operatorname{Re} \mathcal{M}) d(\operatorname{Im} \mathcal{M}). \end{aligned} \quad (9.153b)$$

Выражение (9.152) представляет собой разумное обобщение понятия диагональных представлений, позволяющее включить в рассмотрение атомные переменные данной модели.

Приведенная матрица плотности только для одной моды поля излучения равна частичному следу по атомным матрицам плотности. В свою очередь каждая из них определяется так, что

$$\operatorname{Sp}_m \sigma_m \equiv \sum_{j=0}^2 \langle jm | \sigma_m | jm \rangle = 1. \quad (9.154)$$

Здесь $|jm\rangle = a_{jm}^\dagger |0\rangle$ — одночастичное состояние, означающее, что атом m находится на уровне j . Эти состояния удовлетворяют соотношению

$$a_{j'm}^\dagger a_{jm} |j'm\rangle = \delta_{j'j} |j'm\rangle. \quad (9.155)$$

Очевидно, приведенная матрица плотности для одной полевой моды b принимает вид

$$\begin{aligned} \rho_b(t) &= \int \varphi(z, \mathcal{X}_k, t) |z\rangle \langle z| d\mu(z, \mathcal{X}_k) \equiv \\ &\equiv \int \varphi(z, t) |z\rangle \langle z| d\mu(z), \end{aligned} \quad (9.156)$$

где

$$\varphi(z, t) \equiv \int \varphi(z, \mathcal{X}_k, t) d^4\mathcal{X}_k. \quad (9.157)$$

Соотношение (9.157) определяет диагональный вес, что представляет интерес в тех случаях, когда рассматривается только мода поля излучения.

Основное уравнение (9.146) для матрицы плотности можно преобразовать в уравнение движения для веса $\varphi(z, \mathcal{X}_k, t)$. Такое уравнение, очевидно, линейно по весу φ и состоит из суммы членов, соответствующих слагаемым в уравнении (9.146). Чтобы получить это уравнение, необходимо поступать следующим образом: 1) сначала выполнить каждое действие в правой части (9.146) так, как будто матрица плотности есть элементарный оператор $\sigma(z, \mathcal{X}_k)$; 2) затем произвести усреднение по φ ; 3) наконец, опять представить результирующий оператор в форме (9.152). На практике действия в (9.146) могут быть описаны дифференциальными операторами, содержащими частные производные по переменным z и \mathcal{X}_k и действующими на элементарную матрицу плотности σ . Путем последующего интегрирования по частям можно перейти к производным, действующим на вес φ . Если следовать этому пути, то для φ получается дифференциальное уравнение, являющееся обобщением уравнения (9.146). Мы не будем выполнять соответствующих расчетов, а только приведем результат, полученный Гордоном для представляющего физический интерес случая, когда $N \gg |\mathcal{X}_k|$ для любой переменной \mathcal{X}_k . Таким образом, уровень $j = 0$ макроскопически заполнен и действует как атомный резервуар.

Пусть $\hbar\omega_a = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ представляет собой энергетический интервал между уровнями 1 и 2; кроме того, введем обозначения $R_i = N\omega_{i0}$ и

$$\Gamma_i = \sum_{j (\neq i)} \omega_{ji} \quad (i = 1, 2), \quad (9.158a)$$

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{2} \sum_l (\omega_{l1} + \omega_{l2}) \quad (9.158b)$$

для различных скоростей перехода, относящихся к рассматриваемому вопросу. Тогда основное уравнение для

$\varphi(z, \mathcal{E}_k, t)$ принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \mathcal{M} - \left(\frac{\gamma}{2} + i\omega_b \right) z \right] - \frac{\partial}{\partial z^*} \left[\mu \mathcal{M}^* - \left(\frac{\gamma}{2} - i\omega_b \right) z^* \right] - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}} \left[\mu z (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) - (\Gamma_{12} + i\omega_a) \mathcal{M} \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{M}^*} \left[\mu z^* (\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) - (\Gamma_{12} + i\omega_a) \mathcal{M}^* \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} \left[R_1 + \omega_{12} \mathcal{N}_2 - \Gamma_1 \mathcal{N}_1 + \mu (z^* \mathcal{M} + z \mathcal{M}^*) \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} \left[R_2 + \omega_{21} \mathcal{N}_1 - \Gamma_2 \mathcal{N}_2 - \mu (z^* \mathcal{M} + z \mathcal{M}^*) \right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} \bar{n} \gamma + \left(\frac{\partial^2}{\partial z \partial \mathcal{M}^*} + \frac{\partial^2}{\partial z^* \partial \mathcal{M}} \right) \mu \mathcal{N}_2 + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial z} \mu \mathcal{M} + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial z^*} \mu \mathcal{M}^* \right\} \varphi. \end{aligned} \quad (9.159)$$

Хотя это уравнение имеет форму уравнения Фоккера — Планка, довольно очевидно, что не все коэффициенты диффузии положительны; действительно, некоторые диагональные члены вообще отсутствуют.

В принципе решение уравнения (9.159) дало бы весьма общую формулу для рассматриваемой лазерной модели. До сих пор, однако, решения этого уравнения не были получены. Несколько более простые уравнения получаются в тех частных случаях, когда та или иная вероятность перехода значительно больше остальных. При этом можно считать, что рассматриваемая переменная выражается *мгновенно* (а не динамически) через оставшиеся переменные и затем исключается из уравнения. Таким образом, мы опять сталкиваемся с примером адиабатического приближения, встречающегося во многих разделах физики.

Такую процедуру можно, в частности, осуществить в том случае, когда выполняется соотношение $\Gamma_{12} \gg \gamma/2$. Это позволяет исключить как динамическую переменную поляризацию \mathcal{M} (и, таким образом, \mathcal{M}^*), выразив ее через другие переменные. Приведем без доказатель-

ства уравнение, получающееся из (9.159) при использовании этого предположения. Определим величину

$$\alpha \equiv \frac{\omega_a - \omega_b}{\Gamma_{12} + \frac{\gamma}{2}} \quad (9.160)$$

и вероятность перехода

$$\pi \equiv \frac{2\mu^2}{\Gamma_{12}(1 + \alpha^2)}. \quad (9.161)$$

Тогда преобразованное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial z} [\pi(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) - \gamma](1 - i\alpha) \frac{z}{2} - \right. \\ & -\frac{\partial}{\partial z^*} [\pi(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) - \gamma](1 + i\alpha) \frac{z^*}{2} - \\ & -\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} [R_1 + (\omega_{12} + \pi + \pi z^* z) \mathcal{N}_2 - (\Gamma_1 + \pi z^* z) \mathcal{N}_1] - \\ & -\frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} [R_2 - (\Gamma_2 + \pi + \pi z^* z) \mathcal{N}_2 + (\omega_{21} + \pi z^* z) \mathcal{N}_1] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial z \partial z^*} [\gamma \bar{n} + \pi \mathcal{N}_2] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial z} \left[\pi z \mathcal{N}_2 - \frac{1}{2} \pi (1 - i\alpha) z \mathcal{N}_1 \right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial z^*} \left[\pi z^* \mathcal{N}_2 - \frac{1}{2} \pi (1 + i\alpha) z^* \mathcal{N}_1 \right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial z} \left[-\frac{1}{2} \pi (1 + i\alpha) z \mathcal{N}_2 \right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial z^*} \left[-\frac{1}{2} \pi (1 - i\alpha) z^* \mathcal{N}_2 \right] - \\ & \left. - \frac{\partial^3}{\partial \mathcal{N}_1 \partial z \partial z^*} [\pi \mathcal{N}_2] \right\} \Phi. \quad (9.162) \end{aligned}$$

Как мы видим, это уравнение содержит частные производные до третьего порядка включительно. Увеличение порядка уравнения — это цена, которую мы должны уплатить за исключение переменной \mathcal{M} .

Особенно удобно ввести величину

$$z \equiv I^{1/2} e^{-i\theta} \quad (9.163)$$

в качестве возможного представления для амплитуды моды z . Здесь $I = |z|^2$ — интенсивность, а θ — фаза волны. Уравнение (9.162) непосредственно преобразуется в уравнение движения для $\varphi(I, \theta, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(I, \theta, \mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2, t)}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial I} [\pi(I+1)\mathcal{N}_2 - \pi I\mathcal{N}_1 + \gamma(\bar{n} - I)] - \right. \\ & - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\alpha}{2} \{\pi(\mathcal{N}_2 - \mathcal{N}_1) - \gamma\} \right] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_1} [R_1 + \{\omega_{12} + \pi(I+1)\}\mathcal{N}_2 - (\Gamma_1 + \pi I)\mathcal{N}_1] - \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathcal{N}_2} [R_2 - \{\Gamma_2 + \pi(I+1)\}\mathcal{N}_2 + (\omega_{21} + \pi I)\mathcal{N}_1] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial I^2} [I(\gamma\bar{n} + \pi\mathcal{N}_2)] + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\frac{1}{4I} (\gamma\bar{n} + \pi\mathcal{N}_2) \right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial I} [\pi(2I+1)\mathcal{N}_2 - \pi I\mathcal{N}_1] + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial I} [-\pi I\mathcal{N}_2] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \theta} \left[-\frac{\pi}{2} \alpha \mathcal{N}_1 \right] + \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{N}_2 \partial \theta} \left[\frac{\pi}{2} \alpha \mathcal{N}_2 \right] - \\ & - \frac{\partial^3}{\partial \mathcal{N}_1 \partial I^2} [\pi I\mathcal{N}_2] - \frac{\partial^3}{\partial \mathcal{N}_1 \partial \theta^2} \left[\frac{\pi \alpha \mathcal{N}_2}{4I} \right] \left. \right\} \varphi. \quad (9.164) \end{aligned}$$

Можно провести дальнейшее сокращение атомных переменных и получить уравнение только для полевой моды. Если принять, что Γ_1 и Γ_2 велики по сравнению с вероятностями перехода ω_{12} , ω_{21} и π , то можно исключить заселенности атомных уровней \mathcal{N}_1 и \mathcal{N}_2 . К сожалению, полное исключение этих переменных приводит к обобщенному уравнению Фоккера — Планка, содержащему производные произвольно большого порядка. Мы выпишем результат только для решения, проведенного в «диффузионном приближении», когда удерживаются производные порядка не выше второго. Для упрощения записи этого уравнения положим

$$\mathcal{D} \equiv \Gamma_1 \Gamma_2 + \pi I (\Gamma_1 + \Gamma_2), \quad (9.165a)$$

$$A_2 \equiv \mathcal{D}^{-1} [\Gamma_1 R_2 + \pi I (R_1 + R_2)], \quad (9.165b)$$

$$A_1 \equiv \mathcal{D}^{-1} [\Gamma_2 R_1 + \pi I (R_1 + R_2)]. \quad (9.165b)$$

Физически A_2 и A_1 есть средние адиабатические значения заселенностей соответственно уровней \mathcal{N}_2 и \mathcal{N}_1 .

При использовании этих переменных приближенное уравнение для диагонального веса $\varphi(z, t) \equiv \varphi(I, \theta, t)$ приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial I} [\pi(I+1)A_2 - \pi I A_1 + \gamma(\bar{n}-1)] - \right. \\ & -\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{\alpha}{2} \{\pi(A_2 - A_1) - \gamma\} \right] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial I^2} [\gamma \bar{n} I + \mathcal{D}^{-1} \pi I \Gamma_2 \{\Gamma_1 A_2 - \pi I (A_2 - A_1)\}] + \\ & + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left[\frac{1}{4I} (\gamma \bar{n} + \pi A_2) + \mathcal{D}^{-1} \left(\frac{\pi \alpha}{2} \right)^2 (\Gamma_1 A_2 + \Gamma_2 A_1) \right] + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial I} [-\mathcal{D}^{-1} \pi^2 \alpha I \Gamma_2 (A_2 - A_1)] \right\} \varphi. \end{aligned} \quad (9.166)$$

Таким образом, мы свели задачу к решению уравнения только для одной полевой моды. Приближенная матрица плотности связана с решением уравнения (9.166) соотношением

$$\rho_b(t) = \int \varphi(z, t) |z\rangle \langle z| d\mu(z), \quad (9.167)$$

где $z \equiv I^{1/2} e^{-i\theta}$. Теперь, чтобы получить $\rho_b(t)$, уже не нужно, как в (9.157), интегрировать по какой-либо переменной.

Интересно отметить эффект насыщения основных диффузионных членов при большой интенсивности I . Коэффициент при фазовом члене минимален «при резонансе», когда $\alpha = 0$, или [см. (9.160)] когда $\omega_b = \omega_a$. При больших интенсивностях из (9.165) следует, что коэффициент при $\partial^2/\partial \theta^2$ принимает вид

$$\frac{1}{4I} (\gamma \bar{n} + \pi A_2) \approx \frac{1}{4I} \left[\gamma \bar{n} + \frac{\pi(R_1 + R_2)}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \right]. \quad (9.168)$$

Выражение для коэффициента при $\partial^2/\partial I^2$ в случае большой интенсивности можно несколько упростить:

$$\gamma \bar{n} I + \mathcal{D}^{-1} \pi I \Gamma_2 \{\Gamma_1 A_2 - \pi I (A_2 - A_1)\} \approx \gamma \bar{n} I + \frac{\Gamma_2 R_1}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \quad (9.169)$$

Это значение меньше, чем то, которое можно было бы ожидать, так как в него не входит величина R_2 — вероятность перехода с уровня 0 на уровень 2 под действием накачки.

Некоторые из этих результатов можно получить несколько иным образом. Рассчитаем $\langle I \rangle$ и $\langle I^2 \rangle$ для равновесного решения уравнения (9.166), каким бы это решение ни было. Это можно легко сделать, полагая $\partial\varphi/\partial t=0$, умножая (9.166) на I или I^2 и интегрируя по частям, в предположении, что поверхностные члены не дают вклада. В $\langle I \rangle$ вносит вклад только первый член, и если мы используем значения A_1 и A_2 , отвечающие большим интенсивностям, то получим

$$\langle I \rangle = \bar{n} + \frac{R_2\Gamma_1 - R_1\Gamma_2}{\gamma(\Gamma_1 + \Gamma_2)}. \quad (9.170a)$$

В том же приближении для $\langle I^2 \rangle$ имеем

$$\langle I^2 \rangle = \langle I \rangle^2 + \bar{n} \langle I \rangle + \frac{R_1\Gamma_2}{\gamma(\Gamma_1 + \Gamma_2)}. \quad (9.170б)$$

Таким образом мы можем получить большую среднюю мощность, если R_2 имеет большую величину, и, кроме того, малые флуктуации интенсивности, если \bar{n} и R_1 сравнительно малы.

Наконец, выведем приближенное выражение для ширины спектральной линии, обусловленной диффузией фазы. В этом случае мы не будем предполагать распределение равновесным, а вместо этого попытаемся найти поведение во времени величины $\langle e^{-i\theta} \rangle$. Очевидно, вклад в правую часть (9.166) дадут только те члены, которые не содержат $\partial/\partial I$. Если выбрать $\alpha = 0$ ($\omega_b = \omega_a$) и воспользоваться соотношением (9.168) для случая больших интенсивностей, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle e^{-i\theta} \rangle = - \langle e^{-i\theta} \frac{1}{4I} \left[\gamma\bar{n} + \frac{\pi(R_1 + R_2)}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \right] \rangle.$$

В предположении, что распределение является приближенно равновесным (в той мере, в какой это касается интенсивностей), из (9.170) вытекает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle e^{-i\theta} \rangle &= - \frac{1}{4} \left[\gamma\bar{n} + \frac{\pi(R_1 + R_2)}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \right] \left\langle \frac{1}{I} e^{-i\theta} \right\rangle \approx \\ &\approx - \frac{1}{4} \left[\gamma\bar{n} + \frac{\pi(R_1 + R_2)}{\Gamma_1 + \Gamma_2} \right] \frac{1}{\langle I \rangle} \langle e^{-i\theta} \rangle = \\ &= - \frac{\gamma}{4} \frac{[\gamma\bar{n}(\Gamma_1 + \Gamma_2) + \pi(R_1 + R_2)]}{[\gamma\bar{n}(\Gamma_1 + \Gamma_2) + (R_2\Gamma_1 - R_1\Gamma_2)]} \langle e^{-i\theta} \rangle \equiv \\ &\equiv - \Lambda \langle e^{-i\theta} \rangle. \end{aligned} \quad (9.171)$$

Здесь мы использовали предположение о малости флуктуаций интенсивностей. Решение этого уравнения

$$\langle e^{-i\theta} \rangle_t = e^{-\Lambda t} \langle e^{-i\theta} \rangle_0 \quad (9.172)$$

означает, что фаза диффундирует с постоянной скоростью Λ , а спектральная линия имеет лоренцевскую форму; ширина этой линии сопоставима с той, которая была получена на основе обсуждавшейся ранее простой модели колебания с диффузией фазы.

Имеется, конечно, ряд других возможных постановок вопроса и приближенных подходов, которые могут быть рассмотрены в том же плане. В некоторых случаях целесообразно ввести новые переменные. Дальнейшее обсуждение этих вопросов читатель может найти в литературе.

Несмотря на то что изучение укороченных уравнений, полученных в диффузионном приближении, оказывается весьма ценным, по-видимому, нет причин считать бесполезным рассмотрение точного стохастического уравнения второго порядка (9.159). Как было отмечено раньше, неположительность диффузионной матрицы может быть частично отнесена за счет использования диагонального представления для ρ . Наше обсуждение неположительных матриц должно было показать, что они не так страшны. В настоящее время представляется, что изучение таких уравнений и некоторых их свойств было бы очень полезным.

Интерферометрия интенсивности в квантовой оптике

§ 1. ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ. КОРРЕЛЯЦИЯ НИЗШЕГО ПОРЯДКА

А. Корреляция отсчетов

Здесь мы снова обратимся к вопросу о корреляции интенсивности, который уже обсуждался в гл. 3. Используем соотношения (3.46) и (3.52) в качестве исходных при определении корреляции отсчетов в двух счетчиках. Для локализованных безынерционных детекторов эти соотношения имеют вид

$$\bar{n}_j = \alpha_j \int_0^T \langle \mathbf{V}_j^*(t') \cdot \mathbf{V}_j(t') \rangle dt', \quad (10.1a)$$

$$\overline{n_j n_k} = \alpha_j \alpha_k \int_0^T \int_0^T \langle \mathbf{V}_j^*(t') \cdot \mathbf{V}_j(t') \mathbf{V}_k^*(t'') \cdot \mathbf{V}_k(t'') \rangle dt' dt''. \quad (10.1b)$$

Здесь индексы $j, k = 1, 2$ представляют собой номера двух детекторов, а $\mathbf{V}_j(t') \equiv \mathbf{V}(\mathbf{r}_j, t')$, где вектор \mathbf{r}_j определяет положение детектора. Мы не исключаем случай, когда $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$. Имея в виду формальную эквивалентность, следующую из оптической теоремы эквивалентности, эти соотношения можно рассматривать как чисто квантовые, если с помощью подходящего диагонального веса $\varphi(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}) \equiv \varphi\{\mathbf{V}\}$ провести необходимое усреднение.

Для анализа корреляций отсчетов типа обсуждавшихся Хэнбери Брауном и Твиссом [3.9] введем

$$\overline{n_1 n_2} = \bar{n}_1 \bar{n}_2 + \alpha_1 \alpha_2 \int_0^T \int_0^T \langle \Delta I_1(t') \Delta I_2(t'') \rangle dt' dt'', \quad (10.2)$$

где

$$\Delta I_j(t') \equiv I_j(t') - \langle I_j(t') \rangle.$$

По аналогии с определением, введенным для тепловых полей, положим

$$\eta_{12}(T) \equiv T \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\bar{n}_1 \bar{n}_2} \int_0^T \int_0^T \langle \Delta I_1(t') \Delta I_2(t'') \rangle dt' dt'', \quad (10.3a)$$

что для стационарных полей сводится к

$$\eta_{12}(T) = \frac{2}{T \langle I_1(0) \rangle \langle I_2(0) \rangle} \int_0^T (T - \tau) \langle \Delta I_1(\tau) \Delta I_2(0) \rangle d\tau. \quad (10.3b)$$

В любом случае имеет место соотношение

$$\overline{\bar{n}_1 \bar{n}_2} - \bar{n}_1 \bar{n}_2 = \bar{n}_1 \bar{n}_2 \frac{\eta_{12}(T)}{T}, \quad (10.4)$$

аналогичное соотношению (3.55). В случае стационарных полей и для больших времен T можно принять

$$\eta_{12}(T) \approx \eta_{12}(\infty) \equiv \frac{2}{\langle I_1(0) \rangle \langle I_2(0) \rangle} \int_0^\infty \langle \Delta I_1(\tau) \Delta I_2(0) \rangle d\tau. \quad (10.5)$$

Для тепловых полей, рассматривавшихся в гл. 3, величина $\eta_{12}(T) \equiv \xi_{12}(T)$ была положительной и изменялась в пределах $0 \leq \xi_{12}(T) \leq T$. Это имеет место и при квантовом рассмотрении тепловых или произвольных хаотических полей, если диагональный вес по-прежнему гауссов. Однако теперь, когда мы опираемся на изложенный ранее материал, нам уже не обязательно ограничиваться обсуждением только гауссовых полей. Если принимать во внимание и другие распределения, то можно предвидеть, что величина $\eta_{12}(T)$ может быть отрицательной; в этом случае наблюдались бы отрицательные корреляции отсчетов. Чтобы получить такой результат, не нужно, чтобы диагональные веса были отрицательными или имели какое-то странное поведение. Например, если положить $W \equiv I_1(t)$ и $X \equiv I_2(0)$, то

$$\sigma(W, X) = \frac{1}{2} [\delta(W) \delta(X - 2) + \delta(X) \delta(W - 2)] \quad (10.6)$$

является распределением, для которого

$$\begin{aligned}\langle \Delta I_1(t) \Delta I_2(0) \rangle &= \langle I_1(t) I_2(0) \rangle - \langle I_1(t) \rangle \langle I_2(0) \rangle = \\ &= \langle WX \rangle - \langle W \rangle \langle X \rangle = -1,\end{aligned}$$

где величины $\langle WX \rangle$, $\langle W \rangle$ и $\langle X \rangle$ рассчитываются с помощью $\sigma(W, X)$.

Эффекты, специфические для квантовой теории, могут возникнуть (но не обязательно!), если измерять поле внутри объема когерентности, т. е. на настолько малом пространственном и временном интервалах, что

$$\sigma(W, X) \approx \sigma(X) \delta(W - X).$$

В этом случае из (8.73) вытекает

$$\langle I_1(t) I_2(0) \rangle = \langle X^2 \rangle \geq \langle X \rangle^2 = \langle I_1(t) \rangle \langle I_2(0) \rangle.$$

Отклонение от такого поведения возможно в случае подходящего отрицательного диагонального веса в диагональном представлении. Наиболее важным примером такого отклонения может служить случай, когда имеется только один фотон. Тогда среднее $n_1 n_2$, определяющее совпадение двух фотонов, с необходимостью равно нулю.

Для хаотических полей общее поведение корреляции интенсивности можно вывести из (9.48) или (9.53). Будем считать поле пространственно однородным, стационарным и линейно поляризованным; это равносильно предположению о том, что

$$\frac{L^3}{(2\pi)^3} \langle a_{\lambda}^{\dagger}(\mathbf{k}) a_{\lambda'}(\mathbf{k}') \rangle \approx \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{2\omega}{\hbar} \tilde{\Gamma}(\mathbf{k}, \mathbf{v}). \quad (10.7)$$

Последнее соотношение представляет некоторое обобщение соотношения (9.54). Принимая во внимание (9.48) или (9.56) (и опуская индексы, указывающие поляризацию), можно написать

$$C_N\{S\} = \exp \left\{ - \int \int S^*(\mathbf{r}', t') \Gamma(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; t' - t) S(\mathbf{r}, t) d^4x d^4x' \right\}. \quad (10.8)$$

Из (3.49) вытекает, что

$$\langle \Delta I(\mathbf{r}', t') \Delta I(\mathbf{r}, t) \rangle = |\Gamma(\mathbf{r}' - \mathbf{r}; t' - t)|^2. \quad (10.9)$$

Итак, выражение для среднего числа отсчетов в квантовом случае качественно не отличается от (3.56); имеется только количественное отличие, так как в выражение для Γ входит \hbar . Это особенно очевидно в случае истинного квантового теплового распределения при температуре T , для которого

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{k}, \nu) = (2\pi)^{-1} \frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}. \quad (10.10)$$

В классическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$) это выражение сходится к $\tilde{\Gamma}(\mathbf{k}, \nu) = kT/2\pi$. Если мы безоговорочно примем это распределение, то не получим пространственные или временные корреляции, кроме тех, которые обусловлены частотными характеристиками самого детектора.

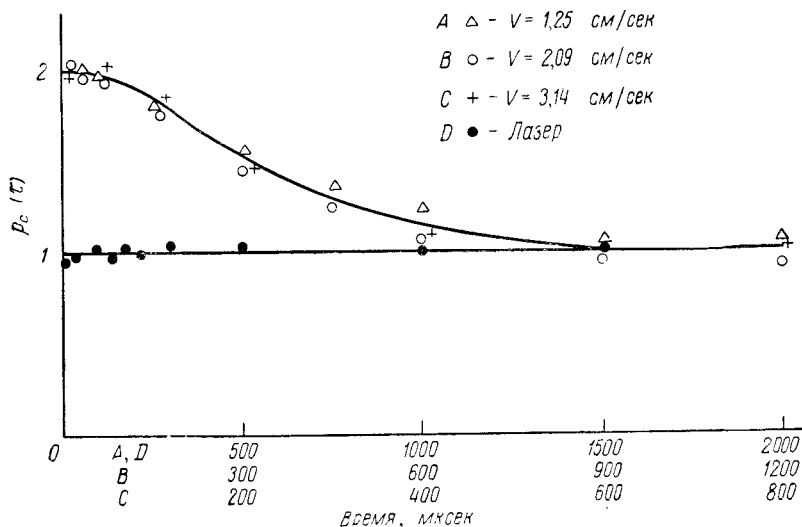
С другой стороны, для идеального лазерного поля, в котором отсутствуют флуктуации интенсивности, очевидно, $I(t) = \langle I(t) \rangle$, поэтому $\eta_{12}(T) \equiv 0$. Следовательно, корреляции отсчетов не наблюдаются: $\bar{n}_1 \bar{n}_2 = \bar{n}_1 \bar{n}_2$. Ясно, что в общем случае величину $\eta_{12}(\infty)$ нельзя назвать «временем когерентности».

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРИНЫ СПЕКТРА С ПОМОЩЬЮ КОРРЕЛЯЦИИ ОТСЧЕТОВ. Корреляции интенсивности второго порядка также дают некоторую информацию о поле. Зная зависимость от времени среднего числа совпадений (10.4), можно определить функцию $\eta_{12}(T)$. В случае стационарного поля из (10.3б) следует

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \{T \eta_{12}(T)\} = \frac{\langle \Delta I_1(T) \Delta I_2(0) \rangle}{\langle I_1(0) \rangle \langle I_2(0) \rangle} \equiv |\chi_{12}(T)|^2. \quad (10.11)$$

Экспериментально, однако, удобнее определять корреляцию интенсивности непосредственно путем измерения запаздывающих совпадений. Отнесенная к квадрату временного интервала совместная вероятность того, что один фотон наблюдается в момент $t = 0$, а другой в момент $t = \tau$, определяется выражением

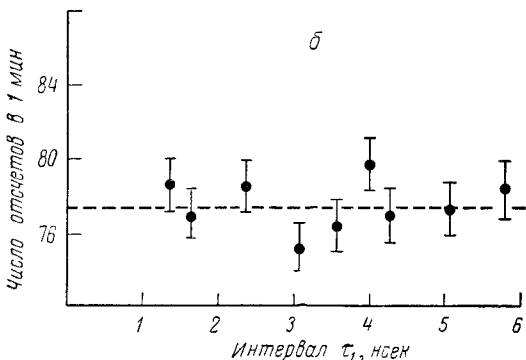
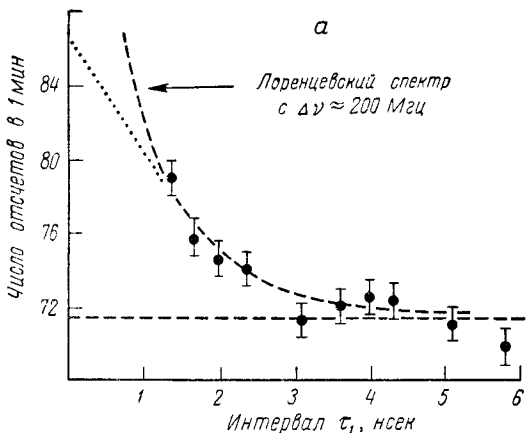
$$\begin{aligned} p_{12}(\tau) &= \alpha^2 \langle I_1(\tau) I_2(0) \rangle = \\ &= \alpha^2 [\langle I_1(0) \rangle \langle I_2(0) \rangle + \langle \Delta I_1(\tau) \Delta I_2(0) \rangle] = \\ &= \alpha^2 \langle I_1(0) \rangle \langle I_2(0) \rangle [1 + |\chi_{12}(\tau)|^2] \equiv \\ &\equiv \text{const} [1 + |\chi_{12}(\tau)|^2]. \end{aligned} \quad (10.12)$$



Фиг. 7. Зависимость относительной корреляции интенсивности от времени задержки для теплового и когерентного источников. (По данным Ареки, Гатти и Сона [10.1].)

Показаны экспериментальные результаты для лазера и для искусственного хаотического источника, для получения которого лазерный луч пропускался через матовое стекло, вращавшееся со скоростью 1,25, 2,09 и 3,14 см/сек соответственно. Корреляционная функция спадает вдвое за время, определяемое спектральной шириной хаотического излучения. Равновесное значение, равное единице, достигается за меньшее время для более высоких скоростей вращения матового стекла, что указывает на соответственно более широкую полосу частот. Для излучения лазера практически никаких корреляций интенсивности не наблюдалось, что согласуется с фактом отсутствия флуктуаций интенсивности в излучении лазера.

Здесь $|\chi_{12}(\tau)|$ является аналогом величины $|\gamma_{12}(\tau)|$ в случае теплового излучения. Эксперименты по определению корреляций интенсивности второго порядка проводились несколькими авторами. Для успеха таких экспериментов необходимо, чтобы время корреляции было больше времени разрешения регистрирующей схемы. Для света обычных тепловых источников величина $|\chi_{12}(\tau)| = |\gamma_{12}(\tau)|$ спадает до нуля за время (обратное ширине линии), которое, как правило, чрезвычайно мало. Поэтому необходимо использовать специальные источники.



Фиг. 8. Зависимость относительных корреляций интенсивности от времени задержки для двух тепловых источников. (По данным Моргана и Манделя [10.3].)

Экспериментальные результаты показаны точками и вертикальными линиями, указывающими доверительный интервал. а — результаты для излучения высокомонохроматичной ртутной дуговой лампы. Этим результатам соответствует функция взаимной когерентности с шириной спектра примерно 200 МГц; б — результаты для обычной лампы накаливания; здесь из-за очень широкой полосы частот время корреляции весьма мало и не могло быть измерено.

Ареки, Гатти и Сопа [10.1] измерили $\rho_{12}(\tau)$ для когерентных и хаотических источников (фиг. 7). В случае когерентного излучения гелий-неонового лазера, в пределах экспериментальных ошибок, сопоставимых с флуктуациями при нулевой интенсивности, имеет место равенство $\rho_{12}(\tau) = \rho_{12}(0)$. В экспериментах с хаотическим источником величина $|\chi_{12}(\tau)| = |\gamma_{12}(\tau)|$ плавно спадает от единицы до нуля за время порядка 10^{-3} сек. Чтобы получить хаотический источник с такой узкой полосой, авторы пропускали когерентное излучение гелий-неонового лазера через вращающееся матовое стекло. Как было отмечено в гл. 2, Ареки [2.4] показал, что для такого искусственного источника распределение фотонов в результирующем поле следует геометрическому закону, характерному для хаотических источников.

Другой эксперимент такого типа был выполнен Морганом и Манделем [10.3]. Они смогли определить, что для излучения ртутной лампы низкого давления с шириной линии 200 МГц, которая оценивалась другими методами, $|\gamma_{12}(\tau)| \approx \exp(-|\tau|/T_c)$, где $T_c \approx 1,7 \cdot 10^{-9}$ сек; это согласуется с шириной лоренцевской линии, равной 200 МГц (фиг. 8). Описанный эксперимент не так прост, как может показаться на первый взгляд, поэтому интересующемуся указанным вопросом читателю мы советуем самому изучить эту работу.

Б. Пространственная корреляция интенсивности

Вернемся снова к соотношению (10.1) и рассмотрим его при временах T , малых по сравнению с соответствующим временем когерентности. Остановимся сейчас не на временной, а на пространственной зависимости, для чего явно введем зависимость от \mathbf{r} . Следовательно, если $m(\mathbf{r}')$ — случайная переменная, равная числу фотоэлектронов, зарегистрированных за короткий интервал T в момент времени t , то

$$\overline{m(\mathbf{r}')^2} = \alpha T \langle \mathbf{V}^*(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}') \rangle, \quad (10.13a)$$

$$\overline{m(\mathbf{r}') m(\mathbf{r}'')} = \alpha^2 T^2 \langle \mathbf{V}^*(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}') \mathbf{V}^*(\mathbf{r}'') \cdot \mathbf{V}(\mathbf{r}'') \rangle. \quad (10.13б)$$

Здесь мы предположили, что эффективности детекторов не зависят от положения в пространстве и не учли зависимость от общей переменной t .

Выражения (10.13) относятся к пространственным изменениям среднего числа отсчетов или средних интенсивностей. Если мы рассмотрим пространственно однородное поле (но не обязательно стационарное!), то $\overline{m(\mathbf{r}')} = \bar{m}$ для любых \mathbf{r} , в то время как

$$\overline{m(\mathbf{r}') m(\mathbf{r}'')} = \bar{m} \overline{(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') m(0)}. \quad (10.14)$$

Чтобы сделать аналогию свременной корреляцией еще более тесной, введем величину

$$\eta(\mathbf{R}) \equiv \frac{R}{\bar{m}^2} \overline{\Delta m(\mathbf{R}) \Delta m(0)}, \quad (10.15)$$

где $\Delta m(\mathbf{R}) = m(\mathbf{R}) - \overline{m(\mathbf{R})}$ и $R = |\mathbf{R}|$. Следовательно, мы можем положить

$$\overline{m(\mathbf{R}) m(0)} - \bar{m}^2 = \bar{m}^2 \left[\frac{\eta(\mathbf{R})}{R} \right]. \quad (10.16)$$

Для излучения теплового источника непосредственно вытекает, что величину $\eta(\mathbf{R})$ можно выразить через степень когерентности $\eta(\mathbf{R}) = R |\gamma(\mathbf{R})|^2$. Таким образом, для $\eta(\mathbf{R})$ выполняется условие $0 \leq \eta(\mathbf{R}) \leq R$. Однако в общем случае это может и не иметь места. В случае идеального лазерного излучения нет корреляций отсчетов ни во времени, ни в пространстве, поэтому $\eta(\mathbf{R}) \equiv 0$. Если мы просто положим $m(\mathbf{R}) \equiv W$ и $m(0) \equiv X$, то распределение, данное в (10.6), ведет к отрицательному значению для $\eta(\mathbf{R})$. Однако если \mathbf{R} лежит в пределах объема когерентности, то величина $\eta(\mathbf{R})$ может оказаться отрицательной, если имеют место отрицательные диагональные веса, обусловленные квантовыми эффектами. В однофотонном состоянии, как и раньше, величина $\overline{m(\mathbf{R}) m(0)}$ равна нулю.

Пространственные корреляционные эффекты типа описываемых соотношением (10.16) в принципе возможны для ряда полей. В большинстве тепловых полей, однако, их трудно или вообще невозможно наблюдать. Это в основном обусловлено малым числом фотонов в объеме когерентности. Хотя в тепловых полях длина

пространственной когерентности может быть порядка нескольких метров, соответствующий эффект нельзя наблюдать, если число фотонов в объеме когерентности пренебрежимо мало. Согласно (2.18), фактором вырождения δ в данном случае является среднее число заполнения \bar{n} . Из формулы Планка

$$\delta = \bar{n} = \frac{1}{e^{\hbar\omega/kT} - 1}$$

следует, что для лучших тепловых источников $\delta \approx 10^{-3}$.

Чтобы обойти эту трудность, Мадьяр и Мандель [10.4] наблюдали свет, падающий из двух независимых лазерных источников. Так как фактор вырождения для лазеров $\delta \approx 10^{12}$, то эффект, если он имеет место, должен быть более заметным.

Два независимо генерируемых поля могут комбинироваться в одно поле каким-то одним из двух довольно очевидных способов. Для простоты рассмотрим эти два способа в случае только двух мод. С одной стороны, предположим, что амплитуды складываются:

$$z = z_1 + z_2. \quad (10.17)$$

Тогда распределение определяется выражением

$$\pi^2 \delta(z - z_1) * \delta(z - z_2)$$

с последующим усреднением по фазе. Это приводит к диагональному весу

$$(2|z|)^{-1} \delta(|z| - |z_1 + z_2|) = \delta(|z|^2 - |z_1 + z_2|^2), \quad (10.18)$$

характерному для идеальной лазерной моды с амплитудой $|z_1 + z_2|$. При таком сложении флуктуации амплитуды отсутствуют, и $\eta(\mathbf{R}) = 0$. С другой стороны, если состояния складываются *некогерентно*, как это характерно для случая их независимости и индивидуальной фазовой неопределенности, то соответствующее состояние дается выражением

$$\varphi(z) = \delta(|z|^2 - |z_1|^2) * \delta(|z|^2 - |z_2|^2).$$

Непосредственное вычисление свертки приводит к следующему выражению:

$$\varphi(z) = \text{Re} \{ 2 [|z|^2 |z_1|^2 + |z|^2 |z_2|^2 + |z_1|^2 |z_2|^2] - |z|^4 - |z_1|^4 - |z_2|^4 \}^{-1/2}. \quad (10.19)$$

Это выражение не равно нулю в области

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z| \leq |z_1| + |z_2|, \quad (10.20)$$

что характерно для некогерентной суперпозиции. Действительно, представим в соответствии с (10.20) $|z|$ в виде

$$|z|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|\cos\Phi,$$

где Φ — действительная величина. Тогда непосредственно из (10.19) следует

$$\varphi(z) = (2|z_1||z_2|\sin\Phi)^{-1}. \quad (10.21)$$

Это соотношение непосредственно определяет область, где весовая функция $\varphi(z)$ отлична от нуля, что, естественно, ведет к амплитудным флуктуациям.

В экспериментах Мадьяра и Манделя [10.4] наблюдалась неустойчивая интерференционная картина. Несмотря на неустойчивость интерференционных колец, их «геометрия» определяется геометрией интерференционного эксперимента и длиной волны света. Хотя усредненная интенсивность в любой точке постоянна, что свидетельствует о пространственной однородности, при анализе интерференционной картины неявно используется корреляция интенсивности и, следовательно, величина $m(\mathbf{R})m(0)$.

Итак, мы видим, что при регистрации интенсивности могут наблюдаться как пространственные, так и временные корреляции. Фактически, рассмотренные нами временные и пространственные корреляции низшего порядка являются только двумя представителями целого множества возможных в принципе корреляций интенсивности.

§ 2. ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ В СЛУЧАЕ НЕЗАВИСИМЫХ ИСТОЧНИКОВ

Основываясь на полученных выше выводах, нетрудно указать общие свойства совпадений отсчетов в случае независимых источников. Ограничимся рассмотрением двух независимых источников S_1 и S_2 и двух счетчиков C_1 и C_2 ; обобщение на случай M независимых источников и N счетчиков не представляет труда. В нашем

рассмотренни будут использованы соотношения и идеи, обсуждавшиеся в предыдущих главах.

Нас интересует производящая функция, определяющая распределение отсчетов (8.135) в случае двух счетчиков. Ее можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 Q \equiv Q(\lambda_1, \lambda_2; \tau_1, \tau_2; t_1, t_2) &= \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} (1 - \lambda_1)^{n_1} (1 - \lambda_2)^{n_2} \times \\
 &\times P(n_1, n_2; \tau_1, \tau_2; t_1, t_2) = \\
 &= \int \exp \left\{ - \sum_j \lambda_j \alpha_j \int_{t_j}^{\tau_j} |\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)|^2 \sigma_j(\mathbf{r}) d^3r dt \right\} \times \\
 &\times \varphi(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}) d\mu(\{z_\lambda(\mathbf{k})\}). \quad (10.22)
 \end{aligned}$$

Здесь мы приняли, что адмитансы детекторов являются простыми тензорами типа (8.128) и, в частности, не зависят от поляризации.

Представление о независимых случайных источниках было использовано в гл. 9 при обсуждении общих хаотических полей. Интуитивно ясно, что в этом случае поле $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ состоит из линейной суммы членов, каждый из которых имеет независимое распределение в диагональном представлении. Напомним, что соотношения вида (6.83) и (6.84) справедливы для любого поля, которое вне источников удовлетворяет волновому уравнению. В частности, мы можем связать поле волны аналитического сигнала $\mathbf{V}(\mathbf{r}, t)$ с его значением на источнике. Используя ядро K , выраженное в (6.82) через общие функции Грина (6.80), получаем

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) &= \int_S \int K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t') \mathbf{V}(\mathbf{y}, t') dS dt' = \\
 &= \sum_j \int_{S_j} \int K(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t - t') \mathbf{V}(\mathbf{y}, t') dS_j dt'. \quad (10.23)
 \end{aligned}$$

Последнее соотношение отражает тот факт, что в нашем случае «поверхность» источника состоит на самом деле из двух поверхностей. Существенно, что поле в некото-

рой точке x и момент t определяется величинами, задаваемыми на поверхностях источников S_1 и S_2 .

Схематически запишем (10.23) в виде

$$\mathbf{V}(x, t) \equiv K_1 \mathbf{V}_1 + K_2 \mathbf{V}_2, \quad (10.24)$$

где \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 — значения поля на поверхностях источников, а K_1 и K_2 — линейные ядра, описывающие распространение. В этом случае удобно рассматривать диагональный вес в (10.22) как функционал полей \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 в пространстве, ограниченном поверхностями S_1 и S_2 :

$$\varphi(\{z_\lambda(k)\}) = \varphi\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\}. \quad (10.25)$$

Как обычно в теории вероятности, из предположения о независимости источников следует, что распределение можно представить в виде произведения

$$\varphi\{\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2\} = \varphi_1\{\mathbf{V}_1\} \varphi_2\{\mathbf{V}_2\}. \quad (10.26)$$

Однако, как неоднократно подчеркивалось выше, в оптическом случае обычно нельзя знать или контролировать суммарную фазу волн, испускаемых каким-либо источником. В этом случае вес φ_1 , например, одинаков для полей вида $\exp(i\theta_1) \mathbf{V}_1(\mathbf{y}, t)$ при всех действительных θ_1 ; иными словами, φ_1 не зависит от суммарной фазы θ_1 . Как и в гл. 3, мы можем назвать распределение, имеющее место в этом случае, распределением с неопределенной фазой. Для квазимонохроматического излучения, для которого

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{y}, t) = \mathbf{v}_1(\mathbf{y}, t) \exp(-2\pi i \bar{\nu}_1 t),$$

где \mathbf{v}_1 — медленно меняющаяся функция, распределения с неопределенной фазой и стационарные распределения эквивалентны. В общем случае, однако, эти распределения не вполне эквивалентны, и мы будем рассматривать здесь только распределения с неопределенной фазой. Аналогичные соображения относятся также к стационарным случаям.

Если принять, что каждый независимый источник правильно описывается диагональным весом с неопределенной фазой

$$\varphi_j\{\exp(i\theta_j) \mathbf{V}_j\} = \varphi_j\{\mathbf{V}_j\}, \quad (10.27)$$

то нетрудно получить соответствующие соотношения для совместного распределения отсчетов или для его производящей функции. Согласно нашим предыдущим замечаниям, можно, очевидно, формально написать

$$Q = \int \int \exp \left\{ - \sum_j \lambda_j \alpha_j \int_{t_j}^{t_j} \left| \sum_k K_k \mathbf{V}_k \right|^2 \sigma_j(\mathbf{x}) d^3x dt \right\} \times \\ \times \varphi_1 \{ \mathbf{V}_1 \} \varphi_2 \{ \mathbf{V}_2 \} d\mu \{ \mathbf{V}_1 \} d\mu \{ \mathbf{V}_2 \}. \quad (10.28)$$

Раскроем члены в показателе экспоненты и явно введем дополнительную фазу θ между полями \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 . В этом случае находим общее выражение вида

$$Q = \int \int \exp \left\{ - \mathbf{V}_1^* \cdot A_1 \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2^* \cdot A_2 \mathbf{V}_2 - \right. \\ \left. - [e^{i\theta} (\mathbf{V}_1^* \cdot B \mathbf{V}_2) + e^{-i\theta} (\mathbf{V}_1^* \cdot B \mathbf{V}_2)^*] \right\} \times \\ \times \varphi_1 \{ \mathbf{V}_1 \} \varphi_2 \{ \mathbf{V}_2 \} d\mu \{ \mathbf{V}_1 \} d\mu \{ \mathbf{V}_2 \}. \quad (10.29)$$

Здесь A_j и B — линейные операторы, включающие пространственное и временное интегрирование и линейно зависящие от множителей λ_1 и λ_2 ; их можно легко вывести с помощью (10.28). Существенным моментом является тот простой факт, что хотя производящая функция Q определяется с помощью вспомогательного параметра θ , она на самом деле не зависит от θ из-за индивидуальной фазовой неопределенности каждого источника. Поэтому можно, не меняя значения функции Q , усреднить ее по фазе θ . С помощью соотношения для функции Бесселя $I_0(x)$, использованного при выводе соотношения (9.141), находим

$$Q = \int \int \exp \left\{ - \mathbf{V}_1^* \cdot A_1 \mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2^* \cdot A_2 \mathbf{V}_2 \right\} I_0 \left(\left| \mathbf{V}_1^* B \mathbf{V}_2 \right| \right) \times \\ \times \varphi_1 \{ \mathbf{V}_1 \} \varphi_2 \{ \mathbf{V}_2 \} d\mu \{ \mathbf{V}_1 \} d\mu \{ \mathbf{V}_2 \}. \quad (10.30)$$

Целесообразно также представить линейную зависимость A_j и B от λ_k в явном виде:

$$A_j \equiv \sum_k \lambda_k A_{kj}, \quad (10.31a)$$

$$B \equiv \sum_k \lambda_k B_k, \quad (10.31b)$$

где A_{kj} и B_k не зависят от λ_k . Подставляя эти соотношения в (10.30), приходим к соотношению

$$Q = \int \int \exp \left\{ - \sum_{k, j} \lambda_k (\mathbf{V}_j^* \cdot A_{kj} \mathbf{V}_j) \right\} I_0 \left(\left| \sum_k \lambda_k \mathbf{V}_1^* \cdot B_k \mathbf{V}_2 \right| \right) \times \\ \times \varphi_1 \{ \mathbf{V}_1 \} \varphi_2 \{ \mathbf{V}_2 \} d\mu \{ \mathbf{V}_1 \} d\mu \{ \mathbf{V}_2 \}. \quad (10.32)$$

В это соотношение неявно входят корреляции нескольких типов. Даже если множитель I_0 не играет роли, как например когда \mathbf{V}_1 и \mathbf{V}_2 имеют ортогональную поляризацию, в общем случае отсчеты в двух счетчиках будут коррелированы, так как $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ нельзя представить в виде произведения $Q_1(\lambda_1)Q_2(\lambda_2)$. [Вообще такая факторизация $Q(\lambda_1, \lambda_2)$ имеет место при $A_{kj} = 0$, $k \neq j$. Это означает, что в счетчик 1 не попадает излучение из источника 2 и наоборот; если это так, то $B_k = 0$ автоматически. Физически это эквивалентно наличию «стенки», полностью отделяющей один источник и его счетчик (S_1 и C_1) от другого источника и счетчика (S_2 и C_2).]

Имеется, однако, существенное исключение, когда множитель I_0 полностью определяет ситуацию. Если в излучении источников S_1 и S_2 отсутствуют флуктуации интенсивности, то только член I_0 ведет к корреляциям. Если считать, что $\varphi_j \{ \mathbf{V}_j \}$ имеет вид δ -функции с пиком при некотором значении поля (не говоря о неопределенности суммарной фазы), то можно легко оценить (10.32). Для простоты обозначим поле, выделяемое δ -функцией, снова через \mathbf{V} . Тогда получаем

$$Q = \exp \left\{ - \sum_{k, j} \lambda_k (\mathbf{V}_j^* \cdot A_{kj} \mathbf{V}_j) \right\} I_0 \left(\left| \sum_k \lambda_k \mathbf{V}_1^* \cdot B_k \mathbf{V}_2 \right| \right). \quad (10.33)$$

Если множитель I_0 несуществен (например, как в уже упоминавшемся случае ортогональной поляризации), результирующая производящая функция имеет вид $Q_1(\lambda_1)Q_2(\lambda_2)$, откуда вытекает, что корреляция совпаденый отсчетов *отсутствует*. Таким образом, все корреляции возникают за счет множителя I_0 .

Следует отметить, что, даже если пренебречь вторым счетчиком C_2 , два независимых источника дадут непуассоновскую статистику отсчетов счетчика C_1 . Чтобы

показать это, достаточно только, согласно (10.22), положить в (10.33) $\lambda_2 = 0$. Устраняя все временные переменные, находим

$$\begin{aligned} Q(\lambda_1) &= \sum_{n_1=0}^{\infty} (1 - \lambda_1)^{n_1} P(n_1) = \\ &= \exp \left\{ -\lambda_1 \sum_j (\mathbf{V}_j^* \cdot A_{1j} \mathbf{V}_j) \right\} I_0(\lambda_1 | \mathbf{V}_1^* \cdot B \cdot \mathbf{V}_2 |) \equiv \\ &\equiv \exp \{ -\lambda_1 E \} I_0(\lambda_1 C). \end{aligned} \quad (10.34)$$

Отсюда [ср. (2.8)] получаем, что $E = \bar{n}_1$, в то время как $C = \{2(\sigma_1^2 - \bar{n}_1)\}^{1/2}$ является мерой отклонения от статистики Пуассона. Распределение отсчетов, описываемое соотношением (10.34), неявно содержится в (2.7), хотя не в очень простой форме. Однако, используя (2.6), мы можем получить распределение $p(U)$ для интегральной интенсивности [ср. (2.4)]

$$U \equiv \int_{t_1}^{t_2} I_1(t') dt', \quad (10.35)$$

$$\begin{aligned} p(U) &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda \alpha U} Q(i\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda(\alpha U - E)} I_0(\lambda C) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2} \alpha \operatorname{Re} \{ C^2 - [\alpha U - E]^2 \}^{-1/2} = \\ &= \frac{1}{2} \alpha \operatorname{Re} \left\{ | \mathbf{V}_1^* \cdot B \cdot \mathbf{V}_2 |^2 - \left[\alpha U - \sum_j (\mathbf{V}_j^* \cdot A_{1j} \mathbf{V}_j) \right]^2 \right\}^{-1/2}. \end{aligned} \quad (10.36)$$

Это соотношение определяет распределение U как функцию времени счета, полей и геометрии источников. Флуктуации в U имеют место, если $C > 0$.

Проведенное рассмотрение касалось статистики отсчетов в счетчиках, освещаемых независимыми источниками. Конечно, совершенно не обязательно, чтобы все (или какие-либо!) источники действительно не зависели

друг от друга. Имеется ряд типов корреляций источников, которые также можно было бы рассмотреть. Все эти возможности в неявном виде содержатся в формулах, выведенных нами для общего совместного распределения отсчетов при любых конкретных корреляциях источников, если эти корреляции существуют.

§ 3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой книге мы рассматривали классическую и квантовую теории частично когерентных свободно распространяющихся волн, которые представляют собой соответственно разделы классической и квантовой статистических теорий. Была показана целесообразность использования в классической теории аналитического сигнала, особенно для квазимонохроматических полей. В свою очередь благодаря использованию нормально упорядоченных полевых операторов, которые, как было показано, позволяют характеризовать скорость многократных совпадений в квантовой теории, представление о когерентных состояниях оказалось очень удобным и естественным для квантового рассмотрения. Являясь собственными векторами операторов уничтожения, эти состояния включают в себя аналитические сигналы, что позволяет установить тесную связь с классической формулировкой статистической теории. Последовательное изучение когерентных состояний показало, как и в каком смысле применять диагональное представление для матрицы плотности, чтобы использовать эту формальную связь с классической теорией. Целесообразность такого представления должна быть ясна из рассмотрения, изложенного в книге, и приведенных примеров. Полезно в заключение перечислить ряд других общих вопросов, разрабатываемых в настоящее время.

В нашей книге речь шла только о волнах в свободном пространстве; мы лишь кратко коснулись проблем, связанных с атмосферными искажениями. Вместе с тем для приложений все возрастающее значение имеют общие аспекты распространения света в несвободном пространстве, в среде, характеристики которой меняются по случайному закону, в нелинейной среде и т. д., не говоря уже о вопросах детектирования и генерации. Эти

задачи связаны с вопросами об искажении сигнала (такие же проблемы возникают и в теории информации), а также о передаче сигнала по шумящему каналу. В дополнение к этому остается множество нерешенных проблем, связанных с разработкой более точного описания процессов детектирования, которое позволило бы лучше отразить роль нелинейных явлений.

Мы обсудили, особенно подробно в этой главе, вопрос о реакции нескольких счетчиков на излучение нескольких источников. Очевидно, здесь возможна и обратная постановка задачи: каким образом, используя информацию об отсчетах, вывести статистические свойства источников. Если, с другой стороны, рассматривать один или несколько «источников» как *рассеивающие центры*, расположенные в поле излучения других источников, то можно получить информацию об их рассеивающих свойствах. В частности, при соответствующем использовании нескольких счетчиков можно получить информацию об относительной фазе, недоступную в случае одного счетчика. Эти вопросы подробно рассматривались Гольдбергером, Льюисом и Уотсоном [10.6].

Еще одна проблема, заслуживающая нескольких общих замечаний, заключается в описании статистических состояний в случае бесконечного числа степеней свободы. И при классическом и при квантовом рассмотрении мы подчеркивали полезность характеристических функционалов. Независимо от того, является ли задача классической или квантовой, имеет ли распределение конечные моменты или не имеет, характеристический функционал представляет собой хорошо определенную и непрерывную функцию своих аргументов. Это особенно важно при квантовом рассмотрении, так как формулировка задачи с бесконечным числом степеней свободы связана с некоторыми трудностями. Мы попытались облегчить подход к этим задачам путем квантования поля излучения в «ящике». Если, например, с самого начала квантовать поле излучения в бесконечном объеме, то для рассмотрения равновесного теплового состояния — или любого другого состояния, обладающего, вообще говоря, пространственно-трансляционной инвариантностью, — необходимо такое представление опера-

торов уничтожения и рождения, которое было бы *унитарно неэквивалентным* по отношению к используемому нами представлению (так называемое представление Фока). Действительно, при различных температурах или при изменении какого-либо другого макроскопического параметра все представления не эквивалентны одно другому. Грубо говоря, физическая причина этого заключается в том простом факте, что нельзя указать процедуру, которая бы изменяла макроскопические свойства равномерно по всему пространству (или, говоря более формально, нельзя придумать «гамильтониан», эволюционный оператор которого может воздействовать на унитарную эквивалентность). При квантовании в ящике эти вопросы не возникают, а при использовании характеристического функционала они играют второстепенную роль. Желательно, конечно, избавиться от ящика (чтобы уменьшить на единицу число не относящихся к делу параметров). В связи с этим изучение состояний поля «без ящика» с помощью операторов представляет собой интересную, хотя и нетривиальную задачу. Как было отмечено в гл. 5, рассмотрение этих вопросов как раз ведется в настоящее время.

Разумеется, центральным пунктом любой задачи как в классической, так и в квантовой оптике является рассмотрение нелинейных уравнений взаимодействия и нахождение соответствующих состояний поля, основывающееся на использовании только исходных принципов. Эта процедура (в тех случаях, когда ее применение возможно) дает, конечно, наиболее глубокие сведения о рассматриваемых связанных системах. Беглое изложение возможной формулировки таких задач было дано в гл. 4. В гл. 9 приведено краткое описание идеализированной лазерной модели. Другие системы и соответствующие уравнения, так же как и методы, используемые для их анализа, обсуждаются в литературе.

С помощью изложенных нами методов квантовой оптики возможно изучение ряда новых интересных и актуальных проблем в этой области физики, области, имеющей славную историю и внесшей большой вклад в другие разделы физики, например в волновую механику.

ГЛАВА 1

Классическим учебником оптики, в котором наряду с другими вопросами рассматривается и частичная когерентность, остается книга:

- 1.1. Born M., Wolf E., Principles of Optics, 3rd ed., Oxford, 1965.

В этой книге особого внимания заслуживает гл. X. Частичная когерентность обсуждается также в двух недавно вышедших работах:

- 1.2. Beran M. J., Parrent G. B., Jr., Theory of Partial Coherence, New Jersey, 1964.
- 1.3. O'Neill E. L., Introduction to Statistical Optics, Reading (Mass), 1963. (См. перевод: Э. О'Нейл, Введение в статистическую оптику, изд-во «Мир», 1966.)

Мы предполагаем, что читатель имеет основные представления о свойствах преобразований Фурье. Аналитические сигналы были введены и широко использованы Габором:

- 1.4. Gabor D., Journ. Inst. Electr. Eng., **93**, 429 (1946).

Общие вопросы, связанные с интегралами Фурье, включая преобразования Гильберта, которым подчиняются аналитические сигналы, рассмотрены в книге:

- 1.5. Titchmarsh E. C., Introduction to the Theory of Fourier Integrals, 2d ed., Oxford, 1948. (См. перевод: Э. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, ИЛ, 1948.)

Понятие степени когерентности и ее связь с видностью обсуждалась Цернике:

1.6. Zernike F., *Physica*, **5**, 785 (1938).

Так называемая «фазовая проблема» в оптике была в общем виде сформулирована Вольфом:

1.7. Wolf E., *Proc. Phys. Soc.*, **80**, 1269 (1962);

для частного случая излучения черного тела она обсуждается в работе:

1.8. Капо Y., Wolf E., *Proc. Phys. Soc.*, **80**, 1273 (1962).

Интересный подход к фазовой проблеме предложил Мета:

1.9. Mehta C. L., *Nuovo Cimento*, **10**, 202 (1965).

Несколько конкретных примеров форм спектра рассматривается в работе:

1.10. Nussenzweig H. M., *Journ. Math. Phys.*, **8**, 561 (1967),

где было показано, что в этих случаях «минимальное» решение фазовой проблемы является неадекватным.

Волновые уравнения для функции взаимной когерентности были впервые получены Вольфом:

1.11a. Wolf E., *Proc. Roy. Soc.*, **A230**, 246 (1955).

1.11б. Wolf E., *Proc. Phys. Soc.*, **71**, 257 (1958).

Векторные волновые уравнения, соответствующие полю излучения, даны в работе:

1.12. Roman P., Wolf E., *Nuovo Cimento*, **17**, 462, 477 (1960).

ГЛАВА 2

Полуклассический вывод формулы распределения отсчетов для излучения теплового источника имеется в работе:

2.1. Mandel L., в книге *Progress in Optics*, ed. E. Wolf, Vol. 2, Amsterdam, 1963.

Полуклассический вывод, справедливый для более общих распределений светового излучения, приводится в работе:

- 2.2. Mandel L., Sudarshan E. C. G., Wolf E., Proc. Phys. Soc., **84**, 435 (1964).

Обзор методов, используемых в теории вероятности, дан, например, в книге:

- 2.3. Cramer H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton, 1946. (См. перевод: Г. Крамер, Математические методы статистики, М., 1948.)

Упоминаемые в нашей книге эксперименты по определению распределений фотоотсчетов для излучения тепловых источников и лазеров были выполнены Арекки:

- 2.4. Arecchi F. T., Phys. Rev. Lett., **15**, 912 (1965).

Вопрос о нахождении распределения интенсивности по распределению фотоотсчетов в связи с квантовой оптикой рассмотрен в статье:

- 2.5. Wolf E., Mehta C. L., Phys. Rev. Lett., **13**, 705 (1964).

Идентичная математическая задача решается в статье:

- 2.6. Widder D. V., Duke Math. Journ, **1**, 126 (1935).

Вопрос о моментах распределений, возникающий, в частности, в указанной задаче, подробно обсуждается в книге:

- 2.7. Shohat J. A., Tamarkin J. D., Problem of Moments, Rhode Island, 1943.

ГЛАВА 3

Аппарат характеристических функций изложен в работе:

- 3.1. Lukacs E., Characteristic Functions, London, 1960.

С рассмотрением стохастических процессов под углом зрения физики можно познакомиться по работам, воспроизведенным в сборнике:

- 3.2. Wax N., ed., Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, New York, 1954.

Статьи, входящие в сборник, весьма содержательны как с математической, так и с физической точек зрения. Особенный интерес среди них для классической статистической оптики представляет статья:

- 3.3. Rice S. O., Bell Syst. Tech. Journ., **23**, 282 (1944); **25**, 46 (1945).

Различные приложения к физическим задачам рассматриваются в книге:

- 3.4. Bartlett M. S., An Introduction to Stochastic Processes, London—New York, 1955 (См. перевод: М. С. Бартлетт, Введение в теорию случайных процессов, ИЛ, 1958.)

и в книге:

- 3.5. Ramakrishnan A., Probability and Stochastic Processes, Handbuch der Physik, Hrsg. S. Flügge, Bd. III/2, Berlin, 1959.

Теория гармонического анализа с некоторым акцентом на характеристические функционалы в доступной форме изложена в книге:

- 3.6. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я., Некоторые применения гармонического анализа, М., 1961, гл. 2 и 3,

а более полное математическое рассмотрение дано в книге:

- 3.7. Doob J. L., Stochastic Processes, New York, 1953. (См. перевод: Дж. Л. Дуб, Вероятностные процессы, ИЛ, 1956.)

Вопросы теории информации и связь со статистической механикой в применении к теории оптической когерентности обсуждались Габором:

- 3.8. Gabor D., в книге Progress in Optics, ed. E. Wolf, Vol. 1. Amsterdam, 1961.

Эксперименты по многократному совпадению фотоотсчетов были предложены и успешно выполнены Хэнбери Брауном и Твиссом:

3.9а. Hanbury Brown R., Twiss R. Q., Nature, **177**, 27 (1956).

3.9б. Hanbury Brown R., Twiss R. Q., Proc. Roy. Soc., **A242**, 300 (1957).

3.9в. Hanbury Brown R., Twiss R. Q., Proc. Roy. Soc., **A243**, 291 (1957).

Классическое объяснение наблюдавшихся в этих экспериментах эффектов в терминах корреляции интенсивности второго порядка содержится в статье:

3.10. Purcell E. M., Nature, **178**, 1449 (1956).

Обстоятельный обзор того же вопроса дан Манделем [2.1], а также Манделем и Вольфом:

3.11. Mandel L., Wolf E., Rev. Mod. Phys., **37**, 231 (1965). (См. перевод: УФН, **87**, 491 (1965); **88**, 347, 619 (1966).)

Применение независимых совместных тепловых распределений для приближенного представления интегральной интенсивности в обсуждавшихся в тексте случаях было разработано Райсом [3.3]; приложение к распределению фотоотсчетов дано в работе:

3.12. Mandel L., Proc. Phys. Soc., **74**, 233 (1959).

ГЛАВА 4

Связанные нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных со случайными вынуждающими силами и (или) случайными начальными условиями встречаются практически во всех областях физики.

В квантовой оптике такие уравнения возникают при рассмотрении сред с нелинейными электрическими и магнитными восприимчивостями.

Это было показано в книге:

4.1. Bloembergen N., Nonlinear Optics, New York, 1965. (См. перевод: Н. Бломберген. Нелинейная оптика, изд-во «Мир», 1966.)

В приложении к равновесной и неравновесной квантовой статистической механике аналогичные нелинейные уравнения рассмотрены Кадановым и Беймом:

- 4.2. Kadano ff L. P., Ba um G., Quantum Statistical Mechanics, New York, 1962. (См. перевод: Л. Каданов, Г. Бейм, Квантовая статистическая механика, изд-во «Мир», 1964.)

Сходные проблемы в теории турбулентности освещены Бэтчелором:

- 4.3. Batchelor G. K., The Theory of Homogeneous Turbulence, London — New York, 1963. (См. перевод: Дж. Бэтчелор, Теория однородной турбулентности, ИЛ, 1955.)

Содержательный обзор математических методов и физических задач теории случайных систем дается в книге:

- 4.4. Bhargucha-Reid A. T., Elements of the Theory of Markov Processes and their Applications, New York, 1960.

Изящное изложение метода, основанного на применении функционалов к стохастическим проблемам для классических случайных систем, дано в работе:

- 4.5. К а с М., Probability and Related Topics in Physical Sciences, New York, 1959;
аналогичный метод для квантовых систем изложен Новожиловым Ю. В. и Тулубом А. В.

- 4.6. Новожилов Ю. В., Тулуб А. В., The Method of Functionals in the Quantum Theory of Fields, New York, 1961.

Техника дифференцирования функционалов была введена в теорию нелинейных динамических уравнений в работе:

- 4.7. Hopf E., Journ. Rational Mech. Anal., 1, 87 (1952).

Уравнения движения, описывающие классические статистические явления применительно к линейным и

нелинейным задачам теории шумов, рассмотрены в книгах:

4.8. Стратонович Р. Л., Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, М., 1961.

4.9. Davenport W. B., Jr., Root W. L., Random Signals and Noise, New York, 1958. (См. перевод: В. Давенпорт, В. Рут, Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, 1960.),

а также в нескольких статьях по классической теории шумов, ссылки на которые можно найти в работе:

○ 4.10. Lax M., Rev. Mod. Phys., 38, 541 (1966).

Применение метода характеристических функционалов к динамическим проблемам квантовой оптики рассматривалось Сударшаном:

4.11. Sudarshan E. C. G., Internat. Journ. Theor. Phys., в печати.

ГЛАВА 5

Укажем несколько стандартных учебников по квантовой механике:

5.1. Dirac P. A. M., The Principles of Quantum Mechanics. 4th ed., Oxford, 1958. (См. перевод: П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, М., 1960.)

5.2. Schiff L. I., Quantum Mechanics, New York, 1955. (См. перевод: Л. Шифф, Квантовая механика, ИЛ, 1957.)

5.3. Messiah A., Quantum Mechanics, New York, Vol. I, 1961; Vol. II, 1962.

Более математическое рассмотрение квантовомеханических задач, в особенности важных для нас статистических вопросов, дано в книгах:

5.4. Von Neumann J., Mathematische Grundlagen der Quanten Mechanik, Berlin, 1932. (См. перевод: И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, М., 1964.)

- 5.5. Mackey G. W., *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, New York, 1963. (См. перевод: Дж. Макки, *Лекции по математическим основам квантовой механики*, изд-во «Мир», 1965.)

Более полное обсуждение свойств гильбертова пространства, общих свойств различных операторов и т. д. можно найти в книгах:

- 5.6. Riesz F., Sz. - Nagy B., *Functional Analysis*, New York, 1955
 5.7. Колмогоров А. Н., Фомин С. В., *Элементы теории функций и функционального анализа*, М., 1960.

Свойства чистых и смешанных состояний поляризации для монохроматического света аналогичны свойствам поляризации в классической теории (см. [1.1], стр. 541).

Читателю, интересующемуся применением C^* -алгебры в квантовой теории и в квантовой статистической механике, т. е. применением метода, позволяющего рассматривать более общие квантовые состояния, чем те, которые описываются матрицами плотности, рекомендуем обратиться к статье:

- 5.8. Segal I. E., *Ann. Math.*, **48**, 930 (1947)

и к подробному рассмотрению, содержащемуся в работе:

- 5.9. Haag R., Kastler D., *Journ. Math. Phys.*, **5**, 848 (1964),

а также к литературе, цитированной в этих работах.

ГЛАВА 6

Квантование поля излучения является основным предметом рассмотрения почти всех учебников квантовой механики, кроме самых элементарных. В дополнение к [5.1; 5.2; 5.3] читатель может обратиться к соответствующим главам в любой достаточно известной книге, например:

- 6.1. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б., *Квантовая электродинамика*, М., 1969.

- 6.2. Heitler W., Quantum Theory of Radiation, New York — London, 1954. (См. перевод: В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.)
- 6.3. Jauch J. M., Rohrlich F., The Theory of Photons and Electrons, Reading (Mass.), 1959.
- 6.4. Schw eber S. S., An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, New York, 1961. (См. перевод: С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.)
- 6.5. Thirring W. F., Principles of Quantum Electrodynamics, New York, 1958. (См. перевод: В. Е. Тирринг, Принципы квантовой электродинамики, М., 1964.)
- 6.6. Umezawa H., Quantum Field Theory, Amsterdam, 1956. (См. перевод: Х. Умэдзава, Квантовая теория поля, ИЛ, 1958.)
- 6.7. Wentzel G., Quantum Theory of Fields, New York, 1949. (См. перевод: Г. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М.—Л., 1947.)

ГЛАВА 7

Элементарные свойства когерентных состояний рассматриваются в распространенных учебниках, например [5.1—5.3], при обсуждении волновых пакетов с минимальной неопределенностью. Когерентные состояния были введены в квантовую механику Шредингером:

- 7.1. Schrödinger E., Naturwissensch., 14, 644 (1927)

для изучения смещенных и сдвинутых осцилляторов. Когерентные состояния неоднократно использовались многими авторами для различных целей. Краткое изложение элементарных свойств таких состояний дано в работах:

- 7.2. Louisell W. H., Radiation and Noise in Quantum Electronics, New York, 1964. (Готовится русский перевод.)
- 7.3. Carruthers P., Nieto M. M., Am. Journ. Phys., 33, 537 (1965).

Свойство полноты когерентных состояний было впервые отмечено фон Нейманом [5.4] (стр. 299 русского издания). Основное свойство когерентных состояний, относящееся к разложению единицы, было впервые установлено в используемой в настоящее время форме Клаудером:

7.4. Klauder J. R., Ann. Phys. (N. Y.), 11, 123 (1960).

В этой статье неявно используется соответствующее гильбертово пространство ограниченных непрерывных функций, но не изучаются его конкретные свойства. Эти свойства для тесно связанных с ним пространств Сегала — Баргманна были впервые систематически изучены в работах:

7.5a. Segal I. E., Illinois Journ. Math., 6, 500 (1962).

7.5б. Segal I. E., Mathematical Problems of Relativistic Physics, Rhode Island, 1963

и особенно в работе:

7.6. Bargmann V., Comm. Pure Appl. Math., 14, 187 (1961).

Связь этих пространств с соответствующим гильбертовым пространством ограниченных непрерывных функций — «непрерывное представление» — была отмечена Швебером:

7.7. Schweber S. S., Journ. Math. Phys., 3, 831 (1962).

Все эти пространства, будучи гильбертовыми пространствами с воспроизводящимися ядрами, являются важным частным случаем пространств, теория которых развита в работах:

7.8a. Aronszajn N., Proc. Cambr. Phil. Soc., 39, 133 (1943).

7.8б. Aronszajn N., Trans. Am. Math. Soc., 68, 337 (1950).

В связи с разработкой квантовой оптики некоторые свойства когерентных состояний были заново открыты Глаубером:

7.9. Glauber R. J., Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).

В важной и часто цитируемой работе Глаубера когерентное состояние, для которого у нас используется обозначение $|z\rangle$, обычно обозначается через $|\alpha\rangle$.

Свойство однозначности диагональных матричных элементов когерентных состояний для различных операторов в наиболее простой форме показано в работе:

7.10. Mehta C. L., Sudarshan E. C. G., Phys. Rev., **138**, B274 (1965).

Исследование матрицы плотности с помощью ее диагональных матричных элементов по когерентным состояниям дано в работе [7.10], а также в работах:

7.11. Husimi K., Proc. Phys. Math. Soc. Japan, **22**, 264 (1940).

7.12. Капо Y., Journ. Math. Phys., **6**, 1913 (1965).

7.13а. McKenna J., Frisch H. L., Ann. Phys., **33**, 156 (1965).

7.13б. McKenna J., Frisch H. L., Phys. Rev., **145**, 93 (1966).

С представлением с помощью дифференциальных операторов легче всего познакомиться по работе [7.6].

Различные дифференциальные операторы, позволяющие получать нормально упорядоченные операторы, были введены в теорию поля в статье:

7.14. Anderson J. L., Phys. Rev., **94**, 703 (1954).

В более простом виде, используемом в квантовой оптике, они подробно обсуждаются в [7.2], а также в лекциях Лэкса:

7.15. Lax M., Brandeis Summer Institute Lectures 1966, vol. 2, New York, 1968.

Когерентные состояния для бесконечного числа степеней свободы были формально введены в самых первых

работах. Основы теории таких состояний даны в работе:

- 7.16. Bargmann V., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., 48, 199 (1962),

где используется в элементарной форме техника функционального интегрирования, детально изученная Фридрихсом и Шапиро:

- 7.17. Friedrichs K. O., Shapiro H. N., Integration of Functionals, Lecture Notes, New York, 1957.

Можно отметить, что используемые в данной главе представления по когерентным состояниям имеют много общих свойств с более широким классом представлений (непрерывные представления в фазовом пространстве), частным случаем которых они являются. Основные свойства этих представлений рассматриваются Клаудером:

- 7.18. Klauder J. R., Journ. Math. Phys., 4, 1055, 1058 (1963); 5, 177 (1964).

Строгий анализ этих представлений для большого, но конечного числа степеней свободы дан в работе:

- 7.19. McKenna J., Klauder J. R., Journ. Math. Phys., 5, 878 (1964)

а для бесконечного числа степеней свободы — в статье:

- 7.20. Klauder J. R., McKenna J., Journ. Math. Phys., 6, 68 (1965).

В каждой из этих статей рассматриваются частные случаи когерентных состояний.

ГЛАВА 8

Правильное квантовое выражение для скорости счета многократных совпадений в виде среднего от нормально упорядоченных фотонных операторов дано в следующих работах:

- 8.1a. Glauber R. J., Phys. Rev. Lett., 10, 84 (1963).
8.1б. Glauber R. J., Phys. Rev., 130, 2529 (1963).
8.1в. Glauber R. J., Phys. Rev., 131, 2766 (1963).

- 8.1г. Glauber R. J., Quantum Electronics (Proc. 3rd Intern. Congr.), ed. N. Bloembergen, P. Grivet, New York, 1964.
- 8.2. Glauber R. J., в книге Quantum Optics and Electronics, ed. C. DeWitt, A. Blandin, C. Cohen-Tannoudji, New York, 1964. (См. перевод в сб. «Квантовая оптика и квантовая радиофизика», изд-во «Мир», 1966.)

Последняя работа в особенности отличается своей полнотой. В ней перепечатаны две основные статьи из [8.1а — 8.1 г].

Теория возмущений первого порядка излагается, например, в книге Шиффа [5.2].

Определение полностью когерентных состояний дано в некоторых из статей [8.1]. Когерентность первого порядка в наиболее полном виде рассмотрена в статье:

- 8.3. Titulaer U. M., Glauber R. J., Phys. Rev., **140**, B676 (1965); **145**, 1041 (1966).

С более общей точки зрения частично когерентные состояния обсуждаются в работе:

- 8.4. Sudarshan E. C. G., Quantum Theory of Partial Coherence, Intern. Journ. Theor. Phys., в печати.

Иерархия корреляционных функций, нормированных на произведение интенсивностей, была рассмотрена Глаубером [8.2]. Другие нормализации, введение которых объясняется отчасти стремлением обобщить понятия классической комплексной степени когерентности, были рассмотрены Метта:

- 8.5. Mehta C. L., Journ. Math. Phys., **8**, 1798 (1967) и Сударшаном [8.4].

Распределение отсчетов в квантовом случае при очень специальных условиях выведено в работе

- 8.6. Ghilmetti F., Phys. Lett., **12**, 210 (1964); в более общем виде оно получено Глаубером [8.2]. В нашем основном выводе распределений отсчетов ши-

роко используется диагональное представление матриц плотности. Таким образом, хотя этот вывод является полностью квантовомеханическим, он очень похож на аналогичный вывод в классической теории. Благодаря использованию диагонального представления выражение для скорости счета для произвольного поля излучения становится формально аналогичным соответствующему выражению в классической теории. Этот замечательный результат был впервые получен Сударшаном:

- 8.7a. Sudarshan E. C. G., Phys. Rev. Lett., **10**, 277 (1963).
 8.7б. Sudarshan E. C. G., Proceedings of the Symposium on Optical Masers, New York, 1963, p. 45.

При использовании такого диагонального представления сохраняется вид классических формул для распределения отсчетов, выраженных через плотности распределений. Нужно учесть, что это уже полностью квантовомеханическое описание, и, следовательно, плотность распределения не обязательно должна быть положительно определенной. В диагональном представлении $\varphi(z)$ формально соответствует классическому распределению. Среди возможных весов $\varphi(z)$ имеются такие, для которых выполняется условие $\varphi(z) \geq 0$. Таким свойством обладают все обычные классические распределения. В частности, тепловые состояния представляются в классической теории гауссовым распределением. Квантовое описание этих состояний с помощью линейной комбинации проекций на когерентные состояния с гауссовой весовой функцией было дано Глаубером [8.1а].

Первоначально диагональный вес записывался в виде формального бесконечного ряда, состоящего из дираковских δ -функций и производных возрастающего порядка. Методы записи диагонального веса без использования такого бесконечного ряда рассматриваются в работе Клаудера и др.:

- 8.8. Klauder J. R., McKenna J., Currie D. G., Journ. Math. Phys., **6**, 733 (1965)

и в работе Мета и Сударшана [7.10]. В последней статье роль диагонального веса как распределения характеризуется с помощью линейного функционала. В обеих статьях содержится хорошо разработанная процедура определения матриц плотности как предела последовательности, каждый член которой имеет диагональное представление. В [8.8] эти веса представляют собой функции, квадратично интегрируемые, в то время как в [7.10] они состоят из большого, но конечного числа производных δ -функций. В любом случае матрица плотности однозначно определяется как предел диагонально представимых операторов. Но последовательности операторов в работах [8.8] и [7.10] сходятся по норме Гильберта — Шмидта, поэтому правильное среднее значение гарантируется только для операторов Гильберта — Шмидта. Существование более строгих свойств сходимости по следовой норме, необходимых для получения правильных средних значений любого ограниченного оператора, образуемого последовательностью представленных в диагональном виде операторов с очень гладкими весовыми функциями, было продемонстрировано независимо Клаудером и Рокка:

8.9. Klauder J. R., Phys. Rev. Lett., **16**, 534 (1966).

8.10. Rocca F., Compt. Rend., **262**, A547 (1966).

Первоначально диагональный вес записывался в виде суммы производных δ -функций, порядок которых полностью определялся максимальным числом фотонов в соответствующем состоянии. Однако в том случае, когда в состоянии имеется бесконечное число фотонов, такой способ записи диагонального веса не дает распределение в \mathcal{D}_2 . Это было доказано в работе:

8.11. Cahill K. E., Phys. Rev., **138**, B1566 (1965).

С другой стороны, Миллер и Мишкин в работах

8.12a. Miller M. M., Mishkin E. A., Phys. Rev., **164**, 1610 (1967).

8.12b. Miller M. M., Journ. Math. Phys., **9**, 1270 (1968).

показали, что бесконечный ряд, составленный из производных δ -функций возрастающего порядка, может дать распределение в \mathcal{L}_2 , являющемся фурье-образом \mathcal{D}_2 .

Представление Вейля для операторов, использованное нами при анализе диагонального представления, обсуждается в классической книге:

- 8.13. Weyl H., *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, New York, 1931, p. 274.

Эти представления и их применение для статистического описания в квантовой теории изучались в классической статье:

- 8.14. Moyal J. E., *Proc Camb. Phil. Soc.*, **45**, 91 (1949).

Этот же вопрос рассматривается и в работе Вигнера:

- 8.15. Wigner E., *Phys. Rev.*, **40**, 749 (1932)

и далее развит Сударшаном:

- 8.16a. Sudarshan E. C. G., *Lectures in Theoretical Physics*, Vol. II, New York, 1961.

- 8.16b. Jordan T. F., Sudarshan E. C. G., *Rev. Mod. Phys.*, **33**, 515 (1961).

Тщательный анализ математических аспектов представлений Вейля содержится в статьях:

- 8.17. Loupias G., Miracle-Sole S., *Comm. Math. Phys.*, **2**, 31 (1966).

- 8.18. Pool J. C. T., *Journ. Math. Phys.*, **7**, 66 (1966).

Свойства операторов, необходимые для полного понимания доказательств диагонального представления, приведенных в нашей книге, можно найти в книге [3.6], стр. 40—78 или в работе:

- 8.19. Schatten R., *Norm Ideals of Completely Continuous Operators*, Berlin, 1960.

Свойства распределений можно найти в классической работе:

- 8.20. Schwartz L., *Théorie des distributions*, Vol. I, II, Paris, 1951.

Конкретные распределения и пространства пробных функций, представляющие для нас более непосредственный интерес, рассмотрены в книге:

8.21. Гельфанд И. М., Шиллов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, М., 1959.

Более популярное изложение свойств распределений можно найти в книге:

8.22. Lighthill M. J., Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, London — New York, 1959.

Исходя из того, что имеющие физический смысл диагональные веса должны допускать произвольные свертки и обладать конечными моментами произвольного порядка, авторы работы:

8.23. Bonifacio R., Narducci L. M., Montaldi E., Phys Rev. Lett., 16, 1125 (1966)

предложили определенный подкласс имеющих физический смысл диагональных весов. Для конструирования свертки получаемый таким путем подкласс диагональных весов слишком узок. Техника «усечения», используемая для быстрого доказательства самой общей формулы свертки [см. (8.205)], неявно используется в статье [7.20], раздел 2E.

ГЛАВА 9

Вывод нормального распределения для случайной переменной, состоящей из большого числа аналогично и независимо распределенных вкладов, является классическим примером применения теории вероятности. Эта стандартная процедура была использована Глаубером [8.1в] при выводе нормального распределения диагонального веса в том случае, когда каждый из независимых вкладов равномерно распределен по фазе.

Энтропия в квантовой теории рассматривалась фон Нейманом [5.4]. Классические свойства теплового распределения для поля излучения можно найти в книге:

9.1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., Статистическая физика, М., 1964.

Выражение для среднего значения, соответствующего производящему функционалу распределения отсчетов в случае нормального распределения по полю, было уже рассмотрено Райсом [3.3], который вывел приближенные соотношения, справедливые для произвольных форм спектра. Точные и асимптотические выражения, справедливые для определенных форм спектральных линий, включая лоренцевскую, получены в статье:

- 9.2. Grenander U., Pollak H. O., Slepian D., Journ. Soc. Ind. Appl. Math., **7**, 374 (1959).

Распределение отсчетов для хаотических полей в случае лоренцевской формы линии приведено в первом сообщении Глаубера [8.1a] и выведено в работе [8.2]. Асимптотическое выражение, справедливое при большом среднем числе отсчетов, также получено Глаубером:

- 9.3. Glauber R. J., в книге Physics of Quantum Electronics, ed. P. L. Kelley, B. Lax, P. E. Tannenwald, New York, 1966.

Распределение отсчетов для таких полей исследовалось в экспериментах Фрида и Хауса:

- 9.4a. Freed C., Haus H. A., Phys. Rev. Lett., **15**, 943 (1965).
 9.4b. Freed C., Haus H. A., IEEE Journ. Quantum Electronics, **QE-2**, № 8, 190 (1966).

Сравнение этих данных с результатами, полученными с помощью точного выражения (9.87), было выполнено Баракатом и Глаубером:

- 9.5. Barakat R., Glauber R. J., неопубликованные вычисления.

Начальные данные, относящиеся к модели лазера с диффундирующей фазой, можно найти в работе:

- 9.6. Townes C. H., Nuovo Cimento Suppl., **5**, 222 (1957).

Более детально свойства такой модели рассматривались Лэксом:

- 9.7. Lax M., Proc. Durham Conf. on Quantum Optics, 1964 (не опубликовано)

и Глаубером в [8.2]; область ее применения определена в работе:

9.8. L a x M., Phys. Rev., **160**, 290 (1967).

Общий класс стохастических процессов, используемый нами при обсуждении модели с диффундирующей фазой, взят из работы:

9.9. Klauder J. R., Anderson P. W., Phys. Rev., **125**, 912 (1962),

в которой рассматриваются физически родственные и математически эквивалентные задачи, касающиеся спиновой диффузии. Фундаментальный процесс Орнштейна — Уленбека обсуждается в оригинальных статьях, вошедших в сборник [3.2].

Распределение интенсивности для случая сигнала, на который накладывается шум, дано Райсом [3.3]. Распределение отсчетов, вытекающее из этого диагонального веса, получено Глаубером [9.3]. Экспериментальная проверка этих распределений была осуществлена Фридом и Хаусом; ее результаты приведены в работе:

9.10. Magill P. J., Soni R. P., Phys. Rev. Lett., **16**, 911 (1966).

Литературу по более реальным лазерным моделям можно найти в ссылках, приведенных в [7.15] и в работах:

9.11. L a x M., Phys. Rev., **145**, 110 (1966).

9.12. H a k e n H., Zs. f. Phys., **190**, 327 (1966).

9.13. S a u e r m a n H., Zs. f. Phys., **188**, 480 (1965); **189**, 312 (1966).

9.14. S c u l l y M., L a m b W. E., Phys. Rev. Lett., **16**, 853 (1966).

9.15. S c h w a b l F., T h i r r i n g W., Ergeb. Exakt. Naturw., **36**, 219 (1964).

Более полное обсуждение содержится в [7.2] и в других работах.

Наше изложение модели связанных систем для лазера основывается главным образом на работе Гордона:

9.16. G o r d o n J. P., Phys. Rev., **161**, 367 (1967).

Авторы благодарны дру Гордону за разрешение использовать его материалы до их опубликования.

ГЛАВА 10

Прямые наблюдения совпадений отсчетов для различных задержек во времени были проведены Арекки и др.:

- 10.1. Arecchi F. T., Gatti E., Sona A., Phys. Lett., **20**, 27 (1966);

при этом применялись устройства типа описанных в работе:

- 10.2. Martienssen W., Spiller E., Am. Journ. Phys., **32**, 919 (1964);

Арекки [2.4] усовершенствовал эти приборы, приспособив их для работы с подходящими для этих экспериментов источниками. Аналогичные совпадения отсчетов для обычных тепловых источников наблюдались Морганом и Манделем:

- 10.3. Morgan B. L., Mandel L., Phys. Rev. Lett., **16**, 1012 (1966).

Пространственные корреляции в поле двух независимых лазеров наблюдались в работе:

- 10.4. Magyar G., Mandel L., Nature, **198**, 255 (1963);

их квантовомеханический анализ выполнен Манделем:

- 10.5. Mandel L., Phys. Rev., **134**, A10 (1964).

Методика исследования корреляций интенсивности, очень похожая на рассматриваемую в данной книге, обсуждается в работе:

- 10.6. Goldberger M. L., Lewis H. W., Watson K. M., Phys. Rev., **132**, 2764 (1963); **142**, 25 (1966).

Указанные авторы применили также эти методы при рассмотрении рассеяния и информации относительно рассеивателя, которая при этом может быть получена.

Дополнение ¹⁾

Приводимый ниже материал представляет собой прежде всего дополнительный список литературы ²⁾ по статистической оптике, охватывающий работы, опубликованные в период с 1966 по первую половину 1969 г. Весьма полная библиография работ, появившихся до 1966 г., содержится в обзоре Вольфа и Манделя [УФН, 87, № 3, 491 (1965)]; следует подчеркнуть, что библиография, приведенная ниже, не претендует на такую полноту. Вместе с тем была сделана попытка отразить новые направления исследований, обратить внимание на работы, не отмеченные в основном тексте книги. Краткие комментарии, которыми снабжена дополнительная библиография, преследуют те же цели.

Тематически дополнительная библиография расположена в том же порядке, что и основной материал книги, и разбита (разумеется, с определенной долей условности) на следующие разделы, примерно отвечающие рубрики основного текста:

- I. Теория когерентности.
- II. Статистика фотоотсчетов; интерферометрия интенсивности.
- III. Статистические явления в нелинейной оптике.
- IV. Квантовая теория оптических полей; динамика и статистика процессов излучения и эволюции поля.
- V. Прием и гетеродинирование оптических сигналов.
- VI. Флуктуации в лазерах.

¹⁾ Составлено редактором перевода и переводчиками. — *Прим. ред.*

²⁾ В составлении этого списка значительная помощь была оказана кафедрой научной информации МГУ.

Внутри каждого раздела работы имеют независимую нумерацию и расположены по темам; в ряде случаев близкие по тематике работы выделяются подзаголовком.

1 ТЕОРИЯ КОГЕРЕНТНОСТИ

В течение рассматриваемого периода появился еще ряд работ, посвященных общей теории когерентности. Значительное внимание уделялось влиянию частичной когерентности на работу интерферометров, дифракции частично когерентного света, голографии при некогерентном освещении. Литература по вопросу о распространении световых волн в статистически неоднородных средах весьма обширна, поэтому из-за недостатка места мы включили в список лишь монографии Татарского [44] и Иванова [45] и некоторые статьи, посвященные исследованию преобразования корреляционных функций в неоднородной среде. Обратившись к этим работам, читатель может получить более полное представление об указанной области.

Общие вопросы

1. Meadors J. G., Chang W. S. C., Journ. Opt. Soc. Amer., **56**, № 7, 865 (1966).
Properties of partially coherent light.
2. Mehta C. L., Journ. Opt. Soc. Amer., **58**, № 9, 1233 (1968).
New approach to the phase problem in optical coherence theory.
3. Nussenzeig H. M., Journ. Math. Phys., **8**, № 3, 561 (1967).
Phase problem in coherence theory.
4. Mandel L., Journ. Opt. Soc. Amer., **57**, № 5, 613 (1967).
Complex representation of optical fields in coherence theory.
5. Boileau E., Picinbono B., Compt. Rend., **265**, № 25, B1408 (1967).
Remarques sur l'étude des propriétés statistiques de la lumière cohérente.

6. Boileau E., Picinbono B., Journ. Opt. Soc. Amer., **58**, № 9, 1238 (1968).
Coherence properties of optical fields. II. Study of experiments described by fourth-order coherence functions.
7. Martinssen W., Spiller E., Phys. Rev. Lett., **16**, № 12, 531 (1966).
Intensity fluctuations in light beams with several degrees of freedom.
8. Perina J., Mista L., Czechosl. Journ. Phys., **B18**, № 6, 697 (1969).
Normal and antinormal correlations for the superposition of thermal and coherent fields.
9. Karczewski B., Zardecki A., Phys. Lett., **A28**, № 9, 627 (1969).
On the temperature functions of optical fields.
10. Kano Y., Journ. Phys. Soc. Japan, **24**, № 4, 869 (1968).
An application of Green's function in the theory of optical coherence.
11. Zardecki A., Phys. Lett., **A24**, № 9, 468 (1967).
On the multipole coherence effects.
12. Picinbono B., Proc. Sympos. Mod. Optics, New York, 1967, p. 167.
Coherence properties of optical fields: weakly and strongly coherent fields.
13. Летохов В. С., ЖЭТФ, **50**, № 3, 765 (1966).
Об исследовании статистических свойств некогерентного света.
14. Arcschi F. T., Nuovo Cimento, Suppl., **4**, № 3, 756 (1966).
Proprieta statistiche della radiazione coerente.
15. Paul H., Ann. Phys., **16**, № 7—8, 403 (1965).
Kohärenz der Laserstrahlung in semiklassischer Näherung.
16. Dialetis D., Metha C. L., Nuovo Cimento, **B56**, № 1, 89 (1968).
Stationarity homogeneity and isotropy in the coherence theory of the electromagnetic fields.
17. Metha C. L., Journ. Math. Phys., **8**, № 9, 1798 (1967).
Degree of higher-order optical coherence.

18. J a k e m a n E., O l i v e r C. J., P i k e E. R., Journ. Phys. (Proc. Phys. Soc.), **A1**, № 4, 497 (1968).
Measurements of the factorization properties of higher-order optical correlation functions.
19. C o n w a y J., Phys. Rev., **156**, № 5, 1365 (1967).
Fluctuations of beam intensity in space and time.
20. P i c i n b o n o B., B o i l e a u E., Journ. Opt. Soc. Amer., **58**, № 6, 784 (1968).
Higher-order coherence functions of optical fields and fluctuations.
21. D i a l e t i s D., W o l f E., Nuovo Cimento, **B47**, № 1, 113 (1967).
The phase retrieval problem of coherence theory as a stability problem.
22. C h a n d r a N., V a c h a s p a t i, Ind. Journ. Pure Appl. Phys., **4**, № 7, 257 (1966).
Degree of coherence of an extended source.
23. S u r d i n M., B r a f f o r t P., T a r o n i A., Nature, **210**, № 5034, 405 (1966).
Blackbody radiation law deduced from stochastic electrodynamics.
24. D a v i e s R. D., P o n s o n b y J. E. B., P o i n t o n L., J a g e r G. D., Nature, **222**, № 5197, 933 (1969).
The Jodrell Bank Radio Frequency Digital autocorrelation spectrometer.

Дифракция и интерференция в поле частично когерентного света

25. S h o r e R. A., Journ. Opt. Soc. Amer., **58**, № 11, 1484 (1968).
Effect of the phase term in the mutual coherence function on aperture diffraction patterns.
26. S h o r e R., T h o m p s o n B. J., W h i t n e y R. E., Journ. Opt. Soc. Amer., **56**, № 6, 733 (1966).
Diffraction by apertures illuminated with partially coherent light.
27. T h o m p s o n B. J., Journ. Opt. Soc. Amer., **56**, № 9, 1157 (1966).
Multiple-beam interference with partially coherent light.

28. Mielenz K. D., Journ. Opt. Soc. Amer., **57**, № 1, 66 (1967).
Spectroscope slit images in partially coherent light.
29. Grimes D. N., Thompson B. J., Journ. Opt. Soc. Amer., **57**, № 11, 1330 (1967).
Two-point resolution with partially coherent light.
30. McCutchen C. W., Journ. Opt. Soc. Amer., **56**, № 6, 727 (1966).
Generalized source and the van Cittert—Zernike theorem: a study of the spatial coherence required for interferometry.
31. Konjaev K. V., Phys. Lett., **A24**, № 9, 490 (1967).
Interference method of two-dimensional Fourier transform with spatially incoherent illumination.
32. Burgess T. J., Appl. Optics, **5**, № 7, 1239 (1966).
Effect of high-velocity mirror translation on optical coherence in laser interferometers.
33. Boileau E., Piconbono B., Compt. Rend., **265**, № 25, B1408 (1967).
Remarques sur l'étude des propriétés statistiques de la lumière cohérente.
34. Gouyet J. F., Compt. Rend., **AB262**, № 3, B189 (1966).
Autocorrelation d'une onde électromagnétique stationnaire.
35. Haig N. D., Sillitto R. M., Phys. Lett., **A28**, № 6, 464 (1968).
An interference experiment with two independent thermal light sources.
36. Françon M., Mallick S., Compt. Rend., **AB262**, № 7, B483 (1966).
Coherence longitudinale de deux points éclairés par une source. Applications en interférométrie.

Когерентность в голографии

37. Bertolotti M., Gori F., Guattari G., Journ. Opt. Soc. Amer., **57**, № 12, 1526 (1967).
Coherence requirements in holography.
38. Mandel L., Journ. Opt. Soc. Amer., **55**, № 12, 1697 (1965).
Color imagery by wavefront reconstruction.

39. Mallick S., Appl. Optics, **6**, № 8, 1403 (1967).
Degree of coherence in the image of a quasi-monochromatic source.
40. Mandel L., Journ. Opt. Soc. Amer., **56**, № 11, 1636 (1966).
Wavefront reconstruction with light of finite coherence length.
41. Lefrancois G., Nguyen Ngoc Chau, Onde electr., **48**, № 492, 245 (1968).
Influence de la coherence de la source de lumière dans l'holographie.
42. Huhn D., Spiller E., Wagner U., Phys. Lett., **A27**, № 1, 51 (1968).
Improved holographic correlation measurements by use of an additional spatial filter.
43. Lurie M., Journ. Opt. Soc. Amer., **58**, № 5, 614 (1968).
Fourier-transform holograms with partially coherent light; holographic measurement of spatial coherence

Изменение когерентности при рассеянии

44. Татарский В. И., Распространение волн в турбулентной атмосфере, М., 1967.
45. Иванов А. П., Оптика рассеивающих сред, Минск, 1969.
46. McLennan J. A., Helv. Phys. Acta, **40**, № 6, 645 (1967).
Space and time dependent fluctuations in a continuous medium.
47. Ho T. L., Beran M. J., Journ. Opt. Soc. Amer., **58**, № 10, 1335 (1968).
Propagation of the fourth-order coherence function in a random medium.
48. Сотский Б. А., Оптика и спектроскопия, **24**, № 6, 979 (1968).
О рассеянии света с заданной функцией когерентности.
49. Suzuki T., Hioki R., Japan Journ. Appl. Phys., **5**, № 8, 807 (1966).
Coherence of light from random medium.

50. Streifer W., Journ. Opt. Soc. Amer., **56**, № 11, 1481 (1966).
Spatial coherence in periodic systems.
51. Fried D. L., Journ. Opt. Soc. Amer., **58**, № 7, 961 (1968).
Diffusion analysis for the propagation of mutual coherence.
52. Фейзулин З. И., Кравцов Ю. А., Изв. ВУЗ, Радиофизика, **10**, № 1, 68 (1967).
К вопросу о расширении лазерного пучка в турбулентной среде.
53. Кон А. И., Диссертация на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, Институт физики атмосферы АН СССР, М., 1969.
Влияние геометрических факторов на статистические характеристики волн, распространяющихся в турбулентной атмосфере.
54. Serpaveale M., Crosignani B., Di Porto P., Appl. Optics, **7**, № 6, 1121 (1968).
Influence of laboratory generated turbulence on phase fluctuations of a laser beam.

II. СТАТИСТИКА ФОТООТСЧЕТОВ; ИНТЕРФЕРОМЕТРИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ

В основном тексте книги рассмотрены лишь теоретические и экспериментальные основы этой области статистической оптики. Последние годы характеризуются здесь рядом важных методических достижений (можно отметить измерения нестационарных законов распределения фотоотсчетов, см. например [1]), детальным исследованием новых объектов (в частности, модулированных и многомодовых пучков, см. [18—23]) и дальнейшим развитием теории фотоотсчетов.

Однако наиболее интересными следует признать новые направления исследования, возникшие в последние годы. Среди них отметим работы по статистике фотоотсчетов при многоквантовом фотоэффекте (см. например [16] и работы, цитированные в разделе III настоящего дополнения). Использование нелинейных преобразований излучения позволяет предложить ряд новых схем интер-

ферометров интенсивности, пригодных, в частности, для исследования широкополосных источников. Некоторые варианты таких схем обсуждаются в работе [17], где рассмотрена схема измерителя автокорреляционной функции интенсивности, в которой используется удвоение частоты света.

Весьма важными представляются исследования, в которых методы фотостатистики используются в опытах по рассеянию света. Здесь наряду с работами [33—36], где высказаны интересные предложения на этот счет, следует отметить экспериментальную работу Ареки и др. [37], в которой исследовалось рассеяние света на специально введенных дискретных рассеивателях в воде, работы Пайка, Камминса (см. [6]), и работу [38], в которой измерения автокорреляционной функции интенсивности $G^{(2)}(t) = \langle I(t)I(t + \tau) \rangle / \langle I \rangle^2$ использовались для определения ширины линии концентрационного рассеяния вблизи критической точки. Сравнение этой методики с методом гетеродинамирования показало, что измерения автокорреляционной функции интенсивности позволяют получить более точные данные о ширине линии.

Значительный интерес в самое последнее время вызывает использование методов интерферометрии интенсивности для определения формы и длительности сверхкоротких световых импульсов. Речь идет о технике так называемых пикосекундных импульсов (длительностью 10^{-12} сек), непосредственное исследование которых с помощью фотодетекторов и электронных схем крайне затруднительно. В работах Армстронга [40] и Джордмэйна и др. [41] на основе наглядных соображений предлагается определять длительности таких импульсов путем измерения корреляционной функции интенсивности $G^{(2)}(\tau)$ (для этого можно использовать различные нелинейные оптические явления, в частности генерацию второй гармоники и двухфотонную люминесценцию).

К сожалению, современное состояние техники пикосекундных импульсов таково, что в большинстве случаев речь идет не столько об измерении параметров импульсов известного вида, сколько о выяснении вопроса, существуют ли пикосекундные импульсы в излучении данного многомодового лазера. На языке статистической

оптики речь идет, таким образом, о задаче определения статистики огибающей на основе измерения одной (или некоторого набора) корреляционных функций интенсивности

$$G^{(n)}(\tau_1, \tau_2 \dots \tau_{n-1}) = \frac{\langle I(t) I(t + \tau_1) I(t + \tau_2) \dots I(t + \tau_{n-1}) \rangle}{\langle I(t) \rangle^n}.$$

Именно такая постановка вопроса наиболее характерна для современных работ этого направления. Теоретические исследования, выполненные Вебером [45], Клаудером и др. [46], Харрачем [53] и Кузнецовой [47], позволяют оценить необходимые требования, предъявляемые к точности измерения функции $G^{(2)}(\tau)$ в том случае, когда такие измерения используются для выявления пикосекундных импульсов. Гораздо более полные сведения об огибающей могут быть получены из измерений функции $G^{(3)}(\tau_1, \tau_2)$ (см. [50, 51]).

Общие вопросы

1. Arecchi F. T., Lectures at the Intern. School of Physics «Enrico Fermi», XLII Course Quantum Optics, Varenna, Italy, 1967.
Photocount distributions and field statistics.
2. Haus H. N., Lectures at the Intern. School of Physics «Enrico Fermi», XLII Course Quantum Optics, Varenna, Italy, 1967.
The measurement of $G^{(2)}$ and its signal to noise ratio.
3. Arecchi F. T., Berne A., Sona A., Burlamacchi P., IEEE Journ. Quant. Electron., 2, 341 (1966).
Photocount distributions and field statistics.
4. Morawitz H., Journ. Phys., 195, № 1, 20 (1966).
Photon correlations in a multiple coherent and overlapping chaotic radiation field.
5. Scarf D. B., Phys. Rev. Lett., 17, № 12, 663 (1966).
Measurement of photon time-of-arrival distribution in partially coherent light.
6. Pike E. R., Inaugural Conference of the European Physical Society, Florence, April, 1969.
Photon Statistics.

7. K o r e n m a n V., Phys. Rev., **154**, № 5, 1233 (1967).
Dynamical computation of photon correlations and counting statistics.
8. B é d a r d G., Phys. Lett., **A24**, № 11, 613 (1967).
Photon counting statistics of laser light.
9. B e d a r d G., Phys. Rev., **151**, № 4, 1038 (1966).
Photon counting statistics of Gaussian light.
10. C l a u s e n H. D., Acta Phys. Austriaca, **25**, № 3, 266 (1967).
Zur Photonstatistik der Laserstrahlung.
11. A l k e m a d e C. Th. J., B o l w i j n P. T., V a n d e r V e e r J. H. C., Phys. Lett., **22**, № 1, 70 (1966).
Single-beam measurement of Bose-Einstein fluctuations in a natural Gaussian radiation field.
12. M a r t i e n s s e n W., S p i l l e r E., Phys. Rev., **145**, № 1, 285 (1966).
Fluctuation measurements in mixed light fields.
13. Г е р ц е н ш т е й н М. Е., ДАН СССР, **166**, 317 (1966).
К вопросу о флуктуациях фототока.
14. С к а ч к о в Ю. Ф., ЖЭТФ, **52**, № 3, 637 (1967).
Исследование временной корреляции фотонов, излучаемых возбужденными атомами аргона.
15. N u s s b a u m G. H., P i r k i n F. M., Phys. Rev. Lett., **19**, № 19, 1089 (1967).
Correlation of photons in cascade and the coherence time of the 6^3P_1 state of mercury.
16. T e i c h M. C., D i a m e n t P., Journ. Appl. Phys., **40**, № 2, 625 (1969).
Two-photon counting statistics for laser and chaotic radiation.
17. А х м а н о в С. А., Ч и р к и н А. С., Т у н к и н В. Г., Journ. Optoelectron, **1**, 196 (1968).
Transformation of photo — counting statistics by non-linear light conversion.

Статистика фотоотсчетов для модулированных и многомодовых световых пучков

18. M a g i l l P. J., S o n i R. P., Phys. Rev. Lett., **16**, № 20, 911 (1966).
Photoelectric counting distributions for a noise-modulated system.

19. Fray S., Johnson F. A., Jones R., McLean T. P., Pike E. R., Phys. Rev., **153**, № 2, 357 (1967).
Photon-counting distributions of modulated laser beams.
20. Magill P. J., Journ. Appl. Phys., **37**, № 5, 2198 (1966).
Influence of small signal modulation on photoelectron counting of He — Ne laser intensity fluctuations.
21. Pearl P., Troup G. J., Phys. Lett., **A27**, № 8, 560 (1968).
Modulated laser beam photon counting distributions.
22. Bertolotti M., Crosignani B., Di Porto P., Sette D., Phys. Rev., **150**, № 4, 1054 (1966).
Coherence and statistical properties of two-mode laser beam.
23. Bertolotti M., Crosignani B., Di Porto P., Sette D., Zs. Phys., **205**, 129 (1967).
Photostatistics of an N -mode laser field.

Методика

24. Johnson F. A., Jones R., McLean T. P., Pike E. R., Phys. Rev. Lett., **16**, № 13, 589 (1966).
Dead-time corrections to photon counting distributions.
25. Chang R. E., Korenman V., Detenbeck R. W., Phys. Lett., **A26**, № 9, 417 (1968).
Photon statistics for threshold laser light with finite counting time.
26. Davidson F., Mandel L., Journ. Appl. Phys., **39**, № 1, 62 (1968).
Photoelectric correlation measurements with time-to-amplitude converters.
27. Goetz K., Unangst D., Phys. Lett., **23**, № 11, 667 (1966).
Rotierende Mattscheiben zur Änderung der Kohärenz von Laserlicht.
28. Bedard G., Proc. Phys. Soc., **90**, № 1, 131 (1967).
Dead-time corrections to the statistical distribution of photoelectrons.

Интерферометры интенсивности, корреляционная спектроскопия

29. Goldberger M. L., Lewis H. W., Watson K. M., Phys. Rev., **142**, № 1, 25 (1966).
Intensity-correlation spectroscopy.
30. Phillips D. T., Kleiman H., Davis S. P., Phys. Rev., **153**, № 1, 113 (1967).
Intensity-correlation linewidth measurement.
31. Артемьев В. В., Оптика и спектроскопия, **25**, № 5, 635 (1968).
Корреляционная спектроскопия оптических излучений.
32. Gamo H., Journ. Opt. Soc. Amer., **56**, № 4, 441 (1966).
Stellar intensity interferometer. I. Signal-to-noise ratio for the high-intensity radiation.

Методы фотостатистики и интерферометрии интенсивности при исследовании рассеяния света

33. Bertolotti M., Crosignani B., Di Porto P., Sette D., Phys. Rev., **157**, 146 (1967).
Photostatistics of light scattered by a liquid.
34. Bertolotti M., De Pasquale D., Sette D., Nuovo Cimento, **B52**, № 2, 560 (1967).
Effects of second-sound excitations on the photostatistics of a laser beam.
35. Gori F., Sette D., Phys. Rev. Lett., **17**, № 7, 361 (1966).
Spatial coherence of light scattered from liquids.
36. Зельдович Б. Я., Клышко Д. Н., Письма ЖЭТФ, **9**, 69 (1969).
Статистика поля при параметрической люминесценции.
37. Arecchi F. T., Giglio M., Tartari V., Phys. Rev., **163**, 186 (1967).
Scattering of coherent light by a statistical medium.
38. Chen S. H., Polonsky - Ostrovsky N., Journ. Phys. Soc. Japan, Suppl., **26**, 179 (1969).
Intensity correlation measurements of light scattered from a two-component fluid near the critical point

39. Miller S. A., Rev. Sci. Instr., **39**, № 12, 1923 (1968).
Inexpensive photon counting system for Raman spectroscopy.

Измерение длительности сверхкоротких световых импульсов методами интерферометрии интенсивности

40. Armstrong J. A., Appl. Phys. Lett., **10**, 16 (1967).
Measurements of picosecond laser pulse widths.
41. Giordmaine J. A., Rentzepis P. M., Shapiro S. L., Wecht K. W., Appl. Phys. Lett., **11**, 216 (1967).
Two photon excitation of fluorescence by picosecond light pulses.
42. Rentzepis P. M., Duguay M. A., Appl. Phys. Lett., **11**, 218 (1967).
Picosecond light pulse display using two different optical frequencies.
43. Duguay M. A., Shapiro S. L., Rentzepis P. M., Phys. Rev. Lett., **19**, 1014 (1967).
Spontaneous appearance of picosecond pulses in ruby and Nd: glass lasers.
44. Shapiro S. L., Duguay M. A., Kreuzer L. B., Appl. Phys. Lett., **12**, 36 (1968).
Picosecond substructure of laser spikes.
45. Weber H. P., Phys. Lett., **27A**, 321 (1968).
Comments on the pulse width measurement with two-photon excitation of fluorescence.
46. Klauder J. R., Duguay M. A., Giordmaine J. A., Shapiro S. L., Appl. Phys. Lett., **13**, 174 (1968).
Correlation effects in the display of picosecond pulses by two-photon techniques.
47. Кузнецова Т. И., ЖЭТФ, **55**, 2453 (1968).
К проблеме регистрации сверхкоротких световых импульсов.
48. Кузнецова Т. И., Препринт Физического института АН СССР, № 47 (1968).
Об особенностях некоторых методов измерения длительности сверхкоротких импульсов.

49. Weber H. P., Dändliker R., Phys. Lett., **28A**, 77 (1968).
Method for measurement the shape asymmetry of picosecond light pulses.
50. Weber H. P., Dändliker R., IEEE Journ. Quant. Electr., **4**, № 12, 1009 (1968).
Intensity interferometry by two photon excitation of fluorescence.
51. Blount E. J., Klauder J. R., Journ. Appl. Phys., **40**, 2874 (1969).
Recovery of laser intensity from correlation data.
52. Klauder J. R., Appl. Phys. Lett., **14**, 147 (1969)
Spectral criterion for mode locked signals.
53. Harrach R. J., Appl. Phys. Lett., **14**, 148 (1969).
Determination of ultrashort pulse widths by two photon fluorescence patterns.

III. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКЕ

В статистической нелинейной оптике можно выделить два круга задач.

1. Задачи, связанные с выяснением влияния пространственной и временной когерентности излучения на протекание нелинейных оптических явлений («статистика излучения»).

2. Задачи, связанные с изучением нелинейных оптических эффектов в статистически неоднородных средах, с исследованием влияния собственных квантовых флуктуаций, возникающих в среде, на протекание нелинейных оптических явлений («статистика среды»).

Эффекты, обусловленные «статистикой излучения», впервые наблюдались в опытах по генерации оптических гармоник, проводившихся с твердотельными лазерами еще в 1963—1964 гг. [10, 11]. Речь шла о неожиданно сильных, так называемых избыточных флуктуациях мощности второй гармоники, генерируемой многомодовым рубиновым лазером. В работах [10—12] эти флуктуации нашли удовлетворительное объяснение на основе довольно простой статистической модели — многомодового излучения со случайным (в интервале $0-2\pi$) разбросом фаз в эквидистантных модах. Вместе с тем,

в последующих работах было показано, что в ряде случаев надо учитывать дополнительные факторы — флуктуации числа мод, флуктуации расходимости и т. п.

Значительным стимулом для дальнейших исследований проблем, связанных со «статистикой излучения», послужили успешные опыты по генерации гармоник и смещению частот с использованием нелазерных источников света [13, 14]. Здесь речь идет по существу об использовании в нелинейной оптике источников гауссового шума, обладающих к тому же сравнительно небольшими масштабами временной и пространственной корреляции. Вслед за указанными экспериментами появились теоретические работы, в которых исследовались влияние временной и пространственной когерентности основного излучения на протекание нелинейных оптических процессов [15—18], фотостатистика оптических гармоник, получаемых от лазерных и нелазерных источников [19] и т. п. При изучении статистических эффектов в нелинейной оптике оказалась полезной пространственно-временная аналогия [20], позволяющая дать наглядную интерпретацию влияния пространственной и временной некогерентности излучения на протекание того или иного нелинейного оптического явления.

Отметим, что некоторые общие вопросы теории нелинейного взаимодействия случайно модулированных волн применительно к волнам в плазме рассматривались Цытовичем [8].

Наконец, в самое последнее время в связи с техникой синхронизации мод возродился интерес к изучению умножения и смещения частот в поле многомодовых генераторов, обладающих статистическим разбросом фаз в модах [21]. Частично возникающие здесь проблемы связаны с разработкой интерферометров интенсивности, предназначенных для регистрации пикосекундных импульсов (см. также раздел II настоящего дополнения). Практические схемы таких интерферометров служат наглядной иллюстрацией эффективности методов нелинейной оптики при измерении высших корреляционных функций оптических полей. Подобные измерения представляют значительный интерес для статистической оптики вообще.

Сходные статистические задачи возникают и при исследовании многофотонного поглощения. Высокие степени нелинейности, которые здесь удается использовать (напомним, что в настоящее время зарегистрирована шести- и семифотонная ионизация газов), позволяют ставить вопрос об измерении корреляций весьма высоких порядков. Представление о современном состоянии этой области статистической нелинейной оптики можно получить из работ [23—31]; следует отметить, правда, что здесь дело пока не вышло за рамки теоретического рассмотрения вопроса.

Среди работ, в которых исследуются эффекты, обусловленные «статистикой среды», следует отметить работы [32—34], где изучались генерация гармоник и параметрическое усиление в слабо неоднородных и полидоменных кристаллах, генерация оптических гармоник в кристаллических порошках [35, 36], вынужденное комбинационное рассеяние в порошках [37]. Однако в рассматриваемой области наиболее интересными, несомненно, следует признать работы по так называемому нелинейному рассеянию и работы, посвященные квантовым флуктуациям в параметрических процессах.

Под нелинейным рассеянием здесь понимается некогерентное рассеяние, при котором интенсивность рассеянного света нелинейно зависит от интенсивности рассеиваемого излучения¹⁾.

Впервые нелинейное рассеяние было обнаружено Терхьюном и др. [38] (теория явления развита в работах [39—41]). Речь идет о возникновении рассеяния на удвоенной частоте (и близких к ней частотах) падающего излучения в средах, в которых когерентная генерация второй гармоники невозможна (в средах с центром инверсии); последнее открывает интересные перспективы исследования нелинейных свойств отдельных молекул (нелинейное молекулярное рассеяние).

Другим примером нелинейного рассеяния, связанного уже с макроскопическими неоднородностями, является

¹⁾ Нелинейная (экспоненциальная) зависимость имеет место, как известно, и при вынужденном рассеянии; однако в последнем случае процесс является существенно когерентным, что связано с сильным воздействием рассеиваемого излучения на среду.

нелинейное рассеяние на неоднородностях, возникающих вблизи критической точки. Такое рассеяние (на второй гармонике падающего излучения) было исследовано недавно Фрейндом [42] в кристаллах NH_4Cl вблизи точки фазового перехода второго рода. Исследование указанного рассеяния позволяет получить новую информацию о явлениях вблизи критической точки; интересно, что обычная методика линейного рассеяния оказывается здесь неэффективной (линейные оптические свойства NH_4Cl практически не меняются вблизи рассматриваемой критической точки). В работе [43] детально исследована угловая структура такого рассеяния.

Изучение статистических явлений в параметрических процессах в значительной мере стимулируется последними успехами в создании эффективных параметрических световых генераторов непрерывного действия. Интересно, что лишь в 1967 г., через два года после запуска параметрических генераторов света, появились работы, в которых были зарегистрированы собственные шумы параметрических устройств. Речь идет о специфическом спонтанном рассеянии в прозрачной среде, которое принято называть «параметрической люминесценцией»¹⁾. Среди работ по параметрической люминесценции необходимо отметить теоретические исследования Клышко [44], Клеймана [49], Джалоренци и Танга [48]; экспериментальные данные об эффекте содержатся в работах [45—47]. В работах Хакена и др. [52—54] рассмотрены статистические явления в оптическом параметрическом генераторе, работающем в установившемся режиме; здесь вычислены, в частности, ширина спектральной линии и уровень амплитудных флуктуаций.

Аналогичные вопросы возникают, разумеется, и при рассмотрении других аналогичных процессов — вынужденного комбинационного рассеяния, вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна и т. п. Источники флуктуаций в этих процессах детально исследованы

¹⁾ Следует отметить, что использование термина «люминесценция» здесь не совсем удачно; фактически речь идет не о люминесценции, а о процессе, аналогичном спонтанному рассеянию (комбинационному или рассеянию Мандельштама — Бриллюэна).

уже достаточно давно. Исчерпывающую информацию о них дают многочисленные работы, посвященные спонтанным вариантам указанных видов рассеяния.

Следует отметить, однако, что в обсуждаемом направлении сделано пока сравнительно мало; большинство работ, в которых рассматриваются статистические эффекты при вынужденном рассеянии, не выходит, как правило, за рамки вычисления ширины линии в режиме заданного поля накачки. Ширина линии для одномодовой накачки вычислена Тангом [55], а для накачки общего вида — Дьяковым [57]. Лишь недавно Дьяков [56] оценил ширину линии вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна в существенно нелинейном режиме.

В заключение упомянем работы, в которых исследуются статистические явления при самофокусировке [58, 59]. По мнению Шимоды [59], в некоторых астрофизических явлениях определенную роль может играть самофокусировка белого света в межзвездной плазме.

Общие вопросы

1. Shen Y. R., Phys. Rev., **155**, № 3, 921 (1967).
Quantum statistics of nonlinear optics.
2. Prakash H., Chandra N., Vachaspati, Nuovo Cimento, **B57**, № 1, 161 (1968).
Coherence properties of optical fields in a nonlinear dielectric.
3. Teich M. C., Wolga G. L., Phys. Rev. Lett., **16**, № 14, 625 (1966).
Multiple-photon-processes and higher order correlation functions.
4. Lambropoulos P., Phys. Rev., **156**, № 2, 286 (1967).
Quantum statistics of a two-photon quantum amplifier.
5. Beran M. J., DeVelis J. B., Journ. Opt. Soc. Amer., **57**, № 2, 186 (1967).
Propagation of the coherence function on nonlinear dielectrics.
6. Beran M., DeVelis J., Parrent G., Jr., Phys. Rev., **154**, № 5, 1224 (1967).
Measurement of fourth-order coherence functions.

7. Гладун А. Д., Барашев П. П., УФН, **98**, 493 (1969).
Внешний многоквантовый фотоэффект.
8. Цытович В. Н., Нелинейные эффекты в плазме, М., 1967.
9. Ахманов С. А., Чиркин А. С., Изв. ВУЗ, Радиофизика, **13**, № 6 (1970).
Статистические явления в нелинейной оптике.

*Статистические явления при умножении
и сложении частот*

10. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Хохлов Р. В., Чунаев О. Н., ЖЭТФ, **45**, 1336 (1963).
О длине когерентного взаимодействия световых волн в нелинейной среде.
11. Dusing J., Bloembergen N., Phys. Rev., **133**, A1493 (1964).
Statistical fluctuations in nonlinear optical processes.
12. Ахманов С. А., Ковригин А. И., Чиркин А. С., Чунаев О. Н., ЖЭТФ, **49**, 829 (1966).
Статистические эффекты при генерации оптических гармоник.
13. Smith A., Braslau N., Journ. Appl. Phys., **34**, 2105 (1963).
Observation of an optical difference frequency.
14. McMahon D. N., Journ. Appl. Phys., **37**, 4832 (1966).
Quantitative nonlinear sum-frequency experiments using incoherent light.
15. Ахманов С. А., Чиркин А. С., Радиотехника и электроника, **11**, 1915 (1966)
Об удвоении частоты спектральной линии конечной ширины при волновых взаимодействиях в нелинейной среде.
16. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Чиркин А. С., Изв. ВУЗ, Радиофизика, **10**, № 12, 1639 (1967).
Об апертурных ограничениях эффективности оптических удвоителей частоты.

17. Сотский Б. А., Докл. АН БССР, 12, № 10, 888 (1968).
О влиянии пространственной когерентности первичного излучения на интенсивность гармоника.
18. Mathieu E., Weber H. P., Zs. angew. math. Phys., 2, 19, 980 (1968).
Der Einfluss der Linienbreite beim optischen Mischen.
19. Гункин В. Г., Чиркин А. С., ЖЭТФ, 58, № 1, 191 (1970).
Статистика фотоотчетов нелинейно преобразованного светового излучения.
20. Ахманов С. А., Сухоруков А. П., Чиркин А. С., ЖЭТФ, 55, № 10, 1430 (1968).
Нестационарные явления и пространственно-временная аналогия в нелинейной оптике.
21. Grutter A. A., Weber H. P., Dändliker R. Phys. Rev., 185, № 2, 629 (1969).
Imperfectly mode-locked laser emission and its effects on nonlinear optics.
22. Zuckerman J. L., De Velis J. B., Journ. Opt. Soc. Amer., 58, № 2, 175 (1968).
Classical coherence formulation of second-harmonic generation in the optical parametric amplifier.

*Влияние когерентности излучения
на многофотонное поглощение*

23. Brunner W., Paul H., Richter G., Ann. Phys., 16, № 7—8, 343 (1965).
Quantenmechanische Kohärenz bei mehrphotonen Prozessen.
24. Lambropoulos P., Kikuchi C., Osborn R. K., Phys. Rev., 144, № 4, 1081 (1966).
Coherence and two-photon absorption.
25. Meadors J. G., IEEE Journ. Quant. Electron., 2, № 9, 638 (1966).
Coherence effects in multiphoton absorption processes.
26. Menegozzi L., Nuovo Cimento, Suppl., 4, № 1, 15 (1966).
Coherence properties of two-photon systems.
27. Lambropoulos P., Phys. Rev., 168, 1418 (1968).
Field-correlation effects in two-photon processes.

28. Mollow B. R., Phys. Rev., **175**, № 5, 1555 (1968).
Two-photon absorption and field correlation functions.
29. Chandra N., Vachaspati, Ind. Journ. Pure Appl. Phys., **6**, № 3, 111 (1968).
Effect of coherence on three-photon absorption.
30. Carusotto S., Fornaca G., Polacco E., Phys. Rev., **165**, № 5, 1391 (1968).
Multiphoton absorption and coherence.
31. Gardner J. W., Internat. Journ. Electron., **21**, № 5, 479 (1966).
The role of photon statistics in laser sparks.

Нелинейные оптические эффекты в неоднородных средах

32. Беспалов В. И., Изв. ВУЗ, Радиофизика, **9**, 1117 (1966).
Удвоение частоты света в нелинейной среде со случайными неоднородностями.
33. Беспалов В. И., Изв. ВУЗ, Радиофизика, **10**, 74 (1967).
Параметрическое усиление света в нелинейной среде со случайными неоднородностями.
34. Чиркин А. С., в сб. «Нелинейная оптика», М., 1968.
Удвоение частоты в полидоменных кристаллах.
35. Kurtz S. K., Perry T. T., Journ. Appl. Phys., **39**, 3798 (1968).
A powder technique for the evaluation of nonlinear optical materials.
36. Филимонов А. А., Суворов В. С., Рез И. С., ЖЭТФ, **56**, 1519 (1969).
Исследование генерации второй гармоники излучения ОКГ в мелкодисперсных кристаллических средах.
37. Сушинский М. М., Спектры комбинационного рассеяния молекул и кристаллов, М., 1969.
38. Terhune R., Maker P., Savage C., Phys. Rev. Lett., **14**, 681 (1965).
Measurements of nonlinear light scattering.

39. Kielich S., IEEE Journ. Quant. Electron., **4**, 744 (1968).
Molecular interactions in optically induced nonlinearities.
40. Ахманов С. А., Клышко Д. Н., Письма ЖЭТФ, **2**, 15 (1965)..
Трехфотонное молекулярное рассеяние света.
41. Стрижевский В. Л., Клименко В. М., ЖЭТФ, **53**, 244 (1967).
Трехфотонное рассеяние света в изотропной среде.
42. Friend I., Phys. Rev. Lett., **19**, 1288 (1967).
Critical harmonic scattering in NH_4Cl .
43. Friend I., Phys. Rev. Lett., **21**, 1404 (1968).
Nonlinear diffraction.

Статистические явления в параметрических процессах

44. Клышко Д. Н., ЖЭТФ, **55**, 1006 (1968).
Рассеяние света в среде с нелинейной поляризуемостью.
45. Ахманов С. А., Фадеев В. В., Хохлов Р. В., Чунаев О. Н., Письма ЖЭТФ, **6**, № 4, 575 (1967).
Квантовые шумы в параметрических усилителях света.
46. Byer R. L., Harris S. E., Phys. Rev., **168**, 1064 (1968).
Power and bandwidth of spontaneous parametric emission.
47. Weinberg D., Appl. Phys. Lett., **14**, 31 (1969).
Four-photon optical parametric noise in water.
48. Giallorenzi T. G., Tang C. L., Phys. Rev., **166**, 225 (1968).
Quantum theory of spontaneous parametric scattering of intense light.
49. Kleiman D. A., Phys. Rev., **174**, 1027 (1968).
Theory of optical parametric noise.
50. Зельдович Б. Я., Клышко Д. Н., Письма ЖЭТФ, **9**, 69 (1969).
Статистика поля при параметрической люминесценции.

51. Louisell W. H., Экспресс-инф. «Радиотехника СВЧ и квантовая радиотехника», № 8, 1 (1968).
Квантовый шум в оптических параметрических устройствах.
52. Graham R., Haken H., Zs. Phys., **210**, № 3, 176 (1968).
The quantum-fluctuations of the optical parametric oscillator. I.
53. Graham R., Zs. Phys., **210**, № 4, 319 (1968).
The quantum-fluctuations of the optical parametric oscillator. II.
54. Graham R., Zs. Phys., **211**, № 5, 469 (1968).
Photon statistics of the optical parametric oscillator including the threshold region. Transient and steady state solution.
55. Tang C., Journ. Appl. Phys., **37**, 2945 (1966).
Saturation and spectral characteristics of the Stokes emission in the stimulated Brillouin process.
56. Дьяков Ю. Е., Письма ЖЭТФ, **10**, 545 (1969).
О ширине линии вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна при насыщении.
57. Дьяков Ю. Е., Письма ЖЭТФ, **9**, 487 (1969).
Влияние немонохроматичности накачки на форму спектра вынужденного рассеяния Мандельштама — Бриллюэна.

Статистические явления при самофокусировке света

58. Беспалов В. И., Литвак А. Г., Таланов В. И., в сб. «Нелинейная оптика», М., 1969.
Самовоздействия световых волн в нелинейных средах.
59. Shimoda K., Journ. Phys. Soc. Japan, **24**, 1380 (1968).
Self-trapping of white light and the redshift by non-linear optical effects in a stellar plasma.

IV. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ОПТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ;
ДИНАМИКА И СТАТИСТИКА ПРОЦЕССОВ ИЗЛУЧЕНИЯ
И ЭВОЛЮЦИИ ПОЛЯ

Здесь приведены работы, освещающие теоретические вопросы квантовой оптики. Отметим прежде всего книгу

Луиселла [1], посвященную основам теории квантовых процессов в радиофизике и оптике. Сходные вопросы рассмотрены в книге Пантелла и Путхоффа [2]. В работах [3—17] обсуждаются различные вопросы, относящиеся к способам описания квантованного электромагнитного поля. В частности, в [14, 15] подробно рассмотрены различные типы распределений квазивероятностей и квантовых характеристических функций.

В работах [18—36] рассматриваются конкретные задачи динамики и статистики квантованного электромагнитного поля. Здесь следует отметить большой цикл работ Лэкса [29—34] под общим названием «Квантовый шум».

В работе Моллоу [36] аппарат квантовых характеристических функций применяется для решения наиболее общих задач квантовой механики с гамильтонианом, билинейным по осцилляторным переменным.

1. Louisell W. H., *Radiation and Noise in Quantum Electronics*, New York, 1965.
2. Pantell R., Puthoff P., *Fundamentals of Quantum Electronics*, New York, 1969. (Готовится русский перевод.)
3. Mandel L., *Proc. Sympos Mod. Optics*, New York, 1967, p. 143.
Some recent work on coherence properties of photon beams.
4. Miller M. M., *Phys. Lett.*, **A27**, № 3, 185 (1968).
Quantum and classical descriptions of two-mode laser field.
5. Mehta C. L., *Nuovo Cimento*, **B45**, № 2, 280 (1966).
Degree of coherence of an arbitrary order.
6. Barakat R., *Journ. Opt. Soc. Amer.*, **56**, № 6, 739 (1966).
Theorem in coherence theory.
7. Kano Y., *Journ. Math. Phys.*, **6**, № 12, 1913 (1965).
A new phase-space distribution functions in the statistical theory of the electromagnetic field.
8. Mandel L., *Phys. Rev.*, **152**, № 1, 438 (1966).
Antinormally order correlations and quantum counters.

9. Miller M. M., Mishkin E. A., Phys. Lett., **A24**, № 3, 188 (1967).
Anti-correlation effects in quantum optics.
10. Paul H., Fortschr. Phys., **14**, № 3, 141 (1966).
Beitrag zur Quantentheorie der optischen Kohärenz.
11. Rocca F., Journ. Phys., **28**, № 1, 113 (1967).
Coherence optique et convolution gauche un theoreme d'equivalence optique.
12. Mandel L., Wolf E., Phys. Rev., **149**, № 4, 1033 (1966).
Photon statistics and classical fields.
13. Glauber K. E., Proc. Sympos Mod. Optics, New York, 1967, p. 1.
Photon fields and classical fields.
14. Cahill K. E., Glauber R. J., Phys. Rev., **177**, № 5, 1857 (1969).
Ordered expansions in Boson amplitude operators.
15. Cahill K. E., Glauber R. J., Phys. Rev., **177**, № 5, 1882 (1969).
Density operators and quasiprobability distributions.
16. Ledinegg E., Zs. Phys., **191**, № 2, 177 (1966).
Zur Kohärenz n -ter Ordnung in der Quantenelektrodynamik.
17. Paul H., Ann. Phys., **19**, № 3—4, 210 (1967).
Quantenmechanische Beschreibung der Interferenz zwischen unabhängigen nichtmonochromatischen Lichtstrahlen.
18. Шелепин Л. А., ЖЭТФ, **54**, № 5, 1463 (1968).
К теории когерентного спонтанного излучения.
19. Морозов В. А., Оптика и спектроскопия, **22**, № 2, 325 (1967).
К теории ширины линии спонтанного когерентного излучения.
20. Теплицкий Э. Ш., ЖЭТФ, **55**, № 4, 1272 (1968).
О возможности резонансного изменения когерентных свойств света при рассеянии в многоуровневой системе.
21. Летохов В. С., ЖЭТФ, **53**, № 6, 2210 (1967).
Квантовая статистика многомодового излучения ансамбля атомов.

22. Зельдович Б. Я., Переломов А. М., Попов В. С., ЖЭТФ, **55**, № 2, 589 (1968).
Релаксация квантового осциллятора.
23. Зельдович Б. Я., Переломов А. М., Попов В. С., ЖЭТФ, **57**, 196 (1969).
Релаксация квантового осциллятора при наличии внешней силы.
24. Белавин А. А., Зельдович Б. Я., Переломов А. М., Попов В. С., ЖЭТФ, **56**, № 1, 264 (1969).
Релаксация квантовых систем с эквидистантным спектром.
25. Bergman S. M., Journ. Math. Phys., **8**, № 2, 159 (1967).
Induced and spontaneous emission.
26. Robl H. R., Phys. Lett., **A24**, № 5, 288 (1967).
Conservation of Gaussian distributions of coherent states.
27. Lachs G., Journ. Appl. Phys., **38**, № 9, 3439 (1967).
Quantum statistics of multiple-mode, superposed coherent and chaotic radiation.
28. Fleck J. A., Jr., Phys. Rev., **149**, № 1, 322 (1966).
Quantum theory of laser radiation. II. Statistical aspects of laser light.
29. Lax M., Phys. Rev., **145**, № 1, 110 (1966).
Quantum noise. IV. Quantum theory of noise sources.
30. Lax M., IEEE Journ. Quant. Electron., **3**, № 2, 37 (1967).
Quantum noise. VII. The rate equations and amplitude noise in lasers.
31. Lax M., Louisell W. H., IEEE Journ. Quant. Electron., **3**, № 2, 47 (1967).
Quantum noise. IX. Quantum Fokker-Planck solution for laser noise.
32. Lax M., Phys. Rev., **157**, № 2, 213 (1967).
Quantum noise. X. Density-matrix treatment of field and population-difference fluctuations.
33. Lax M., Phys. Rev., **172**, № 2, 350 (1968).
Quantum noise. XI. Multitime correspondence between quantum and classical stochastic processes.

34. L a x M., Phys. Rev., **172**, № 2, 362 (1968).
Quantum noise. XIII. Six-classical-variable description of quantum laser fluctuations.
35. M o l l o w B. R., G l a u b e r R. J., Phys. Rev., **160**, № 5, 1076, 1097 (1967).
Quantum theory of parametric amplification, I, II.

V. ПРИЕМ И ГЕТЕРОДИНИРОВАНИЕ ОПТИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

В первую часть настоящего раздела вошли работы, посвященные общей теории приема оптических сигналов в присутствии флуктуаций [2—8] (здесь отметим, в частности, теоретические работы Караваева [4—6], где дано весьма общее рассмотрение вопроса), шумам квантовых счетчиков [14—19] и супергетеродинным приемникам оптических сигналов [20—25]. Отметим также весьма детальное рассмотрение вопросов приема в книге Росса [1]. Во вторую часть отнесены некоторые работы, посвященные шумам усилителей.

Прием и гетеродинирование

1. Р о с с М., Лазерные приемники, изд-во «Мир», 1969.
2. Д е р ю г и н И. А., в сб. «Квантовая электроника», Киев, 1966, стр. 259.
Шумы квантовых устройств.
3. М и т ю г о в В. В., М о р о з о в В. П., Изв. ВУЗ, Радиофизика, **11**, № 2, 260 (1968).
Квантовый электромагнитный канал связи с аддитивным шумом.
4. К а р а в а е в В. В., ЖЭТФ, **51**, № 2, 490 (1966).
Потенциальная чувствительность энергетических приемников излучения.
5. К а р а в а е в В. В., Радиотехника и электроника, **14**, № 10, 1890 (1969).
К вопросу о минимальном уровне шумов линейных усилителей.
6. К а р а в а е в В. В., Автореферат диссертации, Физический институт АН СССР, Москва, 1969.
Вопросы приема электромагнитного излучения в присутствии квантовых эффектов.

- 7 Hisdal E., Journ. Opt. Soc. Amer., 57, № 1, 35 (1967).
Detectable information in a photon beam.
- 8 Hisdal E., Journ. Opt. Soc. Amer., 57, № 1, 111 (1967).
Threshold signal-to-noise ratio for a photon beam.
9. Козлов В. П., Оптика и спектроскопия, 24, № 5, 840 (1968).
По поводу нового метода регистрации слабых световых сигналов.
- 10 Oliver C. J., Pike E. R., Journ. Phys. (Brit. Journ. Appl. Phys.), D1, № 11, 1459 (1968).
Measurement of low light flux by photon counting.
11. Рао Yoh-Han, Zitter R. N., Griffiths J. E., Bull. Amer. Phys. Soc., 11, № 1, 111 (1966).
New photodetection method for use with light of low intensity.
12. Артемьев В. В., Гуськов Л. Н., Михайлов В. Н., Изв. Сиб. отд. АН СССР, № 13, сер. техн. н., вып. 3, 106 (1968).
Регистрация когерентных световых потоков.
13. Peters W. N., Arguello R. J., IEEE Journ. Quant. Electron., 3, № 11, 532 (1967).
Fading and polarization noise of a PCM/PL system.
14. Eberhardt E. H., Appl. Optics, 6, № 2, 251 (1967).
Threshold sensitivity and noise ratios of multiplier phototubes.
15. Whiting J. S. S., Journ. Appl. Phys., 38, № 1, 415 (1967).
Noise limitations in quantum counters.
16. Gandrud W. B., Moos H. W., Journ. Appl. Phys., 39, № 10, 4777 (1968).
Thermal noise in IR quantum counters.
- 17 Schemel R. E., Экспресс-инф. «Радиотехника сверхвысоких частот и квантовая радиотехника», № 27, 15 (1968).
Отношение сигнал/шум в квантовых детекторах когерентных оптических систем.
18. Thomas C. E., Appl Optics, 7, № 3, 517 (1968).
Coherent optical noise suppression.

19. Ducot C., Acta electron., 9, № 3, 215, 293 (1965), (1966).
Problemes de bruit lies a la transmission de signaux aux radiofrequences tres elevees et aux frequences optiques.
20. Mandel L., Journ. Opt. Soc. Amer., 56, № 9, 1200 (1966).
Heterodyne detection of a weak light beam.
21. Helstrom C. W., Journ. Opt. Soc. Amer., 57, № 3, 353 (1967).
Detectability of coherent optical signals in a heterodyne receiver.
22. Hanlon J., Jacobs S. E., Appl Optics, 6, № 3, 577 (1967).
Narrowband optical heterodyne detection.
23. Fried D. L., Seidman J. B., Appl. Optics, 6, № 2, 245 (1967).
Heterodyne and photon-counting receivers for optical communications.
24. Bell D. A., Proc. IEE, 114, № 2, 211 (1967).
Noise in optical superheterodyne reception. Discussion on the paper: «Experimental study of the theory of optical superheterodyne reception» by M. P. Warden. — Author's reply.
25. Ерофеичев В. Г., ФТП, 2, № 2, 277 (1968).
Гетеродинирование света на фотосопротивлениях из InSb.

Шумы усилителей

26. D'Haenens I. J., Ciuliano C. R., IEEE Journ. Quant. Electron., 1, № 9, 393 (1965).
Noise properties of pulsed ruby laser amplifiers.
27. Klüver J. W., Journ. Appl. Phys., 37, № 8, 2987 (1966).
Laser amplifier noise at 3,5 microns in helium-xenon.
28. Мазанько И. П., Радиотехника и электроника, 13, № 3, 483 (1968).
О флуктуациях в газовых оптических усилителях и генераторах.

29. Михнов С. А., Рубинов А. Н., Журн. прикл. спектроск., 8, № 1, 42 (1968).
Исследование шумов в стеклянных неодимовых лазерах.
30. Самсон А. М., Котомцева Л. А., Изв. АН БССР. Сер. физ. мат. н., № 3, 76 (1968).
Расчет шумов в матированном генерирующем стержне за счет проникновения радиации накачки.
31. Басов Н. Г., Грасюк А. З., Зубарев И. Г., Тевелев Л. В., Труды ФИАН им. П. Н. Лебедева, 31, 74 (1965).
Регенеративные оптические квантовые усилители.
32. Карлов Н. В., Маненков А. А., Квантовые усилители, М., 1966.
33. Карлов Н. В., Труды ФИАН, 49, 3 (1969).
Исследования по квантовым усилителям.

VI. ФЛУКТУАЦИИ В ЛАЗЕРАХ

Статистические свойства лазерного излучения существенно различны для лазеров непрерывного действия (как правило, газовых) и для мощных импульсных лазеров типа неодимового или рубинового. Из работ общего характера отметим обзор Армстронга и Смита [1].

Лазеры непрерывного действия чаще всего используются в режиме генерации единственной моды с определенными поперечным (как правило, равным нулю) и продольным индексами. При этом амплитуда, фаза и частота излучения подвержены флуктуациям, которые классифицируются по вызывающим их причинам и по характерным временам корреляции соответствующих процессов. Эта классификация весьма близка к той, которая дается в хорошо известной в радиофизике задаче о флуктуациях томсоновского генератора.

Именно, имеются так называемые «технические» уходы частоты и амплитуды, связанные со сравнительно медленными изменениями параметров резонатора и активной среды; их в принципе можно устранить, улучшив экспериментальные условия. Этому вопросу посвящены работы [6—15]. Напротив, «естественные» флуктуации фазы (частоты) и амплитуды возникают в результате

действия принципиально неустранимого шума спонтанного излучения. Характерное время корреляции этого шума отвечает обратной ширине линии лазерного перехода и, таким образом, весьма мало. Работы по теории естественных флуктуаций одномодовых лазеров ведутся несколькими группами исследователей; отметим, в частности, работы Хакена и др. [17—24], Берштейна и др. [33, 34] (в [33] содержится также обзор экспериментов этой группы), работы группы Климонтовича (ссылки см. в [35], работы Казанцева, Сурдутовича и сотр. (см. например [31]). В работах Лэкса (см. раздел IV) также развивается теория флуктуаций в лазерах. Из интересных результатов отметим решение нестационарного уравнения Фоккера—Планка для процесса установления амплитуды при включении лазера [18]. Эксперименты по флуктуациям одномодовых лазеров ведутся группой Ареки [36—38], Берштейном и др. [52—57] и рядом других. Необходимо особо упомянуть работу [54], где измерена естественная ширина линии излучения гелий-неонового лазера.

Ряд работ посвящен флуктуациям излучения кольцевых газовых лазеров [58, 59], лазеров с нерезонансной обратной связью (обратной связью за счет рассеяния) [60—65] и полупроводниковых лазеров [66—70].

Наиболее интересные статистические и динамические свойства мощных импульсных лазеров связаны с их многомодовостью. В частности, фазировка этих мод может привести к образованию мощных сверхкоротких импульсов света. В виду большой практической важности вопроса представляется целесообразным, кроме списка литературы, привести формулировку основных относящихся сюда понятий.

В ширине спектра, генерируемого активной средой ($\Delta\omega = 2 \cdot 10^{12}$ сек⁻¹ для рубинового лазера и $\Delta\omega = 5 \cdot 10^{13}$ сек⁻¹ для неодимового) помещается большое число M мод, отличающихся продольным индексом (так называемых аксиальных мод). При этом $M = \Delta\omega/\Omega$, где $\Omega = 2\pi/T = \pi c/L$, а T — период межмодовых биений; типичные значения длины резонатора $L \approx 1$ м.

В отсутствие связи между модами их фазы независимы, и излучение при $M \gg 1$ приближенно представ-

ляет собой гауссов процесс. При этом временной ход поля $E(t)$ и интенсивности $I(t) = |E(t)|^2$ отвечает функции с характерным временем корреляции $\tau = (\Delta\omega)^{-1} \sim \sim T/\pi M$. Одномерный закон распределения мгновенной интенсивности $I(t)$ имеет вид

$$W(I) = \langle I \rangle^{-1} \exp \left\{ -\frac{I}{\langle I \rangle} \right\}$$

(что соответствует рэлеевскому распределению для огибающей). Независимость фаз различных мод приводит к тому, что временной ход интенсивности представляет последовательность всплесков, причем эти всплески в среднем равномерно заполняют весь период T , а число их N имеет порядок числа M возбужденных мод.

В определенных условиях работы лазера при том же спектральном составе поля временной ход интенсивности может отвечать картине со значительно меньшим числом всплесков ($N \ll M$) и соответственно с большей мгновенной интенсивностью. Это происходит, в частности, если в лазере установлен просветляющийся фильтр; такой фильтр на определенном этапе развития поля в лазере ускоряет рост наиболее интенсивных выбросов начальной флуктуационной картины по сравнению со средней скоростью роста.

Случай с $N \ll M$ на языке разложения по модам отвечает частичной синхронизации фаз различных мод; такая синхронизация происходит в результате взаимодействия мод в нелинейном фильтре.

Особый интерес представляет случай так называемой полной фазировки спектра, когда подавляющая часть излучаемой за период энергии сосредоточена в единственном мощном импульсе; при этом фазы мод являются линейной функцией продольного индекса n :

$$\varphi_n = n\Omega t_0 + \psi,$$

где t_0 — положение импульса на периоде.

Вопросам генерации коротких импульсов света в лазерах с самосинхронизацией мод посвящен обзор Де-Мариа и др. [71], где приведена библиография работ на эту тему (около 120 названий).

Статистические аспекты процесса фазировки спектра

оптического излучения рассмотрены в работах [77—82]. Отметим, в частности, работу [78], в которой для определенной модели лазера получены условия того, когда следует ожидать полной фазировки спектра, а когда — лишь частичной.

Регистрация пикосекундной структуры излучения таких лазеров является трудной задачей. Здесь обычно применяются методы нелинейной интерферометрии (например, люминесценция при двухквантовом возбуждении). Литература по этому вопросу приведена в разделе II.

Общие вопросы

1. Armstrong J. A., Smith A. W., Progress in Optics, **6**, 213 (1967).
2. Chen D., Ready J. F., Bull. Amer. Phys. Soc., **11**, № 4, 454 (1966).
Measurement of the mutual coherence function of He—Ne laser light.
3. Leonard D. A., Zinky W. R., Appl. Phys. Lett., **12**, № 4, 113 (1968).
Coherence properties of the superradiant 5401 Å pulsed neon laser.
4. Каллас Х., Чайка М., Оптика и спектроскопия, **22**, № 3, 517 (1967).
Поляризация спонтанного излучения газового лазера.
5. Артемьев В. В., Оптика и спектроскопия, **23**, № 4, 637 (1967).
Корреляция фотонов лазера.

Технические флуктуации в газовых лазерах

6. Prescott L. J., Van der Ziel A., IEEE Journ. Quant. Electron., **2**, № 7, 173 (1966).
Gas discharge modulation noise in He—Ne lasers.
7. Gubler W., Strutt M. J. O., Appl. Optics, **5**, № 4, 659 (1966).
Experimental and theoretical investigations of the spontaneous infrared radiation fluctuations of a high-pressure, high current argon discharge.

8. Kubo U., Kawabe K., Inuishi Y., Technol. Repts Osaka Univ., **16**, № 716—747, 505 (1966).
Noise and modulation of He—Ne laser.
9. Kubo U., Kawabe K., Inuishi Y., Japan. Journ. Appl. Phys., **5**, № 8, 731 (1966).
Effect of plasma fluctuations on gas laser noise.
10. Forgo G., Strutt M. J. O., IEEE Journ. Quant. Electron., **3**, № 10, 417 (1967).
Discharge modulation noise in a He—Ne lasers.
11. Bolwijn P. T., Phys. Lett., **A24**, № 5, 285 (1967).
Discharge modulation noise in He—Ne laser radiation.
12. Mas G., Brun J., Compt. Rend., **266**, № 26, B1583 (1968).
Modulation spontane á l'allumage du faisceau émis par in laser helium-neon.
13. Suzuki T., Экспресс-инф. «Радиотехника СВЧ и квантовая радиотехника», № 43, 16 (1968).
Подавление шумов газового лазера, обусловленных модуляцией тока.
14. Алякшев С. А., Гордеев Д. В., Остапченко Е. П., Пятакова Л. М., Радиотехника и электроника, **12**, № 10, 1769 (1967).
Экспериментальное исследование шумов излучения газового ОКГ на гелий — неоне при различных способах возбуждения разряда в активном элементе.
15. Лебедева В. В., Одинцова А. И., Салимов В. М., ЖЭТФ, **38**, № 8, 1373 (1968).
Флуктуации частотного состава излучения аргонового ОКГ.

*Естественные флуктуации в одномодовых
лазерах (теория)*

16. Scully M. O., Lamb W. E., Phys. Rev., **159**, 208 (1967).
Quantum theory of an optical maser. I. General theory.
17. Artz V., Haken H., Risken H., Sauermann H., Schmid Ch., Weidlich W., Zs. Phys., **1907**, № 3, 207 (1966).
Quantum theory of noise in gas and solid state lasers with an inhomogeneously broadened line. I.

18. Risken H., Vollmer H. D., Zs. Phys., **204**, № 3, 240 (1967).
The transient solution of the laser Fokker-Planck equation.
19. Risken H., Zs. Phys., **191**, № 3, 302 (1966).
Correlation function of the amplitude and of the intensity fluctuation for a laser model near threshold.
20. Risken H., Schmid C., Weidlich W., Phys. Lett., **20**, № 5, 489 (1966).
Fokker-Planck equation for atoms and light mode in a laser model with quantummechanically determined dissipation and fluctuation coefficients.
21. Risken H., Vollmer H. D., Zs. Phys., **201**, № 3, 323 (1967).
The influence of higher order contributions to the correlation function of the intensity fluctuation in a laser near threshold.
22. Risken H., Schmid C., Weidlich W., Zs. Phys., **194**, № 4, 337 (1966).
Fokker-Planck equation distribution and correlation functions for laser noise.
23. Schmid Ch., Phys. Lett., **A27**, № 8, 484 (1968).
A generalized Van der Pole equation for laser noise not limited to threshold region.
24. Haken H., Zs. Phys., **190**, № 3, 327 (1966).
Theory of intensity and phase fluctuations of a homogeneously broadened laser.
25. Fleck J. A., Phys. Rev., **152**, № 1, 278 (1966).
Intensity fluctuations and statistics of laser radiation.
26. Fleck J. A., Journ. Appl. Phys., **37**, № 1, 188 (1966).
Nonlinear laser noise and coherence.
27. Sillitto R. M., Phys. Lett., **A27**, № 9, 624 (1968).
A statistical model of laser light.
28. Brunner W., Ann. Phys., **20**, № 1—2, 53 (1967).
Quantenmechanische Berechnung der Photonenzahl und Amplitudenfluktuation einer Laserstrahlung.
29. Pauwels H. J., IEEE Journ. Quant. Electron., **2**, № 3, 54 (1966).
Phase and amplitude fluctuation of the laser oscillator.

- 30 P a u w e l s H. J., Physica, **36**, № 1, 1 (1967).
Equivalent classical models for quantum noise in the laser oscillator.
31. К а з а н ц е в А. П., Сурдутович Г. И., ЖЭТФ, **58**, 245 (1970).
Квантовая модель лазера с нелинейным поглощением.
32. L o u i s e l l W. H., M a r b u r g e r J. H., IEEE Journ. Quant. Electron., **3**, № 8, 348 (1967).
Solutions of the damped oscillator Fokker-Planck equation.
33. Б е р ш т е й н И. Л., З а й ц е в Ю. И., Proc. of the conference on laser measurements URSI Committee I, Sep. 1968 (Warsaw).
Radiation fluctuations of gas lasers.
34. Б е р ш т е й н И. Л., А н д р о н о в а И. А., З а й ц е в Ю. И., Изв. ВУЗ. Радиофизика, **10**, 59 (1967).
Флуктуации интенсивности и частоты излучения оптического генератора.
35. К л и м о н т о в и ч Ю. Л., Л а н д а П. С., ЖЭТФ, **56**, № 1, 275 (1969).
К теории естественной ширины линии и флуктуаций амплитуды газового лазера.

*Естественные флуктуации в одномодовых лазерах
(эксперимент)*

36. A r e c c h i F. T., G i g l i o M., S o n a A., Phys. Lett., **A25**, № 4, 341 (1967)
Dynamics of the laser radiation at threshold.
37. A r e c c h i F. T., R o d a r i G. S., S o n a A., Phys. Lett., **A25**, № 1, 59 (1967).
Statistics of the laser radiation at threshold.
- 38 A r e c c h i F. T., B e r n e t A., Phys. Rev. Lett., **16**, № 1, 32 (1966).
High-order fluctuations in a single-mode laser field.
- 39 A r m s t r o n g J. A., Journ. Opt. Soc. Amer., **56**, № 8, 1024 (1966).
Theory of interferometric analysis of laser phase noise.
- 40 S m i t h A. W., A r m s t r o n g J. A., Bull. Amer. Phys. Soc., **11**, № 1, 128 (1966).
Laser photon counting distributions.

41. Smith A., Armstrong J. A., Phys. Rev. Lett., **16**, № 25, 1169 (1966).
Laser photon counting distributions near threshold.
42. Armstrong J. A., Smith A. W., Bull. Amer. Phys. Soc., **11**, № 1, 112 (1966).
Interferometric analysis of laser phase noise.
43. Davidson F., Mandel L., Phys. Lett., **A25**, № 9, 700 (1967).
Correlation measurements of laser beam fluctuations near threshold.
44. Boersman S. L., Proc. IEEE, **8**, 1070 (1966).
Statistics of laser radiation.
45. Chang R. F., Detenbeck R. W., Korenman V., Alley C. O., Jr., Hochuli U., Phys. Lett., **A25**, № 3, 272 (1967).
Photon bunching in a laser at threshold.
46. Siegman A. E., Daino B., Manes K. R., IEEE Journ. Quant. Electron., **3**, № 5, 180 (1967).
Preliminary measurements of laser shortterm frequency fluctuations.
47. Arrathoon R., Siegman A. E., Journ. Appl. Phys., **40**, № 2, 910 (1969).
Further measurements of quantum phase noise in a He—Ne laser.
48. Freed C., Haus H. A., Solid State Res. Lincoln Lab. Mass. Inst. Technol., **34**, № 3, 19 (1965).
Photoelectron statistics produced by laser operating below threshold of oscillation.
49. Freed C., Haus H. A., IEEE Journ. Quant. Electron., **2**, № 8, 190 (1966).
Photoelectron statistics produced by a laser operating below and above the threshold of oscillation.
50. Daino B., IEEE Journ. Quant. Electron., **2**, № 9, 351 (1966).
The measurements of the frequency fluctuations of a laser field.
51. Ditchfield C. R., Conf. Phys. Aspects Noise Electron. Devices, Nottingham, 1968, p. 162.
Noise in masers and lasers.
52. Зайцев Ю. И., ЖЭТФ, **50**, № 3, 525 (1966).
О флуктуациях излучения газового лазера.

53. Андропова И. А., Зайцев Ю. И., Изв. ВУЗ. Радиофизика, **11**, № 1, 149 (1968).
Экспериментальное исследование флуктуаций интенсивности одночастотных He—Ne лазеров на волнах 0,63 и 3,39 мк.
54. Зайцев Ю. И., Степанов Д. П., ЖЭТФ, **55**, № 5, 1645 (1968).
Флуктуации частоты газового лазера и определение естественной ширины его спектральной линии.
55. Андропова И. А., ЖЭТФ, **56**, № 2, 417 (1969).
Экспериментальное исследование флуктуаций интенсивности одночастотного газового лазера на волне 3,39 мк.
56. Степанов Д. П., Изв. ВУЗ. Радиофизика, **11**, № 4, 514 (1968).
Стабилизация частоты и частотные флуктуации гелий-неонового лазера.
57. Зайцев Ю. И., Изв. ВУЗ. Радиофизика, **12**, № 1, 60 (1969).
Флуктуации интенсивности излучения He—Ne лазера на волне 0,63 мк.

Флуктуации в кольцевом газовом лазере

58. Беленов Э. М., ЖТФ, **39**, № 1, 133 (1969).
Влияние амплитудных флуктуаций на стабильность частоты биений бегущих волн кольцевого лазера.
59. Климонтович Ю. Л., Ланда П. С., ЖЭТФ, **56**, № 1, 275 (1969).
К теории естественной ширины линии и флуктуаций амплитуды газового лазера.

Лазер с нерезонансной обратной связью

60. Летохов В. С., Письма ЖЭТФ, **4**, № 11, 477 (1966).
О стимулированном радиоизлучении межзвездной среды.
61. Летохов В. С., Письма ЖЭТФ, **5**, № 8, 262 (1967).
Стимулированное излучение ансамбля рассеивающих частиц с отрицательным поглощением.
62. Летохов В. С., ЖЭТФ, **53**, № 4, 1442 (1967).
Генерация света рассеивающей средой с отрицательным резонансным поглощением.

63. Амбарцумян Р. В., Крюков П. Г., Летохов В. С., ЖЭТФ, **51**, № 6, 1669 (1966).
Динамика сужения спектра излучения квантового генератора с нерезонансной обратной связью.
64. Амбарцумян Р. В., Басов Н. Г., Крюков П. Г., Летохов В. С., ЖЭТФ, **51**, № 3, 724 (1966).
Оптический квантовый генератор с нерезонансной обратной связью.
65. Амбарцумян Р. В., Крюков П. Г., Летохов В. С., Матвеев Ю. А., ЖЭТФ, **53**, № 6, 1955 (1967).
Статистические свойства излучения лазера с нерезонансной обратной связью.

Флуктуации в полупроводниковых лазерах

66. Smith A. W., Armstrong J. A., IBM Journ. Res. Developm., **10**, № 3, 225 (1966).
Intensity noise of multimode GaAs laser emission.
67. Скоморовский Ю. А., Зборовский А. А., Радиотехника и электроника, **13**, № 1; 160 (1968).
Шумовые характеристики и искажения при модуляции излучения полупроводникового ОКГ по интенсивности.
68. Haug H., Haken H., Zs. Phys., **204**, № 3, 262 (1967).
Theory of noise in semiconductor laser emission.
69. Haug H., Zs. Phys., **200**, № 1, 57 (1967).
Quantummechanical theory of fluctuations and relaxation in semiconductor lasers.
70. Haug H., IEEE Journ. Quant. Electron., **4**, № 4, 168 (1968).
Noise in semiconductor lasers.

Многомодовые лазеры и синхронизация мод

71. De Maria A. J., Glenn W. H., Jr., Brienza M. J., Mask M. E., Proc. IEEE, **57**, № 1, 2 (1969).
Picosecond laser pulses.
72. Targ R., Yarborough J. M., Appl. Phys. Lett., **12**, № 1, 3 (1968).
Mode-locked quenching of He—Ne and argon lasers.

73. Berklay D. A., Wolga G. J., Journ. Appl. Phys., **38**, № 8, 3231 (1967).
Transient interference studies of emission from a pulsed ruby laser.
74. Haken H., Sauermann H., Schmid Ch., Vollmer H. D., Zs. Phys., **206**, № 4, 369 (1967).
Theory of laser noise in the phase locking region.
75. Haken H., Zs. Phys., **219**, № 3, 246 (1969).
Exact stationary solution of a Fokker-Planck equation for multimode laser action including phase locking.
76. Hодарга Н., George N., IEEE Journ. Quant. Electron., **2**, № 9, 337 (1966).
Excess photon noise of multimode lasers.
77. Fleck J. A., Appl. Phys. Lett., **13**, № 11, 365 (1968).
Evolution of a Q-switched laser pulse from noise.
78. Кузнецова Т. И., ЖЭТФ, **57**, 1673 (1969).
К статистике возникновения сверхкоротких световых импульсов в лазере с просветляющимся фильтром.
79. Кузнецова Т. И., Письма ЖЭТФ, **10**, № 3, 153 (1969).
Фазировка спектра и короткие световые импульсы при вынужденном комбинационном рассеянии.
80. Караваев В. В., Радиотехника и электроника, **12**, № 1, 144 (1967).
Фотонный ансамбль Кастлера и статистические свойства излучения лазера в многомодовом режиме возбуждения.
81. Летохов В. С., ЖЭТФ, **54**, 1392 (1968).
Динамика генерации импульсного лазера с фазировкой мод.
82. Летохов В. С., ЖЭТФ, **55**, 1077 (1968).
Генерация ультракоротких импульсов света в лазере с нелинейным поглотителем.
83. Малютин А. А., Щелев М. Я., Письма ЖЭТФ, **9**, № 8, 445 (1969).
Исследование временной структуры генерации неодимового лазера в режиме самосинхронизации мод.
84. Летохов В. С., ЖЭТФ, **55**, 1943 (1968).
Флуктуационные ультракороткие импульсы света в лазере.

Предметный указатель

- Аналитический сигнал 21—24,
30, 61, 147, 206, 288
- Ансамбль световых полей 20
— стационарный 25, 76
— тепловой 305
- Бейкера — Хаусдорфа уравне-
ние 162
- Белый шум 91
- Броуновское движение 90
- Ван Циттерта — Цернике теоре-
ма 34
- Видность 18
— индекс 240
- Волновое уравнение классиче-
ское 78
- Вынуждающая сила 88
- Гамильтона оператор 128
- Гармонический осциллятор сдви-
нутый 160
— — смещенный 157
- Гельмгольца уравнение 151
- Гильберта — Шмидта норма 266
— — оператор 266
- Гильбертово пространство, век-
торы 98
— — — норма 98
— — полный ортонормирован-
ный базис 99
— — функциональное пред-
ставление 169
- Грина теорема 32, 152
— функция 32, 152
- Гюйгенса принцип 34, 35
- Даламбера оператор 77
- Детектор распределенный 216,
251, 253
— тензор адмитанса 354
— точечный 213, 250
— — идеальный 212
- Диагональное представление по
когерентным состояниям 247,
255
- Диффузионное приближение 95,
340
- Закон сохранения тока 132
- Излучение квазимонохроматиче-
ское 27
— лазера 20, 320
— поляризованное 21
— тепловое 20, 289
- Источники тепловые 17
— — искусственные 45, 350
- Когерентность, время 66
— высшего порядка 232
— квантовая теория 24, 212
— определение 224
— первого порядка 228
— полная 223—225
— — критерии 225, 226
— свойство 224
— степень 28, 237
— частичная 20, 21, 37, 223
— — интерференционный за-
кон 26
— — классическая теория 21
— — модель 19
— — скалярная теория 21

- Когерентные состояния для бесконечного числа степеней свободы 195
 — — — нескольких степеней свободы 192
 — — непрерывность и аналитичность 107
 Коммутационные соотношения канонические 140
 Колмогорова — Чэпмена уравнение 92
 Корреляционный объем 346, 351

 Лазер, излучение 20, 320
 — модели 320—332
 Лапласа оператор 31

 Максвелла уравнение 132
 Мандела формула 41
 Марковские процессы 88
 Матрица плотности, диагональное представление 249, 251
 — — гильбертова пространства 106, 107

 Норма Гильберта — Шмидта 266
 — оператора 100
 — следовая 105, 264

 Оператор Гамильтона 128
 — Гильберта — Шмидта 266
 — Даламбера 77
 — дифференциальный 184
 — единичный 101
 — — разложение 101, 169, 200
 — Лапласа 31
 — наблюдаемой величины 100
 — норма 100
 — нормально упорядоченный 182
 — ограниченный 100
 — рождения 113, 142
 — с конечным следом 103
 — — — каноническое разложение 104
 — следовая норма 105
 — сопряженный 102
 — унитарный 102
 — уничтожения 113, 142
 — упорядочивающий во времени 131
 — числа частиц 113, 118
 Отсчеты, группировка 43, 67
 — распределение 43
 — — для хаотических полей 309
 — — квантовомеханический вывод 241
 — — полуклассический вывод 38, 41, 55
 — — производящая функция 41
 — — случай тепловых полей 44
 — — формула Мандела 41
 — — характеристическая функция 40, 42

 Поле излучения, диагональное представление 251, 280
 — — полностью когерентное состояние 223
 — — распределение отсчетов 250
 — — свободное
 — — — представитель основного состояния 208
 — — стационарные состояния 304
 — — хаотическое 20, 290—320, 345
 Поляризация круговая 21, 110
 — линейная 21, 110
 — нулевая 110
 — степень 52, 112
 — частичная 21
 — эллиптическая 21
 Полярное разложение 104
 Представление Гейзенберга 130
 — Шредингера 129
 Преобразование Гильберта 23
 — Лапласа 41
 — Фурье 22
 Приближение дальнего поля 35, 73
 — «волн вращающейся поляризации» 149, 334
 Пробная функция 61, 259

- Производящая функция для распределения отсчетов 41
 — — нормально упорядоченная 221
- Распределение гауссово 58
 — для идеального лазера 322
 — интенсивности 52
 — классическое, в фазовом пространстве 181
 — кумулянты 94
 — многомерное 54
 — нормальное 309
 — отсчетов 39, 43
 — пуассоновское 39, 116, 122
 — — многомерное 122, 206
 — равновесное тепловое 305
 — связанные моменты 93
 — семинварианты 93
 — с неопределенной фазой 76
 — стационарное 76
 — тепловое 54, 119
 — умеренное 257
- Резервуар 81, 334
- Скорость счета квантов 212
 Случайное блуждание 90
 Случайные функции 59
 Случайный процесс 20, 62
 Состояние, равновесное тепловое 307
 — смешанное 105, 106
 — чистое 107
- Стокса параметры 111
- Теория возмущения 38, 212
- Усеченная последовательность 199
 Условие минимальной неопределенности 161
- Фаза 19
 Факториальные моменты 42
- Флуктуационное (стохастическое) уравнение 80, 95, 333
 Фоккера — Планка уравнение 95
 — — — обобщенное 333
- Фотоотсчеты, квантовая теория 241—255
 — полуклассическая теория 55—76
- Функционал характеристический 60—64, 85
- Функция автокорреляционная 65
 — вероятности 57
 — Грина 32, 152
 — квантовая корреляционная 212
 — пробная 59, 76, 259
 — производящая 41
 — характеристическая 34
- δ -функция Дирака 42, 47
- Хэнбери Брауна — Твисса эксперимент 71
- Центральная предельная теорема классическая 289
 — — — квантовая 289—291
- Шварца неравенство 26, 98
 Шредингера уравнение 128
- Электромагнитное поле, векторы поляризации 138
 — — временная эволюция 144
 — — квантовый гамильтониан 141
 — — операторы рождения и уничтожения 142, 204
 — — представление по когерентным состояниям 203
 — — пространственная эволюция 151
- Энтропия 305, 306
 Эргодический процесс 20

Оглавление

Предисловие редактора перевода	5
Литература	13
Предисловие	14
Глава 1. Частично когерентный свет	17
§ 1. Введение	17
§ 2. Описание аналитического сигнала	21
§ 3. Статистика частично когерентного света	25
§ 4. Временные и пространственные свойства функции взаимной когерентности в процессе распространения сигнала	30
А. Теорема ван Цитгерта — Цернике (34).	.
Глава 2. Распределение фотоэлектрических отсчетов	37
§ 1. Постоянная интенсивность	37
А. Распределение Пуассона (33).	
§ 2. Случайные интенсивности	40
А. Статистика фотоотсчетов для малых временных интервалов (43).	
§ 3. Нахождение распределения интенсивности из распределения отсчетов	46
А. Независимые вклады (50).	
Глава 3. Полуклассическая теория фотоэлектрических отсчетов	55
§ 1. Случайные волновые поля	55
§ 2. Стохастические процессы	57
§ 3. Применения к частичной когерентности	64
А. Одиночные счетчики (64). Б. Несколько счетчиков (68).	
В. Полоса пропускания, размер счетчика и значение сглаживающих функций (74).	
§ 4. Заключение	76
Глава 4. Статистика поля	78
§ 1. Постановка динамической задачи	78
А. Причины появления статистики (79).	
§ 2. Преобразование флуктуационных уравнений	83
А. Усредненные уравнения для моментов (83). Б. Усредненное уравнение для характеристического функционала (85).	

§ 3. Марковские и немарковские процессы	88
А. Определения и различия (88). Б. Соотношения для марковских процессов (91).	
§ 4. Заключительные замечания	95
Глава 5. Статистические состояния в квантовой теории . . .	97
§ 1. Введение	97
§ 2. Квантовый формализм и обозначения	98
А. Гильбертово пространство (98). Б. Линейные операторы (100). В. Статистические состояния (105).	
§ 3. Примеры статистических состояний в квантовой теории . .	109
А. Состояния поляризации монохроматического светового пучка (109). Б. Статистические состояния гармонического осциллятора (112). В. Статистические состояния нескольких осцилляторов (118). Г. Статистические состояния для бесконечного числа осцилляторов (121).	
§ 4. Заключение	124
Глава 6. Уравнения движения электромагнитного поля . . .	128
§ 1. Развитие во времени в квантовой теории	128
§ 2. Операторные уравнения для электромагнитного поля. Предварительные замечания	132
А. Общий подход к уравнениям поля (133).	
§ 3. Операторные уравнения для электромагнитного поля. Нерелятивистский анализ	134
А. Формулировка в конфигурационном пространстве (134). Б. Формулировка в импульсном пространстве (136). В. Операторы рождения и уничтожения (142).	
§ 4. Характерные свойства временной эволюции	144
А. Описание в конфигурационном пространстве (149).	
§ 5. Характерные свойства пространственной эволюции	151
Глава 7. Представление электромагнитного поля по когерентным состояниям	156
§ 1. Когерентные состояния. Основные свойства	156
А. Собственные состояния смещенного и сдвинутого осцилляторов (157). Б. Волновые пакеты с минимальной неопределенностью (161). В. Собственные векторы оператора уничтожения (162).	
§ 2. Фундаментальные свойства когерентных состояний для одной степени свободы	164

А. Предварительные замечания (164). Б. Непрерывное представление, основанное на когерентных состояниях (169). В. Примеры и специальные свойства представителей векторов и операторов по когерентным состояниям (177). Г. Связь с пространствами Сегала — Баргманна (190).	
§ 3. Когерентные состояния для нескольких степеней свободы	192
§ 4. Когерентные состояния для бесконечного числа степеней свободы. Приложение к электромагнитному полю	195
А. Общие свойства (195). Б. Приложение к электромагнитному полю (203).	
 Глава 8. Квантовая теория оптических корреляционных явлений	
§ 1. Квантовые корреляционные функции	212
А. Идеальные детекторы и скорости счета квантов (212). Б. Разложение по модам (219). В. Производящие функции (221).	
§ 2. Полная и частичная когерентность	223
А. Определения и полная когерентность (223). Б. Частичная когерентность (228).	
§ 3. Распределения фотоотсчетов	241
А. Скорости и отсчеты для одной нормальной моды (241). Б. Распределения отсчетов для поля излучения (250).	
§ 4. Оптическая теорема эквивалентности	255
А. „Диагональное“ представление для одной степени свободы (255). Б. „Диагональное“ представление для поля излучения (280).	
 Глава 9. Конкретные состояния поля излучения	
§ 1. Хаотические и тепловые состояния	289
А. Квантовая центральная предельная теорема (289). Б. Обобщение на случай многих степеней свободы (297). В. Хаотические и тепловые поля излучения (299). Г. Распределение фотоотсчетов для хаотических полей (309).	
§ 2. Феноменологические модели лазера	320
А. Идеальная модель (321). Б. Модель колебания с диффундирующей фазой (322). В. Модель, оперирующая с суперпозицией сигнала и шума (327).	
§ 3. Описание лазера с помощью модели связанных систем . .	332
А. Модель лазера (333).	

Глава 10. Интерферометрия интенсивности в квантовой оптике	344
§ 1. Интерферометрия интенсивности. Корреляция низшего порядка	344
А. Корреляция отсчетов (344). Б. Пространственная корреляция интенсивности (350).	
§ 2. Интерферометрия интенсивности в случае независимых источников	353
§ 3. Заключение	359
Библиография	362
Дополнение	332
I. Теория когерентности (383). II. Статистика фотоотсчетов; интерферометрия интенсивности (388). III. Статистические явления в нелинейной оптике (395). IV. Квантовая теория оптических полей; динамика и статистика процессов излучения и эволюции поля (404). V. Прием и гетеродинирование оптических сигналов (408). VI. Флуктуации в лазерах (411).	
Предметный указатель	422