MATHEMATICAL SURVEYS · *NUMBER 7*

THE ALGEBRAIC THEORY OF SEMIGROUPS

VOLUME I

by

A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON

1964

AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY

190 Hope Street, Providence, Rhode Island

А. КЛИФФОРД, Г. ПРЕСТОН

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛУГРУПП

Том 1

Перевод с английского
В. А. БАРАНСКОГО
и
В. Г. ЖИТОМИРСКОГО

Под редакцией
Л. Н. ШЕВРИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1972

УДК 519.4

Теория полугрупп стала в последние годы одной из активно разрабатываемых областей общей алгебры, однако монографическая литература по ней почти отсутствует.

Авторы проделали огромную работу по отбору материала, последовательно и ясно изложили многие вопросы алгебраической теории полугрупп. Тщательно подобранные упражнения содержат результаты, не вошедшие в основной текст.

В первом томе описаны основные свойства полугрупп, их представления матрицами над группой с нулем и над полем, а также разложения полугрупп.

Этот капитальный двухтомный труд, несомненно, окажется полезен математикам, интересующимся современной алгеброй, и для многих из них станет настольной книгой. Он будет также полезен преподавателям, аспирантам и студентам университетов и пединститутов.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
72-13

Предисловие редактора перевода

Теория полугрупп является одной из активно развивающихся областей современной алгебры. Она имеет тесные связи с самыми различными математическими дисциплинами: дифференциальной геометрией, функциональным анализом, теорией графов, теорией алгоритмов, абстрактной теорией автоматов и др. Эти связи, в основе большинства которых лежит простой, но принципиальный факт, что умножение преобразований ассоциативно (так что всякое замкнутое относительно умножения множество преобразований является полугруппой), способствуют жизненности теории полугрупп и определяют возможность ее приложений.

Первые исследования, посвященные полугруппам, относятся к 20-м годам. Последующие три десятилетия могут быть охарактеризованы как период становления теории полугрупп, формирования ряда ее основных понятий, задач и методов исследования. Вехой, отмечающей завершение начального этапа развития теории полугрупп, явились первые монографии, специально посвященные полугруппам; в них были систематизированы достижения указанного периода. В 1960 г. вышла книга Е. С. Ляпина «Полугруппы». Почти одновременно, в 1961 г. появился том 1 монографии Клиффорда и Престона (том 2 вышел в 1967 г.).

Авторы монографии — известные специалисты по теории полугрупп, обогатившие ее рядом первоклассных достижений. Профессор А. Клиффорд — американский алгебраист, являющийся одним из пионеров теории полугрупп; его работы стали выходить с начала 30-х годов и посвящены многим теоретико-полугрупповым направлениям. Клиффорду принадлежат, в частности, основополагающие результаты о полугруппах, представимых в виде объединения групп (такие полугруппы теперь начинают называть клиффордовыми), о расширениях полугрупп, о связках полугрупп (это важное понятие было введено Клиффордом) и др. Представитель более молодого поколения английский алгебраист профессор Г. Престон, ныне живущий в Австралии, известен своими важными работами по инверсным полугруппам.

Перед авторами стояла трудная задача по отбору и систематизации материала: ко времени составления первоначального плана книги теория полугрупп уже представляла собой весьма обширную дисциплину, по которой было опубликовано несколько сотен работ. За последнее десятилетие рост теории полугрупп был особенно бурным, углублялись оформившиеся ранее направления и появились новые, расширялись связи теории полугрупп с другими дисциплинами, число опубликованных статей увеличилось в несколько раз. Некоторые из достижений первой половины этого периода авторы попытались отразить в томе 2 (что, кстати, задержало его выход), однако подавляющая часть содержания книги основывается на материале, накопленном теорией полугрупп к началу 60-х годов. Разумеется, невозможно было охватить в книге все наиболее значительные результаты, полученные к этому времени, и представить все возникшие направления теории. Исходные принципы, которыми руководствовались авторы при отборе материала для монографии (и, в частности, трактовка ими термина «алгебраическая теория полугрупп»), а также краткая характеристика содержания книги достаточно ясно изложены в авторских предисловиях к томам 1 и 2, поэтому нет нужды повторять их.

Необходимо только отметить следующее. В развитие теории полугрупп немалый вклад внесли советские алгебраисты [1]). Некоторые результаты советских математиков вошли в книгу; среди них, например, ставшие классическими результаты А. И. Мальцева о вложении полугрупп в группы (отмечу еще, что авторы высоко оценивают значение основополагающей работы А. К. Сушкевича 1928 г. и краткому изложению этой малодоступной теперь статьи посвящают единственное приложение к тому 1). Но в общем знакомство авторов с советскими работами по теории полугрупп было недостаточным и исследования, проведенные в СССР, отражены в книге Клиффорда и Престона непропорционально мало.

---

[1]) Читателю, желающему познакомиться с основными результатами советских алгебраистов по теории полугрупп до 1967 г., можно порекомендовать обратиться к соответствующим разделам трудов «Математика в СССР за 40 лет», «Математика в СССР за 1958—1967 гг.», «История отечественной математики», а также к трем обзорам (по всей мировой литературе), опубликованным в следующих выпусках серии «Итоги науки»: «Алгебра. Топология. 1962», «Алгебра. 1964», «Алгебра. Топология. Геометрия. 1966».

Это с чувством сожаления признают и сами авторы, о чем один из них сообщил в письме к редактору перевода. В ряде мест авторы, делая ссылки на литературу, не упоминают относящиеся к рассматриваемой теме работы советских математиков или допускают неточности в вопросах приоритета. Некоторые из этих недочетов устранены ими в добавлениях к готовящемуся в США второму изданию тома 2. Эти добавления включены в перевод. Кое-где соответствующие поправки сделаны в примечаниях редактора перевода, в которых также приводятся отнюдь не претендующие на полноту указания на некоторые более свежие работы, непосредственно относящиеся к рассматриваемым в книге вопросам.

Авторы проделали огромную работу по систематизации и последовательному изложению многих разделов теории полугрупп. Монография содержит богатый материал и включает значительное число результатов, входящих в фундамент алгебраической теории полугрупп. Естественно, в ее содержании имеется немало пересечений с книгой Е. С. Ляпина, но в целом эти два труда довольно сильно отличаются друг от друга как по содержанию, так и по изложению ряда вопросов.

Монография Клиффорда и Престона — заметное явление в современной математической литературе. Она уже оказала и продолжает оказывать большое влияние на дальнейшее развитие теории полугрупп. Число ссылок на нее неуклонно растет, как в трудах, посвященных собственно алгебраическим исследованиям, так и в работах по другим, в том числе и более прикладным, разделам математики. Выход в русском переводе монографии Клиффорда и Престона будет способствовать ознакомлению широких кругов советских математиков с основами теории полугрупп. Эта книга, несомненно, окажется полезной многим математикам, интересующимся современной алгеброй, а для специалистов по теории полугрупп и близким областям станет настольной.

Построена книга весьма удачно и написана очень ясным языком. Изложение отличается даже некоторой скрупулезностью, так что при переводе не только не появлялась необходимость разъяснять те или иные места, но, напротив, у переводчиков и редактора перевода довольно часто возникало желание несколько сжать изложение. Впрочем, это желание было осуществлено лишь в очень небольшом количестве случаев и манера изложения авторов в основном сохранена полностью. Опечатки и мелкие неточности исправлены в переводе без каких-либо примечаний. При этом учтено несколько списков опечаток, исправлений и дополнений, любезно присланных авторами, проявившими большой интерес к выходу их книги в СССР.

Как нередко бывает, некоторые трудности при переводе возникли с терминологией. В книге Клиффорда и Престона систематизирована и унифицирована терминология многих разделов теории полугрупп. Для ряда терминов соответствующие русские эквиваленты отсутствовали. В тех же случаях, когда они имелись, терминология авторов не всегда совпадала с принятой в советской литературе (впрочем, тоже не во всем однозначной). При переводе терминология авторов сохранена почти полностью; лишь кое-где произведена замена терминов на более употребительные русские. В других случаях расхождений мы оставляли термин авторов, особенно если он является частью целой системы согласованных терминов. Все немногочисленные случаи расхождений в терминологии оговорены в примечаниях переводчика.

Авторы не ставили цель привести в своей книге полную библиографию по теории полугрупп и включили в список литературы только статьи, цитированные в тексте. Естественно было сохранить этот принцип и при переводе, и в библиографию дополнительно включены лишь работы, цитированные в добавлениях и примечаниях. Другим принципом могло бы быть стремление дать полную библиографию, но это было бы практически невозможно в настоящем издании: литература по теории полугрупп насчитывает сейчас более трех тысяч работ (и, таким образом, библиография обоих томов содержит уже не около половины опубликованных статей по алгебраической теории полугрупп, как об этом писали авторы в 1960 г., а значительно менее). Достаточно полная библиография до 1958 г. имеется в книге Е. С. Ляпина, а за 1959—1966 гг.— в упоминавшихся уже обзорах в серии «Итоги науки».

* * *

Перевод 1-го тома осуществлен со второго издания. Главы 1—4 переведены В. А. Баранским, глава 5 — В. Г. Житомирским.

Л. Шеврин

Предисловие к русскому изданию

С большим удовольствием мы встречаем издание нашей работы по полугруппам, выходящее в СССР. Мы надеемся, что этот перевод будет так же хорошо встречен советскими математиками, как английский перевод книги Е. С. Ляпина «Полугруппы» — в западных странах. Эти две работы скорее дополняют, нежели дублируют одна другую; книга профессора Е. С. Ляпина охватывает более широкий материал, в нашей книге более детально изложены некоторые темы.

Пользуясь случаем, мы хотим выразить глубокую благодарность профессору Л. Н. Шеврину и его сотрудникам, взявшим на себя тяжелый труд по переводу книги.

28 июля 1970 г.

А. Х. К.
Г. Б. П

Предисловие

Насколько нам известно, термин «полугруппа» в математической литературе появился впервые на стр. 8 книги Сегье (Séguier J. A., Éléments de la Théorie des Groupes Abstraits, Paris, 1904) и первой работой по полугруппам была небольшая статья Диксона, опубликованная в 1905 г., но по существу развитие теории началось в 1928 г. с публикации очень важной статьи Сушкевича. Он показал (если пользоваться современной терминологией), что каждая конечная полугруппа содержит «ядро» (простой идеал), и полностью определил строение конечных простых полугрупп. Краткое изложение упомянутой статьи дано в приложении.

К сожалению, указанный результат Сушкевича имеет не очень удобную для применения форму. Этот дефект был устранен Рисом в 1940 г. посредством введения понятия матрицы над группой с нулем; кроме того, был рассмотрен более широкий класс полугрупп — простые полугруппы, содержащие примитивные идемпотенты. Теорема Риса выглядит аналогом теоремы Веддербёрна о простых алгебрах. Она оказала существенное влияние на дальнейшее развитие теории полугрупп.

С 1940 г. число ежегодно появляющихся статей по полугруппам неуклонно увеличивалось. Как следствие этого все возрастающего интереса и возникла данная книга. До сих пор была опубликована лишь одна книга, относящаяся в основном к алгебраической теории полугрупп, а именно «Теория обобщенных групп» Сушкевича (Харьков, 1937); эта книга стала теперь библиографической редкостью. Полугруппам посвящена также одна из глав книги Брака (Bruck R., A Survey of Binary Systems, Ergebnisse, 1958). Имеется, конечно, книга Хилле (Hille E., Functional Analysis and Semigroups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1948) и ее переработанное Хилле и Филлипсом издание 1957 г. [1]), но в ней рассматривается аналитическая теория полугрупп и ее приложения в анализе. По-видимому, наступило время для систематического изложения алгебраической теории. (С тех пор, как были

---

[1]) Имеется русский перевод обоих изданий (ИЛ, 1951 и 1962).— *Прим. ред.*

написаны эти строки, такое изложение появилось на русском языке: Ляпин Е. С., «Полугруппы», Москва, 1960).

Основной трудностью для такого изложения является то, что литература по полугруппам охватывает крайне разнообразные темы. Столкнувшись с этой ситуацией, мы ограничили себя теми частями существующей теории, которые уже доказали способность к согласованному развитию. Весь первый том и первая половина второго тома концентрируются вокруг изучения строения полугрупп некоторых типов (таких, как простые полугруппы, инверсные полугруппы, объединения групп, полугруппы с условиями минимальности и т. д.) и их представлений отображениями или матрицами. Во второй половине второго тома излагается теория конгруэнций и вложений полугрупп в группы. Здесь, в частности, нашли отражение работы активной французской теоретико-полугрупповой школы, основанной в 1941 г. Дюбреем.

Для того чтобы не выходить в нашей книге из разумных границ, мы понимаем термин «алгебраическая» в следующем довольно-таки четко очерченном смысле: рассматриваемые полугруппы не наделены никакой другой структурой (в смысле Бурбаки). Поэтому из рассмотрения исключаются не только топологические полугруппы, но также и упорядоченные полугруппы. К счастью, хороший обзор структурно упорядоченных полугрупп и групп содержится в книге Биркгофа «Теория структур» (B i r k h o f f G., Lattice theory, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1940, переиздано в 1948 г.) [1]. Мы не рассматриваем также принадлежащее Лоренцену обобщение мультипликативной теории идеалов (см., например, § 5 книги Крулля (K r u l l W., Idealtheorie, Ergebnisse, 1935) на произвольную коммутативную полугруппу S с сокращениями, когда на S (или ее группе частных) задано семейство подмножеств, называемых r-идеалами и удовлетворяющих некоторым условиям, аналогичным условиям на замкнутые множества в топологии.

Хотя все необходимые для понимания книги сведения содержатся в ней, все же от читателя требуется некоторое знакомство с множествами, отображениями, группами и структурами. Необходимый материал, относящийся к этим областям, можно найти в вводных курсах, подобных книге Биркгофа и Маклейна (B i r k h o f f G., M a c L a n e S., A Survey of Modern Algebra, New

[1] Имеется русский перевод второго издания (ИЛ, 1952). В 1967 г. в США вышло новое издание книги Биркгофа. Заметим еще, что упорядоченным полугруппам посвящено несколько глав книги Фукса «Частично упорядоченные алгебраические системы» («Мир», 1965). Топологическим полугруппам посвящены монографии Паалман-де-Миранды (P a a l m a n - d e M i r a n d a A. B., Topological semigroups, Math. Centrum, Amsterdam, 1964) и Хофмана и Мостерта (H o f m a n n K. H., M o s t e r t P. S., Elements of compact semigroups, Columbus, OHIO, 1966).— *Прим. ред.*

York, 1953) [1]). Лишь в главе 5 потребуется несколько больше предварительных знаний, но даже здесь приведены классические определения и теоремы о матричных представлениях алгебр и групп.

В конце каждого параграфа мы приводим ряд упражнений. Это сделано для того, чтобы иллюстрировать и дополнять текст, а также чтобы обратить внимание на некоторые статьи, не цитированные в тексте. Все упражнения могут быть решены с помощью методов и результатов, изложенных в основном тексте, и часто даже проще, чем это сделано в первоисточниках. Каждый том имеет отдельную .библиографию. В нее включены только те статьи, на которые имеются ссылки в тексте. Библиография обоих томов содержит около половины появившихся статей по алгебраической (в указанном выше смысле) теории полугрупп. (Библиография в книге Ляпина более полна.)

Материал первого тома был представлен (более или менее) в курсе лекций для студентов второго года обучения Тулейнского университета в течение 1958/59 учебного года, и этот том в значительной мере выиграл от критики слушателей. Авторы хотели бы также выразить свою благодарность профессорам Уоллесу, Миллеру и Конраду за многочисленные полезные советы и, кроме того, доктору Манну за его весьма ценную критику, особенно главы 5, и за разрешение использовать неопубликованный материал из его диссертации (Кэмбриджский университет, 1955) для параграфов 3.4 и 3.5. Мы глубоко благодарны проф. Шварцу и центральной библиотеке Словацкой академии наук, предоставившими (по своей инициативе) в наше распоряжение фотокопию книги Сушкевича. Наконец, авторы признательны за поддержку со стороны Национального научного фонда (США).

Альфред Х. Клиффорд
Гордон Б. Престон

---

[1]) Укажем соответствующие книги на русском языке: Курош А. Г., «Лекции по обшей алгебре», М., 1962; Мальцев А. И., «Алгебраические системы», М., 1970.— *Прим. ред.*

Глава 1

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этой вводной главе мы приведем ряд элементарных понятий и предложений о полугруппах, большинство из которых необходимо для остальной части книги. Кроме того, мы хотим дать здесь случайному читателю широкий и в то же время не слишком поверхностный обзор предмета [1]). Этим объясняется тот факт, что некоторые темы изложены именно здесь, хотя их можно было отложить до последующих глав (что особенно касается последних параграфов данной главы).

§ 1.1. *Основные определения*

Бинарной операцией на множестве S называется отображение $S \times S$ в S, где $S \times S$ есть множество всех упорядоченных пар элементов из S. Если это отображение обозначается точкой ($\cdot$), то образ в S элемента $(a, b) \in S \times S$ будет обозначаться через $a \cdot b$. Часто мы будем опускать точку и писать просто ab. Для обозначения бинарных операций будут использоваться также символы $+$, $\circ$, $*$.

Группоидом называется система $S(\,\cdot\,)$, состоящая из непустого множества S и бинарной операции ($\cdot$) на нем. Обычно мы будем писать S вместо $S(\,\cdot\,)$, если это не может привести к недоразумению.

Частичной бинарной операцией на множестве S называется отображение непустого подмножества множества $S \times S$ в S. Под *частичным группоидом* мы будем понимать систему $S(\cdot)$, состоящую из непустого множества S и частичной бинарной операции ($\cdot$) на нем.

Бинарная операция ($\cdot$) на множестве S называется *ассоциативной*, если $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ для всех a, b, c из S. *Полугруппа* — это такой группоид $S(\,\cdot\,)$, в котором операция ($\cdot$) ассоциативна.

---

[1]) Следует все же признать, что эта вторая цель вряд ли вообще достижима в одной главе, и текст настоящей главы показывает, что авторы с большой полнотой выполняют лишь обещание, данное в первом предложении вступительного абзаца.— *Прим. ред.*

Мы часто будем использовать выражение «S является полугруппой относительно ($\cdot$)», подразумевая, что ($\cdot$) есть ассоциативная бинарная операция на S. Часто это выражение в дальнейшем сокращается до «S есть полугруппа».

Предмет исследования данной книги — полугруппы, а не группоиды или частичные группоиды. Однако последние, более общие, системы иногда полезны в теории полугрупп и потому их также нужно принять во внимание.

Единственным исключением из принятого выше соглашения о терминологии будет понятие *группоида Брандта* (§ 3.3), который в действительности есть частичный группоид, удовлетворяющий нескольким довольно сильным условиям.

Под *преобразованием* множества X мы будем понимать отображение X в себя. Всюду, за исключением гл. 5, мы будем обозначать образ элемента $x \in X$ при преобразовании или отображении α через $x\alpha$ (вместо αx или $\alpha(x)$).

Произведением (*суперпозицией*[1]) или *композицией*) двух преобразований α и β множества X называется преобразование $\alpha\beta$, определенное следующим образом: $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ для всех $x \in X$ (т. е. α применяется раньше β). Ассоциативный закон $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ выполняется, так как для каждого $x \in X$

$$x((\alpha\beta)\gamma) = (x(\alpha\beta))\gamma = ((x\alpha)\beta)\gamma = \\ = (x\alpha)(\beta\gamma) = x(\alpha(\beta\gamma)).$$

Следовательно, множество $\mathcal{T}_X$ всех преобразований множества X есть полугруппа относительно суперпозиции. Назовем $\mathcal{T}_X$ *полной полугруппой преобразований на X* [2]).

Будем говорить, что отображение α множества X в множество Y есть отображение *на*, если каждый элемент из Y является образом по крайней мере одного элемента из X. Говорят, что отображение α множества X в Y *взаимно однозначно*, если различные элементы из X отображаются посредством α в различные элементы из Y. Взаимно однозначное отображение множества X на себя будет называться *подстановкой* множества X, даже если X бесконечно. Множество $\mathcal{G}_X$ всех подстановок множества X с операцией суперпозиции называется *симметрической группой на X*.

Если X — конечное множество $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $y_1, \ldots, y_n$ — элементы из X, не обязательно различные, то будем пользоваться классическим обозначением

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \ldots x_n \\ y_1 y_2 \ldots y_n \end{pmatrix},$$

[1]) В оригинале — *итерация* (iteration); этот термин в указанном смысле совсем не принят в русской литературе; с другой стороны, термин *суперпозиция* весьма употребителен.— *Прим. перев.*

[2]) Эту полугруппу называют также *симметрической полугруппой* (в работе А. И. Мальцева [1952] она называлась *симметрическим группоидом*).— *Прим. ред.*

понимая под α преобразование множества X, определенное следующим образом:

$$x_i\alpha = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — элементы полугруппы S, и пусть

$$a_1a_2 \ldots a_n = a_1 (a_2 (a_3 \ldots (a_{n-1}a_n) \ldots)).$$

Тогда любое другое имеющее смысл выражение A, полученное расстановкой скобок в конечной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$, равно $a_1a_2 \ldots a_n$ [1]).

Это утверждение тривиально при $n = 2$. Проведем доказательство по индукции. Предположим, что утверждение верно для всех выражений длины, меньшей чем n. Выражение A, поскольку оно имеет смысл в полугруппе S, должно быть произведением BC некоторых имеющих смысл в S выражений B и C, полученных соответственно из последовательностей $a_1, \ldots, a_r$ и $a_{r+1}, \ldots, a_n$ расстановкой скобок при некотором r, $1 \leqslant r < n$. По предположению индукции $B = a_1a_2 \ldots a_r = a_1 (a_2 \ldots a_r)$. Следовательно, в силу ассоциативности

$$A = BC = (a_1 (a_2 \ldots a_r)) C = a_1 ((a_2 \ldots a_r) C).$$

Но $(a_2 \ldots a_r) C$ — имеющее смысл выражение длины $n - 1$ от $a_2, \ldots, a_n$ и по предположению оно равно $a_2 \ldots a_n$, откуда следует нужное заключение.

Для любого положительного целого числа n назовем *n-й степенью* a^n элемента a полугруппы S элемент $a_1a_2 \ldots a_n$ при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$. Следующие два «закона показателей»

$$a^{m+n} = a^m a^n, \quad (a^m)^n = a^{mn},$$

очевидно, выполняются для любого $a \in S$ и для любых положительных чисел m и n.

Непустое подмножество T группоида S называется его *подгруппоидом*, если из включений $a \in T$ и $b \in T$ следует, что $ab \in T$. Пересечение любого семейства подгруппоидов, очевидно, либо пусто, либо является подгруппоидом. Если A — непустое подмножество группоида S, то пересечение всех подгруппоидов из S, содержащих A (S само является одним из таких подгруппоидов), есть подгруппоид $\langle A \rangle$ группоида S, содержащий A и содержащийся в каждом подгруппоиде из S, содержащем A. Скажем, что $\langle A \rangle$ есть *подгруппоид группоида S, порожденный A*. Подгруппоид $\langle A \rangle$ можно также описать как множество всех элементов из S, представимых в виде конечных произведений элементов из A. Если $\langle A \rangle = S$, то A будем называть *порождающим множеством группоида S*. Если S — полугруппа, то любой подгруппоид из S

[1]) Более точно следовало бы говорить о равенстве не выражений, а элементов полугруппы, представленных этими выражениями.— *Прим. ред.*

также является полугруппой, и мы будем пользоваться термином *подполугруппа* вместо термина *подгруппоид*.

Если S — группоид, то мощность $|S|$ множества S называется *порядком* S. Если этот порядок конечен, то мы можем задать бинарную операцию в S посредством ее *таблицы умножения* (*таблицы Кэли*) так же, как и для конечных групп; часто такой наглядный способ задания полезен даже для бесконечного S. Таблица Кэли есть квадратная матрица, состоящая из элементов полугруппы S, строки и столбцы которой занумерованы элементами из S таким образом, что элемент, находящийся в a-строке и b-столбце ($a, b \in S$), равен произведению ab.

Говорят, что элемент a группоида S *сократим слева* [*справа*], если для любых $x, y \in S$ из соотношения $ax = ay$ [$xa = ya$] следует равенство $x = y$. Группоид S называется *группоидом с левым* [*правым*] *сокращением*, если каждый элемент из S сократим слева [справа]. Мы говорим, что S — *группоид с сокращениями*, если S есть группоид и с левым, и с правым сокращением [1]).

Говорят, что два элемента a и b группоида S *коммутируют* [2]), если $ab = ba$. В этом случае выполняется еще один «закон показателей» (третий): $(ab)^n = a^n b^n$. Группоид S называется *коммутативным*, если любые два его элемента коммутируют. Элемент полугруппы S, коммутирующий с каждым элементом из S, называется *центральным элементом*. Множество всех центральных элементов полугруппы S либо пусто, либо является подполугруппой. В последнем случае оно называется *центром* полугруппы S. *Если* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — *элементы коммутативной полугруппы и* φ — *произвольная подстановка на множестве* $\{1, 2, \ldots, n\}$, то

$$a_{1\varphi}a_{2\varphi} \ldots a_{n\varphi} = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Это утверждение легко доказывается индукцией по n.

Элемент e группоида S называется *левой* [*правой*] *единицей*, если $ea = a$ [$ae = a$] для всех $a \in S$. Элемент e группоида S называется *двусторонней единицей* (или просто *единицей*), если e — и левая, и правая единица. Заметим, что если S содержит левую единицу e и правую единицу f, то $e = f$; действительно, $ef = f$, так как e — левая единица, и $ef = e$, так как f — правая единица. Как следствие этого факта получаем, что *для группоида S выполняется в точности одно из следующих утверждений:*

(1) *S не имеет ни левых, ни правых единиц;*

(2) *S обладает по крайней мере одной левой единицей, но не имеет правых единиц;*

(3) *S обладает по крайней мере одной правой единицей, но не имеет левых единиц;*

---

1) Употребителен также термин *группоид с левым* (*правым, двусторонним*) *законом сокращения*.— *Прим. ред.*

2) Или *перестановочны*.— *Прим. перев.*

(4) *S обладает единственной двусторонней единицей и не имеет других левых или правых единиц.*

Элемент z группоида S называется *левым* [*правым*] *нулем*, если $za = z$ [$az = z$] для любого $a \in S$. Элемент z группоида S называется *нулем*, если z — и левый, и правый нуль. Если группоид S обладает левым нулем z_1 и правым нулем z_2, то $z_1 = z_2$. Следовательно, для любого группоида S выполняется в точности одно из предыдущих четырех утверждений с заменой в них слова «*единица*» на слово «*нуль*».

Пусть X — произвольное множество. Определим бинарную операцию ($\circ$) в X, полагая $x \circ y = y$ для всех $x, y \in X$. Ассоциативность легко проверяется. Назовем $X(\circ)$ *полугруппой правых нулей*. Каждый элемент из $X(\circ)$ является правым нулем и левой единицей одновременно. *Полугруппа левых нулей* $X(*)$ определяется двойственным образом ($x * y = x$ для всех $x, y \in X$). Несмотря на их тривиальность, эти полугруппы естественным образом появляются в ряде исследований, например, в приведенной далее теореме 1.27.

Полугруппу S с нулем 0 будем называть *полугруппой с нулевым умножением* [1]), если $ab = 0$ для всех $a, b \in S$.

Пусть S — произвольная полугруппа, и пусть 1 — символ, не являющийся элементом из S. Распространим бинарную операцию, заданную в S, на множество $S \cup 1$, полагая $11 = 1$ и $1a = a1 = a$ для любого $a \in S$. Легко проверить, что $S \cup 1$ есть полугруппа с единицей 1. Мы называем переход от S к S^1 «присоединением единицы к S». Аналогичным образом можно присоединить нуль 0 к S, полагая $00 = 0a = a0 = 0$ для всех $a \in S$. *На протяжении всей книги мы будем твердо придерживаться следующих обозначений:*

$$S^1 = \begin{cases} S, & \text{если } S \text{ имеет единицу,} \\ S \cup 1 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$S^0 = \begin{cases} S, & \text{если } S \text{ имеет нуль и } |S| > 1, \\ S \cup 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Элемент e группоида S называется *идемпотентом*, если $ee = e$. Односторонние единицы и нули суть идемпотенты. Обратное утверждение в общем случае неверно (см., однако, упражнение 1 и лемму 1.26). Если каждый элемент полугруппы S есть идемпотент, то будем говорить, что S есть *полугруппа идемпотентов*, или *связка*. Связки были введены Клейн-Барменом [1940], который использовал для них термин «Schief».

Вебер (W e b e r H., Lehrbuch der Algebra, v. 2 (1896), 3—4) определяет *группу* как полугруппу G, в которой для любых двух

[1]) В оригинале — *нулевая полугруппа* (zero or null semigroup).— *Прим. перев.*

элементов a, $b \in G$ существуют такие единственные элементы x, $y \in G$, что $ax = b$ и $ya = b$. Хантингтон (Huntington E. V., Simplified definition of a group, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 8 (1901—1902), 296—300) показал, что постулировать единственность x и y не обязательно, так как это является следствием разрешимости уравнений $ax = b$, $ya = b$.

Эквивалентное определение группы было дано Диксоном (Dickson L. E., Definitions of a group and a field by independent postulates, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6 (1905), 198—204), а именно: *группа* есть полугруппа G, содержащая такую левую единицу e, что для любого элемента $a \in G$ существует $y \in G$, такой, что $ya = e$. Элемент y, удовлетворяющий уравнению $ya = e$, называется *левым обратным для a относительно e*. Диксон показал, что e является также правой единицей (и поэтому единственной единицей), а каждый левый обратный элемент для a является правым обратным и единствен. Обратный элемент для a будет, как обычно, обозначаться через a^{-1}. Единственными решениями уравнений $ax = b$ и $ya = b$ являются $x = a^{-1}b$ и $y = ba^{-1}$.

Первой опубликованной системой групповых аксиом такого типа была система Пьерпонта (Pierpont J., Galois theory of algebraic equations, II, *Ann. of Math.*, 2 (1900—1901), 22—56, см. стр. 47); он постулировал существование двусторонней единицы e и двустороннего обратного a' для каждого элемента a: $aa' = a'a = e$ [1]).

Подгруппой полугруппы S мы называем подполугруппу T из S, являющуюся группой относительно бинарной операции, определенной в S. Это эквивалентно тому, что T есть подполугруппа из S, в которой для любых a, $b \in T$ существуют x, $y \in T$, такие, что $ax = b$ и $ya = b$. Отсюда легко получить, что *подмножество T полугруппы S является подгруппой тогда и только тогда, когда $aT = Ta = T$ для любого $a \in T$*. (Пример: если X — множество, то $\mathscr{G}_X$ есть подгруппа полугруппы $\mathscr{T}_X$.)

Единица e подгруппы T полугруппы S является идемпотентом, но не обязательно единицей полугруппы S.

Если G — группа, то в силу принятого выше соглашения G^0 обозначает $G \cup 0$, т. е. группу G с присоединенным нулем. Всякую такую полугруппу G^0 мы будем называть *группой с нулем*. Например, пусть $R(\circ, +)$ — кольцо. Тогда $R(\circ)$ есть полугруппа, которая называется мультипликативной полугруппой кольца $R(\circ, +)$. Очевидно, $R(\circ, +)$ является телом тогда и только тогда, когда $R(\circ)$ есть группа с нулем.

Два предложения или понятия мы называем *двойственными*, если одно из них получается из другого заменой каждого произ-

---

[1]) Более подробно о различных определениях группы см. Курош А. Г., Теория групп, М., 1967.— *Прим. ред.*

ведения ab в соответствующей формулировке на ba. Например, «левая единица» и «правая единица»— двойственные понятия. Приведем определение группы, двойственное определению Диксона. Группа есть полугруппа, содержащая такую правую единицу e, что каждый ее элемент обладает правым обратным элементом относительно e. Определение Вебера — Хантингтона двойственно самому себе.

Через $d(A)$ будем обозначать предложение, двойственное предложению A. Если предложение имеет вид «A влечет за собой B», то двойственное ему предложение имеет вид «$d(A)$ влечет за собой $d(B)$». Очевидно, что если верно одно из них, то верно и другое. *В книге будет установлено большое число теорем, не двойственных самим себе, и двойственные им теоремы будут считаться доказанными без дополнительных комментариев.*

Если A и B — подмножества группоида S, то произведением AB множеств A и B называется множество всех элементов вида ab, где $a \in A$, $b \in B$. Если $A = \{a\}$ [$B = \{b\}$], то будем иногда писать aB [Ab] вместо AB.

Таким образом,

$$AB = \bigcup \{Ab \mid b \in B\} = \bigcup \{aB \mid a \in A\}.$$

Левым [*правым*] *идеалом* группоида S называется такое непустое подмножество A из S, что $SA \subseteq A$ [$AS \subseteq A$]. *Двусторонним идеалом* или просто *идеалом* называется подмножество, являющееся и левым, и правым идеалом. Группоид S называется *простым слева* [*справа*], если S является его единственным левым [правым] идеалом. Аналогично, группоид S называется *простым*, если он не содержит собственных (двусторонних) идеалов.

Если A — непустое подмножество группоида S, то пересечение всех левых идеалов из S, содержащих A (S — один из таких идеалов), является левым идеалом, содержащим A и содержащимся в любом другом левом идеале с таким свойством. Мы называем его *левым идеалом группоида S, порожденным A*. Если S — полугруппа, то левый идеал, порожденный A, равен $A \cup SA = S^1A$. Вводя аналогичные определения, легко заметить, что правый идеал, порожденный A, равен $A \cup AS = AS^1$ и (двусторонний) идеал в S, порожденный A, равен $A \cup SA \cup AS \cup SAS = S^1AS^1$. Если, в частности, A состоит из одного элемента a, то мы называем $L(a) = S^1a$, $R(a) = aS^1$ и $J(a) = S^1aS^1$ соответственно *главным* левым, правым и двусторонним идеалом полугруппы S, порожденным a.

Полугруппа S проста справа тогда и только тогда, когда $aS = S$ для каждого $a \in S$. Действительно, если $aS \neq S$, то aS — собственный правый идеал полугруппы S; если R — собственный правый идеал полугруппы S и $a \in R$, то $aS \subseteq R \neq S$, т. е. $aS \neq S$. Утверждение «$aS = S$ для каждого $a \in S$» эквивалентно утверждению «для любых a, $b \in S$ существует такой элемент $x \in S$, что $ax = b$». Сопоставляя это с двойственным предложением и вспоминая систему аксиом Вебера — Хантингтона для групп, мы приходим к утверждению, что *полугруппа является группой тогда и только тогда, когда она проста как слева, так и справа.*

Упражнения к § 1.1

1. (a) Если e — идемпотент полугруппы S с левым сокращением, то e является левой единицей в S.

(b) Полугруппа с сокращениями может содержать самое большее один идемпотент, а именно единицу.

2. (a) Если S — полугруппа с сокращениями, то такова и полугруппа S^1.

(b) Пусть S — полугруппа левых нулей и $|S| > 1$. Тогда S — полугруппа с правым сокращением, но S^1 не обладает этим свойством.

3. Пусть a — элемент полугруппы S, и пусть $A = \{x \mid axa = a, x \in S\}$. Если $A \neq \varnothing$, то Aa $[aA]$ есть подполугруппа левых [правых] нулей. (Брак [1958], стр. 25—26.)

4. Полугруппа левых нулей проста слева, и каждый ее элемент образует правый идеал.

5. Пусть S — такая полугруппа, что если $ab = cd$ (a, b, c, $d \in S$), то или $a = c$, или $b = d$. Тогда S — либо полугруппа левых нулей, либо полугруппа правых нулей. (Тьеррен [1952].)

6. Если S — полугруппа, обладающая правым нулем, то множество K всех правых нулей из S есть подполугруппа (являющаяся, очевидно, полугруппой правых нулей) и, кроме того, двусторонний идеал, содержащийся в каждом двустороннем идеале полугруппы S.

7. Правыми нулями полугруппы $\mathcal{T}_X$ являются лишь «постоянные» преобразования, которые отображают все элементы множества X на один и тот же, фиксированный для данного преобразования, элемент. Если $|X| > 1$, то $\mathcal{T}_X$ не содержит левых нулей.

8. Пусть K — множество правых нулей полугруппы S. Предположим, что $K \neq \varnothing$. Тогда $S \cong \mathcal{T}_K$ в том и только в том случае, когда (i) $xa = xb$ (a, $b \in S$) для всех $x \in K$ влечет за собой $a = b$ и (ii) если α — произвольное преобразование множества K, то существует такой элемент $a \in S$, что $xa = x\alpha$ для всех $x \in K$. (Мальцев [1952].)

9. Элемент $\alpha \in \mathcal{T}_X$ является идемпотентом тогда и только тогда, когда ограничение преобразования α на множестве $X\alpha$ есть тождественное преобразование.

10. Пусть X — конечное множество мощности n. Тогда $\mathcal{T}_X$ содержит симметрическую группу $\mathcal{G}_X$ степени n. Если $\alpha \in \mathcal{T}_X$,

то назовем *рангом* r преобразования α число $|X\alpha|$, а его *дефектом* — число $n-r$.

(a) Если β — элемент из $\mathscr{T}_X$ ранга $r<n$, то существуют такие γ, $\delta \in \mathscr{T}_X$, что ранг γ равен $r+1$, ранг δ равен $n-1$ и $\beta=\gamma\delta$. (Можно выбрать δ и γ так, что δ будет идемпотентом, а γ будет отличаться от β действием лишь на одной точке множества X.) По индукции каждый элемент дефекта k $(1\leqslant k\leqslant n-1)$ из $\mathscr{T}_X$ представим в виде произведения элемента из $\mathscr{G}_X$ на k элементов (идемпотентов) дефекта 1.

(b) Если α — элемент дефекта 1 из $\mathscr{T}_X$, то любой другой элемент дефекта 1 из $\mathscr{T}_X$ можно выразить в виде $\lambda\alpha\mu$, где λ, $\mu \in \mathscr{G}_X$.

(c) Если α — элемент дефекта 1 из $\mathscr{T}_X$, то $\langle \mathscr{G}_X, \alpha\rangle = \mathscr{T}_X$. (Воробьев [1953].)

§ 1.2. Тест ассоциативности по Лайту

Проверка ассоциативности конечного группоида $S(\cdot)$, операция $(\cdot)$ которого задана таблицей Кэли,— обычно весьма утомительное занятие. Следующая процедура была предложена одному из авторов Лайтом в 1949 г.

Эту процедуру нужно проделать для каждого элемента a группоида S. Однако ниже мы покажем, что ее достаточно проделать лишь для каждого элемента a из некоторого порождающего множества группоида S.

Рассмотрим две бинарные операции $(*)$ и $(\circ)$, определенные в S следующим образом:

$$x * y = x\cdot(a\cdot y),\quad x\circ y=(x\cdot a)\cdot y.$$

Ассоциативность выполняется в $S(\cdot)$ тогда и только тогда, когда для каждого фиксированного элемента $a\in S$ эти две бинарные операции совпадают. Основная идея по существу состоит в построении таблиц Кэли для операций $(*)$ и $(\circ)$ и в проверке их совпадения.

$(*)$-таблица получается из первоначальной $(\cdot)$-таблицы заменой y-столбца для каждого $y\in S$ на $(a\cdot y)$-столбец. Аналогично, для получения $(\circ)$-таблицы нам нужно в x-строку записать $(x\cdot a)$-строку $(\cdot)$-таблицы. Однако не надо выписывать $(\circ)$-таблицу, так как мы можем прямо проверить, совпадает ли x-строка $(*)$-таблицы с $(x\cdot a)$-строкой $(\cdot)$-таблицы.

Для удобства выполнения проверки мы заменяем верхнюю строку индексов $(*)$-таблицы на a-строку $(\cdot)$-таблицы, а левый столбец индексов — на a-столбец $(\cdot)$-таблицы. Каждое вхождение $a\cdot y$ в a-строку $(\cdot)$-таблицы показывает нам, какой из столбцов $(\cdot)$-таблицы записать в качестве y-столбца $(*)$-таблицы, а каждое вхождение $x\cdot a$ в a-столбец $(\cdot)$-таблицы показывает нам, какую строку $(\cdot)$-таблицы нужно сравнить с x-строкой $(*)$-таблицы. Например, пусть группоид $S\,(\cdot)$ задан следующей таблицей:

$\cdot$	a	b	c	d	e
a	a	a	a	d	d
b	a	b	c	d	d
c	a	c	b	d	d
d	d	d	d	a	a
e	d	e	e	a	a

Множество $\{c, e\}$ порождает S, так как $a = e\cdot e$, $b = c\cdot c$ и $d = c\cdot e$. Выпишем $(*)$-таблицы (где строки и столбцы индексов изменены, как описано выше) для элементов c и e:

c	a	c	b	d	d
a	a	a	a	d	d
c	a	c	b	d	d
b	a	b	c	d	d
d	d	d	d	a	a
e	d	e	e	a	a

e	d	e	e	a	a
d	d	d	d	a	a
d	d	d	d	a	a
d	d	d	d	a	a
a	a	a	a	d	d
a	a	a	a	d	d

Таким образом, чтобы получить c-таблицу, записываем c-строку $(acbdd)$ из $(\cdot)$-таблицы в верхнюю строку индексов и, аналогично, c-столбец — в левый столбец индексов. Теперь выписываем столбцы $(\cdot)$-таблицы в порядке, определяемом верхней строкой индексов, т. е. a-столбец, c-столбец и т. д. Затем проверяем, совпадают ли строки c-таблицы со строками $(\cdot)$-таблицы, занумерованными левым столбцом индексов. Можно было бы выписать строки $(\cdot)$-таблицы в порядке, определяемом левым столбцом индексов, а затем проверить, что столбцы правильно занумерованы. Проделав проверку для c-таблицы и e-таблицы, мы утверждаем, что $S\,(\cdot)$ — полугруппа.

Тот факт, что тест Лайта достаточно проделать лишь для элементов некоторого порождающего множества группоида S, является непосредственным следствием такого утверждения: *множество всех элементов a группоида S, ассоциативных со всеми элементами из S в том смысле, что $x\,(ay) = (xa)\,y$ для любых $x, y \in S$, есть подполугруппа группоида S.* Действительно, пусть a и b — такие элементы из S, что $x\,(ay) = (xa)\,y$, $x\,(by) = (xb)\,y$ для всех $x, y \in S$. Тогда

$$x\,((ab)\,y) = x\,(a\,(by)) = (xa)\,(by) = ((xa)\,b)\,y = (x\,(ab))\,y.$$

Таким образом, если a и b ассоциативны со всеми элементами из S, то тем же свойством обладает и их произведение ab.

Упражнения к § 1.2

1. Проверить ассоциативность:

	e	f	g	a
e	e	e	e	e
f	f	f	f	f
g	g	g	g	g
a	e	e	f	e

2. Проверить ассоциативность:

	e	f	g	a	0
e	e	a	e	a	0
f	0	f	g	0	0
g	g	f	g	f	0
a	0	a	e	0	0
0	0	0	0	0	0

3. Множество всех элементов a группоида S, таких, что $a(xy) = (ax)y$ для всех $x, y \in S$, является подполугруппой.

§ 1.3. *Сдвиги и регулярные представления*

Пусть S и S' — группоиды. Отображение φ группоида S в S' называется *гомоморфизмом*, если $(ab)\varphi = (a\varphi)(b\varphi)$ для всех $a, b \in S$. Область значений $S\varphi$ гомоморфизма φ, т. е. множество всех элементов вида $a\varphi$ из S', где $a \in S$, является подгруппоидом группоида S'. Будем говорить, что $S\varphi$ есть *гомоморфный образ* группоида S и писать $S \sim S\varphi$. *Если S — полугруппа, то $S\varphi$ — также полугруппа.* Взаимно однозначный гомоморфизм φ группоида S в группоид S' называется *изоморфизмом* S в S'. В этом случае говорят, что группоиды S и $S\varphi$ изоморфны и пишут $S \cong S\varphi$. Гомоморфизм группоида S в себя называется *эндоморфизмом*, а изоморфизм группоида S на себя — *автоморфизмом*.

Отображение φ группоида S в группоид S' называется *антигомоморфизмом*, если $(ab)\varphi = (b\varphi)(a\varphi)$ для всех $a, b \in S$. Понятия *антиизоморфизма*, *антиэндоморфизма* и *антиавтоморфизма* определяются аналогично. Преобразование $x \to x^*$ группоида S называется *инволютивным антиавтоморфизмом*, если $(x^*)^* = x$ и $(xy)^* = y^*x^*$.

Пусть S — группоид, X — произвольное множество и $\mathcal{T}_X$ — полная полугруппа преобразований на X. Гомоморфизм [антигомоморфизм] φ группоида S в $\mathcal{T}_X$ называется *представлением* [*антипредставлением*] группоида S преобразованиями множества X. Если T — подгруппоид группоида S, то $\varphi \mid T$ (ограничение φ на T) есть, очевидно, представление [антипредставление] группоида T; говорят, что оно *индуцировано* представлением [антипредставлением] φ. Представление [антипредставление] группоида S называется *точным*, если оно взаимно однозначно.

Каждому элементу a группоида S сопоставим преобразование ρ_a [λ_a] группоида S, полагая $x\rho_a = xa$ [$x\lambda_a = ax$] для всех $x \in S$. Назовем ρ_a [λ_a] *внутренним правым* [*левым*] *сдвигом* группоида S, соответствующим элементу $a \in S$. Преобразования ρ_a и λ_a являются, конечно, элементами полугруппы $\mathcal{T}_S$.

Из равенств $x\rho_{ab} = x(ab)$ и $x\rho_a\rho_b = (xa)b$ вытекает, что группоид S является полугруппой тогда и только тогда, когда $\rho_{ab} = \rho_a\rho_b$, т. е. тогда и только тогда, когда отображение $a \to \rho_a$ есть представление группоида S преобразованиями множества S. Аналогично, группоид S является полугруппой тогда и только тогда, когда $\lambda_{ab} = \lambda_b\lambda_a$, т. е. тогда и только тогда, когда отображение $a \to \lambda_a$ есть антипредставление группоида S. Если S — полугруппа, то отображение $a \to \rho_a$ [$a \to \lambda_a$] будем называть *регулярным представлением* [*антипредставлением*] полугруппы S. Под *расширенным регулярным представлением* [*антипредставлением*] полугруппы S мы будем понимать представление [антипредставление], индуцированное в S регулярным представлением [антипредставлением] полугруппы S^1. Расширенное регулярное представление [антипредставление] полугруппы S всегда точно.

Полугруппа S называется *редуктивной слева* [*справа*], если из того, что $xa = xb$ [$ax = bx$] для всех $x \in S$, следует $a = b$ (a, $b \in S$). Регулярное представление [антипредставление] полугруппы S точно тогда и только тогда, когда S редуктивна слева [справа]. В частности, оно точно, если S обладает левой [правой] единицей или если S — полугруппа с левым [правым] сокращением. Отметим также, что регулярное представление [антипредставление] полугруппы S будет представлением [антипредставлением] взаимно однозначными преобразованиями множества S в том и только в том случае, когда S — полугруппа с правым [левым] сокращением.

В случае когда S не имеет идемпотентов, за исключением, быть может, единицы, мы будем кратко говорить, что «S не имеет идемпотентов $\neq 1$».

Лемма 1.0. *Полугруппа S точно представима взаимно однозначными отображениями некоторого множества в себя тогда и только тогда, когда она с правым сокращением и не имеет идемпотентов $\neq 1$. В этом случае*

(i) *если a и b — элементы из S, такие, что $ab = b$, то $a = 1$ (и $S = S^1$);*

(ii) S^1 — *полугруппа с правым сокращением, не имеющая идемпотентов* $\neq 1$;

(iii) *расширенное регулярное представление полугруппы* S *есть точное представление взаимно однозначными отображениями полугруппы* S^1 *в себя.*

Доказательство. Пусть S — полугруппа взаимно однозначных отображений множества X в себя и α, β, γ — такие элементы из S, что $\alpha\gamma = \beta\gamma$. Тогда $x\alpha\gamma = x\beta\gamma$ для всех $x \in X$. Так как γ — взаимно однозначное отображение, мы заключаем, что $x\alpha = x\beta$ для всех $x \in X$, откуда $\alpha = \beta$. Таким образом, S — полугруппа с правым сокращением.

Если ε — идемпотент из S, то $x\varepsilon\varepsilon = x\varepsilon$ для всех $x \in X$. Так как ε — взаимно однозначное отображение, $x\varepsilon = x$ для всех $x \in X$. Другими словами, ε есть тождественное отображение множества X и поэтому — единица полугруппы S.

Обратно, предположим, что S — полугруппа с правым сокращением и не имеет идемпотентов $\neq 1$.

Будем доказывать утверждения (i), (ii) и (iii); из последнего, в частности, будет следовать достаточность первого утверждения леммы.

Для того чтобы доказать (i), возьмем такие элементы a и b из S, что $ab = b$. Тогда $a^2b = ab$, откуда $a^2 = a$, поскольку можно сокращать справа. Так как S не имеет идемпотентов $\neq 1$, отсюда следует, что a — единица полугруппы S и потому $S = S^1$.

Утверждение (ii) тривиально при $S = S^1$, и мы можем предположить, что $S \neq S^1$. Допустим, от противного, что существуют такие элементы $a, b, c \in S^1$, для которых $ac = bc$, но $a \neq b$. Тогда $c \neq 1$, т. е. $c \in S$. Так как S — полугруппа с правым сокращением, a и b не могут одновременно принадлежать S. Следовательно, мы можем предположить, что $a \in S$ и $b = 1$. Но тогда $ac = c$ и $a \neq 1$, что противоречит утверждению (i). Таким образом, S^1 — полугруппа с правым сокращением, и понятно, что она не содержит идемпотентов $\neq 1$.

Докажем (iii). Пусть φ — расширенное регулярное представление $a \to \rho_a$ полугруппы S $(a \in S)$, где ρ_a — внутренний правый сдвиг $x \to x\rho_a = xa$ полугруппы S^1 $(x \in S^1)$. Тогда, как отмечено выше, φ точно. Если x, y — такие элементы полугруппы S^1, что $x\rho_a = y\rho_a$, т. е. $xa = ya$, то $x = y$ ввиду утверждения (ii). Таким образом, каждый элемент ρ_a из $S\varphi$ является взаимно однозначным отображением полугруппы S^1 в себя.

До появления диссертации Тулли [1960] единственной значительной статьей (из известных нам) по общей теории представлений полугрупп преобразованиями множеств была статья Столла [1944] [1]). Мы не будем углубляться в эту теорию, но посвятим оставшуюся часть данного параграфа сдвигам полугруппы. Результаты, которые мы сейчас изложим, будут использоваться в теории расширений (§ 4.4).

Преобразование ρ полугруппы S называется *правым сдвигом* S, если $(xy)\rho = x(y\rho)$ для всех $x, y \in S$. Преобразование λ полугруппы S называется *левым сдвигом* S, если $(xy)\lambda = (x\lambda)y$ для всех $x, y \in S$. Говорят, что левый сдвиг λ и правый сдвиг ρ *связаны*, если $x(y\lambda) = (x\rho)y$ для всех $x, y \in S$. Например, если $a \in S$, то внутренние сдвиги λ_a и ρ_a связаны.

Множество всех правых [левых] сдвигов полугруппы S есть подполугруппа P [Λ] полугруппы $\mathcal{T}_S$. В самом деле, если $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ и $x, y \in S$, то

$$(x(\lambda_1\lambda_2))y = ((x\lambda_1)\lambda_2)y = ((x\lambda_1)y)\lambda_2 = \\ = ((xy)\lambda_1)\lambda_2 = (xy)(\lambda_1\lambda_2),$$

откуда $\lambda_1\lambda_2 \in \Lambda$. Доказательство того, что из $\rho_1, \rho_2 \in$ P следует $\rho_1\rho_2 \in$ P, проводится аналогично. Множество всех внутренних правых [левых] сдвигов полугруппы S есть подполугруппа P_0 полугруппы P [подполугруппа Λ_0 полугруппы Λ]. Отображение $a \to \rho_a$ [$a \to \lambda_a$] есть гомоморфизм [антигомоморфизм] полугруппы S на P_0 [Λ_0], это не что иное, как регулярное представление [антипредставление] полугруппы S.

Лемма 1.1. *Пусть λ и ρ — соответственно левый и правый сдвиги полугруппы S и $a \in S$. Тогда*

$$\lambda_a\lambda = \lambda_{a\lambda}, \quad \rho_a\rho = \rho_{a\rho}.$$

Если λ и ρ связаны, то

$$\lambda\lambda_a = \lambda_{a\rho}, \quad \rho\rho_a = \rho_{a\lambda}.$$

Доказательство. Для любого $x \in S$ имеем

$$x(\lambda_a\lambda) = (x\lambda_a)\lambda = (ax)\lambda = (a\lambda)x = x\lambda_{a\lambda},$$
$$x(\rho_a\rho) = (x\rho_a)\rho = (xa)\rho = x(a\rho) = x\rho_{a\rho}.$$

Предположим теперь, что λ и ρ связаны. Тогда для любого $x \in S$

$$x(\lambda\lambda_a) = (x\lambda)\lambda_a = a(x\lambda) = (a\rho)x = x\lambda_{a\rho},$$
$$x(\rho\rho_a) = (x\rho)\rho_a = (x\rho)a = x(a\lambda) = x\rho_{a\lambda}.$$

Мы определим *сдвиговую оболочку* [2]) $\bar{S}$ полугруппы S как множество всех пар (λ, ρ), где λ и ρ — связанные левый и правый сдвиги полугруппы S. Если (λ_1, ρ_1) и (λ_2, ρ_2) — элементы из $\bar{S}$, то $(\lambda_2\lambda_1, \rho_1\rho_2)$ также принадлежит $\bar{S}$, так как для любых $x, y \in S$

[1]) Сейчас соответствующее направление теории полугрупп является весьма развитым, в большой степени благодаря работам советских математиков.— *Прим. ред.*

[2]) В оригинале translational hull.— *Прим. перев.*

мы имеем

$$x\,(y\,(\lambda_2\lambda_1)) = x\,((y\lambda_2)\,\lambda_1) = (x\rho_1)\,(y\lambda_2) = \\ = ((x\rho_1)\,\rho_2)\,y = (x\,(\rho_1\rho_2))\,y.$$

Мы можем поэтому определить бинарную операцию в $\overline{S}$, полагая

$$(\lambda_1,\ \rho_1)\,(\lambda_2,\ \rho_2) = (\lambda_2\lambda_1,\ \rho_1\rho_2).$$

Ассоциативность этой операции очевидна, так что $\overline{S}$ является полугруппой.

Пусть $\overline{S}_0$ — множество, состоящее из всех пар вида $(\lambda_a,\ \rho_a)$, где $a \in S$. Легко видеть, что $\overline{S}_0 \subseteq \overline{S}$, так как λ_a и ρ_a связаны. Для любых $a,\ b \in S$ имеем

$$(\lambda_a,\ \rho_a)\,(\lambda_b,\ \rho_b) = (\lambda_b\lambda_a,\ \rho_a\rho_b) = (\lambda_{ab},\ \rho_{ab}).$$

Следовательно, $\overline{S}_0$ — подполугруппа полугруппы $\overline{S}$ и отображение $a \to (\lambda_a,\ \rho_a)$ есть гомоморфизм S на $\overline{S}_0$. Этот гомоморфизм является изоморфизмом в том и только в том случае, когда из равенств $\lambda_a = \lambda_b$ и $\rho_a = \rho_b$ следует, что $a = b$ или, другими словами, из того, что $ax = bx$ и $xa = xb$ для всех $x \in S$, следует равенство $a = b$. Полугруппу S, обладающую этим свойством, будем называть *слабо редуктивной.*

Лемма 1.2. *Пусть S — слабо редуктивная полугруппа. Отождествим S с внутренней частью $\overline{S}_0$ сдвиговой оболочки $\overline{S}$ полугруппы S. Тогда S — идеал полугруппы $\overline{S}$ и для любых $a \in S$ и $(\lambda,\ \rho) \in \overline{S}$ имеем*

$$(\lambda,\ \rho)\,a = a\lambda, \quad a\,(\lambda,\ \rho) = a\rho.$$

Доказательство. По лемме 1.1

$$(\lambda,\ \rho)\,(\lambda_a,\ \rho_a) = (\lambda_a\lambda,\ \rho\rho_a) = (\lambda_{a\lambda},\ \rho_{a\lambda}), \\ (\lambda_a,\ \rho_a)\,(\lambda,\ \rho) = (\lambda\lambda_a,\ \rho_a\rho) = (\lambda_{a\rho},\ \rho_{a\rho}).$$

Если теперь мы отождествим элемент $x \in S$ с элементом $(\lambda_x,\ \rho_x) \in \overline{S}_0$, что допустимо, так как S слабо редуктивна и, следовательно, $x \to (\lambda_x,\ \rho_x)$ есть изоморфизм S на $\overline{S}_0$, то мы получим требуемое заключение.

Последующие рассмотрения показывают, что роль сдвиговой оболочки в теории полугрупп до некоторой степени аналогична роли голоморфа в теории групп.

Если S — идеал полугруппы T, то каждый внутренний правый [левый] сдвиг полугруппы T индуцирует правый [левый] сдвиг в S. В самом деле, если $t \in T$ и $x \in S$, то $x\rho_t = xt \in S$, так как S — идеал в T и, очевидно,

$$(xy)\,\rho_t = (xy)\,t = x\,(yt) = x\,(y\rho_t)$$

для всех $x,\ y \in S$. Аналогично, $x\lambda_t \in S$ и $\lambda_t \mid S$ — левый сдвиг полугруппы S. *Каковы необходимые и достаточные условия для* *того, чтобы полугруппа S вкладывалась в такую полугруппу T, что* (1) *S — идеал в T*, (2) *каждый левый и каждый правый сдвиг S индуцируется некоторым внутренним сдвигом полугруппы T?* Следующая теорема отвечает на этот вопрос для слабо редуктивных полугрупп; в общем случае вопрос остается открытым [1]).

Теорема 1.3. *Слабо редуктивная полугруппа S может быть вложена в некоторую полугруппу T так, что выполняются указанные только что свойства* (1) *и* (2), *тогда и только тогда, когда* (3) *каждый левый сдвиг полугруппы S связан с некоторым ее правым сдвигом, и наоборот.*

Доказательство. Пусть S — полугруппа, которая может быть вложена в полугруппу T так, что выполняются свойства (1) и (2), и пусть λ — произвольный левый сдвиг полугруппы S. Ввиду (2) существует такое $t \in T$, что $\lambda = \lambda_t \mid S$. Тогда $\rho_t \mid S$ — правый сдвиг полугруппы S, связанный с λ. Аналогично, каждый правый сдвиг полугруппы S связан с некоторым ее левым сдвигом.

Обратно, пусть S — слабо редуктивная полугруппа, обладающая свойством (3), и пусть T совпадает со сдвиговой оболочкой $\overline{S}$ полугруппы S. Тогда S — идеал в T по лемме 1.2. Пусть λ — произвольный левый сдвиг полугруппы S. В силу условия (3) существует правый сдвиг ρ полугруппы S, связанный с λ. Тогда $t = (\lambda, \rho) \in T$ и $\lambda_t \mid S = \lambda$ по лемме 1.2. Доказательство двойственного утверждения в условии (2) аналогично.

Упражнения к § 1.3

1. Пусть φ — гомоморфизм группоида S в группоид T. Если I — левый [правый] идеал в S, то $I\varphi$ — левый [правый] идеал в $S\varphi$. Обратно, если J — левый [правый] идеал в T, то $J\varphi^{-1}$ — левый [правый] идеал в S.

2. (a) Полугруппа S является полугруппой с правым сокращением и не имеет идемпотентов $\neq 1$ тогда и только тогда, когда S^1 — полугруппа с правым сокращением.

(b) Редуктивная слева полугруппа с правым сокращением не имеет идемпотентов $\neq 1$.

3. Группоид S является полугруппой тогда и только тогда, когда каждый внутренний правый сдвиг группоида S является его правым сдвигом.

4. Если полугруппа S содержит правую единицу, то каждый ее правый сдвиг является внутренним.

---

[1]) Этот вопрос решен в работе Тамуры и Грэхема [1964]; соответствующее необходимое и достаточное условие состоит в одновременном выполнении условия (3) теоремы 1.3 и следующего условия (4): каждый левый сдвиг полугруппы S коммутирует с любым ее правым сдвигом.— *Прим. ред.*

5. Преобразование группоида S является левым сдвигом тогда и только тогда, когда оно коммутирует с каждым внутренним правым сдвигом группоида S.

6. Если S — такая полугруппа, что $S^2 = S$, то каждый ее правый сдвиг коммутирует с каждым ее левым сдвигом. (Клиффорд [1950].)

7. Полугруппа S является полугруппой правых нулей тогда и только тогда, когда она обладает одним из следующих свойств:

(a) каждое преобразование полугруппы S есть ее правый сдвиг;

(b) единственным левым сдвигом полугруппы S является тождественное отображение. (Поси [1949], (a); Тамура [1955], (a) и (b).)

8. Сдвиговая оболочка $\overline{S}$ полугруппы правых нулей S изоморфна полугруппе $\mathcal{T}_S$ всех преобразований множества S. Отождествляя $\overline{S}$ с $\mathcal{T}_S$ и $\overline{S}_0$ с S, получим, что S совпадает с множеством всех правых нулей полугруппы $\overline{S}$.

9. Пусть S — полугруппа $\{e, f, g, a\}$, определенная таблицей Кэли в упражнении 1 к § 1.2. Полугруппа S слабо редуктивна (в действительности даже редуктивна справа). Преобразование

$$\begin{pmatrix} e & f & g & a \\ g & g & e & g \end{pmatrix}$$

есть левый сдвиг полугруппы S, не связанный ни с каким ее правым сдвигом.

§ 1.4. Полугруппа отношений на множестве

Под *бинарным отношением* на множестве X мы понимаем подмножество ρ декартова произведения $X \times X$ множества X на себя. Если $(a, b) \in \rho$, где a и b — элементы множества X, то мы будем также писать $a\rho b$ и говорить, что «a находится в отношении ρ с b».

Если ρ и σ — отношения на X, то их *композиция* $\rho \circ \sigma$ определяется следующим образом: $(a, b) \in \rho \circ \sigma$, если существует такой элемент $x \in X$, что $(a, x) \in \rho$ и $(x, b) \in \sigma$. Бинарная операция $(\circ)$ ассоциативна. Действительно, если ρ, σ и τ — отношения на X, то каждое из утверждений $(a, b) \in (\rho \circ \sigma) \circ \tau$ и $(a, b) \in \rho \circ (\sigma \circ \tau)$ эквивалентно утверждению о существовании таких $x, y \in X$, что $(a, x) \in \rho$, $(x, y) \in \sigma$ и $(y, b) \in \tau$. Следовательно, множество $\mathcal{B}_X$ всех бинарных отношений на X является полугруппой относительно операции $(\circ)$.

Будем обозначать через ι *отношение равенства* (или «диагональ» множества $X \times X$), а именно $(a, b) \in \iota$ тогда и только тогда, когда $a = b$. Очевидно, ι — единица полугруппы $\mathcal{B}_X$. Через ω

будем обозначать *универсальное отношение*, а именно $(a, b) \in \omega$ для всех $a, b \in X$, т. е. $\omega = X \times X$. *Пустое отношение* $\varnothing$ является нулем полугруппы $\mathscr{B}_X$.

Отношение ρ^{-1}, *обратное* к отношению ρ, определяется следующим образом: $(a, b) \in \rho^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(b, a) \in \rho$. Заметим, что

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho, \quad (\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1}.$$

Другими словами, отображение $\rho \to \rho^{-1}$ есть инволютивный антиизоморфизм полугруппы $\mathscr{B}_X$.

Соотношение $\rho \subseteq \sigma$ означает, что ρ есть подмножество из σ. Это эквивалентно импликации: $a\rho b$ влечет за собой $a\sigma b$. Так как $\mathscr{B}_X$ состоит из всех подмножеств множества $X \times X$, мы можем выполнять в $\mathscr{B}_X$ булевы операции объединения, пересечения и дополнения. В упражнениях будет приведен ряд формул, имеющих место для булевых операций, произведений и обратных отношений.

Говорят, что отношение ρ *симметрично*, если $\rho \subseteq \rho^{-1}$ (и, следовательно, $\rho = \rho^{-1}$), *рефлексивно*, если $\iota \subseteq \rho$, и *транзитивно*, если $\rho \circ \rho \subseteq \rho$. Отношение ρ на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Любое отношение эквивалентности на X является идемпотентом полугруппы $\mathscr{B}_X$.

Если ρ — произвольное отношение на множестве X и $a \in X$, то положим $\rho a = \{x \in X \mid x\rho a\}$ и $a\rho = \{x \in X \mid a\rho x\}$. Если ρ — отношение эквивалентности, то (1) $a \in a\rho$ для каждого $a \in X$ и (2) из того, что $a\rho \cap b\rho \neq \varnothing$, следует равенство $a\rho = b\rho$. Таким образом, семейство множеств $a\rho$, где $a \in X$, является *разбиением множества* X, т. е. эти множества попарно не пересекаются и их объединение равно X; обозначим это семейство через X/ρ. Назовем $a\rho$ *классом эквивалентности множества* X *по* $\operatorname{mod} \rho$, *содержащим* a. Обратно, любое разбиение $\mathscr{P}$ множества X определяет такое отношение эквивалентности ρ, что $\mathscr{P} = X/\rho$, а именно $a\rho b$ тогда и только тогда, когда a и b принадлежат одному и тому же множеству разбиения $\mathscr{P}$. Назовем отображение $a \to a\rho$ *естественным* или *каноническим* отображением множества X на X/ρ и обозначим его через $\rho^\natural$. Отметим, что $a\rho = a\rho^\natural$ для каждого $a \in X$, но во избежание путаницы мы используем различные символы для обозначения отношения эквивалентности ρ на множестве X и естественного отображения множества X на X/ρ.

Если ρ — произвольное отношение на X, то определим *транзитивное замыкание* ρ^t отношения ρ, полагая

$$\rho^t = \bigcup_{n=1}^{\infty} \rho^n = \rho \cup (\rho \circ \rho) \cup (\rho \circ \rho \circ \rho) \cup \ldots .$$

Очевидно, ρ^t транзитивно и содержится в каждом транзитивном отношении на X, содержащем ρ.

Если ρ_0 — произвольное отношение на X, то отношение $\rho_1 = \rho_0 \cup \rho_0^{-1} \cup \iota$ — наименьшее рефлексивное и симметричное отношение на X, содержащее ρ_0. Транзитивное замыкание $\rho = \rho_1^t$ отношения ρ_1 является отношением эквивалентности на X, которое содержится в каждом отношении эквивалентности на X, содержащем ρ_0. Назовем ρ *отношением эквивалентности на* X, *порожденным* ρ_0.

Пересечение произвольного множества отношений эквивалентности является отношением эквивалентности. Аналогичное утверждение для теоретико-множественного объединения не верно даже в случае двух отношений. *Объединением* $\rho \vee \sigma$ двух отношений эквивалентности ρ и σ назовем отношение эквивалентности, порожденное $\rho \cup \sigma$, т. е. $\rho \vee \sigma$ — транзитивное замыкание отношения $\rho \cup \sigma$.

Лемма 1.4. *Если ρ и σ — отношения эквивалентности на множестве X и $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$, то $\rho \circ \sigma$ — также отношение эквивалентности на X и $\rho \circ \sigma = \rho \vee \sigma$.*

Доказательство. Так как $\rho \circ \sigma$, очевидно, содержится в $\rho \vee \sigma$, остается лишь показать, что $\rho \circ \sigma$ есть отношение эквивалентности. Из включений $\iota \subseteq \rho \subseteq \rho \circ \sigma$ следует, что отношение $\rho \circ \sigma$ рефлексивно, а равенства

$$(\rho \circ \sigma)^{-1} = \sigma^{-1} \circ \rho^{-1} = \sigma \circ \rho = \rho \circ \sigma$$

показывают, что $\rho \circ \sigma$ симметрично. Наконец,

$$(\rho \circ \sigma) \circ (\rho \circ \sigma) = \rho \circ \sigma \circ \rho \circ \sigma = \rho \circ \rho \circ \sigma \circ \sigma = \rho \circ \sigma,$$

т. е. $\rho \circ \sigma$ транзитивно.

Если ρ — такое отношение на X, что $|x\rho| = 1$ для каждого $x \in X$, то мы можем отождествить одноэлементное множество $x\rho$ с его единственным элементом и рассматривать ρ как преобразование $x \to x\rho$ множества X. Если σ — другое такое же отношение на X, то указанным свойством обладает и $\rho \circ \sigma$, причем $\rho \circ \sigma$ совпадает с суперпозицией ρ и σ, рассматриваемых как преобразования множества X. Двойственным образом, если $|\rho x| = 1$ для всех $x \in X$, то можем рассматривать отображение $x \to \rho x$ как преобразование множества X. В этом случае $\rho \circ \sigma$ равно суперпозиции σ и ρ. Таким образом, $\mathscr{B}_X$ содержит $\mathscr{T}_X$ как подполугруппу, а также подполугруппу $\mathscr{T}_X^*$, антиизоморфную $\mathscr{T}_X$.

Пусть φ — отображение множества X в множество X'. Тогда φ можно считать отношением на множестве $X \cup X'$. Для каждого $x' \in X'$ имеем $x'\varphi^{-1} = \{x \in X \mid x\varphi = x'\}$. Композиция $\varphi \circ \varphi^{-1}$ содержится в $X \times X$, следовательно, ее можно считать отношением на X, и мы видим, что $(x, y) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$ тогда и только тогда, когда

$x\varphi = y\varphi$. Отсюда ясно, что $\varphi \circ \varphi^{-1}$ есть отношение эквивалентности и φ индуцирует очевидным образом взаимно однозначное отображение $X/\varphi \circ \varphi^{-1}$ на $X\varphi$. Назовем $\varphi \circ \varphi^{-1}$ *отношением эквивалентности на* X, *естественно индуцированным* φ [1]).

Упражнения к § 1.4

1. Пусть $\mathscr{B}_X$ — полугруппа всех отношений на множестве X и Ω — множество индексов. Пусть ρ, ρ_α (α пробегает Ω), σ, τ — произвольные элементы полугруппы $\mathscr{B}_X$. Тогда в $\mathscr{B}_X$ выполняются следующие соотношения:

(a) из $\rho \subseteq \sigma$ следует $\rho \circ \tau \subseteq \sigma \circ \tau$ и $\tau \circ \rho \subseteq \tau \circ \sigma$;

(b) $\sigma \circ (\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} \rho_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} \sigma \circ \rho_\alpha$;

(c) $\sigma \circ (\bigcap\limits_{\alpha \in \Omega} \rho_\alpha) \subseteq \bigcap\limits_{\alpha \in \Omega} \sigma \circ \rho_\alpha$;

(d) из $\rho \subseteq \sigma$ следует $\rho^{-1} \subseteq \sigma^{-1}$;

(e) $(\bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} \rho_\alpha)^{-1} = \bigcup\limits_{\alpha \in \Omega} \rho_\alpha^{-1}$;

(f) $(\bigcap\limits_{\alpha \in \Omega} \rho_\alpha)^{-1} = \bigcap\limits_{\alpha \in \Omega} \rho_\alpha^{-1}$.

2. Показать, что в (1c) равенство, вообще говоря, не имеет места. Пусть ι' — отношение $x \neq y$ на X (дополнение для ι). Если $|X| > 1$, то

$$\omega \circ (\iota \cap \iota') = \varnothing, \text{ но } (\omega \circ \iota) \cap (\omega \circ \iota') = \omega.$$

3. Если ρ и σ — такие симметричные отношения, что $\rho \circ \sigma \subseteq \sigma \circ \rho$, то $\rho \circ \sigma = \sigma \circ \rho$.

§ *1.5. Конгруэнции, факторгруппоиды и гомоморфизмы*

Говорят, что отношение ρ на группоиде S *стабильно* [2]) (или *регулярно*, или *однородно*) *справа* [*слева*], если $a\rho b$ ($a, b \in S$) влечет за собой $ac\rho bc$ [$ca\rho cb$] для каждого $c \in S$. Стабильное справа [слева] отношение эквивалентности на S будем называть *правой* [*левой*] *конгруэнцией на* S. *Конгруэнцией на* S называется отношение эквивалентности, являющееся и левой, и правой конгруэнцией.

Пусть ρ — конгруэнция на группоиде S и A, B — произвольные элементы множества S/ρ, т. е. классы эквивалентности S

---

[1]) Это отношение называют также *ядром отображения* φ и обозначают через $\ker \varphi$.— *Прим. ред.*

[2]) В оригинале — *совместимо* (compatible).— *Прим. перев.*

по mod ρ. Пусть $a_1, a_2 \in A$ и $b_1, b_2 \in B$. Из $a_1\rho a_2$ следует, что $a_1b_1\rho a_2b_1$, так как ρ стабильно справа. Из $b_1\rho b_2$ вытекает, что $a_2b_1\rho a_2b_2$, так как ρ стабильно слева. В силу транзитивности конгруэнции ρ, мы заключаем, что $a_1b_1\rho a_2b_2$. Следовательно, произведение AB классов A и B содержится в некотором классе эквивалентности C. Определим умножение $(\circ)$ в S/ρ, полагая $A\circ B = C$. Множество S/ρ с операцией $(\circ)$ является группоидом, который мы назовем *фактогруппоидом* S по mod ρ.

Как и в § 1.4, обозначим через $a\rho$ $(a \in S)$ класс эквивалентности по mod ρ, которому принадлежит a. Сказанное выше в определении операции $(\circ)$ означает просто, что $a\rho \circ b\rho = (ab)\rho$ для всех $a, b \in S$. Обозначая через $\rho^\natural$ естественное отображение группоида S на S/ρ, получаем, что $a\rho = a\rho^\natural$ для всех $a \in S$, и поэтому $a\rho^\natural \circ b\rho^\natural = (ab)\rho^\natural$. Таким образом, $\rho^\natural$ есть гомоморфизм. Мы назовем его *естественным* (или *каноническим*) *гомоморфизмом группоида S на S/ρ. Если S — полугруппа, то и S/ρ является полугруппой.*

Предыдущие рассуждения показывают, что каждый фактогруппоид группоида S является его гомоморфным образом. Следующая теорема показывает, что и, обратно, каждый гомоморфный образ группоида S изоморфен некоторому его фактогруппоиду. Таким образом, если мы не будем делать различия между изоморфными группоидами, то внешняя задача нахождения всех гомоморфных образов данного группоида S сводится к внутренней задаче нахождения всех конгруэнций на S.

Теорема 1.5. (Основная теорема о гомоморфизмах [1]).) *Пусть θ — гомоморфизм группоида S на группоид S', и пусть $\rho = \theta\circ\theta^{-1}$, т. е. $a\rho b$ $(a, b \in S)$ тогда и только тогда, когда $a\theta = b\theta$. Тогда ρ — конгруэнция на S и существует изоморфизм ψ группоида S/ρ на S', такой, что $\rho^\natural\psi = \theta$, где $\rho^\natural$ есть естественный гомоморфизм S на S/ρ.*

Доказательство. Если $a\rho b$ и $c \in S$, то

$$(ac)\theta = (a\theta)(c\theta) = (b\theta)(c\theta) = (bc)\theta,$$

откуда $ac\rho bc$. Аналогично, $ca\rho cb$. Так как ρ, очевидно, есть отношение эквивалентности на S, оно является конгруэнцией. Для каждого элемента A группоида S/ρ положим $A\psi = a_1\theta$, где $a_1 \in A$. Нужно проверить, что ψ есть однозначное отображение (S/ρ в S'). Для этого отметим, что если $a_2 \in A$, то $a_1\rho a_2$ и потому $a_1\theta = a_2\theta$. Так как θ отображает S на S', мы видим, что ψ отображает S/ρ на S'. Покажем, что ψ — гомоморфизм. Пусть $A, B \in S/\rho$ и $a \in A$,

[1]) Как хорошо известно, основная теорема о гомоморфизмах верна вообще для любых универсальных алгебр. То же относится и к другим теоремам настоящего параграфа (с необходимым видоизменением определения элементарного ρ_0-перехода в теореме 1.8). См. Кон П., Универсальная алгебра, М., 1968.— *Прим. ред.*

$b \in B$. Тогда $ab \in A \circ B$ и потому

$$A \circ B\psi = (ab)\,\theta = (a\theta)\,(b\theta) = (A\psi)\,(B\psi).$$

Теперь покажем, что ψ взаимно однозначно. Допустим, что $A\psi = B\psi$ и возьмем $a \in A$ и $b \in B$. Тогда $a\theta = A\psi = B\psi = b\theta$, откуда $a\rho b$ и потому $A = B$. Таким образом, ψ — изоморфизм S/ρ на S'.

Если $a \in A \in S/\rho$, то $a\rho^{\natural} = A$. Следовательно, $a\theta = A\psi = (a\rho^{\natural})\,\psi = a\,(\rho^{\natural}\psi)$. Так как последнее верно для любого $a \in S$, мы заключаем, что $\theta = \rho^{\natural}\psi$.

Вообще говоря, конгруэнция на полугруппе S не определяется каким-либо одним из своих классов (или «ядром»), как это имеет место для групп (упражнение 1 ниже), но некоторые типы конгруэнций на S могут так определяться. Например, каждая конгруэнция ρ, для которой S/ρ есть группа (или группа с нулем), определяется заданием своего класса, являющегося единичным элементом группы (или группы с нулем) S/ρ (гл. 10). Другим примером, который будет постоянно использоваться на протяжении всей книги, является следующая конструкция.

Пусть I — идеал полугруппы S. Определим отношение ρ на S, полагая $a\rho b$ $(a,\ b \in S)$ тогда и только тогда, когда либо $a = b$, либо a и b принадлежат I. Назовем ρ *конгруэнцией Риса по* mod I. Классами эквивалентности полугруппы S по mod ρ являются само I и каждое одноэлементное множество $\{a\}$, где $a \in S\setminus I$. Будем писать S/I вместо S/ρ и называть S/I *факторполугруппой Риса полугруппы S по* mod I. Можно представлять себе S/I как результат сжатия I в один элемент (нуль), в то время как элементы из $S\setminus I$ не затрагиваются. Это понятие было введено Рисом в [1940].

Теорема 1.6. (Теорема об индуцированном гомоморфизме.) *Пусть φ_1 и φ_2 — такие гомоморфизмы группоида S соответственно на группоиды S_1 и S_2, что $\varphi_1 \circ \varphi_1^{-1} \subseteq \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1}$. Тогда существует единственный гомоморфизм θ группоида S_1 на группоид S_2, такой, что $\varphi_1\theta = \varphi_2$.*

Доказательство. Пусть $a_1 \in S_1$ и a — такой элемент группоида S, что $a\varphi_1 = a_1$. Положим $a_1\theta = a\varphi_2$. Если $b\varphi_1 = a_1$ $(b \in S)$, то $(a,\ b) \in \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1} \subseteq \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1}$, откуда $a\varphi_2 = b\varphi_2$; следовательно, отображение θ однозначно. Ясно, что $\varphi_1\theta = \varphi_2$. Покажем, что θ — гомоморфизм:

$$\begin{aligned}[(a\varphi_1)\,(b\varphi_1)]\,\theta &= [(ab)\,\varphi_1]\,\theta = (ab)\,\varphi_2 = \\ &= (a\varphi_2)\,(b\varphi_2) = [(a\varphi_1)\,\theta]\,[(b\varphi_1)\,\theta].\end{aligned}$$

Единственность θ очевидна; действительно, если θ удовлетворяет соотношению $\varphi_1\theta = \varphi_2$, то мы вынуждены задать θ так же, как это было сделано выше.

Следствие 1.6а. *Если ρ_1 и ρ_2 — такие конгруэнции на группоиде S, что $\rho_1 \subseteq \rho_2$, то $S/\rho_1 \sim S/\rho_2$.*

Доказательство. Пусть $\varphi_1 = \rho_1^{\natural}$, $\varphi_2 = \rho_2^{\natural}$, $S_1 = S/\rho_1$, $S_2 = S/\rho_2$. Так как $\rho_1 = \varphi_1 \circ \varphi_1^{-1}$ и $\rho_2 = \varphi_2 \circ \varphi_2^{-1}$, то выполнены все условия теоремы 1.6, и мы заключаем, что существует гомоморфизм θ группоида S_1 на группоид S_2.

Легко проверить, что пересечение любого семейства конгруэнций на группоиде S также является конгруэнцией на S. Следующий принцип принадлежит Тамуре и Кимуре [1954, 1955].

Предложение 1.7. (Принцип максимального гомоморфного образа данного типа.) *Пусть $\mathscr{C}$ — абстрактное свойство группоида, т. е. такое свойство, что если один из двух изоморфных группоидов обладает свойством $\mathscr{C}$, то и другой также обладает этим свойством. Скажем, что конгруэнция σ на группоиде S имеет тип $\mathscr{C}$, если S/σ обладает свойством $\mathscr{C}$. Предположим, что пересечение ρ всех конгруэнций σ на S, имеющих тип $\mathscr{C}$, имеет тип $\mathscr{C}$. Тогда S/ρ есть максимальный гомоморфный образ группоида S, обладающий свойством $\mathscr{C}$, в том смысле, что S/ρ обладает свойством $\mathscr{C}$ и каждый гомоморфный образ группоида S, обладающий свойством $\mathscr{C}$, является гомоморфным образом группоида S/ρ.*

Доказательство. Если T — произвольный гомоморфный образ группоида S, обладающий свойством $\mathscr{C}$, то по основной теореме о гомоморфизмах $T \cong S/\sigma$ для некоторой конгруэнции σ на S. Так как по предположению $\mathscr{C}$ есть абстрактное свойство, S/σ обладает свойством $\mathscr{C}$. Следовательно, σ имеет тип $\mathscr{C}$, откуда $\rho \subseteq \sigma$ по определению ρ. В силу следствия 1.6а имеем $S/\rho \sim S/\sigma$ и потому $S/\rho \sim T$.

В качестве примеров применения этого принципа отметим следующие факты. (1) Каждый группоид имеет максимальный полугрупповой гомоморфный образ. (2) Каждая полугруппа имеет максимальный коммутативный гомоморфный образ. Можно заменить в (2) слово «коммутативный» на «идемпотентный» или «с сокращением» или на любую комбинацию указанных трех терминов. Наиболее успешным до сих пор было рассмотрение случая «коммутативный и идемпотентный» (= «полуструктурный», см. § 1.8). Это был первый тип, рассмотренный Тамурой и Кимурой [1954]; он будет играть важную роль в главе 4. С другой стороны, не каждая полугруппа имеет максимальный групповой гомоморфный образ (упражнение 6 к § 1.6; см. также статью Кимуры [1958]).

Если ρ_0 — произвольное отношение на группоиде S, то существует по крайней мере одна конгруэнция на S, содержащая ρ_0, а именно универсальное отношение $\omega = S \times S$. Следовательно, существует пересечение ρ всех конгруэнций на S, содержащих ρ_0. Назовем ρ *конгруэнцией на S, порожденной отношением ρ_0*.

Если S — полугруппа, то мы можем дать для ρ более удобное описание. Пусть $\rho_1 = \rho_0 \cup \rho_0^{-1} \cup \iota$. Положим $a\rho_2 b$ $(a, \ b \in S)$ тогда и только тогда, когда

$$a = xcy, \quad b = xdy \quad \text{и} \quad c\rho_1 d$$

при некоторых $c, d \in S$ и $x, y \in S^1$. Назовем переход от a к b или наоборот *элементарным ρ_0-переходом*. Очевидно, отношение ρ_2 рефлексивно, симметрично, стабильно и $\rho_0 \subseteq \rho_1 \subseteq \rho_2 \subseteq \rho$. Наконец, транзитивное замыкание ρ_2^t отношения ρ_2 является конгруэнцией на S, содержащейся в ρ, и, следовательно, оно совпадает с ρ. Таким образом, $a\rho b$ тогда и только тогда, когда существуют такие элементы $c_1, c_2, \ldots, c_n \in S$, что $a\rho_2 c_1, \ldots$ $\ldots, c_i\rho_2 c_{i+1}, \ldots, c_n\rho_2 b$. Резюмируем сказанное в следующей теореме.

Теорема 1.8. *Пусть ρ_0 — отношение на полугруппе S и ρ — конгруэнция на S, порожденная ρ_0. Тогда $a\rho b$ $(a, \ b \in S)$ в том и только в том случае, когда b можно получить из a конечной последовательностью элементарных ρ_0-переходов.*

Упражнения к § 1.5

1. Если H — подгруппа группы G, то отношение ρ на G, определенное следующим образом: $a\rho b$ $(a, \ b \in G)$ тогда и только тогда, когда $ab^{-1} \in H$, является правой конгруэнцией и каждая правая конгруэнция на G получается таким путем. Классами правой конгруэнции ρ являются множества Ha при $a \in G$. Отношение ρ является конгруэнцией тогда и только тогда, когда H является в G нормальным делителем. (Дюбрей [1941].)

2. Следующее утверждение, вытекающее из теоремы 1.6, иногда называют теоремой об индуцированном гомоморфизме для групп. Пусть φ $[\varphi']$ есть гомоморфизм группы G $[G']$ на группу H $[H']$, и пусть θ — гомоморфизм группы G в G', который отображает ядро гомоморфизма φ в ядро гомоморфизма φ'. Тогда существует единственный гомоморфизм θ' группы H в H', такой, что $\varphi\theta' = \theta\varphi'$.

§ 1.6. *Циклические полугруппы*

Если a — произвольный элемент полугруппы S, то подполугруппа $\langle a \rangle$, порожденная элементом a, состоит из всех положительных целых степеней элемента a:

$$\langle a \rangle = \{a, a^2, a^3, \ldots\}.$$

Если $\langle a \rangle = S$, то S называется *циклической полугруппой* [1]).

[1]) В русской литературе употребляется также термин *моногенная полугруппа.— Прим. перев.*

В общем случае, назовем $\langle a \rangle$ *циклической подполугруппой из* S, *порожденной элементом* a. *Порядком* элемента a называется порядок подполугруппы $\langle a \rangle$. Для каждого $a \in S$ может быть лишь две возможности:

(1) Все степени элемента a различны между собой. Тогда, очевидно, a имеет бесконечный (счетный) порядок.

(2) Существуют такие положительные целые числа r и s, что $r < s$ и $a^r = a^s$.

Пусть s — наименьшее положительное целое число, такое, что a^s есть степень элемента a, равная некоторой меньшей степени этого элемента. Тогда $a^s = a^r$ для некоторого $r < s$. Так как элементы $a, a^2, \ldots, a^{s-1}$ должны быть различны, r есть единственное положительное целое число, такое, что $r < s$ и $a^r = a^s$.

Пусть $m = s - r$. Умножая обе части равенства $a^r = a^{m+r}$ последовательно на a^m, мы получим, что $a^{r+km} = a^r$ для каждого неотрицательного целого числа k. Если n — произвольное положительное целое число, то $n = km + i$, где k и i — такие положительные целые числа, что $k \geqslant 0$ и $0 \leqslant i < m$. Из равенств

$$a^{r+n} = a^{r+km+i} = a^{r+i}$$

следует, что каждая степень элемента a, начиная с a^r и далее, равна одному из элементов множества

$$K_a = \{a^r, a^{r+1}, \ldots, a^{r+m-1}\}.$$

Теперь ясно, что a имеет конечный порядок, равный $r + m - 1$. Назовем r *индексом*, а m — *периодом* элемента a и полугруппы $\langle a \rangle$. Отметим, что верно следующее равенство:

$$\text{индекс} + \text{период} = \text{порядок} + 1.$$

Множество K_a является, очевидно, подполугруппой полугруппы S. Если каждому элементу $a^n \in K_a$ $(r \leqslant n \leqslant r + m - 1)$ поставить в соответствие класс вычетов $(m) + n$ целых чисел по $\mathrm{mod}\, m$, содержащий n, то отображение $a^n \to (m) + n$ будет, очевидно, изоморфизмом K_a на аддитивную группу $I/(m)$ всех классов вычетов по $\mathrm{mod}\, m$. Следовательно, K_a — циклическая группа порядка m.

Только что описанные результаты были впервые получены Фробениусом (F r o b e n i u s G., Über endliche Gruppen, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1895, 163—194) для подмножеств (комплексов) группы, а не для элементов произвольной полугруппы (см. упражнение 2 ниже). Эти же результаты получили Морган и Уорд в 1933 году (не опубликовано); Сушкевич [1937], гл. 2, § 19; Пул [1937]; Рис [1940]; Климеску [1946]. Сформулируем их в следующей теореме.

Теорема 1.9. *Пусть a — элемент полугруппы S и $\langle a \rangle$ — циклическая подполугруппа полугруппы S, порожденная элементом a.*

Если $\langle a\rangle$ бесконечна, то все степени элемента a различны. Если $\langle a\rangle$ конечна, то существуют два положительных целых числа, индекс r и период m элемента a, для которых $a^{m+r}=a^r$ и

$$\langle a\rangle=\{a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{m+r-1}\}.$$

Порядок подполугруппы $\langle a\rangle$ равен $m+r-1$. Множество

$$K_a=\{a^r,\ a^{r+1},\ \ldots,\ a^{m+r-1}\}$$

является циклической подгруппой порядка m полугруппы S.

Для любых двух наперед заданных чисел r и m можно построить циклическую полугруппу $\langle a\rangle$, индекс которой равен r, а период равен m. Такова, например, полугруппа, порожденная преобразованием

$$\begin{pmatrix} 0\ 1\ 2\ \ldots\ r-1 & r & \ldots & r+m-2 & r+m-1 \\ 1\ 2\ 3\ \ldots\quad r & r+1 & \ldots & r+m-1 & r \end{pmatrix}$$

множества $\{0,1,2,\ \ldots,\ r+m-1\}$. Очевидно, что две конечные циклические полугруппы изоморфны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые индекс и период.

Полугруппа S называется *периодической*, если каждый ее элемент имеет конечный порядок; в частности, каждая конечная полугруппа является периодической. Если a — элемент конечного порядка, то полугруппа $\langle a\rangle$ содержит точно один идемпотент, а именно единицу группы K_a. Выражение для этого элемента дано в упражнении 1 ниже; оно взято из цитированной выше статьи Фробениуса. Тот факт, что *некоторая степень каждого элемента конечной полугруппы является идемпотентом*, был также установлен Муром (M o o r e E. H., A definition of abstract groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 3 (1902), 485—492).

Упражнения к § 1.6

1. Пусть a — элемент конечного порядка полугруппы S, и пусть r — индекс, а m — период элемента a. Тогда единица подгруппы K_a полугруппы $\langle a\rangle$ равна a^n, где n делится на m и $r\leqslant n<r+m$. (Фробениус, статья упомянутая в тексте.)

2. Пусть G — такая группа, что каждая ее подполугруппа, порожденная конечным подмножеством, конечна. Тогда каждая подполугруппа группы G является в действительности подгруппой, т. е. наше предположение эквивалентно локальной конечности группы G. Если $A\subseteq G$, A конечно и $1\in A$, то в последовательности степеней A, A^2, $\ldots$ только конечное число различных членов, точно один из них является подгруппой группы G и совпадает с подгруппой группы G, порожденной A. (Фробениус, статья упомянутая выше.)

3. Если S — полугруппа с правым сокращением, то каждый ее элемент конечного порядка имеет индекс, равный 1.

4. Пусть S — коммутативная периодическая полугруппа и E — множество идемпотентов из S. Для каждого $e \in E$ через S_e обозначим множество всех таких $x \in S$, что $x^n = e$ для некоторого положительного целого числа n. Тогда S_e и S_f не пересекаются, если $e \neq f$, и S есть объединение всех подмножеств S_e. Каждое S_e является подполугруппой полугруппы S, содержащей e и не имеющей других идемпотентов; $S_eS_f \subseteq S_{ef}$ для всех $e, f \in E$. Назовем S_e *максимальными одноидемпотентными* (или *унипотентными*) *подполугруппами полугруппы* S. (Шварц [1953а, 1954а].)

5. Коммутативная полугруппа, каждый элемент которой имеет индекс, равный 1, является объединением непересекающихся периодических групп. (Пул [1937].)

6. Каждый групповой гомоморфный образ бесконечной циклической полугруппы C является конечной циклической группой, и каждая конечная циклическая группа есть гомоморфный образ полугруппы C. Следовательно, C не имеет максимального группового гомоморфного образа. (См. замечания после предложения 1.7. В упражнении 16 к § 2.7 рассмотрен класс полугрупп, которые обладают максимальными групповыми гомоморфными образами.)

§ 1.7. Обратимые элементы и максимальные подгруппы

Пусть S — полугруппа с единицей 1. Если p и q — такие элементы полугруппы S, что $pq = 1$, то будем называть p *левым обратным* для элемента q, а q — *правым обратным* для элемента p. (Слова «относительно 1» будем опускать.) *Обратимым справа* [*слева*] *элементом в* S будем называть элемент полугруппы S, обладающий правым [левым] обратным в S. Таким образом, если $pq = 1$, то p обратим справа, а q обратим слева. *Обратимым элементом в* S будем называть элемент полугруппы, обладающий и правым, и левым обратным.

Теорема 1.10. *Пусть S — полугруппа с единицей* 1.

(i) *Множество P [Q] всех обратимых справа [слева] элементов из S является подполугруппой с правым [левым] сокращением и содержит* 1.

(ii) *Множество U всех обратимых элементов полугруппы S является подгруппой в S, и $U = P \cap Q$. Каждый обратимый элемент имеет единственный двусторонне обратный элемент в U и не имеет в этом множестве других левых и правых обратных.*

(iii) *Каждая подгруппа полугруппы S, содержащая* 1, *содержится в U.*

Доказательство. (i) Если $pq = p'q' = 1$, то $(pp')(q'q) = 1$; это показывает, что P и Q — подполугруппы полугруппы S. Они, очевидно, содержат 1. Если $ap = bp$, где $a, b \in S$

и $p \in P$, то p имеет правый обратный элемент q и $a = a1 = apq = bpq = b1 = b$. Аналогично, Q — полугруппа с левым сокращением.

(ii) Ясно, что $U = P \cap Q$ и потому U есть подполугруппа полугруппы S. Если $u \in U$, то существуют такие элементы $x, y \in S$, что $xu = uy = 1$. Пусть x и y — произвольные такие элементы из S. Тогда $x = x1 = xuy = 1y = y$. Следовательно, любой левый обратный элемент для u равен произвольному правому обратному элементу, и потому u имеет единственный двусторонне обратный элемент u' и не имеет других левых и правых обратных элементов. Из равенств $uu' = u'u = 1$ вытекает, что $u' \in U$, и, следовательно, U является группой.

(iii) Пусть G — произвольная подгруппа полугруппы S, содержащая 1, а $a \in G$. Пусть a^{-1} — обратный для a элемент группы G. Из равенств $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$ вытекает, что $a \in U$, поэтому $G \subseteq U$.

Полугруппа не всегда содержит подгруппы. Например, бесконечная циклическая полугруппа не имеет подгрупп. Легко видеть, что полугруппа S содержит подгруппу в том и только в том случае, когда она содержит идемпотент. Если e — идемпотент полугруппы S, то eS состоит из всех элементов a полугруппы S, для которых e является левой единицей, т. е. $ea = a$. В самом деле, если $a = ex$ для некоторого $x \in S$, то $ea = e^2x = ex = a$; обратное утверждение очевидно. Аналогично, Se состоит из всех элементов полугруппы S, для которых e является правой единицей, и eSe есть множество всех элементов полугруппы S, для которых e является двусторонней единицей. Легко видеть, что

$$eSe = eS \cap Se.$$

Кроме того, eS $[Se]$ — главный правый [левый] идеал полугруппы S, порожденный элементом e. В частности, eS и Se суть подполугруппы полугруппы S, и, следовательно, их пересечение eSe также является полугруппой. Более того, eSe имеет единицу e, поэтому мы можем говорить о группе обратимых элементов полугруппы eSe, которую будем обозначать через H_e.

Теорема 1.11. *Пусть e — произвольный идемпотент полугруппы S и H_e — группа обратимых элементов полугруппы eSe. Тогда H_e содержит каждую подгруппу G полугруппы S, пересекающуюся с H_e.*

Доказательство. Пусть f — единица группы G. Покажем сначала, что $f = e$. По предположению $G \cap H_e$ непусто; пусть a — элемент из этого пересечения. Если b и c — обратные к a элементы соответственно в группах G и H_e, то

$$e = ca = caf = ef = eab = ab = f.$$

Так как e — двусторонняя единица в G, отсюда следует, что $G \subseteq eSe$. В силу теоремы 1.10 (iii) мы заключаем, что $G \subseteq H_e$.

Подгруппа G полугруппы S называется *максимальной подгруппой* полугруппы S, если она не содержится строго ни в какой другой подгруппе. Если e — единица максимальной подгруппы G полугруппы S, то G пересекается с H_e, так как $e \in G \cap H_e$. Отсюда в силу теоремы 1.11 имеем $G \subseteq H_e$, но тогда $G = H_e$ ввиду максимальности G. Обратно, если e — идемпотент полугруппы S, то из теоремы 1.11 следует, что H_e является максимальной подгруппой в S. Итак, группы H_e из теоремы 1.11 и только они являются максимальными подгруппами полугруппы S.

Из теоремы 1.11 также вытекает, что если e и f — различные идемпотенты полугруппы S, то H_e и H_f не пересекаются. Мы можем представлять себе максимальные подгруппы полугруппы S как острова в море.

Существование максимальных подгрупп в полугруппе S было отмечено впервые Шварцем [1943] для периодической полугруппы S и Уоллесом [1953] и Кимурой [1954] — для произвольной полугруппы S.

Упражнения к § 1.7

1. Пусть P $[Q]$ — подполугруппа обратимых справа [слева] элементов полугруппы S с единицей 1 и U — группа обратимых элементов полугруппы S.

(a) Следующие три условия для полугруппы S эквивалентны: (i) $ab = 1$ $(a, b \in S)$ влечет за собой $ba = 1$; (ii) $P = U$; (iii) $Q = U$.

(b) Условия, перечисленные в п. (a), выполняются, если S — периодическая полугруппа или если S — полугруппа с правым сокращением.

(c) Условия, перечисленные в п. (a), выполняются для полугрупп P и Q.

2. Пусть $\mathcal{T}_X$ — полная полугруппа преобразований на множестве X (§ 1.1).

(a) Подполугруппа обратимых справа элементов полугруппы $\mathcal{T}_X$ состоит из всех взаимно однозначных отображений X в X.

(b) Подполугруппа обратимых слева элементов полугруппы $\mathcal{T}_X$ состоит из всех отображений X на X.

(c) Группа обратимых элементов полугруппы $\mathcal{T}_X$ совпадает с группой $\mathcal{G}_X$. (Сушкевич [1937], глава 1, § 7; [1940 a, b].)

3. Максимальная подгруппа H_e полугруппы S, содержащая идемпотент e, может быть охарактеризована как множество всех таких элементов $a \in S$, что (i) $ea = ae = a$ и (ii) существуют x, $y \in S$, для которых $xa = ay = e$.

4. Конечная циклическая полугруппа $\langle a \rangle$ содержит единственную максимальную подгруппу, а именно K_a (в обозначениях § 1.6).

5. Если полугруппа есть объединение групп, то она является объединением непересекающихся групп.

6. (a) Периодическая полугруппа S является объединением групп тогда и только тогда, когда каждый ее элемент имеет индекс, равный 1 (§ 1.6).

(b) Периодическая полугруппа с правым сокращением является объединением групп (см. упражнение 3 к § 1.6).

(c) Периодическая полугруппа с сокращениями является группой.

§ 1.8. *Связки и полуструктуры; связки полугрупп*

Напомним, что отношение $\leqslant$ на множестве X называется *частичным порядком на* X, если (1) $a \leqslant a$, (2) $a \leqslant b$, $b \leqslant a$ влечет за собой $a = b$ и (3) $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$ влечет за собой $a \leqslant c$ (a, b, $c \in X$). Другими словами, частичный порядок есть рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение. Мы пишем $a < b$, если $a \leqslant b$ и $a \neq b$. Отношение, обратное к отношению $\leqslant$ [$<$], обозначается, как обычно, через $\geqslant$ [$>$].

Следующий пример очень важен для нас. Пусть E — множество идемпотентов полугруппы S. Положим $e \leqslant f$ (e, $f \in E$), если $ef = fe = e$. Если $e \leqslant f$, то мы скажем, что *e предшествует f и f следует за e*. Покажем, что отношение $\leqslant$ есть частичный порядок на E. Пусть e, f, $g \in E$. Тогда (1) $e^2 = e$ и, следовательно, $e \leqslant e$, (2) если $e \leqslant f$ и $f \leqslant e$, то $ef = fe = e$ и $fe = ef = f$, откуда $e = f$, (3) если $e \leqslant f$ и $f \leqslant g$, то $ef = fe = e$ и $fg = gf = f$, откуда

$$eg = (ef)\,g = e\,(fg) = ef = e,$$
$$ge = g\,(fe) = (gf)\,e = fe = e.$$

Следовательно, $e \leqslant g$. Назовем $\leqslant$ *естественным частичным порядком на* E.

Элемент b частично упорядоченного множества X называется *верхней гранью* подмножества Y из X, если $y \leqslant b$ для каждого $y \in Y$. Верхняя грань b множества Y называется *наименьшей верхней гранью*, или *объединением*, множества Y, если $b \leqslant c$ для каждой верхней грани c множества Y. Если Y имеет объединение в X, то это объединение, очевидно, единственно. *Нижняя грань* и *наибольшая нижняя грань*, или *пересечение*, определяется двойственным образом. Частично упорядоченное множество X называется *верхней* [*нижней*] *полуструктурой*, если каждое двухэлементное подмножество $\{a, b\}$ множества X имеет объединение [пересечение] в X; в этом случае каждое конечное подмножество множества X имеет объединение [пересечение]. Объединение [пересечение] множества $\{a, b\}$ будем обозначать через $a \vee b$ [$a \wedge b$] [1]). *Структура*

[1]) Чаще говорят о пересечении [объединении] *элементов* a и b.— *Прим. ред.*

есть частично упорядоченное множество, являющееся и верхней, и нижней полуструктурой. Структура X называется *полной*, если каждое подмножество множества X имеет объединение и пересечение.

Например, пусть X — множество всех подгруппоидов группоида S, включая пустое множество. Тогда X частично упорядочено относительно теоретико-множественного включения. Так как пересечение любого множества подгруппоидов группоида S либо пусто, либо является подгруппоидом, то X — полная структура. Пересечение подмножества Y множества X совпадает с теоретико-множественным пересечением элементов множества Y, в то время как объединением множества Y является подгруппоид группоида S, порожденный теоретико-множественным объединением подгруппоидов, входящих в Y. Все предыдущие рассуждения сохраняются, если заменить слова «подгруппоид или пустое подмножество из S» на слова «конгруэнция на S».

С другой стороны, множество всех левых [правых, двусторонних] идеалов группоида S, включая пустое множество, замкнуто как относительно теоретико-множественного объединения, так и теоретико-множественного пересечения и потому является полной подструктурой булевой алгебры всех подмножеств множества S.

Напомним (§ 1.1), что *связкой* называется полугруппа S, каждый элемент которой является идемпотентом. Таким образом, $S = E$, если S есть связка; поэтому *S естественно частично упорядочено* ($a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $ab = ba = a$).

Теорема 1.12. *Коммутативная связка S является нижней полуструктурой относительно естественного частичного порядка на S. Пересечение $a \wedge b$ двух элементов a и b полугруппы S совпадает с их произведением ab. Обратно, нижняя полуструктура является коммутативной связкой относительно операции пересечения.*

Замечание. Мы, конечно, могли бы сделать S верхней полуструктурой, полагая $a \leqslant b$, если $ab = b$, но ради единообразия будем придерживаться определения, данного выше. В дальнейшем будем использовать термин *полуструктура* как синоним термина *коммутативная связка*. Следовательно, мы соглашаемся, что термин *полуструктура* будет использоваться в качестве сокращения термина *нижняя полуструктура*, если не оговорено противное.

Доказательство. Тот факт, что отношение $\leqslant$ есть частичный порядок на S $(= E)$, был доказан выше. Мы должны показать, что произведение ab $(= ba)$ двух элементов a, $b \in S$ совпадает с наибольшей нижней гранью этих элементов. Из равенств $(ba)\,a = ba^2 = ba$ и $(ab)\,b = ab^2 = ab$ вытекает, что $ab \leqslant a$ и $ab \leqslant b$. Предположим, что $c \leqslant a$ и $c \leqslant b$. Тогда $(ab)\,c = a\,(bc) = ac = c$ и, аналогично, $c\,(ab) = c$, откуда $c \leqslant ab$.

Обратное очевидно.

Приведем пример некоммутативной связки. Пусть X и Y — два произвольных множества. Определим бинарную операцию на $S = X \times Y$, полагая

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1, y_2) \ (x_1, x_2 \in X; \ y_1, y_2 \in Y).$$

Ассоциативность и идемпотентность этой операции видны непосредственно. Будем называть S *прямоугольной связкой* на множестве $X \times Y$. Объясним причину введения такого термина. Представим себе $X \times Y$ как прямоугольную таблицу из точек, где точка (x, y) лежит в x-строке и y-столбце таблицы. Тогда $a_1 = (x_1, y_1)$ и $a_2 = (x_2, y_2)$ — противоположные вершины прямоугольника, другие две вершины которого суть $a_1a_2 = (x_1, y_2)$ и $a_2a_1 = (x_2, y_1)$. Прямоугольные связки на $X \times Y$ и $X' \times Y'$ изоморфны тогда и только тогда, когда $|X| = |X'|$ и $|Y| = |Y'|$.

Если $|X| = 1$ [$|Y| = 1$], то прямоугольная связка на $X \times Y$ изоморфна полугруппе правых [левых] нулей на Y [X] (§ 1.1).

Теория полугрупп не включает в себя ни обширной теории структур и полуструктур, ни теории групп. Если некоторый тип полугрупп может быть полностью описан в терминах групп и полуструктур, то мы считаем, что дальнейшее изучение строения таких полугрупп лежит вне сферы теории полугрупп. С другой стороны, мы считаем, что изучение связок — одна из задач теории полугрупп. В настоящее время мы далеки от полного описания связок с точностью до полуструктур.

Под *разложением* полугруппы S мы понимаем разбиение ее в объединение непересекающихся подполугрупп S_α ($\alpha \in \Omega$). Для того чтобы разложение полугруппы представляло некоторую ценность для изучения ее строения, необходимо, чтобы подполугруппы S_α были полугруппами некоторого более специального, нежели S, типа, например, простыми полугруппами или группами.

Предположим, что $S = \bigcup \{S_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ есть такое разложение полугруппы S, что для каждой пары элементов α, β множества индексов Ω существует элемент γ из Ω, для которого $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\gamma$. Определим бинарную операцию в Ω, полагая $\alpha\beta = \gamma$, если $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\gamma$. Легко видеть, что Ω становится связкой относительно этой операции. Скажем, что S есть *объединение связки* Ω *полугрупп* S_α. Отображение φ, определенное следующим образом: $a\varphi = \alpha$, если $a \in S_\alpha$, является гомоморфизмом полугруппы S на Ω, и подполугруппы S_α являются классами конгруэнции $\varphi \circ \varphi^{-1}$ (§ 1.4 и 1.5). Обратно, если φ — гомоморфизм полугруппы S на связку Ω, то полный прообраз $S_\alpha = \alpha\varphi^{-1}$ каждого элемента $\alpha \in \Omega$ является подполугруппой полугруппы S и S есть связка Ω полугрупп S_α ($\alpha \in \Omega$). Если связка Ω коммутативна, то S называется *объединением полуструктуры* Ω *полугрупп* S_α ($\alpha \in \Omega$). Например, в упражнении 4 к § 1.6 утверждается, что S есть объединение полуструктуры E полугрупп S_e ($e \in E$).

Если Ω и строение каждого S_α ($\alpha \in \Omega$) известны, то можно сказать, что мы знаем «грубое строение» полугруппы S. Описание «тонкого строения» полугруппы S, т. е. того, как «действует» умножение на элементах различных полугрупп S_α, является более трудной задачей. Вопросы такого типа будут рассматриваться в гл. 4.

Если полугруппа S есть объединение связки [полуструктуры] Ω полугрупп S_α ($\alpha \in \Omega$), где каждое S_α имеет тип $\mathscr{C}$, то будем кратко говорить, что S *есть связка* [*полуструктура*] *полугрупп типа* $\mathscr{C}$. Например, результат упражнения 4 к § 1.6, принадлежащий Шварцу, можно сформулировать следующим образом: *каждая периодическая коммутативная полугруппа есть полуструктура одноидемпотентных полугрупп.*

Этот результат был обобщен Нумакурой [1954], который показал, что любая коммутативная полугруппа есть полуструктура полугрупп, содержащих не более одного идемпотента. Тамура и Кимура [1954] показали, что на любой коммутативной полугруппе S существует наименьшая конгруэнция η с тем свойством, что S/η есть полуструктура, и, значит, S/η есть максимальный полуструктурный гомоморфный образ полугруппы S (предложение 1.7). Они дали явное описание конгруэнции η, которое будет приведено в теореме 4.12 ниже. Кроме того, они привели пример полугруппы, на которой конгруэнция, используемая Нумакурой, отличается от η. Ямада [1955] дал явное описание наименьшей конгруэнции μ на полугруппе S (не обязательно коммутативной), для которой S/μ является полуструктурой.

Упражнения к § 1.8

1. Говорят, что полугруппа S *антикоммутативна* [1]), если $ab = ba$ ($a, b \in S$) влечет за собой $a = b$. Прямоугольная связка антикоммутативна.

2. Идемпотент e полугруппы S называется *примитивным*, если каждый идемпотент из S, меньший e, равен e или 0 (если S имеет нуль) и $e \neq 0$. Полугруппа S антикоммутативна тогда и только тогда, когда она есть связка без нуля, в которой каждый элемент примитивен, или $|S| = 1$.

3. Полугруппа S называется *сильно реверсируемой* (Тьеррен [1954b]), если для любых $a, b \in S$ существуют такие положительные целые числа r, s, t, что $(ab)^r = a^s b^t = b^t a^s$. Периодическая полугруппа является полуструктурой одноидемпотентных полугрупп с коммутирующими идемпотентами тогда и только тогда,

[1]) В оригинале «nowhere commutative».— *Прим. перев.*

когда она сильно реверсируема. (Исеки [1956]; это обобщает утверждение упражнения 4 к § 1.6.)

4. Каждое преобразование полугруппы S является эндоморфизмом тогда и только тогда, когда S — либо полугруппа правых нулей, либо полугруппа левых нулей. (Поси [1949].)

§ 1.9. Регулярные элементы; инверсные полугруппы

Элемент a полугруппы S называется *регулярным*, если $a \in aSa$ или, другими словами, $axa = a$ для некоторого $x \in S$. Полугруппа S называется *регулярной*, если каждый ее элемент регулярен.

Заметим, что если $axa = a$, то $e = ax$ является идемпотентом, причем $ea = a$. В самом деле, $e^2 = (ax)(ax) = (axa)x \equiv ax = e$ и $ea = axa = a$. Аналогично, $f = xa$ есть идемпотент, причем $af = a$. Отметим также, что если a — регулярный элемент полугруппы S, то главный правый идеал $aS^1 = a \cup aS$, порожденный a, равен aS, так как $a = af$ влечет за собой $a \in aS$. Аналогично, $S^1a = Sa$. Эти два замечания будут использоваться впоследствии без дополнительных ссылок.

Понятие регулярности было введено Дж. Нейманом для колец (N e u m a n n J. von, On regular rings, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **22** (1936), 707—713), и следующая лемма является прямым аналогом леммы 6 из приведенной статьи.

Лемма 1.13. *Элемент a полугруппы S регулярен тогда и только тогда, когда главный правый [левый] идеал полугруппы S, порожденный a, порождается некоторым идемпотентом e, т. е. $aS^1 = eS^1$ $[S^1a = S^1e]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если a регулярен, то $axa = a$ для некоторого $x \in S$ и $e = ax$ есть такой идемпотент полугруппы S, что $ea = a$. Очевидно, $aS^1 = eS^1$. Обратно, предположим, что $aS^1 = eS^1$ и $e^2 = e$. Тогда $a = ex$ при некотором $x \in S^1$, поэтому $ea = e^2x = ex = a$; $e = ay$ при некотором $y \in S^1$, так что $a = ea = aya$. Если $y = 1$, то $a = a^2$ и $a = aaa$. Следовательно, в любом случае $a \in aSa$, т. е. a регулярен.

Говорят, что два элемента a и b полугруппы S *инверсны* [1]) друг к другу, если

$$aba = a \text{ и } bab = b.$$

Это понятие было введено Вагнером [1952b], он называл такие элементы *обобщенно обратными*, Тьерреном [1952a], который называл a и b *взаимными*, и Престоном [1954a] [2]).

[1]) В оригинале «inverses».— *Прим. перев.*

[2]) В книге Е. С. Ляпина «Полугруппы» и в некоторых статьях советских авторов такие элементы назывались также *регулярно сопряженными*.— *Прим. ред.*

Если a и b — элементы некоторой максимальной подгруппы H полугруппы S, в частности, если S сама есть группа, то a и b инверсны друг к другу тогда и только тогда, когда они взаимно обратны в группе H в обычном смысле.

Если элемент a полугруппы S обладает инверсным к нему элементом, то a регулярен. Обратное (лемма 1.14) было отмечено Тьерреном [1952a]. Таким образом, в регулярной полугруппе каждый элемент имеет по крайней мере один инверсный к нему элемент.

Лемма 1.14. *Если a — регулярный элемент полугруппы S, скажем $axa = a$, где $x \in S$, то a обладает хотя бы одним инверсным к нему элементом; таким элементом, в частности, будет xax.*

Доказательство. Пусть $b = xax$. Тогда

$$\begin{aligned} aba &= a(xax)a = ax(axa) = axa = a, \\ bab &= (xax)a(xax) = x(axa)(xax) = \\ &= xa(xax) = x(axa)x = xax = b. \end{aligned}$$

Следовательно, b инверсен к a.

Лемма 1.15. *Два элемента полугруппы S взаимно обратны в некоторой подгруппе полугруппы S тогда и только тогда, когда они инверсны друг к другу и коммутируют.*

Доказательство. Пусть a и b — коммутирующие инверсные друг к другу элементы полугруппы S и $e = ab$ $(= ba)$. Тогда e есть идемпотент, причем $ea = ae = a$ и $eb = be = b$. Следовательно, a и b — обратимые элементы в eSe и принадлежат максимальной подгруппе H_e полугруппы S, содержащей e (теорема 1.11). Так как $ab = ba = e$, a и b взаимно обратны в группе H_e.

Обратное утверждение очевидно.

Регулярный элемент может иметь несколько инверсных к нему элементов. Крайним примером является прямоугольная связка (§ 1.8), в которой любые два элемента инверсны друг к другу. *Инверсной полугруппой* называется полугруппа, в которой каждый элемент имеет единственный инверсный к нему элемент. Для этого понятия Вагнер [1952b] использовал термин «обобщенная группа». Инверсные полугруппы составляют в настоящее время, вероятно, наиболее перспективный для изучения класс полугрупп, так как они довольно близки к группам. Глава 7 полностью посвящена инверсным полугруппам, кроме того, в § 4.2 мы дадим полное описание инверсных полугрупп, являющихся объединением групп. Оставшуюся же часть этого параграфа посвятим изложению некоторых основных свойств инверсных полугрупп.

В теореме 1.17 ниже мы дадим две другие употребительные характеризации инверсных полугрупп [1]). Тот факт, что (i) влечет

[1]) Об аксиоматике инверсных полугрупп см. также Б. М. Шайн [1965].— *Прим. ред.*

за собой (ii), впервые был доказан Вагнером [1952b] и независимо от него Престоном [1954a]. Либер [1954] показал, что из (iii) следует (i); то же самое, а также эквивалентность каждого из условий (i), (iii) условию (ii) установили Манн и Пенроуз [1955]. Прежде всего нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1.16. *Если e, f, ef и fe — идемпотенты полугруппы S, то ef и fe инверсны друг к другу.*

Доказательство. Имеем $(ef)(fe)(ef) = ef^2e^2f = efef = (ef)^2 = ef$. Аналогично, $(fe)(ef)(fe) = fe$.

Теорема 1.17. *Следующие три условия для полугруппы S эквивалентны:*

(i) *S регулярна и любые два ее идемпотента коммутируют;*

(ii) *каждый главный правый и каждый главный левый идеал полугруппы S имеет единственный порождающий идемпотент;*

(iii) *S — инверсная полугруппа (т. е. каждый элемент из S обладает единственным инверсным к нему элементом).*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). По лемме 1.13 каждый главный правый идеал полугруппы S имеет по крайней мере один порождающий идемпотент. Предположим, что e и f — идемпотенты, порождающие один и тот же главный правый идеал, т. е. $eS = fS$. Тогда $ef = f$ и $fe = e$. Но ввиду (i) $ef = fe$ и, следовательно, $e = f$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). По лемме 1.13 полугруппа S регулярна. Осталось лишь показать единственность инверсного элемента. Пусть b и c инверсны к a. Тогда

$$aba = a,\ bab = b,$$
$$aca = a,\ cac = c.$$

Отсюда $abS = aS = acS$ и $Sba = Sa = Sca$, так что $ab = ac$ и $ba = ca$ в силу (ii). Следовательно,

$$b = bab = bac = cac = c.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i). Инверсная полугруппа, очевидно, регулярна. Осталось лишь показать, что любые два идемпотента коммутируют. Покажем сначала, что произведение ef двух идемпотентов e и f является идемпотентом. Пусть a — (единственный) инверсный к ef элемент. Тогда

$$(ef)\,a\,(ef) = ef,\quad a\,(ef)\,a = a.$$

Положим $b = ae$. Тогда

$$(ef)\,b\,(ef) = efae^2f = efaef = ef,$$
$$b\,(ef)\,b = ae^2fae = aefae = ae = b.$$

Следовательно, b также инверсен к ef. В силу свойства (iii) $ae = b = a$. Аналогично, можно показать, что $fa = a$. Следовательно,

$$a^2 = (ae)(fa) = a(ef)a = a.$$

Но идемпотент является инверсным к себе элементом, и, снова используя условие (iii), мы заключаем, что $a = ef$. Итак ef — идемпотент. Пусть теперь e и f — два произвольных идемпотента. На основании предыдущего ef и fe — также идемпотенты. По лемме 1.16 они инверсны друг к другу. Таким образом, ef и fe инверсны к ef и, следовательно, $ef = fe$.

Взаимно однозначным частичным преобразованием множества X называется взаимно однозначное отображение α подмножества Y из X на подмножество $Y' = Y\alpha$ из X. Через α^{-1} будем обозначать отображение множества $Y\alpha$ на Y, обратное к отображению α в обычном смысле, т. е. такое, что $y'\alpha^{-1} = y$ ($y \in Y$, $y' \in Y'$) тогда и только тогда, когда $y' = y\alpha$. Пусть $\mathcal{J}_X$ — множество всех взаимно однозначных частичных преобразований множества X, включая отображение пустого подмножества $\varnothing$ на себя; это «пустое преобразование» будем обозначать через 0. Произведение $\alpha\beta$ двух элементов α, $\beta \in \mathcal{J}_X$ определим следующим образом. Пусть Y и Z — области определения соответственно преобразований α и β. Если $Y\alpha \cap Z = \varnothing$, то положим $\alpha\beta = 0$. В противном случае пусть $W = (Y\alpha \cap Z)\alpha^{-1}$. Тогда будем считать, что $\alpha\beta$ равно суперпозиции преобразований $\alpha \mid W$ и $\beta \mid W\alpha$ в обычном смысле. Очевидно, что $\alpha\beta$ есть взаимно однозначное отображение подмножества W на $W\alpha\beta$, поэтому оно принадлежит $\mathcal{J}_X$. Ассоциативность проверяется легко. Следовательно, $\mathcal{J}_X$ является полугруппой; будем называть ее *симметрической инверсной полугруппой на множестве* X. Это понятие было введено Вагнером [1952a].

Мы должны показать, что $\mathcal{J}_X$ — инверсная полугруппа. Так как элемент α^{-1}, очевидно, инверсен к α, т. е. $\alpha\alpha^{-1}\alpha = \alpha$ и $\alpha^{-1}\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}$, то ясно, что $\mathcal{J}_X$ регулярна. Элемент полугруппы $\mathcal{J}_X$ является идемпотентом тогда и только тогда, когда он есть тождественное отображение некоторого подмножества множества X на себя. Отсюда видно, что любые два идемпотента из $\mathcal{J}_X$ коммутируют. Теперь из теоремы 1.17 следует, что $\mathcal{J}_X$ является инверсной полугруппой.

Заметим, что определение произведения элементов полугруппы $\mathcal{J}_X$ совпадает с определением их произведения как отношений (§ 1.4) на множестве X. В действительности $\mathcal{J}_X$ можно считать подполугруппой (состоящей из всех взаимно однозначных отношений на X) полугруппы $\mathcal{B}_X$.

Вагнер [1952b] и Престон [1954c] показали, что каждую инверсную полугруппу можно вложить в некоторую симметрическую инверсную полугруппу. Это утверждение есть аналог теоремы Кэли для групп и утверждения о регулярном представлении полугрупп (§ 1.3), но, как мы увидим, его намного труднее доказать. О другом подходе к этой задаче см. статью Престона [1957].

Пусть S — инверсная полугруппа. Элемент, инверсный к элементу $a \in S$, будет обозначаться через a^{-1}. Таким образом,

$$aa^{-1}a = a \text{ и } a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$$

Идемпотент $e = aa^{-1}$ [$f = a^{-1}a$] будем называть *левой* [*правой*] *единицей* элемента a; его можно охарактеризовать как единственный идемпотент, порождающий правый [левый] идеал aS [Sa]. Эти замечания и тот факт, что идемпотенты в S коммутируют (теорема 1.17), мы будем использовать в дальнейшем без пояснений. Множество идемпотентов полугруппы S будет обозначаться через E; это подполугруппа и в действительности подполуструктура (§ 1.8). Мы говорим, что подполугруппа T полугруппы S есть *инверсная подполугруппа* из S, если $a \in T$ влечет за собой $a^{-1} \in T$.

Лемма 1.18. *Для любых элементов a, b инверсной полугруппы S имеют место соотношения*

$$(a^{-1})^{-1} = a \quad \text{и} \quad (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Доказательство. Первое соотношение очевидно. Докажем второе. Имеем

$$(ab)(b^{-1}a^{-1})(ab) = a(bb^{-1})(a^{-1}a)b = a(a^{-1}a)(bb^{-1})b = ab,$$
$$(b^{-1}a^{-1})(ab)(b^{-1}a^{-1}) = b^{-1}(a^{-1}a)(bb^{-1})a^{-1} = b^{-1}(bb^{-1})(a^{-1}a)a^{-1} = b^{-1}a^{-1}.$$

Следовательно, $b^{-1}a^{-1}$ инверсен к ab.

Лемма 1.19. *Если e и f — идемпотенты инверсной полугруппы S, то*

$$Se \cap Sf = Sef \; (= Sfe).$$

Доказательство. Если $a \in Se \cap Sf$, то $ae = af = a$, так что $aef = af = a$, и поэтому $a \in Sef$. Обратно, если $a \in Sef$ $(= Sfe)$, то $aef = afe = a$, откуда $ae = af = a$, т. е. $a \in Se \cap Sf$.

Теорема 1.20. *Произвольная инверсная полугруппа S изоморфна инверсной подполугруппе симметрической инверсной полугруппы $\mathcal{J}_S$ всех взаимно однозначных частичных преобразований множества S.*

Доказательство. Для каждого $a \in S$ определим отображение ρ_a множества Sa^{-1} $(= Saa^{-1})$ в $Sa^{-1}a$ $(= Sa)$, полагая $x \to x\rho_a = xa$. Подчеркнем, что областью определения отображения ρ_a является Sa^{-1}. Очевидно, $\rho_{a^{-1}}$ отображает Sa $(= Sa^{-1}a)$ в Saa^{-1} $(= Sa^{-1})$. Если $x \in Saa^{-1}$ и $y \in Sa^{-1}a$, то

$$x\rho_a\rho_{a^{-1}} = xaa^{-1} = x,$$
$$y\rho_{a^{-1}}\rho_a = ya^{-1}a = y,$$

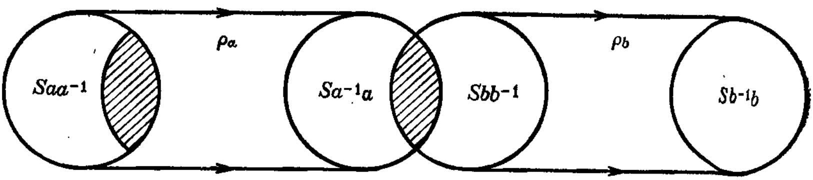
так как любой идемпотент e является правой единицей в идеале Se. Следовательно, ρ_a и $\rho_{a^{-1}}$ — взаимно обратные взаимно однозначные отображения Saa^{-1} и $Sa^{-1}a$ друг на друга. Таким образом, $\rho_a \in \mathcal{J}_S$ и $\rho_{a^{-1}} = \rho_a^{-1}$. Покажем, что $a \to \rho_a$ есть изоморфизм полугруппы S в $\mathcal{J}_S$.

Предположим сначала, что $\rho_a = \rho_b$ $(a,\ b \in S)$. Тогда $Saa^{-1} = Sbb^{-1}$, так что $aa^{-1} = bb^{-1}$ по теореме 1.17 (ii) и $x \in Saa^{-1}$ влечет за собой $xa = x\rho_a = x\rho_b = xb$. Так как $a^{-1} \in Saa^{-1}$, $a^{-1}a = a^{-1}b$. Следовательно,

$$a = aa^{-1}a = aa^{-1}b = bb^{-1}b = b.$$

Таким образом, отображение $a \to \rho_a$ взаимно однозначно.

Наконец, мы должны показать, что $\rho_a\rho_b = \rho_{ab}$ $(a,\ b \in S)$. Так как $(xa)\ b = x\ (ab)$ для любого $x \in S$, нам нужно лишь установить, что $\rho_a\rho_b$ и ρ_{ab} имеют одинаковые области определения.



Область определения отображения ρ_{ab} есть $S\ (ab)\ (ab)^{-1}$. Область же определения отображения $\rho_a\rho_b$ есть множество $(Sa^{-1}a \cap Sbb^{-1})\ \rho_{a^{-1}}$, которому на диаграмме соответствует левая заштрихованная фигура. По лемме 1.19

$$Sa^{-1}a \cap Sbb^{-1} = Sa^{-1}abb^{-1} = Sabb^{-1}.$$

Следовательно, в силу леммы 1.18

$$(Sa^{-1}a \cap Sbb^{-1})\ \rho_{a^{-1}} = Sabb^{-1}a^{-1} = S\ (ab)\ (ab)^{-1}.$$

Пусть A — непустое подмножество инверсной полугруппы S. Пересечение A^* всех инверсных подполугрупп полугруппы S, содержащих A, есть инверсная подполугруппа, содержащая A и содержащаяся в любой инверсной подполугруппе с таким свойством. Назовем A^* *инверсной подполугруппой полугруппы S, порожденной множеством A*. Пусть A^{-1} — множество всех элементов, инверсных к элементам из A. В силу леммы 1.18 подполугруппа полугруппы S, порожденная множеством $A \cup A^{-1}$, есть инверсная подполугруппа полугруппы S, содержащая A, и, очевидно, содержащаяся в любой другой инверсной подполугруппе с таким свойством. Следовательно, $A^* = \langle A \cup A^{-1} \rangle$. Другими словами, A^* состоит из всех конечных произведений элементов из A и инверсных к ним элементов.

Мы закончим этот параграф рассмотрением одного понятия, которое не раз пригодится нам в дальнейшем и которое представляет самостоятельный интерес. Пусть S — полугруппа с правым сокращением, не имеющая идемпотентов $\neq 1$. Пусть φ — расширенное регулярное представление $a \to \rho_a$ полугруппы S, где ρ_a есть внутренний правый сдвиг $x \to x\rho_a = xa$ полугруппы S^1 ($a \in S$, $x \in S^1$). По лемме 1.0 φ есть точное представление полугруппы S и $S\varphi$ состоит из взаимно однозначных отображений полугруппы S^1 в себя. Следовательно, $S\varphi$ содержится в симметрической инверсной полугруппе $\mathcal{J}_{S^1}$ на множестве S^1. Так как преобразование ρ_a отображает S^1 взаимно однозначно на S^1a, обратное к нему преобразование $\rho_a^{-1} \in \mathcal{J}_{S^1}$ отображает S^1a взаимно однозначно на S^1. *Инверсной оболочкой полугруппы* S назовем инверсную подполугруппу Σ полугруппы $\mathcal{J}_{S^1}$, порожденную множеством $S\varphi$. Это понятие (под другим названием) ввел Рис [1948b] в связи с вложением полугрупп с сокращениями в группы (§ 1.10). Утверждение (ii) леммы 1.21 обобщает лемму 2.11 его статьи.

Элемент $\alpha \in \mathcal{J}_{S^1}$ называется *взаимно однозначным частичным правым сдвигом* полугруппы S^1, если выполняется следующее условие: пусть s — такой элемент из S^1, что $s\alpha$ определено, тогда $(rs)\,\alpha$ определено для каждого $r \in S^1$ и $(rs)\,\alpha = r\,(s\alpha)$.

Лемма 1.21. *Пусть S — полугруппа с правым сокращением, не имеющая идемпотентов $\neq 1$, и Σ — ее инверсная оболочка.*

(i) *Множество всех взаимно однозначных частичных правых сдвигов полугруппы S^1 есть инверсная подполугруппа полугруппы $\mathcal{J}_{S^1}$, содержащая Σ.*

(ii) *Область определения $U\,(\alpha)$ и область значений $V\,(\alpha)$ непустого взаимно однозначного частичного правого сдвига α полугруппы S^1 (в частности, элемента α полугруппы Σ) суть левые идеалы полугруппы S^1.*

Доказательство. Пусть α и β — взаимно однозначные частичные правые сдвиги (ч.п.с.) полугруппы S^1 и $r, s \in S^1$. Предположим, что $s\,(\alpha\beta)$ определено. По определению произведения в $\mathcal{J}_{S^1}$ это означает, что определено как $s\alpha$, так и $(s\alpha)\,\beta$, и $s\,(\alpha\beta) = (s\alpha)\,\beta$. Так как α есть ч.п.с. полугруппы S^1 и $s\alpha$ определено, мы заключаем, что $(rs)\,\alpha$ определено и равно $r\,(s\alpha)$. Так как β есть ч.п.с. полугруппы S^1 и $(s\alpha)\,\beta$ определено, то $[r\,(s\alpha)]\,\beta$ определено и равно $r\,[(s\alpha)\,\beta]$. Таким образом,

$$[r\,(s\alpha)]\beta = [(rs)\,\alpha]\beta = (rs)\,(\alpha\beta),$$

и

$$r\,[(s\alpha)\,\beta] = r\,[s\,(\alpha\beta)].$$

Следовательно, $(rs)\,(\alpha\beta)$ определено и равно $r\,[s\,(\alpha\beta)]$, т. е. $\alpha\beta$ есть ч.п.с. полугруппы S^1.

Пусть α — ч.п.с. полугруппы S^1 и $r, s \in S^1$. Предположим, что $s\alpha^{-1}$ определено. Пусть $q = s\alpha^{-1}$. Тогда $q\alpha$ определено и равно s. Так как α есть ч.п.с. полугруппы S^1, $(rq)\,\alpha$ определено и равно

$r(q\alpha) = rs$. Отсюда следует, что $(rs)\alpha^{-1}$ определено и равно $rq = r(s\alpha^{-1})$. Следовательно, α^{-1} есть ч.п.с. полугруппы S^1.

Таким образом, множество всех ч.п.с. полугруппы S^1 есть инверсная подполугруппа полугруппы $\mathcal{J}_{S^1}$. Она, очевидно, содержит $S\varphi = \{\rho_a \mid a \in S\}$ и, следовательно, содержит инверсную подполугруппу Σ полугруппы $\mathcal{J}_{S^1}$, порожденную $S\varphi$. Этим завершается доказательство утверждения (i).

Докажем (ii). Пусть α — ч.п.с. полугруппы S^1. Если $s \in U(\alpha)$ и $r \in S^1$, то $rs \in U(\alpha)$ по определению ч.п.с. Пусть $q \in V(\alpha)$. Тогда $q = s\alpha$ для некоторого $s \in S^1$. Пусть $r \in S^1$. Так как $s\alpha$ определено и α есть ч.п.с. полугруппы S^1, то $(rs)\alpha$ определено и равно $r(s\alpha) = rq$. Отсюда следует, что $rq \in V(\alpha)$. Итак, $U(\alpha)$ и $V(\alpha)$ — левые идеалы полугруппы S^1.

В теореме 1.10 мы видели, что подполугруппа обратимых справа элементов полугруппы с единицей является полугруппой с правым сокращением и с единицей. Обратное непосредственно вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1.22. *Пусть S — полугруппа с правым сокращением, не содержащая идемпотентов $\neq 1$. Пусть φ — расширенное регулярное представление полугруппы S, Σ — ее инверсная оболочка и ι — тождественное преобразование полугруппы S^1. Тогда $\iota \cup S\varphi$ есть подполугруппа обратимых справа элементов полугруппы Σ и множество всех элементов полугруппы Σ, инверсных к элементам из $\iota \cup S\varphi$, есть подполугруппа обратимых слева элементов полугруппы Σ.*

Замечание. Если S не содержит единицы, то ι является единственным двусторонне обратимым элементом полугруппы Σ и $S\varphi$ состоит из всех обратимых справа элементов полугруппы Σ, кроме ι. Ни один элемент из $S\varphi$ не обратим слева, так как областью значений обратимого слева элемента должна быть полугруппа S^1, в то время как каждый элемент из $S\varphi$ отображает S^1 в S.

Доказательство. Если $a \in S$, то $\rho_a\rho_a^{-1} = \iota$. Следовательно, каждый элемент $\rho_a \in S\varphi$ является обратимым справа элементом полугруппы Σ. Обратно, предположим, что α — обратимый справа элемент полугруппы Σ, т. е. $\alpha\beta = \iota$ для некоторого $\beta \in \Sigma$. Тогда $\alpha = \iota\alpha = \alpha\beta\alpha$ и $\beta = \beta\iota = \beta\alpha\beta$, так что $\beta = \alpha^{-1}$. Из равенства $\alpha\alpha^{-1} = \iota$ следует, что область определения $U(\alpha)$ отображения α должна быть равна S^1. В частности, $1 \in U(\alpha)$. По лемме 1.21 (i) α есть частичный правый сдвиг полугруппы S^1. Следовательно, для каждого $x \in S^1$ имеем $x\alpha = (x1)\alpha = x(1\alpha)$, откуда $\alpha = \rho_{1\alpha} \in \iota \cup S\varphi$. Таким образом, $\iota \cup S\varphi$ есть подполугруппа обратимых справа элементов полугруппы Σ.

Так как $\rho_a\rho_a^{-1} = \iota$ для любого $a \in S$, то ρ_a^{-1} является обратимым слева элементом полугруппы Σ. Обратно, если α — обратимый слева элемент полугруппы Σ, то можно показать, как и выше, что $\alpha^{-1}\alpha = \iota$. Тогда $\alpha^{-1}(\alpha^{-1})^{-1} = \iota$, т. е. $\alpha^{-1} \in \iota \cup S\varphi$. Другими словами, α есть элемент, инверсный к некоторому элементу из $\iota \cup S\varphi$.

Упражнения к § 1.9

1. Полугруппа всех преобразований $\mathcal{T}_X$ множества X регулярна. (Досс [1955].)

2. Пусть S — полугруппа левых нулей ($xy = x$ для всех $x, y \in S$), причем $|S| > 1$. Тогда каждый главный правый идеал полугруппы S имеет единственный порождающий его идемпотент, но S не является инверсной полугруппой (ср. с теоремой 1.17 (ii)).

3. В полугруппе S любые два элемента инверсны друг к другу тогда и только тогда, когда S антикоммутативна (см. упражнение 1 к § 1.8).

4. Регулярная полугруппа, содержащая точно один идемпотент, является группой.

5. Регулярная полугруппа с сокращениями является группой. (Тьеррен [1951].)

6. Регулярная коммутативная полугруппа есть объединение групп.

7. Пусть a — элемент полугруппы S. Положим $A = \{x \mid axa = a, x \in S\}$. Тогда AaA есть множество элементов, инверсных к a. (Брак [1958], стр. 25—26, а также упражнение 3 к § 1.1.)

8. Симметрическая инверсная полугруппа $\mathcal{I}_X$ на множестве X содержит симметрическую группу $\mathcal{G}_X$ и ее полуструктура идемпотентов изоморфна булевой алгебре всех подмножеств множества X.

9. Применительно к полуструктуре S доказательство теоремы 1.20 дает обычный метод вложения S в булеву алгебру всех подмножеств множества S.

10. Если каждый элемент инверсной полугруппы коммутирует со своим инверсным, то S есть объединение групп.

11. Полугруппа S регулярна тогда и только тогда, когда $A \cap B = AB$ для каждого правого идеала A и каждого левого идеала B из S. (Исеки [1956d].)

12. Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ — такие классы полугрупп, что $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Тогда $\mathcal{B}$ называется *базисным классом* для $\mathcal{A}$ относительно класса $\mathcal{C}$, если (i) каждая полугруппа из класса $\mathcal{A}$ есть объединение подполугрупп, принадлежащих классу $\mathcal{B}$, (ii) никакой собственный подкласс $\mathcal{B}'$ класса $\mathcal{B}$ не обладает свойством (i), (iii) каждая полугруппа из класса $\mathcal{C}$, являющаяся объединением подполугрупп, принадлежащих $\mathcal{B}$, лежит в $\mathcal{A}$. (Это понятие было введено Ляпиным [1954] для случая, когда $\mathcal{C}$ есть класс всех полугрупп.)

Элементарной инверсной полугруппой называется инверсная полугруппа, порожденная двумя взаимно инверсными элементами. Класс всех элементарных инверсных полугрупп является базисным классом для класса всех инверсных полугрупп относительно класса всех полугрупп с коммутирующими идемпотентами, но не является таковым относительно класса всех полугрупп. (Глускин [1957].)

§ 1.10. Вложение полугрупп в группы

Коммутативная полугруппа может быть вложена в группу тогда и только тогда, когда она есть полугруппа с сокращениями. Обычная процедура такого вложения с помощью упорядоченных пар подобна процедуре вложения области целостности в поле (см., например, Ван-дер-Варден, Современная алгебра, § 13). В действительности проделать это в данном случае проще, так как вместо двух бинарных операций рассматривается лишь одна [1]).

Для некоммутативных полугрупп выполнение двустороннего закона сокращения является необходимым условием для вложимости в группу, но далеко не достаточным. Весьма полезное достаточное условие вложимости принадлежит Оре (Ore O., *Ann. of Math.*, 32 [1931], 463—477). Следуя Дюбрею [1941], назовем полугруппу S *реверсивной справа*, если непусто пересечение любых двух главных левых идеалов полугруппы S, т. е. $Sa \cap Sb \neq \varnothing$ для всех $a, b \in S^2$). Оре показал, что любое реверсивное справа кольцо без делителей нуля вложимо в тело. Из его доказательства непосредственно можно извлечь теорему о том, что любая реверсивная справа полугруппа с сокращениями вложима в группу. Будем называть эту теорему теоремой Оре.

При доказательстве этой теоремы можно использовать технику упорядоченных пар, как это делал Оре, и мы применим такую технику в главе 12 для более общих теорем о вложениях. Главная же цель настоящего параграфа — дать изящное доказательство теоремы Оре, принадлежащее Рису [1948b]. Так как коммутативная полугруппа, очевидно, реверсивна справа, теорема о вложимости коммутативной полугруппы с сокращениями в группу является следствием теоремы Оре.

В общем случае условие реверсивности справа является достаточным, но не необходимым условием вложимости. (Отметим, однако, теорему Дюбрея 1.24, приведенную ниже.) Впервые необходимые и достаточные условия для вложимости полугруппы в группу

---

[1]) См. также А. Г. Курош, «Лекции по общей алгебре», М., 1962, гл. II, § 5.— *Прим. ред.*

[2]) Такие полугруппы называют также *полугруппами с общими правыми кратными.— Прим. ред.*

были получены Мальцевым [1939]. Изложение содержания этой статьи и связанных с ней работ будет дано в главе 12.

Теорема 1.23 (Оре). *Любая реверсивная справа полугруппа с сокращениями вкладывается в группу.*

Доказательство (Рис). Пусть S — реверсивная справа полугруппа с сокращениями, $\mathcal{J}_S$ — симметрическая инверсная полугруппа всех взаимно однозначных частичных преобразований множества S, φ — регулярное представление полугруппы S и Σ — инверсная оболочка полугруппы S (§ 1.9), т. е. инверсная подполугруппа полугруппы $\mathcal{J}_S$, порожденная $S\varphi$.

Для каждого $\alpha \in \Sigma$ обозначим через $U(\alpha)$ и $V(\alpha)$ соответственно область определения и область значений преобразования α. Если $\alpha, \beta \in \Sigma$, то будем считать, что $\alpha \subseteq \beta$ тогда и только тогда, когда $U(\alpha) \subseteq U(\beta)$ и $x\alpha = x\beta$ для всех $x \in U(\alpha)$. Если рассматривать $\mathcal{J}_S$ как подполугруппу полугруппы $\mathcal{B}_S$ всех бинарных отношений на S, то отношение $\subseteq$ на элементах из $\mathcal{J}_S$ совпадает с обычным отношением включения бинарных отношений.

Определим отношение $\sim$ на Σ, полагая $\alpha \sim \beta$ $(\alpha, \beta \in \Sigma)$, если существует такое $\gamma \in \Sigma$, что $\gamma \subseteq \alpha$ и $\gamma \subseteq \beta$. Приступим к доказательству того, что отношение $\sim$ является конгруэнцией на Σ.

Свойства рефлексивности и симметричности непосредственно вытекают из определения отношения $\sim$. Докажем транзитивность. Предположим, что $\alpha \sim \beta$ и $\beta \sim \gamma$ $(\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma)$. Тогда существуют такие элементы $\delta_1, \delta_2 \in \Sigma$, что $\delta_1 \subseteq \alpha$, $\delta_1 \subseteq \beta$, $\delta_2 \subseteq \beta$ и $\delta_2 \subseteq \gamma$. Пусть $\delta = \delta_2\delta_2^{-1}\delta_1$. Тогда $U(\delta) \subseteq U(\delta_2)$. Следовательно, если $x \in U(\delta)$, то

$$x\delta = ((x\delta_2)\,\delta_2^{-1})\,\delta_1 = x\delta_1 = x\beta = x\delta_2.$$

Таким образом, $\delta \subseteq \delta_1 \subseteq \alpha$ и $\delta \subseteq \delta_2 \subseteq \gamma$, так что $\alpha \sim \gamma$.

Предположим теперь, что $\alpha \sim \alpha'$ и $\beta \sim \beta'$ $(\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \Sigma)$. Тогда существуют такие $\gamma, \delta \in \Sigma$, что $\gamma \subseteq \alpha$, $\gamma \subseteq \alpha'$, $\delta \subseteq \beta$ и $\delta \subseteq \beta'$. Отсюда следует, что $\gamma\delta \subseteq \alpha\beta$ и $\gamma\delta \subseteq \alpha'\beta'$, т. е. $\alpha\beta \sim \alpha'\beta'$. Итак, отношение $\sim$ является конгруэнцией на Σ.

Покажем, что факторполугруппа (§ 1.5) $G = \Sigma/\sim$ является группой. Для этого достаточно показать, что для любых $\alpha, \beta \in \Sigma$ существуют такие ξ и η из Σ, что $\alpha\xi \sim \eta\alpha \sim \beta$. В качестве ξ и η можно взять $\xi = \alpha^{-1}\beta$ и $\eta = \beta\alpha^{-1}$, так как $\alpha\alpha^{-1}\beta \subseteq \beta$ и $\beta\alpha^{-1}\alpha \subseteq \beta$.

До сих пор мы не пользовались свойством реверсивности справа. Благодаря этому свойству Σ *не содержит пустого отображения.* (В противном случае группа G была бы одноэлементна!) Для того чтобы показать это, возьмем два произвольных непустых элемента $\alpha, \beta \in \Sigma$. По лемме 1.21 (ii) $V(\alpha)$ и $U(\beta)$ — левые идеалы полугруппы S. Легко видеть, что условие реверсивности справа эквивалентно тому, что любые два левых идеала полугруппы S пересекаются. Следовательно, $V(\alpha) \cap U(\beta) \neq \varnothing$ и мы заключаем, что преобразование $\alpha\beta$ непусто. Так как Σ порождается непустыми элементами ρ_a, ρ_a^{-1} ($a \in S$) полугруппы $\mathcal{J}_S$, ни один элемент из Σ не может быть пустым.

Наконец, покажем, что $(S\varphi/\sim) \cong S$. Для этого достаточно показать, что $\rho_a \sim \rho_b$ влечет за собой $a = b$. Если $\rho_a \sim \rho_b$, то существует такое $\gamma \in \Sigma$, что $\gamma \subseteq \rho_a$ и $\gamma \subseteq \rho_b$. Так как Σ не содержит пустого отображения, $U(\gamma) \neq \varnothing$. Пусть $x \in U(\gamma)$. Тогда $x\rho_a = x\rho_b$, т. е. $xa = xb$, а, значит, $a = b$, так как S — полугруппа с сокращениями. Отображение, ставящее в соответствие каждому элементу $a \in S$ класс эквивалентности полугруппы Σ по mod $\sim$, содержащий ρ_a, является, таким образом, изоморфизмом S в группу G.

Хотя теорема Оре сформулирована как достаточное условие вложимости в группу, Дюбрей отметил (в [1943] и в книге «Algèbre», 1954, стр. 269), что реверсивность справа является тем не менее необходимым и достаточным условием для вложимости следующего простого типа. Скажем, что группа G есть *группа левых частных* полугруппы S, если G — такая группа, содержащая полугруппу S, что каждый элемент из G представим в виде $a^{-1}b$, где $a, b \in S$.

Теорема 1.24. *Полугруппа S с сокращениями вкладывается в группу левых частных тогда и только тогда, когда она реверсивна справа.*

Доказательство. Пусть G — группа левых частных полугруппы S и $a, b \in S$. Тогда элемент $ab^{-1} \in G$ можно представить в виде $ab^{-1} = x^{-1}y$ при некоторых $x, y \in S$. Отсюда $xa = yb \in Sa \cap Sb$, т. е. полугруппа S реверсивна справа.

Обратно, пусть S реверсивна справа. По теореме 1.23 ее можно вложить в группу G. Пусть G_1 — множество всех элементов из G, имеющих вид $a^{-1}b$, где $a, b \in S$. Покажем, что G_1 есть подгруппа группы G, откуда, очевидно, вытекает, что G_1 есть группа левых частных полугруппы S. Если $a^{-1}b \in G_1$, то $(a^{-1}b)^{-1} = b^{-1}a \in G_1$, т. е. множество G_1 замкнуто относительно взятия обратных элементов. Пусть $a^{-1}b$ и $c^{-1}d$ — произвольные элементы из G_1 ($a, b, c, d \in S$). По предположению существуют такие $x, y \in S$, что $xb = yc$. Тогда $bc^{-1} = x^{-1}y \in G$ и потому

$$a^{-1}b\cdot c^{-1}d = a^{-1}x^{-1}yd = (xa)^{-1}(yd).$$

Мы видим, что $a^{-1}b\cdot c^{-1}d \in G_1$, так как $xa, yd \in S$. Следовательно, G_1 — подгруппа группы G.

Последняя теорема этого параграфа показывает, что если S есть полугруппа Оре, то группа левых частных полугруппы S определяется однозначно.

Теорема 1.25. *Пусть S — реверсивная справа полугруппа с сокращениями, и пусть $G(\cdot)$ и G' $(\circ)$ — две группы левых частных полугруппы S. Тогда существует изоморфизм группы G на группу G', оставляющий элементы из S неподвижными.*

Доказательство. В группе G имеет место равенство $a^{-1}b = c^{-1}d$ $(a, b, c, d \in S)$ тогда и только тогда, когда каждое из равенств $xa = yc$, $xb = yd$ $(x, y \in S)$ влечет за собой другое. Кроме того, $(a^{-1}b)(c^{-1}d) = (xa)^{-1}(yd)$, где x и y — такие произвольные элементы полугруппы S, что $xb = yc$. Но те же самые условия для равенств и произведений выполняются и в G', т. е. отображение $a^{-1}b \to a^{-1} \circ b$ является изоморфизмом G на G', оставляющим элементы из S неподвижными.

Если S — коммутативная полугруппа с сокращениями, то пересечение $Sa \cap Sb$ непусто $(a, b \in S)$, так как оно содержит ab $(= ba)$. Группа (левых) частных полугруппы S, как легко видеть, также коммутативна. Нетрудно установить, что $a^{-1}b = c^{-1}d$ $(a, b, c, d \in S)$ тогда и только тогда, когда $ad = bc$; кроме того, $(a^{-1}b)(c^{-1}d) = (ac)^{-1}(bd)$

Упражнения к § 1.10

1. Пусть S — множество упорядоченных пар (i, j) неотрицательных целых чисел i, j. Определим в S умножение, полагая

$$(i, j)(k, l) = (i + k, 2^k j + l).$$

(Заметим, что S есть полугруппа, порожденная двумя элементами p и q, связанными определяющим соотношением $qp = pq^2$; см. § 1.12.) Тогда S реверсивна слева, но не реверсивна справа (по поводу других примеров см. Тамари [1948]).

2. Произвольная коммутативная полугруппа S вкладывается в такую полугруппу S^* с единицей, что (i) каждый сократимый элемент полугруппы S обратим в S^*, (ii) каждый элемент из S^* можно представить в виде ab^{-1}, где $a, b \in S^1$ и b есть сократимый элемент. Такая полугруппа S^* коммутативна и единственна с точностью до изоморфизма. (Вандивер [1940].)

3. Пусть S — реверсивная справа полугруппа с сокращениями, и пусть G — группа, содержащая S в качестве подполугруппы и порожденная полугруппой S. Тогда G является группой левых частных полугруппы S. (Конрад, устное сообщение.)

§ 1.11. *Правые группы*

Напомним (§ 1.1), что полугруппа S называется *простой справа* [*слева*], если она не содержит собственных правых [левых] идеалов, и что группы — это в точности полугруппы, простые как слева, так и справа. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые простые справа полугруппы; общую теорию простых полугрупп мы откладываем до гл. 8.

Полугруппа S называется *правой группой*, если она проста справа и с левым сокращением. Это эквивалентно тому, что для любых элементов a, $b \in S$ уравнение $ax = b$ имеет единственное решение в S. *Левые группы* определяются двойственным образом.

Прямым произведением полугрупп S и T (как и в теории групп) называется множество $S \times T$ всех упорядоченных пар (s, t) элементов $s \in S$ и $t \in T$ с операцией умножения, определенной следующим образом:

$$(s, t)(s', t') = (ss', tt')$$

для всех $s, s' \in S$ и $t, t' \in T$. Очевидно, что прямое произведение двух простых справа полугрупп является полугруппой, простой справа. Действительно, решение уравнения $(a, b)(x, y) = (c, d)$ сводится к решению отдельно уравнений $ax = c$ и $by = d$. Ясно также, что прямое произведение двух полугрупп с левым сокращением является полугруппой с левым сокращением и, следовательно, прямое произведение двух правых групп является правой группой.

Напомним (§ 1.1), что полугруппа E называется *полугруппой правых нулей*, если каждый ее элемент является правым нулем, т. е. $xy = y$ для всех $x, y \in E$. Очевидно, что E — правая группа.

Лемма 1.26. *Каждый идемпотент простой справа полугруппы S является ее левой единицей.*

Доказательство. Пусть e — идемпотент и a — произвольный элемент полугруппы S. Так как S проста справа, существует такой элемент $x \in S$, что $ex = a$. Тогда $ea = e^2x = ex = a$.

Следующая теорема полностью описывает строение всех правых групп с точностью до групп. Она была доказана Сушкевичем [1928] для случая конечных полугрупп, и, как отмечено в его книге [1937], глава 3, § 43, доказательство переносится на общий случай. Кроме того, эта теорема была сформулирована без доказательства Клиффордом [1933] для произвольных полугрупп; альтернативные характеристики правых групп из этой статьи приведены в упражнении 1 ниже.

Эта теорема, или некоторые ее варианты (такие, как в упражнении 1), была независимо доказана Шварцем [1943], Мэнном [1944], [1947], Балье [1950], Сколемом [1951] и Столлом [1956]. Другие характеризации правых групп получены Тамурой [1950], Хашимото [1954], Тьерреном [1954a] и Сепом [1956] [1]).

[1]) См. также работы Тамуры, Меркеля и Латимера [1963] и Л. Н. Шеврина [1966].— *Прим. ред.*

Теорема 1.27. *Следующие условия для полугруппы S эквивалентны*:

(i) *S есть правая группа*;

(ii) *S проста справа и содержит идемпотент*;

(iii) *S есть прямое произведение $G \times E$ группы G и полугруппы правых нулей E.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Правая группа проста справа по определению. Пусть $a \in S$. Так как S проста справа, существует такое $e \in S$, что $ae = a$. Тогда $ae^2 = ae$, и, поскольку можно сокращать слева, $e^2 = e$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Пусть E — множество идемпотентов полугруппы S. В силу условия (ii) имеем $E \neq \varnothing$. По лемме 1.26 *каждый элемент из E является левой единицей в S*. В частности, $ef = f$ для всех $e, f \in E$ и, значит, E есть подполугруппа правых нулей полугруппы S.

Покажем, далее, что S — *полугруппа с левым сокращением*; это, между прочим, докажет, что из (ii) следует (i). Пусть $ca = cb$ $(a, b, c \in S)$ и $f \in E$. Существует такое $x \in S$, что $cx = f$. Пусть $e = xc$. Тогда $e^2 = xcxc = xfc = xc = e$. Следовательно, $a = ea = xca = xcb = eb = b$.

Если $e \in E$, то Se — подполугруппа из S, в которой e является правой (а также и левой) единицей. Если $a \in Se$, то мы можем решить в S уравнение $ax = e$. Но тогда $a(xe) = e^2 = e$, т. е. элемент a обратим справа в полугруппе Se с единицей e. Следовательно, Se есть *подгруппа полугруппы S*.

Пусть g — фиксированный элемент из E. Группу Sg обозначим через G. Определим отображение φ прямого произведения $G \times E$ в S, полагая

$$(a, e)\varphi = ae \qquad (a \in G,\ e \in E).$$

Тогда для элементов $a, b \in G$ и $e, f \in E$ выполняются равенства

$$[(a, e)(b, f)]\varphi = (ab, ef)\varphi = (ab)(ef) = abf,$$
$$[(a, e)\varphi][(b, f)\varphi] = (ae)(bf) = a(eb)f = abf.$$

Следовательно, φ — гомоморфизм.

Покажем, что отображение φ взаимно однозначно. Предположим, что $(a, e)\varphi = (b, f)\varphi$, т. е. $ae = bf$ $(a, b \in G;\ e, f \in E)$. Так как g — единица группы G, справедливы равенства $a = ag = aeg = bfg = bg = b$. Следовательно, $ae = af$. Поскольку S — полугруппа с левым сокращением, $e = f$.

Наконец, покажем, что φ отображает $G \times E$ на S. Пусть $a \in S$. Существует такое $e \in S$, что $ae = a$. Отсюда $ae^2 = ae$ и $e^2 = e$, поскольку можно сокращать слева, следовательно, $e \in E$. Тогда $ag \in Sg = G$ и $(ag, e)\varphi = age = ae = a$. Итак, φ — изоморфизм $G \times E$ на S, т.е. (iii) доказано.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Так как прямое произведение двух правых групп является правой группой и E, G — правые группы, $G \times E$ также есть правая группа.

Значительная работа была проделана по изучению аксиоматики групп. Если A — система аксиом, включающая аксиомы замкнутости и ассоциативности, то предложение $P(A)$, утверждающее, что любая полугруппа, удовлетворяющая системе аксиом A, является группой, или отрицание $P(A)$ естественно принадлежит теории полугрупп. Если $P(A)$ ложно, то система аксиом A может определить интересный класс полугрупп. Вопросы независимости аксиом приводят к утверждениям об отношениях включения между различными классами полугрупп.

Практически такое изучение аксиом редко дает интересный материал для теории полугрупп. Исключение, однако, представляет работа Бэра и Леви [1932], в которой исследуются логические связи между следующими возможными аксиомами для полугруппы S:

(RS) S проста справа.

(LS) S проста слева.

(RC) S — полугруппа с правым сокращением.

(LC) S — полугруппа с левым сокращением.

Легко видеть, что если выполнены любые три из этих аксиом, то S является группой. Можно классифицировать пары этих аксиом следующим образом:

I. (RS) и (LS) : S — группа.

II. (RC) и (LC) : S — полугруппа с сокращениями.

III. (RS) и (LC) : S — правая группа.

(LS) и (RC) : S — левая группа.

IV. (RS) и (RC) : ?

(LS) и (LC) : ?

Примеры полугрупп класса IV были приведены Бэром и Леви в упомянутой статье. Полугруппы этого типа будут рассмотрены в гл. 8.

Упражнения к § 1.11

1. Рассмотрим следующие условия для полугруппы S:

I L [I R]. Существует левая единица $e \in S$, такая, что $e \in Sa$ [$e \in aS$] для каждого $a \in S$.

II L [II R]. Для каждого $a \in S$ подполугруппа Sa [aS] содержит левую единицу полугруппы S.

Условие I L эквивалентно тому, что S — группа, в то время как каждое из условий I R, II L и II R эквивалентно тому, что S есть правая группа. (Клиффорд [1933].)

2. Полугруппа S является правой группой тогда и только тогда, когда она есть объединение непересекающихся групп, мно-

жество единиц которых образует подполугруппу, являющуюся полугруппой правых нулей.

3. Правая группа является объединением непересекающихся изоморфных групп. Если e, f — различные идемпотенты правой группы S, то отображение $x \to xf$ $(x \in Se)$ есть изоморфизм группы Se на группу Sf.

4. Полугруппа S является правой группой тогда и только тогда, когда она — полугруппа с левым сокращением и регулярна (Манн, не опубликовано.)

5. Периодическая полугруппа S является правой группой тогда и только тогда, когда каждый ее идемпотент есть левая единица в S. (Сушкевич [1937], гл. 3, § 24.)

6. Пусть S — множество ненулевых комплексных чисел. Определим произведение в S, полагая $a \circ b = |a| b$ $(a, b \in S)$. Тогда S есть правая группа. Идемпотентами являются комплексные числа, модуль которых равен 1. Каждая максимальная подгруппа полугруппы S $(\circ)$ изоморфна мультипликативной группе положительных действительных чисел. (Белл; см. Клиффорд [1933], стр. 871.)

Упражнения 7—9 взяты у Гримбл [1950]. Пусть e — фиксированная левая единица полугруппы S, U — множество *левых делителей элемента* e $(a \in U$, если $e \in aS)$, V — множество *правых делителей элемента* e $(a \in V$, если $a \in Sa)$, W — множество *внутренних делителей элемента* e $(a \in W$, если $e \in SaS)$. Элемент $a \in S$ называется *универсальным левым* [*внутренним*] *делителем полугруппы* S, если $aS = S$ $[SaS = S]$. Идеал A (любого типа) называется *вполне изолированным идеалом*, если $S \setminus A$ есть подполугруппа полугруппы S.

7. (a) U состоит из всех универсальных левых делителей полугруппы S. U есть подполугруппа из S, содержащая все левые единицы из S и не содержащая других идемпотентов.

(b) Если $U = S$, то S есть правая группа. Если $U \neq S$, то $S \setminus U$ есть правый идеал полугруппы S, содержащий любой ее собственный правый идеал, и он вполне изолирован.

8. (a) V — подполугруппа с левым сокращением из S, содержащая e и не содержащая других идемпотентов.

(b) $U \cap V = H_e$ (максимальная подгруппа из S, содержащая e).

(c) Если $V = S$, то S — группа. Если $V \neq S$, то $S \setminus V$ — вполне изолированный левый идеал из S.

9. (a) W состоит из всех внутренних делителей полугруппы S.

(b) Если $W = S$, то S проста. Если $W \neq S$, то $S \setminus W$ — наибольший собственный двусторонний идеал полугруппы S.

(c) $W = U$ тогда и только тогда, когда каждое из утверждений $V \subseteq U$ и $V = H_e$ влечет за собой другое. В этом случае, например, каждый элемент из V имеет конечный порядок.

(d) Следующие условия равносильны: (i) $W = V$, (ii) $U \subseteq V$, (iii) $U = V$ и (iv) $U = H_e$. Если эти условия выполняются, то e является единственной левой единицей полугруппы S.

§ 1.12. Свободные полугруппы и определяющие соотношения. Бициклическая полугруппа

Пусть X — произвольное множество, и пусть $\mathcal{F}_X$ состоит из всех конечных последовательностей элементов множества X. Если $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ — элементы множества $\mathcal{F}_X$, то определим их произведение простым приписыванием:

$$(x_1, \ldots, x_m)(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n).$$

Тогда $\mathcal{F}_X$ становится полугруппой, которую мы будем называть *свободной полугруппой на множестве* X. Элементы полугруппы $\mathcal{F}_X$ будем называть *словами*. Если мы отождествим элемент $x \in X$ с последовательностью (x) длины 1, то по определению произведения в $\mathcal{F}_X$ получим

$$(x_1, x_2, \ldots, x_m) = (x_1)(x_2) \ldots (x_m) = x_1 x_2 \ldots x_m.$$

Таким образом, X есть порождающее множество полугруппы $\mathcal{F}_X$, причем ясно, что оно является единственным порождающим множеством без лишних элементов [1]).

Часто удобнее иметь дело с $\mathcal{F}_X^1$, нежели с $\mathcal{F}_X$. Присоединенную единицу 1 можно считать «пустым словом».

Предположим теперь, что мы хотим наложить некоторые «определяющие соотношения» на элементы множества X, например

$$x_1 x_2 = x_3 x_4^2, \quad x_1^3 = x_4 x_1 x_2.$$

Пусть этими соотношениями являются соотношения $u_\lambda = v_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, где для каждого элемента λ из множества индексов Λ u_λ и v_λ суть элементы полугруппы $\mathcal{F}_X$. Пусть $\rho_0 = \{(u_\lambda, v_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$, ρ — конгруэнция на $\mathcal{F}_X$, порожденная отношением ρ_0 (§ 1.5), и $\rho^\natural$ — естественный гомоморфизм полугруппы $\mathcal{F}_X$ на $\mathcal{F}_X/\rho$. Тогда множество $\{x\rho^\natural \mid x \in X\}$ порождает факторполугруппу $\mathcal{F}_X/\rho$ и $u_\lambda\rho^\natural = v_\lambda\rho^\natural$ для всех $\lambda \in \Lambda$, т. е. элементы порождающего множества полугруппы $\mathcal{F}_X/\rho$ действительно удовлетворяют определяющим соотношениям. Назовем $\mathcal{F}_X/\rho$ *полугруппой, порожденной множеством X и заданной определяющими соотношениями* $u_\lambda = v_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$ (в действительности, конечно, она порождается множеством $X\rho^\natural$).

Лемма 1.28. *Пусть $\mathcal{F}_X$ — свободная полугруппа на множестве X. Пусть S — произвольная полугруппа и φ_0 — произвольное*

[1]) То есть никакое его собственное подмножество не является порождающим для $\mathcal{F}_X$; такие порождающие множества называются *минимальными* или *неприводимыми*.— *Прим. ред.*

отображение множества X в S. Тогда φ_0 можно продолжить одним и только одним способом до гомоморфизма φ полугруппы $\mathscr{F}_X$ в S.

Доказательство. Если φ — произвольный гомоморфизм полугруппы $\mathscr{F}_X$ в S, совпадающий с φ_0 на X, то для произвольных $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$

$$(x_1x_2 \ldots x_n)\,\varphi = (x_1\varphi_0)\,(x_2\varphi_0) \ldots (x_n\varphi_0).$$

Следовательно, существует не более одного такого гомоморфизма φ. Но последнее равенство можно взять в качестве определения отображения φ полугруппы $\mathscr{F}_X$ в S, которое является, очевидно, гомоморфизмом и совпадет с φ_0 на множестве X.

Теорема 1.29. *Пусть $\mathscr{F}_X$ — свободная полугруппа на множестве X, ρ_0 — произвольное отношение на $\mathscr{F}_X$ и ρ — конгруэнция на $\mathscr{F}_X$, порожденная отношением ρ_0. Пусть $\rho^\natural$ — естественный гомоморфизм полугруппы $\mathscr{F}_X$ на $\mathscr{F}_X/\rho$. Если S — произвольная полугруппа и φ — такой гомоморфизм полугруппы $\mathscr{F}_X$ в S, что $u\varphi = v\varphi$ для каждого $(u, v) \in \rho_0$, то существует такой гомоморфизм θ полугруппы $\mathscr{F}_X/\rho$ в S, что $\rho^\natural\theta = \varphi$.*

Доказательство. Покажем сначала, что если w и w' — элементы полугруппы $\mathscr{F}_X$, для которых $w\rho w'$, то $w\varphi = w'\varphi$. По теореме 1.8 $w\rho w'$ тогда и только тогда, когда мы можем перейти от w к w' при помощи конечной последовательности ρ_0-переходов. Следовательно, достаточно лишь показать, что $w\varphi = w'\varphi$, если мы можем перейти от w к w' при помощи одного ρ_0-перехода. Но последнее означает, что $w = w_1uw_2$ и $w' = w_1vw_2$, где $w_1, w_2 \in \mathscr{F}_X^1$ и (u, v) или (v, u) принадлежит ρ_0. В любом случае по предположению $u\varphi = v\varphi$ и, следовательно,

$$w\varphi = (w_1\varphi)\,(u\varphi)\,(w_2\varphi) = (w_1\varphi)\,(v\varphi)\,(w_2\varphi) = w'\varphi.$$

Определим теперь отображение θ полугруппы $\mathscr{F}_X/\rho$ в S, полагая $(w\rho^\natural)\,\theta = w\varphi$ для каждого $w \in \mathscr{F}_X$. Выше мы показали, что $w\rho^\natural = w'\rho^\natural$ $(w, w' \in \mathscr{F}_X)$, т. е. $w\rho w'$ влечет за собой $w\varphi = w'\varphi$. Отсюда вытекает однозначность отображения θ. Тот факт, что область определения отображения θ есть все множество $\mathscr{F}_X/\rho$, следует из того, что каждый элемент множества $\mathscr{F}_X/\rho$ имеет вид $w\rho^\natural$ при некотором $w \in \mathscr{F}_X$.

Так как равенство $\rho^\natural\theta = \varphi$ теперь очевидно, осталось лишь показать, что θ — гомоморфизм. Пусть w и w' — любые два элемента из $\mathscr{F}_X$. Тогда

$$[(w\rho^\natural)\,(w'\rho^\natural)]\,\theta = [(ww')\,\rho^\natural]\,\theta = (ww')\,\varphi = (w\varphi)\,(w'\varphi) = [(w\rho^\natural)\,\theta]\,[(w'\rho^\natural)\,\theta].$$

Следовательно, θ — гомоморфизм.

Переформулируем предыдущую теорему более ярким, но менее точным образом.

Пусть $X = \{x_\tau \mid \tau \in \Omega\}$ и $\rho_0 = \{(u_\lambda, v_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$. Положим $x_\tau\varphi_0 = a_\tau$. Если $w = w(x)$ — произвольное слово из $\mathscr{F}_X$, то $w\varphi = w(a)$ получается «подстановкой значения a_τ из S вместо переменной x_τ» всюду, где x_τ встречается в слове w, и это проделывается для каждой переменной x_τ, входящей в w. Мы обычно записываем определяющие соотношения из ρ_0 как равенства:

$$u_\lambda(x) = v_\lambda(x) \qquad (\lambda \in \Lambda). \tag{1}$$

Будем смотреть на них как на «равенства от переменных x_τ». Будем говорить, что система значений $\{a_\tau \mid \tau \in \Omega\}$ «удовлетворяет этим равенствам», если $u\varphi = v\varphi$ для каждого $(u, v) \in \rho_0$ или, другими словами, если $u_\lambda(a) = v_\lambda(a)$ для всех $\lambda \in \Lambda$ суть равенства в полугруппе S.

Пусть $\Phi = \mathscr{F}_X/\rho$, и пусть $\xi_\tau = x_\tau\rho^\natural$. Тогда $\{\xi_\tau \mid \tau \in \Omega\}$ — порождающее множество полугруппы Φ, и эта система удовлетворяет равенствам (1).

Если в теореме 1.29 φ отображает $\mathscr{F}_X$ на S, то θ отображает Φ на S. Это имеет место тогда и только тогда, когда $\{a_\tau \mid \tau \in \Omega\}$ порождает S. В таком случае мы будем говорить, что «S имеет систему образующих $\{a_\tau \mid \tau \in \Omega\}$, удовлетворяющую равенствам (1)». Теорема 1.29 придает точный смысл утверждению о том, что Φ есть «наибольшая» полугруппа, имеющая систему образующих, которая удовлетворяет равенствам (1).

Следствие 1.29а. *Если S — произвольная полугруппа с системой образующих $\{a_\tau \mid \tau \in \Omega\}$, удовлетворяющей равенствам* (1), *то отображение $\xi_\tau \to a_\tau$ (τ пробегает Ω) можно продолжить до гомоморфизма θ полугруппы Φ на S.*

Ясно, что каждое равенство от переменных ξ_τ, выполняющееся в Φ, может быть выведено из равенств (1) в любой полугруппе. В самом деле, если $w(\xi) = w'(\xi)$, то, применяя θ, мы получим $w(a) = w'(a)$ в S. Это имеет место даже тогда, когда множество $\{a_\tau \mid \tau \in \Omega\}$ не порождает S. Обращая это предложение, мы приходим к такому следствию теоремы 1.29, которое будет использовано ниже в примере 2.

Следствие 1.30. *Если мы можем построить полугруппу S с такой системой элементов $\{a_\tau \mid \tau \in \Omega\}$, удовлетворяющей равенствам* (1), *что $w(a) \neq w'(a)$, где $w, w' \in \mathscr{F}_X$, то $w(\xi) \neq w'(\xi)$ в Φ.*

Может случиться, что нам понадобится отобразить некоторое слово $w(x)$ в единицу полугруппы $\mathscr{F}_X/\rho$. Для этого мы можем включить в ρ_0 определяющие соотношения $(x_\tau w, x_\tau)$ и $(w x_\tau, x_\tau)$ для всех $\tau \in \Omega$. Чтобы избежать этих неудобств, мы можем работать с полугруппой $\mathscr{F}_X^1$ вместо $\mathscr{F}_X$ и включить в ρ_0 лишь одно соотношение $(w, 1)$ вместо всех предыдущих, что не повлечет за собой существенных изменений в лемме 1.28 и теореме 1.29.

Пример 1. *Свободная группа $\mathscr{F}\mathscr{G}_X$ на множестве X.*

Пусть X' — множество, не пересекающееся с X и такое, что $|X'| = |X|$. Пусть $x \to x'$ — фиксированное взаимно однозначное отображение X на X' и $\mathscr{F}^1$ — свободная полугруппа с единицей на $X \cup X'$. Положим

$$\rho_0 = \{(xx', 1) \mid x \in X\} \cup \{(x'x, 1) \mid x \in X\}.$$

Пусть ρ — конгруэнция на $\mathscr{F}^1$, порожденная ρ_0. Тогда положим $\mathscr{F}\mathscr{G}_X = \mathscr{F}^1/\rho$.

Ясно, что $\mathscr{F}\mathscr{G}_X$ — группа и что X порождает $\mathscr{F}\mathscr{G}_X$ в теоретико-групповом смысле. Пусть G — произвольная группа, φ_1 — произвольное отображение множества X в G и φ_0 — отображение множества $X \cup X'$ в G, полученное из отображения φ_1 следующим образом: $x\varphi_1 = x\varphi_0$ и $x'\varphi_0 = (x\varphi_1)^{-1}$ для всех $x \in X$. По лемме 1.28 (модифицированной для случая, когда включено пустое слово) φ_0 можно продолжить до гомоморфизма φ полугруппы $\mathscr{F}^1 = \mathscr{F}^1_{X \cup X'}$ в G. Тогда для каждого $x \in X$ имеем $(xx')\varphi = (x\varphi)(x'\varphi) = (x\varphi)(x\varphi)^{-1} = 1 = 1\varphi$ и, аналогично, $(x'x)\varphi = 1\varphi$. Следовательно, $u\varphi = v\varphi$ для каждого $(u, v) \in \rho_0$. Применяя теорему 1.29 (модифицированную аналогичным образом), мы заключаем, что существует такой гомоморфизм θ группы $\mathscr{F}^1/\rho = \mathscr{F}\mathscr{G}_X$ в G, что $\rho^\natural\theta = \varphi$. Таким образом, мы показали, что любое отображение φ_1 множества X в G можно продолжить до гомоморфизма θ группы $\mathscr{F}\mathscr{G}_X$ в G. Это свойство оправдывает термин «свободная группа на X» для $\mathscr{F}\mathscr{G}_X$.

Пример 2. *Бициклическая полугруппа $\mathscr{C}$.*

Эта полугруппа играет очень важную роль в теории простых полугрупп. Мы рассмотрим многие ее свойства и приложения в § 2.7. Эта полугруппа также является простейшим представителем обширного класса полугрупп, который будет изучаться в гл. 8 (бипростые инверсные полугруппы с единицей); она является «элементарной инверсной полугруппой» (упражнение 12 к § 1.9). В печати бициклическая полугруппа была упомянута впервые в статье Ляпина [1953b]. Она была приведена независимо Рисом и одним из нас до 1943 г. (не опубликовано) в качестве примера простой полугруппы, содержащей непримитивный идемпотент. В неопубликованной диссертации Андерсена [1952] доказано, что каждая такая полугруппа содержит бициклическую подполугруппу (теорема 2.54 ниже).

Бициклической полугруппой $\mathscr{C}$ называется полугруппа с единицей, порожденная двухэлементным множеством $X = \{x_1, x_2\}$ и заданная одним определяющим соотношением $x_1x_2 = 1$. Здесь

ρ_0 состоит из одной пары $(x_1x_2, 1)$. Если, как и выше, ρ — конгруэнция на полугруппе $\mathcal{F}^1_X$, порожденная отношением ρ_0, то $\mathcal{C} = \mathcal{F}^1_X/\rho$. Полугруппа $\mathcal{C}$ в действительности порождается классами $p = x_1\rho^{\natural}$ и $q = x_2\rho^{\natural}$, которые удовлетворяют равенству $pq = 1$, и мы будем писать $\mathcal{C} = \mathcal{C}(p, q)$.

Покажем сначала, что $qp \neq 1$. В силу следствия 1.30 достаточно построить пример полугруппы S с единицей 1, содержащей такие два элемента a и b, что $ab = 1$, но $ba \neq 1$.

Пусть S — полугруппа $\mathcal{T}_N$ всех преобразований множества N неотрицательных целых чисел. Пусть преобразования α и β заданы следующим образом:

$$n\alpha = n+1; \tag{2}$$

$$n\beta = \begin{cases} 0, & \text{если } n = 0, \\ n-1, & \text{если } n > 0, \end{cases} \tag{3}$$

где n — произвольный элемент множества N. Тогда $\alpha\beta = \iota$, где ι — единица полугруппы $\mathcal{T}_N$, но

$$n\beta\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 0, \\ n, & \text{если } n > 0. \end{cases}$$

Следовательно, $\beta\alpha \neq \iota$ и мы заключаем, что $qp \neq 1$ в $\mathcal{C}$.

Произвольный элемент из $\mathcal{C}$ можно, конечно, выразить в виде произведения нескольких элементов, каждый из которых равен p или q. Используя соотношение $pq = 1$, мы можем привести любое такое выражение к виду $q^m p^n$, где m и n — неотрицательные целые числа; мы принимаем соглашение, что $p^0 = q^0 = 1$. Покажем, что каждый элемент полугруппы $\mathcal{C}$ имеет лишь одно представление такого типа, т. е. докажем, что если $q^i p^j = q^m p^n$ для некоторых неотрицательных целых чисел i, j, m, n, то $i = m$ и $j = n$. Мы могли бы получить это, установив, что $\beta^i \alpha^j = \beta^m \alpha^n$ влечет за собой $i = m$ и $j = n$, где α и β — преобразования множества N, заданные условиями (2) и (3); см. упражнение 1 ниже. Однако мы получим этот факт в качестве следствия леммы 1.31 и предыдущего утверждения о том, что $qp \neq 1$. Позднее мы обобщим эту лемму (§ 2.7).

Лемма 1.31. *Пусть e, a, b — такие элементы полугруппы S, что $ea = ae = a$, $eb = be = b$, $ab = e$, $ba \neq e$. Тогда каждый элемент подполугруппы $\langle a, b\rangle$ из S, порожденной элементами a и b, единственным образом представляется в виде $b^m a^n$, где m и n — неотрицательные целые числа (и $a^0 = b^0 = e$), и, следовательно, $\langle a, b\rangle$ изоморфна бициклической полугруппе $\mathcal{C}$.*

Доказательство. Ясно, что $e \in \langle a, b\rangle$ и e — единица полугруппы $\langle a, b\rangle$. В силу равенства $ab = e$ каждый элемент из $\langle a, b\rangle$ представим в виде $b^m a^n$. Осталось лишь показать единственность m и n. Докажем сначала три предварительных предложения.

(i) *Элементы a и b имеют бесконечный порядок.* Предположим от противного, что $a^{h+k} = a^h$ для некоторых положительных целых чисел h и k. Умножая на b^h справа, получим $a^k = e$. Тогда $b = eb = a^k b = a^{k-1}e = a^{k-1}$ и $ba = a^k = e$, что противоречит предположению о том, что $ba \neq e$. Аналогично доказывается, что b имеет бесконечный порядок.

(ii) *Если $a^h = b^k$ для некоторых неотрицательных целых чисел h и k, то $h = k = 0$.* В самом деле, в этом случае $a^{h+k} = a^k b^k = e$, откуда $h + k = 0$ по (i).

(iii) *Если $b^h a^k = e$ для некоторых неотрицательных целых чисел h и k, то $h = k = 0$.* Если $k = 0$, то $h = 0$ по (i). Покажем, что неравенство $k > 0$ невозможно. В самом деле, если $k > 0$, то $b = eb = b^h a^k b = b^h a^{k-1}$ и $ba = b^h a^k = e$, что противоречит условию.

Предположим теперь от противного, что $b^m a^n = b^i a^j$, где m, n, i, j — такие неотрицательные целые числа, что $i \neq m$ или $j \neq n$. Рассмотрим случай, когда $i \neq m$; другой случай рассматривается аналогично. Без ограничения общности мы можем предположить, что $i < m$. Умножая на a^i слева, мы получим $b^{m-i}a^n = a^j$. Если $j \geqslant n$, то умножение на b^n справа дает $b^{m-i} = a^{j-n}$, где $m - i > 0$, что противоречит (ii). Если $j \leqslant n$, то умножение на b^j справа дает $b^{m-i}a^{n-j} = e$, где $m - i > 0$, что противоречит (iii).

Ввиду следствия 1.29а отображение $p \to a$, $q \to b$ индуцирует гомоморфизм θ полугруппы $\mathscr{C}(p, q)$ в S и, следовательно, на $\langle a, b\rangle$, а именно $(q^m p^n)\theta = b^m a^n$. Из только что доказанной единственности представления элементов следует, что θ — изоморфизм.

Следствие 1.32. *Если φ — гомоморфизм бициклической полугруппы $\mathscr{C}$, то либо φ есть изоморфизм полугруппы $\mathscr{C}$ в S, либо $\mathscr{C}\varphi$ — циклическая группа.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{C} = \mathscr{C}(p, q)$, где $pq = 1$, и пусть $a = p\varphi$, $b = q\varphi$, $e = 1\varphi$. Тогда e, a, b удовлетворяют условиям леммы 1.31, кроме, быть может, условия $ba \neq e$. Если $ba \neq e$, то φ — изоморфизм; в самом деле, если $(q^m p^n)\varphi = (q^i p^j)\varphi$, то $b^m a^n = b^i a^j$, откуда $m = i$ и $n = j$ по лемме 1.31. Если $ba = e$, то $\mathscr{C}\varphi$ — циклическая группа, порожденная элементом a.

Следствием леммы 1.31 является также и тот факт, что подполугруппа $\langle \alpha, \beta\rangle$ полугруппы $\mathscr{T}_N$, где α и β — преобразования, определенные при помощи приведенных выше условий (2) и (3), изоморфна $\mathscr{C}$. Мы могли бы определить бициклическую полугруппу, используя полугруппу $\langle \alpha, \beta\rangle$.

По лемме 1.31 и в силу того, что $qp \neq 1$, отображение $(m, n) \to q^m p^n$ является взаимно однозначным отображением множества $N \times N$ на $\mathscr{C}(p, q)$. Мы можем сделать $N \times N$ полугруппой, определяя умножение в $N \times N$ следующим образом (см. упражнение 2 к настоящему параграфу):

$$(k, l)(m, n) = (k + m - \min(l, m),\ l + n - \min(l, m)).$$

Можно использовать и эту полугруппу для определения $\mathscr{C}$; мы должны, конечно, в этом случае проверить ассоциативность.

Предыдущие примеры иллюстрируют три употребительных метода построения полугрупп: (1) при помощи определяющих соотношений; (2) при помощи преобразований множества; (3) при помощи упорядоченных пар.

Упражнения к § 1.12

1. Если α и β — преобразования множества N неотрицательных целых чисел, определенные при помощи равенств (2) и (3), то

$$k\beta^m\alpha^n = \begin{cases} n, & \text{если } k \leqslant m, \\ k - m + n, & \text{если } k \geqslant m, \end{cases}$$

для всех $k, m, n \in N$. Отсюда мы заключаем, что $\beta^i\alpha^j = \beta^m\alpha^n$ $(i, j, m, n \in N)$ влечет за собой $i = m$ и $j = n$. По следствию 1.30 такое же заключение верно для элементов $q^m p^n$ бициклической полугруппы $\mathscr{C}(p, q)$.

2. Произведение элементов $q^k p^l$ и $q^m p^n$ полугруппы $\mathscr{C}(p, q)$ $(k, l, m, n \in N)$ равно $q^i p^j$, где $i = k + m - \min(l, m)$ и $j = l + n - \min(l, m)$.

3. Конечную циклическую полугруппу индекса r и периода m можно описать как полугруппу, порожденную символом x и заданную одним определяющим соотношением $x^{m+r} = x^r$.

4. Пусть $P = \langle p \rangle$ — бесконечная циклическая полугруппа. Тогда $\mathscr{C}(p, q)$ изоморфна инверсной оболочке (§ 1.9) полугруппы P^1.

5. Элемент a полугруппы S называется *левым увеличительным элементом*, если существует собственное подмножество N из S, такое, что $aN = S$.

(a) Пусть S — полугруппа с единицей. Левыми увеличительными элементами полугруппы S являются в точности обратимые справа, но не слева, элементы из S.

(b) Пусть S — полугруппа с единицей, и пусть a — левый увеличительный элемент полугруппы S. Тогда существует такой элемент $b \in S$, что $\langle a, b \rangle$ есть бициклическая подполугруппа из S. (Ляпин [1953c].)

Глава 2

ИДЕАЛЫ И СВЯЗАННЫЕ С НИМИ ПОНЯТИЯ

Говорят, что два элемента полугруппы S $\mathcal{L}$-эквивалентны, если они порождают один и тот же главный левый идеал в S. $\mathcal{R}$-эквивалентность определяется двойственным образом. Объединение[1]) отношений эквивалентности $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ обозначается через $\mathcal{D}$, а их пересечение — через $\mathcal{H}$. Эти фундаментальные отношения эквивалентности, которые можно определить на любой полугруппе, были впервые введены и изучены Грином [1951]. Они очень полезны при выяснении строения полугрупп.

В частности, они дадут нам возможность получить более прозрачное доказательство теоремы Риса (3.5), нежели доказательство автора (Рис [1940]). Мы покажем, что 0-простая полугруппа вполне 0-проста тогда и только тогда, когда она содержит по крайней мере один 0-минимальный левый идеал и по крайней мере один 0-минимальный правый идеал (теорема 2.48). Два ненулевых элемента вполне 0-простой полугруппы S $\mathcal{L}$-эквивалентны [$\mathcal{R}$-эквивалентны] тогда и только тогда, когда они принадлежат одному и тому же 0-минимальному левому [правому] идеалу полугруппы S. С этой точки зрения мы изучаем строение вполне 0-простых полугрупп в § 2.7.

§ 2.1. *Отношения Грина*

Все результаты этого параграфа, за исключением теоремы 2.4, принадлежат Грину [1951]. Простейшие свойства бинарных отношений были рассмотрены в § 1.4.

Определим отношение $\mathcal{L}$ на полугруппе S, полагая $a\mathcal{L}b$ тогда и только тогда, когда a и b порождают один и тот же главный левый идеал в S. Другими словами, $\mathcal{L}$ есть подмножество из $S \times S$, состоящее из всех таких пар (a, b), что $a \cup Sa = b \cup Sb$. Последнее эквивалентно тому, что $S^1a = S^1b$, где (как в § 1.1 и на протяжении всей книги) S^1 совпадает с S, если S содержит единицу, и S^1 есть полугруппа, полученная из S присоединением единицы 1, в противном случае. Очевидно, $\mathcal{L}$ есть отношение эквивалентности, причем если $a\mathcal{L}b$, то $ac\mathcal{L}bc$ для

[1]) См. § 1.4.— *Прим. перев.*

любого $c \in S$, т. е. $\mathcal{L}$ — правая конгруэнция (§ 1.5). Если $a\mathcal{L}b$, то мы говорим, что a и b *$\mathcal{L}$-эквивалентны*. Через L_a будем обозначать множество всех элементов полугруппы S, $\mathcal{L}$-эквивалентных элементу a, иными словами, L_a есть класс эквивалентности по mod $\mathcal{L}$, содержащий a; назовем его *$\mathcal{L}$-классом*, содержащим a.

Двойственным образом определим отношение $\mathcal{R}$, полагая $a\mathcal{R}b$ тогда и только тогда, когда $aS^1 = bS^1$. Отметим, что $\mathcal{R}$ — левая конгруэнция на S. Через R_a будем обозначать класс эквивалентности полугруппы S по mod $\mathcal{R}$ или, другими словами, *$\mathcal{R}$-класс*, содержащий a.

Лемма 2.1. *Отношения $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ коммутируют и поэтому отношение $\mathcal{D} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ есть наименьшее отношение эквивалентности $\mathcal{L} \vee \mathcal{R}$, содержащее как $\mathcal{L}$, так и $\mathcal{R}$.*

Доказательство. Если мы покажем, что $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ коммутируют, то оставшаяся часть утверждения леммы будет непосредственно следовать из леммы 1.4. Нам достаточно даже показать, что $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$ (см. упражнение 3 к § 1.4).

Пусть a и b — такие элементы полугруппы S, что $a\,(\mathcal{L} \circ \mathcal{R})\,b$. По определению произведения отношений (§ 1.4) это означает, что существует $c \in S$, для которого $a\mathcal{L}c$ и $c\mathcal{R}b$. По определению отношений $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ отсюда следует, что существуют такие u, $v \in S^1$, что $a = uc$ и $b = cv$. Положим $d = av = ucv = ub$. Так как $\mathcal{L}$ — правая конгруэнция, $a\mathcal{L}c$ влечет за собой $av\mathcal{L}cv$, т. е. $d\mathcal{L}b$. Так как $\mathcal{R}$ — левая конгруэнция, $c\mathcal{R}b$ влечет за собой $uc\mathcal{R}ub$, т. е. $a\mathcal{R}d$. Из соотношений $a\mathcal{R}d$, $d\mathcal{L}b$ вытекает, что $a\,(\mathcal{R} \circ \mathcal{L})\,b$. Следовательно, $\mathcal{L} \circ \mathcal{R} \subseteq \mathcal{R} \circ \mathcal{L}$, чем и завершается доказательство леммы.

$\mathcal{D}$-класс полугруппы S, содержащий элемент a, будет обозначаться через D_a.

На полугруппе S определим отношение $\mathcal{J}$, полагая $a\mathcal{J}b$ тогда и только тогда, когда $S^1aS^1 = S^1bS^1$, т. е. элементы a и b *$\mathcal{J}$-эквивалентны* тогда и только тогда, когда они порождают один и тот же главный двусторонний идеал. Очевидно, что $\mathcal{J}$ — отношение эквивалентности. Грин обозначал это отношение через $\mathcal{F}$. Мы же употребляем для него символ $\mathcal{J}$ потому, что в ряде статей по топологическим полугруппам через $J\,(a)$ обозначается идеал S^1aS^1, а через J_a — множество всех элементов, порождающих идеал S^1aS^1, т. е. $\mathcal{J}$-класс, содержащий a. Мы тоже будем придерживаться этих обозначений. Так как $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{J}$ и $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{J}$, мы имеем $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{J}$; вообще говоря, $\mathcal{D} \neq \mathcal{J}$.

Наконец, на полугруппе S определим отношение $\mathcal{H}$, полагая $\mathcal{H} = \mathcal{L} \cap \mathcal{R}$. Очевидно, $\mathcal{H}$ — отношение эквивалентности. Будем обозначать $\mathcal{H}$-класс, содержащий a, через H_a. Ясно, что $H_a = R_a \cap L_a$.

Заметим, что *$\mathscr{R}$-класс R и $\mathscr{L}$-класс L полугруппы S пересекаются тогда и только тогда, когда они оба содержатся в одном и том же $\mathscr{D}$-классе этой полугруппы.* В самом деле, пусть $a \in R$ и $b \in L$. Тогда $a\mathscr{D}b$ в том и только в том случае, когда существует такое $c \in S$, что $a\mathscr{R}c$ и $c\mathscr{L}b$. Но это условие эквивалентно тому, что $c \in R$ и $c \in L$, т. е. $c \in R \cap L$. Следовательно, $a\mathscr{D}b$ тогда и только тогда, когда $R \cap L \neq \varnothing$. С другой стороны, очевидно, что $a\mathscr{D}b$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}$-классы, содержащие R и L, совпадают.

Чтобы лучше представлять себе $\mathscr{D}$-класс D полугруппы S, используем следующий наглядный образ, который будем называть «egg-box»-*картиной*. Представим себе, что элементы из D расположены в прямоугольной таблице, подобной коробке из-под яиц, строки которой соответствуют $\mathscr{R}$-классам, а столбцы — $\mathscr{L}$-классам, содержащимся в D. Каждая ячейка коробки из-под яиц соответствует $\mathscr{H}$-классу, содержащемуся в D, и предыдущее замечание показывает, что в коробке нет пустых ячеек. Мы не предполагаем, что элементы в $\mathscr{H}$-классах расположены каким-либо специальным образом. Как мы вскоре увидим, $\mathscr{H}$-классы, содержащиеся в D, имеют один и тот же порядок; таким образом, ячейки коробки из-под яиц, так сказать, одинаково наполнены элементами полугруппы S.

Можно представлять себе, что коробки из-под яиц ($\mathscr{D}$-классы) расположены, как на диаграмме, приведенной в следующем параграфе (таблица 4).

Если a и b — элементы полугруппы S, то мы будем писать $J_a \leqslant J_b$ в случае, когда $S^1aS^1 \subseteq S^1bS^1$, т. е. когда $a \in J(b)$. Отношение $\leqslant$ есть отношение частичного порядка на множестве $\mathscr{J}$-классов полугруппы S.

Заметим, что полугруппа проста слева [справа] тогда и только тогда, когда она состоит из одного $\mathscr{L}$-класса [$\mathscr{R}$-класса], и полугруппа проста тогда и только тогда, когда она состоит из одного $\mathscr{J}$-класса. Мы говорим, что полугруппа S *$\mathscr{D}$-проста* или *бипроста*, если она состоит из одного $\mathscr{D}$-класса. Так как $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$, каждая бипростая полугруппа проста. Упражнение 10 к этому параграфу показывает, что не всякая простая полугруппа бипроста, откуда, в частности, следует, что, вообще говоря, $\mathscr{D} \neq \mathscr{J}$. Так как $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{D}$ и $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$, каждая простая слева и каждая простая справа полугруппа бипроста.

Лемма 2.2 (Грин). *Пусть a и b — произвольные $\mathscr{R}$-эквивалентные элементы полугруппы S, и пусть s, s' — такие элементы полугруппы S^1, что $as = b$ и $bs' = a$. (Такие элементы s и s' существуют.) Тогда отображения $x \to xs$ $(x \in L_a)$ и $y \to ys'$ $(y \in L_b)$ взаимно обратны, сохраняют $\mathscr{R}$-классы и взаимно однозначно отображают соответственно L_a на L_b и L_b на L_a.*

Доказательство. Обозначим эти два отображения через σ и σ'. Заметим, что σ $[\sigma']$ является ограничением внутреннего правого сдвига ρ_s $[\rho_{s'}]$ на множество L_a $[L_b]$.

Пусть $x \in L_a$. Так как $\mathcal{L}$ — правая конгруэнция, $x\mathcal{L}a$ влечет за собой $xs\mathcal{L}as = b$, откуда $xs \in L_b$. Таким образом, σ отображает L_a в L_b и, аналогично, σ' отображает L_b в L_a.

Снова пусть $x \in L_a$. Тогда существует такой элемент $t \in S^1$, что $x = ta$, поэтому

$$x\sigma\sigma' = xss' = tass' = tbs' = ta = x.$$

Таким образом, $\sigma\sigma'$ есть тождественное преобразование множества L_a. Аналогично, $\sigma'\sigma$ есть тождественное преобразование множества L_b, поэтому σ и σ' — взаимно обратные взаимно однозначные отображения L_a и L_b друг на друга.

Покажем, что σ сохраняет $\mathcal{R}$-классы. В самом деле, если $x \in L_a$ и $y = x\sigma = xs$, то $ys' = x$, т. е. $y\mathcal{R}x$. Аналогично доказывается, что и σ' сохраняет $\mathcal{R}$-классы.

Теорема 2.3. *Пусть a и c — произвольные $\mathcal{D}$-эквивалентные элементы полугруппы S. Тогда существует такой элемент $b \in S$, что $a\mathcal{R}b$ и $b\mathcal{L}c$ и, следовательно, $as = b$, $bs' = a$, $tb = c$, $t'c = b$ для некоторых s, s', t, $t' \in S^1$. Отображения $x \to txs$ $(x \in H_a)$ и $z \to t'zs'$ $(z \in H_c)$ взаимно обратны и взаимно однозначно отображают классы H_a и H_c друг на друга. В частности, два $\mathcal{H}$-класса, лежащих в одном и том же $\mathcal{D}$-классе, имеют одинаковый порядок.*

Доказательство. По лемме, двойственной лемме Грина, отображения τ: $y \to ty$ $(y \in R_b)$ и τ': $z \to t'z$ $(z \in R_c)$ взаимно обратны, сохраняют $\mathcal{L}$-классы и взаимно однозначно отображают R_b и R_c друг на друга.

Пусть σ и σ' — отображения из леммы Грина, но ограниченные соответственно на H_a и H_b. (Так как по лемме Грина отображения σ и σ' сохраняют $\mathcal{R}$-классы, их ограничения отображают множества H_a и H_b друг на друга взаимно однозначно.) Аналогично, пусть отображения τ и τ' ограничены соответственно на H_b и H_c. Тогда $\sigma\tau$ и $\tau'\sigma'$ — взаимно обратные взаимно однозначные отображения классов H_a и H_c друг на друга. Но эти отображения совпадают с отображениями, указанными в формулировке теоремы.

Все изложенные выше результаты этого параграфа принадлежат Грину [1951]. Мы закончим параграф результатом Миллера и Клиффорда [1956], который нам понадобится позднее.

Теорема 2.4. *Произведение LR любого $\mathcal{L}$-класса L и любого $\mathcal{R}$-класса R полугруппы S содержится целиком в одном $\mathcal{D}$-классе полугруппы S.*

Доказательство. Утверждение теоремы эквивалентно тому, что если a, a', b, b' — элементы полугруппы S, для которых $a\mathcal{L}a'$ и $b\mathcal{R}b'$, то $ab\mathcal{D}a'b'$. Так как $\mathcal{L}$ — правая конгруэнция, $a\mathcal{L}a'$ влечет за собой $ab\mathcal{L}a'b$. Так как $\mathcal{R}$ — левая конгруэнция, $b\mathcal{R}b'$ влечет за собой $a'b\mathcal{R}a'b'$. Но из $ab\mathcal{L}a'b$ и $a'b\mathcal{R}a'b'$ следует, что $ab\mathcal{D}a'b'$.

Упражнения к § 2.1

1. Всякие два элемента из любой подгруппы в произвольной полугруппе $\mathcal{H}$-эквивалентны.

2. Каждый $\mathcal{L}$-класс правой группы S (§ 1.11) является также $\mathcal{H}$-классом и подгруппой полугруппы S.

3. Если S — полугруппа с правым сокращением и без идемпотентов, то каждый ее $\mathcal{L}$-класс состоит из одного элемента.

4. Пусть S — простая справа полугруппа. Если S — полугруппа с левым сокращением, то каждый ее $\mathcal{H}$-класс является группой. Если S — полугруппа с правым сокращением, то либо (i) S есть группа, либо (ii) S не имеет идемпотентов и каждый ее $\mathcal{H}$-класс состоит из одного элемента.

5. Прямоугольная связка (§ 1.8) бипроста. Ее строки являются $\mathcal{R}$-классами, а столбцы — $\mathcal{L}$-классами. Каждый $\mathcal{H}$-класс состоит из одного элемента.

6. Бициклическая полугруппа $\mathcal{C}$ (p, q) (§ 1.12) бипроста. Если расположить элементы полугруппы $\mathcal{C}$ в таблицу

$$\begin{array}{cccc} 1 & p & p^2 & \dots \\ q & qp & qp^2 & \dots \\ q^2 & q^2p & q^2p^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

то $\mathcal{R}$-классы [$\mathcal{L}$-классы] полугруппы $\mathcal{C}$ являются строками [столбцами] этой таблицы. Каждый $\mathcal{H}$-класс состоит из одного элемента.

7. Пусть S — полугруппа с единицей. Полугруппа P [Q] обратимых справа [слева] элементов из S (§ 1.7) состоит из всех элементов, $\mathcal{R}$-эквивалентных [$\mathcal{L}$-эквивалентных] единице. Полугруппа S бипроста тогда и только тогда, когда $S = QP$. (Клиффорд [1953].)

Упражнения 8—10 взяты из работы Андерсена [1952].

8. Пусть G — множество с двумя бинарными операциями $(+)$ и $(\cdot)$, удовлетворяющими следующим аксиомам:

I. $G(+)$ — полугруппа, $G(\cdot)$ — группа.

II. $(a + b)c = ac + bc$.

Тогда (a) $G + G = G$.

(b) Если $G(+)$ содержит идемпотент, то каждый элемент из $G(+)$ является идемпотентом.

Пример 1. G — множество положительных действительных чисел с обычными операциями $(+)$ и $(\cdot)$ (или, в более общей ситуации, G — положительный конус любого упорядоченного поля).

Пример 2. G — множество положительных рациональных чисел с обычным умножением $(\cdot)$ и взятием наименьшего общего кратного $(+)$ [1]) (или, в более общей ситуации, G — структурно упорядоченная группа).

9. Пусть $A = G \times G$. Определим умножение в A, полагая

$$(a, b)(c, d) = (ac, bc + d), \quad (a, b, c, d \in G).$$

Тогда

(a) A — простая полугруппа.

(b) Множество всех элементов из A вида $(1, b)$, где $b \in G$ и 1 есть единица группы $G(\cdot)$, является подполугруппой B полугруппы A, изоморфной $G(+)$.

(c) Если $G(+)$ не имеет идемпотентов, то A также не имеет идемпотентов. Если $G(+)$ обладает идемпотентами, то B есть множество всех идемпотентов полугруппы A и A регулярна.

(d) $(a, b)\,\mathscr{L}\,(c, d)$ в A влечет за собой $b\mathscr{L}d$ в $G(+)$; $(a, b)\,\mathscr{R}\,(c, d)$ в A влечет за собой $ba^{-1}\mathscr{R}dc^{-1}$ в $G(+)$. Обратная к первой [второй] из этих импликаций имеет место, если $b \neq d$ $[ba^{-1} \neq dc^{-1}]$.

10. (a) Пусть $G(+)$ — полугруппа с сокращениями и без единицы (такова полугруппа $G(+)$ из примера 1). Тогда A — (простая) полугруппа с сокращениями и без единицы.

(b) В предположениях пункта (a) каждый $\mathscr{D}$-класс полугруппы A состоит из одного элемента. (Таким образом, A является простой полугруппой, настолько далекой от бипростой полугруппы, насколько это вообще возможно.)

(Если G взять из примера 1, то A есть простая полугруппа, вложимая в группу. Существуют ли простые полугруппы с сокращениями, не вложимые в группы?)

11. Любая простая полугруппа с сокращениями, содержащая идемпотент, является группой.

12. Лемма 2.1 есть непосредственное следствие леммы 2.2.

§ 2.2. $\mathscr{D}$-строение полной полугруппы преобразований $\mathscr{T}_X$ на множестве X

Целью этого параграфа является иллюстрация понятий, введенных в предыдущем параграфе, на примере полугруппы $\mathscr{T}_X$. Результаты данного параграфа, кульминационным пунктом кото-

[1]) Число a называется *кратным* числа b, если $a = mb$, где m — целое число. — *Прим. ред.*

рого является теорема 2.9, принадлежат Миллеру и Доссу [1955]. Леммы 2.5 и 2.6 приведены также в книге Сушкевича [1937], гл. 3, § 31. Аналогичный пример представляет собой полугруппа $\mathcal{LT}(V)$ всех линейных преобразований векторного пространства V; соответствующие утверждения приведены в упражнении 6 к этому параграфу.

С каждым элементом α полугруппы $\mathcal{T}_X$ мы связываем два понятия: (1) *область значений* $X\alpha$ преобразования α и (2) *разбиение* $\pi_\alpha = \alpha \circ \alpha^{-1}$ *множества* X, *связанное с* α, т. е. отношение эквивалентности на X, определенное следующим образом:

$$x\pi_\alpha y \quad (x,\ y \in X), \quad \text{если} \quad x\alpha = y\alpha \quad (\S\ 1.4).$$

Пусть $\pi_\alpha^\natural$ — естественное отображение множества X на множество X/π_α классов эквивалентности множества X по $\mathrm{mod}\ \pi_\alpha$. Тогда отображение $x\pi_\alpha^\natural \to x\alpha$ является взаимно однозначным отображением множества X/π_α на $X\alpha$. Отсюда следует, что $|X/\pi_\alpha| = |X\alpha|$. Это кардинальное число называется *рангом* преобразования α.

Если $y \in X$ и $\alpha \in \mathcal{T}_X$, то определим $y\alpha^{-1}$ как множество всех $x \in X$, таких, что $x\alpha = y$.

Лемма 2.5. *Для данных* $\alpha,\ \beta \in \mathcal{T}_X$ *тогда и только тогда существует такое преобразование* $\xi \in \mathcal{T}_X$, *что* $\xi\alpha = \beta$, *когда* $X\alpha \supseteq X\beta$. *Следовательно*, $\alpha\mathcal{L}\beta$ *тогда и только тогда, когда* $X\alpha = X\beta$.

Доказательство. Если $\xi\alpha = \beta$, то $X\beta = (X\xi)\,\alpha \subseteq \subseteq X\alpha$. Обратно, предположим, что $X\beta \subseteq X\alpha$. Определим преобразование ξ множества X следующим образом: для каждого $y \in X\beta$ преобразование ξ отображает все элементы множества $y\beta^{-1}$ на некоторый фиксированный элемент из множества $y\alpha^{-1}$. Тогда $\xi\alpha = \beta$.

Лемма 2.6. *Для данных* $\alpha,\ \beta \in \mathcal{T}_X$ *тогда и только тогда существует такое преобразование* $\xi \in \mathcal{T}_X$, *что* $\alpha\xi = \beta$, *когда* $\pi_\alpha \subseteq \pi_\beta$. *Следовательно*, $\alpha\mathcal{R}\beta$ *тогда и только тогда, когда* $\pi_\alpha = \pi_\beta$.

Доказательство. Если $\alpha\xi = \beta$ и $x\pi_\alpha y$, то $x\beta = = x\alpha\xi = y\alpha\xi = y\beta$ и потому $x\pi_\beta y$. Таким образом, $\alpha\xi = \beta$ влечет за собой $\pi_\alpha \subseteq \pi_\beta$. Обратно, предположим, что $\pi_\alpha \subseteq \pi_\beta$. Определим преобразование ξ, полагая $x\alpha\xi = x\beta$ для элементов множества $X\alpha$ и считая, что на множестве $X \setminus X\alpha$ оно действует тождественно. Однозначность ξ очевидна, так как из равенства $x\alpha = y\alpha$ следует $x\beta = y\beta$ по предположению. Ясно, что $\alpha\xi = \beta$.

Лемма 2.7. *Пусть* π — *разбиение множества* X, *и пусть* Y — *такое подмножество множества* X, *что* $|X/\pi| = |Y|$. *Тогда существует такое преобразование* $\alpha \in \mathcal{T}_X$, *что* $\pi_\alpha = \pi$ *и* $X\alpha = Y$.

Доказательство. Так как $|X/\pi| = |Y|$, существует взаимно однозначное отображение φ множества X/π на Y. Тогда отображение $\alpha = \pi^\natural \varphi$ обладает требуемыми свойствами.

Лемма 2.8. *Два элемента полугруппы $\mathscr{T}_X$ $\mathscr{D}$-эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют один и тот же ранг.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \mathscr{T}_X$. Если $\alpha\mathscr{D}\beta$, то $\alpha\mathscr{L}\gamma$ и $\gamma\mathscr{R}\beta$ для некоторого $\gamma \in \mathscr{T}_X$. По лемме 2.5 области значений преобразований α и γ совпадают. Следовательно, α и γ одного ранга. По лемме 2.6 разбиения, соответствующие преобразованиям γ и β, совпадают. Следовательно, γ и β одного ранга.

Обратно, предположим, что α и β имеют одинаковый ранг. Тогда $|X\alpha| = |X/\pi\beta|$. По лемме 2.7 существует такое преобразование $\gamma \in \mathscr{T}_X$, что $X\gamma = X\alpha$ и $\pi_\gamma = \pi_\beta$. На основании лемм 2.5 и 2.6 $\alpha\mathscr{L}\gamma$ и $\gamma\mathscr{R}\beta$, откуда $\alpha\mathscr{D}\beta$.

Теорема 2.9. *Пусть $\mathscr{T}_X$ — полная полугруппа преобразований на множестве X.*

(i) *В полугруппе $\mathscr{T}_X$ отношения $\mathscr{D}$ и $\mathscr{J}$ совпадают.*

(ii) *Существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством всех главных идеалов полугруппы $\mathscr{T}_X$ и множеством всех кардинальных чисел $r \leqslant |X|$, что главный идеал, соответствующий r, состоит из всех элементов полугруппы $\mathscr{T}_X$, ранг которых не превосходит r.*

(iii) *Существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством всех $\mathscr{D}$-классов полугруппы $\mathscr{T}_X$ и множеством всех кардинальных чисел $r \leqslant |X|$, что $\mathscr{D}$-класс D_r, соответствующий r, состоит из всех элементов полугруппы $\mathscr{T}_X$, ранг которых равен r.*

(iv) *Пусть r — кардинальное число $\leqslant |X|$. Существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством всех $\mathscr{L}$-классов, содержащихся в D_r, и множеством всех подмножеств Y мощности r из X, что $\mathscr{L}$-класс, соответствующий множеству Y, состоит из всех элементов полугруппы $\mathscr{T}_X$, для которых Y есть область значений.*

(v) *Пусть r — кардинальное число $\leqslant |X|$. Существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством всех $\mathscr{R}$-классов, содержащихся в D_r, и множеством всех разбиений π множества X, для которых $|X/\pi| = r$, что $\mathscr{R}$-класс, соответствующий π, состоит из всех элементов полугруппы $\mathscr{T}_X$, для которых связанные с ними разбиения совпадают с π.*

(vi) *Пусть r — кардинальное число $\leqslant |X|$. Существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством всех $\mathscr{H}$-классов, содержащихся в D_r, и множеством всех пар (π, Y), где π есть разбиение множества X, а Y — подмножество множества X, причем $|X/\pi| = |Y| = r$, что $\mathscr{H}$-класс, соответствующий*

(π, Y), состоит из всех элементов полугруппы $\mathscr{T}_X$, для которых связанные с ними разбиения совпадают с π, а области значений — с Y.

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in \mathscr{T}_X$. Покажем сначала, что $\beta \in J(\alpha)$ тогда и только тогда, когда ранг преобразования β не превосходит ранга преобразования α. Если $\beta \in J(\alpha)$, то $\beta = \xi\alpha\eta$ для некоторых $\xi, \eta \in \mathscr{T}_X$ и потому $|X\beta| = |X\xi\alpha\eta| \leqslant |X\alpha\eta| \leqslant |X\alpha|$. Обратно, предположим, что ранг преобразования β не превосходит ранга преобразования α. Пусть Y — произвольное подмножество мощности $|X\alpha|$ из X, содержащее $X\beta$, и пусть γ — произвольный элемент полугруппы $\mathscr{T}_X$, для которого Y является областью значений. Так как $|X\alpha| = |Y| = |X\gamma|$, из леммы 2.8 следует, что $\gamma\mathscr{D}\alpha$. Так как $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$, то $J(\gamma) = J(\alpha)$. Ввиду леммы 2.5 и того, что $X\gamma \supseteq X\beta$, существует преобразование $\xi \in \mathscr{T}_X$, для которого $\xi\gamma = \beta$. Следовательно, $\beta \in J(\gamma) = J(\alpha)$.

Из предыдущего следует, что $J(\alpha) = J(\beta)$, т. е. $\alpha\mathscr{J}\beta$ тогда и только тогда, когда преобразования α и β имеют один и тот же ранг. По лемме 2.8 $\alpha\mathscr{J}\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha\mathscr{D}\beta$, что устанавливает справедливость утверждения (i).

Из предыдущего и того факта, что $\mathscr{T}_X$ содержит элементы произвольного ранга $\leqslant |X|$, следует, что отображение $J(\alpha) \to \{\text{ранг преобразования } \alpha\}$ взаимно однозначно отображает множество главных идеалов полугруппы $\mathscr{T}_X$ на множество всех кардинальных чисел $\leqslant |X|$, причем выполняются свойства, сформулированные в пункте (ii).

Аналогично, из леммы 2.8 следует, что отображение $D_\alpha \to \{\text{ранг преобразования } \alpha\}$, где $\alpha \in \mathscr{T}_X$, взаимно однозначно отображает множество $\mathscr{D}$-классов полугруппы $\mathscr{T}_X$ на множество всех кардинальных чисел $\leqslant |X|$, причем выполняются свойства, сформулированные в пункте (iii).

Пусть теперь r — кардинальное число, не превосходящее $|X|$, и D_r есть $\mathscr{D}$-класс полугруппы $\mathscr{T}_X$, состоящий из всех элементов ранга r.

Если Y — такое подмножество множества X, что $|Y| = r$, то $\mathscr{T}_X$, очевидно, содержит элемент α, для которого $X\alpha = Y$ и $\alpha \in D_r$. Аналогично, если π — такое разбиение множества X, что $|X/\pi| = r$, то D_r содержит элемент β, для которого $\pi_\beta = \pi$. Из этих замечаний и лемм 2.5, 2.6, 2.7 непосредственно вытекают утверждения (iv), (v) и (vi) теоремы.

Перейдем теперь к описанию и идемпотентов полугруппы $\mathscr{T}_X$. Утверждение (ii) следующей теоремы показывает, что $\mathscr{H}$-класс полугруппы $\mathscr{T}_X$ является подгруппой тогда (и, очевидно, только тогда), когда он содержит идемпотент. В дальнейшем мы увидим, что это свойство выполняется для произвольной полугруппы (теорема Грина 2.16). Следовательно, в $\mathscr{H}$-классе может содержаться не более одного идемпотента. Утверждение (i) следующей теоремы показывает, в каких $\mathscr{H}$-классах полугруппы $\mathscr{T}_X$ содержатся идемпотенты.

Теорема 2.10. *Пусть Y — подмножество множества X, и пусть π — такое разбиение множества X, что $|Y| = |X/\pi|$. Пусть H есть $\mathscr{H}$-класс полугруппы $\mathscr{T}_X$, соответствующий паре* (π, Y) (*см. теорему* 2.9 (vi)).

(i) *H содержит идемпотент тогда и только тогда, когда Y пересекается с каждым классом эквивалентности множества X по* mod π *точно по одному элементу* (т. е. Y —*«поперечное сечение» разбиения* π).

(ii) *Если H содержит идемпотент, то H — полугруппа, изоморфная симметрической группе $\mathscr{G}_Y$ на множестве Y.*

Доказательство. (i) Пусть ε — идемпотент из H. Таким образом, $Y = X\varepsilon$, $\pi = \pi_\varepsilon$ и $\varepsilon^2 = \varepsilon$. Отображение ε оставляет каждый элемент из Y на месте и передвигает каждый элемент множества $X \setminus Y$. Пусть $x \in X$. Так как $x\varepsilon = (x\varepsilon)\,\varepsilon$, из $\pi = \pi_\varepsilon$ следует $x\pi\,(x\varepsilon)$. С другой стороны, если y и y' — элементы множества Y, такие, что $y\pi y'$, то $y = y\varepsilon = y'\varepsilon = y'$. Следовательно, каждый класс эквивалентности множества X по mod π содержит точно один элемент множества Y и ε отображает каждый элемент из $y\pi^{\natural}$ $(y \in Y)$ на y.

Обратно, предположим, что Y — поперечное сечение разбиения π. Тогда элемент полугруппы $\mathscr{T}_X$, переводящий каждый элемент x множества X в такой элемент $y \in Y$, что $x\pi y$, является, очевидно, идемпотентом из H.

(ii) Предположим, что H содержит идемпотент ε. Пусть $\alpha \in H$. Для каждого $x \in X$ имеем $x\alpha \in X\alpha = Y = X\varepsilon$, поэтому $x\alpha\varepsilon = x\alpha$. Отсюда следует, что $\alpha\varepsilon = \alpha$. Для каждого $x \in X$ выполняется $x\pi\,(x\varepsilon)$ (показано выше), и, так как $\pi_\alpha = \pi = \pi_\varepsilon$, то $x\alpha = (x\varepsilon)\,\alpha$. Отсюда следует, что $\varepsilon\alpha = \alpha$.

Покажем теперь, что α индуцирует подстановку на Y. Если $y\alpha = y'\alpha$ $(y, y' \in Y)$, то $y\pi y'$ и потому $y = y'$. Для данного $y \in Y = X\alpha$ существует такой элемент $x \in X$, что $x\alpha = y$. Тогда $x\varepsilon \in Y$ и $(x\varepsilon)\,\alpha = x\alpha = y$. Следовательно, $(\alpha \mid Y) \in \mathscr{G}_Y$.

Каждая подстановка φ из $\mathscr{G}_Y$ индуцируется некоторым преобразованием $\alpha \in H$, а именно преобразованием, которое задано следующим образом: $x\alpha = (x\varepsilon)\,\varphi$. Более того, α однозначно определяется подстановкой φ. В самом деле, если $y\alpha = y\beta$ для всех $y \in Y$, где α, $\beta \in H$, то $x\varepsilon\alpha = x\varepsilon\beta$ для всех $x \in X$, откуда $\alpha = \varepsilon\alpha = \varepsilon\beta = \beta$. Следовательно, отображение $\alpha \to \varphi = \alpha \mid Y$ есть взаимно однозначное отображение множества H на $\mathscr{G}_Y$ и, очевидно, изоморфизм. Итак, H — подгруппа полугруппы $\mathscr{T}_X$, изоморфная $\mathscr{G}_Y$.

В качестве примера выпишем все $\mathscr{D}$-классы полугруппы $\mathscr{T}_4$ ($\mathscr{T}_X$ при $|X| = 4$). Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$. Отображение $1 \to i$, $2 \to j$, $3 \to k$, $4 \to l$ будем записывать в виде $(ijkl)$. Существует четыре $\mathscr{D}$-класса D_r $(r = 1, 2, 3, 4)$, где D_r есть множество всех элементов ранга r. Будем нумеровать строки разбиениями множества $\{1, 2, 3, 4\}$, а столбцы — подмножествами множества $\{1, 2, 3, 4\}$. Опустим D_4, которое состоит из одного $\mathscr{H}$-класса, совпадающего с симметрической группой четвертой степени на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$. Отмеченные звездочками элементы суть идемпотенты; они показывают, какие ячейки являются группами. Таблица 4 дает полную $\mathscr{D}$-картину полугруппы $\mathscr{T}_4$; числа 1, 2, 6, 24 указывают порядок каждого $\mathscr{H}$-класса.

Таблица 1

D_1	{1}	{2}	{3}	{4}
{1234}	(1111) *	(2222) *	(3333) *	(4444) *

Таблица 2

D_2	{12}	{13}	{14}	{23}	{24}	{34}
{1} {234}	(1222) * (2111)	(1333) * (3111)	(1444) * (4111)	(2333) (3222)	(2444) (4222)	(3444) (4333)
{2} {134}	(1211) * (2122)	(1311) (3133)	(1411) (4144)	(2322) (3233) *	(2422) (4244) *	(3433) (4344)
{3} {124}	(1121) (2212)	(1131) * (3313)	(1141) (4414)	(2232) * (3323)	(2242) (4424)	(3343) (4434) *
{4} {123}	(1112) (2221)	(1113) (3331)	(1114) * (4441)	(2223) (3332)	(2224) * (4442)	(3334) * (4443)
{12} {34}	(1122) (2211)	(1133) * (3311)	(1144) * (4411)	(2233) * (3322)	(2244) * (4422)	(3344) (4433)
{13} {24}	(1212) * (2121)	(1313) (3131)	(1414) * (4141)	(2323) (3232) *	(2424) (4242)	(3434) * (4343)
{23} {14}	(1221) * (2112)	(1331) * (3113)	(1441) (4114)	(2332) (3223)	(2442) (4224) *	(3443) (4334) *

Таблица 3

D_3	{123}	{124}	{134}	{234}
{1} {2} {34}	(1233) * (2133) (2311) (3211) (3122) (1322)	(1244) * (2144) (2411) (4211) (4122) (1422)	(1344) (3144) (3411) (4311) (4133) (1433)	(2344) (3244) (3422) (4322) (4233) (2433)
{1} {3} {24}	(1232) * (2131) (2313) (3212) (3121) (1323)	(1242) (2141) (2414) (4212) (4121) (1424)	(1343) (3141) (3414) (4313) (4131) (1434) *	(2343) (3242) (3424) (4323) (4232) (2434)
{1} {4} {23}	(1223) (2113) (2331) (3221) (3112) (1332)	(1224) * (2114) (2441) (4221) (4112) (1442)	(1334) * (3114) (3441) (4331) (4113) (1443)	(2334) (3224) (3442) (4332) (4223) (2443)
{2} {3} {14}	(1231) * (2132) (2312) (3213) (3123) (1321)	(1241) (2142) (2412) (4214) (4124) (1421)	(1341) (3143) (3413) (4314) (4134) (1431)	(2342) (3243) (3423) (4324) (4234) * (2432)
{2} {4} {13}	(1213) (2123) (2321) (3231) (3132) (1312)	(1214) * (2124) (2421) (4241) (4142) (1412)	(1314) (3134) (3431) (4341) (4143) (1413)	(2324) (3234) * (3432) (4342) (4243) (2423)
{3} {4} {12}	(1123) (2213) (2231) (3321) (3312) (1132)	(1124) (2214) (2241) (4421) (4412) (1142)	(1134) * (3314) (3341) (4431) (4413) (1143)	(2234) * (3324) (3342) (4432) (4423) (2243)

Таблица 4

«Egg-box»-картина для $\mathcal{T}_4$ · Число элементов

D_4	24															$1\cdot 1\cdot 24=24$
D_3		6	6	6	6											$6\cdot 4\cdot 6=144$
		6	6	6	6											
		6	6	6	6											
		6	6	6	6											
		6	6	6	6											
		6	6	6	6											
D_2						2	2	2	2	2	2					$7\cdot 6\cdot 2=84$
						2	2	2	2	2	2					
						2	2	2	2	2	2					
						2	2	2	2	2	2					
						2	2	2	2	2	2					
						2	2	2	2	2	2					
						2	2	2	2	2	2					
D_1												1	1	1	1	$1\cdot 4\cdot 1=4$
																всего $4^4=256$

Упражнения к § 2.2

1. (a) Пусть Y — непустое подмножество множества X. В $\mathcal{T}_X$ существует по крайней мере одна проекция множества X на Y, т. е. отображение ε множества X на Y, оставляющее каждый элемент из Y на месте. В $\mathcal{L}$-классе полугруппы $\mathcal{T}_X$, соответствующем множеству Y (см. теорему 2.9 (iv)), идемпотентами являются лишь проекции множества X на Y.

(b) Пусть π — произвольное разбиение множества X. Существует (по аксиоме выбора) по крайней мере одно поперечное сечение Y разбиения π. Для каждого $x \in X$ через $x\varepsilon$ обозначим такой элемент y множества Y, что $x\pi y$. Назовем ε *представляющим* отображением разбиения π. В $\mathcal{R}$-классе полугруппы $\mathcal{T}_X$, соответствующем разбиению π (см. теорему 2.9 (v)), идемпотентами являются лишь представляющие отображения разбиения π.

(c) По лемме 1.13 полугруппа $\mathscr{T}_X$ регулярна (см. упражнение 1 к § 1.9).

2. (a) Каждый $\mathscr{L}$-класс ранга r из $\mathscr{T}_n$ ($=\mathscr{T}_X$ при $|X|=n$) содержит r^{n-r} идемпотентов.

(b) Каждый $\mathscr{R}$-класс полугруппы $\mathscr{T}_n$, соответствующий разбиению $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r$ числа n, содержит $n_1 n_2 \ldots n_r$ идемпотентов.

3. (a) Каждый идеал полугруппы $\mathscr{T}_n$ (где n конечно) является главным.

(b) Если X счетно, то единственным неглавным идеалом полугруппы $\mathscr{T}_X$ является множество всех преобразований конечного ранга.

4. (a) Подполугруппа P обратимых справа элементов полугруппы $\mathscr{T}_X$ является $\mathscr{R}$-классом, соответствующим разбиению множества X на одноэлементные подмножества, поэтому она состоит из всех взаимно однозначных отображений множества X в X (см. § 1.7, упражнение 2).

(b) Подполугруппа Q обратимых слева элементов полугруппы $\mathscr{T}_X$ является $\mathscr{L}$-классом, состоящим из всех элементов полугруппы $\mathscr{T}_X$, для которых X есть область значений.

(c) $\mathscr{H}$-класс $P \cap Q$ совпадает с симметрической группой $\mathscr{G}_X$.

5. В пяти $\mathscr{D}$-классах полугруппы $\mathscr{T}_5$ содержится соответственно 5, 300, 1500, 1200, 120 элементов.

6. Пусть Φ — поле и V — векторное пространство над Φ. *Размерностью* $\dim V$ пространства V называется мощность его базиса над Φ. Пусть $\mathscr{L}\mathscr{T}(V)$ — мультипликативная полугруппа (относительно суперпозиции) всех линейных преобразований пространства V. С каждым элементом A полугруппы $\mathscr{L}\mathscr{T}(V)$ мы связываем два подпространства пространства V: (1) *область значений* VA преобразования A, состоящую из всех xA при $x \in V$, и (2) *ядро*[1]) N_A преобразования A, состоящее из всех $y \in V$, таких, что $yA = 0$.

(a) Пусть $A \in \mathscr{L}\mathscr{T}(V)$. Пусть W — подпространство пространства V, дополнительное к N_A, т. е. $V = N_A \oplus W$[2]). Тогда A индуцирует невырожденное линейное отображение пространства W на VA. Следовательно, $\dim (V/N_A) = \dim W = \dim VA$; это кардинальное число назовем *рангом* преобразования A. (Здесь через V/N_A мы обозначаем факторпространство пространства V по mod N_A. Если $\dim V$ конечно, то это понятие ранга совпадает с обычным понятием ранга для матрицы A.)

---

[1]) В оригинале —«null-space».— *Прим. перев.*

[2]) То есть V есть прямая сумма подпространств N_A и W. — *Прим. ред.*

(b) Два элемента полугруппы $\mathscr{LT}(V)$ $\mathscr{L}$-эквивалентны [$\mathscr{R}$-эквивалентны] тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же область значений [ядро].

(c) Если N и W — такие подмножества пространства V, что $\dim(V/N) = \dim W$, то существует по крайней мере один элемент $A \in \mathscr{LT}(V)$, для которого $N = N_A$ и $W = VA$.

(d) Два элемента полугруппы $\mathscr{LT}(V)$ $\mathscr{D}$-эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.

(e) Теорема 2.9 выполняется для $\mathscr{LT}(V)$, если заменить «подмножество Y множества X» на «подпространство W пространства V», $|Y|$ на $\dim W$, «разбиение π множества X» на «подпространство N пространства V» и $|X/\pi|$ на $\dim(V/N)$.

(f) Пусть N и W — такие подпространства пространства V, что $\dim(V/N) = \dim W$. Пусть H есть $\mathscr{H}$-класс, состоящий из всех элементов полугруппы $\mathscr{LT}(V)$ с ядром N и областью значений W. Тогда H содержит идемпотент в том и только в том случае, когда N и W дополняют друг друга в V, и этот идемпотент является проекцией пространства V на W, которая аннулирует N. В этом случае H есть подгруппа, изоморфная полной линейной группе $\mathscr{GL}(W)$ на W, состоящей из всех невырожденных линейных преобразований пространства W.

(g) Полугруппа $\mathscr{LT}(V)$ регулярна.

7. Пусть X — счетное бесконечное множество, а π и ρ — такие элементы полугруппы $\mathscr{T}_X$, что $\pi\rho = \iota$, и пусть G — подгруппа симметрической группы $\mathscr{G}_X$. Тогда $\rho G \pi$ является подгруппой полугруппы $\mathscr{T}_X$, изоморфной G и состоящей из элементов полугруппы $\mathscr{T}_X$, имеющих бесконечный ранг. Обратно, любая подгруппа элементов бесконечного ранга из $\mathscr{T}_X$ может быть получена таким способом. (Сушкевич [1940].)

8. Пусть S — подполугруппа полугруппы $\mathscr{T}_X$ всех преобразований конечного множества X. Она является левой группой тогда и только тогда, когда все ее элементы имеют одинаковую область значений; S является правой группой тогда и только тогда, когда всем ее элементам соответствуют одинаковые разбиения множества X. (См. упражнение 5 к § 1.11.) (Сушкевич [1937], гл. 3, § 31.)

§ 2.3. *Регулярные $\mathscr{D}$-классы*

Напомним (§ 1.9), что элемент a полугруппы S называется *регулярным*, если $a = axa$ для некоторого $x \in S$. $\mathscr{D}$-класс D (или какое-либо подмножество) полугруппы S называется регулярным, если каждый элемент из D регулярен. Следующая теорема показывает, что если D — нерегулярный $\mathscr{D}$-класс, то в D нет регулярных элементов; в этом случае мы говорим, что D иррегулярен. В этом параграфе мы изложим теорию регулярных $\mathscr{D}$-классов произвольной полугруппы.

Теорема 2.11. (i) *Если $\mathscr{D}$-класс D полугруппы S содержит регулярный элемент, то каждый элемент из D регулярен.*

(ii) *Если D регулярен, то каждый $\mathscr{L}$-класс и каждый $\mathscr{R}$-класс, содержащиеся в D, содержат идемпотент.*

Доказательство. Мы можем перефразировать лемму 1.13 следующим образом: *элемент a полугруппы S регулярен тогда и только тогда, когда R_a $[L_a]$ содержит идемпотент.* Отсюда следует, что если $\mathscr{R}$-класс R [$\mathscr{L}$-класс L] содержит регулярный элемент, то он содержит идемпотент и каждый элемент из R $[L]$ регулярен. Так как каждый $\mathscr{R}$-класс полугруппы S, содержащийся в D, пересекается с каждым $\mathscr{L}$-классом полугруппы S, содержащимся в D, то утверждение (i) очевидно. Но тогда утверждение (ii) непосредственно вытекает из леммы 1.13.

Напомним (§ 1.9), что два элемента a и a' полугруппы S называются *инверсными друг к другу*, если $aa'a = a$ и $a'aa' = a'$. Следующие две леммы очевидны.

Лемма 2.12. *Если a и a' — инверсные друг к другу элементы полугруппы S, то $e = aa'$ и $f = a'a$ суть идемпотенты, причем $ea = af = a$ и $a'e = fa' = a'$. Следовательно, $e \in R_a \cap L_{a'}$ и $f \in R_{a'} \cap L_{a}$. Элементы a, a', e, f принадлежат одному и тому же $\mathscr{D}$-классу полугруппы S.*

Лемма 2.13. (i) *Если a — регулярный элемент полугруппы S, то $aS^1 = aS$ и $S^1a = Sa$.*

(ii) *Если a и b — регулярные элементы полугруппы S, то $a\mathscr{L}b$ $[a\mathscr{R}b]$ тогда и только тогда, когда $Sa = Sb$ $[aS = bS]$.*

Лемма 2.14. *Каждый идемпотент e полугруппы S является правой единицей в L_e, левой единицей в R_e и двусторонней единицей в H_e.*

Доказательство. Если $a \in L_e$, то $a \in Se$, и, значит, $ae = a$. Если $a \in R_e$, то $a \in eS$ и $ea = a$. Если $a \in H_e = R_e \cap L_e$, то $ea = ae = a$.

Лемма 2.15. *$\mathscr{H}$-класс может содержать не более одного идемпотента.*

Доказательство. Если e и f — идемпотенты, причем $H_e = H_f$, то по лемме 2.14 каждый из них является двусторонней единицей для другого, и поэтому $e = f$.

Следующая важная теорема принадлежит Грину [1951].

Теорема 2.16 (Грин). *Если элементы a, b и ab принадлежат одному и тому же $\mathscr{H}$-классу H полугруппы S, то H — подгруппа. В частности, любой $\mathscr{H}$-класс, содержащий идемпотент, является подгруппой.*

Доказательство. Сначала отметим, что если h и hs $[sh]$ принадлежат одному и тому же $\mathscr{H}$-классу H полугруппы S, то $Hs = H$ $[sH = H]$. В самом деле, тогда $h\mathscr{R}hs$ и из леммы Грина (2.2) следует, что отображение $x \to xs$ является взаимно однозначным отображением класса H_h на H_{hs}, т. е. H на себя. Двойственное утверждение следует из леммы, двойственной лемме Грина.

Пусть теперь a, b и ab принадлежат одному и тому же $\mathscr{H}$-классу H. Ввиду сделанного выше замечания $Hb = H$. Пусть c и d — произвольные элементы из H. Тогда $cb \in Hb = H$. Так как b и cb оба принадлежат H, из указанного замечания следует, что $cH = H$. Тогда $cd \in H$. Снова используя указанное замечание, мы видим, что $Hd = H$. Из равенств $cH = Hd = H$ для произвольных c, $d \in H$, следует, что H — подгруппа полугруппы S.

Следующая теорема принадлежит Миллеру и Клиффорду [1956].

Теорема 2.17. *Если a и b — элементы полугруппы S, то $ab \in R_a \cap L_b$ тогда и только тогда, когда $R_b \cap L_a$ содержит идемпотент. В этом случае*

$$aH_b = H_ab = H_aH_b = H_{ab} = R_a \cap L_b.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $ab \in R_a \cap L_b$. Из включения $ab \in R_a$ следует существование такого $b' \in S$, что $(ab)\,b' = a$. По лемме Грина 2.2 отображения σ: $x \to xb$ $(x \in L_a)$ и σ': $y \to yb'$ $(y \in L_{ab})$ взаимно обратны, сохраняют $\mathscr{R}$-классы и взаимно однозначно отображают соответственно L_a на L_{ab} и L_{ab} на L_a. Но $ab \in L_b$, и поэтому $L_{ab} = L_b$. Таким образом, σ' отображает элемент $b \in L_b$ на элемент $bb' \in L_a$. Более того, $bb' \in R_b$, так как σ' сохраняет $\mathscr{R}$-классы. Следовательно, $bb' \in R_b \cap L_a$. Если $x \in L_a$, то $xbb' = x\sigma\sigma' = x$. Полагая $x = bb'$, мы заключаем, что bb' является идемпотентом.

Обратно, предположим, что $R_b \cap L_a$ содержит идемпотент e. Тогда $eb = b$ по лемме 2.14. Так как $e\mathscr{R}b$, из леммы Грина следует, что отображение σ: $x \to xb$ $(x \in L_e)$ сохраняет $\mathscr{R}$-классы и взаимно однозначно отображает L_e на L_b. Так как $a \in L_e$, то $ab \in L_b$; более того, $ab \in R_a$, так как σ сохраняет $\mathscr{R}$-классы. Следовательно, $ab \in R_a \cap L_b$.

Сохраняя предположение, что $R_b \cap L_a$ содержит идемпотент e, возьмем элементы $x \in H_a$ и $y \in H_b$. Тогда $e \in R_y \cap L_x$, и мы заключаем на основании установленного выше, что $xy \in R_x \cap L_y = R_a \cap L_b$. Следовательно, $H_aH_b \subseteq R_a \cap L_b$. Так как $L_e = L_a$ и $L_b = L_{ab}$, то σ: $x \to xb$ отображает L_a на L_{ab}. Так как σ сохраняет $\mathscr{R}$-классы, оно отображает H_a на H_{ab}, поэтому $H_ab = H_{ab}$. Следовательно,

$$H_ab \subseteq H_aH_b \subseteq R_a \cap L_b = H_{ab} = H_ab,$$

т. е. $H_a b = H_a H_b = H_{ab} = R_a \cap L_b$. Двойственным образом получаем, что $aH_b = H_{ab}$.

Следующая теорема, принадлежащая Миллеру и Клиффорду [1956], описывает все элементы, инверсные к регулярному элементу a полугруппы S. (Конечно, нерегулярный элемент таковых не имеет.) В ней показывается, что существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех элементов a', инверсных к a, и множеством всех пар (e, f) идемпотентов, таких, что $e \in R_a$ и $f \in L_a$. Элемент a', соответствующий паре (e, f), принадлежит $R_f \cap L_e$. («Egg-box»-картина помогает представить себе эту ситуацию.)

Теорема 2.18. *Пусть a — регулярный элемент полугруппы S.*

(i) *Каждый инверсный к a элемент лежит в D_a.*

(ii) *$\mathscr{H}$-класс H_b содержит инверсный к a элемент тогда и только тогда, когда оба $\mathscr{H}$-класса $R_a \cap L_b$ и $R_b \cap L_a$ содержат идемпотенты.*

(iii) *$\mathscr{H}$-класс не может содержать более одного элемента, инверсного к элементу a.*

Доказательство. Утверждение (i) есть непосредственное следствие леммы 2.12.

Докажем утверждение (ii). Предположим сначала, что H_b содержит элемент a', инверсный к элементу a. По лемме 2.12 $\mathscr{H}$-классы $R_a \cap L_b$ $(=R_a \cap L_{a'})$ и $R_b \cap L_a$ $(=R_{a'} \cap L_a)$ содержат соответственно идемпотенты aa' и $a'a$.

Обратно, предположим, что e — идемпотент в $R_a \cap L_b$ и f — идемпотент в $R_b \cap L_a$. Из условий $a\mathscr{R}e$ и $a\mathscr{L}f$, применяя лемму 2.14, мы выводим, что $ea = a = af$ и, применяя лемму 2.13, что $e = ax$, $f = ya$ при некоторых $x, y \in S$. Положим $a' = fxe$. Тогда

$$fa' = a'e = a',$$
$$aa' = afxe = axe = e^2 = e,$$
$$a'a = fa'a = yaa'a = yea = ya = f.$$

Так как $aa'a = ea = a$ и $a'aa' = a'e = a'$, элементы a и a' взаимно инверсны. Из равенств $a'e = a'$ и $aa' = e$ следует, что $a'\mathscr{L}e$. Таким образом, $a' \in R_f \cap L_e = R_b \cap L_b = H_b$.

Докажем утверждение (iii). Пусть b и c суть $\mathscr{H}$-эквивалентные инверсные к a элементы. По лемме 2.12 ab является идемпотентом в $R_a \cap L_b$, а ac — идемпотентом в $R_a \cap L_c$. Но $L_b = L_c$, откуда по лемме 2.15 $ab = ac$. Аналогично, из равенства $R_b = R_c$ вытекает, что $ba = ca$. Следовательно, $b = bab = cab = cac = c$.

Следствие 2.19. (i) *Полугруппа S инверсна тогда и только тогда, когда каждый $\mathscr{L}$-класс и каждый $\mathscr{R}$-класс содержат только один идемпотент.*

(ii) *Если D есть $\mathscr{D}$-класс инверсной полугруппы S, то существует такое взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathscr{L}$-классов, содержащихся в D, и множеством $\mathscr{R}$-классов, содержащихся в D, что $\mathscr{L}$-класс L соответствует $\mathscr{R}$-классу R тогда и только тогда, когда $R \cap L$ содержит идемпотент.*

Доказательство. В силу теоремы 2.18 условие, высказанное в утверждении (i), означает, что для каждого элемента из S существует точно один инверсный к нему элемент; отсюда непосредственно вытекает утверждение (ii).

Утверждение (i) следствия составляет часть теоремы 1.17, а именно, это утверждение об эквивалентности условий (ii) и (iii) последней. Рассмотренная теория освещает эту эквивалентность. Но она ничего не говорит о связи между условиями (i) и (iii), так как это затрагивает идемпотенты, лежащие в различных $\mathscr{D}$-классах.

Значение следствия 2.19 (ii) для «egg-box»-картины состоит в том, что мы можем представить $\mathscr{L}$-классы и $\mathscr{R}$-классы, содержащиеся в $\mathscr{D}$-классе D инверсной полугруппы S, расположенными таким образом, что $\mathscr{H}$-классы, содержащие идемпотенты, и только они, лежат на главной диагонали. Тогда теорема 2.18 показывает, что элемент a^{-1}, инверсный к $a \in D$, лежит в $\mathscr{H}$-классе, расположенном симметрично к H_a относительно главной диагонали. Хорошую иллюстрацию такой ситуации дает бициклическая полугруппа (см. упражнение 6 к § 2.1).

Закончим этот параграф теоремой, принадлежащей Грину [1951], которая показывает, что если два $\mathscr{H}$-класса из одного $\mathscr{D}$-класса суть группы, то они изоморфны.

Теорема 2.20. *Пусть e и f — некоторые $\mathscr{D}$-эквивалентные идемпотенты полугруппы S. Пусть a — произвольный, но фиксированный элемент из $R_e \cap L_f$, и пусть a' — инверсный к a элемент из $R_f \cap L_e$ (см. теорему 2.18). Тогда отображения $x \to a'xa$ и $y \to aya'$ являются взаимно обратными изоморфизмами соответственно H_e на H_f и H_f на H_e.*

Доказательство. Пусть $x \in H_e$. Применив два раза теорему 2.17, мы видим, что

$$xa \in R_e \cap L_a \quad \text{и} \quad a'xa \in R_{a'} \cap L_{xa} = R_{a'} \cap L_a = H_f.$$

Аналогично, $y \in H_f$ влечет за собой $aya' \in H_e$. Если $x \in H_e$, то $a(a'xa)a' = exe = x$, и если $y \in H_f$, то $a'(aya')a = fyf = y$. Следовательно, отображения $x \to a'xa$ и $y \to aya'$ взаимно обратны и взаимно однозначно отображают классы H_e и H_f друг на друга. Покажем, что $x \to a'xa$ есть изоморфизм. Пусть $x_1, x_2 \in H_e$. Тогда

$$(a'x_1a)(a'x_2a) = a'x_1ex_2a = a'(x_1x_2)a.$$

Упражнения к § 2.3

1. Максимальные подгруппы полугруппы S и только они являются $\mathscr{H}$-классами полугруппы S, содержащими идемпотенты.

2. Пусть R есть $\mathscr{R}$-класс и L есть $\mathscr{L}$-класс полугруппы S, причем $R \cap L$ содержит идемпотент. Пусть D есть $\mathscr{D}$-класс, содержащий R и L. Тогда $LR = D$. (Утверждение упражнения 7 к § 2.1 следует из этого утверждения. Условие, что $R \cap L$ содержит идемпотент, не является необходимым для того, чтобы выполнялось равенство $LR = D$; необходимые и достаточные условия неизвестны.)

3. (a) Элемент, инверсный к идемпотенту, не обязательно является идемпотентом. Например, элементы g и a полугруппы из упражнения 2 к § 1.2 инверсны друг к другу.

(b) Любой элемент g', инверсный к идемпотенту g, является произведением двух идемпотентов, а именно $g' = fe$, где $e = gg'$ и $f = g'g$. (Миллер и Клиффорд [1956].)

4. Пусть e и f — два $\mathscr{D}$-эквивалентных идемпотента полугруппы S. Для каждого $x \in R_e \cap L_f$ через x' обозначим инверсный к x элемент из $R_f \cap L_e$ (теорема 2.18).

(a) Пусть $x, y \in R_e \cap L_f$. Тогда в группе H_e обратным элементом к xy' является yx', а в группе H_f обратным элементом к $x'y$ является $y'x$.

(b) Пусть a — фиксированный элемент из $R_e \cap L_f$. Для $x, y \in A = R_e \cap L_f$ положим $x \circ y = xa'y$. Для $u, v \in A' = R_f \cap L_e$ положим $u * v = uav$. Тогда A $(\circ)$ и A' $(*)$ суть группы, и отображение $x \to x'$ есть антиизоморфизм группы A на A'.

(c) В обозначениях пункта (b) отображения $\mu_a \colon x \to ax$ и $\sigma_a \colon y \to ya$ являются изоморфизмами группы A' на группы H_e и H_f соответственно. Если вместо a мы выберем другой элемент $b \in R_e \cap L_f$, то $\mu_a \neq \mu_b$ и $\sigma_a \neq \sigma_b$. (Миллер и Клиффорд [1956].)

5. Пусть S — полугруппа, порожденная элементами p и q и заданная определяющими соотношениями (§ 1.12)

$$pqp = p, \quad qpq = q.$$

Каждый $\mathscr{D}$-класс полугруппы S состоит из четырех элементов, каждый $\mathscr{L}$-класс и каждый $\mathscr{R}$-класс состоит из двух элементов и каждый $\mathscr{H}$-класс состоит из одного элемента. Единственным регулярным $\mathscr{D}$-классом является

$$\begin{Bmatrix} pq & p \\ q & qp \end{Bmatrix}.$$

6. Если регулярный $\mathscr{D}$-класс D полугруппы S является подполугруппой, то D есть бипростая полугруппа. Следующий

пример, построенный Т. Холлом, показывает, что это утверждение не выполняется без предположения регулярности. Пусть S — полугруппа всех матриц $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix}$, где a, b — действительные числа, для которых $a \geqslant 0$, $b > 0$. Тогда ядро [1]) K полугруппы S состоит из всех таких матриц, что $a > 0$. Оно является подполугруппой и $\mathscr{D}$-классом, но не бипростой полугруппой.

7. (a) Регулярная полугруппа S является инверсной полугруппой тогда и только тогда, когда она обладает инволютивным антиавтоморфизмом (§ 1.3), который оставляет на месте каждый идемпотент из S. (Манн, не опубликовано.)

(b) Пусть $a \to a^*$ есть инволютивный антиавтоморфизм полугруппы S. Тогда существует самое большее одно отображение $a \to a^\dagger$ полугруппы S в себя, такое, что

$$aa^\dagger a = a, \quad a^\dagger a a^\dagger = a^\dagger,$$
$$(aa^\dagger)^* = aa^\dagger, \quad (a^\dagger a)^* = a^\dagger a$$

для всех $a \in S$.

8. Пусть V является линейным пространством конечной размерности n над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел. Как и в упражнении 6 к § 2.2, через $\mathscr{L}\mathscr{T}(V)$ мы обозначаем мультипликативную полугруппу всех линейных преобразований пространства V. Фиксируя базис в V, мы можем рассматривать элементы A из $\mathscr{L}\mathscr{T}(V)$ как квадратные матрицы порядка n над полем $\mathbf{C}$. Пусть A^* — транспонированная комплексно сопряженная с A матрица. Если W — подпространство пространства V, то через $W_\perp$ обозначим ортогональное дополнение к подпространству W, состоящее из всех векторов $v \in V$, таких, что $vw^* = v_1\bar{w}_1 + \ldots$ $\ldots + v_n\bar{w}_n = 0$ для каждого $w \in W$.

(a) Если элемент $A \in \mathscr{L}\mathscr{T}(V)$ имеет область значений W и ядро N, то A^* имеет область значений $N_\perp$ и ядро $W_\perp$. (Jacobson N., Lectures in abstract algebra, т. 2, Linear algebra, Van Nostrand, New York (1953); теорема 11 на стр. 59.)

(b) Идемпотент $E \in \mathscr{L}\mathscr{T}(V)$ является эрмитовым ($E^* = E$) тогда и только тогда, когда его область значений и ядро ортогональны. Существует точно один эрмитов идемпотент в каждом $\mathscr{L}$-классе и в каждом $\mathscr{R}$-классе полугруппы $\mathscr{L}\mathscr{T}(V)$.

(c) При $A \in \mathscr{L}\mathscr{T}(V)$ пусть E $[F]$ — эрмитов идемпотент, $\mathscr{R}$-эквивалентный [$\mathscr{L}$-эквивалентный] элементу A, и (в соответствии с теоремой 2.18) пусть $A^\dagger$ есть инверсный к A элемент, который $\mathscr{R}$-эквивалентен [$\mathscr{L}$-эквивалентен] F $[E]$. Тогда отображение $A \to A^\dagger$ полугруппы $\mathscr{L}\mathscr{T}(V)$ в себя обладает свойствами, сформулированными в упражнении 7 (b) выше. Матрицу $A^\dagger$

[1]) См. § 2.5.— *Прим. ред.*

можно также описать как элемент, инверсный к A в $\mathscr{L}\mathscr{T}(V)$ и $\mathscr{H}$-эквивалентный матрице A^*.

Замечание. Отображение $A \to A^\dagger$ было открыто Муром, который называл $A^\dagger$ *главным обратным* элементом к A. Этот элемент является обычным обратным для A элементом, если A невырождено. Отображение $A \to A^\dagger$ было заново построено также Пенроузом.

Moore E. H., On the reciprocal of the general algebraic matrix (abstract), *Bull. Amer. Math. Soc.*, 26 (1920), 394—395.

Moore E. H., General Analysis, v. I, Memoirs of the Amer. Phil. Soc., v. 1, Philadelphia (1935); см. стр. 8 и гл. 3, § 29.

Penrose R., A generalized inverse for matrices, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 51 (1955), 406—413.

Greville T. N. E., The pseudoinverse of a rectangular or singular matrix and its application to the solution of systems of linear equations, SIAM Newsletter, 5 (1957), № 2, стр. 3—6.

§ 2.4. Группа Шютценберже $\mathscr{H}$-класса

В предыдущем параграфе мы показали, что произвольный $\mathscr{H}$-класс, содержащий идемпотент, является группой (теорема Грина 2.16) и что два таких $\mathscr{H}$-класса из одного и того же $\mathscr{D}$-класса изоморфны (теорема 2.20). В этом параграфе мы изложим результаты Шютценберже [1957a] о том, что с каждым $\mathscr{H}$-классом H ассоциируется некоторая группа $\Gamma(H)$, даже если соответствующий $\mathscr{D}$-класс не регулярен. Если H и H' — два $\mathscr{H}$-класса из одного и того же $\mathscr{D}$-класса D, то группы $\Gamma(H)$ и $\Gamma(H')$ изоморфны, так что Γ зависит на самом деле лишь от D. Если H — группа, то $\Gamma(H) \cong H$.

Пусть A — произвольное подмножество полугруппы S и $T = T(A)$ — множество всех таких элементов $t \in S^1$, что $At \subseteq A$. Очевидно, T есть подполугруппа полугруппы S^1. Условие $t \in T$ эквивалентно тому, что A инвариантно (как множество) относительно внутреннего правого сдвига ρ_t полугруппы S^1. Таким образом, ρ_t индуцирует преобразование $\gamma_t = \rho_t \mid A$ множества A. Пусть $\Gamma = \Gamma(A)$ — множество всех γ_t, где t пробегает множество $T(A)$. Очевидно, Γ — полугруппа и отображение $t \to \gamma_t$ есть гомоморфизм полугруппы T на Γ. Назовем $\Gamma(A)$ *полугруппой преобразований* множества A, индуцированных внутренними правыми сдвигами полугруппы S^1. Нас интересует случай, когда $A = H$ есть $\mathscr{H}$-класс полугруппы S.

Следующая лемма непосредственно вытекает из леммы Грина 2.2.

Лемма 2.21. *Пусть H есть $\mathscr{H}$-класс полугруппы S. Пусть $h_0 \in H$ и t — такой элемент полугруппы S^1, что $h_1 = h_0t \in H$.*

Тогда $h_0 = h_1 t'$ при некотором $t' \in S^1$ и отображения $\gamma_t\colon x \to xt$ и $\gamma_{t'}\colon x \to xt'$ суть взаимно обратные подстановки множества H. Таким образом, t и t' принадлежат $T(H)$ и $\gamma_t\gamma_{t'} = \gamma_{t'}\gamma_t = \gamma_1$.

Если L есть $\mathcal{L}$-класс, содержащий H, то отображения $x \to xt$ и $x \to xt'$ сохраняют $\mathcal{R}$-классы, взаимно обратны и взаимно однозначно отображают L на себя. Таким образом, $T(H) = T(H')$, где H' — произвольный $\mathcal{H}$-класс полугруппы S, содержащийся в L.

Напомним, что совокупность преобразований Σ множества X называется *транзитивной* [*просто транзитивной*], если для любых двух элементов $x, y \in X$ существует хотя бы одно [точно одно] преобразование из Σ, переводящее x в y.

Следующая теорема, установленная Шютценберже [1957a], показывает, что $\Gamma(H)$ является группой. Назовем $\Gamma(H)$ *группой Шютценберже $\mathcal{H}$-класса H.*

Теорема 2.22. *Пусть H есть $\mathcal{H}$-класс полугруппы S. Тогда полугруппа $\Gamma(H)$ преобразований множества H, индуцированных внутренними правыми сдвигами полугруппы S^1, является просто транзитивной группой подстановок множества H. Отсюда следует, что $|\Gamma(H)| = |H|$. Если H — подгруппа полугруппы S, то $\Gamma(H) \cong H$; в этом случае $\Gamma(H)$ является образом при регулярном представлении группы H.*

Доказательство. Пусть $\gamma_t \in \Gamma(H)$, где $t \in T(H)$. Если $h_0 \in H$, то $h_1 = h_0 t \in H$ и по лемме 2.21 γ_t имеет двусторонне обратный элемент $\gamma_{t'}$ в $\Gamma(H)$. Следовательно, $\Gamma(H)$ — группа.

Покажем, что $\Gamma(H)$ просто транзитивна. Пусть h_0 и h_1 — два произвольных элемента из H. Из $h_0 \mathcal{R} h_1$ вытекает, что $h_0 t = h_1$ для некоторого $t \in T(H)$. По лемме 2.21 $t \in T(H)$ и $h_0\gamma_t = h_1$. Покажем, что γ_t — единственный элемент из $\Gamma(H)$, переводящий h_0 в h_1. Предположим, что $h_0\gamma_s = h_1$ (т. е. $h_0 s = h_1$) для некоторого $s \in T(H)$. Пусть x — произвольный элемент из H. Из $x \mathcal{L} h_0$ вытекает, что $x = yh_0$ для некоторого $y \in S^1$ и поэтому

$$x\gamma_t = xt = yh_0 t = yh_1 = yh_0 s = xs = x\gamma_s.$$

Следовательно, $\gamma_s = \gamma_t$.

Предположим теперь, что H является группой. Пусть e — единица группы H и h — произвольный элемент из H. В силу предыдущего существует точно один элемент из $\Gamma(H)$, переводящий e в h. Но γ_h переводит e в h. Таким образом, $\Gamma(H) = \{\gamma_h \mid h \in H\}$ и отображение $h \to \gamma_h$ является регулярным представлением группы H.

Рассмотрим теперь теорему, двойственную теореме 2.22. Пусть $T'(H)$ — множество всех таких элементов $u \in S^1$, что $uH \subseteq H$. Пусть λ_u — внутренний левый сдвиг $x \to ux$ полугруппы S^1, соответствующий элементу u, и $\gamma'_u = \lambda_u \mid H$. Пусть $\Gamma'(H)$ — множество всех γ'_u, где $u \in T'(H)$. Для любых $u, v \in T'(H)$ мы имеем $\gamma'_{uv} = \gamma'_v\gamma'_u$, т. е. отображение $u \to \gamma'_u$ есть антигомоморфизм $T'(H)$ на $\Gamma'(H)$. На основании теоремы, двойственной теореме 2.22, $\Gamma'(H)$ является также просто транзитивной группой подстановок множества H; назовем ее *двойственной группой Шютценберже класса H*.

Так как каждый внутренний левый сдвиг полугруппы S коммутирует с каждым ее внутренним правым сдвигом, очевидно, что *каждый элемент группы $\Gamma'(H)$ коммутирует с каждым элементом группы $\Gamma(H)$*. Из следующей леммы будет вытекать тогда, что *$\Gamma'(H)$ и $\Gamma(H)$ антиизоморфны*.

Лемма 2.23. *Если Γ и Γ' — две просто транзитивные группы подстановок множества H, такие, что каждый элемент из Γ коммутирует с каждым элементом из Γ', то Γ и Γ' антиизоморфны.*

Доказательство. Пусть h_0 — фиксированный элемент из H. Для каждого $h \in H$ существует такой единственный элемент $\gamma \in \Gamma$, что $h_0\gamma = h$, и такой единственный элемент $\gamma' \in \Gamma'$, что $h_0\gamma' = h$. Отображение $\varphi\colon \gamma \to \gamma'$ является, очевидно, взаимно однозначным отображением множества Γ на Γ'. Мы покажем, что оно есть антиизоморфизм.

Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Тогда, используя тот факт, что $\gamma_1\varphi$ и γ_2 коммутируют (по предположению), и тот факт, что $h_0(\gamma\varphi) = h_0\gamma' = h_0\gamma$ (по определению φ), мы получаем

$$\begin{aligned} h_0[(\gamma_1\gamma_2)\varphi] &= h_0(\gamma_1\gamma_2) = (h_0\gamma_1)\gamma_2 = \\ &= [h_0(\gamma_1\varphi)]\gamma_2 = h_0[(\gamma_1\varphi)\gamma_2] = \\ &= h_0[\gamma_2(\gamma_1\varphi)] = (h_0\gamma_2)(\gamma_1\varphi) = \\ &= [h_0(\gamma_2\varphi)](\gamma_1\varphi) = h_0[(\gamma_2\varphi)(\gamma_1\varphi)]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\gamma_1\gamma_2)\varphi = (\gamma_2\varphi)(\gamma_1\varphi).$$

Резюмируем полученное выше.

Теорема 2.24. *Пусть H есть $\mathcal{H}$-класс полугруппы S. Пусть $\Gamma(H)$ — группа Шютценберже класса H, и пусть $\Gamma'(H)$ — двойственная группа Шютценберже. Тогда $\Gamma(H)$ и $\Gamma'(H)$ суть просто транзитивные группы подстановок множества H, такие, что каждый элемент из $\Gamma(H)$ коммутирует с каждым элементом из $\Gamma'(H)$. Группы $\Gamma(H)$ и $\Gamma'(H)$ антиизоморфны.*

Теорема 2.25. *Пусть H и H' — два $\mathcal{H}$-класса полугруппы S, содержащиеся в одном и том же ее $\mathcal{D}$-классе. Тогда $\Gamma(H) \cong \Gamma(H')$.*

Доказательство. Пусть $a \in H$ и $b \in H'$. Так как $a\mathcal{D}b$, существует такой элемент $c \in S$, что $a\mathcal{L}c$ и $c\mathcal{R}b$. По лемме 2.21 $T(H_a) = T(H_c)$, и для каждого $t \in T(H_a)$ отображение

$\rho_t \mid L_a$ есть сохраняющая $\mathscr{R}$-классы подстановка на множестве L_a $(=L_c)$. Для произвольных s, $t \in T(H_a)$ равенство $\rho_s \mid L_a = \rho_t \mid L_a$ выполняется тогда и только тогда, когда $\rho_s \mid H_a = \rho_t \mid H_a$. Следовательно, отображение $\rho_t \mid H_a \to \rho_t \mid H_c$ есть изоморфизм $\Gamma(H_a)$ на $\Gamma(H_c)$. Аналогично, $\Gamma'(H_c) \cong \Gamma'(H_b)$. Дважды используя теорему 2.24, мы заключаем, что $\Gamma(H_a) \cong \Gamma(H_b)$.

Упражнения к § 2.4

1. Пусть H — множество, и пусть Γ и Γ' — просто транзитивные группы подстановок множества H, такие, что каждый элемент из Γ коммутирует с каждым элементом из Γ'. Тогда мы можем определить бинарную операцию $(\circ)$ в H, такую, что H будет группой, Γ — образом регулярного представления H, а Γ' — образом регулярного антипредставления H. Произвольный элемент множества H можно выбрать в качестве единицы группы $H(\circ)$; если такой выбор сделан, то операция $(\circ)$ определяется однозначно. Обратно, если H — группа, то образы Γ и Γ' соответственно регулярного представления и регулярного антипредставления группы H обладают отмеченными выше свойствами.

2. Пусть H — множество, и пусть Γ и Γ' — такие просто транзитивные группы подстановок на множестве H, что каждый элемент из Γ коммутирует с каждым элементом из Γ'. Пусть T и T' — не пересекающиеся с H и между собой полугруппы. Пусть φ — гомоморфизм полугруппы T на Γ, а φ' — антигомоморфизм T' на Γ'. Для произвольных $h \in H$, $t \in T$ и $u \in T'$ положим

$$ht = h(t\varphi), \quad uh = h(u\varphi').$$

Пусть 0 — символ, не являющийся элементом ни одного из множеств H, T или T'. Положим $S = H \cup T \cup T' \cup \{0\}$ и определим произведение в S посредством таблицы

	h_2	t_2	u_2	0
h_1	0	h_1t_2	0	0
t_1	0	t_1t_2	0	0
u_1	u_1h_2	0	u_1u_2	0
0	0	0	0	0

где $h_1, h_2 \in H$; $t_1, t_2 \in T$; $u_1, u_2 \in T'$. Тогда S есть полугруппа, в которой H является $\mathscr{H}$-классом с группой Шютценберже Γ. Более того, H совпадает с $\mathscr{D}$-классом D полугруппы S, содержащим H, и D иррегулярен; легко видеть, что $D^2 = 0$.

Мы можем модифицировать предыдущие рассуждения, положив $T = T'$, что не изменит заключения.

3. Другое доказательство теоремы 2.25 базируется на следующем соображении. Пусть $\{R_i \mid i \in I\}$ и $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — соответственно $\mathcal{R}$-классы и $\mathcal{L}$-классы полугруппы S, содержащиеся в $\mathcal{D}$-классе D. Пусть $H = H_{11}$ и $H' = H_{i\lambda}$. По лемме Грина 2.2 существуют элементы q_λ и q'_λ полугруппы S^1, такие, что $x \to xq_\lambda$ и $y \to yq'_\lambda$ суть взаимно обратные взаимно однозначные и сохраняющие $\mathcal{R}$-классы отображения L_1 и L_λ друг на друга. Будем писать $\gamma(t)$ вместо γ_t. Для любого $w \in T(H_{i\lambda})$ положим $\delta(w) = \rho_w \mid H_{i\lambda}$. Тогда $\gamma(t) \to \delta(q'_\lambda t q_\lambda)$, где t пробегает $T(H)$, есть изоморфизм группы $\Gamma(H)$ на $\Gamma(H_{i\lambda})$.

4. Пусть D — регулярный $\mathcal{D}$-класс полугруппы S, и пусть H есть $\mathcal{H}$-класс полугруппы S, содержащийся в D. Пусть e — идемпотент из $\mathcal{L}$-класса, содержащего H. Тогда $H_e \subseteq T(H) = T$. Кроме того, $Te = T \cap L_e$, и Te является объединением тех $\mathcal{H}$-классов из L_e, которые являются группами; в частности, отсюда следует, что объединение множества полугрупп в произвольном $\mathcal{L}$-классе полугруппы S либо пусто, либо является подполугруппой; в последнем случае эта подполугруппа является левой группой. Более того, Te — двусторонний идеал полугруппы T. Будучи простой подполугруппой (а в действительности даже простой слева), Te не содержит строго других идеалов полугруппы T (и поэтому является «ядром» полугруппы T; см. § 2.5). (Кох, не опубликовано.)

§ 2.5. 0-*минимальные идеалы и* 0-*простые полугруппы*

Как и в § 1.1, назовем полугруппу S *простой* [*простой слева, простой справа*], если она не содержит собственных двусторонних [левых, правых] идеалов. Мы видели в § 1.1, что полугруппа S проста слева и справа тогда и только тогда, когда она есть группа. Простые справа полугруппы, не являющиеся группами, изучались в § 1.11. В упражнениях к § 2.1 мы встретили ряд простых полугрупп, которые не являются простыми справа или простыми слева. Много других таких полугрупп встретится в этой и следующей главах, а гл. 8 будет полностью посвящена теории простых полугрупп.

Двусторонний [левый, правый] идеал M полугруппы S называется *минимальным* [левым, правым] идеалом, если он не содержит строго других двусторонних [левых, правых] идеалов полугруппы S. Если A — другой идеал из S того же типа, что и M, то либо $M \subseteq A$, либо $M \cap A = \varnothing$. В частности, два различных минимальных идеала одного типа не пересекаются. Например, строки прямоугольной связки суть минимальные правые идеалы, и они, очевидно, попарно не пересекаются.

Так как два двусторонних идеала A и B полугруппы S всегда содержат их произведение AB, полугруппа S может содержать не более одного минимального двустороннего идеала. Если S обладает минимальным двусторонним идеалом K, то K называется *ядром* полугруппы S. Так как K содержится в каждом двустороннем идеале из S, его можно охарактеризовать как пересечение всех двусторонних идеалов полугруппы S. Если это пересечение пусто, то S не имеет ядра; этот случай имеет место, например, для бесконечной циклической полугруппы. Каждая конечная полугруппа, очевидно, обладает ядром. По существу, алгебраическая теория полугрупп началась с выяснения Сушкевичем [1928] строения ядра (которое он называл группой-ядром) произвольной конечной полугруппы (см. приложение). Мы увидим (следствие 2.30), что ядро полугруппы, если оно существует, само является простой полугруппой.

Теория минимальных идеалов для полугруппы S с нулем 0 тривиальна. По этой причине и в соответствии с теорией минимальных идеалов колец мы введем понятие 0-минимальности. Двусторонний [левый, правый] идеал M полугруппы S называется 0-*минимальным* двусторонним [левым, правым] идеалом, если (i) $M \neq 0$ и (ii) 0 есть единственный двусторонний [левый, правый] идеал полугруппы S, строго содержащийся в M.

Если M есть 0-минимальный двусторонний [левый, правый] идеал полугруппы S с нулем 0, то M^2 является содержащимся в M идеалом того же типа, что и M, и поэтому должно быть либо $M^2 = M$, либо $M^2 = 0$. Как и в § 1.1, назовем полугруппу с нулем 0 полугруппой *с нулевым умножением*, если произведение любых двух ее элементов равно 0. Следовательно, либо $M^2 = M$, либо M есть подполугруппа с нулевым умножением.

Очевидно, что пересечение любых двух 0-минимальных идеалов полугруппы S равно 0.

Введем понятие 0-простоты. Полугруппа S с нулем 0 называется 0-*простой* [0-*простой слева*, 0-*простой справа*], если (i) $S^2 \neq 0$ и (ii) 0 есть единственный собственный двусторонний [левый, правый] идеал из S.

Лемма 2.26. *Пусть S — полугруппа с нулем 0, причем 0 есть единственный собственный двусторонний идеал из S. Тогда S либо 0-проста, либо является двухэлементной полугруппой с нулевым умножением.*

Доказательство. Очевидно, $S^2 = S$ или $S^2 = 0$. В первом случае S 0-проста, так как $0 \neq S = S^2$. Во втором случае, если a — произвольный отличный от нуля элемент полугруппы S, то $\{0, a\}$ есть ненулевой идеал, и поэтому $\{0, a\} = S$.

Следующая теорема показывает, что нет существенной разницы между «простой справа» и «0-простой справа» в том смысле, что каждая 0-простая справа полугруппа получается из простой справа полугруппы присоединением нуля. С другой стороны, между 0-простыми полугруппами и простыми полугруппами с присоединенным нулем имеются глубокие различия.

Теорема 2.27. *Если S есть 0-простая справа [слева] полугруппа, то $S \setminus 0$ — простая справа [слева] подполугруппа полугруппы S.*

Доказательство. Покажем сначала, что $S \setminus 0$ является подполугруппой полугруппы S, т. е. S не содержит *собственных делителей нуля*. Предположим от противного, что $a, b \in S \setminus 0$, но $ab = 0$. Множество всех таких $x \in S$, что $ax = 0$, является правым идеалом полугруппы S, содержащим подмножество $\{0, b\} \neq 0$, и, следовательно, совпадает с S. Но тогда $\{0, a\}$ является ненулевым правым идеалом полугруппы S, поэтому $\{0, a\} = S$. Но тогда $S^2 = 0$, что противоречит определению 0-простоты справа.

Покажем, что полугруппа $S \setminus 0$ проста справа. Пусть R — произвольный правый идеал полугруппы $S \setminus 0$. Тогда, очевидно, $R \cup 0$ является правым идеалом полугруппы S. Так как $R \neq \varnothing$, то $R \cup 0 \neq 0$. Следовательно, $R \cup 0 = S$ и, значит, $R = S \setminus 0$.

Пусть S — полугруппа без нуля, и пусть $S^0 = S \cup 0$ — полугруппа, полученная из S присоединением нуля (§ 1.1). Тогда отображение $A \to A \cup 0$ есть взаимно однозначное отображение множества всех двусторонних [левых, правых] идеалов A полугруппы S на множество всех ненулевых двусторонних [левых, правых] идеалов полугруппы S^0. Это отображение сохраняет включения, и, в частности, A является минимальным идеалом тогда и только тогда, когда $A \cup 0$ есть 0-минимальный идеал. Следовательно, *любая теорема о 0-минимальных идеалах влечет за собой очевидное следствие, касающееся минимальных идеалов полугрупп без нуля.* Аналогично, *любая теорема о 0-простых полугруппах влечет за собой очевидное следствие, касающееся простых полугрупп.* Эти следствия будут выписываться явно только тогда, когда они представляют особый интерес, как, например, приведенное ниже следствие 2.30.

Лемма 2.28. *Пусть S — такая полугруппа с нулем 0, что $S \neq 0$. Тогда S 0-проста в том и только в том случае, когда $SaS = S$ для каждого $a \neq 0$ из S.*

Замечание. Это условие, конечно, эквивалентно тому, что для любых $a, b \in S$ при $a \neq 0$ уравнение $xay = b$ всегда разрешимо в S относительно x и y.

Доказательство. Предположим, что полугруппа S 0-проста. Пусть B — множество всех таких элементов $b \in S$, что $SbS = 0$. Очевидно, B — идеал полугруппы S, и, следовательно либо $B = S$, либо $B = 0$. В первом случае $S^3 = 0$, что невозможно, так как $S^2 = S$, откуда $S^3 = S^2 = S$. Следовательно, $B = 0$ и мы заключаем, что $SaS \neq 0$ для каждого $a \neq 0$ из S. Но SaS есть ненулевой идеал полугруппы S, поэтому $SaS = S$.

Обратно, предположим, что $SaS = S$ для каждого $a \neq 0$ из S. Пусть A — ненулевой идеал полугруппы S, и пусть a — ненулевой элемент из A. Тогда $S = SaS \subseteq SAS \subseteq A$, т. е. $A = S$. Так как $S \neq 0$ по предположению, S содержит элемент $a \neq 0$. Из включения $S = SaS \subseteq S^2$ вытекает, что $S^2 \neq 0$, и, следовательно, полугруппа S 0-проста.

Остальные результаты этого параграфа принадлежат Клиффорду [1949].

Теорема 2.29. *Пусть M есть 0-минимальный (двусторонний) идеал полугруппы S с нулем 0. Тогда либо $M^2 = 0$, либо M является 0-простой подполугруппой в S.*

Доказательство (Манн). Предположим, что $M^2 \neq 0$. Тогда, как отмечено выше, $M^2 = M$. Пусть $a \in M$, $a \neq 0$. Так как S^1aS^1 есть ненулевой идеал полугруппы S, содержащийся в M, то $S^1aS^1 = M$. Следовательно, $M = M^3 = MS^1aS^1M \subseteq \subseteq MaM \subseteq M$. Отсюда $MaM = M$, и полугруппа M 0-проста по лемме 2.28.

Следствие 2.30. *Если полугруппа S содержит ядро K, то K—простая подполугруппа из S.*

Лемма 2.31. *Если L — такой 0-минимальный левый идеал полугруппы S с нулем 0, что $L^2 \neq 0$, то $L = Sa$ для любого элемента $a \neq 0$ из L.*

Доказательство. Очевидно, что Sa есть левый идеал полугруппы S, содержащийся в L. Если $Sa = 0$, то $\{0, a\}$ является ненулевым левым идеалом полугруппы S, содержащимся в L, так что $\{0, a\} = L$. Но тогда $L^2 = 0$, а это противоречит предположению. Следовательно, $Sa \neq 0$ и поэтому $Sa = L$.

Замечание. В противоположность ситуации для 0-минимальных двусторонних идеалов 0-минимальный левый идеал L, для которого $L^2 \neq 0$, не обязательно должен быть 0-простой слева полугруппой и даже не обязательно 0-простой полугруппой. В качестве примера укажем полугруппу из упражнения 2 к § 1.2, где положим $L = \{0, f, a\}$.

Лемма 2.32. *Пусть L есть 0-минимальный левый идеал полугруппы S с нулем 0, и пусть $c \in S$. Тогда Lc либо равно 0, либо является 0-минимальным левым идеалом полугруппы S.*

Доказательство. Предположим, что $Lc \neq 0$. Очевидно, Lc — левый идеал полугруппы S. Покажем, что он 0-минимален. Пусть A — левый идеал полугруппы S, содержащийся в Lc, а B — множество всех таких элементов $b \in L$, что $bc \in A$. Тогда $Bc \subseteq A$. Так как каждый элемент из A имеет вид xc при некотором $x \in L$ и каждый такой элемент x принадлежит B, то $Bc = A$. Если $b \in B$ и $s \in S$, то $sbc \in sA \subseteq A$ и $sb \in sL \subseteq L$. Следовательно, $sb \in B$, откуда вытекает, что B — левый идеал полугруппы S. Ввиду 0-минимальности идеала L либо $B = 0$, либо $B = L$, и соответственно либо $A = 0$, либо $A = Lc$.

Теорема 2.33. *Пусть S — полугруппа с нулем 0 и M — ее 0-минимальный идеал, содержащий хотя бы один 0-минимальный левый идеал из S. Тогда M есть объединение всех 0-минимальных левых идеалов полугруппы S, содержащихся в M.*

Доказательство. Пусть A — объединение всех 0-минимальных левых идеалов полугруппы S, содержащихся в M. Покажем, что $A = M$. Очевидно, A — левый идеал полугруппы S. Покажем, что A есть также и правый идеал. Пусть $a \in A$, $c \in S$. По определению A, очевидно, $a \in L$, где L есть 0-минимальный левый идеал полугруппы S, содержащийся в M. По лемме 2.32 $Lc = 0$ или Lc есть 0-минимальный левый идеал из S. Легко видеть, что $Lc \subseteq Mc \subseteq M$ и поэтому $Lc \subseteq A$. Следовательно, $ac \in A$; $A \neq 0$, так как M содержит хотя бы один 0-минимальный левый идеал из S.

Следовательно, A — ненулевой двусторонний идеал полугруппы S, содержащийся в M, откуда $A = M$ ввиду 0-минимальности идеала M.

Лемма 2.34. *Если M — такой 0-минимальный идеал полугруппы S с нулем 0, что $M^2 \neq 0$, и L — ненулевой левый идеал из S, содержащийся в M, то $L^2 \neq 0$.*

Доказательство. Так как LS — идеал полугруппы S, содержащийся в M, должно быть либо $LS = 0$, либо $LS = M$. Если $LS = 0$, то L — идеал полугруппы S, откуда $L = M$ и поэтому $M^2 = LM \subseteq LS = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, $LS = M$ и из соотношений $M = M^2 = LSLS \subseteq \subseteq L^2S$ вытекает, что $L^2 \neq 0$.

Теорема 2.35. *Пусть M — такой 0-минимальный левый идеал полугруппы S с нулем 0, что $M^2 \neq 0$. Предположим, что M содержит хотя бы один 0-минимальный левый идеал полугруппы S. Тогда каждый левый идеал из M является также левым идеалом в S.*

Доказательство. Пусть L — ненулевой левый идеал из M и $a \in L \setminus 0$. Тогда $Ma \neq 0$. В самом деле, полугруппа M 0-проста по теореме 2.29, поэтому $MaM = M$ по лемме 2.28.

По теореме 2.33 существует такой 0-минимальный левый идеал L_0 полугруппы S, что $a \in L_0 \subseteq M$. Так как Ma — ненулевой левый идеал полугруппы S, содержащийся в L_0, мы заключаем, что $Ma = L_0$ и, в частности, $a \in Ma$. Следовательно, $L = \bigcup \{Ma \mid a \in L\}$. Но объединение левых идеалов полугруппы S является левым идеалом в S.

Замечание. Неизвестно, выполняется ли теорема 2.35 без предположения о том, что M содержит хотя бы один 0-минимальный левый идеал полугруппы S [1]). Очевидно, для выполнения утверждения теоремы достаточно предположить, что $a \in Ma$ при любом $a \in M$.

Упражнения к § 2.5

1. Пусть S — полугруппа с нулем 0. Тогда S будет 0-проста слева и 0-проста справа в том и только в том случае, когда она есть группа с нулем.

2. Минимальный левый идеал полугруппы S является простой слева подполугруппой полугруппы S.

3. Пусть S — простая полугруппа (без нуля), содержащая идемпотент e и хотя бы один минимальный левый идеал.

(a) S есть объединение своих минимальных левых идеалов.

(b) Минимальный левый идеал L полугруппы S, содержащий e, является левой группой, и eL — группа (см. теорему 1.27).

(c) eS есть минимальный правый идеал полугруппы S. (Шварц [1951].)

Упражнения 4—7 взяты из работы Клиффорда и Миллера [1948]. Элемент u полугруппы S называется ее *левым* [*правым*] *зероидом*, если для каждого $a \in S$ существует такое $x \in S$, что $xa = u$ [$ax = u$], т. е. $u \in Sa$ [$u \in aS$]. Элемент полугруппы S называется *зероидом*, если он есть и левый и правый зероид.

4. Полугруппа S содержит левый зероид тогда и только тогда, когда она обладает таким левым идеалом L, который содержится в любом ее левом идеале. В этом случае L состоит из всех левых зероидов полугруппы S. По лемме 2.32 L является также правым идеалом и поэтому ядром полугруппы S.

5. Если полугруппа S содержит подгруппу G, являющуюся идеалом в S, то G есть ядро в S и состоит из всех зероидов полугруппы S [2]).

6. Если полугруппа S содержит зероид, то каждый левый зероид является также и правым зероидом и наоборот, а множество всех зероидов из S есть ядро полугруппы S. Более того, K проста как слева, так и справа и потому является подгруппой полугруппы S.

7. Пусть S — полугруппа с группой зероидов K. Тогда единица e группы K коммутирует с каждым элементом из S, и ото-

[1]) Отрицательный ответ на этот вопрос получен Кларком [1965].—*Прим. ред.*

[2]) Такая полугруппа называется *гомогруппой*.— *Прим. ред.*

бражение $x \to ex$ из S на K есть гомоморфизм S на K, оставляющий элементы из K на месте. (Если S — топологическая полугруппа, то K есть гомоморфный ретракт полугруппы S.) (См. также Сушкевич [1937], гл. 3, § 28, теорема 5.)

8. (a) Пусть S — полугруппа, содержащая точно один идемпотент e. Тогда e является левым зероидом полугруппы S в том и только в том случае, когда он есть правый зероид, и в этом случае H_e есть группа зероидов полугруппы S. (Тамура [1954b].)

(b) Пусть S — конечная полугруппа, содержащая точно один идемпотент e. Тогда H_e есть группа зероидов полугруппы S и $S^n = H_e$ при некотором положительном целом числе n. (Тамура [1954a], где строение полугруппы S полностью описано при $n = 2$.)

9. (a) Если 0-простая полугруппа не содержит ненулевых нильпотентных элементов [1]), то она не содержит собственных делителей нуля.

(b) Пусть M — максимальный собственный двусторонний идеал полугруппы S. Тогда M вполне изолирован (т. е. $S \setminus M$ является подполугруппой полугруппы S) в том и только в том случае, когда M изолирован (т. е. $x^2 \in M$ влечет за собой $x \in M$; см. § 4.1). (Гримбл [1950].)

§ 2.6. Главные факторы полугруппы

В этом параграфе мы дадим общее определение главных факторов произвольной полугруппы S и покажем (теорема 2.40), что они изоморфны факторам любого главного ряда полугруппы S, если таковой существует. Это определение и теорема принадлежат Грину [1951].

Полугрупповой аналог теоремы Жордана — Гёльдера — Шрейера был сформулирован и доказан Рисом [1940]. Мы сформулируем его без доказательства, так как нам не представится возможность использовать его в этой книге.

Начнем с аналогов двух теорем об изоморфизмах из теории групп [2]).

Теорема 2.36. *Пусть J — идеал, а T — подполугруппа полугруппы S, причем $J \cap T \neq \varnothing$. Тогда $J \cap T$ — идеал в T, $J \cup T$ — подполугруппа полугруппы S и*

$$(J \cup T)/J \cong T/(J \cap T).$$

[1]) Элемент полугруппы с нулем называется *нильпотентным*, если некоторая его степень равна нулю.— *Прим. ред.*

[2]) Теоремы 2.36 и 2.37, как и соответствующие теоремы теории групп, являются частными случаями так называемых второй и третьей теорем об изоморфизмах, см. Кон П. Универсальная алгебра, М., 1968.— *Прим. ред.*

Доказательство. Так как

$$(J \cup T)^2 = J^2 \cup JT \cup TJ \cup T^2 \subseteq J \cup T,$$

то $J \cup T$ — подполугруппа полугруппы S. Очевидно, что $J \cap T$ — идеал в T и что J — идеал в $J \cup T$. Следовательно, факторполугруппы Риса $(J \cup T)/J$ и $T/(J \cap T)$ определены. Обозначим их нули через 0 и $0'$ соответственно. Тогда

$$(J \cup T)/J = [(J \cup T) \setminus J] \cup 0 = (T \setminus J) \cup 0,$$
$$T/(J \cap T) = [T \setminus (J \cap T)] \cup 0' = (T \setminus J) \cup 0'.$$

Следовательно, обе рассмотренные факторполугруппы Риса состоят из всех элементов подполугруппы T, не принадлежащих J, и нулей [1]). Они не только изоморфны, но даже совпадают, если мы отождествим их нули.

Теорема 2.37. *Пусть J — идеал полугруппы S, и пусть θ — гомоморфизм S на факторполугруппу Риса S/J. Тогда θ индуцирует взаимно однозначное отображение, сохраняющее включения, $A \to A\theta = A/J$, множества всех идеалов A полугруппы S, содержащих J, на множество всех идеалов полугруппы S/J и*

$$(S/J)/(A/J) \cong S/A.$$

Доказательство. Пусть $S/J = (S \setminus J) \cup 0$. Тогда $A\theta = A/J = (A \setminus J) \cup 0$. Так как θ — гомоморфизм, $A\theta$ есть идеал полугруппы S/J. Если Q — произвольный идеал полугруппы S/J, то $A = Q\theta^{-1}$ есть идеал полугруппы S, содержащий J $(=0\theta^{-1})$, и, очевидно, $A\theta = Q$. Если $J \subseteq A \subset B$, где A и B — идеалы полугруппы S, то $A \setminus J \subset B \setminus J$, откуда (присоединяя нуль 0 с обеих сторон) получаем $A/J \subseteq B/J$. Следовательно, отображение $A \to A\theta = A/J$ есть отображение на множество всех идеалов полугруппы S и оно сохраняет строгие включения, т. е. оно взаимно однозначно.

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть A — идеал полугруппы S, содержащий J. Пусть $0'$ и $0''$ — нули рассматриваемых факторполугрупп Риса. Тогда

$$(S/J)/(A/J) = [(S/J) \setminus (A/J)] \cup 0',$$
$$S/A = (S \setminus A) \cup 0''.$$

Так как $(S/J) \setminus (A/J) = S \setminus A$, эти две факторполугруппы не только изоморфны, но (как и в теореме 2.36) по существу совпадают.

Пункт (i) следствия 2.38 непосредственно вытекает из теорем 2.37 и 2.29; пункт (ii) — из теоремы 2.37 и леммы 2.26.

---

[1]) Строго говоря, это сказано неточно: ненулевыми элементами, например, факторполугруппы $(J \cup T)/J$ являются одноэлементные подмножества, а не элементы из S. Аналогичная допустимая вольность имеется и в доказательстве теоремы 2.37.— *Прим. ред.*

Следствие 2.38. (i) *Если J и J' — идеалы полугруппы S и $J \subset J'$, то J максимален в J' (в том смысле, что не существует идеала полугруппы S, лежащего строго между ними) тогда и только тогда, когда J'/J есть 0-минимальный идеал в S/J. В этом случае J'/J — либо 0-простая полугруппа, либо полугруппа с нулевым умножением.*

(ii) *Идеал J полугруппы S является максимальным (собственным) идеалом полугруппы S тогда и только тогда, когда полугруппа S/J не имеет собственных ненулевых идеалов, следовательно, тогда и только тогда, когда S/J либо 0-проста, либо есть двухэлементная полугруппа с нулевым умножением.*

Заметим, что в случае, когда $J' \neq S$, факторполугруппа J'/J может быть полугруппой с нулевым умножением, содержащей более двух элементов (см. упражнение 3 ниже).

Пусть a — элемент полугруппы S. Как и в § 2.1, мы обозначаем через $J(a)$ главный идеал S^1aS^1 полугруппы S, порожденный элементом a, и через J_a — $\mathcal{J}$-класс, содержащий a, т. е. множество элементов, каждый из которых порождает $J(a)$. Пусть $I(a)$ состоит из всех тех элементов идеала $J(a)$, которые не порождают $J(a)$, т. е. $I(a) = J(a)\setminus J_a$. Если $I(a)$ непусто, то $I(a)$ — идеал в S. В самом деле, предположим, что $b \in I(a)$ и $c \in S$. Тогда $bc \in J(a)$, так как $b \in J(a)$ и $J(a)$ есть идеал. Так как $J(bc) \subseteq J(b) \subset J(a)$, мы заключаем, что $bc \in I(a)$. Аналогично, $cb \in I(a)$.

$I(a)$, будучи идеалом полугруппы S, является, в частности, и идеалом полугруппы $J(a)$. Каждая факторполугруппа Риса $J(a)/I(a)$, где $a \in S$, называется *главным фактором* полугруппы S. Примем соглашение: *если T — произвольная полугруппа, то под $T/\varnothing$ будем понимать само T.*

Лемма 2.39. *Каждый главный фактор произвольной полугруппы S либо 0-прост, либо прост, либо является полугруппой с нулевым умножением. Лишь в случае, когда S имеет ядро, существует простой главный фактор, и в этом случае ядро есть единственный простой главный фактор.*

Доказательство. Пусть S — полугруппа и $a \in S$. Покажем сначала, что идеал $I(a)$ максимален в $J(a)$. В самом деле, предположим, что B есть такой идеал полугруппы S, что $I(a) \subset B \subseteq J(a)$. Пусть $b \in B\setminus I(a)$. Тогда $b \in J(a)\setminus I(a) = J_a$, т. е. $J(b) = J(a)$. Но $J(b) \subseteq B$ и поэтому $B = J(a)$.

Если $I(a)$ пусто, то предыдущие рассуждения показывают, что идеал $J(a)$ минимален в S и поэтому должен быть ядром полугруппы S, которое является простым по следствию 2.30. Если $I(a) \neq \varnothing$, то $J(a)/I(a)$ есть либо 0-простая полугруппа, либо полугруппа с нулевым умножением по следствию 2.38.

Главным рядом полугруппы S называется цепь

$$S = S_1 \supset S_2 \supset \ldots \supset S_m \supset S_{m+1} = \varnothing \qquad (1)$$

ее идеалов S_i $(i = 1, \ldots, m)$, начинающаяся с S и заканчивающаяся пустым множеством, и такая, что не существует идеала полугруппы S, лежащего строго между S_i и S_{i+1} $(i = 1, \ldots, m)$. *Факторами* главного ряда (1) называются факторполугруппы Риса S_i/S_{i+1} $(i = 1, \ldots, m)$. По следствию 2.38 (i) полугруппа S_i/S_{i+1} является либо 0-простой (простой при $i = m$) полугруппой, либо полугруппой с нулевым умножением.

Теорема 2.40. *Пусть S — полугруппа, обладающая главным рядом* (1). *Тогда факторы ряда* (1), *взятые в некотором порядке, изоморфны главным факторам полугруппы S. В частности, факторы любых двух главных рядов полугруппы S изоморфны. Последний член любого главного ряда полугруппы S является ядром полугруппы S.*

Доказательство. Рассмотрим один из факторов S_i/S_{i+1} главного ряда (1). Пусть $a \in S_i \setminus S_{i+1}$. Очевидно, $J(a) \cup S_{i+1}$ есть идеал полугруппы S, лежащий между S_{i+1} и S_i и строго содержащий S_{i+1}, так как $a \notin S_{i+1}$. Следовательно, $J(a) \cup \cup S_{i+1} = S_i$.

Пусть $b \in I(a)$. Тогда $b \in S_{i+1}$, так как в противном случае мы имели бы (как и для a) $J(b) \cup S_{i+1} = S_i$, откуда $a \in J(b)$, что противоречит условию $b \in I(a)$. Следовательно, $I(a) \subseteq S_{i+1}$.

С другой стороны, если $c \in J(a) \cap S_{i+1}$, то $J(c) \subseteq S_{i+1}$; следовательно, $J(c) \neq J(a)$, т. е. $c \in I(a)$. Мы заключаем, что $I(a) = J(a) \cap S_{i+1}$.

По теореме 2.36

$$J(a)/(J(a) \cap S_{i+1}) \cong (J(a) \cup S_{i+1})/S_{i+1}.$$

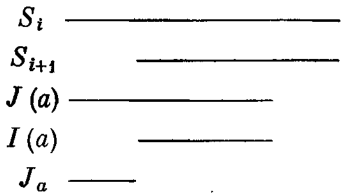
Но левый фактор равен $J(a)/I(a)$, а правый фактор — S_i/S_{i+1}. Мы заключаем, что полугруппа S_i/S_{i+1} изоморфна главному фактору $J(a)/I(a)$.

Более того,

$$J_a = J(a) \setminus I(a) = (J(a) \cup S_{i+1}) \setminus (I(a) \cup S_{i+1}) = S_i \setminus S_{i+1}.$$

Следовательно, если $a' \in S_i \setminus S_{i+1}$, то $J(a') = J(a)$, т. е. главный фактор $J(a)/I(a)$, соответствующий фактору S_i/S_{i+1}, не зависит от выбора элемента a из $S_i \setminus S_{i+1}$. С другой стороны, если a — произвольный элемент полугруппы S, то должно существовать такое i $(1 \leqslant i \leqslant m)$, что $a \in S_i$ и $a \notin S_{i+1}$, так как $a \in S_1$ и $a \notin S_{m+1}$. Следовательно, отображение $S_i/S_{i+1} \to J(a)/I(a)$ есть взаимно однозначное отображение факторов ряда (1) на множество главных факторов полугруппы S. Последнее утверждение теоремы следует из последнего утверждения леммы 2.39.

Этим заканчивается доказательство теоремы 2.40. Приведем схему для иллюстрации отношений включения между множествами S_i, S_{i+1}, $J(a)$, $I(a)$ и J_a, где $a \in S_i \setminus S_{i+1}$:



Цепь (1) подмножеств S_i полугруппы S называется *идеальным рядом* [1]) полугруппы S, если каждое S_{i+1} есть идеал в S_i ($i = 1, \ldots, m-1$); факторполугруппы Риса S_i/S_{i+1} ($i = 1, \ldots, m$) называются *факторами* этого ряда. Два идеальных ряда называются *изоморфными*, если изоморфны их факторы, взятые в некотором порядке. Говорят, что один идеальный ряд является *уплотнением* другого идеального ряда, если каждый член второго ряда есть также член и первого ряда. Идеальный ряд называется *композиционным рядом*, если он не обладает собственными уплотнениями. Ввиду следствия 2.38 (ii) каждый фактор композиционного ряда (1) есть либо 0-простая полугруппа, либо двухэлементная полугруппа с нулевым умножением, кроме последнего фактора $S_m/\varnothing = S_m$, который всегда является простой полугруппой (S_m — ядро полугруппы S).

Полугрупповой аналог теоремы Жордана — Гёльдера — Шрейера утверждает, что *для любых двух идеальных рядов полугруппы S имеются изоморфные уплотнения; в частности, все композиционные ряды полугруппы S изоморфны*. Это утверждение было доказано Рисом [1940] с использованием методов Цассенхауза. Поскольку мы имеем две теоремы об изоморфизмах (2.36 и 2.37), доказательство этого утверждения (которое мы опускаем) аналогично доказательству соответствующего утверждения в теории групп [2]).

Назовем полугруппу S *полупростой*, если каждый ее главный фактор 0-прост или прост.

Теорема 2.41. *Каждый идеал произвольного идеала полупростой полугруппы S является идеалом полугруппы S.*

Доказательство. Пусть S — полупростая полугруппа, A — идеал в S, а B — идеал в A. Тогда ABA есть идеал полугруппы S, содержащийся в B. Если $ABA = B$, то B —

---

[1]) В оригинале «relative ideal series». — *Прим. перев.*

[2]) О теореме Жордана — Гёльдера — Шрейера в универсальных алгебрах см. в обзоре Т. М. Баранович, Универсальные алгебры, Итоги науки (Алгебра, Топология, Геометрия, 1966), М., 1968. — *Прим. ред.*

идеал в S, что и утверждается теоремой. Покажем, что предположение $ABA \subset B$ приводит к противоречию.

Пусть $b \in B \setminus ABA$. Так как по условию S полупроста, главный фактор $J(b)/I(b)$ 0-прост или прост и поэтому

$$(J(b)/I(b))^3 = J(b)/I(b).$$

Следовательно,

$$J(b)^3 \cup I(b) = J(b).$$

Легко видеть, что

$$S^1bS^1S^1bS^1S^1bS^1 \subseteq S^1bS^1bS^1bS^1,$$

другими словами,

$$J(b)^3 \subseteq J(b)\, bJ(b).$$

Кроме того, $J(b) \subseteq A$ и $b \in B$. Следовательно,

$$J(b)^3 \subseteq ABA.$$

Отсюда вытекает, что

$$J(b) = J(b)^3 \cup I(b) \subseteq ABA \cup I(b).$$

Мы пришли к противоречию, так как $b \in J(b)$ и $b \notin ABA \cup I(b)$.

Следующее утверждение, непосредственно вытекающее из теоремы 2.41, принадлежит Манну [1955b].

Следствие 2.42. *Члены любого идеального ряда полупростой полугруппы S являются идеалами полугруппы S. В частности, в полупростой полугруппе не существует различия между главными рядами и композиционными рядами.*

Упражнения к § 2.6

1. Пусть T — полная полугруппа преобразований $\mathcal{T}_X$ конечного множества X из n элементов.

(a) Каждый идеал в T является главным.

(b) Полугруппа T имеет один и только один главный ряд

$$T = T_n \supset T_{n-1} \supset \ldots \supset T_1 \supset T_0 = \varnothing;$$

где T_r состоит из всех элементов, ранг которых $\leqslant r$ $(r = 1, \ldots, n)$ (см. теорему 2.9).

(c) Полугруппа T полупроста.

2. Если полугруппа S имеет композиционный ряд, то она имеет также и главный ряд. (Манн [1955a].)

3. Следующая полугруппа S обладает главным рядом, но не имеет композиционных рядов. Пусть $S = A \cup B \cup \{0\}$, где A — бесконечная циклическая группа, порожденная элементом a,

$$B = \{\ldots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \ldots\},$$

и произведение в S определено следующим образом (i, j — произвольные целые числа):

$$a^i b_j = b_{i+j}, \; b_j a^i = b_i b_j = 0$$

и 0 — нуль полугруппы S. (Манн [1955a].)

4. (a) Если A — идеал полугруппы S и B — такой идеал полугруппы A, что $B^2 = B$, то B — идеал полугруппы S. (Кармен [1949].)

(b) Если S_i — член идеального ряда полугруппы S и $S_i^2 = S_i$, то S_i — идеал полугруппы S. (Манн [1955b].)

5. Пусть S — полугруппа, обладающая композиционным рядом. Тогда каждый простой и каждый 0-простой главные факторы полугруппы S являются также композиционными факторами и наоборот. Точнее, пусть $\ldots \supset S_i \supset S_{i+1} \supset \ldots$ — часть главного [композиционного] ряда полугруппы S, такая, что S_i/S_{i+1} проста или 0-проста. Тогда $S_i \setminus S_{i+1}$ является $\mathcal{J}$-классом полугруппы S и существует композиционный [главный] ряд полугруппы S с такой частью $\ldots \supset T_j \supset T_{j+1} \supset \ldots$, что $T_j \setminus T_{j+1} = S_i \setminus S_{i+1}$.

6. Если полугруппа S обладает главным рядом и A есть произвольный идеал полугруппы S, то существует главный ряд полугруппы S, членом которого является A.

7. (a) Полугруппа S полупроста тогда и только тогда, когда $A^2 = A$ для каждого ее идеала A.

(b) Пусть A — идеал полугруппы S. Тогда S полупроста в том и только в том случае, когда A и S/A полупросты. (Манн [1955b].)

§ 2.7. *Вполне 0-простые полугруппы*

Пусть E — множество идемпотентов полугруппы S. Если $e, f \in E$, то положим $e \leqslant f$ тогда и только тогда, когда $ef = fe = e$. В § 1.8 было установлено, что отношение $\leqslant$ есть отношение частичного порядка на E. Если S содержит нуль 0, то $0 \leqslant e$ для каждого $e \in E$. Идемпотент f полугруппы S называется *примитивным*, если $f \neq 0$ и если $e \leqslant f$ влечет за собой $e = 0$ или $e = f$ (это обычное определение примитивного идемпотента, если S является кольцом).

Вполне простой [0-*простой*] *полугруппой* называется простая [0-простая] полугруппа, содержащая примитивный идемпотент.

Например, *любая конечная простая* [0-*простая*] *полугруппа вполне проста* [0-*проста*]. В самом деле, S должна содержать идемпотент (§ 1.6), так что $E \neq \varnothing$. Далее, $E \neq 0$, так как в противном случае каждый элемент из S нильпотентен, а следовательно (поскольку S конечна), нильпотентна [1]) и сама полугруппа S, что противоречит равенству $S^2 = S$. Ясно, что конечное частично упорядоченное множество $E \setminus 0$ содержит минимальный элемент, который и будет примитивным идемпотентом.

Мы покажем в этом параграфе (теорема 2.48), что 0-простая полугруппа S вполне 0-проста тогда и только тогда, когда S содержит хотя бы один 0-минимальный левый идеал и хотя бы один 0-минимальный правый идеал. Мы покажем также (теорема 2.51), что вполне 0-простая полугруппа S *0-бипроста*, т. е. $S \setminus 0$ является $\mathcal{D}$-классом полугруппы S. Результаты этого параграфа касаются 0-минимальных односторонних идеалов вполне 0-простой полугруппы S и $\mathcal{D}$-строения полугруппы S. Полное описание всевозможных вполне 0-простых полугрупп, которое будет дано в теореме Риса 3.5, является одной из главных целей следующей главы.

Напомним снова замечание, сделанное в § 2.5, что результаты этого параграфа применимы к вполне простым полугруппам (для этого достаточно к S присоединить нуль).

Лемма 2.43. *Если L есть 0-минимальный левый идеал полугруппы S с нулем 0, то $L \setminus 0$ является $\mathcal{L}$-классом полугруппы S.*

Доказательство. Пусть $a \in L \setminus 0$. Тогда либо $Sa = L$, либо $Sa = 0$. Если $Sa = L$ для каждого $a \in L \setminus 0$, то $S^1a = S^1b$ для любых $a, b \in L \setminus 0$, так что $L \setminus 0 \subseteq L_a$. Если $c \in L_a$, то $c \in S^1a = L$, так что $L_a \subseteq L \setminus 0$. Следовательно, $L \setminus 0$ совпадает с $\mathcal{L}$-классом L_a.

Предположим, что $Sa = 0$ для некоторого $a \in L \setminus 0$. Тогда $\{0, a\}$ — ненулевой левый идеал полугруппы S, содержащейся в L, откуда $L = \{0, a\}$. Тогда $S^1a = L$ и $S^1x = S^1a$ влечет за собой $x = a$. Следовательно, и в этом случае $L \setminus 0 = \{a\} = L_a$.

Лемма 2.44. *Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный левый идеал и 0-минимальный правый идеал. Тогда каждому 0-минимальному левому идеалу L полугруппы S соответствует хотя бы один такой 0-минимальный правый идеал R полугруппы S, что $LR \neq 0$.*

Доказательство. Заметим, что LS есть (двусторонний) идеал полугруппы S, и поэтому $LS = S$ или $LS = 0$. Если $LS = 0$, то $L^2 = 0$, что противоречит лемме 2.34. Следовательно, $LS = S$. В частности, $Lc \neq 0$ для некоторого $c \in S$. По теореме, двойственной к теореме 2.33, S является объединением 0-минимальных правых идеалов. Следовательно, $c \in R$ для некоторого 0-минимального правого идеала R полугруппы S и, очевидно, $LR \neq 0$.

---

[1]) Полугруппа с нулем 0 называется *нильпотентной*, если $S^n = 0$ для некоторого n.— *Прим. ред.*

Лемма 2.45. *Пусть L есть 0-минимальный левый идеал 0-простой полугруппы S, и пусть $a \in L \setminus 0$. Тогда $Sa = L$.*

Доказательство. Так как Sa — левый идеал полугруппы S, содержащийся в L, то $Sa = 0$ или $Sa = L$. Случай $Sa = 0$ противоречит лемме 2.28.

Лемма 2.46. *Пусть S есть 0-простая полугруппа, L и R — такие ее 0-минимальные соответственно левый и правый идеалы, что $LR \neq 0$. Тогда* (i) $LR = S$, (ii) RL — *группа с нулем,* (iii) $RL = R \cap L$. *Пусть e — единица группы $RL \setminus 0$. Тогда* (iv) $R = eS$, $L = Se$ *и* $RL = eSe$, (v) e — *примитивный идемпотент полугруппы S.*

Доказательство. (i) Так как LR — ненулевой двусторонний идеал 0-простой полугруппы S, то $LR = S$.

(ii) Из равенства $S = S^2 = LRLR$ следует, что $RL \neq 0$. Покажем, что RL есть группа с нулем. Для этого достаточно установить, что $RLa = aRL = RL$ для любого элемента $a \neq 0$ из RL. Пусть $a \in RL \setminus 0$. Тогда $a \in R \setminus 0$ и поэтому $aS = R$ по лемме, двойственной лемме 2.45. Из $S = LR = LaS$ следует, что $La \neq 0$. Таким образом, La — ненулевой левый идеал полугруппы S, содержащийся в L (так как $a \in L$) и потому $La = L$. Следовательно, $RLa = RL$. Двойственным образом доказывается равенство $aRL = RL$.

(iii) Пусть e — единица группы $RL \setminus 0$. По лемме 2.43 $(R \setminus 0) \cap (L \setminus 0)$ есть $\mathscr{H}$-класс полугруппы S. Он содержит идемпотент e и поэтому на основании теоремы Грина (2.16) является группой. Следовательно, $R \cap L$ — группа с нулем. Если $a \in R \cap L$, то $a = ae \in RL$, так как $a \in R$ и $e \in L$. Таким образом, $R \cap L \subseteq RL$. Обратное же включение очевидно.

(iv) Так как $e \in L \setminus 0$, из леммы 2.45 вытекает, что $Se = L$. Двойственно, $eS = R$, откуда $RL = eSSe = eSe$.

(v) Предположим, что f есть такой идемпотент в S, что $f \leqslant e$. Тогда $f \in eSe$. Но ввиду (iv) имеем $eSe = RL$, причем RL — группа с нулем на основании (ii). Так как идемпотентами группы с нулем являются лишь единица и нуль, $f = e$ или $f = 0$, т. е. e — примитивный идемпотент.

Лемма 2.47. *Пусть S — вполне 0-простая полугруппа и e — ее примитивный идемпотент. Тогда $L = Se$ и $R = eS$ суть 0-минимальные левый и правый идеалы полугруппы S соответственно, причем RL $(= eSe = R \cap L)$ есть группа с нулем, единицей которой является e.*

Доказательство. Покажем, что идеал $R = eS$ 0-минимален. Сначала заметим, что $R \neq 0$, так как $e \in R$. Пусть A — ненулевой правый идеал полугруппы S, содержащийся в R, и пусть $a \in A \setminus 0$. Так как $a \in eS$, имеем $ea = a$. Так как S 0-проста и $a \neq 0$, имеем $SaS = S$ (лемма 2.28), и поэтому существуют такие x', $y' \in S$, что $x'ay' = e$. Полагая $x = ex'e$ и $y = y'e$, получаем

$$xay = e, \quad ex = xe = x, \quad ye = y.$$

Полагая $f = ayx$, получаем

$$\begin{aligned} f^2 &= ay(xay)x = ayex = ayx = f, \\ ef &= (ea)yx = ayx = f, \\ fe &= ay(xe) = ayx = f. \end{aligned}$$

Далее,

$$e = e^2 = x(ayx)ay = xfay$$

и поэтому $f \neq 0$. Таким образом, f — ненулевой идемпотент, меньший или равный e. По предположению e примитивен, так что $f = e$ и тогда $e = ayx \in aS$, откуда $R = eS \subseteq aS^2 \subseteq A$. Итак, $A = R$, т. е. R 0-минимален.

Двойственно мы можем доказать, что идеал L 0-минимален. Так как $LR = SeS = S \neq 0$, из леммы 2.46 следует, что RL — группа с нулем. Так как $e \in eSe = eS^2e = RL$ и $e \neq 0$, легко видеть, что e есть единица полугруппы RL.

Следующая теорема принадлежит Клиффорду [1949].

Теорема 2.48. *Пусть S есть 0-простая полугруппа. Тогда S вполне 0-проста в том и только в том случае, когда она содержит хотя бы один 0-минимальный левый идеал и хотя бы один 0-минимальный правый идеал.*

Доказательство. Если S вполне 0-проста, то она содержит примитивный идемпотент e. По лемме 2.47 $L = Se$ и $R = eS$ суть 0-минимальные соответственно левый и правый идеалы полугруппы S.

Обратно, предположим, что S содержит хотя бы один 0-минимальный левый идеал и хотя бы один 0-минимальный правый идеал. Пусть L есть 0-минимальный левый идеал полугруппы S. По лемме 2.44 существует такой 0-минимальный правый идеал R полугруппы S, что $LR \neq 0$. Тогда из леммы 2.46 (v) следует, что S содержит примитивный идемпотент, и поэтому S вполне 0-проста.

Следствие 2.49. *Вполне 0-простая полугруппа является объединением своих 0-минимальных левых [правых] идеалов.*

Доказательство. Это утверждение есть непосредственное следствие теорем 2.48 и 2.33.

Следующее утверждение принадлежит Ричу [1949].

Следствие 2.50. *Пусть M — такой 0-минимальный идеал полугруппы S, что $M^2 \neq 0$. Предположим, кроме того, что M*

содержит хотя бы один 0-минимальный левый идеал полугруппы S и хотя бы один ее 0-минимальный правый идеал. Тогда M — вполне 0-простая подполугруппа из S.

Доказательство. По теореме 2.29 M есть 0-простая подполугруппа полугруппы S. По теореме 2.35 0-минимальный левый [правый] идеал полугруппы S, содержащийся в M, является также 0-минимальным левым [правым] идеалом полугруппы M. Тогда в силу теоремы 2.48 M вполне 0-проста.

Рич также установил, что верно утверждение, обратное к следствию 2.50. Оно приведено в упражнении 6 к настоящему параграфу.

Следующая теорема принадлежит Грину [1951].

Теорема 2.51. *Вполне 0-простая полугруппа 0-бипроста и регулярна.*

Доказательство. Пусть S — вполне 0-простая полугруппа. Пусть a и b — ненулевые элементы из S. Покажем, что $a\mathscr{D}b$. По следствию 2.49 a принадлежит некоторому 0-минимальному левому идеалу L полугруппы S и b принадлежит некоторому 0-минимальному правому идеалу R полугруппы S. По лемме 2.45 $L = Sa$ и $R = bS$. По лемме 2.43 и двойственной к ней лемме $L_a = L\setminus 0$ и $R_b = R\setminus 0$. Из того, что $a \in L$ и $b \in R$, вытекает включение $bSa \subseteq R \cap L$. Так как полугруппа S 0-проста и $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $SaS = S$ и $SbS = S$. Следовательно,

$$S = S^2 = SbSSaS \subseteq S\,(bSa)\,S,$$

так что $bSa \neq 0$. Поскольку $R_b \cap L_a$ содержит непустое подмножество $bSa\setminus 0$, мы заключаем, что $a\mathscr{D}b$.

По определению вполне 0-простой полугруппы $\mathscr{D}$-класс $S\setminus 0$ содержит (примитивный) идемпотент. По теореме 2.11 (i) каждый элемент из $S\setminus 0$ регулярен. Так как 0 регулярен, то S регулярна.

Теорема 2.52. *Пусть S — вполне 0-простая полугруппа.*

(i) *Если $a \in S$ и $a^2 \neq 0$, то $a^2 \in H_a$ и H_a — группа.*

(ii) *Если $a, b \in S$ и $ab \neq 0$, то $ab \in R_a \cap L_b$.*

(iii) *Если $a, b \in S$, то $H_aH_b = 0$ или $H_aH_b = R_a \cap L_b$; в любом случае $H_aH_b = H_{ab}$.*

Доказательство. (i) Ввиду следствия 2.49 элемент a принадлежит некоторому 0-минимальному левому идеалу L полугруппы S. Тогда $a^2 \in L$. В силу леммы 2.43 $L\setminus 0$ есть $\mathscr{L}$-класс полугруппы S. Так как по предположению $a^2 \neq 0$, то a, $a^2 \in L\setminus 0$, так что $a\mathscr{L}a^2$. Двойственным образом, $a\mathscr{R}a^2$. Следовательно, $a\mathscr{H}a^2$ и по теореме Грина 2.16 отсюда вытекает, что H_a — группа.

(ii) Из $ab \neq 0$ следует, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. По теореме 2.51 $a\mathscr{D}b$ и поэтому $R_b \cap L_a \neq \varnothing$. Пусть $c \in R_b \cap L_a$. Тогда $c^2 \in L_aR_b$. По теореме 2.4 либо $L_aR_b = 0$, либо $L_aR_b \subseteq S\setminus 0$. Первое невозможно, так как $ab \neq 0$. Следовательно, $c^2 \neq 0$. Ввиду (i) H_c ($= R_b \cap L_a$) — группа. По теореме 2.17 $ab \in R_a \cap L_b$.

(iii) Если $ab = 0$, то по теореме 2.4 $H_a H_b \subseteq L_a R_b = 0$. В этом случае $H_a H_b = 0 = H_0 = H_{ab}$. Если $ab \neq 0$, то ввиду (ii) $ab \in R_a \cap L_b$ и поэтому $H_a H_b = R_a \cap L_b = H_{ab}$ на основании теоремы 2.17.

Пусть S — вполне 0-простая полугруппа. Пусть $\{R_i^0 \mid i \in I\}$ и $\{L_\lambda^0 \mid \lambda \in \Lambda\}$ — соответственно 0-минимальные правые идеалы и 0-минимальные левые идеалы полугруппы S, где I и Λ — непустые (по теореме 2.48) множества индексов. Для каждого $i \in I$ и каждого $\lambda \in \Lambda$ положим

$$R_i = R_i^0 \setminus 0, \quad L_\lambda = L_\lambda^0 \setminus 0, \quad H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda.$$

По лемме 2.43 и двойственной к ней лемме каждое L_λ [R_i] является $\mathscr{L}$-классом [$\mathscr{R}$-классом] полугруппы S, а $H_{i\lambda}$ — $\mathscr{H}$-классом. По теореме 2.51 $S \setminus 0$ есть $\mathscr{D}$-класс полугруппы S, который совпадает с объединением всех R_i ($i \in I$), всех L_λ ($\lambda \in \Lambda$) и всех $H_{i\lambda}$ ($i \in I$, $\lambda \in \Lambda$). Следующее утверждение является лишь переформулировкой теоремы 2.52.

Следствие 2.52a. *Пусть S — вполне 0-простая полугруппа. Тогда, с учетом только что введенных обозначений, справедливы следующие утверждения.*

(i) *Для каждого $i \in I$ и каждого $\lambda \in \Lambda$ либо $H_{i\lambda}$ — (максимальная) подгруппа в S, либо $H_{i\lambda}^2 = 0$.*

(ii) *Для любых i, $j \in I$ и λ, $\mu \in \Lambda$ произведение $H_{i\lambda} H_{j\mu}$ равно либо $H_{i\mu}$, либо 0.*

Для случая полугрупп без нуля получаем следующее утверждение, которое было доказано Сушкевичем в статье [1928] для конечных простых полугрупп; см. приложение.

Следствие 2.52b. *Пусть S — вполне простая полугруппа и $\{R_i \mid i \in I\}$, $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — соответственно множества ее минимальных правых и левых идеалов. Тогда для каждого $i \in I$ и каждого $\lambda \in \Lambda$ пересечение $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$ есть (максимальная) подгруппа в S. Кроме того, для любых i, $j \in I$ и λ, $\mu \in \Lambda$ выполняется равенство $H_{i\lambda} H_{j\mu} = H_{i\mu}$.*

Замечание. Если мы определим произведение на множестве $I \times \Lambda$, полагая

$$(i, \lambda) \circ (j, \mu) = (i, \mu) \qquad (i, j \in I, \ \lambda, \mu \in \Lambda),$$

то $(I \times \Lambda)(\circ)$ становится прямоугольной связкой (см. § 1.8). В терминах понятия связки полугрупп, также введенного в § 1.8, следствие 2.52b утверждает, что *любая вполне простая полугруппа* *есть прямоугольная связка групп*[1]. Обратное легко показать (см. упражнение 4 ниже).

В § 1.12 мы определили *бициклическую полугруппу* как полугруппу $\mathscr{C}(p, q)$ с единицей, порожденную двумя символами p и q и заданную одним определяющим соотношением $pq = 1$.

Теорема 2.53. *Бициклическая полугруппа $\mathscr{C} = \mathscr{C}(p, q)$ есть бипростая инверсная полугруппа с единицей. Ее идемпотентами являются элементы $e_n = q^n p^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Они удовлетворяют неравенствам $1 = e_0 > e_1 > e_2 > \ldots > e_n > e_{n+1} > \ldots$, поэтому $\mathscr{C}$ не содержит примитивных идемпотентов.*

Доказательство. Легко непосредственно проверить (см. упражнение 2 к § 1.12), что два элемента $q^k p^l$ и $q^m p^n$ полугруппы $\mathscr{C}$ (k, l, m, n — неотрицательные целые числа) перемножаются следующим образом:

$$(q^k p^l)(q^m p^n) = q^i p^j,$$

где

$$i = k + m - \min(l, m),$$
$$j = l + n - \min(l, m).$$

Заметим, что $i \geqslant k$. Следовательно, $i \geqslant k$, если $q^i p^j$ принадлежит главному правому идеалу $R(q^k p^l)$, порожденному элементом $q^k p^l$. Обратно, если $i \geqslant k$, то $q^i p^j \in R(q^k p^l)$; достаточно взять $m = l + i - k$, $n = j$.

Если мы выпишем элементы полугруппы $\mathscr{C}$ в таблицу

$$\begin{matrix} 1 & p & p^2 & \ldots \\ q & qp & qp^2 & \ldots \\ q^2 & q^2p & q^2p^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{matrix}$$

то можно описать $R(q^k p^l)$ как объединение множества всех строк таблицы, начиная с $(k+1)$-й и ниже. Отсюда следует, что $\mathscr{R}$-класс, содержащий $q^k p^l$, совпадает с $(k+1)$-й строкой. Аналогично, $\mathscr{L}$-класс, содержащий $q^k p^l$, совпадает с $(l+1)$-м столбцом. Таким образом, $\mathscr{R}$-классы полугруппы $\mathscr{C}$ суть строки, а $\mathscr{L}$-классы полугруппы $\mathscr{C}$ суть столбцы таблицы. Ввиду этого $\mathscr{H}$-классы полугруппы $\mathscr{C}$ одноэлементны. Так как каждый $\mathscr{R}$-класс пересекается с каждым $\mathscr{L}$-классом, единственным $\mathscr{D}$-классом полугруппы $\mathscr{C}$ является $\mathscr{C}$, поэтому $\mathscr{C}$ бипроста.

Предположим теперь, что $q^m p^n$ — идемпотент. Тогда $q^m p^n = q^i p^j$ при $i = 2m - \min(m, n)$ и $j = 2n - \min(m, n)$. По лемме 1.31 отсюда следует, что $m = i$ и $n = j$. Это влечет за собой

[1] В русской литературе прямоугольные связки полугрупп обычно называют *матричными связками*.— *Прим. ред.*

равенства $m = \min(m, n)$ и $n = \min(m, n)$, т. е. $m = n$. Обратно, легко видеть, что $e_n = q^n p^n$ есть идемпотент. Если $m < n$, то прямые вычисления показывают, что $e_m e_n = e_n e_m = e_n$, так что $e_m \geqslant e_n$. По лемме 1.31 $e_m \neq e_n$, если $m \neq n$. Следовательно, $m < n$ влечет за собой $e_m > e_n$, и тогда очевидно, что $\mathscr{C}$ не содержит примитивных идемпотентов.

Так как $\mathscr{C}$ содержит идемпотент и состоит из одного $\mathscr{D}$-класса, $\mathscr{C}$ регулярна по теореме 2.11. Так как $e_m e_n = e_n = e_n e_m$ при $m < n$, идемпотенты полугруппы $\mathscr{C}$ коммутируют между собой, и, согласно теореме 1.17, $\mathscr{C}$ — инверсная полугруппа.

Следующая теорема, принадлежащая Андерсену [1952], показывает, что 0-простую полугруппу (не являющуюся вполне 0-простой полугруппой), содержащую идемпотент, можно представлять себе как бы сотканной из бициклических полугрупп. Эта теорема полезна также при доказательстве некоторых критериев вполне 0-простоты, таких, как приведенные ниже теорема 2.55 и следствие 2.56.

Теорема 2.54. *Если e — произвольный ненулевой идемпотент 0-простой полугруппы S, не являющейся вполне 0-простой полугруппой, то S содержит бициклическую подполугруппу, в которой e является единицей.*

Доказательство. Идемпотент e непримитивен, так как в противном случае S была бы вполне 0-простой полугруппой. Следовательно, существует такой ненулевой идемпотент $f \in S$, что $e > f$, т. е. $ef = fe = f$ и $e \neq f$. Так как $f \neq 0$ и S 0-проста, то $SfS = S$, и поэтому существуют такие x', $y' \in S$, что $x'fy' = e$. Полагая $x = ex'f$ и $y = fy'e$, получаем

$$ex = xf = x, \quad fy = ye = y \quad \text{и} \quad xy = e.$$

Пусть $g = yx$. Тогда

$$\begin{aligned} g^2 &= yxyx = yex = yx = g, \\ fg &= fyx = yx = g, \\ gf &= yxf = yx = g. \end{aligned}$$

Таким образом, $g \leqslant f$. Так как $f < e$, то $g < e$.

Так как e — двусторонняя единица для x и y, $xy = e$ и $yx \neq e$, из леммы 1.31 следует, что $\langle x, y \rangle$ — бициклическая подполугруппа в S с единицей e.

Следующая теорема принадлежит Манну [1961].

Теорема 2.55. *0-простая полугруппа S вполне 0-проста тогда и только тогда, когда некоторая степень каждого элемента из S принадлежит подгруппе полугруппы S.*

Доказательство. Если S вполне 0-проста, то по теореме 2.52 (i) квадрат каждого элемента из S лежит в подгруппе полугруппы S.

Предположим, обратно, что некоторая степень каждого элемента из S лежит в подгруппе полугруппы S. Покажем сначала, что в S существует ненильпотентный элемент. Пусть $a \neq 0$ и $a \in S$. Тогда по лемме 2.28 $a \in SaS$, поэтому $a = xay$ при некоторых x, $y \in S$. Повторным умножением на x слева и на y справа получаем $a = x^n a y^n$ для каждого положительного целого числа n. Так как $a \neq 0$, то $x^n \neq 0$ для каждого n, т. е. x ненильпотентен.

Полугруппа S должна содержать ненулевой идемпотент. В самом деле, если x — ненильпотентный элемент полугруппы S, то (по предположению) x^n принадлежит подгруппе G из S при некотором положительном целом n и, очевидно, единица группы G не равна 0.

Пусть e — ненулевой идемпотент полугруппы S. Если S есть 0-простая полугруппа, не являющаяся вполне 0-простой, то в силу теоремы 2.54 S содержит бициклическую подполугруппу $\langle p, q\rangle$ с единицей e, где $pq = e$ и $qp \neq e$. Покажем, что это невозможно.

По предположению для подходящего n элемент p^n принадлежит некоторой подгруппе G из S. Пусть f — единица этой подгруппы, а r — элемент, обратный в ней для p^n. Из $p^n q^n = e$ вытекает

$$fe = fp^n q^n = p^n q^n = e.$$

Из $rp^n = f$ вытекает

$$fe = rp^n e = rp^n = f.$$

Следовательно, $e = f$, и поэтому

$$q^n = eq^n = fq^n = rp^n q^n = re = rf = r.$$

Но тогда

$$q^n p^n = rp^n = f = e,$$

в то время как $q^n p^n < e$ в бициклической полугруппе $\langle p, q\rangle$.

Следствие 2.56. *Любая периодическая (в частности, любая конечная) 0-простая полугруппа вполне 0-проста.*

Это утверждение было доказано Рисом [1940]. Краткое доказательство этого факта для конечных полугрупп было приведено в третьем абзаце данного параграфа.

Упражнения к § 2.7

1. Вполне 0-простая полугруппа содержит единицу тогда и только тогда, когда она есть группа с нулем. (Рис [1940].)

2. Ненулевой правый идеал вполне 0-простой полугруппы является главным правым идеалом тогда и только тогда, когда он 0-минимален.

3. Каждый правый идеал бициклической полугруппы $\mathscr{C}$ является главным. Существует такое взаимно однозначное отображение $n \to R_n$ множества N неотрицательных целых чисел на множество правых идеалов R_n полугруппы $\mathscr{C}$, что

$$\mathscr{C} = R_0 \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_n \supset R_{n+1} \supset \ldots .$$

Ввиду этого очевидно, что $\mathscr{C}$ не содержит минимальных правых идеалов.

4. Прямоугольная связка групп (§ 1.8) вполне проста. (См. замечание после следствия 2.52b.)

5. Каждый ненулевой идемпотент вполне 0-простой полугруппы примитивен. (Рис [1941].)

6. Если M — идеал полугруппы S с нулем и если M — вполне 0-простая подполугруппа полугруппы S, то M — 0-минимальный идеал полугруппы S, содержащий хотя бы один 0-минимальный правый идеал полугруппы S и хотя бы один ее 0-минимальный левый идеал. (Рич [1949]; это утверждение, обратное к следствию 2.50.)

7. Пусть I — некоторое множество. Пусть $S = (I \times I) \cup \{0\}$. Для $i, j, k, l \in I$ положим

$$(i, j)\cdot(k, l) = \begin{cases} (i, l), & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k; \end{cases}$$
$$0\cdot(i, j) = (i, j)\cdot 0 = 0\cdot 0 = 0.$$

Тогда S является вполне 0-простой полугруппой; назовем ее *полугруппой $I \times I$-матричных единиц.*

8. Прямое произведение полугрупп [вполне] просто тогда и только тогда, когда каждый сомножитель [вполне] прост. (Иван [1953].)

9. Пусть S — вполне простая полугруппа. Тогда $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ и $\mathscr{H}$ — конгруэнции на S и $S/\mathscr{H}$ — прямоугольная связка, изоморфная прямому произведению $S/\mathscr{R} \times S/\mathscr{L}$.

10. Пусть e — примитивный идемпотент регулярной полугруппы S с нулем. Тогда eS есть 0-минимальный правый идеал в S.

11. Полугруппа S с нулем вполне 0-проста тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим трем условиям:

(i) S регулярна;

(ii) каждый ненулевой идемпотент из S примитивен;

(iii) если e и f — ненул вые идемпотенты из S, то $eSf \neq 0$.

12. 0-простая полугруппа вполне 0-проста тогда и только тогда, когда она содержит 0-минимальный левый идеал и ненулевой идемпотент.

13. (a) Если L — минимальный левый идеал полугруппы S и A — произвольный двусторонний идеал полугруппы S, то $L \subseteq A$. (Рассмотреть непустое множество AL.)

(b) Полугруппа S, содержащая минимальный левый идеал, имеет ядро K, и K является объединением всех минимальных левых идеалов полугруппы S. Если S также содержит минимальный правый идеал, то K вполне проста.

(c) Если L и R — соответственно минимальный левый и минимальный правый идеалы полугруппы S, то $L \cap R$ — (максимальная) подгруппа полугруппы S. (Сушкевич [1928] для конечных S (см. приложение); Клиффорд [1948].)

14. Пусть e — идемпотент полугруппы S с нулем. Тогда эквивалентны следующие условия:

(i) Se — минимальный левый идеал полугруппы S;

(ii) SeS — ядро K полугруппы S и K — вполне простая полугруппа;

(iii) SeS — максимальная подгруппа H_e полугруппы S, содержащая e. (Кох [1953]; сформулировано как теорема 4.1 в статье Уоллеса [1955].)

15. Назовем подполугруппу B полугруппы S *биидеалом*, если $BSB \subseteq B$.

(a) Если C — произвольное непустое подмножество полугруппы S, то $C \cup C^2 \cup CSC$ — наименьший биидеал из S, содержащий C.

(b) S является группой тогда и только тогда, когда она не содержит собственных биидеалов.

(c) Пусть B — подгруппа и биидеал полугруппы S, и пусть e — единица группы B. Тогда $eSe = B = H_e$, так что (ввиду упражнения 14) SeS — ядро полугруппы S и оно вполне просто.

(d) Пусть B — биидеал полугруппы S, и пусть e — идемпотент из ядра полугруппы B. Тогда e принадлежит ядру полугруппы S.

(e) Пусть $S = B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n$ — такая конечная последовательность подполугрупп полугруппы S, что B_i есть биидеал в B_{i-1} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и B_n не имеет собственных биидеалов. Тогда B_n — максимальная подгруппа полугруппы S, содержащаяся в ядре K полугруппы S и K — вполне простая полугруппа. (Гуд и Хьюз [1952].)

16. Пусть S — полугруппа, обладающая вполне простым ядром K, и пусть e — идемпотент из K. Тогда произвольный гомоморфизм полугруппы S на группу G индуцирует гомоморфизм группы H_e на G. Следовательно, если H_e является гомоморфным образом полугруппы S, то оно является максимальным групповым гомоморфным образом. Ввиду упражнения 7 к § 2.5 этот случай имеет место, если S есть полугруппа, обладающая зероидами. (Гуд и Хьюз [1952].)

17. Назовем подмножество $A \neq \varnothing$ полугруппы S *квазиидеалом*, если $AS \cap SA \subseteq A$.

(a) Если C — произвольное подмножество $\neq \varnothing$ полугруппы S, то $(C \cup SC) \cap (C \cup CS)$ — наименьший квазиидеал полугруппы S, содержащий C.

(b) Подмножество полугруппы S является квазиидеалом тогда и только тогда, когда оно есть пересечение правого идеала и левого идеала из S.

(c) S является группой тогда и только тогда, когда она не содержит собственных квазиидеалов.

(d) Минимальными квазиидеалами полугруппы S являются лишь максимальные подгруппы ее ядра.

(e) Если Q — некоторый 0-минимальный квазиидеал полугруппы S с нулем, то либо Q — группа с нулем, либо Q — полугруппа с нулевым умножением. (Штейнфельд [1956, 1957].)

18. (a) Каждый квазиидеал полугруппы S является также биидеалом полугруппы S. (См. определения в упражнениях 15 и 17.)

(b) Пусть B — биидеал полугруппы S, $B = B \cup BS$ и $L = B \cup SB$. Тогда $RL \subseteq B \subseteq R \cap L$.

(c) Если R — правый идеал и L — левый идеал полугруппы S, то произвольное подмножество B из S, такое, что $RL \subseteq B \subseteq R \cap L$, является биидеалом полугруппы S.

(d) В S каждый биидеал является квазиидеалом тогда и только тогда, когда S регулярна (см. упражнение 11 к § 1.9). (Лайош [1961].)

19. (a) Каждая подполугруппа T конечной простой полугруппы S также проста. В действительности, если S имеет строение, описанное в следствии 2.52b, то существуют такие подмножества I' из I и Λ' из Λ, что $H'_{i\lambda} = T \cap H_{i\lambda} \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $i \in I'$ и $\lambda \in \Lambda'$; T есть объединение групп $H'_{i\lambda}$ $(i \in I', \lambda \in \Lambda')$.

(b) Если K — ядро конечной полугруппы S и T — такая подполугруппа полугруппы S, что $T \cap K \neq \varnothing$, то $T \cap K$ — ядро полугруппы T.

(c) Если S — конечная полугруппа и $a \in S$, то ядро полугруппы Sa есть объединение некоторых или всех минимальных левых идеалов полугруппы S.

(d) Если S — конечная полугруппа и $a, b \in S$, то ядро полугруппы aSb есть объединение некоторых или всех максимальных подгрупп полугруппы S, содержащихся в ядре полугруппы S. (Сушкевич [1937], гл. 3, § 27.)

Глава 3

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТРИЦАМИ НАД ГРУППОЙ С НУЛЕМ

До сих пор, особенно в гл. 1, мы рассматривали представления полугрупп преобразованиями (возможно, частичными) некоторого множества. В гл. 5 мы будем изучать представления полугрупп матрицами над полем аналогично классической теории представлений групп и алгебр. В данной же главе мы рассмотрим представления с помощью матриц, элементы которых принадлежат некоторой группе с нулем G^0. Такие матрицы можно перемножать по обычному правилу, если при этом нигде не придется складывать два элемента группы G. Это условие накладывает некоторые ограничения на распределение ненулевых элементов в таких матрицах. Например, в представлении Риса (§ 3.2) соответствующие матрицы имеют не более одного ненулевого элемента. В представлении Шютценберже (§ 3.5) соответствующие матрицы являются либо мономиальными по строкам, т. е. в каждой строке имеется не более одного ненулевого элемента, либо мономиальными по столбцам.

Теорема Риса 3.5 говорит о том, что любая вполне 0-простая полугруппа представима как полугруппа всех матриц определенной размерности над некоторой группой с нулем, где каждая из матриц содержит не более одного ненулевого элемента. Перемножаются такие матрицы при помощи некоторой «сэндвич»-матрицы P по следующему правилу: произведение $A \circ B$ двух матриц Риса A и B равно обычному матричному произведению APB. Таким образом, строение всех вполне 0-простых полугрупп становится ясным. Теорема Риса играет для вполне 0-простых полугрупп такую же роль, какую играет вторая теорема Веддербёрна (сформулированная в § 5.1) для линейных ассоциативных алгебр конечной размерности. В § 3.3 теорема Риса применяется для выяснения строения группоидов Брандта.

Следующие соображения связывают теоремы Риса и Веддербёрна. Пусть A — простая линейная ассоциативная алгебра конечной размерности над полем Φ. Пусть единица e алгебры A представима в виде суммы $e = e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ попарно ортогональных примитивных идемпотентов. Положим $A_{ij} = e_i A e_j$. Тогда алгебра A есть прямая сумма алгебр A_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Все A_{ij} имеют одну и ту же размерность. Алгебры A_{ii}

являются алгебрами с делением над Ф. (См., например, Albert A. A., Structure of Algebras, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, т. 24, 1939, гл. III, теорема 9.) Пусть Δ — алгебра с делением над Ф, изоморфная A_{ii}. Объединение S множеств A_{ij} замкнуто относительно умножения, определенного в A, и легко видеть, что S является вполне 0-простой полугруппой относительно указанной операции. Множества $A_{ij} \setminus 0$ суть $\mathcal{H}$-классы полугруппы S из $\mathcal{D}$-класса $S \setminus 0$. Представление Веддербёрна алгебры A как алгебры всех $n \times n$-матриц над Δ индуцирует представление Риса полугруппы S, где Δ рассматривается как группа с нулем относительно умножения. Здесь «сэндвич»-матрица P есть единичная $n \times n$-матрица, а S — полугруппа Брандта (§ 3.3).

В § 3.5 мы рассмотрим два представления Шютценберже произвольной полугруппы S, ассоциированные с каждым ее $\mathcal{D}$-классом, и покажем их связь с представлением Риса для случая, когда S вполне 0-проста. Наконец, в § 3.6 мы установим, что прямая сумма всех представлений Шютценберже регулярной полугруппы есть точное представление. Этот результат принадлежит Престону [1958].

Ввиду того что каждая полугруппа вкладывается в регулярную полугруппу (на самом деле в регулярную бипростую полугруппу с единицей, как мы покажем в гл. 8), каждая полугруппа точно представима при помощи представлений Шютценберже некоторой содержащей ее полугруппы. Никакой реальной пользы для теории полугрупп представление Шютценберже до сих пор не принесло. В процессе обобщения от представлений Риса вполне 0-простых полугрупп до представлений Шютценберже более широких классов полугрупп существенные черты первого были потеряны. Представление Риса дает возможность охарактеризовать вполне 0-простую полугруппу как полугруппу *всех* матриц некоторого типа. Подобной характеризации более широкого класса полугрупп при помощи представлений Шютценберже до сих пор не получено.

§ 3.1. *Полугруппы матричного типа над группой с нулем*

Пусть G — группа и $G^0 = G \cup 0$ — группа с нулем, полученная из G присоединением нуля 0 (§ 1.1). (В основных определениях этого параграфа G достаточно считать лишь полугруппой.)

Пусть, далее, X — произвольное множество и $i \to a_i$ — отображение множества X в G^0. Если $a_i = 0$ для каждого $i \in X$, то положим $\sum_{i \in X} a_i = 0$. Если $a_j \neq 0$ для некоторого элемента

$j \in X$ и $a_i = 0$ при $i \neq j$, то положим $\sum_{i \in X} a_i = a_j$. Если $a_j \neq 0$ и $a_k \neq 0$ при $j \neq k$ в X, то $\sum_{i \in X} a_i$ не определена.

Если X и Y — произвольные множества, то $X \times Y$-*матрицей над* G^0 называется отображение A множества $X \times Y$ в G^0. Образ элемента (i, j) из $X \times Y$ при указанном отображении A будем обозначать через a_{ij}. Будем писать $A = (a_{ij})$ и говорить, что a_{ij} есть элемент матрицы A, лежащий в ее i-й строке и j-м столбце.

Пусть X, Y и Z — некоторые множества, $A = (a_{ij})$ есть $X \times Y$-матрица над G^0 и $B = (b_{jk})$ есть $Y \times Z$-матрица над G^0. Если для каждой пары $(i, k) \in X \times Z$ сумма $c_{ik} = \sum_{j \in Y} a_{ij} b_{jk}$ определена, то определим *матричное произведение* $C = AB$ матриц A и B, полагая его равным $X \times Z$-матрице $C = (c_{ik})$ над G^0.

Пусть S — такое множество $X \times Y$-матриц над G^0, что если A и B принадлежат S, то AB существует и принадлежит S. Тогда S — полугруппа; ассоциативность проверяется точно так же, как для матриц над кольцом (см. также упражнение 1). Следующий пример такой ситуации будет играть важную роль в этой главе.

Скажем, что матрица A над G^0 *мономиальна по строкам*, если каждая ее строка содержит не более одного ненулевого элемента полугруппы G^0. Множество всех $X \times X$-матриц над G^0, мономиальных по строкам, является полугруппой.

Приступим теперь к описанию другого типа полугрупп матриц над G^0, крайне важного для алгебраической теории полугрупп. Пусть I и Λ — произвольные множества. Элементы из I будем обозначать через $i, j, k, \ldots$, а элементы из Λ — через $\lambda, \mu, \nu, \ldots$. Тогда $I \times \Lambda$-*матрицей Риса над* G^0 называется $I \times \Lambda$-матрица над G^0, содержащая не более одного ненулевого элемента. Если $a \in G$, $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$, то через $(a)_{i\lambda}$ будем обозначать $I \times \Lambda$-матрицу Риса над G^0, содержащую элемент a в i-й строке и λ-м столбце и нули на остальных местах. Символом 0 будем обозначать нулевую $I \times \Lambda$-матрицу, т. е. $0 = (0)_{i\lambda}$ при любых $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$.

Пусть теперь $P = (p_{\lambda i})$ — произвольная, но фиксированная $\Lambda \times I$-матрица над G^0. Используем P для определения бинарной операции $(\circ)$ на множестве всех $I \times \Lambda$-матриц Риса над G^0, полагая

$$A \circ B = APB.$$

Если A и B — некоторые $I \times \Lambda$-матрицы Риса над G^0, то $A \circ B$ — также $I \times \Lambda$-матрица Риса над G^0. Более того, если $A = (a)_{i\lambda}$ и $B = (b)_{j\mu}$, то легко проверить, что

$$(a)_{i\lambda} \circ (b_{j\mu}) = (ap_{\lambda j}b)_{i\mu} \qquad (a,\ b \in G;\quad i,\ j \in I;\quad \lambda,\ \mu \in \Lambda). \quad (1)$$

Операция ($\circ$) ассоциативна. В самом деле,

$$A \circ (B \circ C) = AP\,(BPC) = (APB)\,PC = (A \circ B) \circ C.$$

Следовательно, множество всех $I \times \Lambda$-матриц Риса над G^0 является полугруппой относительно бинарной операции ($\circ$). Назовем ее *рисовской полугруппой матричного типа с сэндвич-матрицей* P *над группой с нулем* G^0 и будем обозначать эту полугруппу через $\mathscr{M}^0\,(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$. Назовем G *структурной группой* полугруппы $\mathscr{M}^0$.

Другой подход к рисовским полугруппам матричного типа над G^0 состоит в рассмотрении множества $G^0 \times I \times \Lambda$, состоящего из всех троек $(a;\ i,\ \lambda)$, где $a \in G^0$, $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$ вместе с бинарной операцией ($\circ$), определенной аналогично условию (1):

$$(a;\ i,\ \lambda) \circ (b;\ j,\ \mu) = (ap_{\lambda j}b;\ i,\ \mu). \tag{1'}$$

Ассоциативность легко проверяется. Далее заметим, что множество $0 \times I \times \Lambda$ всех троек вида $(0;\ i,\ \lambda)$ есть идеал. Фактор-полугруппа Риса по этому идеалу изоморфна полугруппе $\mathscr{M}^0\,(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$.

Если P не содержит нулевых элементов, то в $\mathscr{M}^0\,(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$ нет делителей нуля. В этом случае полугруппу $\mathscr{M}^0 \setminus 0$ назовем *рисовской полугруппой матричного типа с сэндвич-матрицей* P *над группой* G и будем обозначать ее через $\mathscr{M}\,(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$. Эту полугруппу можно рассматривать как полугруппу $G \times I \times \Lambda$ троек вида $(a;\ i,\ \lambda)$ относительно операции, заданной условием (1'). В этом случае нет необходимости присоединять нуль к G, но если мы хотим представить тройки $(a;\ i,\ \lambda)$ в виде матриц Риса $(a)_{i\lambda}$, то к G, конечно, нужно присоединить нуль.

В дальнейшем мы не будем различать «матрицы Риса» и «тройки», всегда используя для них то из обозначений $(a)_{i\lambda}$ и $(a;\ i,\ \lambda)$, которое в данный момент удобней. Поэтому мы отождествим все тройки вида $(0;\ i,\ \lambda)$ точно так же, как отождествляются все матрицы $(0)_{i\lambda}$.

Заметим, что *из каждой теоремы о рисовских полугруппах матричного типа над* G^0 *можно извлечь очевидным образом теорему о рисовских полугруппах матричного типа над* G, причем последнюю мы не будем обычно формулировать в явном виде.

В этом параграфе мы будем иметь дело только с рисовскими полугруппами матричного типа. Все результаты параграфа принадлежат Рису [1940]. В § 3.5 и 3.6 будут рассматриваться преимущественно матрицы, мономиальные по строкам (или по столбцам), которые были определены выше.

Лемма 3.1. *Рисовская полугруппа* $\mathscr{M}^0\,(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$ *матричного типа с сэндвич-матрицей* P *над группой с нулем* G^0 *регулярна тогда и только тогда, когда каждая строка и каждый столбец матрицы* P *содержит ненулевой элемент.*

Доказательство. Пусть $P = (p_{\lambda i})$; a, $b \in G$; i, $j \in I$; λ, $\mu \in \Lambda$. Тогда

$$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} \circ (a)_{i\lambda} = (a p_{\lambda j} b p_{\mu i} a)_{i\lambda}.$$

Этот элемент равен $(a)_{i\lambda}$ тогда и только тогда, когда $p_{\lambda j} b p_{\mu i} = a^{-1}$. Для данного элемента $(a)_{i\lambda}$ тогда и только тогда существует элемент $(b)_{j\mu} \in \mathcal{M}^0$, для которого $p_{\lambda j} b p_{\mu i} = a^{-1}$, когда $p_{\lambda j} \neq 0$ и $p_{\mu i} \neq 0$ при некоторых $j \in I$ и $\mu \in \Lambda$, т. е. когда λ-я строка и i-й столбец матрицы P содержат ненулевые элементы из G^0.

В силу леммы 3.1 мы будем говорить, что матрица P над группой с нулем *регулярна* в том и только в том случае, когда каждая ее строка и каждый столбец содержат ненулевые элементы.

На протяжении этой главы мы будем придерживаться следующих обозначений, относящихся к рисовской полугруппе $\mathcal{M}^0(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$ с сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$ над группой с нулем G^0. Обозначим элементы из $\mathcal{M}^0$ через $(a)_{i\lambda}$, где $a \in G^0$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, и положим

$$R_i = \{(a)_{i\lambda} \mid a \in G,\quad \lambda \in \Lambda\},\qquad R_i^0 = R_i \cup 0,$$
$$L_\lambda = \{(a)_{i\lambda} \mid a \in G,\quad i \in I\},\qquad L_\lambda^0 = L_\lambda \cup 0,$$
$$H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda = \{(a)_{i\lambda} \mid a \in G\}.$$

Лемма 3.2. (i) *Для любого $i \in I$ множество R_i^0 есть правый идеал полугруппы $\mathcal{M}^0$. Любые $\mathcal{R}$-эквивалентные элементы из $\mathcal{M}^0 \setminus 0$ принадлежат одному и тому же множеству R_i для некоторого $i \in I$.*

(ii). *Если матрица P регулярна, то для любого $i \in I$ множество R_i^0 есть 0-минимальный правый идеал полугруппы $\mathcal{M}^0$ и R_i является $\mathcal{R}$-классом.*

(iii) *Если для некоторого $i \in I$ выполняется равенство $p_{\lambda i} = 0$ при любом $\lambda \in \Lambda$, то R_i^0 — двусторонний идеал полугруппы $\mathcal{M}^0$, причем $\mathcal{M}^0 \circ R_i^0 = 0$; в частности, $(R_i^0)^2 = 0$.*

(iv) *Множество $H_{i\lambda}$ $(i \in I,\ \lambda \in \Lambda)$ содержит идемпотент тогда и только тогда, когда $p_{\lambda i} \neq 0$. Если $p_{\lambda i} \neq 0$, то $H_{i\lambda}$ есть $\mathcal{H}$-класс полугруппы $\mathcal{M}^0$, являющийся полугруппой с единицей $e_{i\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Отображение $a \to (a p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$ есть изоморфизм группы G на $H_{i\lambda}$.*

(v) *Для любых i, $j \in I$ и λ, $\mu \in \Lambda$*

$$H_{i\lambda} \circ H_{j\mu} = \begin{cases} H_{i\mu}, & \text{если } p_{\lambda j} \neq 0, \\ 0, & \text{если } p_{\lambda j} = 0. \end{cases}$$

Доказательство. (i) Ввиду (1) очевидно, что R_i^0 — правый идеал полугруппы $\mathcal{M}^0$. Пусть $(a)_{i\lambda}$ и $(b)_{j\mu}$ — ненулевые $\mathcal{R}$-эквивалентные элементы из $\mathcal{M}^0$. Тогда существует такой элемент $(c)_{k\nu} \in \mathcal{M}^0$, что $(a)_{i\lambda} \circ (c)_{k\nu} = (b)_{j\mu}$, то есть $(a p_{\lambda k} c)_{i\nu} = (b)_{j\mu}$. Так как $b \neq 0$, отсюда следует, что $j = i$.

(ii) Предположим, что матрица P регулярна и возьмем (ненулевые) элементы $(a)_{i\lambda}$ и $(b)_{i\mu}$ из R_i. Так как P регулярна, существует такое $k \in I$, что $p_{\lambda k} \neq 0$. Тогда $(a)_{i\lambda} \circ (c)_{k\mu} = (b)_{i\mu}$ при $c = p_{\lambda k}^{-1} a^{-1} b$. Отсюда следует, что R_i^0 есть 0-минимальный правый идеал полугруппы $\mathscr{M}^0$ и любые два элемента множества R_i $\mathscr{R}$-эквивалентны. Тот факт, что R_i есть $\mathscr{R}$-класс, вытекает теперь из (i) или из леммы, двойственной лемме 2.43.

(iii) Предположим, что $p_{\lambda i} = 0$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Если $(a)_{i\lambda} \in R_i^0$ и $(b)_{j\mu} \in \mathscr{M}^0$, то $(b)_{j\mu} \circ (a)_{i\lambda} = (bp_{\mu i} a)_{j\lambda} = 0$. Следовательно, $\mathscr{M}^0 \circ R_i^0 = 0$. Отсюда и из (i) вытекает, что R_i^0 — двусторонний идеал.

(iv) Пусть $(a)_{i\lambda} \in H_{i\lambda}$. Из $(a)_{i\lambda} \circ (a)_{i\lambda} = (ap_{\lambda i} a)_{i\lambda}$ видно, что $(a)_{i\lambda}$ является идемпотентом тогда и только тогда, когда $p_{\lambda i} \neq 0$ и $a = p_{\lambda i}^{-1}$. Предположим, что $p_{\lambda i} \neq 0$. Тогда $H_{i\lambda}$ содержит идемпотент $e_{i\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Для $a \in G$ положим $a\varphi = (ap_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Тогда для любых $a, b \in G$ выполняется равенство $(a\varphi) \circ (b\varphi) = (ap_{\lambda i}^{-1} p_{\lambda i} b p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda} = (ab)\,\varphi$. Так как φ — взаимно однозначное отображение группы G на $H_{i\lambda}$, отсюда следует, что φ — изоморфизм G на $H_{i\lambda}$. Таким образом, $H_{i\lambda}$ — подгруппа из $\mathscr{M}^0$ с единицей $e_{i\lambda}$.

Пусть H — тот $\mathscr{H}$-класс полугруппы $\mathscr{M}^0$, который содержит $e_{i\lambda}$. Очевидно, $H_{i\lambda} \subseteq H$, так как $H_{i\lambda}$ — группа. Но на основании (i) и двойственного ему утверждения $H \subseteq R_i \cap L_\lambda = H_{i\lambda}$, т. е. $H = H_{i\lambda}$.

(v) Пусть $(a)_{i\lambda} \in H_{i\lambda}$ и $(b)_{j\mu} \in H_{j\mu}$. Мы имеем

$$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (ap_{\lambda j} b)_{i\mu}.$$

Если $p_{\lambda j} = 0$, то этот элемент равен 0. Если $p_{\lambda j} \neq 0$, то он принадлежит $H_{i\mu}$. В последнем случае любой элемент $(c)_{i\mu} \in H_{i\mu}$ можно представить в виде такого же произведения, положив $a = p_{\lambda j}^{-1}$ и $b = c$.

Теорема 3.3. *Рисовская полугруппа матричного типа 0-проста тогда и только тогда, когда она регулярна, и в этом случае она вполне 0-проста.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ — рисовская полугруппа. Предположим сначала, что $\mathscr{M}^0$ нерегулярна. По лемме 3.1 существует строка или столбец матрицы P, состоящий из нулей. Пусть это i-й столбец, т. е. $p_{i\lambda} = 0$ для любого $\lambda \in \Lambda$. По лемме 3.2 (iii) R_i^0 — ненулевой нильпотентный идеал полугруппы $\mathscr{M}^0$, поэтому $\mathscr{M}^0$ не может быть 0-простой полугруппой.

Предположим теперь, что $\mathscr{M}^0$ регулярна и $(a)_{i\lambda}$, $(b)_{j\mu}$ — два произвольных элемента из $\mathscr{M}^0$, причем $a \neq 0$. По лемме 3.1 существуют такие $\nu \in \Lambda$ и $k \in I$, что $p_{\nu i} \neq 0$ и $p_{\lambda k} \neq 0$. Положим $c = b\,(p_{\nu i} a p_{\lambda k})^{-1}$, и пусть e — единица группы G. Тогда

$(c)_{j\nu} \circ (a)_{i\lambda} \circ (e)_{k\mu} = (b)_{j\mu}$, и из леммы 2.28 следует, что полугруппа $\mathscr{M}^0$ 0-проста.

По лемме 3.2 (iv) ненулевые идемпотенты полугруппы $\mathscr{M}^0$ исчерпываются элементами $e_{i\lambda} = (p_{\lambda i}^{-1})_{i\lambda}$. Существует точно один идемпотент такого вида для каждой пары i, λ $(i \in I,\ \lambda \in \Lambda)$, где $p_{\lambda i} \neq 0$. Если $e_{i\lambda} \circ e_{j\mu} = e_{j\mu} \circ e_{i\lambda} = e_{j\mu}$, то $i = j$ и $\lambda = \mu$, т. е. $e_{i\lambda} = e_{j\mu}$. Таким образом, каждый ненулевой идемпотент полугруппы $\mathscr{M}^0$ примитивен, поэтому $\mathscr{M}^0$ вполне 0-проста.

Если полугруппа $\mathscr{M}^0$ вполне 0-проста, а, следовательно, P регулярна, то лемма 3.2 (ii) и двойственная к ней лемма утверждают, что каждое множество R_i есть $\mathscr{R}$-класс и каждое множество L_λ есть $\mathscr{L}$-класс. Таким образом, обозначения и результаты леммы 3.2 в регулярном случае соответствуют обозначениям и результатам следствия 2.52а.

Упражнения к § 3.1

1. (a) Пусть A, B, C — соответственно $W \times X$-матрица, $X \times Y$-матрица, $Y \times Z$-матрица над группой с нулем G^0, где W, X, Y, Z — произвольные множества. Если произведения AB и BC определены, то произведение $(AB)\,C$ определено тогда и только тогда, когда определено произведение $A\,(BC)$ и в этом случае $(AB)\,C = A\,(BC)$.

(b) Существуют такие 2×2-матрицы A, B, C над G^0, что произведения AB и $(AB)\,C$ определены, но произведение BC не определено.

2. Пусть I — произвольное множество. Полугруппа $I \times I$-матричных единиц (упражнение 7 к § 2.7) изоморфна рисовской полугруппе матричного типа $\mathscr{M}^0$ $(G;\ I,\ I;\ \Delta)$, где G — одноэлементная группа $\{e\}$, а Δ — *единичная* $I \times I$-матрица (δ_{ij}) над G^0, то есть

$$\delta_{ij} = \begin{cases} e, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

3. Прямоугольная связка (§ 1.8) изоморфна рисовской полугруппе матричного типа без нуля над одноэлементной группой.

4. Рисовская полугруппа матричного типа без нуля является прямоугольной связкой групп (§ 1.8).

5. Пусть A и B — элементы регулярной рисовской полугруппы матричного типа над группой с нулем. Если $A \circ B \circ A = A \neq 0$, то B инверсен к A (§ 1.9).

6. Пусть $\mathscr{M}^0$ $(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$ — регулярная рисовская полугруппа матричного типа. В обозначениях леммы 3.2 элемент из $H_{i\lambda}$ имеет инверсный к нему элемент в $H_{j\mu}$ тогда и только тогда, когда $p_{\lambda j} \neq 0$ и $p_{\mu i} \neq 0$ (это утверждение служит иллюстрацией к теореме 2.18).

§ 3.2. Теорема Риса

Согласно теореме 3.3, рисовская полугруппа матричного типа $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ над группой с нулем G^0 вполне 0-проста, если сэндвич-матрица P регулярна, т. е. если в P не существует строк и столбцов, целиком состоящих из нулей. Это утверждение есть «легкая половина» важной теоремы Риса [1940] о том, что полугруппа вполне 0-проста тогда и только тогда, когда она изоморфна регулярной полугруппе матричного типа над группой с нулем (теорема 3.5). Мы выведем эту теорему из несколько более общей теоремы (теорема 3.4), принадлежащей Миллеру и Клиффорду [1956], которая касается любого регулярного $\mathcal{D}$-класса произвольной полугруппы.

Пусть D — регулярный $\mathcal{D}$-класс полугруппы S и $\{R_i \mid i \in I\}$, $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — соответственно множества $\mathcal{R}$-классов и $\mathcal{L}$-классов из S, содержащихся в $\mathcal{D}$. Тогда множество $\mathcal{H}$-классов из S, содержащихся в D, есть $\{H_{i\lambda} \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}$, где $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$.

Выберем в D $\mathcal{H}$-класс, содержащий идемпотент e; такой $\mathcal{H}$-класс существует по теореме 2.11. Обозначим R_e и L_e соответственно через R_1 и L_1, а поэтому H_e — через H_{11}. Мы считаем, тем самым, что множества I и Λ обладают общим элементом 1. Такое предположение, очевидно, не уменьшает общности и не приведет к недоразумениям. По теореме Грина 2.16 H_{11} — подгруппа полугруппы S.

Для каждого $i \in I$ и каждого $\lambda \in \Lambda$ выберем и зафиксируем элемент $r_i \in H_{i1}$ и элемент $q_\lambda \in H_{1\lambda}$. Определим $\Lambda \times I$-матрицу $P = (p_{\lambda i})$ над H_{11}^0, полагая

$$p_{\lambda i} = \begin{cases} q_\lambda r_i, & \text{если } q_\lambda r_i \in H_{11}, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1}$$

и рассмотрим соответствующую рисовскую полугруппу $\mathcal{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$. Бинарную операцию в $\mathcal{M}^0$ будем обозначать символом $\circ$. По теореме 2.17 $q_\lambda r_i \in H_{11}$ тогда и только тогда, когда $H_{i\lambda}$ содержит идемпотент. В силу теоремы 2.11 каждая строка и каждый столбец матрицы P имеет ненулевые элементы. По лемме 3.1 полугруппа $\mathcal{M}^0$ регулярна, а на основании теоремы 3.3 она вполне 0-проста.

Если мы выберем вместо группы H_{11} и элементов r_i, q_λ (быть может) другую группу и элементы, то получим (возможно) другую рисовскую полугруппу матричного типа $\mathcal{M}_1^0$. Непосредственными вычислениями можно установить изоморфизм между $\mathcal{M}^0$ и $\mathcal{M}_1^0$. Мы избежим этих вычислений в доказательстве следующей теоремы 3.4, используя понятия *следа* T $\mathcal{D}$-класса D. Пусть 0 — символ, не являющийся элементом $\mathcal{D}$-класса D, и пусть $T = D \cup 0$. Определим произведение $(*)$ в T, полагая для произвольных

$a,\ b \in D$

$$a * b = \begin{cases} ab, & \text{если} \quad ab \in R_a \cap L_b, \\ 0 & \text{в остальных случаях}; \end{cases} \tag{2}$$

$$a * 0 = 0 * a = 0 * 0 = 0.$$

Множество T превращается в группоид $T(*)$. Легко показать, используя результаты § 2.3, что операция $(*)$ ассоциативна. Впрочем, это утверждение является побочным результатом теоремы 3.4. На самом деле мы покажем, что существует изоморфизм полугруппы $\mathcal{M}^0$ на $T(*)$.

Теорема 3.4. *Каждый элемент $\mathcal{D}$-класса D единственным образом представим в виде $r_i a q_\lambda$, где $a \in H_{11}$, $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$. Взаимно однозначное отображение φ полугруппы $\mathcal{M}^0$ на T, определенное условием*

$$(a)_{i\lambda}\varphi = \begin{cases} r_i a q_\lambda, & \text{если} \quad a \neq 0, \\ 0, & \text{если} \quad a = 0, \end{cases}$$

является изоморфизмом. Ограничение φ на $\mathcal{M}^0 \setminus 0$ есть частичный изоморфизм $\mathcal{M}^0 \setminus 0$ на D.

Замечание. *Частичным гомоморфизмом* частичного группоида S в частичный группоид S' называется такое отображение φ S в S', что если a и b — элементы из S и ab определено в S, то произведение $(a\varphi)(b\varphi)$ определено в S' и равно $(ab)\varphi$. *Частичным изоморфизмом* S на S' называется взаимно однозначный частичный гомоморфизм φ, отображающий S на S'; мы не требуем, чтобы отображение φ^{-1} было частичным изоморфизмом полугруппы S' на S.

Таким образом, последнее утверждение теоремы говорит о том, что если $(a)_{i\lambda}$ и $(b)_{j\mu}$ — элементы множества $\mathcal{M}^0 \setminus 0$, для которых $(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} \neq 0$, то $[(a)_{i\lambda}\varphi][(b)_{j\mu}\varphi]$ лежит в D и равно $[(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu}]\varphi$. С другой стороны, может случиться, что $[(a)_{i\lambda}\varphi][(b)_{j\mu}\varphi]$ лежит в D, но в «неправильном» $\mathcal{H}$-классе («правильным» $\mathcal{H}$-классом является $H_{i\mu}$). В этом случае $p_{\lambda j} = 0$ и $(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu}$ не принадлежит $\mathcal{M}^0 \setminus 0$.

Доказательство. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ возьмем некоторый идемпотент e_λ из L_λ (такой идемпотент существует по теореме 2.11). По теореме 2.18 q_λ имеет единственный инверсный к нему элемент q'_λ в $R_{e\lambda} \cap L_1$. Тогда $eq_\lambda = q_\lambda$ и $q_\lambda q'_\lambda = e$, где e — идемпотент из H_{11}. По лемме Грина 2.2 отображения

$$x \to xq_\lambda \quad (x \in L_1) \quad \text{и} \quad y \to yq'_\lambda \quad (y \in L_\lambda)$$

суть взаимно обратные взаимно однозначные отображения множеств L_1 и L_λ друг на друга, сохраняющие $\mathcal{R}$-классы.

Двойственным образом для каждого $i \in I$ существует элемент r'_i из R_1, инверсный к r_i, и отображения

$$x \to r_i x \quad (x \in R_1) \quad \text{и} \quad y \to r'_i y \quad (y \in R_i)$$

суть взаимно обратные взаимно однозначные отображения множеств R_1 и R_i друг на друга, сохраняющие $\mathscr{L}$-классы.

Комбинируя предыдущие отображения точно так же, как в теореме 2.3, мы получаем, что отображения

$$x \to r_i x q_\lambda \quad (x \in H_{11}) \quad \text{и} \quad y \to r'_i y q'_\lambda \quad (y \in H_{i\lambda})$$

суть взаимно обратные взаимно однозначные отображения множеств H_{11} и $H_{i\lambda}$ друг на друга (для каждого $i \in I$ и каждого $\lambda \in \Lambda$). Так как каждый элемент $\mathscr{D}$-класса D принадлежит точно одному $\mathscr{H}$-классу $H_{i\lambda}$, отсюда следует, что отображение φ, определенное в формулировке теоремы, является взаимно однозначным отображением полугруппы $\mathscr{M}^0$ на $D \cup 0 = T$.

Покажем, что φ — изоморфизм полугруппы $\mathscr{M}^0$ на T, т. е.

$$[(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu}]\, \varphi = [(a)_{i\lambda}\, \varphi] * [(b)_{j\mu}\, \varphi] \tag{3}$$

для произвольных элементов $(a)_{i\lambda}$, $(b)_{j\mu} \in \mathscr{M}^0$. Очевидно, можно предположить, что $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Следующая «egg-box»-картина [1]) части $\mathscr{D}$-класса D поможет нам представить себе ситуацию.

	L_1	L_λ	L_μ
R_1	e, a, b $q_\lambda r_j$?	q_λ	q_μ
R_i	r_i	$r_i a q_\lambda$	$(r_i a q_\lambda)(r_j b q_\mu)$?
R_j	r_j	идемпотент?	$r_j b q_\mu$

Все элементы, не отмеченные вопросительным знаком, наверняка принадлежат тем $\mathscr{H}$-ячейкам, в которых они записаны на диаграмме. Что же касается элементов, отмеченных вопросительным знаком, то двойное применение теоремы 2.17 показывает, что $q_\lambda r_j \in H_{11}$ тогда и только тогда, когда $H_{j\lambda}$ содержит идемпотент, а это в свою очередь выполняется тогда и только тогда, когда $(r_i a q_\lambda)(r_j b q_\mu) \in H_{i\mu}$. Следовательно, ответ на вопросы о принадлежности отмеченных элементов соответствующим $\mathscr{H}$-классам может быть либо всюду «да», либо всюду «нет». Кроме того, по определению (1) матрицы P ответ «да» имеет место тогда и только тогда, когда $p_{\lambda j} \neq 0$.

[1]) См. § 2.1.— *Прим. перев.*

Предположим сначала, что имеет место ответ «да». Так как $r_i aq_\lambda \in R_i$, $r_j bq_\mu \in L_\mu$ и произведение этих элементов принадлежит $R_i \cap L_\mu$, из определения (2) бинарной операции (*) в T следует, что $(r_i aq_\lambda) * (r_j bq_\mu) = (r_i aq_\lambda)(r_j bq_\mu)$. Таким образом, используя (1), получаем

$$[(a)_{i\lambda}\varphi] * [(b)_{j\mu}\varphi] = (r_i aq_\lambda) * (r_j bq_\mu) =$$
$$= r_i aq_\lambda r_j bq_\mu = r_i ap_{\lambda j} bq_\mu = (ap_{\lambda j}b)_{i\mu}\varphi = [(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu}]\varphi.$$

Предположим теперь, что имеет место ответ «нет». Тогда $p_{\lambda j} = 0$, $H_{j\lambda}$ не содержит идемпотентов и

$$(r_i aq_\lambda)(r_j bq_\mu) \notin H_{i\mu}.$$

В силу формулы (1)

$$(r_i aq_\lambda) * (r_j bq_\mu) = 0 \quad \text{в} \quad T.$$

Следовательно, (3) сводится к равенству $0\varphi = 0$, которое выполняется по определению φ.

Из сказанного непосредственно вытекает, что ограничение отображения φ на $\mathscr{M}^0 \setminus 0$ есть частичный изоморфизм. В самом деле, если $(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} \neq 0$, то $p_{\lambda j} \neq 0$, и мы находимся в условиях первого случая, рассмотренного выше, т. е.

$$[(a)_{i\lambda}\varphi][(b)_{j\mu}\varphi] = (r_i aq_\lambda)(r_j bq_\mu) \in H_{i\mu} \subseteq D.$$

Теорема 3.5 (Рис). *Полугруппа вполне 0-проста тогда и только тогда, когда она изоморфна регулярной рисовской полугруппе матричного типа над группой с нулем.*

Доказательство. Если полугруппа изоморфна регулярной рисовской полугруппе матричного типа над группой с нулем, то она вполне 0-проста по теореме 3.3.

Обратно, пусть S — вполне 0-простая полугруппа. В силу теоремы 2.51 S 0-бипроста, поэтому $D = S \setminus 0$ есть $\mathscr{D}$-класс полугруппы S. Построим полугруппу $\mathscr{M}^0(H_{11}; I, \Lambda; P)$ для D, как в теореме 3.4. Теорема 2.52 (ii) показывает, что S изоморфна следу $T = D \cup 0$ $\mathscr{D}$-класса D, произведение (*) в котором определено при помощи условия (2). По теореме 3.4 T и $\mathscr{M}^0$ изоморфны. Следовательно, S и $\mathscr{M}^0$ изоморфны.

Может случиться, что две регулярные рисовские полугруппы матричного типа

$$S = \mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P) \quad \text{и} \quad S' = \mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P')$$

над одной и той же группой с нулем G^0 изоморфны, хотя их сэндвич-матрицы P и P' не совпадают. Теория гомоморфизмов регулярных рисовских полугрупп матричного типа будет полностью изложена в § 3.4. Здесь же мы дадим достаточные условия изоморфизма полугрупп S и S', которые позволят нам приводить сэндвич-матрицу к более простому виду. (Регулярность полугрупп не предполагается.)

Лемма 3.6. *Две рисовские полугруппы матричного типа* $S = \mathscr{M}^0 (G; I, \Lambda; P)$ *и* $S' = \mathscr{M}^0 (G; I, \Lambda; P')$ *над одной и той же группой с нулем* G^0 *изоморфны, если существуют такие отображения* $i \to u_i$ *множества* I *в* G *и* $\lambda \to v_\lambda$ *множества* Λ *в* G, *что* $p'_{\lambda i} = v_\lambda p_{\lambda i} u_i$ *для всех* $i \in I$ *и* $\lambda \in \Lambda$, *где* $P = (p_{\lambda i})$ *и* $P' = (p'_{\lambda i})$.

Замечание. Связь между P и P', указанную в лемме, можно выразить в матричной форме: $P' = VPU$, где V —«диагональная» $\Lambda \times \Lambda$-матрица, содержащая v_λ на (λ, λ)-месте (λ пробегает множество Λ) и нули на остальных местах, а U —«диагональная» $I \times I$-матрица, содержащая u_i на (i, i)-месте.

Доказательство. Элементы полугруппы S будем обозначать через $(a)_{i\lambda}$, а элементы полугруппы S' — через $[a]_{i\lambda}$. Пусть $[a]_{i\lambda}\,\varphi = (u_i a v_\lambda)_{i\lambda}$. Очевидно, φ — взаимно однозначное отображение полугруппы S' на S. Так как

$$([a]_{i\lambda} \circ [b]_{j\mu})\,\varphi = [ap'_{\lambda j}b]_{i\mu}\,\varphi = (u_i a p'_{\gamma j} b v_\mu)_{i\mu} = (u_i a v_\lambda p_{\lambda j} u_j b v_\mu)_{i\mu} = (u_i a v_\lambda)_{i\lambda} \circ (u_j b v_\mu)_{j\mu} = [a]_{i\lambda}\,\varphi \circ [b]_{j\mu}\,\varphi,$$

мы видим, что φ — изоморфизм полугруппы S' на S.

Лемма 3.6 дает нам возможность в представлении данной вполне 0-простой полугруппы как регулярной рисовской полугруппы матричного типа заменять матрицу P на $P' = VPU$, где V и U —«инвертируемые» (§ 3.4) диагональные матрицы. Тем самым мы можем, например, так «нормализовать» P, что каждый элемент в данной строке и данном столбце будет равен либо 0, либо единице структурной группы G. Как применение этого факта отметим, что теорема 1.27 есть непосредственное следствие теоремы Риса и леммы 3.6.

Закончим параграф рассмотрением примера. Пусть T — полная полугруппа преобразований конечного множества X из n элементов, а T_r — множество всех элементов из T, ранг которых $\leqslant r$ (§ 2.2), $1 \leqslant r \leqslant n$. Тогда (см. упражнение 1 к § 2.6) T_r — идеал полугруппы T и T имеет единственный главный ряд

$$T = T_n \supset T_{n-1} \supset \ldots \supset T_1 \supset T_0 = \varnothing.$$

Кроме того, T_r/T_{r-1} — вполне 0-простая полугруппа. В самом деле, множество $D_r = T_r \setminus T_{r-1}$ всех элементов полугруппы T ранга r является $\mathscr{D}$-классом полугруппы T (теорема 2.9), т. е. T_r/T_{r-1} 0-бипроста; так как она конечна, применимо следствие 2.56. Приступим к построению представления главных факторов T_r/T_{r-1} полугруппы T посредством матриц Риса, предложенного Хьюиттом и Цукерманом [1957].

Пусть $X = N_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. По теореме 2.9 $\mathscr{H}$-класс полугруппы T, содержащийся в D_r, полностью определяется выбором (i) подмножества A из r элементов множества N_n и (ii) такого разбиения (отношения эквивалентности) ξ на N_n, что $|N_n/\xi| = r$. Каждый такой $\mathscr{H}$-класс $\mathscr{H}(\xi, A)$ состоит из всех таких преобразований множества N_n (ранга r), область значений которых совпадает с A, а соответствующее разбиение есть ξ. Если $X_1, \ldots, X_r$ — классы эквивалентности разбиения ξ, $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ и $\alpha \in \mathscr{H}(\xi, A)$, то для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ преобразование α отображает все элементы из X_i в один и тот же элемент $a_j \in A$, и каждый элемент из N_n, отображающийся в a_j при помощи α, принадлежит X_i. Очевидно, отображение $i \to j$, индуцированное таким образом отображением α, является подстановкой на множестве $\{1, \ldots, r\}$; обозначим эту подстановку через φ.

Для того чтобы четко сформулировать предыдущее с помощью подстановок, припишем естественный порядок элементам множества A и предположим, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_r$. Упорядочим классы эквивалентности разбиения ξ так, чтобы имело место соотношение $X_1^* < X_2^* < \ldots < X_r^*$, где для каждого подмножества Y из N_n через Y^* обозначен наименьший из элементов множества N_n, содержащихся в Y. Тогда можно записать

$$\alpha = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_r \\ a_{1\varphi} & a_{2\varphi} & \ldots & a_{r\varphi} \end{pmatrix} = (\varphi;\ \xi,\ A).$$

Два элемента из $\mathscr{H}(\xi, A)$ в этой записи отличаются друг от друга лишь подстановкой φ.

Пусть β — любой другой элемент ранга r полугруппы T и $\beta \in \mathscr{H}(\eta, B)$, где η — разбиение множества N_n, а B — подмножество из r элементов множества N_n. Тогда

$$\beta = \begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \ldots & Y_r \\ b_{1\psi} & b_{2\psi} & \ldots & b_{r\psi} \end{pmatrix} = (\psi;\ \eta,\ B),$$

где $Y_1, \ldots, Y_r$ — классы эквивалентности разбиения η, упорядоченные таким образом, что $Y_1^* < Y_2^* < \ldots < Y_r^*$; $B = \{b_1, \ldots, b_r\}$ и $b_1 < b_2 < \ldots < b_r$; ψ — такая подстановка на $\{1, \ldots, r\}$, что β отображает все элементы множества Y_i на элемент $b_{i\psi}$ из B $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

Заметим, что произведение $\alpha\beta$ преобразований α и β имеет ранг r тогда и только тогда, когда никакие два элемента из A не лежат в одном и том же классе эквивалентности разбиения η. В этом случае мы можем определить такую подстановку $\pi = \pi_{A,\eta}$ на множестве $\{1, \ldots, r\}$, что $a_i \in Y_{i\pi}$ $(i = 1, \ldots, r)$. Тогда $a_i\beta = b_{i\pi\psi}$ и поэтому $X_i\alpha\beta = a_{i\varphi}\beta = b_{i\varphi\pi\psi}$. Следовательно,

$$\alpha\beta = (\varphi;\ \xi,\ A) \circ (\psi;\ \eta,\ B) = (\varphi\pi_{A,\eta}\psi;\ \xi,\ B). \tag{4}$$

В случае когда ранг преобразования $\alpha\beta$ не равен r, положим $\pi_{A,\eta} = 0$, где 0 — нуль, присоединенный к симметрической группе $\mathcal{G}_r$ на множестве $\{1, \ldots, r\}$. В этом случае $\alpha\beta \in T_{r-1}$ и поэтому равенство (4) имеет место, если рассматривать $\alpha\beta$ как элемент полугруппы T_r/T_{r-1}. Следовательно, формула (4) дает нам искомое представление Риса:

$$T_r/T_{r-1} \cong \mathcal{M}^0 (\mathcal{G}_r;\ I,\ \Lambda;\ \Pi),$$

где I — множество всех разбиений множества N_n на r подмножеств, Λ — множество всех подмножеств из r элементов множества N_n и Π есть $\Lambda \times I$-матрица $(\pi_{A,\eta})$, построенная выше.

Упражнения к § 3.2

1. При $n = 4$ и $r = 3$ в примере, рассмотренном в конце параграфа, сэндвич-матрица $\Pi = (\pi_{A,\eta})$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} (1) & (1) & 0 & (1) & 0 & 0 \\ (1) & 0 & (1) & 0 & (1) & 0 \\ 0 & (23) & (1) & 0 & 0 & (1) \\ 0 & 0 & 0 & (123) & (12) & (1) \end{pmatrix}$$

если на подмножествах и разбиениях множества N_4 ввести такой же порядок, какой был использован при построении таблицы $\mathcal{D}$-класса D_3, приведенной в § 2.2. Здесь через (1) обозначена единица группы $\mathcal{G}_3$, в то время как для остальных элементов использованы обычные обозначения.

2. (a) Антикоммутативная полугруппа (см. упражнение 1 к § 1.8 и упражнение 3 к § 1.9) вполне проста и поэтому является прямоугольной связкой.

(b) Если множество идемпотентов E вполне простой полугруппы S является подполугруппой полугруппы S, то E — прямоугольная связка и $S \cong E \times G$, где G — группа.

(c) Пусть S — такая конечная простая полугруппа, что произведение любых двух идемпотентов из S является идемпотентом. Тогда S неразложима в прямое произведение в том и только в том случае, когда либо (i) S — группа, неразложимая в прямое произведение, либо (ii) порядок S прост. (Иван [1954].)

3. След иррегулярного $\mathcal{D}$-класса является полугруппой с нулевым умножением.

4. След бициклической полугруппы (§ 1.12) изоморфен полугруппе $N \times N$-матричных единиц (см. упражнение 7 к § 2.7 и упражнение 2 к § 3.1), где N — множество натуральных чисел.

5. Пусть S_ω — рисовская полугруппа матричного типа без нуля над группой G_ω с $\Lambda_\omega \times I_\omega$-сэндвич-матрицей P_ω (ω пробегает некоторое множество индексов) Тогда полное прямое

произведение всех S_ω изоморфно полугруппе $\mathscr{M}(G; I, \Lambda; P)$, где I $[\Lambda]$ — декартово произведение множеств I_ω $[\Lambda_\omega]$, G — полное прямое произведение групп G_ω.

6. (a) Пусть S — полугруппа и Z — декартово произведение $S \times S \times S$. Определим произведение в Z с помощью формулы $(x, y, z)(x', y', z') = (x, yzx'y', z')$. Тогда Z превращается в полугруппу. Определим отображение μ полугруппы Z в S, полагая $(x, y, z)\mu = xyz$. Тогда μ — гомоморфизм Z в S и μ отображает Z на S в том и только в том случае, когда $S^2 = S$.

(b) Пусть E—произвольное множество идемпотентов полугруппы S и $e \in E$. Тогда $Z_e = (L_e \cap E) \times H_e \times (R_e \cap E) \subseteq Z$ и $K_e = (L_e \cap E) H_e (R_e \cap E) \subseteq S$. Мы имеем $eK_ee = H_e$. Отображение $\mu \mid Z_e$ — частичный изоморфизм множества Z_e на K_e, обратное к нему отображение есть частичный изоморфизм множества K_e на Z_e. Множество K_e есть объединение $\mathscr{H}$-классов полугруппы S, содержащихся в D_e. Множество Z_e является подполугруппой полугруппы Z тогда и только тогда, когда каждый $\mathscr{H}$-класс, содержащийся в K_e, есть группа. В этом случае Z_e является рисовской полугруппой матричного типа без нуля над группой H_e и K_e — вполне простая подполугруппа полугруппы S, изоморфная Z_e. Следовательно, если D_e — объединение групп, то D_e — вполне простая подполугруппа полугруппы S. В частности, бипростая полугруппа, являющаяся объединением групп, изоморфна рисовской полугруппе матричного типа без нуля над группой. (Уоллес [1957].)

7. Пусть a, b, x, y — произвольные элементы полугруппы S. Четыре элемента

$$\begin{matrix} ax & ay \\ bx & by \end{matrix}$$

являются вершинами прямоугольника в таблице Кэли полугруппы S. Назовем полугруппу S *прямоугольной*, если равенство трех из них влечет за собой равенство всех четырех.

(a) Если e — идемпотент прямоугольной полугруппы S, то $aeb = ab$ для всех $a, b \in S$.

(b) Множество идемпотентов E прямоугольной полугруппы является (если оно непусто) прямоугольной связкой. В частности, если связка есть прямоугольная полугруппа, то она является прямоугольной связкой. (Тьеррен [1955a].)

8. Полугруппа S называется *E-инверсивной*, если для каждого $a \in S$ существует $x \in S$, такой, что ax — идемпотент.

(a) Если a — элемент E-инверсивной полугруппы S, то существует такой $y \in S$, что ay и ya — идемпотенты (Круазо, устное сообщение).

(b) Пусть S — некоторая E-инверсивная прямоугольная полугруппа. Тогда S^2 является ядром S и $S^2 \cong E \times G$, где E — прямоугольная связка, а G — группа. (Тьеррен [1955a].)

9. Полугруппа S называется *стационарной справа*, если $ab = ac$ ($a, b, c \in S$) влечет за собой $xb = xc$ для любого $x \in S$.

(a) Стационарная справа полугруппа прямоугольна.

(b) E-инверсивная прямоугольная полугруппа стационарна справа (и слева). (Тьеррен [1955a], а также Тьеррен [1955b].)

10. Пусть T — полугруппа. Каждому элементу $\alpha \in T$ сопоставим такое множество X_α, содержащее α, что множества X_α ($\alpha \in T$) попарно не пересекаются. Пусть $S = \bigcup_{\alpha \in T} X_\alpha$. Распространим операцию умножения из T на S, полагая $ab = \alpha\beta$ при $a \in X_\alpha$ и $b \in X_\beta$ ($\alpha, \beta \in T$). Тогда S превращается в полугруппу, которую мы будем называть *раздуванием* [1]) полугруппы T.

(a) В приведенных выше обозначениях T — такая подполугруппа из S, что $S^2 \subseteq T$. Определим отображение θ полугруппы S в T, полагая $a\theta = \alpha$ при $a \in X_\alpha$. Тогда (i) θ отображает S на T, (ii) $\theta^2 = \theta$ и (iii) $(a\theta)(b\theta) = ab$ для всех $a, b \in S$.

(b) Пусть T — такая подполугруппа полугруппы S, что $S^2 \subseteq T$, и пусть θ — преобразование полугруппы S, обладающее свойствами (i), (ii) и (iii) пункта (a). Тогда S — раздувание полугруппы T.

11. Полугруппа S прямоугольна и E-инверсивна тогда и только тогда, когда она есть раздувание прямого произведения группы и прямоугольной связки (отображение θ из упражнения 10 задается следующим образом: $a\theta = ae$ ($a \in S$, где e — единица максимальной подгруппы полугруппы S, которой принадлежит a^2). (Ямада [1955a].)

12. Элемент u полугруппы S называется *средней единицей полугруппы* S, если $aub = ab$ для всех $a, b \in S$. (Имеем $u^3 = u^2$, и поэтому u^2 является идемпотентом, хотя u может и не быть идемпотентом.) Полугруппа S называется *M-инверсивной*, если для каждого $a \in S$ существуют $x, y \in S$, такие, что ax и ya — средние единицы. Полугруппа S M-инверсивна тогда и только тогда, когда она E-инверсивна и прямоугольна. (Ямада [1955a].)

13. Пусть $\mathcal{T}_X$ — полная полугруппа преобразований на множестве X. Пусть G — подгруппа симметрической группы $\mathcal{G}_X$ на X. Пусть π_λ ($\lambda \in \Lambda$) и ρ_i ($i \in I$) — такие элементы полугруппы $\mathcal{T}_X$, что (i) $\pi_\lambda \in G\pi_\mu$ ($\lambda, \mu \in \Lambda$) влечет за собой $\lambda = \mu$, (ii) $\rho_i \in \rho_j G$ ($i, j \in I$) влечет за собой $i = j$ и (iii) $\pi_\lambda\rho_i \in G$ для всех $\lambda \in \Lambda$, $i \in I$. Пусть

$$S = \bigcup \{\rho_i G \pi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda,\ i \in I\}.$$

Тогда $S \cong \mathcal{M}(G, I, \Lambda; P)$, где $P = (\pi_\lambda \rho_i)$. (Сушкевич [1940a].)

---

[1]) В оригинале — inflation.— *Прим. перев.*

§ 3.3. Группоиды Брандта

В 1927 году Брандт [1927] ввел и определил строение бинарной системы, в которой произведение определено не всюду, но которая удовлетворяет некоторым довольно сильным аксиомам. Такая система, известная теперь под названием «группоида Брандта», является абстракцией системы нормальных идеалов полупростых линейных алгебр относительно «собственного» умножения. Детальное рассмотрение связи между группоидами Брандта и полупростыми линейными алгебрами проведено в гл. 6 (стр. 67—78) книги Дойринга (D e u r i n g M., Algebren, Berlin, 1935). Никаких знаний из этой области не потребуется для понимания настоящего параграфа.

Также в 1927 г. Лови [1927] рассмотрел частичные группоиды, которые он назвал *смешанными группами*. Понятие смешанной группы оказалось эквивалентным понятию группоида Брандта. Детальное изложение этого проведено в книге Сушкевича [1937], гл. 5, § 54—61.

Мы покажем, что если к группоиду Брандта B присоединить новый символ 0 и положить $ab = 0$ в случае, когда произведение ab в B не определено, то $B^0 = B \cup 0$ станет вполне 0-простой полугруппой особенно простого строения. Будем называть B^0 полугруппой Брандта. В представлении Риса (теорема 3.5) и в обозначениях, введенных в § 3.1, мы получим $B^0 \cong \mathcal{M}^0(G;\ I,\ I;\ \Delta)$, где G — некоторая группа, I — некоторое множество и сэндвич-матрица есть единичная матрица Δ над G^0. Последнее означает, что $\Delta = (\delta_{ij})$, где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} e, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j, \end{cases}$$

а e — единица группы G. Если $(a)_{ij}$ и $(b)_{kl}$ — произвольные элементы полугруппы $\mathcal{M}^0$, где $a,\ b \in G^0$ и $i,\ j,\ k,\ l \in I$, то

$$(a)_{ij} \circ (b)_{kl} = (a\delta_{jk}b)_{il} = \begin{cases} (ab)_{il}, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

В терминах исходного группоида Брандта B эти результаты можно выразить следующим образом. Элементы группоида B можно единственным образом представить как тройки $(a)_{ij}$, где $a \in G$ и $i,\ j \in I$. Каждая такая тройка является элементом группоида B. Произведение двух таких троек $(a)_{ij}$ и $(b)_{kl}$ равно $(ab)_{il}$, если $j = k$, и не определено, если $j \neq k$. Брандт получил эти результаты в работе [1927]. Мы получим их, применяя теорему Риса 3.5.

Группоидом Брандта называется частичный группоид B (см. § 1.1), удовлетворяющий следующим аксиомам:

(Б 1) Если $ab = c$ $(a, b, c \in B)$, то каждый из трех элементов a, b, c однозначно определяется двумя другими.

(Б 2) Пусть a, b, c — элементы группоида B.

(i) Если ab и bc определены, то $(ab)c$ и $a(bc)$ определены и равны.

(ii) Если ab и $(ab)c$ определены, то bc и $a(bc)$ определены и $a(bc) = (ab)c$.

(iii) Если bc и $a(bc)$ определены, то ab и $(ab)c$ определены и $(ab)c = a(bc)$.

(Б 3) Каждому элементу $a \in B$ соответствуют такие однозначно определенные элементы $e, f, a' \in B$, что $ea = af = a$ и $a'a = f$. (Эти элементы называются соответственно левой единицей элемента a, правой единицей элемента a и обратным элементом для a.)

(Б 4) Если $e^2 = e$ и $f^2 = f$ $(e, f \in B)$, то существует такой элемент $a \in B$, что $ea = af = a$.

Пусть 0 — символ, не являющийся элементом группоида B, и $B^0 = B \cup 0$. Определим произведение $(\circ)$ в B^0, полагая при $a, b \in B$

$$a \circ b = \begin{cases} ab, & \text{если } ab \text{ определено в } B; \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{1}$$

$$a \circ 0 = 0 \circ a = 0 \circ 0 = 0.$$

(Брандт предлагал в работе [1927] эту конструкцию, но не видел ее преимуществ.) Следующая лемма характеризует частичные группоиды, которые получаются из полугрупп с нулем при отбрасывании нуля. Эта лемма принадлежит Конраду [1957].

Лемма 3.7. *Пусть B — частичный группоид и $B^0 = B \cup 0$. Определим бинарную операцию $(\circ)$ в B при помощи формулы* (1). *Тогда B^0 является полугруппой относительно операции $(\circ)$ в том и только в том случае, когда B удовлетворяет аксиомам Брандта* Б2 (ii) *и* Б2 (iii).

Доказательство. Предположим, что выполняются аксиомы Б 2 (ii) и Б 2 (iii). Пусть $a, b, c \in B^0$. Если один из элементов a, b, c равен 0, то ввиду (1) как $a \circ (b \circ c)$, так и $(a \circ b) \circ c$ равно 0. Следовательно, мы можем предположить, что $a, b, c \in B$.

Если $a \circ (b \circ c) \neq 0$, то $b \circ c \neq 0$ и тогда из формулы (1) следует, что произведения bc и $a(bc)$ определены и равны соответственно $b \circ c$ и $a \circ (b \circ c)$. На основании Б 2 (iii) произведения ab и $(ab)c$ определены. Отсюда ввиду (1) $ab = a \circ b$ и $(ab)c = (a \circ b) \circ c$. Более того, из Б 2 (iii) следует, что $a(bc) = (ab)c$, т. е. в этом случае $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$. Аналогично, последнее равенство справедливо и при $(a \circ b) \circ c \neq 0$. Но в единственном оставшемся случае оба выражения $a \circ (b \circ c)$, $(a \circ b) \circ c$ равны 0, так что они равны всегда.

Обратно, предположим, что бинарная операция, заданная при помощи условия (1), ассоциативна. Пусть a, b, c — такие элементы частичного группоида B, что произведения bc и $a\,(bc)$ определены. Тогда ввиду (1) $b \circ c = bc$ и $a \circ (b \circ c) = a\,(bc) \neq 0$. По предположению $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$. Отсюда следует, что $(a \circ b) \circ c \neq 0$, и поэтому $a \circ b \neq 0$. В силу (1) мы заключаем, что произведения ab и $(ab)\,c$ определены в B и равны соответственно $a \circ b$ и $(a \circ b) \circ c$. Из равенства $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ следует, что $(ab)\,c = a\,(bc)$. Итак, мы показали, что выполняется утверждение Б 2 (iii). Утверждение Б 2 (ii) доказывается аналогично.

Полугруппой Брандта называется полугруппа $B^0 = B \cup 0$, которая получается из группоида Брандта присоединением нулевого элемента и произведение ($\circ$) в которой определено при помощи условия (1). Тот факт, что B^0 — полугруппа, следует из леммы 3.7. Опустим теперь символ ($\circ$), и следующим образом переформулируем аксиомы Б 1 — Б 4 на полугрупповом языке.

Полугруппа Брандта есть полугруппа S с нулем, удовлетворяющая следующим аксиомам:

(А 1) Если a, b, c — такие элементы полугруппы S, что $ac = bc \neq 0$ или $ca = cb \neq 0$, то $a = b$.

(А 2) Если a, b, c — такие элементы полугруппы S, что $ab \neq 0$ и $bc \neq 0$, то $abc \neq 0$.

(А 3) Каждому элементу $a \neq 0$ полугруппы S соответствуют: такой единственный элемент e из S, что $ea = a$; такой единственный элемент f из S, что $af = a$; такой единственный элемент a' из S, что $a'a = f$.

(А 4) Если e и f — ненулевые идемпотенты полугруппы S, то $eSf \neq 0$.

Прежде всего покажем, что аксиомы А 1 и А 2 суть следствия аксиомы А 3. Брандт знал, что его система аксиом не является независимой, поэтому в более поздней статье [1940] он привел несколько независимых систем аксиом.

Лемма 3.8. *Аксиомы* А 1 *и* А 2 — *следствия аксиомы* А 3. *Таким образом, полугруппа S с нулем является полугруппой Брандта тогда и только тогда, когда она удовлетворяет аксиомам* А 3 *и* А 4.

Доказательство. Предположим, что S удовлетворяет аксиоме А 3. Заметим сначала, что элементы e, f и a', указанные в А 3, удовлетворяют соотношениям

$$e^2 = e, \quad f^2 = f, \quad fa' = a'e = a', \quad aa' = e.$$

Первое следует из равенств $e^2a = ea = a$ и единственности элемента e, постулированной в А 3. Доказательство того, что $f^2 = f$, аналогично. Из равенств $a = af = aa'a$ и единственности элемента e вытекает, что $aa' = e$. Из равенств $a'ea = a'a = f$ и единственности a' вытекает, что $a'e = a'$. Доказательство того, что $fa' = a'$, аналогично. Из доказанных соотношений вытекает равенство $(a')' = a$.

Отметим, далее, что из $e^2 = e$, $f^2 = f$ и $ef \neq 0$ следует $e = f$. Действительно, a' — элемент, обратный для $a = ef$. Учитывая равенства $e = aa' = efa' = ea'$, заключаем, что $a' = e$. Следовательно, $a = (a')' = e' = e$. Учитывая равенства $ee = e = a = ef$, получаем, что $e = f$.

Легко видеть, что $ab \neq 0$ тогда и только тогда, когда правая единица элемента a совпадает с левой единицей элемента b. (Заметим, что из равенств $af = a$, $fb = b$, $a'a = f$ и $bb' = f$ вытекает $f = f^2 = a'(ab)b'$.)

Теперь мы в состоянии доказать А 1. Пусть $ac = bc \neq 0$. Тогда левая единица e элемента c является также правой единицей для элементов a и b. Если c' — элемент, обратный для c, то $cc' = e$ и потому $a = ae = acc' = bcc' = be = b$. Аналогично, $ca = cb \neq 0$ влечет за собой $a = b$.

Докажем А 2. Пусть $ab \neq 0$ и $bc \neq 0$. Тогда правая единица элемента a является левой единицей элемента b и, следовательно, левой единицей элемента bc. Таким образом, $a(bc) \neq 0$.

Эквивалентность условий (i) и (iii) следующей теоремы была впервые обнаружена Клиффордом [1942], а условий (ii) и (iii) — Манном [1957a].

Теорема 3.9. *Следующие три условия для полугруппы S с нулем эквивалентны:*

(i) *S — полугруппа Брандта;*

(ii) *S — вполне 0-простая инверсная полугруппа;*

(iii) *S изоморфна (регулярной) рисовской полугруппе матричного типа $\mathcal{M}^0(G; I, I; \Delta)$ с единичной сэндвич-матрицей Δ над группой с нулем G^0.*

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Покажем сначала, что полугруппа S 0-проста. Для этого в силу леммы 2.28 достаточно установить, что если a и b — ненулевые элементы полугруппы S, то существуют x, $y \in S$, для которых $yax = b$. Пусть e — левая единица элемента a и f — правая единица элемента b. Ввиду условия А 4 существует отличный от нуля элемент $c \in eSf$. Пусть a' — элемент, обратный для a, и c' — элемент, обратный для c. Тогда $aa' = e$ и $c'c = f$. Положим $x = a'c$ и $y = bc'$. Тогда $yax = bc'aa'c = bc'ec = bc'c = bf = b$.

Из аксиомы А 3 следует, что S содержит идемпотенты. Пусть e и f — такие идемпотенты полугруппы S, что $0 < f \leqslant e$. Из соотношений $ef = ff = f \neq 0$ и единственности в аксиоме А 3 мы заключаем, что $e = f$. Следовательно, e — примитивный идемпотент полугруппы S, т. е. S вполне 0-проста.

В силу А 3 ясно, что S регулярна ($aa'a = af = a$). Пусть R — ненулевой $\mathcal{R}$-класс полугруппы S и e, f — идемпотенты из S, содержащиеся в R. По лемме 2.14 $ef = f$. Отсюда, из аксиомы А 3 и равенства $ff = f$ вытекает, что $e = f$. Аналогично, каждый $\mathcal{L}$-класс полугруппы S содержит точно один идемпотент. В силу следствия 2.19 S есть инверсная полугруппа.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). По теореме Риса 3.5 S изоморфна регулярной рисовской полугруппе $\mathcal{M}^0$ (G; I, Λ; P).

Будем пользоваться обозначениями, принятыми перед леммой 3.2. На основании утверждения (iv) этой леммы $H_{i\lambda}$ содержит идемпотент тогда и только тогда, когда $p_{\lambda i} \neq 0$. По предположению S — инверсная полугруппа. Отсюда ввиду следствия 2.19 вытекает, что каждый $\mathcal{R}$-класс и каждый $\mathcal{L}$-класс полугруппы S содержит точно один идемпотент. Таким образом, каждая строка и каждый столбец матрицы P содержит точно один ненулевой элемент. Следовательно, I и Λ имеют одинаковые мощности и мы можем упорядочить их таким образом, чтобы ненулевые элементы матрицы P находились только на главной диагонали. Так как I и Λ — всего лишь множества индексов, мы можем считать, что $I = \Lambda$. Тогда $p_{ii} \neq 0$ для каждого $i \in I$ и $p_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Другими словами, P — диагональная матрица. В силу леммы 3.6 можно заменить $P = (p_{ji})$ на $P' = (p'_{ji}) = (v_j p_{ji} u_i)$, где u_i и v_j — произвольные элементы группы G. Положив $u_i = p_{ii}^{-1}$ и $v_j = e$, получим $P' = \Delta$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Взяв $S = \mathcal{M}^0$ (G; I, I; Δ), в силу леммы 3.8 достаточно доказать выполнения условий А 3 и А 4. Для доказательства А 3 зафиксируем ненулевой элемент $(a)_{ij}$ полугруппы S. Тогда $(x)_{kl}\,(a)_{ij} = (x\delta_{li}a)_{kj} = (a)_{ij}$ в том и только в том случае, когда $k = i$, $l = i$ и $xa = a$, т. е. $(x)_{kl}\,(a)_{ij} = (a)_{ij}$ тогда и только тогда, когда $(x)_{kl} = (e)_{ii}$. Аналогично, $(e)_{jj}$ — единственная правая единица элемента $(a)_{ij}$ и $(a^{-1})_{ji}$ — единственный обратный элемент для $(a)_{ij}$. А 4 выполняется, так как $(e)_{ii}\,S\,(e)_{jj}$ содержит ненулевой элемент $(e)_{ij}$.

Упражнения к § 3.3

1. Аксиома А 3 эквивалентна следующему утверждению: каждому элементу $a \neq 0$ полугруппы S соответствует единственный элемент a', такой, что $aa'a = a$.

2. Полугруппа S с нулем удовлетворяет аксиоме А 3 тогда и только тогда, когда S — инверсная полугруппа, в которой каждый ненулевой идемпотент примитивен.

Отсюда следует, что полугруппы Брандта могут быть охарактеризованы как инверсные полугруппы, удовлетворяющие аксиоме А 4, в которых каждый ненулевой идемпотент примитивен. При замене слова «инверсные» на «регулярные» мы получаем характеризацию вполне 0-простых полугрупп (ср. с упражнением 11 к § 2.7).

3. Каждый главный фактор конечной инверсной полугруппы является полугруппой Брандта (Манн [1955b]).

4. Назовем *частичной группой* частичный группоид, удовлетворяющий аксиомам Брандта Б 1, Б 2, Б 3. Ввиду упражнения 2 и леммы 3.8 частичная группа равна $S \setminus 0$, где S — некоторая инверсная полугруппа, в которой каждый ненулевой идемпотент примитивен.

(a) Пусть ρ — отношение эквивалентности на множестве X. Определим на нем умножение, полагая $(x, y)(w, z) = (x, z)$, если $y = w$ и $(x, z) \in \rho$, и считая в противном случае, что это произведение не определено ($x, y, w, z \in X$). Тогда ρ — частичная группа.

(b) Только что определенная частичная группа является группоидом Брандта тогда и только тогда, когда ρ — универсальное отношение ω на X. (Круазо [1948a], а также Круазо [1948b].)

§ 3.4. *Гомоморфизмы регулярных рисовских полугрупп матричного типа*

Гомоморфный образ полугруппы будем называть *нетривиальным*, если его порядок больше 1. Пусть S — регулярная рисовская полугруппа матричного типа. Из леммы 3.10, приведенной ниже, и теоремы Риса 3.5 следует, что каждый нетривиальный гомоморфный образ полугруппы S изоморфен регулярной рисовской полугруппе матричного типа. Цель этого параграфа — определить все гомоморфизмы полугруппы S в рисовскую полугруппу матричного типа S^*; при этом S^* не предполагается регулярной. Основным результатом является теорема 3.11, принадлежащая Манну [1955a] [1]). Она обобщает более раннюю теорему Риса [1940], которую мы выведем в качестве следствия 3.12.

Лемма 3.10. *Пусть θ — нетривиальный гомоморфизм вполне 0-простой полугруппы S на полугруппу S'. Тогда θ отображает ненулевые элементы полугруппы S на ненулевые элементы полугруппы S' и S' — также вполне 0-простая полугруппа.*

Доказательство. Очевидно, $0' = 0\theta$ — нуль полугруппы S' и $0'\theta^{-1}$ — идеал полугруппы S. Если $0'\theta^{-1} = S$, то $S' = S\theta = 0'$, т. е. θ — тривиальный гомоморфизм. Следовательно, $0'\theta^{-1} = 0$ и поэтому $a \in S \setminus 0$ влечет за собой $a\theta \in S' \setminus 0$.

Пусть $a', b' \in S'$ и $a' \neq 0'$. Так как $S' = S\theta$, существуют такие $a, b \in S$, что $a\theta = a'$ и $b\theta = b'$. Ясно, что $a \neq 0$, откуда

[1]) Этот результат ранее был получен Л. М. Глускиным в диссертации 1951 г. и опубликован в его работе [1956] (см. также замечание авторов в § 10.7).—*Прим. ред.*

в силу леммы 2.28 следует существование таких $x, y \in S$, что $xay = b$. Тогда $b' = x'a'y'$, где $x' = x\theta$, $y' = y\theta$, и снова в силу леммы 2.28 полугруппа S' 0-проста.

По теореме 2.48 S обладает 0-минимальным правым идеалом R. На основании предыдущего $R\theta \neq 0'$. Легко видеть, что $R\theta$ есть 0-минимальный правый идеал полугруппы S'. Аналогично, S' обладает 0-минимальным левым идеалом. Снова применяя теорему 2.48, заключаем, что S вполне 0-проста.

Теорема 3.11. *Пусть $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ — рисовская полугруппа матричного типа с сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$ над группой с нулем G^0, а $S^* = \mathcal{M}^0(G^*; I^*, \Lambda^*; P^*)$ — рисовская полугруппа матричного типа с сэндвич-матрицей $P^* = (p^*_{\lambda^* i^*})$ над группой с нулем $(G^*)^0$.*

Пусть $i \to u_i$ и $\lambda \to v_\lambda$ — отображения множеств I и Λ соответственно в G^*, а φ и ψ — отображения соответственно I в I^* и Λ в Λ^*. Пусть ω — нетривиальный гомоморфизм G^0 в $(G^*)^0$, причем

$$p_{\lambda i}\omega = v_\lambda p^*_{\lambda\psi,\, i\varphi} u_i \tag{1}$$

для всех $\lambda \in \Lambda$ и $i \in I$. Для каждого элемента $(a; i, \lambda) \in S$ положим

$$(a; i, \lambda)\,\theta = [u_i\,(a\omega)\,v_\lambda;\ i\varphi,\ \lambda\psi] \tag{2}$$

(квадратные скобки используются для обозначения элементов полугруппы S^*). Тогда θ — нетривиальный гомоморфизм полугруппы S в S^*. Обратно, если S регулярна, то каждый нетривиальный гомоморфизм полугруппы S в S^* получается указанным способом.

Доказательство. Пусть $(a; i, \lambda)$ и $(b; j, \mu)$ — элементы полугруппы S. Тогда в силу соотношений (1) и (2) имеем

$$\begin{aligned}
((a; i, \lambda) \circ (b; j, \mu))\,\theta &= (ap_{\lambda j}b;\ i, \mu)\,\theta = \\
&= [u_i\,(ap_{\lambda j}b)\,\omega v_\mu;\ i\varphi,\ \mu\psi] = \\
&= [u_i\,(a\omega)\,(p_{\lambda j}\omega)\,(b\omega)\,v_\mu;\ i\varphi,\ \mu\psi] = \\
&= [u_i\,(a\omega)\,v_\lambda p^*_{\lambda\psi, j\varphi} u_j\,(b\omega)\,v_\mu;\ i\varphi,\ \mu\psi] = \\
&= [u_i\,(a\omega)\,v_\lambda;\ i\varphi,\ \lambda\psi] \circ [u_j\,(b\omega)\,v_\mu;\ j\varphi,\ \mu\psi] = \\
&= (a; i, \lambda)\,\theta \circ (b; j, \mu)\,\theta.
\end{aligned}$$

Так как по предположению ω — нетривиальный гомоморфизм, ω переводит нуль полугруппы G^0 в нуль полугруппы $(G^*)^0$ и отображает G в G^*. Отсюда в силу (2) следует, что θ — нетривиальный гомоморфизм.

Обратно, пусть θ — нетривиальный гомоморфизм S в S^*. Предположим, что полугруппа S регулярна. Если 0 — нуль полугруппы S, то 0θ — идемпотент из S^*. Если 0θ не является нулем полугруппы S^*, то по лемме 3.2 $0\theta = [p^{*-1}_{\lambda^* i^*};\ i^*, \lambda^*]$ для некоторых $i^* \in I^*$, $\lambda^* \in \Lambda^*$. Очевидно, 0θ — нуль полугруппы $S\theta$. Следовательно, для любого $[x;\ j^*,\ \mu^*] \in S\theta$ имеем

$$[x;\ j^*,\ \mu^*] \circ 0\theta = 0\theta = 0\theta \circ [x;\ j^*,\ \mu^*].$$

Отсюда вытекает, что $j^* = i^*$, $\mu^* = \lambda^*$ и $x = p^{*-1}_{\lambda^* i^*}$. Таким образом, $S\theta$ состоит из одного элемента, что противоречит предположению. Итак, 0θ — нуль полугруппы S^*. Кроме того, по лемме 3.10 θ отображает ненулевые элементы из S в ненулевые элементы из S^*.

Очевидно, что любой гомоморфизм одной полугруппы в другую отображает $\mathcal{R}$-эквивалентные [$\mathcal{L}$-эквивалентные] элементы в $\mathcal{R}$-эквивалентные [$\mathcal{L}$-эквивалентные] элементы. Будем использовать введенные перед леммой 3.2 обозначения R_i $(i \in I)$ и L_λ $(\lambda \in \Lambda)$, относящиеся к полугруппе S, и обозначения $R^*_{i^*}$ $(i^* \in I^*)$ и $L^*_{\lambda^*}$ $(\lambda^* \in \Lambda^*)$, относящиеся к полугруппе S^*. По лемме 3.2 (ii) ввиду регулярности S каждое R_i является $\mathcal{R}$-классом полугруппы S, и поэтому $R_i\theta$ содержится в некотором $\mathcal{R}$-классе полугруппы S^*. По лемме 3.2 (i), примененной к S^*, имеем $R_i\theta \subseteq R^*_{i^*}$ при некотором $i^* \in I^*$. Так как $R_i\theta \neq 0$, $i \to i^*$ есть отображение φ множества I в I^*. Аналогично, $L_\lambda\theta \subseteq L^*_{\lambda^*}$ при некотором $\lambda^* \in \Lambda^*$ и $\lambda \to \lambda^*$ есть отображение ψ множества Λ в Λ^*. Из $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$ следует, что $H_{i\lambda}\theta \subseteq R^*_{i\varphi} \cap L^*_{\lambda\psi}$.

Выберем теперь какой-либо $\mathcal{H}$-класс H_{11} полугруппы S, содержащий идемпотент e_{11}. Тогда H_{11} — подгруппа полугруппы S, изоморфная G, и $p_{11} \neq 0$. Очевидно, $e_{11}\theta$ — ненулевой идемпотент полугруппы S^*, принадлежащий $R^*_{1\varphi} \cap L^*_{1\psi}$, и на основании леммы 3.2 (iv) $p^*_{1\psi,\,1\varphi} \neq 0$ и $H^*_{1\varphi,\,1\psi} = R^*_{1\varphi} \cap L^*_{1\psi}$ есть $\mathcal{H}$-класс полугруппы S^*, являющийся подгруппой, изоморфной G^*. Равенство

$$(p_{11}^{-1}x;\ 1,\ 1)\,\theta = [p^{*-1}_{1\psi,\,1\varphi}(x\omega);\ 1\varphi,\ 1\psi] \tag{3}$$

определяет отображение ω группы G в G^*. Если x, y — элементы группы G, то

$$\begin{aligned}
&[p^{*-1}_{1\psi,\,1\varphi}(xy)\,\omega;\ 1\varphi,\ 1\psi] = (p_{11}^{-1}xy;\ 1,\ 1)\,\theta = \\
&= ((p_{11}^{-1}x;\ 1,\ 1) \circ (p_{11}^{-1}y;\ 1,\ 1))\,\theta = \\
&= (p_{11}^{-1}x;\ 1,\ 1)\,\theta \circ (p_{11}^{-1}y;\ 1,\ 1)\,\theta = \\
&= [p^{*-1}_{1\psi,\,1\varphi}(x\omega);\ 1\varphi,\ 1\psi] \circ [p^{*-1}_{1\psi,\,1\varphi}(y\omega);\ 1\varphi,\ 1\psi] = \\
&= [p^{*-1}_{1\psi,\,1\varphi}(x\omega)\,(y\omega);\ 1\varphi,\ 1\psi],
\end{aligned}$$

откуда $(xy)\,\omega = (x\omega)\,(y\omega)$, т. е. ω — гомоморфизм группы G в G^*.

Распространим ω на G^0, полагая 0ω равным нулю полугруппы $(G^*)^0$.

Теперь определим элементы u_i $(i \in I)$ и v_λ $(\lambda \in \Lambda)$ из G^* при помощи равенств

$$(e;\ i,\ 1)\,\theta = [u_i;\ i\varphi,\ 1\psi], \tag{4}$$

$$(p_{11}^{-1};\ 1,\ \lambda)\,\theta = [p^{*-1}_{1\psi,\,1\varphi} v_\lambda;\ 1\varphi,\ \lambda\psi]. \tag{5}$$

Для любого элемента $(a;\ i,\ \lambda) \in S$ имеем

$$(a;\ i,\ \lambda) = (e;\ i,\ 1) \circ (p_{11}^{-1}a;\ 1,\ 1) \circ (p_{11}^{-1};\ 1,\ \lambda).$$

Применяя гомоморфизм θ и используя (3), (4), (5), получаем

$$(a;\ i,\ \lambda)\,\theta = [u_i;\ i\varphi,\ 1\psi] \circ [p^{*-1}_{1\psi,\,1\varphi}(a\omega);\ 1\varphi,\ 1\psi] \circ [p^{*-1}_{1\psi,\,1\varphi} v_\lambda;\ 1\varphi,\ \lambda\psi].$$

Это равенство, очевидно, сводится к равенству (2).

Из (2) мы выводим

$$((e;\ i,\ \lambda) \circ (e;\ i,\ \lambda))\,\theta = (p_{\lambda i};\ i,\ \lambda)\,\theta = [u_i\,(p_{\lambda i}\omega)\,v_\lambda;\ i\varphi,\ \lambda\psi]$$

и

$$(e;\ i,\ \lambda)\,\theta \circ (e,\ i,\ \lambda)\,\theta = [u_i v_\lambda;\ i\varphi,\ \lambda\psi] \circ [u_i v_\lambda;\ i\varphi,\ \lambda\psi] = \\ = [u_i v_\lambda p^*_{\lambda\psi,\,i\varphi} u_i v_\lambda;\ i\varphi,\ \lambda\psi].$$

Так как θ — гомоморфизм полугруппы S в S^*, мы заключаем, что

$$u_i\,(p_{\lambda i}\omega)\,v_\lambda = u_i v_\lambda p^*_{\lambda\psi,\,i\varphi} u_i v_\lambda,$$

откуда вытекает равенство (1).

Приступим теперь к выводу следствия и двух дополнительных теорем. Следствие 3.12 и есть по существу теорема Риса ([1940, стр. 397). Назовем $I \times I^*$-матрицу U над группой с нулем G^0 *инвертируемой*, если каждая строка и каждый столбец матрицы U содержит точно один ненулевой элемент полугруппы G^0. Если $I \times I^*$-матрица инвертируема, то, очевидно, $|I| = |I^*|$. Если ω — гомоморфизм группы с нулем G^0 в группу с нулем $(G^*)^0$ и $P = (p_{\lambda i})$ — произвольная $\Lambda \times I$-матрица над G^0, то через $P\omega$ будем обозначать $\Lambda \times I$-матрицу $(p_{\lambda i}\omega)$.

Следствие 3.12. *Две регулярные рисовские полугруппы матричного типа $\mathscr{M}^0(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$ и $\mathscr{M}^0(G^*;\ I^*,\ \Lambda^*;\ P^*)$ изоморфны тогда и только тогда, когда существует изоморфизм ω, отображающий G^0 на $(G^*)^0$, и такие инвертируемые $I^* \times I$-матрица U и $\Lambda \times \Lambda^*$-матрица V, что $P\omega = VP^*U$.*

Доказательство. Заметим, что если в теореме 3.11 θ есть изоморфизм полугруппы S на S^*, то φ и ψ взаимно однозначны и являются отображениями на соответствующие множества. В самом деле, θ индуцирует взаимно однозначное отображение $\mathscr{R}$-классов [$\mathscr{L}$-классов] полугруппы S на $\mathscr{R}$-классы [$\mathscr{L}$-классы] полугруппы S^*. Определим $I^* \times I$-матрицу $U =$

$= (u_{i^*,\, j})$, полагая

$$u_{i^*,\, j} = \begin{cases} u_j, \text{ если } i^* = j\varphi, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (6)$$

Определим $\Lambda \times \Lambda^*$-матрицу $V = (v_{\lambda,\, \mu^*})$, полагая

$$v_{\lambda,\, \mu^*} = \begin{cases} v_\lambda, \text{ если } \mu^* = \lambda\psi, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases} \qquad (7)$$

Тогда $P\omega = VP^*U$.

Обратно, пусть существует изоморфизм ω группы с нулем G^0 на $(G^*)^0$ и такие инвертируемые матрицы U и V, что $P\omega = VP^*U$. Пусть u_j — ненулевой элемент группы с нулем $(G^*)^0$ из j-го столбца матрицы U. Пусть u_j лежит в i^*-й строке. Тогда отображение $j \to i^*$ есть взаимно однозначное отображение φ множества I на I^* и выполняется условие (6). Аналогично выполняется условие (7) при подходящем выборе v_λ и ψ. Тогда равенство $P\omega = VP^*U$ приводит к равенству (1). Так как φ, ψ и ω взаимно однозначны и являются отображениями на соответствующие множества, равенство (2) определяет взаимно однозначное отображение θ полугруппы S на S^*, которое по теореме 3.11 является изоморфизмом.

Из следствия 3.12 вытекает, что если в полугруппе $S = \mathcal{M}^0(G;\, I,\, \Lambda;\, P)$ мы заменим P на $P^* = V^{-1}(P\omega)\, U^{-1}$, то получим лишь другое представление S как рисовской полугруппы. Обратно, следствие 3.12 показывает, что только такие преобразования матрицы P не меняют полугруппы S.

Обратное утверждение следствия 3.12 справедливо и для иррегулярной полугруппы S. «Координатизируем» S при помощи троек $(a;\, i,\, \lambda)$, где a пробегает G^0, i пробегает I и λ пробегает Λ, и введем новые координаты $(a;\, i,\, \lambda)'$ следующим образом: пусть U и V — инвертируемые $I \times I$-матрица и $\Lambda \times \Lambda$-матрица соответственно над G^0 и

$$U = (u_{i\varphi,\, i}), \quad V = (v_{\lambda,\, \lambda\psi}),$$

где φ $[\psi]$ — подстановка на I $[\Lambda]$, и пусть ω — автоморфизм группы с нулем G^0. Тогда положим

$$(a;\, i,\, \lambda)' = (u_{i\varphi,\, i}\, (a\omega)\, v_{\lambda,\, \lambda\psi};\ i\varphi,\ \lambda\psi). \qquad (8)$$

Прямыми вычислениями мы находим, что

$$(a;\, i,\, \lambda)' \circ (b;\, j,\, \mu)' = (aq_{\lambda j}b;\, i,\, \mu)', \qquad (9)$$

где

$$q_{\lambda j} = (v_{\lambda,\, \lambda\psi}\, p_{\lambda\psi,\, j\varphi}\, u_{j\varphi,\, j})\, \omega^{-1}. \qquad (10)$$

Следовательно, новые тройки $(a;\, i,\, \lambda)'$ перемножаются относительно бинарной операции $(\circ)$, заданной в S, точно так же, как тройки Риса с сэндвич-матрицей

$$Q = (VPU)\,\omega^{-1}. \tag{10'}$$

Поэтому запись $S = \mathcal{M}^0(G;\ I,\ \Lambda;\ Q)$ полностью оправдана. Подчеркнем, что при такой записи не происходит изменений в определении операции в S, а лишь меняются координаты элементов полугруппы S, так что S предстает перед нами как рисовская полугруппа матричного типа с сэндвич-матрицей Q вместо P. Будем называть тройки $(a;\ i,\ \lambda)'$ *координатами элементов полугруппы S относительно матрицы Q*.

Вывод равенства (9) из равенства (8) упростится, если записать эти равенства в матричной форме. Для каждой $I \times \Lambda$-матрицы A положим

$$A' = U\,(A\omega)\,V. \tag{8'}$$

Тогда

$$A'PB' = (AQB)', \tag{9'}$$

где Q задается условием (10′). В своей диссертации [1960] Тулли дает интерпретацию замены A на A' (и «контраградиентной» замены P на Q) по аналогии с заменой, которая происходит при матричном представлении линейного отображения одного векторного пространства в другое при смене базисов у этих пространств.

Следующая теорема не зависит, однако, от того, как мы будем интерпретировать замену координат (8). Более того, нам понадобится лишь случай, когда U и V — диагональные матрицы и ω — тождественный автоморфизм. Этот частный случай был впервые рассмотрен нами в лемме 3.6 и был использован для «нормализации» сэндвич-матрицы. Нужно заметить, что при помощи нормализации матрицы P в упражнении 1 к этому параграфу удается привести простое выражение для всех гомоморфизмов заданной вполне простой полугруппы S в заданную группу G^*, тогда как нормализация матриц P и P^* в теореме 3.13 (см. далее), которая исключает u_i и v_λ из выражений для гомоморфизма θ, зависит от самого гомоморфизма θ. Нам неизвестно, всегда ли существует нормализация, пригодная для всех θ, но кажется, что ответ на этот вопрос должен быть отрицательным.

Теорема 3.13. *Пусть S и S^* — те же полугруппы, что и в теореме* 3.11, *и θ — нетривиальный гомоморфизм полугруппы S в S^*. Пусть объекты φ, ψ, ω, u_i и v_λ определены при помощи θ, как и в теореме* 3.11, *так что имеют место равенства* (1) *и* (2). *Тогда можно выбрать новые сэндвич-матрицы Q для S и Q^* для S^*, для которых*

$$q_{\lambda i}\omega = q^*_{\lambda\psi,\, i\varphi} \quad (\textit{при любых } \lambda \in \Lambda,\ i \in I) \tag{1'}$$

и

$$(a;\ i,\ \lambda)'\,\theta = [a\omega;\ i\varphi,\ \lambda\psi]', \tag{2'}$$

где штрихи указывают на то, что координаты элементов полугрупп S и S^* берутся относительно матриц Q и Q^* соответственно.

Отсюда следует, что $S\theta$ есть регулярная рисовская полугруппа матричного типа $\mathcal{M}^0(G';\ I',\ \Lambda';\ Q')$, где $G' = G\omega$, $I' = I\varphi$, $\Lambda' = \Lambda\psi$ и Q' является $\Lambda' \times I'$-подматрицей матрицы Q^*.

Доказательство. Пусть для каждого i^* из $I\varphi$ элемент i_0 выбран в I так, что $i_0\varphi = i^*$. Через α обозначим отображение $i^* \to i_0$. Легко видеть, что α — такое отображение $I\varphi$ в I, что для каждого $i^* \in I\varphi$ выполняется равенство $i^*\alpha\varphi = i^*$. Аналогично, пусть β — такое отображение $\Lambda\psi$ в Λ, что $\beta\psi$ — тождественное преобразование множества $\Lambda\psi$. Пусть

$$u_{i^*} = u_{i^*\alpha}, \qquad v_{\lambda^*} = v_{\lambda^*\beta}.$$

Для $i^* \in I^* \setminus I\varphi$ и $\lambda^* \in \Lambda^* \setminus \Lambda\psi$ элементы u_{i^*} и v_{λ^*} положим равными e^* (единице группы G^*). Наконец, пусть

$$q^*_{\lambda^*,\, i^*} = v_{\lambda^*} p^*_{\lambda^*,\, i^*} u_{i^*} \quad (\text{при любых } \lambda^* \in \Lambda^*,\ i^* \in I^*).$$

Как было отмечено выше, $S^* = \mathcal{M}^0(G^*;\ I^*,\ \Lambda^*;\ Q^*)$, где $Q^* = (q^*_{\lambda^*, i^*})$.

Пусть i — произвольный элемент множества I и $i_0 = i\varphi\alpha$. Тогда $i\varphi = i_0\varphi$. Так как по предположению полугруппа S регулярна, существует такое $\lambda \in \Lambda$, что $p_{\lambda i_0} \neq 0$. В силу формулы (1) имеем

$$p_{\lambda i}\omega = v_\lambda p^*_{\lambda\psi,\, i\varphi} u_i$$

и

$$p_{\lambda i_0}\omega = v_\lambda p^*_{\lambda\psi,\, i_0\varphi} u_{i_0}.$$

Из равенства $i\varphi = i_0\varphi$ следует, что

$$(p_{\lambda i}\omega)\, u_i^{-1} = (p_{\lambda i_0}\omega)\, u_{i_0}^{-1},$$

т. е. $p_{\lambda i} \neq 0$ и

$$u_{i_0}^{-1} u_i = (p_{\lambda i_0}\omega)^{-1} (p_{\lambda i}\omega) = (p_{\lambda i_0}^{-1} p_{\lambda i})\, \omega.$$

Таким образом, $u_{i_0}^{-1} u_i \in G\omega$. Выберем для каждого $i \in I$ такой элемент $x_i \in G$, что $u_{i_0}^{-1} u_i = x_i\omega$. Так как $u_{i_0} = u_{i\varphi\alpha} = u_{i\varphi}$, то

$$u_i = u_{i\varphi}(x_i\omega).$$

Аналогично, для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует такое $y_\lambda \in G$, что

$$v_\lambda = (y_\lambda\omega)\, v_{\lambda\psi}.$$

Положим

$$q_{\lambda i} = y_\lambda^{-1} p_{\lambda i} x_i^{-1}.$$

Тогда $S=\mathscr{M}^0(G;\ I,\ \Lambda;\ Q)$, где $Q=(q_{\lambda i})$ и

$$\begin{aligned} q_{\lambda i}\omega &= (y_\lambda\omega)^{-1}(p_{\lambda i}\omega)(x_i\omega)^{-1} = \\ &= v_{\lambda\psi}v_\lambda^{-1}(p_{\lambda i}\omega)u_i^{-1}u_{i\varphi} = \\ &= v_{\lambda\psi}p^*_{\lambda\psi,\,i\varphi}u_{i\varphi} = q^*_{\lambda\psi,\,i\varphi}, \end{aligned}$$

что устанавливает справедливость условия (1′).

В соответствии с равенством (8) в данной ситуации координаты элементов полугрупп S и S^* относительно Q и Q^* задаются при помощи соотношений

$$(a;\ i,\ \lambda)' = (x_i^{-1}ay_\lambda^{-1};\ i,\ \lambda)$$

и

$$[a^*;\ i^*,\ \lambda^*]' = [u_{i^*}a^*v_{\lambda^*};\ i^*,\ \lambda^*]$$

соответственно. Таким образом, в силу (2) имеем

$$\begin{aligned} (a;\ i,\ \lambda)'\,\theta &= [u_i(x_i^{-1}ay_\lambda^{-1})\,\omega v_\lambda;\ i\varphi,\ \lambda\psi] = \\ &= [u_i(x_i\omega)^{-1}(a\omega)(y_\lambda\omega)^{-1}v_\lambda;\ i\varphi,\ \lambda\psi] = \\ &= [u_{i\varphi}(a\omega)v_{\lambda\psi};\ i\varphi,\ \lambda\psi] = \\ &= [a\omega;\ i\varphi,\ \lambda\psi]'. \end{aligned}$$

Последнее утверждение теоремы теперь очевидно; заметим лишь следующее: условие (1′) показывает, что каждый элемент матрицы Q' лежит в G'^0 и Q' регулярна.

Следующая теорема является модификацией теоремы 3.11 и будет использована нами в теории расширений (§ 4.5).

Теорема 3.14. *Если в условии теоремы* 3.11 *мы предположим, что равенство* (1) *выполняется при* $p_{\lambda i}\neq 0$ *и не обязательно выполняется при* $p_{\lambda i}=0$, *то отображение* θ, *определенное при помощи равенства* (2), *является частичным гомоморфизмом* $S\setminus 0$ *в* $S^*\setminus 0$. *Обратно, если* S *регулярна, то каждый частичный гомоморфизм* $S\setminus 0$ *в* $S^*\setminus 0$ *получается таким образом.*

Доказательство. Пусть $(a;\ i,\ \lambda)$ и $(b;\ j,\ \mu)$ — элементы из $S\setminus 0$. Если

$$(a;\ i,\ \lambda)\circ(b;\ j,\ \mu)\in S\setminus 0,$$

то $p_{\lambda j}\neq 0$. Следовательно, для λ и j выполняется условие (1). Дальнейшая часть доказательства первого утверждения теоремы 3.14 совпадает с доказательством первого утверждения теоремы 3.11.

Обратно, предположим, что полугруппа S регулярна и θ — частичный гомоморфизм $S\setminus 0$ в $S^*\setminus 0$. Тривиально, что θ переводит ненулевые элементы полугруппы S в ненулевые элементы полугруппы S^*. Если A и B — такие различные элементы из S, что $A\mathscr{R}B$, то $AX = B$ и $BY = A$ при некоторых $X, Y \in S \setminus 0$. Тогда $(A\theta)(X\theta) = B\theta$ и $(B\theta)(Y\theta) = A\theta$, т. е. $(A\theta)\ \mathscr{R}\ (B\theta)$ в полугруппе $S^* \setminus 0$. Дальнейшая часть доказательства равенства (2) проводится точно так же, как в теореме 3.11. Далее, предположим, что $p_{\lambda i} \neq 0$ при некотором $\lambda \in \Lambda$ и некотором $i \in I$. Тогда, очевидно, $(e;\ i,\ \lambda) \circ (e;\ i,\ \lambda) \neq 0$, и доказательство равенства (1) проводится точно так же, как в теореме 3.11.

Упражнения к § 3.4

1. (a) Пусть S — рисовская полугруппа матричного типа $\mathscr{M}(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$ без нуля с сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$ над группой G, и пусть G^*— группа. Предположим, кроме того, что матрица P нормализована, т. е. $p_{\lambda 1} = p_{1 i} = e$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и $i \in I$, где e — единица группы G (так всегда можно сделать в силу леммы 3.6). Пусть ω — гомоморфизм группы G в G^*, причем $p_{\lambda i}\omega = e^*$ для всех $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$, где e^* — единица группы G^*. Тогда равенство $(a;\ i,\ \lambda)\ \theta = a\omega$ определяет гомоморфизм θ полугруппы S в G^*, и каждый гомоморфизм полугруппы S в G^* получается указанным способом.

(b) Пусть мы находимся в условиях упражнения 1 (a) и N — нормальный делитель группы G, порожденный элементами матрицы P. Тогда $S\theta$ является гомоморфным образом группы G/N, т. е. G/N — максимальный групповой гомоморфный образ (§ 1.5) полугруппы S. (Столл [1951].)

§ 3.5. *Представления Шютценберже*

Пусть S — полугруппа, G — группа и I — множество. Под *представлением* M полугруппы S $I \times I$-матрицами над G^0 мы понимаем такое отображение $s \to M(s)$ полугруппы S в множество всех $I \times I$-матриц над G^0, что если s и t — произвольные элементы полугруппы S, то произведение $M(s)\,M(t)$ матриц $M(s)$ и $M(t)$ определено и равно $M(st)$. Если $M(s)\,M(t) = M(ts)$ вместо $M(st)$, то M называется *антипредставлением*.

Мы не будем рассматривать здесь общую теорию таких представлений, развитие которой было начато Тулли [1960], а изучим лишь некоторые представления такого типа, открытые Шютценберже [1957a]. В его статье содержатся излишние ограничения, которые позднее были сняты Престоном [1958]. Некоторое обобщение см. в статье Шютценберже [1958].

Для каждого $\mathscr{D}$-класса D полугруппы S существует одно представление Шютценберже M_D и одно антипредставление M'_D полугруппы S. Последнее можно превратить в представление M^*_D, которое мы назовем *двойственным представлением Шютценберже* полугруппы S, соответствующим D.

Лемма 3.15. *Пусть H есть $\mathscr{H}$-класс полугруппы S и R [L] — ее $\mathscr{R}$-класс [$\mathscr{L}$-класс], содержащий H.*

(i) *Для каждого $s \in S$ либо $Hs \cap R = \varnothing$, либо Hs есть $\mathscr{H}$-класс, содержащийся в R, а Ls есть $\mathscr{L}$-класс, содержащий Hs.*

(ii) *Если $Hs \cap R = \varnothing$, то $Hst \cap R = \varnothing$ для любого $t \in S$.*

Доказательство. (i) Предположим, что $Hs \cap R \neq \varnothing$. Пусть $b \in Hs \cap R$. Тогда $b = as$ для некоторого $a \in H$. Так как $a\mathscr{R}b$, то $a = bs'$ при некотором $s' \in S$. По лемме Грина (2.2) отображение $x \to xs$ сохраняет $\mathscr{R}$-классы и взаимно однозначно отображает L_a на L_b. Следовательно, $Hs = H_b \subseteq R$ и $LS = L_b \supseteq H_b$.

(ii) Пусть $Hst \cap R \neq \varnothing$ и $b \in Hst \cap R$. Тогда $b = ast$ при некотором $a \in H$. Так как $b\mathscr{R}a$, то $a = bt'$ при некотором $t' \in S$. Равенства $b = (as)\,t$ и $as = b\,(t's)$ влекут за собой $b\ \mathscr{R}as$, откуда $as \in Hs \cap R$, что противоречит условию $Hs \cap R = \varnothing$.

Пусть D — некоторый $\mathscr{D}$-класс полугруппы S, а $\{R_i \mid i \in I\}$ и $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — соответственно ее $\mathscr{R}$-классы и $\mathscr{L}$-классы, содержащиеся в D. Тогда $\mathscr{H}$-классы полугруппы S, содержащиеся в D, суть множества $H_{i\lambda} = R_i \cap L_\lambda$ ($i \in I$, $\lambda \in \Lambda$). Предположим, что I и Λ имеют общий элемент 1. Это не уменьшает общности. Мы просто выделяем один $\mathscr{H}$-класс $H = H_{11}$ полугруппы S, содержащийся в D, который в дальнейшем будет играть особую роль.

Для каждого $\lambda \in \Lambda$ выберем элемент h_λ из $H_{1\lambda}$. Так как $h_\lambda\mathscr{R}h_1$, существуют такие элементы q_λ, $q'_\lambda \in S^1$, что $h_\lambda = h_1 q_\lambda$ и $h_1 = h_\lambda q'_\lambda$. По лемме Грина 2.2 отображения $x \to xq_\lambda$ и $y \to yq'_\lambda$ суть взаимно обратные взаимно однозначные отображения классов L_1 и L_λ друг на друга, сохраняющие $\mathscr{R}$-классы. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ выберем и зафиксируем такие элементы q_λ и q'_λ из S^1. Двойственным образом, для каждого $i \in I$ существуют такие элементы r_i и r'_i полугруппы S^1, что отображения $x \to r_i x$ и $y \to r'_i y$ суть взаимно обратные взаимно однозначные отображения R_1 и R_i друг на друга, сохраняющие $\mathscr{L}$-классы. Для каждого $i \in I$ выберем и зафиксируем такие элементы r_i и r'_i. (В отличие от ситуации из § 3.2 мы не можем предположить, что q_λ, q'_λ, r_i и r'_i принадлежат D.)

Как и в § 2.4, пусть $T(H)$ — множество всех элементов $t \in S^1$, для которых $Ht \subseteq H$, и $\gamma_t = \rho_t \mid H$. Множество $\Gamma(H)$ всех γ_t, где t пробегает $T(H)$, является группой Шютценберже $\mathscr{H}$-класса H (теорема 2.22). Двойственно, пусть $T'(H)$ — множество всех элементов $u \in S^1$, для которых $uH \subseteq H$, и $\gamma'_u = \lambda_u \mid H$. Множество $\Gamma'(H)$ всех γ'_u, когда u пробегает $T'(H)$, является двойственной группой Шютценберже $\mathscr{H}$-класса H, антиизоморфной группе $\Gamma(H)$ по теореме 2.24. В дальнейшем нам будет удобнее писать $\gamma(t)$ вместо γ_t и $\gamma'(u)$ вместо γ'_u.

Поставим в соответствие каждому элементу s полугруппы S $\Lambda \times \Lambda$-матрицу $M_D(s) = (m_{\lambda\mu}(s))$ над $\Gamma(H)^0$ и $I \times I$-матрицу

$M'_D(s) = (m'_{ij}(s))$ над $\Gamma'(H)^0$, определенные следующим образом ($\lambda, \mu \in \Lambda$; $i, j \in I$):

$$m_{\lambda\mu}(s) = \begin{cases} \gamma(q_\lambda s q'_\mu), & \text{если } H_{1\lambda}s = H_{1\mu}, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \tag{1}$$

$$m'_{ij}(s) = \begin{cases} \gamma'(r'_j s r_i), & \text{если } sH_{i1} = H_{j1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Мы должны показать, конечно, что выражения, стоящие справа, определены. Пусть $H_{1\lambda}s = H_{1\mu}$. Тогда $hq_\lambda s \in H_{1\mu}$ для любого $h \in H$, так как $hq_\lambda \in H_{1\lambda}$. Поскольку $H_{1\mu}q'_\mu = H_{11} = H$, отсюда следует, что $hq_\lambda sq'_\mu \in H$. Таким образом, $q_\lambda sq'_\mu \in T(H)$ и поэтому $\gamma(q_\lambda sq'_\mu)$ определено. Двойственным образом можно показать, что $\gamma'(r'_j sr_i)$ определено, если $sH_{i1} = H_{j1}$.

Теорема 3.16. *Отображение $s \to M_D(s)$ является представлением полугруппы S мономиальными по строкам $\Lambda \times \Lambda$-матрицами над группой $\Gamma(H)^0$. Для данных $\lambda, \mu \in \Lambda$ и $\gamma(t) \in \Gamma(H)$ ($t \in T(H)$) существует такой элемент $s \in S$, что $m_{\lambda\mu}(s) = \gamma(t)$.*

Отображение $s \to M'_D(s)$ является антипредставлением полугруппы S мономиальными по срокам $I \times I$-матрицами над $\Gamma'(H)^0$. Для данных $i, j \in I$ и $\gamma'(u) \in \Gamma'(H)$ ($u \in T'(H)$) существует такой элемент $s \in S$, что $m'_{ij}(s) = \gamma'(u)$.

Замечания. Назовем M_D [M'_D] *представлением* [*антипредставлением*] *Шютценберже* полугруппы S, соответствующим $\mathscr{D}$-классу D. Если мы выберем другой $\mathscr{H}$-класс в D и другие элементы q_λ, q'_λ [r_i, r'_i], то вид (1) [(2)] представления [антипредставления] Шютценберже изменится несущественно (упражнение 1 к настоящему параграфу).

Упражнение 2 к данному параграфу показывает, что для полугруппы $M_D(S)$ представляющих матриц следующие два свойства являются по существу определяющими: (i) каждая матрица из $M_D(S)$ мономиальна по строкам, (ii) $m_{\lambda\mu}(S) \supseteq \Gamma(H)$ для каждой пары (λ, μ) из $\Lambda \times \Lambda$.

Доказательство. Покажем сначала, что каждая матрица $M_D(s)$ мономиальна по строкам. Пусть $s \in S$ и $\lambda \in \Lambda$. Тогда $H_{1\lambda} \subseteq R_1$. Применяя лемму 3.15 (i) (где вместо H взят класс $H_{1\lambda}$), мы заключаем, что либо $H_{1\lambda}s \cap R_1 = \varnothing$, либо $H_{1\lambda}s = H_{1\mu}$ при некотором $\mu \in \Lambda$. В первом случае λ-я строка матрицы $M(s)$ состоит из нулей. Во втором случае λ-я строка содержит $\gamma(q_\lambda sq'_\mu)$ в μ-м столбце и нули на остальных местах.

Для доказательства другого свойства, сформулированного в теореме, в качестве s достаточно взять элемент $q'_\lambda tq_\mu$. Действительно,

$$H_{1\lambda}s = H_{1\lambda}q'_\lambda tq_\mu = Htq_\mu = Hq_\mu = H_{1\mu},$$

поэтому $m_{\lambda\mu}(s)=\gamma(q_\lambda sq'_\mu)$. Если h — произвольный элемент $\mathscr{H}$-класса H, то

$$hq_\lambda sq'_\mu = hq_\lambda q'_\lambda tq_\mu q'_\mu = ht,$$

потому что $xq_\lambda q'_\lambda = x$ и $xq_\mu q'_\mu = x$ для любого $x \in H$. Следовательно, $\gamma(q_\lambda sq'_\mu) = \gamma(t)$.

Покажем, что $M_D(s)\,M_D(t)=M_D(st)$ для любых $s,\ t\in S$ или, другими словами, что

$$\sum_{\mu\in\Lambda} m_{\lambda\mu}(s)\,m_{\mu\nu}(t)=m_{\lambda\nu}(st) \tag{3}$$

для любых $\lambda,\ \nu\in\Lambda$.

Предположим сначала, что $m_{\lambda\nu}(st)\neq 0$. Тогда $H_{1\lambda}st=H_{1\nu}$ и

$$m_{\lambda\nu}(st)=\gamma(q_\lambda stq'_\nu). \tag{4}$$

По лемме 3.15 (ii) $H_{1\lambda}s\cap R_1\neq\varnothing$, так как в противном случае $H_{1\nu}=H_{1\lambda}st\cap R_1=\varnothing$. Следовательно, на основании леммы 3.15 (i) $H_{1\lambda}s=H_{1\varkappa}$ при некотором $\varkappa\in\Lambda$, поэтому

$$m_{\lambda\varkappa}(s)=\gamma(q_\lambda sq'_\varkappa),$$
$$m_{\lambda\mu}(s)=0 \text{ при } \mu\neq\varkappa.$$

Так как $H_{1\nu}=H_{1\lambda}st=H_{1\varkappa}t$, отсюда следует, что

$$m_{\varkappa\nu}(t)=\gamma(q_\varkappa tq'_\nu).$$

Следовательно, левая часть соотношения (3) равна

$$\gamma(q_\lambda sq'_\varkappa)\,\gamma(q_\varkappa tq'_\nu)=\gamma(q_\lambda sq'_\varkappa q_\varkappa tq'_\nu). \tag{5}$$

Для того чтобы доказать равенство выражений (4) и (5), достаточно установить, что

$$hq_\lambda sq'_\varkappa q_\varkappa tq'_\nu = hq_\lambda stq'_\nu$$

для каждого $h\in H$. Но это равенство выполняется, поскольку $hq_\lambda s\in H_{1\lambda}s=H_{1\varkappa}$ и отображение $x\to xq'_\varkappa q_\varkappa$ есть тождественное отображение $H_{1\varkappa}$ на себя.

Предположим теперь, что $m_{\lambda\nu}(st)=0$ и, значит, $H_{1\lambda}st\neq H_{1\nu}$ Мы должны доказать, что левая часть равенства (3) также равна 0. Если $H_{1\lambda}s\cap R_1=\varnothing$, то $m_{\lambda\mu}(s)=0$ для любого $\mu\in\Lambda$, и поэтому левая часть соотношения (3) равна 0. Если $H_{1\lambda}s\cap R_1\neq\varnothing$, то по лемме 3.15 (i) $H_{1\lambda}s=H_{1\varkappa}$ при некотором $\varkappa\in\Lambda$. Так как $m_{\lambda\mu}(s)=0$ для каждого $\mu\neq\varkappa$, достаточно установить, что $m_{\varkappa\nu}(t)=0$. Но это выполняется, поскольку $H_{1\varkappa}t=H_{1\lambda}st\neq H_{1\nu}$.

Доказательство второй части теоремы 3.16 проводится аналогично, поэтому мы приведем лишь его фрагмент. Покажем, что

$$M'_D(s)\,M'_D(t)=M'_D(ts),$$

т. е.

$$\sum_{j \in I} m'_{ij}(s)\, m'_{jl}(t) = m'_{il}(ts). \tag{6}$$

Предположим, что $m'_{il}(ts) \neq 0$. Тогда $tsH_{i1} = H_{l1}$ и

$$m'_{il}(ts) = \gamma'(r'_l t s r_i). \tag{7}$$

По лемме, двойственной к лемме 3.15 (ii), имеем $sH_{i1} \cap L_1 \neq \varnothing$, так как в противном случае $tsH_{i1} \cap L_1 = \varnothing$. Следовательно, по лемме, двойственной к лемме 3.15 (i), $sH_{i1} = H_{k1}$ для некоторого $k \in I$, поэтому

$$m'_{ik}(s) = \gamma'(r'_k s r_i),$$
$$m'_{ij}(s) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k.$$

Так как $H_{l1} = tsH_{i1} = tH_{k1}$, отсюда вытекает, что

$$m'_{kl}(t) = \gamma'(r'_l t r_k).$$

Следовательно, левая часть соотношения (6) равна

$$\gamma'(r'_k s r_i)\, \gamma'(r'_l t r_k) = \gamma'(r'_l t r_k r'_k s r_i), \tag{8}$$

так как $\gamma'(u)\,\gamma'(v) = \gamma'(vu)$ для всех $u, v \in T'(H)$. Для каждого $h \in H$ имеем

$$r'_l t r_k r'_k s r_i h = r'_l t s r_i h,$$

так как $sr_ih \in H_{k1}$ и отображение $x \to r_k r'_k x$ есть тождественное преобразование $\mathcal{H}$-класса H_{k1}. Следовательно, выражения (7) и (8) равны. Случай, когда $m'_{il}(ts) = 0$, рассматривается аналогично соответствующему случаю из первой части теоремы. Мономиальность по строкам и свойство $m_{ij}(S) \supseteq \Gamma'(H)$ доказывается также аналогично соответствующим утверждениям из первой части теоремы.

Мы хотим теперь видоизменить условие (2) так, чтобы получить представление полугруппы S. *Двойственным представлением Шютценберже* полугруппы S, соответствующим классу D, будем называть отображение $s \to M^*_D(s)$, где $M^*_D(s)$ получено из $M'_D(s)$ транспонированием матриц и заменой $\Gamma'(H)$ на $\Gamma(H)$. Таким образом, M^*_D — представление полугруппы S при помощи $I \times I$-матриц над $\Gamma(H)^0$, мономиальных по столбцам.

Мы можем сделать это более явно следующим образом. Пусть h_1 — фиксированный элемент из H. Тогда существует такое отображение θ множества $T'(H)$ в $T(H)$, что $uh_1 = h_1(u\theta)$ для каждого $u \in T'(H)$. Для каждого $u \in T'(H)$ положим $\gamma^*(u) = \gamma(u\theta)$. Для любых $u, v \in T'(H)$ имеем

$$h_1((uv)\theta) = uvh_1 = uh_1(v\theta) = h_1(u\theta)(v\theta),$$

откуда

$$\gamma((uv)\theta) = \gamma((u\theta)(v\theta)) = \gamma(u\theta)\,\gamma(v\theta)$$

и поэтому
$$\gamma^*(uv) = \gamma^*(u)\,\gamma^*(v).$$

Положим $M_D^*(s) = (m_{ij}^*(s))$, где
$$m_{ij}^*(s) = \begin{cases} \gamma^*(r_i' s r_j), & \text{если } sH_{j1} = H_{i1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{9}$$

Мы не можем взять справа просто $\gamma(r_i' s r_j)$, так как $r_i' s r_j$ не обязательно лежит в $T(H)$. Тем не менее элементы матрицы $M_D^*(s)$ принадлежат $\Gamma(H)^0$.

Теорема 3.17. *Пусть S — регулярная рисовская полугруппа матричного типа $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$. Тогда представления Шютценберже полугруппы S, соответствующие $\mathcal{D}$-классу $D = S \setminus 0$, могут быть выражены в виде*
$$M_D(s) = Ps, \quad M_D^*(s) = sP,$$
где s — произвольный элемент полугруппы S.

Доказательство. Докажем лишь второе утверждение теоремы. Доказательство первого утверждения аналогично и даже проще, поскольку в нем не появляются трудности, связанные с рассмотрением двойственных утверждений.

Предположим, что I и Λ содержат общий элемент 1 и $p_{11} \neq 0$. Более того, мы можем считать, что элемент p_{11} равен единице e группы G. Такая нормализация матрицы P возможна в силу леммы 3.6. Тогда отображение $a \to (a)_{11}$ является изоморфизмом группы G на $H_{11} = H$.

Пусть $r_i = (e)_{i1}$. Так как матрица P регулярна, для каждого $i \in I$ существует такой элемент $\varkappa = \varkappa_i \in \Lambda$, что $p_{\varkappa i} \neq 0$. Пусть $r_i' = (p_{\varkappa i}^{-1})_{1\varkappa}$. Тогда $x \to r_i x$ и $y \to r_i' y$ суть взаимно обратные взаимно однозначные отображения классов H и H_{i1} друг на друга.

В данном случае $H \subseteq T(H) \cap T'(H)$ и $\Gamma(H) \cong H$ по теореме 2.22. Заменим в двойственном представлении Шютценберже полугруппы S каждый элемент $\gamma(h)$ из $\Gamma(H)$ соответствующим элементом h из H, последний же — соответствующим элементом группы G.

В абзаце, предшествующем теореме, возьмем за h_1 единицу группы H. Тогда $\theta \mid H$ — тождественное отображение и
$$\gamma^*(h) = \gamma(h\theta) = \gamma(h).$$

Следовательно, мы должны заменить каждый элемент $\gamma^*(h)$ в (9) на h. Если $sH_{j1} = H_{i1}$, то $sr_j \in H_{i1}$, так как в данном случае $r_j \in H_{j1}$. Таким образом, $r_i' s r_j \in H_{11}$. Следовательно, (9) приводится к виду
$$m_{ij}^*(s) = \begin{cases} r_i' s r_j, & \text{если } sH_{j1} = H_{i1}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Возьмем $s=(a)_{k\lambda}$, где $a \in G$, $k \in I$ и $\lambda \in \Lambda$. Тогда $sH_{j1} \subseteq H_{k1} \cup 0$ и поэтому $m^*_{ij}(s)=0$ при $i \neq k$. Если $p_{\lambda j} \neq 0$, то $sH_{j1}=H_{k1}$ и

$$m^*_{kj}(s)=r'_k s r_j=(p^{-1}_{\varkappa k})_{1\varkappa}(a)_{k\lambda}(e)_{j1}=(ap_{\lambda j})_{11}.$$

Если $p_{\lambda j}=0$, то $sH_{j1}=0$, откуда $m^*_{kj}(s)=0$, т. е. предыдущее равенство имеет место и в этом случае. Мы заключаем, что для $s=(a)_{k\lambda}$

$$m^*_{ij}(s)=\begin{cases} (ap_{\lambda j})_{11}, & \text{если } i=k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$$

Таким образом, в матрице $M^*_D(s)$ все строки, кроме, быть может, k-й строки, состоят из нулей, а в k-й строке и j-м столбце находится элемент $(ap_{\lambda j})_{11}$. Матрица $sP=(a)_{k\lambda}P$ есть $I \times I$-матрица над G^0, в которой все строки, кроме, быть может, k-й строки, состоят из нулей, а элемент в k-й строке и j-м столбце равен $ap_{\lambda j}$. Если мы отождествим изоморфные группы H_{11} и G, то получим, что $M^*_D(s)=sP$.

Упражнения к § 3.5

1. Вид (1) представления Шютценберже $s \to M_D(s)$ полугруппы S, соответствующего $\mathscr{D}$-классу D этой полугруппы, зависит от выбора (i) $\mathscr{H}$-класса $H=H_{11}$ из D, (ii) элементов q_λ, $q'_\lambda \in S$, для которых $x \to xq_\lambda$ и $y \to yq'_\lambda$ суть взаимно обратные взаимно однозначные отображения классов H_{11} и $H_{1\lambda}$ друг на друга.

(a) Предположим, что мы выбрали новые элементы $\bar{q}_\lambda$ и $\bar{q}'_\lambda$ в (ii). Тогда $t_\lambda=\bar{q}_\lambda q'_\lambda$ и $t'_\lambda=q_\lambda\bar{q}'_\lambda$ — элементы из $T(H_{11})$, $\gamma(t_\lambda)$ и $\gamma(t'_\lambda)$ — взаимно обратные элементы группы $\Gamma(H_{11})$. Пусть V—диагональная $\Lambda\times\Lambda$-матрица, содержащая $\gamma(t_\lambda)$ на (λ,λ)-месте. Тогда новое представление Шютценберже имеет вид $s \to VM_D(s)V^{-1}$.

(b) Предположим, что мы выбрали другой $\mathscr{H}$-класс $H_{i\varkappa}$ в D вместо H_{11}. В силу упражнения 3 к § 2.4 отображение $\gamma(t) \to \delta(q'_\varkappa tq_\varkappa)$ является изоморфизмом θ группы $\Gamma(H_{11})$ на $\Gamma(H_{i\varkappa})$. Пусть $\bar{q}_\lambda=q'_\varkappa q_\lambda$ и $\bar{q}'_\lambda=q'_\lambda q_\varkappa$. Тогда $x \to x\bar{q}_\lambda$ и $y \to y\bar{q}'_\lambda$ суть взаимно обратные взаимно однозначные отображения классов $H_{i\varkappa}$ и $H_{i\lambda}$ друг на друга. Новое представление Шютценберже $s \to N_D(s)$ получается из старого заменой каждого элемента $\gamma(t)$ из $M_D(s)$ на $\delta(q'_\varkappa tq_\varkappa)$. Другими словами, $N_D(s)=(n_{\lambda\mu}(s))$, где

$$n_{\lambda\mu}(s)=\begin{cases} \delta(q'_\varkappa q_\lambda s q'_\mu q_\varkappa), & \text{если } H_{i\lambda}s=H_{i\mu}, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(Заметим, что $H_{1\lambda}s=H_{1\mu}$ тогда и только тогда, когда $H_{i\lambda}s=H_{i\mu}$.) Таким образом, $N_D(s)=M_D(s)\,\theta$.

Отсюда видно, что представление M_D существенным образом зависит лишь от D, что оправдывает обозначение M_D.

2. Пусть G — группа, I и Λ — множества. Пусть X — полугруппа, обладающая таким представлением $x \to N(x) = (n_{\lambda\mu}(x))$ мономиальными по строкам $\Lambda \times \Lambda$-матрицами над G^0, что для данных $\lambda, \mu \in \Lambda$ и $a \in G$ существует $x \in X$, для которого $n_{\lambda\mu}(x) = a$. Пусть Y — полугруппа, обладающая таким представлением $y \to N^*(y) = (n^*_{ij}(y))$ $I \times I$-матрицами над G^0, мономиальными по столбцам, что для данных $i, j \in I$ и $a \in G$ существует $y \in Y$, для которого $n^*_{ij}(y) = a$.

Пусть D — множество всех ненулевых $I \times \Lambda$-матриц Риса над G^0 и Z — нулевая $I \times \Lambda$-матрица над G^0. Предположим, далее, что множества X, Y, D и $\{Z\}$ попарно не пересекаются. Пусть $S = X \cup Y \cup D \cup Z$. Определим в S произведение следующим образом. Если $x \in X$, $y \in Y$ и $A \in D$, то положим

$$Ax = AN(x) \quad \text{и} \quad yA = N^*(y)A,$$

где в правых частях равенств стоят матричные произведения. Произведения в X и Y сохраним прежние. Все другие произведения будем считать равными Z. Тогда S — полугруппа и D — ее $\mathscr{D}$-класс.

Если $s \in S \setminus X$, то $N(s)$ будем считать совпадающей с нулевой $\Lambda \times \Lambda$-матрицей над G^0. Если $s \in S \setminus Y$, то $N^*(s)$ будем считать совпадающей с нулевой $I \times I$-матрицей над G^0. Тогда отображение

$$s \to N(s) \quad [s \to N^*(s)]$$

является [двойственным] представлением Шютценберже полугруппы S, соответствующим $\mathscr{D}$-классу D.

3. Пусть S — регулярная рисовская полугруппа матричного типа над группой с нулем G^0. Полугруппа P всех правых сдвигов полугруппы S (§ 1.3) изоморфна полугруппе всех мономиальных по строкам $\Lambda \times \Lambda$-матриц над G^0. (Действительно, если ρ — произвольный правый сдвиг полугруппы S и $\lambda \in \Lambda$, то $(e; 1, \lambda)\rho = (c_\lambda; 1, \lambda')$ при некотором $c_\lambda \in G^0$ и некотором $\lambda' \in \Lambda$. Пусть C — мономиальная по строкам $\Lambda \times \Lambda$-матрица, имеющая элемент c_λ на (λ, λ') месте и нули на остальных местах. Тогда $A\rho = AC$ для каждого $A \in S$.) Отображение $A \to \rho_A$ полугруппы S на полугруппу P_0 внутренних правых сдвигов полугруппы S эквивалентно представлению Шютценберже полугруппы S. Аналогичное утверждение справедливо для левых сдвигов полугруппы S, $I \times I$-матриц над G^0, мономиальных по столбцам, и двойственного представления Шютценберже полугруппы S. Так как S слабо редуктивна, отображение $A \to (\lambda_A, \rho_A)$ взаимно однозначно.

4. (а) Пусть $\mathscr{T}_X$ — полная полугруппа преобразований на множестве X, E — одноэлементная группа $\{e\}$, $\mathscr{T}'_X$ — полугруппа

всех строго мономиальных по строкам $X \times X$-матриц над E^0. Для каждого $\alpha \in \mathcal{T}_X$ через $V(\alpha)$ обозначим матрицу $(v_{xy}(\alpha))$ из $\mathcal{V}_X$, определенную следующим образом:

$$v_{xy}(\alpha) = \begin{cases} e, & \text{если } x\alpha = y, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда отображение $\alpha \to V(\alpha)$ есть изоморфизм полугруппы $\mathcal{T}_X$ на $\mathcal{V}_X$. Назовем его *естественным* изоморфизмом.

(b) Пусть s — элемент полугруппы S, и пусть $N(s) = (n_{ab}(s))$ есть $S \times S$-матрица над E^0, заданная следующим образом:

$$n_{ab}(s) = \begin{cases} e, & \text{если } as = b, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $s \to N(s)$ есть представление полугруппы S строго мономиальными по строкам $S \times S$-матрицами над E^0. По существу это регулярное представление полугруппы S в том смысле, что $N(s) = V(\rho_s)$, где V определено в п. (a), а ρ_s определяется обычным образом: $x\rho_s = xs$ для всех x, $s \in S$.

(c) Пусть S — простая справа полугруппа с правым сокращением без идемпотентов. (Полугруппы такого типа будут изучаться в гл. 8.) Тогда S является своим $\mathcal{R}$-классом (и, следовательно, $\mathcal{D}$-классом), а каждый $\mathcal{L}$-класс (следовательно, и каждый $\mathcal{H}$-класс) полугруппы S состоит из одного элемента. Представление Шютценберже полугруппы S есть представление $s \to N(s)$, определенное в п. (b). Оно точно, если S редуктивна справа.

§ 3.6. Точное представление регулярной полугруппы

Пусть S — полугруппа, Ω — множество индексов и для каждого $\omega \in \Omega$ отображение $s \to M_\omega(s)$ есть представление полугруппы S матрицами над группой с нулем G_ω^0. Образ полугруппы S при гомоморфизме M_ω обозначим через $M_\omega(S)$. Пусть T — прямое произведение полугрупп $M_\omega(S)$. Для каждого $s \in S$ через $M(s)$ обозначим элемент полугруппы T, ω-я компонента которого равна $M_\omega(s)$. Очевидно, $s \to M(s)$ есть гомоморфизм M полугруппы S в T. Назовем M *прямой суммой* представлений M_ω полугруппы S. Можно интерпретировать M как представление полугруппы S матрицами над группой с нулем (см. упражнение 1 к настоящему параграфу).

Пусть теперь Ω — множество всех $\mathcal{D}$-классов полугруппы S. Рассмотрим прямую сумму M [M^*] всех [двойственных] представлений Шютценберже M_D [M_D^*] полугруппы S и прямую сумму $M \oplus M^*$ представлений M и M^*. В теореме 3.19 мы приведем необходимые и достаточные условия для того, чтобы представления M, M^* и $M \oplus M^*$ были точными представлениями полугруппы S. В качестве следствия этой теоремы мы покажем, что M и M^* суть точные представления, если S — инверсная полугруппа, и $M \oplus M^*$ — точное представление, если S — регулярная полугруппа. Эти результаты принадлежат Престону [1958].

Лемма 3.18. *Пусть D — некоторый $\mathcal{D}$-класс полугруппы S, а $s \to M_D(s)$ — представление Шютценберже полугруппы S, соответствующее классу D. Если s и t — элементы полугруппы S, то $M_D(s) = M_D(t)$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $d \in D$ из того, что $ds\mathcal{R}d$ или $dt\mathcal{R}d$ следует $ds = dt$.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу $M_D(s)$, заданную условием (1) в § 3.5. Будем использовать обозначения из § 3.5, введенные перед условием (1).

Предположим сначала, что $M_D(s) = M_D(t)$ и d — такой элемент из D, что $ds\mathcal{R}d$ или $dt\mathcal{R}d$. Докажем, что $ds = dt$. В силу симметрии можно предположить, что $ds\mathcal{R}d$.

Поскольку $d \in D$, имеем $d \in H_{i\lambda}$ при некотором $i \in I$ и некотором $\lambda \in \Lambda$. Так как $ds\mathcal{R}d$, отсюда следует, что $ds \in H_{i\mu}$ при некотором $\mu \in \Lambda$. По лемме Грина 2.2 отображение $x \to xs$ взаимно однозначно отображает L_λ на L_μ и сохраняет $\mathcal{R}$-классы. Ограничение этого отображения на $H_{1\lambda}$ есть взаимно однозначное отображение класса $H_{1\lambda}$ на $H_{1\mu}$, т. е. $H_{1\lambda}s = H_{1\mu}$. Отсюда и из равенства (1) § 3.5 мы имеем $m_{\lambda\mu}(s) = \gamma(q_\lambda s q'_\mu)$. По предположению $m_{\lambda\mu}(s) = m_{\lambda\mu}(t)$, откуда следует, что $H_{1\lambda}t = H_{1\mu}$ и $\gamma(q_\lambda s q'_\mu) = \gamma(q_\lambda t q'_\mu)$. По лемме Грина отображение $x \to xt$ взаимно однозначно отображает $H_{i\lambda}$ на $H_{i\mu}$, поэтому $dt \in H_{i\mu}$. Для каждого $h \in H$ имеем $hq_\lambda s q'_\mu = hq_\lambda t q'_\mu$. Так как $hq_\lambda s$ и $hq_\lambda t$ принадлежат $H_{1\mu}$ и q'_μ отображает $H_{1\mu}$ взаимно однозначно на H_{11}, мы заключаем, что $hq_\lambda s = hq_\lambda t$ для всех $h \in H$. Очевидно, $d = r_i h q_\lambda$ при некотором $h \in H$, поэтому

$$ds = r_i h q_\lambda s = r_i h q_\lambda t = dt.$$

Обратно, предположим, что s и t обладают свойством, сформулированным в лемме. Пусть λ и μ — элементы из Λ. Покажем, что $m_{\lambda\mu}(s) = m_{\lambda\mu}(t)$.

Предположим сначала, что $H_{1\lambda}s = H_{1\mu}$. Пусть $d \in H_{1\lambda}$. Тогда $ds \in H_{1\mu}$ и потому $ds\mathcal{R}d$. По предположению отсюда вытекает, что $ds = dt$. Если $x \in H_{1\lambda}$, то $x = yd$ при некотором $y \in S^1$, поэтому $xs = yds = ydt = xt$. Следовательно, отображение $x \to xs$ $\mathcal{H}$-класса $H_{1\lambda}$ на $H_{1\mu}$ совпадает на $H_{1\lambda}$ с отображением $x \to xt$. Отсюда вытекает, что $H_{1\lambda}t = H_{1\mu}$ и $(hq_\lambda)t = (hq_\lambda)s$ для каждого $h \in H$. Поэтому $hq_\lambda t q'_\mu = hq_\lambda s q'_\mu$, т. е. $\gamma(q_\lambda t q'_\mu) = \gamma(q_\lambda s q'_\mu)$. В силу (1) мы заключаем, что в этом случае $m_{\lambda\mu}(s) = m_{\lambda\mu}(t)$.

Предположим теперь, что $H_{1\lambda}s \neq H_{1\mu}$. Тогда $H_{1\lambda}t \neq H_{1\mu}$, так как в противном случае, меняя ролями s и t и повторяя рассуждения предыдущего абзаца, мы получили бы $H_{1\lambda}s = H_{1\mu}$. Следовательно, в этом случае $m_{\lambda\mu}(s)$ и $m_{\lambda\mu}(t)$ равны 0.

Определим два бинарных отношения α и β на полугруппе S, полагая:

$$\alpha = \{(s,\ t) \mid xs\mathcal{R}x \text{ или } xt\mathcal{R}x \text{ влечет за собой } xs = xt\},$$
$$\beta = \{(s,\ t) \mid sx\mathcal{L}x \text{ или } tx\mathcal{L}x \text{ влечет за собой } sx = tx\}.$$

Следующая теорема показывает, что $\alpha = M \circ M^{-1}$ и $\beta = M^* \circ \circ M^{*-1}$, и, таким образом, α и β — конгруэнции на S (последнее легко проверяется непосредственно).

Теорема 3.19. *Пусть S — полугруппа и M $[M^*]$ — прямая сумма всех [двойственных] представлений Шютценберже M_D $[M_D^*]$ полугруппы S. Пусть s и t — элементы полугруппы S. Тогда $M(s) = M(t)$ в том и только в том случае, когда $s\alpha t$, и $M^*(s) = M^*(t)$ в том и только в том случае, когда $s\beta t$. Представление M, M^* или $M \oplus M^*$ полугруппы S является точным тогда и только тогда, когда соответственно α, β или $\alpha \cap \beta$ есть отношение равенства на S.*

Доказательство. Если для каждого $\mathcal{D}$-класса D полугруппы S мы определим отношение α_D, полагая $s\alpha_D t$ тогда и только тогда, когда s и t обладают свойством, сформулированным в лемме 3.18, то α совпадает с пересечением всех отношений α_D, где D пробегает множество $\mathcal{D}$-классов полугруппы S. Следовательно, по лемме 3.18 $s\alpha t$ тогда и только тогда, когда $M_D(s) = M_D(t)$ для каждого $\mathcal{D}$-класса D полугруппы S, т. е. $s\alpha t$ имеет место в том и только в том случае, когда $M(s) = M(t)$. Аналогично, из леммы, двойственной к лемме 3.18, следует, что $M^*(s) = M^*(t)$ тогда и только тогда, когда $s\beta t$. Последнее утверждение теоремы непосредственно вытекает из предыдущих.

Лемма 3.20. *Пусть S — регулярная полугруппа. Пусть s и t — такие элементы из S, что $s\alpha t$. Тогда s и t имеют общий инверсный к ним элемент в S и $s\mathcal{L}t$.*

Доказательство. Пусть x — элемент, инверсный к s, и y — элемент, инверсный к t. Покажем, что y инверсен также и к s (ввиду симметрии тогда и x инверсен к t).

Так как $xsx = x$, то $xs\mathcal{R}x$. Так как $s\alpha t$, мы заключаем, что $xs = xt$. Аналогично, $yty = y$ влечет за собой $yt = ys$. Следовательно,

$$\begin{aligned} s &= s(xs) = s(xt) = (sx)t = sx(tyt) = \\ &= s(xt)(yt) = s(xs)(ys) = sys, \\ y &= (yt)y = ysy, \end{aligned}$$

т. е. y инверсен к s.

Как показано выше, $s = (sx)\,t$. Из соображений симметрии $t = (ty)\,s$. Отсюда следует, что $s\mathscr{L}t$.

Упражнение 3 к настоящему параграфу показывает, что утверждение, обратное к лемме 3.20, неверно.

Теорема 3.21. *Пусть S — регулярная полугруппа и M $[M^*]$— прямая сумма [двойственных] представлений Шютценберже полугруппы S. Тогда $M \oplus M^*$ — точное представление полугруппы S. Если S — инверсная полугруппа, то M и M^* — точные представления.*

Доказательство. Последнее утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 3.19, леммы 3.20 и двойственной к ней леммы, так как если в инверсной полугруппе два элемента имеют общий инверсный к ним элемент, то они совпадают.

Пусть S — регулярная полугруппа. Покажем, что $M \oplus M^*$ — точное представление. В силу теоремы 3.19 для этого достаточно показать, что включение $(s, t) \in \alpha \cap \beta$ влечет за собой $s = t$. Предположим, что $(s, t) \in \alpha \cap \beta$. Поскольку $(s, t) \in \alpha$, из леммы 3.20 вытекает, что $s\mathscr{L}t$. Поскольку $(s, t) \in \beta$, из леммы, двойственной к лемме 3.20, вытекает, что $s\mathscr{R}t$. Следовательно, $s\mathscr{H}t$. Далее, по лемме 3.20 существует элемент, инверсный как для s, так и для t. Поскольку s и t лежат в одном $\mathscr{H}$-классе, это в силу теоремы 2.18 означает, что $s = t$.

Используя упражнение 2 к настоящему параграфу и двойственное к нему утверждение, легко построить регулярную полугруппу, которая не является инверсной, но для которой представления M и M^* точны. Основываясь на том же упражнении, легко построить регулярную полугруппу, для которой представления M и M^* не являются точными. Наконец, упражнение 4 (с) к § 3.5 дает пример нерегулярной полугруппы, для которой представление M точно.

Упражнения к § 3.6

1. Пусть для каждого элемента ω из множества индексов Ω отображение $s \to M_\omega(s)$ есть представление полугруппы S $\Lambda_\omega \times \Lambda_\omega$-матрицами над группой с нулем G^0_ω. Предположим, что множества Λ_ω попарно не пересекаются и Λ есть их объединение. Пусть G — произвольная группа, содержащая все группы G_ω (например, прямое произведение групп G_ω). Тогда прямую сумму $M(s)$ всех представлений $M_\omega(s)$ можно считать представлением $\Lambda \times \Lambda$-матрицами над G^0.

2. Пусть S — регулярная рисовская полугруппа матричного типа $\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ и отображение $s \to M_D(s)$ есть представление Шютценберже полугруппы S, соответствующее $\mathscr{D}$-классу $D = S\setminus 0$. Скажем, что i-й столбец и j-й столбец матрицы P *про-*

порциональны справа, если существует такое $c \in G$, что $p_{\lambda i} = p_{\lambda j}c$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Представление M_D точно тогда и только тогда, когда никакие два столбца из P не пропорциональны справа.

(В силу теоремы 3.21 представление $M_D \oplus M_D^*$ в этом случае является точным, что следует также из упражнения 3 к § 3.5.)

3. Пусть $a = (1, 1)$, $b = (1, 2)$, $c = (2, 1)$ и $d = (2, 2)$ — элементы 2×2-прямоугольной связки B_{22} (§ 1.8). Пусть e, $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ — пять попарно различных элементов, отличных от a, b, c, d, и $S = \{a, b, c, d, e, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}\}$. Определим произведение в S при помощи таблицы Кэли

	y	e	$\bar{y}$
x	xy	e	$\bar{y}$
e	$\bar{y}$	e	$\bar{y}$
$\bar{x}$	$\overline{xy}$	e	$\bar{y}$

где x и y пробегают B_{22}. Тогда S — связка (в частности, S — регулярная полугруппа), в которой утверждение, обратное к лемме 3.20, не выполняется при $s = a$ и $t = c$.

Глава 4

РАЗЛОЖЕНИЯ И РАСШИРЕНИЯ

Понятие разложения полугруппы в объединение непересекающихся подполугрупп, в частности, в объединение связки или полуструктуры подполугрупп, кратко обсуждалось в конце § 1.8. В первых двух параграфах этой главы мы изложим теорию разложений полугруппы в объединение простых полугрупп различного типа, включая группы. § 4.1 есть упрощенный вариант первой части статьи Круазо [1953], в то время как результаты § 4.2 взяты из работы Клиффорда [1941].

В § 4.3 приводится модифицированный вариант теории разложений коммутативных полугрупп, принадлежащей Тамуре и Кимуре [1954] и Хьюитту и Цукерману [1956]. Результаты этого параграфа используются в дальнейшем в теории характеров коммутативных полугрупп (§ 5.5).

В последних двух параграфах рассматриваются расширения одной полугруппы при помощи другой (это является до некоторой степени аналогом шрейеровской теории групповых расширений). Результаты § 4.4 взяты из работы Клиффорда [1950], а § 4.5 — из диссертации Манна [1955a] и публикуются здесь впервые.

§ 4.1. *Теория Круазо разложений полугруппы*

Круазо [1953] связал вопрос о разложениях полугруппы с условиями регулярности и изолированности. Этот параграф посвящен изложению его теории.

Как и в § 1.9, мы говорим, что полугруппа S *регулярна*, если для любого $a \in S$ существует такой $x \in S$, что $axa = a$. Полугруппа S называется *регулярной слева* [*справа*], если для любого $a \in S$ существует такой $x \in S$, что $xa^2 = a$ $[a^2x = a]$. (Круазо вместо термина «регулярный» использовал термин «инверсивный» [1]).)

Будем говорить, что полугруппа S *интра-регулярна*, если для любого $a \in S$ существуют такие x, $y \in S$, что $xa^2y = a$. Перечисленные четыре условия для S можно выразить еще и следующим образом: S регулярна, если $a \in aSa$ для любого $a \in S$; S ре-

---

[1]) Inversif.— *Прим. перев.*

гулярна слева, если $a \in Sa^2$ для любого $a \in S$; S регулярна справа, если $a \in a^2S$ для любого $a \in S$; S интра-регулярна, если $a \in Sa^2S$ для любого $a \in S$.

В терминах отношений эквивалентности Грина (§ 2.1) полугруппа S регулярна слева [регулярна справа, интра-регулярна] тогда и только тогда, когда $a\mathcal{L}a^2$ [$a\mathcal{R}a^2$, $a\mathcal{J}a^2$] для каждого $a \in S$. Мы постоянно будем пользоваться этими утверждениями без пояснений. Лишь последнее из них не очевидно, но $a\mathcal{J}a^2$ тогда и только тогда, когда $a \in J(a^2) = a^2 \cup a^2S \cup Sa^2 \cup Sa^2S$. Если, например, $a \in a^2S$, то $a^2 \in a \cdot a^2S$, откуда $a \in a \cdot a^2SS \subseteq Sa^2S$. Таким образом, $a\mathcal{J}a^2$ имеет место тогда и только тогда, когда $a \in Sa^2S$.

Подмножество X полугруппы S называется *изолированным* [1]), если для любого $a \in S$ из $a^2 \in X$ следует, что $a \in X$.

Лемма 4.1. *Полугруппа S регулярна слева [регулярна справа, интра-регулярна] тогда и только тогда, когда каждый ее левый [правый, двусторонний] идеал изолирован.*

Доказательство. Пусть S интра-регулярна и T — идеал из S. Пусть $a \in S$ и $a^2 \in T$. Тогда $a \in Sa^2S \subseteq STS \subseteq T$. Обратно, предположим, что каждый идеал в S изолирован. Если $a \in S$, то $a^2 \in J(a^2)$ влечет за собой $a \in J(a^2)$, откуда $a\mathcal{J}a^2$, т. е. S интра-регулярна. Доказательства двух других утверждений леммы проводятся аналогично.

Теорема 4.2. *Следующие условия для полугруппы S эквивалентны:*

(A) *S регулярна слева.*

(B) *Каждый левый идеал из S изолирован.*

(C) *Каждый $\mathcal{L}$-класс полугруппы S есть простая слева подполугруппа.*

(D) *Каждый $\mathcal{L}$-класс полугруппы S есть подполугруппа.*

(E) *S есть объединение непересекающихся простых слева подполугрупп.*

(F) *S есть объединение простых слева подполугрупп.*

Доказательство. Эквивалентность условий (A) и (B) следует из леммы 4.1. Предположим, что выполняется условие (A) и, значит, $a\mathcal{L}a^2$ для каждого $a \in S$. Пусть $a\mathcal{L}b$. Тогда $a^2\mathcal{L}ba$, так как $\mathcal{L}$ — правая конгруэнция. Отсюда следует, что $ba\mathcal{L}a$, поэтому $\mathcal{L}$-класс L_a, содержащий a, является подполугруппой полугруппы S.

Покажем, что L_a — простая слева подполугруппа. Пусть $b \in L_a$. Мы должны показать, что $ca = b$ при некотором $c \in L_a$. Как мы установили выше, $ba \in L_a$, поэтому $b = xba$ при некото-

[1]) В оригинале — semiprime. Мы переводим его термином, весьма распространенным в этом смысле в русской литературе.— *Прим. перев.*

ром $x \in S^1$. Пусть $c = xb$. Докажем, что $c \in L_a$. Так как S регулярна слева, существует такой $y \in S$, что $x = yx^2$. Тогда

$$b = xba = yx^2ba = (yx)(xba) = yxb = yc.$$

Из $b = yc$ и $c = xb$ следует $c\mathscr{L}b$, т. е. $c \in L_b = L_a$. Это показывает, что (A) влечет за собой (C).

(C) влечет за собой (D) — тривиально. Предположим теперь, что выполняется (D). Тогда $a^2 \in L_a$ для каждого a из S, так как L_a — подполугруппа полугруппы S. Таким образом, $a^2\mathscr{L}a$, откуда следует, что S регулярна слева. Значит, (D) влечет за собой (A) и мы доказали эквивалентность условий (B), (C) и (D).

Очевидно, (C) влечет за собой (E) и (E) влечет за собой (F). Доказательство будет закончено, если мы покажем, что (F) влечет за собой (A). Предположим, что выполняется (F). Пусть $a \in S$. Тогда a принадлежит некоторой простой слева подполугруппе T полугруппы S. Следовательно, $a^2 \in T$ и существует такой элемент $x \in T$, что $xa^2 = a$.

Теорема 4.3. *Следующие условия для полугруппы S эквивалентны:*

(A) *S есть объединение групп.*

(B) *S регулярна и слева и справа.*

(C) *Каждый левый и каждый правый идеал полугруппы S изолирован.*

(D) *S регулярна и регулярна слева.*

(D′) *S регулярна и регулярна справа.*

(E) *Каждый $\mathscr{H}$-класс полугруппы S является группой.*

(F) *S— объединение непересекающихся групп.*

Доказательство. Если выполняется (A), то полугруппа S, очевидно, регулярна, регулярна слева и регулярна справа, так как уравнения $xa^2 = a$, $a^2y = a$, $aza = a$ разрешимы относительно x, y, z в подгруппе из S, содержащей элемент a. Таким образом, (A) влечет за собой (B), (D) и (D′). Кроме того, (B) эквивалентно (C) по лемме 4.1.

Предположим, что выполняется (B). Тогда $a\mathscr{L}a^2$ и $a\mathscr{R}a^2$, т. е. $a\mathscr{H}a^2$ для каждого $a \in S$. По теореме Грина 2.16 отсюда следует, что $\mathscr{H}$-класс H_a, содержащий a, является группой. Таким образом, выполняется условие (E), это условие влечет за собой (F), так как $\mathscr{H}$-классы не пересекаются, и (F) влечет за собой (A), что тривиально. Итак, мы установили эквивалентность условий (A), (B), (C), (E), (F) и показали, что (A) влечет за собой (D) и (D′).

Доказательство теоремы будет завершено, если мы покажем, что из (D) следует (A) (двойственным образом, тогда из (D′) следует (A)). Пусть $a \in S$. По теореме 4.2 L_a есть простая слева подполугруппа из S. Так как S регулярна, $axa = a$ при некотором $x \in S$. Тогда xa — идемпотент, принадлежащий L_a. Таким образом, L_a — простая слева полугруппа, содержащая идемпотент. По теореме 1.27 полугруппа L_a есть прямое произведение группы и связки и поэтому является объединением групп. Так как полугруппа S есть объединение своих $\mathcal{L}$-классов, мы заключаем, что она является объединением групп.

Следующая теорема была независимо от Круазо найдена Андерсеном, который сформулировал ее без доказательства в своей диссертации [1952]. Эта теорема обобщает результат, ранее полученный Клиффордом [1941] (см. теорему 4.6).

Теорема 4.4. *Следующие условия для полугруппы S эквивалентны*:

(A) *S есть объединение простых полугрупп.*

(B) *S интра-регулярна.*

(C) *Каждый идеал полугруппы S изолирован.*

(D) *Главные идеалы полугруппы S образуют полуструктуру Y относительно пересечения. Более точно, $J(a) \cap J(b) = J(ab)$ для любых $a, b \in S$. Кроме того, S есть объединение полуструктуры Y простых полугрупп S_α ($\alpha \in Y$), где каждая полугруппа S_α является $\mathcal{J}$-классом полугруппы S.*

Доказательство. Предположим, что выполняется условие (A). Пусть $a \in S$. Тогда a и a^2 принадлежат простой подполугруппе T из S, откуда $a \in Ta^2T \subseteq Sa^2S$. Таким образом, (A) влечет за собой (B). Условие (B) эквивалентно условию (C) по лемме 4.1. Очевидно, (D) влечет за собой (A). Для завершения доказательства теоремы осталось показать, что (D) следует из (B) и (C). Проделаем это в несколько шагов.

(1) SaS совпадает с главным идеалом $J(a)$, порожденным элементом a. В самом деле, $a \in Sa^2S \subseteq SaS$.

(2) $J(ab) = J(ba)$ для любых $a, b \in S$. В самом деле, $(ab)^2 = a(ba)b \in SbaS = J(ba)$, откуда ввиду условия (C) мы заключаем, что $ab \in J(ba)$. Следовательно, $J(ab) \subseteq J(ba)$ и требуемое равенство вытекает из симметричных рассуждений.

(3) $J(ab) = J(a) \cap J(b)$ для любых $a, b \in S$. Очевидно, $J(ab) \subseteq J(a) \cap J(b)$. Обратно, пусть $c \in J(a) \cap J(b)$. Тогда $c = uav = xby$ для некоторых $u, v, x, y \in S$. В силу (2) имеем $c^2 = xbyuav \in J(byua) = J(abyu)$. Отсюда на основании условия (C) следует, что $c \in J(abyu) \subseteq J(ab)$. Таким образом, $J(a) \cap J(b) \subseteq J(ab)$.

(4) В силу утверждения (3) множество Y главных идеалов полугруппы S является полуструктурой относительно пересечения и отображение $a \to J(a)$ есть гомоморфизм полугруппы S на Y. Прообразом элемента $J(a)$ полуструктуры Y является множество J_a элементов, порождающих $J(a)$, т. е. $\mathcal{J}$-класс, содержащий a. В частности, J_a — подполугруппа полугруппы S,

и S есть полуструктура Y попарно не пересекающихся полугрупп J_a. Доказательство справедливости условия (D) будет завершено, если мы покажем, что каждое J_a является простой полугруппой. По лемме 2.39 главный фактор $J(a)/I(a) = J_a \cup 0$ либо 0-прост, либо является полугруппой с нулевым умножением. Отсюда и из того, что J_a замкнуто относительно умножения, следует простота полугруппы J_a.

Пусть m и n — неотрицательные целые числа. Согласно Круазо, полугруппа S *удовлетворяет условию* (m, n), если для каждого $a \in S$ существует такое $x \in S$, что $a^m x a^n = a$. Здесь мы считаем, что a^m $[a^n]$ опускается, если $m = 0$ $[n = 0]$. Будем рассматривать лишь такие условия (m, n), для которых $m + n > 1$. Это бесконечное множество условий разбивается на четыре множества эквивалентных между собой условий:

I. Все условия $(m, 0)$, где $m \geqslant 2$.

II. Все условия $(0, n)$, где $n \geqslant 2$.

III. Условие $(1,1)$.

IV. Все условия (m, n), где $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ и $m + n \geqslant 3$.

Покажем, что все условия из класса I эквивалентны. Заметим, что условие $(m, 0)$ тривиально влечет за собой условие $(2,0)$. С другой стороны, если мы предположим выполненным условие $(2,0)$ для полугруппы S и возьмем $a \in S$, то $a^2 x = x$ при некотором $x \in S$. Умножая последовательно на a слева и на x справа, получим

$$a = a^2 x = a^3 x^2 = \ldots = a^m x^{m-1} = \ldots,$$

т. е. выполнено условие $(m, 0)$. Таким образом, все условия из класса I эквивалентны. Условие же $(2,0)$ — это регулярность справа. Двойственным образом, все условия класса II эквивалентны регулярности слева. Единственное условие класса III есть, очевидно, регулярность.

Наконец, покажем, что все условия класса IV эквивалентны одновременному выполнению условий из I, II и III; или, по теореме 4.3 (B, D, D′), одновременному выполнению любых двух условий из этих трех (любое из этих трех условий есть следствие двух других); или, снова по теореме 4.3, условию, что S разложима в объединение групп.

Пусть S удовлетворяет условию (m, n), где $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ и $m + n \geqslant 3$. Тогда условие $(1, 1)$ выполняется тривиально и справедливы условия $(0,2)$ или $(2,0)$. Следовательно, справедливы условия (D) или (D′) из теоремы 4.3. Тогда по теореме 4.3 выполняются оба условия (D), (D′), а также условие (B), и S есть объединение групп. Обратно, если S есть объединение групп, то выполняется, очевидно, каждое условие (m, n), в частности любое условие из IV.

Мы закончим этот параграф, сформулировав без доказательства еще три результата из статьи Круазо [1953]. Некоторые другие результаты будут приведены ниже в упражнениях. Говорят, что полугруппа S удовлетворяет условию (m, n) (1) *с единственностью*, если выполняется условие (m, n) и из $a^m x a^n = a^m y a^n$ следует $x = y$; (2) *с взаимностью*, если выполняется условие (m, n) и из $a^m x a^n = a$ следует $x^m a x^n = x$; (3) *с антивзаимностью*, если выполняется условие (m, n) и из $a^m x\, a^n = a$ и $x^m a x^n = x$ следует $x = a$. Полугруппа S удовлетворяет условию (m, n) с единственностью для некоторых $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ $[m \geqslant 2,\ n = 0]$ тогда и только тогда, когда S — группа [правая группа]. Полугруппа S удовлетворяет одному из условий $(0,2)$, $(2,0)$ или $(1,1)$ с взаимностью тогда и только тогда, когда она вполне проста. Полугруппа S удовлетворяет условию (m, n) с антивзаимностью для некоторых $m \geqslant 1$, $n \geqslant 1$ тогда и только тогда, когда S есть объединение не пересекающихся групп с некоторыми ограничениями на порядки элементов и все идемпотенты из S коммутируют между собой.

Упражнения к § 4.1

1. Интра-регулярная полугруппа полупроста.

2. Назовем элемент a полугруппы S *регулярным слева*, если $xa^2 = a$ при некотором $x \in S$. Множество регулярных слева элементов, содержащихся в $\mathscr{L}$-классе полугруппы S, либо пусто, либо является подполугруппой.

3. (a) Пусть Q и R — простые слева подполугруппы полугруппы S, содержащие общий элемент a. Тогда подполугруппа $T = \langle Q, R\rangle$, порожденная $Q \cup R$, также проста слева. [Указание: мы имеем $Ta = T$, $Tq = T$ для каждого $q \in Q$, $Tr = T$ для каждого $r \in R$ и, наконец, $Tt = T$ для каждого $t \in T$.]

(b) Каждая простая слева подполугруппа полугруппы S содержится в максимальной простой слева подполугруппе, и любые две различные максимальные простые слева подполугруппы не пересекаются. (Круазо [1953].)

4. (a) Каждая простая подполугруппа полугруппы S содержится в максимальной простой подполугруппе из S.

(b) Пусть S — рисовская полугруппа матричного типа над группой с нулем G^0 и с сэндвич-матрицей

$$P = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

где e — единица группы G. Тогда в обозначениях, введенных перед леммой 3.2, L_1 и R_2 — различные максимальные простые подполугруппы из S с непустым пересечением.

5. Если полугруппа S есть объединение групп, то максимальные простые подполугруппы из S не пересекаются. (Круазо [1953].)

6. Если $|X|=2$, то $\mathcal{T}_X$ (§ 1.1) есть объединение групп, но она не является связкой групп.

7. Если $|X|>2$, то $\mathcal{T}_X$ не является объединением простых полугрупп. (Круазо [1953].)

8. Если S — регулярная и интра-регулярная полугруппа, то S есть объединение непересекающихся регулярных простых полугрупп. (Круазо [1953].)

9. Идеал P полугруппы S называется *вполне изолированным* [1]), если $S \setminus P$ — подполугруппа полугруппы S.

(а) Пересечение любого семейства вполне изолированных идеалов полугруппы S либо пусто, либо является изолированным идеалом в S.

(в) Если A — изолированный идеал полугруппы S и $b \in S \setminus A$, то существует (по лемме Цорна) по крайней мере один идеал M полугруппы S, который максимален в множестве всех идеалов из S, содержащих A и не пересекающихся с $\langle b \rangle$. В коммутативной полугруппе S каждый такой идеал M вполне изолирован.

(с) Каждый изолированный идеал коммутативной полугруппы есть пересечение вполне изолированных идеалов (Шварц [1954c] для конечных полугрупп и Исеки [1956c] в общем случае.) Они использовали термин «замкнутый» [2]) вместо термина «изолированный». Соответствующая теорема для колец восходит к Круллю. (K r u l l W., Idealtheorie in Ringen ahne Endlichkeitsbedingung, *Math. Ann.*, **101** (1929), 729—744.)

§ 4.2. Полугруппы, являющиеся объединениями групп

В предыдущем параграфе мы рассмотрели разложения полугрупп в объединение непересекающихся групп, простых полугрупп, простых справа и простых слева полугрупп. Были даны необходимые и достаточные условия существования таких разложений. В данном параграфе нас будет интересовать наиболее частный из этих случаев — разложение на группы. Теорема 4.3 дает ряд условий для полугруппы S, каждое из которых эквивалентно тому, что S есть объединение групп. Эти условия, однако, не вскрывают полностью строения полугруппы S, и поэтому целью настоящего параграфа является изложение дальнейших результатов в этом направлении. Основные результаты взяты из статьи Клиффорда [1941].

---

[1]) В оригинале — prime. Здесь, как и при переводе термина semiprime термином «изолированный», мы используем соответствующий термин, употребляемый в русской литературе.— *Прим. перев.*

[2]) Closed.— *Прим. перев.*

Теорема 4.5. *Простая полугруппа есть объединение групп тогда и только тогда, когда она вполне проста.*

Доказательство. Из теоремы 2.52 (i) непосредственно вытекает, что вполне простая полугруппа (без нуля) есть объединение групп. Обратное утверждение есть не что иное, как частный случай теоремы 2.55.

Теорема 4.6. *Следующие условия для полугруппы S эквивалентны:*

(A) *S есть объединение групп.*

(B) *S есть объединение вполне простых полугрупп.*

(C) *S есть полуструктура Y вполне простых полугрупп S_α ($\alpha \in Y$), где Y — полуструктура главных идеалов полугруппы S и каждая полугруппа S_α есть $\mathscr{J}$-класс полугруппы S.*

Доказательство. Из условия (C) тривиально следует (B), и по теореме 4.5 (B) влечет за собой (A). Пусть выполняется условие (A). Тогда в силу теоремы 4.4 S есть полуструктура Y простых подполугрупп S_α. Так как из (A) следует, что каждый $\mathscr{H}$-класс полугруппы S есть группа (теорема 4.3), и $\mathscr{J}$-класс S_α есть объединение $\mathscr{H}$-классов полугруппы S, содержащихся в нем, каждая полугруппа S_α по теореме 4.5 является вполне простой полугруппой. Следовательно, выполняется условие (C).

Так как по теореме Риса 3.5 строение вполне простых полугрупп известно (как всегда, с точностью до групп!), полугруппа, разложимая в объединение групп, есть полуструктура Y полугрупп S_α ($\alpha \in Y$), строение которых известно. Однако строение самой полугруппы S остается не совсем ясным, даже с точностью до строения полуструктур. В самом деле, хотя мы знаем, что $S_\alpha S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$, мы не в состоянии сказать, как расположено произведение $a_\alpha b_\beta$ ($a_\alpha \in S_\alpha$, $b_\beta \in S_\beta$) в полугруппе $S_{\alpha\beta}$ при $\alpha \neq \beta$. В общем случае это трудная задача. Но если мы наложим еще предположение о том, что идемпотенты в S коммутируют, то строение полугруппы S можно полностью определить. Этому посвящена остальная часть настоящего параграфа. Заметим, что по теореме 1.17 полугруппа S в рассматриваемом случае является инверсной полугруппой. Таким образом, мы имеем дело с инверсными полугруппами, которые суть объединения групп.

Отметим сначала, что два различных идемпотента вполне простой полугруппы M никогда не коммутируют. В самом деле, если $e_{i\lambda}$ — идемпотент из $\mathscr{H}$-класса $H_{i\lambda}$, то по лемме 3.2 $e_{i\lambda}e_{j\mu} \in H_{i\mu}$ и $e_{j\mu}e_{i\lambda} \in H_{j\lambda}$. Если эти произведения равны, то должно быть $i = j$ и $\lambda = \mu$, поэтому $e_{i\lambda} = e_{j\mu}$, так как в $\mathscr{H}$-классе содержится не более одного идемпотента. Следовательно, если идемпотенты в M коммутируют, то M — группа. Итак, если S есть объединение групп и идемпотенты в S коммутируют, то по теореме 4.6 S — полуструктура Y групп. Отметим также, что в этом случае полуструктура Y изоморфна E, где E — множество идемпотентов полугруппы S, являющееся, очевидно, полуструктурой. Если $a \in S$, то $H_a = L_a = R_a = D_a = J_a$ (обозначения из § 2.1) есть максимальная подгруппа полугруппы S, содержащая a. Другими словами, все отношения Грина здесь совпадают и классы эквивалентности по ним суть максимальные подгруппы полугруппы S.

В следующих четырех леммах мы предполагаем, что S — инверсная полугруппа, являющаяся объединением групп. Предыдущие замечания и обозначения будут использоваться без пояснений. Кроме того, если $a \in S$, то через a^{-1} будет обозначаться элемент, инверсный к a и совпадающий в нашем случае с элементом, обратным для a в группе H_a.

Лемма 4.7. *Пусть $e \leqslant f$ $(e, f \in E)$ и $a \in H_f$. Тогда $ea = ae$ и $ea \in H_e$.*

Доказательство. Имеем $e = fe = a^{-1}ae$ и поэтому $ae \in L_e = H_e$. Аналогично, $ea \in H_e$. Следовательно, $ea = (ea)\,e = e\,(ae) = ae$.

Лемма 4.8. *Каждый идемпотент полугруппы S лежит в ее центре.*

Доказательство. Пусть $g \in E$ и $a \in S$. Тогда $a \in H_f$ при некотором $f \in E$. Пусть $fg\ (= gf) = e$. Тогда $e \leqslant f$ и по лемме 4.7 $ea = ae$. Следовательно, $ga = gfa = ea = ae = afg = ag$.

Пусть Y — полуструктура, изоморфная E (см. теорему 4.6), и пусть $\alpha \to e_\alpha$ есть изоморфизм полуструктуры Y на E. Таким образом, $e_\alpha e_\beta = e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha} = e_\beta e_\alpha$ и $e_\alpha \leqslant e_\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant \beta$ в Y. Будем писать G_α вместо H_{e_α}. Таким образом, $G_\alpha G_\beta \subseteq G_{\alpha\beta}$. Элементы из G_α будем обозначать через a_α, b_α, ...

Лемма 4.9. *Если $\alpha \geqslant \beta$, то отображение $\varphi_{\alpha,\beta}$, заданное при помощи равенства*

$$a_\alpha \varphi_{\alpha,\beta} = a_\alpha e_\beta \quad (a_\alpha \in G_\alpha),$$

является гомоморфизмом группы G_α в G_β. Если $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$, то

$$\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma} = \varphi_{\alpha,\gamma}.$$

Наконец, $\varphi_{\alpha,\alpha}$ — тождественное отображение группы G_α.

Доказательство. Из леммы 4.7 следует, что $\varphi_{\alpha,\beta}$ отображает G_α в G_β. Если $a_\alpha, b_\alpha \in G_\alpha$, то по лемме 4.8

$$(a_\alpha \varphi_{\alpha,\beta})(b_\alpha \varphi_{\alpha,\beta}) = (a_\alpha e_\beta)(b_\alpha e_\beta) = a_\alpha b_\alpha e_\beta = (a_\alpha b_\alpha)\,\varphi_{\alpha,\beta}.$$

Следовательно, $\varphi_{\alpha,\beta}$ — гомоморфизм. Если $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$, то для любого $a_\alpha \in G_\alpha$ имеем

$$(a_\alpha \varphi_{\alpha,\beta})\,\varphi_{\beta,\gamma} = (a_\alpha e_\beta)\,e_\gamma = a_\alpha e_{\beta\gamma} = a_\alpha e_\gamma = a_\alpha \varphi_{\alpha,\gamma}.$$

Наконец, $a_\alpha \varphi_{\alpha,\alpha} = a_\alpha e_\alpha = a_\alpha$.

Лемма 4.10. *Если* $a_\alpha \in G_\alpha$ *и* $b_\beta \in G_\beta$, *то*

$$a_\alpha b_\beta = (a_\alpha \varphi_{\alpha,\gamma})(b_\beta \varphi_{\beta,\gamma}),$$

где $\gamma = \alpha\beta$.

Доказательство. Используя лемму 4.8, получаем

$$a_\alpha b_\beta = a_\alpha e_\alpha b_\beta e_\beta = a_\alpha b_\beta e_\alpha e_\beta = a_\alpha b_\beta e_\gamma = $$
$$= a_\alpha e_\gamma b_\beta e_\gamma = (a_\alpha \varphi_{\alpha,\gamma})(b_\beta \varphi_{\beta,\gamma}).$$

Из леммы 4.10 вытекает, что каждое произведение в S известно, если известна полуструктура Y, каждая группа G_α ($\alpha \in Y$) и система гомоморфизмов $\varphi_{\alpha,\beta}$ ($\alpha \geqslant \beta$ в Y).

Теорема 4.11. *Пусть Y — полуструктура. Каждому элементу α из Y поставим в соответствие группу G_α таким образом, что G_α и G_β не пересекаются при $\alpha \neq \beta$. Каждой паре элементов α, β из Y, для которых $\alpha > \beta$, поставим в соответствие гомоморфизм $\varphi_{\alpha,\beta}$ группы G_α в G_β таким образом, что если $\alpha > \beta > \gamma$, то*

$$\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma} = \varphi_{\alpha,\gamma}. \tag{1}$$

Через $\varphi_{\alpha,\alpha}$ обозначим тождественный автоморфизм группы G_α. Пусть S — объединение всех групп G_α ($\alpha \in Y$). Определим произведение в S, полагая для двух элементов a_α, b_β из S ($a_\alpha \in G_\alpha$, $b_\beta \in G_\beta$)

$$a_\alpha a_\beta = (a_\alpha \varphi_{\alpha,\gamma})(b_\beta \varphi_{\beta,\gamma}), \tag{2}$$

где γ равно произведению $\alpha\beta$ элементов α и β полуструктуры Y.

Тогда S — полугруппа с коммутирующими идемпотентами, являющаяся объединением групп, или (что эквивалентно) инверсная полугруппа, являющаяся объединением групп. Обратно, каждая такая полугруппа может быть построена указанным способом.

Доказательство. Обратное утверждение уже установлено леммами 4.9 и 4.10.

Обращаясь к прямому утверждению, мы прежде всего должны доказать ассоциативность. Пусть a, b, c — произвольные элементы из S. Тогда $a = a_\alpha \in G_\alpha$, $b = b_\beta \in G_\beta$ и $c = c_\gamma \in G_\gamma$ для некоторых α, β, $\gamma \in Y$. Из (2) мы получаем равенство

$$(a_\alpha b_\beta) c_\gamma = [(a_\alpha \varphi_{\alpha,\alpha\beta})(b_\beta \varphi_{\beta,\alpha\beta})]\, \varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}(c_\gamma \varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}),$$

так как $a_\alpha b_\beta \in G_{\alpha\beta}$. Используя предположение о том, что $\varphi_{\alpha\beta,\alpha\beta\gamma}$ — гомоморфизм, применяя (1) и учитывая соотношения $\alpha \geqslant \alpha\beta \geqslant \alpha\beta\gamma$, мы получаем

$$(a_\alpha b_\beta) c_\gamma = [(a_\alpha \varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma})(b_\beta \varphi_{\beta,\alpha\beta\gamma})](c_\gamma \varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma}).$$

Аналогично убеждаемся, что

$$a_\alpha (b_\beta c_\gamma) = (a_\alpha \varphi_{\alpha,\alpha\beta\gamma})[(b_\beta \varphi_{\beta,\alpha\beta\gamma})(c_\gamma \varphi_{\gamma,\alpha\beta\gamma})].$$

Остается воспользоваться ассоциативностью в $G_{\alpha\beta\gamma}$.

В силу формулы (2) мы получаем для любых элементов e_α, e_β из E

$$e_\alpha e_\beta = (e_\alpha \varphi_{\alpha,\alpha\beta})(e_\beta \varphi_{\beta,\alpha\beta}) = e_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta},$$

поэтому $e_\alpha e_\beta = e_{\alpha\beta} = e_{\beta\alpha} = e_\beta e_\alpha$. Следовательно, S — полугруппа с коммутирующими идемпотентами, являющаяся объединением групп.

Упражнения к § 4.2

1. Замечая, что связка (полугруппа идемпотентов) есть объединение одноэлементных групп, из теоремы 4.6 получаем, что каждая связка есть полуструктура прямоугольных связок (§ 1.8). (Маклин [1954].)

2. Условие, что полугруппа есть полуструктура групп, эквивалентно одновременному выполнению любых двух из следующих условий:

(1) S — объединение групп.

(2) S — инверсная полугруппа.

(3) Каждый односторонний идеал полугруппы S является двусторонним идеалом.

3. Полугруппа S есть связка групп тогда и только тогда, когда

(1) S регулярна и слева, и справа (§ 4.1).

(2) $Sba = Sba^2$ и $abS = a^2bS$ для всех a, $b \in S$. (Клиффорд [1954].)

4. Прямоугольная связка [вполне] простых полугрупп [вполне] проста. (См. упражнение 4 к § 2.7.) (Клиффорд [1954].)

5. Пусть $\mathscr{C}$ — класс полугрупп. Если полугруппа S есть связка полугрупп типа $\mathscr{C}$, то S есть полуструктура полугрупп, каждая из которых является прямоугольной связкой полугрупп типа $\mathscr{C}$. (Клиффорд [1954]. Упражнение 6 к § 4.1 показывает, что обратное утверждение неверно.)

6. В полугруппе S каждая подполугруппа имеет единицу тогда и только тогда, когда S есть полуструктура Y периодических групп, причем Y вполне упорядочена по убыванию (т. е. каждое непустое подмножество из Y имеет наибольший элемент). (Воробьев [1953a].)

7. Полугруппа S тогда и только тогда обладает тремя свойствами: (i) S есть объединение групп, (ii) S содержит идеал K, являющийся группой, и (iii) произведение любых двух различных идемпотентов из S равно единице группы K, когда S есть нулевая полуструктура Y групп (т. е. Y имеет нуль 0 и произведение любых двух различных элементов из Y равно 0). (Тьеррен [1955c].)

8. (a) Если S — конечно порожденная связка, в которой $aba = ab$ для всех a, $b \in S$, то S конечна. (Шютценберже [1947].)

(b) В связке S равенство $aba = ab$ имеет место для всех $a, b \in S$ тогда и только тогда, когда она есть полуструктура Y полугрупп левых нулей P_α ($\alpha \in Y$).

9. Обозначим через $\mathcal{FB}_n$ свободную связку (полугруппу идемпотентов) с n образующими. Другими словами, $\mathcal{FB}_n$ есть полугруппа, порожденная множеством $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ из n элементов и заданная всевозможными соотношениями вида $[w(x)]^2 = w(x)$, где $w(x)$ — произвольное слово в свободной полугруппе $\mathcal{F}_X$, порожденной множеством X (§ 1.2).

(a) Максимальным полуструктурным гомоморфным образом полугруппы $\mathcal{FB}_n$ является свободная коммутативная связка, порожденная множеством X. Она изоморфна (конечной) полуструктуре Y подмножеств [1]) множества X относительно объединения.

(b) $\mathcal{FB}_n$ есть объединение полуструктуры Y прямоугольных связок S_α ($\alpha \in Y$), где S_α состоит из всех слов w, таких, что множество образующих, встречающихся в w, равно α. Если $|\alpha| = |\beta|$, то $S_\alpha \cong S_\beta$. В силу симметрии число минимальных левых идеалов полугруппы S_α равно числу ее минимальных правых идеалов, т. е. прямоугольная связка S_α «квадратна». Обозначим это число (если оно конечно) через N_r.

(c) Через S_r обозначим связку S_α, где $\alpha = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Пусть R — минимальный правый идеал полугруппы S_r и y — элемент минимальной длины из R. Пусть x_i — последняя буква в записи y, представленного словом наименьшей возможной длины. Тогда x_i не может встретиться на другом месте в этой записи y, так как в противном случае в R можно найти элемент меньшей длины. Следовательно, каждый минимальный правый идеал полугруппы S_r имеет порождающий элемент вида

$$w(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_r)\, x_i. \tag{$*$}$$

Это показывает, что $N_r \leqslant rN_{r-1}^2$ при предположении конечности числа N_{r-1}. По индукции каждое N_r ($r = 1, \ldots, n$) конечно, и поэтому конечна полугруппа $\mathcal{FB}_n$.

(d) Любая конечно порожденная связка есть гомоморфный образ некоторой связки $\mathcal{FB}_n$, и поэтому она должна быть конечной полугруппой.

(Маклин [1954], Грин и Рис [1952]. Последние привели без доказательства формулу для порядка полугруппы $\mathcal{FB}_n$. Ее можно вывести, показав, что два различных элемента вида ($*$) не принадлежат одному и тому же минимальному правому идеалу полугруппы S_r и потому $N_r = rN_{r-1}^2$.)

10. Прямое произведение двух полугрупп есть объединение групп тогда и только тогда, когда каждый прямой сомножитель есть объединение групп. (Иван [1953].)

---

[1]) Непустых.— *Прим. ред.*

§ 4.3. Разложение коммутативной полугруппы на архимедовы компоненты; сепаративные полугруппы

Настоящий параграф начинается с основного результата (теорема 4.12), принадлежащего Тамуре и Кимуре [1954], из которого легко следует, что любая коммутативная полугруппа S единственным образом представима как полуструктура «архимедовых» полугрупп; последние мы называем «архимедовыми компонентами» полугруппы S. Этот результат, за исключением единственности, был получен также и Тьерреном [1954b], который показал, что любая коммутативная полугруппа S есть объединение попарно не пересекающихся архимедовых полугрупп; легко видеть, что любое такое разбиение полугруппы S должно быть полуструктурным разложением.

Результаты остальной части параграфа принадлежат Хьюитту и Цукерману [1956, § 4]. Эта изящная теория была развита ими для нужд теории характеров, часть которой будет изложена в § 5.5. Они показали (теорема 5.19 ниже), что характеры коммутативной полугруппы S отделяют элементы из S тогда и только тогда, когда в S из равенства $ab = a^2 = b^2$ всегда следует $a = b$. Мы будем говорить, что полугруппа S *сепаративна*, если она обладает последним свойством. Комбинируя теоремы 4.16 и 4.17, мы видим, что следующие условия эквивалентны: (1) S сепаративна; (2) архимедовы компоненты полугруппы S являются полугруппами с сокращениями; (3) S можно вложить в объединение групп.

Пусть a и b — элементы коммутативной полугруппы S. Мы говорим, что *a делит b* и пишем $a \mid b$, если существует такой элемент $x \in S^1$, что $ax = b$. Отношение делимости рефлексивно, транзитивно и стабильно (§ 1.5). Оно совпадает, конечно, с обычным отношением делимости, если S есть мультипликативная полугруппа коммутативного кольца. С другой стороны, оно совпадает с обычным отношением порядка, если S есть аддитивная полугруппа положительных действительных чисел. Последним примером объясняется введение следующего термина. Будем говорить, что коммутативная полугруппа S *архимедова*, если для любых двух элементов из S каждый делит некоторую степень другого. Легко видеть, что упорядоченная абелева группа G архимедова в обычном смысле тогда и только тогда, когда полугруппа положительных элементов из G архимедова в смысле только что данного определения.

Из предложения 1.7 следует, что каждая полугруппа S обладает максимальным полуструктурным гомоморфным образом. Приведем теперь явную форму соответствующего разложения для случая, когда S коммутативна (Тамура и Кимура [1954]). По поводу некоммутативной полугруппы S см. работу Ямады [1955b].

Если ρ — такая конгруэнция на полугруппе S, что S/ρ есть полугруппа идемпотентов, то мы будем говорить, что ρ является *идемпотентной конгруэнцией.*

Определим отношение η на произвольной коммутативной полугруппе S, полагая $a\eta b$ тогда и только тогда, когда каждый из элементов a и b делит некоторую степень другого.

Теорема 4.12. *Отношение η на любой коммутативной полугруппе S является конгруэнцией, и S/η есть максимальный полуструктурный гомоморфный образ полугруппы S.*

Доказательство. Отношение η, очевидно, рефлексивно и симметрично. Докажем транзитивность. Пусть $a\eta b$ и $b\eta c$ $(a, b, c \in S)$. Тогда $a \mid b^m$ и $b \mid c^n$ для некоторых положительных целых чисел m и n, что влечет за собой $a \mid c^{mn}$. Аналогично, c делит некоторую степень a и мы заключаем, что $a\eta c$. Докажем, что η стабильно. Пусть $a, b, c \in S$ и $a\eta b$. Поскольку $a \mid b^m$, то $ac \mid b^m c$; очевидно, $b^m c \mid (bc)^m$, так что $ac \mid (bc)^m$. Аналогично, bc делит некоторую степень ac и, значит, $ac\eta bc$. Следовательно, η есть конгруэнция на S.

Очевидно, $a\eta a^2$ для любого $a \in S$; и так как S коммутативна, S/η есть полуструктура. Доказательство будет полностью завершено, если мы покажем, что η содержится в любой идемпотентной конгруэнции ρ на S. Пусть $a\eta b$. Тогда существуют такие положительные целые числа m, n и элементы $x, y \in S$, что $ax = b^m$ и $by = a^n$. Так как $a\rho a^2$ и $b\rho b^2$ в силу идемпотентности конгруэнции ρ, мы получаем $ax\rho b$ и $by\rho a$. Следовательно,

$$a\rho\,(by)\ \rho\ (b^2y)\ \rho\ (ba)\ \rho\ (a^2x)\ \rho\ (ax)\ \rho b.$$

Таким образом, $a\ \rho\ b$ и, значит, $\eta \subseteq \rho$.

Теорема 4.13. *Каждая коммутативная полугруппа S единственным образом представима как полуструктура Y архимедовых полугрупп S_α $(\alpha \in Y)$. Полуструктура Y изоморфна максимальному полуструктурному гомоморфному образу S/η полугруппы S, и подполугруппы S_α $(\alpha \in Y)$ являются классами конгруэнции η.*

Доказательство. Пусть S — коммутативная полугруппа и η — отношение на S, определение которого приведено перед теоремой 4.12. По теореме 4.12 S/η является полуструктурой и $S \sim S/\eta$. Тот факт, что S есть полуструктура архимедовых полугрупп, будет установлен, если мы покажем, что каждый класс A конгруэнции η является архимедовой подполугруппой.

Очевидно, A — подполугруппа полугруппы S, так как S/η есть связка. Пусть $a, b \in A$. Тогда $a\eta b$, так что $ax = b^m$ и $by = a^n$ для некоторых $x, y \in S$ и положительных целых чисел m и n. Тогда $a(bx) = b^{m+1}$ и $b(ay) = a^{n+1}$. Из $bx \mid b^{m+1}$ и $b \mid bx$ вытекает, что $bx\eta b$, и поэтому $bx \in A$. Аналогично, $ay \in A$. Таким образом, $a \mid b^{m+1}$ и $b \mid a^{n+1}$ в A, т. е. подполугруппа A архимедова.

Переходя теперь к доказательству единственности, предположим, что S — полуструктура Y архимедовых полугрупп S_α ($\alpha \in Y$). Нам достаточно показать, что каждая полугруппа S_α является классом конгруэнции η. Пусть $a, b \in S$. Докажем, что $a\eta b$ тогда и только тогда, когда a и b принадлежат одной и той же полугруппе S_α. Если и a и b принадлежат S_α, то каждый из них делит степень другого, так как S_α является архимедовой полугруппой; следовательно, по определению отношения η имеем $a\eta b$. Обратно, пусть $a\eta b$ и $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$. Так как $a\eta b$, мы имеем $ax = b^m$ и $by = a^n$ для некоторых $x, y \in S$ и некоторых положительных целых чисел m и n. Пусть $x \in S_\gamma$. Тогда $ax \in S_{\alpha\gamma}$ и $b^m \in S_\beta$, так что $\alpha\gamma = \beta$. Следовательно, $\alpha \geqslant \beta$ в полуструктуре Y. Симметрично показывается, что $\beta \geqslant \alpha$ и, таким образом, $\alpha = \beta$.

Скажем, что конгруэнция ρ на коммутативной полугруппе S *сепаративна*, если S/ρ сепаративна, т. е. если $ab\rho a^2\rho b^2$ влечет за собой $a\rho b$. Очевидно, пересечение любого семейства сепаративных конгруэнций на S сепаративно, откуда в силу предложения 1.7 следует, что S имеет максимальный сепаративный гомоморфный образ. Мы хотим получить явное выражение для него.

Определим отношение σ на произвольной коммутативной полугруппе S, полагая $a\sigma b$ тогда и только тогда, когда существует такое положительное целое число n, что $ab^n = b^{n+1}$ и $ba^n = a^{n+1}$. Заметим, что *если существуют такие положительные целые числа m и n, что $ab^m = b^{m+1}$ и $ba^n = a^{n+1}$, то $a\sigma b$*. В самом деле, если, например, $m < n$, то мы можем умножить $ab^m = b^{m+1}$ на b^{n-m} и получим $ab^n = b^{n+1}$.

Теорема 4.14. *Отношение σ на любой коммутативной полугруппе S является конгруэнцией, и S/σ есть максимальный сепаративный гомоморфный образ полугруппы S.*

Доказательство. Отношение σ, очевидно, рефлексивно и симметрично. Докажем, что оно транзитивно. Предположим, что $a\sigma b$ и $b\sigma c$, т. е. существуют такие положительные целые числа m и n, что

$$ab^n = b^{n+1}, \quad ba^n = a^{n+1},$$
$$bc^m = c^{m+1}, \quad cb^m = b^{m+1}.$$

Положим $k = (n+1)(m+1) - 1 = n(m+1) + m$. Тогда

$$\begin{aligned} ac^k &= ac^{n(m+1)}c^m = a(bc^m)^n c^m = \\ &= ab^n c^{m(n+1)} = b^{n+1}c^{m(n+1)} = \\ &= (bc^m)^{n+1} = c^{(m+1)(n+1)} = c^{k+1} \end{aligned}$$

и, аналогично, $ca^k = a^{k+1}$. Докажем, что σ стабильно. Предположим, что $a\sigma b$, т. е.

$$ab^n = b^{n+1}, \quad ba^n = a^{n+1}$$

для некоторого положительного целого n. Если $c \in S$, то

$$(ac)(bc)^n = ab^nc^{n+1} = b^{n+1}c^{n+1} = (bc)^{n+1}$$

и, аналогично, $(bc)(ac)^n = (ac)^{n+1}$. Следовательно, $ac\sigma bc$, и мы установили, что σ является конгруэнцией.

Докажем теперь, что эта конгруэнция сепаративна. Пусть a и b — такие элементы полугруппы S, что $ab\sigma a^2$ и $ab\sigma b^2$. Тогда существуют такие положительные целые числа m и n, что $(ab)(a^2)^m = (a^2)^{m+1}$ и $(ab)(b^2)^n = (b^2)^{n+1}$. Таким образом, $ba^{2m+1} = a^{2m+2}$ и $ab^{2n+1} = b^{2n+2}$. Из замечания, предшествующего формулировке теоремы, вытекает, что $a\sigma b$.

Доказательство будет полностью завершено, если мы покажем, что σ содержится в каждой сепаративной конгруэнции ρ на S. Пусть $a\sigma b$, скажем, $ab^n = b^{n+1}$ и $ba^n = a^{n+1}$. Нам нужно показать, что $a\rho b$. Пусть k — такое произвольное целое число, что

$$ab^k\rho b^{k+1}, \quad ba^k\rho a^{k+1}. \tag{1}$$

Условие (1) выполняется, например, при $k=n$. Предположим, что $k \geqslant 2$. Под ab^0 мы понимаем элемент a (если $k=2$). Тогда

$$(ab^{k-1})^2 = (ab^{k-2})(ab^k)\rho(ab^{k-2})b^{k+1} = (ab^{k-1})b^k,$$
$$(ab^{k-1})b^k = (ab^k)b^{k-1}\rho b^{k+1}b^{k-1} = (b^k)^2.$$

Полагая $x = ab^{k-1}$, $y = b^k$, имеем $xy\rho x^2$ и $xy\rho y^2$, следовательно, $x\rho y$, так как конгруэнция ρ сепаративна. Таким образом, $ab^{k-1}\rho b^k$ и, аналогично, $ba^{k-1}\rho a^k$. Следовательно, (1) выполняется для $k-1$. По индукции, опускаясь от $k=n$, мы получаем, что (1) выполняется для $k=1$. Следовательно, $ab\rho b^2$ и $ba\rho a^2$, откуда $a\rho b$.

Следствие 4.15. *Пусть S — сепаративная коммутативная полугруппа. Если a и b — такие элементы из S, что $ab^m = b^{m+1}$ и $ba^n = a^{n+1}$ для некоторых положительных целых чисел m и n, то $a = b$.*

Доказательство. В силу замечания, приведенного перед теоремой 4.14, имеем $a\sigma b$. Так как S сепаративна, отношение равенства ι на S сепаративно. По теореме 4.14 $\sigma \subseteq \iota$ и поэтому $a = b$.

Теорема 4.16. *Коммутативная полугруппа сепаративна тогда и только тогда, когда ее архимедовы компоненты являются полугруппами с сокращениями.*

Доказательство. Пусть S — сепаративная коммутативная полугруппа и S_α — ее архимедова компонента. Очевидно, S_α также сепаративна. Докажем, что S_α есть полугруппа с сокращениями. Пусть a, b, c — такие элементы из S, что $ac = bc$. Так как S_α—архимедова полугруппа, существуют такие элементы x, $y \in S_\alpha$ и положительные целые числа m и n, что $cx = a^m$ и $cy = b^n$. Тогда

$$a^{m+1} = acx = bcx = ba^m,$$
$$b^{n+1} = bcy = acy = ab^n.$$

В силу следствия 4.15 $a = b$.

Обратно, пусть S — такая коммутативная полугруппа, что каждая ее архимедова компонента S_α есть полугруппа с сокращениями. Пусть a и b — элементы из S, для которых $a^2 = b^2 = ab$. Если, скажем, $a \in S_\alpha$ и $b \in S_\beta$ (α, $\beta \in Y$), то $a^2 \in S_\alpha$ и $b^2 \in S_\beta$, так что $\alpha = \beta$. В силу того что S_α — полугруппа с сокращениями, имеем $a = b$.

Теорема 4.17. *Коммутативная полугруппа S вкладывается в полугруппу, являющуюся объединением групп, тогда и только тогда, когда она сепаративна.*

Доказательство. Предположим сначала, что S вкладывается в полугруппу Q, которая есть объединение групп. Пусть a и b — такие элементы из S, что $a^2 = b^2 = ab$. Если H_x обозначает максимальную подгруппу из Q, содержащую x, то $a^2 \in H_a$ и $b^2 \in H_b$, так что $H_a = H_b$. Но $a^2 = ab$, откуда вытекает, что $a = b$. Следовательно, S сепаративна.

Обратно, предположим, что полугруппа S сепаративна. В силу теоремы 4.13 S есть полуструктура Y своих архимедовых компонент S_α. По теореме 4.16 каждая компонента S_α есть полугруппа с сокращениями. Пусть G_α — группа частных полугруппы S_α (§ 1.10); напомним, что G_α есть группа, содержащая S_α, и что каждый элемент из G_α можно представить в виде ab^{-1}, где a, $b \in S_\alpha$, кроме того, $ab^{-1} = cd^{-1}$ (a, b, c, $d \in S_\alpha$) тогда и только тогда, когда $ad = bc$.

Так как полугруппы S_α попарно не пересекаются, мы можем считать, что группы G_α попарно не пересекаются. Пусть T есть их объединение. Определим произведение ($\circ$) в T следующим образом. Пусть a, $b \in T$, скажем, $a \in G_\alpha$ и $b \in G_\beta$. Тогда $a = a_1a_2^{-1}$, где a_1, $a_2 \in S_\alpha$, и $b = b_1b_2^{-1}$, где b_1, $b_2 \in S_\beta$. Положим

$$a \circ b = (a_1b_1)(a_2b_2)^{-1}.$$

Так как a_1b_1 и a_2b_2 принадлежат $S_{\alpha\beta}$, то $a \circ b$ есть элемент группы $G_{\alpha\beta}$. Мы должны доказать, что он не зависит от представления элемента a [b] как частного элементов полугруппы S_α [S_β]. Предположим, что $a = a_3a_4^{-1}$, где $a_3, a_4 \in S_\alpha$, и $b = b_3b_4^{-1}$, где b_3, $b_4 \in S_\beta$. Тогда $a_1a_4 = a_2a_3$ и $b_1b_4 = b_2b_3$, откуда $(a_1b_1)(a_4b_4) = (a_2b_2)(a_3b_3)$ в $S_{\alpha\beta}$, поэтому $(a_1b_1)(a_2b_2)^{-1} = (a_3b_3)(a_4b_4)^{-1}$ в $G_{\alpha\beta}$.

Докажем ассоциативность введенной операции. Пусть $a \in G_\alpha$, $b \in G_\beta$ и $c \in G_\gamma$. Тогда $a = a_1a_2^{-1}$, где a_1, $a_2 \in S_\alpha$, $b = b_1b_2^{-1}$, где $b_1, b_2 \in S_\beta$, $c = c_1c_2^{-1}$, где $c_1, c_2 \in S_\gamma$. Мы имеем

$$\begin{aligned}(a\circ b)\circ c &= [(a_1b_1)(a_2b_2)^{-1}]\circ[c_1c_2^{-1}] = \\ &= [(a_1b_1)\,c_1][(a_2b_2)\,c_2]^{-1} = \\ &= [a_1\,(b_1c_1)][a_2\,(b_2c_2)]^{-1} = \\ &= [a_1a_2^{-1}]\circ[(b_1c_1)(b_2c_2)^{-1}] = a\circ(b\circ c).\end{aligned}$$

Таким образом, T — полугруппа, являющаяся объединением групп и содержащая S. Мы, однако, должны еще доказать, что если a и b — элементы полугруппы S, то $a\circ b$ совпадает с первоначальным произведением ab элементов a и b в полугруппе S. Пусть $a \in S_\alpha$, $b \in S_\beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$. Тогда $a = a^2a^{-1}$ и $b = b^2b^{-1}$, так что $a\circ b = (a^2b^2)(ab)^{-1}$. Производя простые вычисления в коммутативной группе $G_{\alpha\beta}$, мы получаем $(a^2b^2)(ab)^{-1} = ab$ и, следовательно, $a\circ b = ab$, что и требовалось установить.

Мы не включили в формулировку предыдущей теоремы никакой информации о природе объединения групп, в которое вкладывается сепаративная коммутативная полугруппа S. Эта информация содержится в следующей теореме, которая резюмирует результаты настоящего параграфа. Мы отметим в упражнении 1(b) к настоящему параграфу, что, вообще говоря, не существует единственного минимального объединения групп, содержащего данную сепаративную коммутативную полугруппу.

Теорема 4.18. *Любая коммутативная полугруппа S единственным образом представима как полуструктура Y архимедовых полугрупп S_α $(\alpha \in Y)$. Полугруппа S может быть вложена в полугруппу T, являющуюся объединением групп, тогда и только тогда, когда S сепаративна, что имеет место тогда и только тогда, когда каждая архимедова компонента S_α есть полугруппа с сокращениями. В качестве полугруппы T можно взять объединение той же самой полуструктуры Y групп G_α, где для каждого $\alpha \in Y$ G_α есть группа частных полугруппы S_α.*

Упражнения к § 4.3

1. (a) Пусть S — полугруппа положительных целых чисел относительно умножения. Пусть α — конечное множество простых чисел и S_α состоит из всех положительных целых чисел n, для которых множество простых делителей есть в точности α. Тогда архимедовы компоненты полугруппы S есть в точности множества S_α. Максимальный полуструктурный гомоморфный образ полугруппы S изоморфен полуструктуре Y (относительно объединения) всех конечных подмножеств счетного множества.

(b) S можно вложить в объединение T полуструктуры Y групп G_α, где каждое G_α есть прямое произведение $|\alpha|$ экземпляров бесконечных циклических групп. Но T не является единственным минимальным объединением групп, в которое вкладывается S, так как S может быть вложена в одну группу.

2. Архимедова коммутативная полугруппа A может содержать не более одного идемпотента. Если A содержит идемпотент e, то каждый элемент a из A имеет обратный элемент a' относительно e, т. е. $aa' = a'a = e$. (Тамура и Кимура [1954].)

3. Пусть S — коммутативная полугруппа, содержащая идемпотент e. Тогда S является архимедовой полугруппой в том и только в том случае, когда (1) H_e есть группа зероидов полугруппы S (См. § 2.5, упражнения 4—7) и (2) некоторая степень каждого элемента из S принадлежит H_e.

4. Если архимедова компонента A сепаративной коммутативной полугруппы содержит идемпотент, то она является группой. (Хьюитт и Цукерман [1956].)

5. Пусть S — такая коммутативная полугруппа, что некоторая степень каждого элемента принадлежит некоторой ее подгруппе. Тогда каждая архимедова компонента S_α $(\alpha \in Y)$ полугруппы S содержит единственный идемпотент e_α. Максимальная подгруппа H_α из S, содержащая e_α, является идеалом (группой зероидов) в S_α. Объединение H_S всех H_α $(\alpha \in Y)$ является подполугруппой, которая есть объединение полуструктуры Y групп H_α $(\alpha \in Y)$. Если $a \in S_\alpha$, то $a\sigma$ (ae_α), где σ есть отношение, определенное перед теоремой 4.14. Далее, если a и b — элементы полугруппы S, то $a\sigma b$ тогда и только тогда, когда (i) a и b принадлежат одной и той же полугруппе S_α и (ii) $ae_\alpha = be_\alpha$. Следовательно, максимальный сепаративный гомоморфный образ S/σ полугруппы S изоморфен «групповой части» H_S полугруппы S. (Шварц [1954b] для периодической полугруппы S; см. также упражнение 5 к § 5.5.)

6. (a) Полугруппа, заданная образующими x, y и определяющими соотношениями $x^2 = y^2 = xy = yx$, является объединением полугрупп с сокращениями, но не сепаративна.

(b) Коммутативная полугруппа есть объединение попарно не пересекающихся полугрупп с сокращениями тогда и только тогда, когда она сепаративна.

7. Пусть S — произвольная полугруппа, не обязательно коммутативная. Назовем S *сепаративной* полугруппой, если $x^2 = xy = y^2$ $(x, y \in S)$ влечет за собой $x = y$.

(a) Если полугруппа S есть объединение попарно не пересекающихся полугрупп с сокращениями, то S сепаративна.

(b) Пусть S — периодическая полугруппа. Для каждого идемпотента $e \in S$ обозначим через S_e множество всех таких элементов a из S, что $a^n = e$ при некотором положительном целом n. Если $a \in S_e$, то $ea = ae$ и $a \in H_e$ тогда и только тогда, когда $ea = a$. Если S сепаративна, то $a^2 \in H_e$ влечет за собой $a \in H_e$, так что $S_e = H_e$.

(c) Следовательно, полугруппа S есть объединение попарно не пересекающихся периодических групп тогда и только тогда, когда она периодическая и сепаративная. (Шварц [1956].)

8. Пусть S — архимедова коммутативная полугруппа с сокращениями и без идемпотентов. Пусть a — фиксированный элемент из S и $T_n = a^n S \setminus a^{n+1}S$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, где под $a^0 x$ мы понимаем x для каждого x из S.

(a) $S = T_0 \cup T_1 \cup T_2 \cup \ldots$ и каждый элемент из T_n единственным образом представим в виде $a^n z$, где $z \in T_0$.

(b) Для $x, y \in S$ положим $x\rho y$, если существует такое неотрицательное целое число n, что $x = a^n y$ или $y = a^n x$. Тогда ρ является конгруэнцией и S/ρ есть группа, единицей которой служит класс ρa.

(c) Обозначим элементы полугруппы S/ρ через S_α, где α пробегает группу G, изоморфную S/ρ. Для каждого $\alpha \in G$ множество $S_\alpha \cap T_0$ состоит из одного элемента $u_\alpha \in S$, т. е. множество T_0 является множеством представителей ρ-классов полугруппы S. Для каждой пары элементов $\alpha, \beta \in G$ существует такое единственное неотрицательное целое число $n = I(\alpha, \beta)$, что $u_\alpha u_\beta = a^n u_{\alpha\beta}$, и функция I обладает следующими свойствами:

(i) $I(\alpha, \beta) = I(\beta, \alpha)$ для всех $\alpha, \beta \in G$;

(ii) $I(\alpha, \beta) + I(\alpha\beta, \gamma) = I(\alpha, \beta\gamma) + I(\beta, \gamma)$ для всех $\alpha, \beta, \gamma \in G$;

(iii) для каждого $\alpha \in G$ существует такое положительное целое число m, что $I(\alpha^m, \alpha) > 0$;

(iv) $I(\varepsilon, \varepsilon) = 1$, где ε — единица группы G.

(d) Обратно, если мы возьмем абелеву группу G, отображение I множества $G \times G$ в множество N_0 неотрицательных целых чисел, удовлетворяющее условиям (i) — (iv), и определим произведение в $S = N_0 \times G$, полагая

$$(m, \alpha)(n, \beta) = (m + n + I(\alpha, \beta), \alpha\beta),$$

то получим полугруппу S, которая является архимедовой коммутативной полугруппой с сокращениями и без идемпотентов. Более того, если мы положим $a = (0, \varepsilon)$, то S/ρ, построенная как и выше, будет изоморфна группе G, и мы получим то же самое отображение I, взяв $u_\alpha = (0, \alpha)$.

(e) Исходная полугруппа S изоморфна полугруппе $N_0 \times G$, построенной в (d), где $G \cong S/\rho$ и I определено в (c).

(Тамура [1957]. В терминологии Редеи [1952] S есть шрейерово расширение N_0 при помощи G.)

§ 4.4. Расширения полугрупп

Пусть S и T — непересекающиеся полугруппы и T содержит нуль 0. Полугруппу Σ будем называть (*идеальным*) *расширением полугруппы S при помощи T*, если она содержит S в качестве идеала и факторполугруппа Риса Σ/S (§ 1.5) изоморфна T.

Этот тип расширения естественным образом возникает при изучении полугрупп, обладающих композиционными рядами (§ 2.6); строение таких полугрупп было бы полностью изучено, если бы мы знали строение всех 0-простых полугрупп и имели бы эффективное решение проблемы расширения. В этом смысле здесь имеется некоторая аналогия с шрейеровской теорией групповых расширений. Действительное обобщение последней для полугрупп было дано Редеи [1952] и развито далее Вигандтом [1958a, b] и Хенкоком [1960a, b]. (В качестве примера см. упражнение 8 к § 4.3). Недостаток места не позволил нам привести обе теории, и мы выбрали теорию идеальных расширений, основываясь на замечании, сделанном выше. Результаты данного параграфа взяты из статьи Клиффорда [1950].

В шрейеровской теории мы всегда можем указать расширение одной группы (или полугруппы с единицей) при помощи другой, например их прямое произведение, а для идеальных расширений полугрупп это не всегда возможно (см. упражнение 1 ниже). Необходимые и достаточные условия существования идеального расширения полугруппы S при помощи полугруппы T неизвестны.

Так как в дальнейшем мы будем иметь дело лишь с одним типом расширений, условимся впредь отбрасывать приставку «идеальное» перед словом «расширение». На протяжении этого параграфа будем придерживаться следующих обозначений. Буквы S и T будут обозначать непересекающиеся полугруппы, причем считается, что полугруппа T содержит нуль 0. Положим $T^* = T \setminus 0$ и $\Sigma = S \cup T^*$.

Буквы $A, B, C, \ldots$, [$s, t, u, \ldots$] всегда будут обозначать элементы множества T^* [S]. Выражения, подобные «для всех $A, B \in T^*$ и для всех $s, t \in S$», будут обычно опускаться. Так как любое расширение полугруппы S при помощи T есть объединение S и T^*, ясно, что мы получим все возможные расширения Σ ($\circ$) полугруппы S при помощи T, если найдем все способы, с помощью которых можно задать на $\Sigma = S \cup T^*$ бинарную операцию ($\circ$), удовлетворяющую следующим условиям:

$$\text{(P 1)} \qquad A \circ B \begin{cases} = AB, & \text{если } AB \neq 0, \\ \in S, & \text{если } AB = 0; \end{cases}$$

$$\text{(P 2)} \quad A \circ s \in S; \qquad \text{(P 3)} \quad s \circ A \in S; \qquad \text{(P 4)} \quad s \circ t = st.$$

Начнем с особенно простого метода построения расширений. Понятие частичного гомоморфизма одного частичного группоида в другой было определено в замечании после теоремы 3.4. Согласно этому определению, отображение $A \to \bar{A}$ частичного группоида T^* в S является частичным гомоморфизмом тогда и только тогда, когда для любых $A, B \in T^*$, таких, что $AB \neq 0$, имеет место $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$.

Теорема 4.19. *Частичный гомоморфизм $A \to \bar{A}$ частичного группоида T^* в S следующим образом определяет расширение $\Sigma\,(\circ)$ полугруппы S при помощи T:*

(M 1) $$A \circ B = \begin{cases} AB, & \text{если } AB \neq 0, \\ \bar{A}\bar{B}, & \text{если } AB = 0; \end{cases}$$

(M 2) $A \circ s = \bar{A}s$; (M 3) $s \circ A = s\bar{A}$; (M 4) $s \circ t = st$.

Если S имеет единицу, то каждое расширение полугруппы S при помощи T получается этим методом.

Доказательство. Доказательство первой части теоремы сводится к стандартной проверке ассоциативности операции $(\circ)$, и его можно разбить на восемь случаев, которые мы будем обозначать через SSS, SST^* и т. д., в соответствии с тем, откуда выбираются три элемента, участвующие в проверке. Случай SSS следует из ассоциативности полугруппы S. Обратимся к случаю SST^*:

$$(s\circ t)\circ A = (st)\circ A = (st)\,\bar{A} = s\,(t\bar{A}) = s\,(t\circ A) = s\circ(t\circ A).$$

Случаи ST^*S, T^*SS и T^*ST^* рассматриваются аналогично. Обратимся к случаю ST^*T^*:

$$(s\circ A)\circ B = (s\bar{A})\circ B = (s\bar{A})\,\bar{B} = s\,(\bar{A}\bar{B}).$$

Если $AB = 0$, то

$$s\,(\bar{A}\bar{B}) = s\,(A\circ B) = s\circ(A\circ B)$$

в силу (M 1) и (M 4). Если $AB \neq 0$, то $\overline{AB} = \bar{A}\bar{B}$, и поэтому

$$s\,(\bar{A}\bar{B}) = s\,(\overline{AB}) = s\circ(AB) = s\circ(A\circ B).$$

Случай T^*T^*S рассматривается аналогично. Наконец, переходя к случаю $T^*T^*T^*$, заметим, что если $ABC \neq 0$, то $A\circ(B\circ C) = A\,(BC) = (AB)\,C = (A\circ B)\circ C$. Мы можем, следовательно, предположить, что $ABC = 0$. Имеется четыре подслучая в соответствии с тем, равны или не равны 0 элементы AB и BC. Мы имеем

$$(A\circ B)\circ C = \begin{cases} (AB)\circ C = (\overline{AB})\,\bar{C} = (\bar{A}\bar{B})\,\bar{C}, & \text{если } AB \neq 0; \\ (\bar{A}\bar{B})\circ C = (\bar{A}\bar{B})\,\bar{C}, & \text{если } AB = 0; \end{cases}$$

$$A\circ(B\circ C) = \begin{cases} A\circ(BC) = \bar{A}\,(\overline{BC}) = \bar{A}\,(\bar{B}\bar{C}), & \text{если } BC \neq 0, \\ A\circ(\bar{B}\bar{C}) = \bar{A}\,(\bar{B}\bar{C}), & \text{если } BC = 0. \end{cases}$$

Во всех четырех подслучаях ассоциативность следует из ассоциативности в S.

Обратно, предположим, что S имеет единицу 1. Из (P 2, 3, 4) и ассоциативности в $\Sigma\,(\circ)$ мы имеем

$$A\circ 1 = 1\circ(A\circ 1) = (1\circ A)\circ 1 = 1\circ A.$$

Определим отображение $A \to \bar{A}$, полагая $\bar{A} = A \circ 1$ ($= 1 \circ A$). Тогда из предыдущего и условия (P 1) вытекает

$$\bar{A}\bar{B} = A \circ 1 \circ B \circ 1 = A \circ B \circ 1 \circ 1 = A \circ B \circ 1. \qquad (1)$$

Будем записывать операции в S и T как приписывания. Если в T имеет место $AB \neq 0$, то $A \circ B = AB \in T^*$, и мы получаем $\bar{A}\bar{B} = A \circ B \circ 1 = (AB) \circ 1 = \overline{AB}$. Следовательно, отображение $A \to \bar{A}$ есть частичный гомоморфизм частичного группоида T^* в S.

Первая часть из (M 1) не требует доказательства. Докажем вторую. Пусть $AB = 0$ в T, так что $A \circ B \in S$. Тогда в силу (1) имеем $\bar{A}\bar{B} = (A \circ B) \circ 1 = (A \circ B)\, 1 = A \circ B$. Докажем (M 2): $A \circ s = A \circ 1 \circ s = \bar{A} \circ s = \bar{A}s$. Двойственным образом доказывается (M 3), а (M 4) доказательства не требует.

В оставшейся части этого параграфа мы будем считать полугруппу S слабо редуктивной (§ 1.3). Это является сравнительно слабым ограничением на S. По лемме 1.2 сдвиговая оболочка $\bar{S}$ полугруппы S будет ее расширением.

Теорема 4.20. *Пусть S — слабо редуктивная полугруппа и $\bar{S}$ — ее сдвиговая оболочка. Пусть T — полугруппа с нулем 0 и $T^* = T \setminus 0$, $\Sigma = T^* \cup S$, $\bar{\Sigma} = T^* \cup \bar{S}$. Пусть $\bar{\Sigma}$ $(\bar{\circ})$ — расширение полугруппы $\bar{S}$ при помощи T. Тогда Σ $(\circ)$ есть расширение полугруппы S при помощи T в том и только в том случае, когда Σ $(\circ)$ является подполугруппой из $\bar{\Sigma}$ $(\circ)$, а это имеет место тогда и только тогда, когда $A \circ B \in S$ для каждой пары таких элементов A, $B \in T$, что $AB = 0$ в T.*

Обратно, пусть Σ $(\circ)$ — расширение полугруппы S при помощи T. Тогда существует такое расширение $\bar{\Sigma}$ $(\circ)$ полугруппы $\bar{S}$ при помощи T, что Σ $(\circ)$ является подполугруппой из $\bar{\Sigma}$ $(\circ)$.

Доказательство. Пусть $\bar{\Sigma}$ $(\circ)$ является расширением полугруппы $\bar{S}$ при помощи T. Так как $\bar{S}$ содержит единицу, из теоремы 4.19 следует, что операция $(\circ)$ определяется при помощи частичного гомоморфизма θ: $A \to \bar{A}$ частичного группоида T^* в $\bar{S}$. Положим $A\theta = \bar{A} = (\lambda_A, \rho_A)$ для каждого $A \in T^*$. В силу условия (M 3) теоремы 4.19 для любого элемента $(\lambda, \rho) \in \bar{S}$ мы имеем

$$(\lambda, \rho) \circ A = (\lambda, \rho)(\lambda_A, \rho_A) = (\lambda_A\lambda, \rho\rho_A).$$

В частности, для элемента $s = (\lambda_s, \rho_s)$ из S ($= \bar{S}_0$)

$$s \circ A = (\lambda_A\lambda_s, \rho_s\rho_A) = (\lambda_t, \rho_t),$$

где по лемме 1.1 $t = s\rho_A$. Таким образом, $S \circ T^* \subseteq S$ и, двойственным образом, $T^* \circ S \subseteq S$. Следовательно, $S \circ \Sigma \subseteq S$ и $\Sigma \circ S \subseteq S$.

Если Σ является подполугруппой полугруппы $\overline{\Sigma}$, то предыдущее показывает, что S — идеал из Σ, и, следовательно, Σ есть расширение полугруппы S при помощи T. С другой стороны, если Σ является расширением полугруппы S, то оно должно быть полугруппой. Из предыдущего также ясно, что Σ является подполугруппой полугруппы $\overline{\Sigma}$ тогда и только тогда, когда $T^* \circ T^* \subseteq \subseteq \Sigma$, а это эквивалентно тому, что равенство $AB = 0$ влечет за собой $A \circ B \in S$.

Переходя к доказательству обратного утверждения теоремы, предположим, что Σ ($\circ$) является расширением полугруппы S при помощи T. Для каждого $A \in T$ определим преобразования λ_A и ρ_A полугруппы S, полагая

$$s\lambda_A = A \circ s, \quad s\rho_A = s \circ A.$$

В силу ассоциативности операции в Σ ($\circ$) преобразование λ_A [ρ_A] будет левым [правым] сдвигом полугруппы S и сдвиги λ_A, ρ_A связаны. Следовательно, условие $A \to A\theta = \overline{A} = (\lambda_A, \rho_A)$ определяет отображение θ частичного группоида T^* в $\overline{S}$. Снова используя ассоциативность операции в Σ ($\circ$), мы видим, что для $A, B \in T^*$, таких что $AB \neq 0$, имеет место $\lambda_{AB} = \lambda_B \lambda_A$ и $\rho_{AB} = \rho_A \rho_B$. Следовательно,

$$\begin{aligned}(AB)\,\theta &= (\lambda_{AB}, \rho_{AB}) = (\lambda_B\lambda_A, \rho_A\rho_B) = \\ &= (\lambda_A, \rho_A)(\lambda_B, \rho_B) = (A\theta)(B\theta),\end{aligned}$$

поэтому θ есть частичный гомоморфизм частичного группоида T^* в $\overline{S}$. По теореме 4.19 отображение θ определяет расширение $\overline{\Sigma}$ ($*$) полугруппы $\overline{S}$ при помощи T. Доказательство теоремы будет полностью завершено, если мы покажем, что Σ ($\circ$) является подполугруппой из $\overline{\Sigma}$ ($*$), т. е. ($*$) совпадает с ($\circ$) на $\Sigma \times \Sigma$ [1]).

Это очевидно для $S \times S$. Рассмотрим $S \times T^*$. Мы имеем

$$\begin{aligned}s * A &= (\lambda_{s}, \rho_s) * A = (\lambda_s, \rho_s)(A\theta) = \\ &= (\lambda_s, \rho_s)(\lambda_A, \rho_A) = (\lambda_t, \rho_t) = t,\end{aligned}$$

где по лемме 1.1 $t = s\rho_A$. Но $s\rho_A = s \circ A$ и поэтому $s * A = s \circ A$. Двойственным образом мы можем установить, что ($*$) совпадает с ($\circ$) на $T^* \times S$.

Рассмотрим $T^* \times T^*$. Мы имеем $A * B = AB = A \circ B$, если $AB \neq 0$. Следовательно, можно предположить, что $AB = 0$. Тогда по теореме 4.19

$$\begin{aligned}A * B &= (A\theta)(B\theta) = (\lambda_A, \rho_A)(\lambda_B, \rho_B) = \\ &= (\lambda_B \lambda_A, \rho_A\rho_B).\end{aligned}$$

---

[1]) Здесь имеется в виду совпадение операций ($*$) и ($\circ$) как отображений, определенных на множестве $\Sigma \times \Sigma$.— *Прим. ред.*

Так как $AB = 0$, то $A \circ B \in S$ и поэтому

$$s(\rho_A, \rho_B) = (s\rho_A)\rho_B = (s \circ A) \circ B = s \circ (A \circ B) = s\rho_{A \circ B}.$$

Таким образом, $\rho_A \rho_B = \rho_{A \circ B}$ и, аналогично, $\lambda_B \lambda_A = \lambda_{A \circ B}$. Следовательно,

$$A * B = (\lambda_{A \circ B}, \rho_{A \circ B}) = A \circ B.$$

Теорема 4.20 сводит проблему нахождения всевозможных расширений слабо редуктивной полугруппы S при помощи полугруппы T с нулем 0 к проблеме нахождения всех таких частичных гомоморфизмов θ частичного группоида $T^* = T \setminus 0$ в сдвиговую оболочку $\overline{S}$ полугруппы S, что если A и B — элементы из T^*, для которых $AB = 0$, то $(A\theta)(B\theta)$ содержится в S (а не только в $\overline{S}$). Теорема 4.21 выражает эти условия на θ в терминах отображений, затрагивающих лишь T^* и S.

Сначала, однако, ответим на вопрос, который может возникнуть здесь у читателя. Если полугруппа S имеет единицу, то все ее расширения при помощи T задаются теоремой 4.19 посредством частичных гомоморфизмов частичного группоида T^* в S; в этом случае $\overline{S} = S$. Теорема 4.20 дает нам возможность применять теорему 4.19 к полугруппе $\overline{S}$, так как $\overline{S}$ содержит единицу. Но $S^1 = S \cup \{1\}$ — также полугруппа с единицей, содержащая S; почему мы не можем использовать S^1 вместо $\overline{S}$?

Ответ состоит в том, что мы можем в таком случае не получить всех расширений полугруппы S. В частности, мы можем не получить, вообще говоря, расширения $\overline{S}$. А именно, $\overline{S}$ можно получить таким способом только в случае, когда $\overline{S} \cong S^1$.

В самом деле, предположим, что мы можем получить $\overline{S}$ из расширения $\Sigma(\circ) = T^* \cup S^1$ полугруппы S^1, где $T^* = \overline{S} \setminus S$. Пусть $A = (\lambda_A, \rho_A)$ — элемент из T^*. Так как $A \circ 1$ и $1 \circ A$ принадлежат S^1, получаем

$$A \circ 1 = 1 \circ (A \circ 1) = (1 \circ A) \circ 1 = 1 \circ A.$$

Не может быть, чтобы $A \circ 1 = a \in S$. Действительно, в противном случае для каждого $s \in S$

$$s\lambda_A = A \circ s = A \circ 1 \circ s = a \circ s = as = s\lambda_a,$$

следовательно, $\lambda_A = \lambda_a$ и, аналогично, $\rho_A = \rho_a$, что противоречит условию $A \notin S$. Следовательно, $A \circ 1 = 1 \circ A = 1$. Но тогда для каждого $s \in S$

$$s\lambda_A = A \circ s = A \circ 1 \circ s = 1 \circ s = s,$$

следовательно, $\lambda_A = \iota$ и, аналогично, $\rho_A = \iota$. Таким образом, $A = (\iota, \iota)$ есть единственный элемент из $\overline{S}$, лежащий вне S, поэтому $\overline{S} \cong S^1$.

Пусть теперь S — произвольная полугруппа, T — произвольная полугруппа с нулем 0 и $T^* = T \setminus 0$. Обозначим через W множество всех пар (A, B) элементов $A, B \in T^*$, для которых $AB = 0$. Любое отображение φ множества W в S будем называть *ветвлением* [1]) полугруппы T в S. Если θ — частичный гомоморфизм частичного группоида T^* в S, то определим φ, полагая $(A, B)\varphi = (A\theta)(B\theta)$. Будем говорить, что φ есть *ветвление полугруппы T в S, ассоциированное с θ.*

Теорема 4.21. *Пусть S — слабо редуктивная полугруппа, T — произвольная полугруппа с нулем 0. Пусть φ — ветвление полугруппы T в S и $A \to \lambda_A$, $A \to \rho_A$ суть такие отображения частичного группоида $T^* = T \setminus 0$ соответственно в полугруппы Λ и P левых и правых сдвигов полугруппы S, что выполняются следующие условия:*

(C 1) $$\lambda_B\lambda_A = \begin{cases} \lambda_{AB}, & \text{если } AB \neq 0, \\ \lambda_{(A, B)\varphi}, & \text{если } AB = 0; \end{cases}$$

(C 2) $$\rho_A\rho_B = \begin{cases} \rho_{AB}, & \text{если, } AB \neq 0, \\ \rho_{(A, B)\varphi}, & \text{если, } AB = 0; \end{cases}$$

(C 3) $s(t\lambda_A) = (s\rho_A)t$; *т. е. λ_A и ρ_A связаны.*

Пусть $\Sigma = T^* \cup S$, и пусть в Σ следующим образом определена бинарная операция $(\circ)$:

(N 1) $$A \circ B = \begin{cases} AB, & \text{если } AB \neq 0, \\ (A, B)\varphi, & \text{если } AB = 0. \end{cases}$$

(N 2) $A \circ s = s\lambda_A$; (N 3) $s \circ A = s\rho_A$; (N 4) $s \circ t = st$.

Тогда $\Sigma(\circ)$ является расширением полугруппы S при помощи T, и каждое расширение полугруппы S при помощи T можно построить таким способом.

Доказательство. Если $\Sigma(\circ) = T^* \cup S$ есть расширение полугруппы S при помощи T и мы определим отображения φ, λ_A, ρ_A, исходя из условий (N 1), (N 2), (N 3), то все утверждения теоремы легко следуют из ассоциативного закона в $\Sigma(\circ)$.

Обратно, пусть φ, λ_A, ρ_A суть отображения, удовлетворяющие предположениям теоремы. В силу условия (C 3) отображение θ, определенное равенством $A\theta = (\lambda_A, \rho_A)$, является отображением множества T^* в сдвиговую оболочку $\overline{S}$ полугруппы S. В силу условий (C 1) и (C 2) θ есть частичный гомоморфизм. Пусть $\overline{\Sigma}(\circ) = T^* \cup \overline{S}$ есть соответствующее расширение полугруппы $\overline{S}$ при помощи T, построенное в теореме 4.19. Доказательство будет полностью завершено, если мы установим, что выполняются условия (N 1)—(N 4).

[1]) В оригинале — ramification.— *Прим. перев.*

Так как полугруппа S слабо редуктивна, мы можем отождествить ее с $\overline{S}_0$, т. е. каждый элемент s из S отождествить с элементом (λ_s, ρ_s). Пусть A и B — такие элементы из T^*, что $AB = 0$. В силу свойств (С 1), (С 2) и условия (М 1) из теоремы 4.19 мы имеем

$$\begin{aligned} A \circ B = (A\theta)(B\theta) = (\lambda_A, \rho_A)(\lambda_B, \rho_B) = \\ = (\lambda_B \lambda_A, \rho_A \rho_B) = (\lambda_{(A,B)\varphi}, \rho_{(A,B)\varphi}) = \\ = (A, B)\varphi. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется (N 1). Из условия (М 2) теоремы 4.19 и леммы 1.2 вытекает, что

$$A \circ s = (A\theta)\, s = (\lambda_A, \rho_A)\, s = s\lambda_A.$$

Следовательно, выполняется (N 2). Двойственным образом доказывается (N 3), а (N 4) не нуждается в доказательстве.

Упражнения к § 4.4

1. Пусть полугруппа S не содержит левых единиц, а ее полугруппа левых сдвигов Λ не содержит идемпотентов, отличных от тождественного отображения. (Например, в качестве S можно взять бесконечную циклическую полугруппу.) Пусть T — полугруппа с нулем 0, содержащая два ненулевых идемпотента E и F, для которых $EF = 0$. (Например, в качестве T можно взять мультипликативную полугруппу кольца классов вычетов по mod 6 и положить $E = 3$, $F = 4$.) Тогда не существует расширений полугруппы S при помощи T.

2. Расширение полугруппы S при помощи T всегда существует в любом из следующих случаев: (1) T не содержит собственных делителей нуля; (2) S содержит идемпотент.

3. Пусть S — полугруппа, являющаяся объединением двух непересекающихся групп H_1 и H_2. Тогда S есть левая или правая группа, или либо H_1, либо H_2 является ядром полугруппы S. Если H_2 — ядро в S, то строение полугруппы S определяется гомоморфизмом группы H_1 в H_2, как описано в теореме 4.11 или теореме 4.19. (Сушкевич [1937], гл. 3, § 29.)

§ 4.5. *Расширения группы при помощи вполне 0-простой полугруппы; эквивалентность расширений*

В предыдущем параграфе мы дали общие способы нахождения всевозможных расширений (слабо редуктивной) полугруппы S при помощи полугруппы T с нулем 0. Как и в случае шрейеровской теории групповых расширений, эти способы носят теоретический характер и применять их к тем или иным специальным классам полугрупп обычно трудно. Такие применения были сделаны в двух случаях: (1) полугруппа S вполне проста, а T произвольна; (2) S — группа, а T — вполне 0-простая полугруппа [1]). Результаты в случае (1), принадлежащие Клиффорду [1941, § 4; 1950, § 5], формулируются очень громоздко, и поэтому мы их опустим. Результаты в случае (2), принадлежащие Манну [1955a], более удовлетворительны, и мы изложим их здесь. К этим результатам Манна, которые публикуются здесь впервые, мы добавили только не очень удовлетворительную обратную часть теоремы 4.24.

Мы также рассмотрим эквивалентность расширений не только в случае (2), но и в более общем случае, когда S есть произвольная полугруппа с единицей.

Пусть G^* — группа, а T — вполне 0-простая полугруппа. В силу теоремы 4.19 для нахождения всех расширений группы G^* при помощи T нам нужно только найти все частичные гомоморфизмы частичного группоида $T \setminus 0$ в G^*, что в свою очередь можно получить при помощи теоремы 3.14. По теореме Риса 3.5 мы представляем T как регулярную рисовскую полугруппу над группой с нулем G^0 с $\Lambda \times I$-сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$. Полугруппа S^* из теорем 3.11 и 3.14 сводится теперь к группе G^*. Следовательно, мы можем рассматривать I^* и Λ^* как одноэлементные множества, а P^* — как 1×1-матрицу с элементом e^*, где e^* — единица группы G^*. Равенства (1) и (2) из § 3.4 сводятся соответственно к

$$p_{\lambda i}\omega = v_\lambda u_i, \tag{1}$$

$$(a;\ i,\ \lambda)\,\theta = u_i\,(a\omega)\,v_\lambda\ (a \in G;\ i \in I;\ \lambda \in \Lambda). \tag{2}$$

Итак, мы имеем такое следствие теоремы 3.14.

Теорема 4.22. *В приведенных выше обозначениях пусть $i \to u_i$ и $\lambda \to v_\lambda$ суть отображения множества I в G^* и множества Λ в G^* соответственно. Пусть ω — гомоморфизм группы G в G^*, причем выполняется равенство* (1) *для всех $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$, таких, что $p_{\lambda i} \neq 0$. Тогда равенство* (2) *определяет частичный гомоморфизм $T \setminus 0$ в G^*, и каждый частичный гомоморфизм $T \setminus 0$ в G^* получается таким способом.*

Назовем два расширения Σ и Σ' полугруппы S *эквивалентными*, если существует изоморфизм полугруппы Σ на Σ', отображающий S на себя. Отображение S на себя должно, очевидно, быть автоморфизмом.

Теорема 4.23. *Пусть S — полугруппа с единицей, а T — полугруппа с нулем. Пусть Σ и Σ' — расширения полугруппы S, определенные частичными гомоморфизмами θ и θ' частичного*

[1]) В работе Грилле и Петрича [1968] осуществлено дальнейшее продвижение в описании идеальных расширений слабо редуктивных полугрупп. — *Прим. ред.*

группоида $T \setminus 0$ *в* S. *Тогда* Σ *и* Σ' *эквивалентны в том и только в том случае, когда существуют автоморфизмы* ψ *полугруппы* T *и* α *полугруппы* S, *для которых* $\theta\alpha = \psi_1\theta'$, *где* ψ_1 *есть ограничение* ψ *на* $T \setminus 0$.

Доказательство. Предположим сначала, что Σ и Σ' эквивалентны. Тогда существует изоморфизм φ полугруппы Σ на Σ', который индуцирует автоморфизм α полугруппы S. Очевидно, φ индуцирует также автоморфизм ψ полугруппы $T \cong \Sigma/S$, так как φ отображает $T \setminus 0$ на $T \setminus 0$ и S на S.

Пусть операция в Σ обозначается через $(\circ)$, а в Σ' — через $(*)$. В силу теоремы 4.19

$$A \circ B = \begin{cases} AB, & \text{если} \quad AB \neq 0, \\ (A\theta)(B\theta), & \text{если} \quad AB = 0; \end{cases}$$

$$A \circ s = (A\theta)\, s; \quad s \circ A = s\,(A\theta); \quad s \circ t = st.$$

Аналогично,

$$A * B = \begin{cases} AB, & \text{если} \quad AB \neq 0, \\ (A\theta')(B\theta'), & \text{если} \quad AB = 0; \end{cases}$$

$$A * s = (A\theta')\, s; \quad s * A = s\,(A\theta'); \quad s * t = st.$$

Тогда, обозначая через 1 единицу полугруппы S, получаем

$$A\theta\varphi = (A \circ 1)\,\varphi = (A\varphi) * (1\varphi) = (A\varphi) * 1 = A\varphi\theta'.$$

Так как $\alpha = \varphi \mid S$, $\psi_1 = \varphi \mid (T \setminus 0)$ и $A\theta \in S$, мы имеем

$$A\theta\alpha = A\theta\varphi = A\varphi\theta' = A\psi_1\theta'.$$

Так как это выполняется для любого $A \in T \setminus 0$, мы заключаем, что $\theta\alpha = \psi_1\theta'$.

Обратно, пусть ψ — автоморфизм полугруппы T и α — такой автоморфизм полугруппы S, что $\theta\alpha = \psi_1\theta'$. Определим отображение φ, полагая $s\varphi = s\alpha$ (для всех $s \in S$) и $A\varphi = A\psi_1$ (для всех $A \in T \setminus 0$). Тогда φ является, очевидно, подстановкой на $S \cup (T \setminus 0)$. Для того чтобы доказать, что φ является изоморфизмом полугруппы Σ на Σ', мы должны установить, что

$$\begin{aligned} (A \circ B)\,\varphi &= A\varphi * B\varphi, \\ (A \circ s)\,\varphi &= A\varphi * s\varphi, \\ (s \circ A)\,\varphi &= s\varphi * A\varphi, \\ (s \circ t)\,\varphi &= s\varphi * t\varphi. \end{aligned}$$

Замечая, что $AB \neq 0$ тогда и только тогда, когда $(A\psi_1)(B\psi_1) \neq \neq 0$, мы получаем, что приведенные равенства эквивалентны равенствам

$$\begin{aligned}
(AB)\,\psi_1 &= (A\psi_1)\,(B\psi_1), \text{ если } AB \neq 0 \text{ в } T,\\
[(A\theta)\,(B\theta)]\,\alpha &= (A\psi_1\theta')\,(B\psi_1\theta'), \text{ если } AB = 0 \text{ в } T,\\
[(A\theta)\,s]\,\alpha &= (A\psi_1\theta')\,(s\alpha),\\
[s\,(A\theta)]\,\alpha &= (s\alpha)\,(A\psi_1\theta'),\\
(st)\,\alpha &= (s\alpha)\,(t\alpha).
\end{aligned}$$

Первое и последнее равенства непосредственно вытекают из предположения о том, что ψ — автоморфизм полугруппы T и α — автоморфизм полугруппы S. Левая часть второго равенства равна $(A\theta\alpha)\,(B\theta\alpha)$, т. е. правой части этого равенства, так как $\theta\alpha = =\psi_1\theta'$. Левая часть третьего равенства равна $(A\theta\alpha)\,(s\alpha)$, т. е., как и выше, правой части этого равенства. Четвертое равенство доказывается аналогично.

Так как изоморфизм φ полугруппы Σ на Σ' индуцирует автоморфизм α полугруппы S на себя, расширения Σ и Σ' эквивалентны.

Если Σ и Σ' — расширения группы G^* и если φ — изоморфизм полугруппы Σ на Σ', то φ должно отображать G^* на себя; в самом деле, G^* является ядром полугрупп Σ и Σ'. Следовательно, *если Σ и Σ' изоморфны, то они суть эквивалентные расширения группы G^**. Это было отмечено Тамурой [1954b]. Используем теоремы 4.22 и 4.23 для получения следующей теоремы.

Теорема 4.24. *Пусть G^* и T — те же полугруппы, что и в теореме 4.22. Пусть Σ и Σ' — расширения группы G^* при помощи T, задаваемые соответственно частичными гомоморфизмами θ и θ' частичного группоида $T\setminus 0$ в G^*. По теореме 4.22 отображения θ и θ' имеют вид*

$$\begin{aligned}
(a;\ i,\ \lambda)\,\theta &= u_i\,(a\omega)\,v_\lambda,\\
(a;\ i,\ \lambda)\,\theta' &= u'_i\,(a\omega')\,v'_\lambda,
\end{aligned} \qquad (3)$$

где ω и ω' — гомоморфизмы группы G в G^* и u_i, v_λ, u'_i, v'_λ — такие элементы из G^*, что

$$p_{\lambda i}\omega = v_\lambda u_i, \quad p_{\lambda i}\omega' = v'_\lambda u'_i \qquad (4)$$

при всех $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$, для которых $p_{\lambda i} \neq 0$. Если расширения Σ и Σ' изоморфны, то существуют отображения $i \to x_i$ множества I в G и $\lambda \to y_\lambda$ множества Λ в G, подстановки σ и τ на I и на Λ соответственно и автоморфизмы γ и δ групп G^* и G соответственно, для которых

$$\delta\omega' = \omega\gamma, \qquad (5)$$

$$p_{\lambda i}\delta = y_\lambda p_{\lambda\tau,\, i\sigma} x_i \qquad (i \in I,\ \lambda \in \Lambda)\ , \qquad (6)$$

где мы распространяем δ на полугруппу G^0, полагая $0\delta = 0$.

Обратное выполняется, если T не содержит собственных делителей нуля.

Замечание. Как и в следствии 3.12, мы можем также выразить условие (6), утверждая, что существуют инвертируемая $I \times I$-матрица X и инвертируемая $\Lambda \times \Lambda$-матрица Y, для которых $P\delta = YPX$.

Об утверждении, обратном к утверждению теоремы 4.24, см. упражнения 2 и 3 ниже.

Доказательство. Предположим, что Σ и Σ' изоморфны и, следовательно, эквивалентны в силу замечания, предшествующего теореме. По теореме 4.23 существуют такие автоморфизмы ψ и α полугруппы T и группы G^* соответственно, что $\theta\alpha = \psi_1\theta'$, где $\psi_1 = \psi \mid (T \setminus 0)$. Применим теперь теорему 3.11, взяв в качестве S и S^* полугруппу T и в качестве θ — отображение ψ; заметим, что (как и в доказательстве следствия 3.12) отображения φ, ψ и ω должны быть теперь взаимно однозначными и отображениями на. Мы заключаем, что существуют отображение $i \to x_i$ множества I в G и отображение $\lambda \to y_\lambda$ множества Λ в G, подстановки σ на I и τ на Λ и автоморфизм δ группы с нулем G^0, удовлетворяющие условию (6), для которых

$$(a;\ i,\ \lambda)\,\psi_1 = (x_i\,(a\delta)\,y_\lambda;\ i\sigma,\ \lambda\tau) \tag{7}$$

при всех $a \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$.

Применяя α к первому из равенств (3), получаем

$$(a;\ i,\ \lambda)\,\theta\alpha = (u_i\alpha)\,(a\omega\alpha)\,(v_\lambda\alpha). \tag{8}$$

Применяя θ' к равенству (7) и используя второе из равенств (3), мы получаем

$$(a;\ i,\ \lambda)\,\psi_1\theta' = u'_{i\sigma}\,(x_i\omega')\,(a\delta\omega')\,(y_\lambda\omega')\,v'_{\lambda\tau}. \tag{9}$$

Так как $\theta\alpha = \psi_1\theta'$, правые части равенств (8) и (9) равны для любого $(a;\ i,\ \lambda) \in T \setminus 0$. Следовательно,

$$[(x_i\omega')^{-1}\,u'^{-1}_{i\sigma}\,(u_i\alpha)]\,(a\omega\alpha) = (a\delta\omega')\,[(y_\lambda\omega')\,v'_{\lambda\tau}\,(v_\lambda\alpha)^{-1}] \tag{10}$$

для всех $a \in G$, $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$. Полагая $a = e$, где e — единица группы G, мы получаем, что выражения, стоящие в квадратных скобках, равны для всех $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$. Так как левое из них не зависит от λ, а правое — от i, оба они равны (для всех i и λ) некоторому фиксированному элементу b из G^*. Следовательно,

$$b\,(a\omega\alpha) = (a\delta\omega')\,b \tag{11}$$

для всех $a \in G$. Пусть β — внутренний автоморфизм $x\beta = bxb^{-1}$ группы G^*. Тогда из формулы (11) вытекает $\omega\alpha\beta = \delta\omega'$. Полагая $\gamma = \alpha\beta$, мы получаем (5).

Обратно, предположим, что существуют отображения $i \to x_i$, $\lambda \to y_\lambda$, σ, τ, γ и δ, удовлетворяющие условиям теоремы. Используя (4), (5), (6) и предположение о том, что $p_{\lambda i} \neq 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и $i \in I$, мы получаем

$$\begin{aligned}(v_\lambda \gamma)(u_i \gamma) &= (v_\lambda u_i)\gamma = p_{\lambda i}\omega\gamma = p_{\lambda i}\delta\omega' = (y_\lambda p_{\lambda\tau,\, i\sigma} x_i)\,\omega' = \\ &= (y_\lambda \omega')(p_{\lambda\tau,\, i\sigma}\omega')(x_i\omega') = \\ &= (y_\lambda\omega')(v'_{\lambda\tau}u'_{i\sigma})(x_i\omega').\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(u_i\gamma)(x_i\omega')^{-1}u'^{-1}_{i\sigma} = (v_\lambda\gamma)^{-1}(y_\lambda\omega')\,v'_{\lambda\tau}.$$

Это выполняется для всех $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$, и мы заключаем, как и выше, что обе части этого равенства равны некоторому фиксированному элементу b из G^*. Тогда

$$u_i\gamma = bu'_{i\sigma}(x_i\omega'),$$

$$v_\lambda\gamma = (y_\lambda\omega')\,v'_{\lambda\tau}b^{-1}.$$

Определим отображения β и α, полагая $x\beta = bxb^{-1}$ $(x \in G^*)$ и $\alpha = \gamma\beta^{-1}$. Тогда

$$u_i\alpha = b^{-1}(u_i\gamma)\,b = u'_{i\sigma}(x_i\omega')\,b,$$

$$v_\lambda\alpha = b^{-1}(v_\lambda\gamma)\,b = b^{-1}(y_\lambda\omega')\,v'_{\lambda\tau}.$$

Отсюда мы видим, что два выражения из формулы (10), стоящие в квадратных скобках, равны элементу b. Так как в силу (5)

$$b\,(a\omega\alpha)\,b^{-1} = a\omega\alpha\beta = a\omega\gamma = a\delta\omega',$$

мы видим, что равенство (10) выполняется для всех $a \in G$, $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$. Но тогда правые части равенств (8) и (9) совпадают. Равенство (7) служит для определения взаимно однозначного отображения ψ_1 множества $T\setminus 0$ на себя, и ψ_1 имеет единственное продолжение ψ на T, для которого $0\psi = 0$. Из равенства (6) и теоремы 3.11 легко следует, что ψ — автоморфизм полугруппы T. Совпадение правых частей равенств (8) и (9) тогда дает $\theta\alpha = \psi_1\theta'$, откуда в силу теоремы 4.23 следует эквивалентность расширений Σ и Σ'.

Упражнения к § 4.5

1. Пусть $G = \langle a, b\rangle$ — прямое произведение двух циклических групп четвертого порядка ($a^4 = b^4 = e$, $ab = ba$). Пусть G^* — циклическая группа $\{e^*, a^*\}$ второго порядка. Пусть T — полугруппа 2×2-матриц Риса над группой G (без нуля) с сэндвич-матрицей

$$P = \begin{pmatrix} e & e \\ e & a^2 \end{pmatrix}.$$

В силу упражнения 1 (а) к § 3.4 каждый гомоморфизм θ полугруппы T в G^* имеет вид $(a;\, i,\, \lambda)\,\theta = a\omega$, где ω — гомоморфизм группы G в G^*. (Условие $p_{\lambda_i}\omega = e^*$ выполняется автоматически, так как G^* — группа второго порядка.) Существуют четыре гомоморфизма ω_i ($i = 1, 2, 3, 4$) группы G в G^*, задаваемые равенствами

$$\begin{aligned}
a\omega_1 &= a^*, & b\omega_1 &= a^*,\\
a\omega_2 &= a^*, & b\omega_2 &= e^*,\\
a\omega_3 &= e^*, & b\omega_3 &= a^*,\\
a\omega_4 &= e^*, & b\omega_4 &= e^*,
\end{aligned}$$

и соответственно четыре расширения Σ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) группы G^* при помощи T^0. Тогда $\Sigma_1 \cong \Sigma_2$, в то время как Σ_2, Σ_3 и Σ_4 попарно не изоморфны.

Заметим, между прочим, что существует автоморфизм δ группы G, удовлетворяющий равенству $\delta\omega_2 = \omega_3$, но для этого δ не существуют x_i, y_λ, σ и τ, для которых выполняется равенство (6) из теоремы 4.24.

2. Пусть T — полугруппа Брандта $\mathscr{M}^0(E; I, I, \Delta)$ над одноэлементной группой $E = \{e\}$, где $I = \{1, 2\}$ и Δ — единичная 2×2-матрица над E^0. Пусть $G^* = \{e^*, a\}$ — циклическая группа второго порядка. В обозначениях теоремы 4.24 пусть $u_1 = v_1 = e^*$, $u_2 = v_2 = a$ и $u'_1 = u'_2 = v'_1 = v'_2 = e^*$. Пусть σ и τ — тождественные отображения множества I на себя. Тогда выполняются равенства (5) и (6), но расширения группы G^* при помощи T, заданные частичными гомоморфизмами θ и θ', которые определяются равенствами (3), не эквивалентны. (Манн, из письма к авторам.)

3. Утверждение, обратное утверждению теоремы 4.24, будет выполняться без предположения о том, что в T не существует собственных делителей нуля, если мы предположим, что наряду с (5) и (6) выполняется равенство

$$(v_\lambda u_i)\,\gamma = (y_\lambda\omega')\, v'_{\lambda\tau}u_{i\sigma}\,(x_i\omega') \tag{12}$$

для всех $\lambda \in \Lambda$ и $i \in I$. Это условие также и необходимо, следовательно, мы можем утверждать, что Σ и Σ' изоморфны тогда и только тогда, когда существуют отображение $i \to x_i$ множества I в G и отображение $\lambda \to y_\lambda$ множества Λ в G, подстановки σ на I и τ на Λ, автоморфизмы γ и δ групп G^* и G соответственно, для которых выполняются равенства (5), (6) и (12).

Глава 5

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТРИЦАМИ НАД ПОЛЕМ

В главе 3 мы рассматривали представления полугруппы при помощи (возможно бесконечных) матриц над группой. В этой главе мы рассматриваем представления конечными матрицами над полем, и термин «представление» будет иметь именно такой смысл во всей главе. Это распространяет на полугруппы классическую теорию представлений групп. Как обычно, мы считаем представления полугруппы S известными, если они могут быть построены из представлений групп, в некотором смысле ассоциированных с S.

Пусть Φ — поле. Через $(\Phi)_n$, где n — целое положительное число, мы будем обозначать алгебру всех $n \times n$-матриц с элементами из Φ. Мы можем также рассматривать $(\Phi)_n$ как алгебру всех линейных преобразований n-мерного векторного пространства; тогда произведение AB двух элементов A и B из $(\Phi)_n$ будет обозначать их суперпозицию, сначала A, а затем B.

Пусть S —полугруппа. Под *представлением* Γ *степени* n *над* Φ *полугруппы* S мы понимаем гомоморфизм S в мультипликативную полугруппу алгебры $(\Phi)_n$. Это означает, что каждому элементу a из S соответствует $n \times n$-матрица (или линейное преобразование) $\Gamma(a)$, причем $\Gamma(ab) = \Gamma(a)\,\Gamma(b)$ для всех a, b из S. Если Γ — изоморфизм S на подполугруппу из $(\Phi)_n$, то говорят, что Γ есть *точное* или *правильное* представление. Цель этой главы — определить все представления полугрупп некоторых типов.

Если S — конечная полугруппа, то, очевидно, существует взаимно однозначное соответствие между представлениями полугруппы S и представлениями ее полугрупповой алгебры $\Phi[S]$ над Φ. Это соответствие сохраняет приводимость и разложимость, и, следовательно, полная приводимость имеет место для представлений S тогда и только тогда, когда $\Phi[S]$ полупроста. В § 5.1 мы даем обзор классической теории представлений полупростых алгебр, так как нет изложения этой теории, выражающего результаты в форме, которая нам нужна. В § 5.2 мы даем принадлежащие Манну [1955b] условия, необходимые и достаточные для того, чтобы полугрупповая алгебра $\Phi[S]$ конечной полугруппы S была полупростой; они были независимо найдены Понизовским [1956]. Представления такой полугруппы указаны в явном виде по Манну [1957a] в следствии 5.34; они также были даны Понизовским [1958]. Это можно было сделать в § 5.2, но было отложено до § 5.3 во избежание повторений.

Далее мы обращаемся к полугруппам, которые не обязательно конечны. Если S — полугруппа, удовлетворяющая условию минимальности M_J для главных двусторонних идеалов, то (§ 5.3) мы можем построить все неприводимые представления полугруппы S, исходя из представлений ее главных факторов. Этот результат принадлежит Манну [1960], идея основана на исследовании Хьюитта и Цукермана [1957] полной полугруппы преобразований на конечном множестве. В § 5.4 (следуя Сушкевичу [1933] и Клиффорду [1942]) мы строим все представления вполне 0-простой полугруппы, исходя из представлений ее структурной группы. В гл. 6 будет показано, что если полугруппа S удовлетворяет двум условиям минимальности M_R и M_L для правых и левых главных идеалов, то S также удовлетворяет условию M_J и ненулевые главные факторы в S вполне 0-просты. Отсюда и из результатов § 5.3 и 5.4 следует, что мы можем построить все неприводимые представления полугруппы S, удовлетворяющей одновременно условиям M_R и M_L, исходя из представлений подгрупп из S.

В заключительном § 5.5 мы излагаем теорию характеров коммутативных полугрупп (принадлежащую Шварцу [1954a, b, c] и Хьюитту и Цукерману [1955, 1956]). Кроме того, в предположении, что условие минимальности выполняется только для максимального полуструктурного образа полугруппы S (см. § 4.3), определяется строение полугруппы характеров полугруппы S. Этот параграф можно читать независимо от остальной части главы.

Недостаток места не дает нам возможности изложить теорию характеров для не обязательно коммутативных полугрупп. (Под характером полугруппы S понимается функция следа неприводимого представления полугруппы S над комплексным полем.) Мы отсылаем читателя к Манну [1957a].

§ 5.1. Представления полупростых алгебр конечной размерности

Под термином *алгебра* мы будем всегда понимать линейную ассоциативную алгебру. Алгебра $\mathfrak{A}$ над полем Φ является одновременно кольцом и векторным пространством над Φ, где кольцевое сложение — то же самое, что и сложение векторов, а кольцевое умножение и умножение вектора на скаляр удовлетворяют условию

$$(\alpha a)\, b = a\,(\alpha b) = \alpha\,(ab) \quad (\text{для всех } a,\ b \in \mathfrak{A},\ \alpha \in \Phi).$$

Размерность алгебры $\mathfrak{A}$ как векторного пространства над полем Φ будем называть *размерностью* этой алгебры. Всюду в этом параграфе $\mathfrak{A}$ будет обозначать конечномерную алгебру над полем Φ, т. е. алгебру, имеющую конечную размерность как векторное пространство над Φ.

Под *идеалом* алгебры $\mathfrak{A}$ мы понимаем подмножество из $\mathfrak{A}$, которое одновременно является линейным подпространством и кольцевым идеалом в $\mathfrak{A}$, другими словами, «допустимым идеалом», если рассматривать $\mathfrak{A}$ как кольцо с областью операторов Φ. Под k-й *степенью* (k — положительное целое) идеала $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{A}$ мы понимаем линейное подпространство из $\mathfrak{A}$, натянутое на множество (порожденное множеством) всевозможных произведений по k элементов из $\mathfrak{B}$; оно, очевидно, является идеалом в $\mathfrak{A}$. Идеал называется *нильпотентным*, если некоторая его степень равна 0, и *радикал* $\mathfrak{N}$ алгебры $\mathfrak{A}$ есть объединение всех ее нильпотентных идеалов. Радикал содержит также каждый нильпотентный левый (правый) идеал из $\mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}$ имеет конечную размерность, идеал $\mathfrak{N}$ сам нильпотентен. Элемент a из $\mathfrak{A}$ называется *собственно нильпотентным*, если ax (и, следовательно, также xa) есть нильпотентный элемент для каждого x из $\mathfrak{A}$; радикал $\mathfrak{N}$ может быть охарактеризован как множество всех собственно нильпотентных элементов из $\mathfrak{A}$.

Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *полупростой*, если $\mathfrak{N} = 0$. Цель настоящего параграфа — дать обзор классической теории строения и представлений полупростой алгебры конечной размерности. Эта теория понадобится нам в следующих двух параграфах. За деталями мы отсылаем читателя к главам 15 и 16 «Современной алгебры» Ван-дер-Вардена.

Если $\mathfrak{A}$ — некоторая конечномерная алгебра над Φ и $\mathfrak{N}$ — ее радикал, то факторалгебра $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ полупроста. Алгебра $\mathfrak{A}$ называется *простой*, если она не содержит собственных идеалов $\neq 0$ и не является одномерной алгеброй с нулевым умножением.

Первая теорема Веддербёрна. *Алгебра $\mathfrak{A}$ конечной размерности полупроста тогда и только тогда, когда она является прямой суммой*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_c \tag{1}$$

(двусторонних) идеалов $\mathfrak{A}_\sigma$ ($\sigma = 1, 2, \ldots, c$), каждый из которых есть простая алгебра. Эти идеалы $\mathfrak{A}_\sigma$ однозначно определяются алгеброй $\mathfrak{A}$.

Отметим, кроме того, что *каждый ненулевой идеал в $\mathfrak{A}$ есть сумма одного или более идеалов $\mathfrak{A}_\sigma$*. Мы называем $\mathfrak{A}_\sigma$ *простыми компонентами алгебры* $\mathfrak{A}$, а их число обозначаем *через* $\mathrm{Cl}(\mathfrak{A})$.

Заметим, что если $a_\sigma \in \mathfrak{A}_\sigma$, $b_\tau \in \mathfrak{A}_\tau$ и $\sigma \neq \tau$, то $a_\sigma b_\tau = 0$, поскольку $\mathfrak{A}_\sigma \mathfrak{A}_\tau \subseteq \mathfrak{A}_\sigma \cap \mathfrak{A}_\tau = 0$. Следовательно,

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_c)(b_1 + b_2 + \ldots + b_c) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_c b_c.$$

Пусть

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1 \supset \mathfrak{B}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{B}_m \supset \mathfrak{B}_{m+1} = 0 \qquad (2)$$

— *идеальный ряд* алгебры $\mathfrak{A}$, т. е. $\mathfrak{B}_{i+1}$ — идеал в $\mathfrak{B}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$). Факторалгебры $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{B}_{i+1}$ называются *факторами* ряда (2).

Лемма 5.1. *Пусть* (2) — *идеальный ряд конечномерной алгебры* $\mathfrak{A}$ *над полем* Φ. *В таком случае алгебра* $\mathfrak{A}$ *полупроста тогда и только тогда, когда каждый фактор* $\mathfrak{B}_i/\mathfrak{B}_{i+1}$ *полупрост. Кроме того, если это имеет место, то*

$$\mathrm{Cl}(\mathfrak{A}) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{Cl}(\mathfrak{B}_i/\mathfrak{B}_{i+1}).$$

Доказательство. Ввиду очевидной индукции лемму достаточно доказать для случая $m = 2$: *если* $\mathfrak{B}$ — *идеал алгебры* $\mathfrak{A}$, *то* $\mathfrak{A}$ *полупроста тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{B}$ *и* $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ *полупросты, и в этом случае*

$$\mathrm{Cl}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Cl}(\mathfrak{B}) + \mathrm{Cl}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}).$$

Мы можем, очевидно, предположить, что $\mathfrak{B}$ — собственный ненулевой идеал из $\mathfrak{A}$.

Предположим сначала, что алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ полупросты. Пусть a — собственно нильпотентный элемент из $\mathfrak{A}$. Тогда $a + \mathfrak{B}$ — собственно нильпотентный элемент из алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$, и так как последняя полупроста по предположению, то $a + \mathfrak{B} = \mathfrak{B}$, т. е. $a \in \mathfrak{B}$. Но теперь a — собственно нильпотентный элемент из $\mathfrak{B}$, и так как идеал $\mathfrak{B}$ полупрост по предположению, $a = 0$. Следовательно, 0 есть единственный собственно нильпотентный элемент из $\mathfrak{A}$, т. е. радикал алгебры $\mathfrak{A}$ равен нулю, поэтому $\mathfrak{A}$ полупроста.

Обратно, предположим, что $\mathfrak{A}$ полупроста. По первой теореме Веддербёрна $\mathfrak{A}$ есть прямая сумма (1) простых алгебр $\mathfrak{A}_\sigma$. Как отмечалось после формулировки этой теоремы, каждый идеал из $\mathfrak{A}$ является суммой одного или более идеалов $\mathfrak{A}_\sigma$, и при соответствующей нумерации мы можем предположить, что

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}_1 \oplus \mathfrak{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_k \quad (1 \leqslant k \leqslant c).$$

Тогда $\mathfrak{A}/\mathfrak{B} \cong \mathfrak{A}_{k+1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{A}_c$. По первой теореме Веддербёрна $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}$ полупросты и

$$\mathrm{Cl}(\mathfrak{B}) + \mathrm{Cl}(\mathfrak{A}/\mathfrak{B}) = k + (c - k) = c = \mathrm{Cl}(\mathfrak{A}).$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра размерности r над Φ и n — целое положительное число. Через $(\mathfrak{A})_n$ будем обозначать алгебру *всех* $n \times n$*-матриц над* $\mathfrak{A}$, т. е. матриц с элементами из $\mathfrak{A}$, для которых сложение и умножение матриц и умножение матрицы на скаляр из Ф определены обычным образом. $(\mathfrak{A})_n$ является алгеброй размерности rn^2 над Ф. В частности, $(\Phi)_n$ будет обозначать *полную матричную алгебру степени* n *над* Ф.

Алгебра $\mathfrak{D}$ над Ф называется *алгеброй с делением*, если $\mathfrak{D}\setminus 0$ есть группа по умножению.

Вторая теорема Веддербёрна. *Конечномерная алгебра $\mathfrak{A}$ над полем Ф проста тогда и только тогда, когда она изоморфна алгебре $(\mathfrak{D})_n$ для некоторой алгебры с делением $\mathfrak{D}$ над Ф и некоторого целого положительного n. Кроме того, число n определяется алгеброй $\mathfrak{A}$ единственным образом, и $\mathfrak{D}$ также определяется единственным образом с точностью до изоморфизма.*

Если u — единичный элемент из $\mathfrak{D}$, то $(\mathfrak{D})_n$ содержит *единичную матрицу* U_n, имеющую u на главной диагонали и 0 на других местах. Таким образом, простая алгебра обладает единичным элементом. Точно так же *каждая полупростая алгебра $\mathfrak{A}$ обладает единичным элементом*, так как если e_σ — единичный элемент простой компоненты $\mathfrak{A}_\sigma$ алгебры $\mathfrak{A}$ ($\sigma = 1, \ldots, c$), то $e_1 + e_2 + \ldots \ldots + e_c$ есть единичный элемент алгебры $\mathfrak{A}$.

Множество всех n-мерных вектор-строк, т. е. $1 \times n$-матриц, над Ф есть n-мерное векторное пространство V над Ф. *Естественный базис* пространства V состоит из n векторов $v_1, \ldots, v_n$, где у вектора v_i i-я компонента равна единице поля Ф, а остальные компоненты — нули. Если $A \in (\Phi)_n$, то преобразование $x \to xA$ является линейным преобразованием $\mathbf{A}$ пространства V и отображение $A \to \mathbf{A}$ есть изоморфизм $(\Phi)_n$ на алгебру $\mathcal{L}\mathcal{T}(V)$ всех линейных преобразований пространства V. Вектор $v_i\mathbf{A}$ — это i-я строка матрицы A.

Обратно, если V есть n-мерное векторное пространство с выбранным в нем базисом $v_1, \ldots, v_n$, то каждое линейное преобразование $\mathbf{A}$ пространства V определяет матрицу $A = (a_{ij})$, получающуюся из выражений

$$v_i\mathbf{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j \quad (i = 1, \ldots, n),$$

представляющих n векторов $v_i\mathbf{A}$ в виде линейных комбинаций векторов базиса. Отображение $\mathbf{A} \to A$ есть изоморфизм $\mathcal{L}\mathcal{T}(V)$ на $(\Phi)_n$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра над Ф. Под *представлением степени n алгебры $\mathfrak{A}$ над* Ф мы будем понимать гомоморфизм Г этой алгебры в $(\Phi)_n$. Другими словами, каждому элементу a из $\mathfrak{A}$ ставится в соответствие $n \times n$-матрица $\Gamma(a)$ так, что (для любых a, b из $\mathfrak{A}$ и α из Ф)

$$\begin{aligned} \Gamma(a+b) &= \Gamma(a) + \Gamma(b), \\ \Gamma(ab) &= \Gamma(a)\,\Gamma(b), \\ \Gamma(\alpha a) &= \alpha\Gamma(a). \end{aligned} \tag{3}$$

Как было отмечено выше, мы можем также рассматривать матрицу $\Gamma(a)$ как линейное преобразование векторного пространства V размерности n над Φ. Мы называем такое пространство V *пространством представления* (или *несущим пространством*) для Γ. Иногда удобней писать xa вместо $x\Gamma(a)$, где $x \in V$ и $a \in \mathfrak{A}$. Тогда мы можем считать V Φ-$\mathfrak{A}$-*модулем* (*бимодулем*), допускающим и Φ, и $\mathfrak{A}$ в качестве области операторов, причем Φ действует слева, а $\mathfrak{A}$ —справа. Обратно, Φ-$\mathfrak{A}$-модуль V определяет представление алгебры $\mathfrak{A}$ линейными преобразованиями модуля V.

Пусть Γ и Γ' — два представления алгебры $\mathfrak{A}$, и пусть V и V' — пространства представления для Γ и Γ' соответственно. Мы говорим, что Γ и Γ' *эквивалентны*, если существует такое невырожденное линейное отображение $x \to x'$ пространства V на V', что если $x \to x'$, то $x\Gamma(a) \to x'\Gamma'(a)$ для каждого a из $\mathfrak{A}$. Отображение $x \to x'$ является, таким образом, операторным изоморфизмом Φ-$\mathfrak{A}$-модуля V на Φ-$\mathfrak{A}$-модуль V'. Если мы запишем $x' = xC$, то $xC\Gamma'(a) = x\Gamma(a)C$ для всех элементов x из V и a из $\mathfrak{A}$, так что

$$\Gamma'(a) = C^{-1}\Gamma(a)C \quad (\text{для всех } a \text{ из } \mathfrak{A}). \qquad (4)$$

Так как преобразование C невырожденно, Γ и Γ' должны быть одинаковой степени, т. е. V и V' имеют одну и ту же размерность.

Представления Γ и Γ' эквивалентны тогда и только тогда, когда матрицы $\Gamma(a)$ и $\Gamma'(a)$ (при выбранных в V и V' базисах) удовлетворяют условию (4) для некоторой невырожденной матрицы C из $(\Phi)_n$. В частности, может быть $V = V'$. Тогда Γ и Γ' эквивалентны в том и только в том случае, когда их можно рассматривать как одно и то же представление алгебры $\mathfrak{A}$ линейными преобразованиями пространства V, записанными в (возможно) различных базисах пространства.

При изложении теории представлений под $\Gamma(a)$ понимают иногда матрицу, а иногда линейное преобразование. Отсутствие различия в обозначениях не должно приводить к недоразумениям.

Пусть Γ — представление степени n над Φ алгебры $\mathfrak{A}$, и пусть V — пространство представления для Γ. Подпространство W из V называется *инвариантным* относительно Γ, если $w\Gamma(a) \in W$ для каждого w из W и каждого a из $\mathfrak{A}$. Инвариантное подпространство пространства V — это в точности допустимая подгруппа из V, если рассматривать V как Φ-$\mathfrak{A}$-модуль. Отображение $w \to w\Gamma(a)$ представляет собой линейное преобразование $\Gamma_1(a)$ подпространства W, а $a \to \Gamma_1(a)$ является представлением алгебры $\mathfrak{A}$, которое мы будем называть представлением, *индуцированным* в W представлением Γ. Если в V выбран базис $\{v_1, \ldots, v_n\}$, такой, что $\{v_1, \ldots, v_r\}$ есть базис для W, то представляющие матрицы $\Gamma(a)$ принимают клеточный вид

$$\Gamma(a)=\begin{pmatrix}\Gamma_1(a) & 0\\ \Gamma_{21}(a) & \Gamma_2(a),\end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\Gamma_1(a)$ есть $r\times r$-матрица, а $\Gamma_2(a)$ есть $(n-r)\times(n-r)$-матрица. Обратно, если $\Gamma(a)$ имеет такой вид и если V — пространство вектор-строк, а $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — естественный базис этого пространства, то пространство W, натянутое на $v_1, \ldots, v_r$, является в V инвариантным подпространством. Учитывая правило умножения матриц, мы видим, что отображение $a\to\Gamma_2(a)$ также является представлением алгебры $\mathfrak{A}$. Мы можем рассматривать факторпространство V/W как несущее пространство представления Γ_2.

Если V не содержит собственных инвариантных подпространств $\neq 0$, то представление Γ и само пространство V называются *неприводимыми*.

Пусть Γ — представление степени n над Φ алгебры $\mathfrak{A}$, и пусть V — пространство представления для Γ. Так как $\dim V\ (=n)$ конечна, существует конечная последовательность

$$0=V_0\subset V_1\subset V_2\subset \ldots \subset V_{m-1}\subset V_m=V \tag{6}$$

инвариантных подпространств V_i из V, таких, что V_i строго содержит V_{i-1} и не существует инвариантного подпространства из V, строго лежащего между ними. Тогда представления Γ_i алгебры $\mathfrak{A}$, для которых несущими пространствами являются факторпространства V_i/V_{i-1}, все неприводимы. Если мы выберем базис для V очевидным образом, исходя из ряда (6), то представляющие матрицы $\Gamma(a)$ примут клеточный вид

$$\Gamma(a)=\begin{pmatrix}\Gamma_1(a) & 0 & \ldots & 0\\ \Gamma_{21}(a) & \Gamma_2(a) & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \Gamma_{m1}(a) & \Gamma_{m2}(a) & \ldots & \Gamma_m(a)\end{pmatrix}. \tag{7}$$

По теореме Жордана — Гёльдера для групп с операторами (неупорядоченное) множество неприводимых факторов V_i/V_{i-1} ряда (6) для Φ-$\mathfrak{A}$-модуля V определяется однозначно с точностью до операторного изоморфизма. Следовательно, неприводимые представления Γ_i $(i=1, \ldots, m)$ алгебры $\mathfrak{A}$ определяются для Γ однозначно с точностью до эквивалентности (без учета их порядка). Мы называем их *неприводимыми конституэнтами* представления Γ и называем (7) *полным приведением* представления Γ к неприводимым конституэнтам.

Если существует инвариантное подпространство W' из V, дополнительное для W в V, т. е. такое, что $V=W\oplus W'$, то в (5) $\Gamma_{21}(a)=0$ при любом a из $\mathfrak{A}$. В таком случае мы говорим, что Γ *разлагается* на Γ_1 и Γ_2, и пишем $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$. Если каждое инвариантное подпространство из V допускает в V инвариантное дополнение, то в V существуют такие инвариантные подпространства $W_1, \ldots, W_m$, что

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_m.$$

В базисе пространства V, выбранном исходя из $W_1, \ldots, W_m$, представляющие матрицы $\Gamma(a)$ для Γ принимают клеточно-диагональный вид

$$\Gamma(a) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(a) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \Gamma_2(a) & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & \Gamma_m(a) \end{pmatrix} \tag{8}$$

и мы пишем $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \ldots \oplus \Gamma_m$. В этом случае мы говорим, что Γ *вполне приводимо*.

Представление Γ алгебры $\mathfrak{A}$ над полем Φ называется *абсолютно неприводимым*, если оно неприводимо не только над Φ, но остается неприводимым и при замене Φ его алгебраическим замыканием.

Лемма Шура. *Пусть Γ и Δ — неприводимые представления алгебры $\mathfrak{A}$. Если существует постоянная матрица C, такая, что $C\Gamma(a) = \Delta(a)C$ для любого a из $\mathfrak{A}$, то или $C = 0$, или C невырожденна и тогда Γ и Δ эквивалентны.*

Если представление Γ абсолютно неприводимо и $C\Gamma(a) = \Gamma(a)C$ для всех a из $\mathfrak{A}$, то C есть произведение единичной матрицы на скаляр.

Для каждого элемента a из $\mathfrak{A}$ через ρ_a обозначим отображение $\mathfrak{A}$ в себя, заданное условием $x\rho_a = xa$. Очевидно, ρ_a есть линейное преобразование векторного пространства $\mathfrak{A}$. Кроме того, отображение $\rho: a \to \rho_a$ удовлетворяет условию (3), так что ρ есть представление алгебры $\mathfrak{A}$; назовем его (*правым*) *регулярным представлением*. Правые идеалы алгебры $\mathfrak{A}$ — это в точности подпространства из $\mathfrak{A}$, инвариантные относительно ρ.

Правый идеал $\mathfrak{R}$ минимален тогда и только тогда, когда он есть неприводимое подпространство. Два правых идеала $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ из $\mathfrak{A}$ называются *операторно изоморфными*, если индуцированные в них отображением ρ представления алгебры $\mathfrak{A}$ эквивалентны.

Основная теорема о представлениях для полупростых алгебр. *Пусть $\mathfrak{A}$ — полупростая конечномерная алгебра над полем Φ. Тогда Φ является прямой суммой минимальных правых идеалов, т. е. правое регулярное представление ρ алгебры $\mathfrak{A}$ вполне приводимо. В действительности любое представление алгебры $\mathfrak{A}$ вполне приводимо и каждое ее ненулевое неприводимое представление* *содержится в* ρ, *т. е. эквивалентно представлению, индуцированному отображением* ρ *в некотором минимальном правом идеале из* $\mathfrak{A}$.

Каждый минимальный правый идеал из $\mathfrak{A}$ *содержится в одной из простых компонент* $\mathfrak{A}_\sigma$ *из* $\mathfrak{A}$, *и два минимальных правых идеала в* $\mathfrak{A}$ *операторно изоморфны тогда и только тогда, когда они содержатся в одной и той же компоненте* $\mathfrak{A}_\sigma$. *Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями* $\mathfrak{A}$ *над* Φ *и простыми компонентами алгебры* $\mathfrak{A}$. *Если* Γ_σ *соответствует* $\mathfrak{A}_\sigma$, *то* Γ_σ *есть точное представление для* $\mathfrak{A}_\sigma$, *в то время как* $\Gamma_\sigma(a_\tau) = 0$ *для всех* a_τ *из* $\mathfrak{A}_\tau$ *при* $\sigma \neq \tau$. *Если* $c = \mathrm{Cl}(\mathfrak{A})$, *то* $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_c\}$ *есть полное множество взаимно не эквивалентных неприводимых представлений алгебры* $\mathfrak{A}$.

В частности, каждая простая алгебра $\mathfrak{A}$ конечной размерности над Φ имеет с точностью до эквивалентности единственное неприводимое представление, и любое другое представление этой алгебры является его кратным. Для полупростой алгебры $\mathfrak{A}$ ее неприводимое представление Γ_σ, соответствующее простой компоненте $\mathfrak{A}_\sigma$, представляет собой по существу продолжение неприводимого представления этой компоненты, совпадающее с ним на $\mathfrak{A}_\sigma$ и тривиальное на любой компоненте $\mathfrak{A}_\tau$ при $\tau \neq \sigma$.

Если поле Φ алгебраически замкнуто, то, кроме самого Φ, не существует других алгебр с делением над Φ. В этом случае вторая теорема Веддербёрна говорит о том, что каждая простая алгебра $\mathfrak{A}$ над Φ изоморфна полной матричной алгебре $(\Phi)_n$ степени n для некоторого n. Любой изоморфизм $\mathfrak{A}$ на $(\Phi)_n$ является представлением алгебры $\mathfrak{A}$ и притом единственным ее неприводимым представлением.

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра размерности n над Φ и Γ — представление этой алгебры, имеющее степень r над Φ. Пусть, далее, m — целое положительное число. Для каждого элемента (a_{ij}) из $(\mathfrak{A})_m$ построим $mr \times mr$-матрицу

$$\Gamma^m[(a_{ij})] = (\Gamma(a_{ij})),$$

заменяя каждый член a_{ij} в $m \times m$-матрице (a_{ij}) матрицей $\Gamma(a_{ij})$ над Φ. Тогда Γ^m будет представлением алгебры $(\mathfrak{A})_m$. Действительно, если (a_{ij}) и (b_{ij}) принадлежат $(\mathfrak{A})_m$, а (c_{ij}) — их произведение, т. е. $c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}$, то

$$\Gamma^m[(c_{ij})] = (\Gamma(c_{ij})) = \Big(\Gamma\big(\sum_k a_{ik}b_{kj}\big)\Big) = \Big(\sum_k \Gamma(a_{ik})\,\Gamma(b_{kj})\Big) =$$
$$= (\Gamma(a_{ij}))\,(\Gamma(b_{ij})) = \Gamma^m[(a_{ij})]\,\Gamma^m[(b_{ij})],$$

и аналогичные формулы имеют место для суммы матриц и произведения матрицы на скаляр. Мы называем Γ^m представлением алгебры $(\mathfrak{A})_m$, *ассоциированным* с представлением Γ.

Следующее утверждение доказывается в § 121 «Современной алгебры» Ван-дер-Вардена.

Лемма 5.2. *Пусть $\mathfrak{D}$ — алгебра с делением и m — целое положительное число. Тогда правое регулярное представление Δ такой алгебры неприводимо и (единственное) неприводимое представление простой алгебры $(\mathfrak{D})_m$ совпадает с представлением Δ^m, ассоциированным с Δ.*

Отсюда, очевидно, следует

Теорема 5.3. *Пусть $\mathfrak{A}_\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, c)$ — простые компоненты полупростой алгебры $\mathfrak{A}$. По второй теореме Веддербёрна каждая компонента $\mathfrak{A}_\sigma$ может рассматриваться как полная матричная алгебра $(\mathfrak{D}_\sigma)_{m_\sigma}$ некоторой степени m_σ над алгеброй с делением $\mathfrak{D}_\sigma$. Пусть Δ_σ — регулярное представление алгебры $\mathfrak{D}_\sigma$ и $\Delta_\sigma^{m_\sigma}$ — представление алгебры $\mathfrak{A}_\sigma$, ассоциированное с Δ_σ. Тогда $\Delta_\sigma^{m_\sigma}$ есть единственное неприводимое представление алгебры $\mathfrak{A}_\sigma$. Расширяем $\Delta_\sigma^{m_\sigma}$ до представления алгебры $\mathfrak{A}$, полагая $\Gamma_\sigma(a) = \Delta_\sigma^{m_\sigma}(a_\sigma)$, если $a = \sum_{\tau=1}^{c} a_\tau$ есть (однозначное) выражение элемента a в виде суммы элементов $a_\tau \in \mathfrak{A}_\tau$. Тогда $\{\Gamma_1, \ldots, \Gamma_c\}$ есть полное множество неэквивалентных неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{A}$. Если d_σ обозначает размерность алгебры $\mathfrak{D}_\sigma$, то степень Γ_σ равна $d_\sigma m_\sigma$.*

Если поле Φ алгебраически замкнуто, то каждая алгебра $\mathfrak{D}_\sigma$ сводится к Φ и мы можем рассматривать $\mathfrak{A}$ как прямую сумму полных матричных алгебр над Φ. В этом случае неприводимые представления алгебры $\mathfrak{A}$ в точности совпадают с проекциями $\mathfrak{A}$ на различные компоненты этой прямой суммы.

Специализация теоремы 8 главы 5 «Теории колец» Джекобсона приводит к следующему утверждению.

Теорема 5.4. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра с единицей. Если $\mathfrak{B}$ — идеал из $\mathfrak{A}$, то $(\mathfrak{B})_n$ есть идеал из $(\mathfrak{A})_n$, и всякий идеал из $(\mathfrak{A})_n$ имеет вид $(\mathfrak{B})_n$ для некоторого идеала $\mathfrak{B}$ из $\mathfrak{A}$.*

Теорема 5.5. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная алгебра с единицей над полем Φ. Пусть n — целое положительное число. Тогда алгебра $(\mathfrak{A})_n$ полупроста в том и только в том случае, когда полупроста алгебра $\mathfrak{A}$. Более точно, если алгебра $\mathfrak{A}$ полупроста и $\mathfrak{A}_\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, c)$ — простые компоненты этой алгебры, то $(\mathfrak{A}_\sigma)_n$ $(\sigma = 1, \ldots, c)$ являются простыми компонентами для $(\mathfrak{A})_n$. Если Γ_σ — неприводимое представление алгебры $\mathfrak{A}$, соответствующее компоненте $\mathfrak{A}_\sigma$, то ассоциированное представление Γ_σ^n совпадает с неприводимым представлением алгебры $(\mathfrak{A})_n$, соответствующим $(\mathfrak{A}_\sigma)_n$.*

Доказательство. Если алгебра $\mathfrak{A}$ не полупроста и $\mathfrak{R}$ — ее радикал, то $(\mathfrak{R})_n$ — ненулевой нильпотентный идеал из $(\mathfrak{A})_n$ и алгебра $(\mathfrak{A})_n$ не полупроста. Предположим, что алгебра $\mathfrak{A}$ полупроста и $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_c$ — ее простые компоненты. По теореме 5.4 каждая алгебра $(\mathfrak{A}_\sigma)_n$ проста и очевидно, что $(\mathfrak{A})_n$ есть прямая сумма этих алгебр. Таким образом, $(\mathfrak{A})_n$ полупроста.

Если $\mathfrak{A}_\sigma = (\mathfrak{D}_\sigma)_{m_\sigma}$, как в теореме 5.3, то $(\mathfrak{A}_\sigma)_n = (\mathfrak{D}_\sigma)_{m_\sigma n}$ и неприводимое представление алгебры $\mathfrak{A}_\sigma$ есть $\Delta_\sigma^{m_\sigma}$. По лемме 5.2 неприводимое представление алгебры $(\mathfrak{A}_\sigma)_n$ есть $\Delta_\sigma^{m_\sigma n}$. Так как $\Delta_\sigma^{m_\sigma n} = (\Delta_\sigma^{m_\sigma})^n$, отсюда легко вытекает, что неприводимое представление алгебры $(\mathfrak{A})_n$, соответствующее компоненте $(\mathfrak{A}_\sigma)_n$, есть Γ_σ^n.

Лемма 5.6. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная алгебра над полем Φ, и пусть $\mathfrak{R}$ — ее радикал. Каждое ненулевое неприводимое представление алгебры $\mathfrak{A}$ отображает $\mathfrak{R}$ в 0 и поэтому может фактически рассматриваться как представление полупростой алгебры $\mathfrak{A}/\mathfrak{R}$.*

Доказательство. Пусть V — несущее пространство неприводимого представления Γ алгебры $\mathfrak{A}$. Тогда $V\mathfrak{R}$ — инвариантное подпространство из V и поэтому либо $V\mathfrak{R} = 0$, либо $V\mathfrak{R} = V$. Но последнее невозможно, так как отсюда следовало бы $V\mathfrak{R}^k = V$ для любого k, в то время как $\mathfrak{R}^k = 0$ для некоторого k.

Теорема 5.7. *Неприводимая алгебра линейных преобразований проста.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — неприводимая алгебра линейных преобразований. Тождественное отображение этой алгебры на себя является для нее неприводимым представлением. Так как представление ι точно, по лемме 5.6 радикал алгебры $\mathfrak{A}$ должен быть нулевым. Таким образом, алгебра $\mathfrak{A}$ полупроста. Пусть $\mathfrak{A}_\sigma$ $(\sigma = 1, \ldots, c)$ — ее простые компоненты, и пусть Γ_σ — неприводимое представление для $\mathfrak{A}$, соответствующее $\mathfrak{A}_\sigma$. Неприводимое представление ι должно совпадать с одним из представлений Γ_σ, например с Γ_1. Так как Γ_1 отображает каждую подалгебру $\mathfrak{A}_\sigma$ при $\sigma \neq 1$ в 0 и в то же время является точным, то отсюда следует, что таких $\mathfrak{A}_\sigma$ не может существовать. Итак, $c = 1$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}$ проста.

Мы заключаем этот параграф несколькими необходимыми для дальнейшего элементарными результатами, относящимися к матрицам над конечномерной алгеброй. Элемент a алгебры $\mathfrak{A}$ называется *правым* [*левым*] *делителем нуля*, если существует элемент $b \neq 0$ из $\mathfrak{A}$, такой, что $ba = 0$ $[ab = 0]$.

Лемма 5.8. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная алгебра над полем Φ. Если элемент a из $\mathfrak{A}$ не является правым [левым] делителем нуля,* *то $\mathfrak{A}$ содержит правую [левую] единицу e, относительно которой a обладает двусторонним обратным элементом x ($ax = xa = e$).*

Доказательство. Пусть n — наименьшее положительное число, для которого степени $a, a^2, \ldots, a^n$ линейно зависимы. (Очевидно, $n \geqslant 2$.) Тогда

$$\alpha_1 a + \alpha_2 a^2 + \ldots + \alpha_n a^n = 0,$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Phi$ и $\alpha_n \neq 0$. Учитывая выбор числа n и то, что a не является правым делителем нуля, мы заключаем, что $\alpha_1 \neq 0$. Пусть

$$e = -\alpha_1^{-1}(\alpha_2 a + \alpha_3 a^2 + \ldots + \alpha_n a^{n-1}). \tag{9}$$

Тогда $ea = a$. Пусть $b \in \mathfrak{A}$. Тогда

$$(be - b)\, a = bea - ba = b\,(ea - a) = 0,$$

откуда $be - b = 0$. Таким образом, e является правой единицей в $\mathfrak{A}$. Из (9) видно, что a обладает обратным элементом

$$x = -\alpha_1^{-1}(\alpha_2 e + \alpha_3 a + \ldots + \alpha_n a^{n-2})$$

относительно e. (Если $n = 2$, мы полагаем $a^{n-2} = e$.)

Следствие 5.9. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная алгебра над полем Φ. Если элемент a из $\mathfrak{A}$ не является ни левым, ни правым делителем нуля, то $\mathfrak{A}$ содержит единицу u и элемент a обратим, т. е. $ax = xa = u$ для некоторого x из $\mathfrak{A}$.*

Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра и m — целое положительное число. Если алгебра $(\mathfrak{A})_m$ обладает единицей E, то нетрудно видеть, что алгебра $\mathfrak{A}$ должна обладать единицей u и что E есть единичная матрица U_m, имеющая u на главной диагонали и нули на остальных местах. Матрица P из $(\mathfrak{A})_m$ называется *невырожденной*, если она обратима в $(\mathfrak{A})_m$, т. е. если $PQ = QP = U_m$ для некоторой матрицы Q из $(\mathfrak{A})_m$. Из этих замечаний и из того, что $(\mathfrak{A})_m$ имеет конечную размерность rm^2, если $\mathfrak{A}$ — алгебра конечной размерности r над Φ, а также из следствия 5.9 непосредственно вытекает

Следствие 5.10. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная алгебра над полем Φ и m — целое положительное число. Пусть $P \in (\mathfrak{A})_m$, т. е. P есть $m \times m$-матрица с элементами из $\mathfrak{A}$. Если P не является ни левым, ни правым делителем нуля в $(\mathfrak{A})_m$, то $\mathfrak{A}$ обладает единицей и матрица P невырожденна.*

Теорема 5.11. *Пусть $\mathfrak{A}$ — конечномерная алгебра над полем Φ и P — некоторая $n \times m$-матрица над $\mathfrak{A}$. Если $n > m$, то существует такая ненулевая $m \times n$-матрица X над $\mathfrak{A}$, что $XP = 0$. Если $m > n$, то существует такая ненулевая $m \times n$-матрица Y над $\mathfrak{A}$, что $PY = 0$.*

Доказательство. Мы будем доказывать теорему для случая $n > m$, во втором случае доказательство аналогично. Пусть

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix},$$

где P_1 есть $m \times m$-матрица, а P_2 есть $(n-m) \times m$-матрица над $\mathfrak{A}$. Предположим сначала, что P_1 — правый делитель нуля в $(\mathfrak{A})_m$, так что в $(\mathfrak{A})_m$ существует матрица $X_1 \neq 0$, для которой $X_1 P_1 = 0$. В таком случае мы можем положить $X = (X_1\ 0)$. Следовательно, можно считать, что P_1 не является правым делителем нуля в $(\mathfrak{A})_m$. По лемме 5.8 $(\mathfrak{A})_m$ содержит правую единицу E, относительно которой матрица P_1 обладает в $(\mathfrak{A})_m$ двусторонней обратной Q_1, т. е. $P_1 Q_1 = Q_1 P_1 = E$. Теперь мы можем положить

$$X = (-X_2 P_2 Q_1 \quad X_2),$$

где X_2 — ненулевая $m \times (n-m)$-матрица над $\mathfrak{A}$. Тогда

$$XP = -X_2 P_2 Q_1 P_1 + X_2 P_2 = -X_2 P_2 E + X_2 P_2 = 0,$$

так как $X_2 P_2 \in (\mathfrak{A})_m$, а E — правая единица в $(\mathfrak{A})_m$.

Приведенная выше теорема доказана в той форме, которая понадобится нам в дальнейшем. Заметим, однако, что число строк матрицы X (или столбцов матрицы Y) в действительности несущественно. Так, если x — ненулевая строка из X, то $xP = 0$, а если x — ненулевая вектор-строка размерности n и $xP = 0$, то мы можем построить, исходя из x, ненулевую $t \times n$-матрицу X с любым числом строк t и такую, что $XP = 0$. Подлинный смысл теоремы 5.11 состоит в том, что при $n > m$ строки матрицы P линейно зависимы над $\mathfrak{A}$ слева, а при $m > n$ ее столбцы линейно зависимы над $\mathfrak{A}$ справа.

§ 5.2. Полугрупповые алгебры

Классическим методом теории представлений конечной группы G над полем Φ является использование групповой алгебры $\Phi[G]$ этой группы. Существует естественное взаимно однозначное соответствие между представлениями группы G и представлениями алгебры $\Phi[G]$, сохраняющее эквивалентность, приводимость и разложимость. Таким образом, проблема нахождения всех представлений для G над Φ переносится на алгебру $\Phi[G]$. Если эта алгебра полупроста, то по основной теореме о представлениях для полупростых алгебр (§ 5.1) каждое представление алгебры $\Phi[G]$ и, следовательно, каждое представление группы G разлагается на неприводимые представления; последние описываются теоремой 5.3. Следующая классическая теорема выясняет, когда именно этот случай имеет место.

Теорема Машке. *Пусть G — конечная группа и Φ — поле. Алгебра $\Phi[G]$ полупроста тогда и только тогда, когда характеристика поля Φ не делит порядок группы G.*

(В § 127 «Современной алгебры» Ван-дер-Вардена теорема Машке приводится в эквивалентной и исторически более правильной формулировке: каждое представление конечной группы G над полем Φ вполне приводимо, если характеристика поля не делит порядок группы. В действительности первоначальное утверждение самого Машке (*Math. Ann.* 52 (1899), 363—368) относилось лишь к полю комплексных чисел. Мы обязаны проф. Рихарду Брауэру за это замечание.)

Алгебра $\Phi[S]$ для полугруппы S над Φ определяется совершенно аналогично алгебре $\Phi[G]$, при этом мы не требуем, чтобы полугруппа S была конечна (применения см. в § 5.3). По тем же причинам, что и для групп, важно знать, когда алгебра $\Phi[S]$ полупроста и данный параграф в значительной степени посвящен этому вопросу. Излагаемая нами теория принадлежит Манну [1955b]. Мы включили также два результата, принадлежащие Хьюитту и Цукерману [1955], а именно теоремы 5.30 и 5.31.

Пусть S — полугруппа и Φ — поле. Под *полугрупповой алгеброй* $\Phi[S]$ *полугруппы S над* Φ мы понимаем алгебру $\mathfrak{A}$ над Φ, содержащую подмножество $\overline{S}$, которое является для $\mathfrak{A}$ одновременно и базисом, и мультипликативной подполугруппой, изоморфной полугруппе S. Если такая алгебра $\Phi[S]$ существует, то она, очевидно, единственным образом (с точностью до изоморфизма) определяется по S и Φ. Мы будем, как обычно, «отождествлять» $\overline{S}$ с S и считать $\Phi[S]$ алгеброй над Φ, содержащей S в качестве базиса и подполугруппы.

Покажем, что $\Phi[S]$ всегда существует. Пусть $\mathfrak{A}$ — множество всех таких отображений a: $s \to a(s)$ полугруппы S в Φ, что множество всех s из S, для которых $a(s) \neq 0$, является конечным или пустым. Определим сумму $a + b$ двух элементов a и b из $\mathfrak{A}$ как отображение $s \to a(s) + b(s)$, а произведение αa элемента α из Φ и элемента a из $\mathfrak{A}$ — как отображение $s \to \alpha a(s)$. Очевидно, что $\mathfrak{A}$ превращается тем самым в векторное пространство над Φ. Теперь определим произведение ab двух элементов a и b из $\mathfrak{A}$ как элемент c: $s \to c(s)$, где

$$c(r) = \sum_{st=r} a(s)\, b(t). \tag{1}$$

Здесь r — произвольный элемент из S, и для каждого r суммирование ведется по всем парам s, t элементов из S, для которых $st = r$ (c есть «свертка» a и b). Легко проверить, что $\mathfrak{A}$ становится таким образом линейной ассоциативной алгеброй над Φ.

Для каждого s из S через $\bar{s}$ обозначим соответствующую «характеристическую функцию», т. е.

$$\bar{s}(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = s, \\ 0, & \text{если } t \neq s. \end{cases}$$

Здесь 1 — единица алгебры Ф. Пусть $\bar{S}$ обозначает множество всех $\bar{s}$ (s пробегает S). Тогда $\bar{S} \subseteq \mathfrak{A}$ и отображение $s \to \bar{s}$ есть, очевидно, изоморфизм S на $\bar{S}$. Если $a \in \mathfrak{A}$, $\{s_1, \ldots, s_n\}$ — множество ненулевых значений при отображении a и если мы положим $a(s_i) = \alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то

$$a = \alpha_1\bar{s}_1 + \alpha_2\bar{s}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{s}_n. \tag{2}$$

Поскольку множество $\bar{S}$, очевидно, линейно независимо, то $\bar{S}$ является базисом алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}$ можно взять в качестве $\Phi[S]$.

Часто мы будем записывать равенство (2) в виде $a = \sum\limits_{s \in S} a(s)\,\bar{s}$ или даже в виде $a = \sum\limits_{s \in S} a(s)\,s$, так как мы будем отождествлять $\bar{s}$ с s. Эта сумма состоит из конечного числа слагаемых, так как лишь конечное число коэффициентов $a(s)$ отлично от нуля. Если $b = \sum\limits_{t \in S} b(t)\,t$ — другой элемент из $\Phi[S]$, то

$$ab = \sum_{s \in S} \sum_{t \in S} a(s)\,b(t)\,st = \sum_{r \in S} c(r)\,r,$$

где $c(r)$ задается равенством (1).

Пример 1. Если S — бесконечная циклическая полугруппа, порожденная элементом x, то $\Phi[S^1]$ есть кольцо полиномов $\Phi[x]$ от x над полем Ф. (См. Амицур [1951].)

Пусть S — полугруппа, Ф — поле и $\Phi[S]$ — полугрупповая алгебра полугруппы S над Ф. Если T — любое подмножество из S, то через $\Phi[T]$ будем обозначать подпространство из $\Phi[S]$, натянутое на T, т. е. множество всевозможных конечных линейных комбинаций элементов из T с коэффициентами из Ф. Будем считать, что $\Phi[\varnothing] = 0$. Ясно, что $\Phi[T]$ является подалгеброй [идеалом] в $\Phi[S]$ тогда и только тогда, когда T есть подполугруппа [идеал] в S.

Пусть S — полугруппа с нулем z. Под *сжатой* [1]) *полугрупповой алгеброй* $\Phi_0[S]$ *полугруппы* S *над* Ф мы понимаем алгебру над Ф, обладающую таким базисом B, что $B \cup 0$ есть подполугруппа из $\Phi_0[S]$, изоморфная S. Примером такой алгебры является факторалгебра $\Phi[S]/\Phi[z]$. Здесь $B = \{s + \Phi[z] \mid s \in S \setminus z\}$. Ясно, что с точностью до изоморфизма $\Phi_0[S]$ определяется по S и Ф единственным образом. Мы можем обычным образом считать,

[1]) Contracted.— *Прим. перев.*

что $\Phi_0[S]$ содержит $S\setminus z$ как базис. На самом деле можно считать, что $\Phi_0[S]$ содержит всю полугруппу S, если отождествить z с 0.

Отметим, что если $S \cup z$ — полугруппа, получающаяся присоединением нуля z к полугруппе S (независимо от того, имела ли S нуль), то $\Phi_0[S \cup z] \cong \Phi[S]$. Таким образом, любую полугрупповую алгебру можно рассматривать как сжатую полугрупповую алгебру.

Пример 2. Пусть S — полугруппа $n \times n$-матричных единиц (§ 2.7, упражнение 7), т. е.

$$S = \{e_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\} \cup \{z\}$$

с умножением, определяемым следующим образом:

$$e_{ij}e_{kl} = \begin{cases} e_{il}, & \text{если } j = k, \\ z, & \text{если } j \neq k, \end{cases}$$

где z действует как нуль. Тогда алгебра $\Phi_0[S]$ изоморфна полной $n \times n$-матричной алгебре $(\Phi)_n$ над Φ. (См. Амицур [1951].)

Лемма 5.12. *Пусть T — идеал из S. Тогда $\Phi[S]/\Phi[T]$ изоморфна сжатой полугрупповой алгебре $\Phi_0[S/T]$ полугруппы S/T над Φ.*

Доказательство. Множество

$$B = \{s + \Phi[T] \mid s \in S\setminus T\}$$

представляет собой базис для $\Phi[S]/\Phi[T]$ и $B \cup \Phi[T] \cong S/T$.

Лемма 5.13. *Пусть S — полугруппа с нулем z. Тогда алгебра $\Phi[S]$ полупроста в том и только в том случае, когда полупростой является алгебра $\Phi_0[S]$.*

Доказательство. $\Phi[z]$ является одномерной алгеброй над Φ, изоморфной Φ, и, следовательно, она полупроста. Так как $\Phi_0[S] \cong \Phi[S]/\Phi[z]$, сформулированный результат непосредственно вытекает из леммы 5.1.

Под *представлением* Γ степени n полугруппы S над полем Φ мы понимаем гомоморфизм Γ этой полугруппы в мультипликативную полугруппу алгебры $(\Phi)_n$. Иными словами, каждому элементу s полугруппы S ставится в соответствие $n \times n$-матрица $\Gamma(s)$ над Φ, причем

$$\Gamma(st) = \Gamma(s)\,\Gamma(t) \quad (\text{для всех } s, t \text{ из } S).$$

Если Γ — представление полугруппы S, то мы можем задать представление Γ^* алгебры $\Phi[S]$ по следующему правилу:

$$\Gamma^*\Big(\sum_{s\in S} a(s)\,s\Big) = \sum_{s\in S} a(s)\,\Gamma(s). \tag{3}$$

Сумма в правой части равенства имеет смысл, так как лишь конечное число коэффициентов $a(s)$ не равно нулю. Обратно, если Γ^* — некоторое представление алгебры $\Phi[S]$, то его ограничение Γ на S является представлением полугруппы S. Соответствие $\Gamma \leftrightarrow \Gamma^*$ взаимно однозначно и, как легко видеть, сохраняет эквивалентность, приводимость и разложимость. Таким образом, теория матричных представлений над полем Φ для полугруппы S идентична такой же теории для $\Phi[S]$.

Если S обладает нулем z, то существует подобное же взаимно однозначное соответствие $\Gamma \leftrightarrow \Gamma^*$ между представлениями Γ полугруппы S над Φ, для которых $\Gamma(z) = 0$, и представлениями Γ^* сжатой полугрупповой алгебры $\Phi_0[S]$ полугруппы S над Φ. Соотношение (3) между Γ и Γ^* остается справедливым, если суммирование производится не по S, а по $S \setminus z$. Представления Γ полугруппы S, для которых $\Gamma(z) \neq 0$, лишь тривиально отличаются от представлений, для которых $\Gamma(z) = 0$; см. упражнение 1 ниже.

В обоих случаях связь между представлениями Γ и Γ^* является столь тесной, что впредь мы не будем делать различия между ними.

Конечная полугруппа обладает главным рядом (§ 2.6)

$$S = S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \ldots \supset S_n \supset S_{n+1} = \varnothing. \qquad (4)$$

Напомним (теорема 2.40), что факторы Риса S_i/S_{i+1} $(i = 1, \ldots, n)$, при условии, что $S_n/\varnothing$ означает S_n, являются главными факторами полугруппы S и что они одинаковы (с точностью до порядка) для любых двух главных рядов в S.

Теорема 5.14. *Полугрупповая алгебра $\Phi[S]$ над полем Φ конечной полугруппы S полупроста тогда и только тогда, когда алгебра $\Phi[S_i/S_{i+1}]$ для каждого из главных факторов полугруппы S полупроста.*

Доказательство. В соответствии с (4) мы имеем в $\Phi[S]$ ряд идеалов, а именно

$$\Phi[S] = \Phi[S_1] \supset \Phi[S_2] \supset \ldots \supset \Phi[S_n] \supset 0.$$

По лемме 5.12

$$\Phi[S_i]/\Phi[S_{i+1}] \cong \Phi_0[S_i/S_{i+1}] \quad (i = 1, \ldots, n-1).$$

По лемме 5.1 алгебра $\Phi[S]$ полупроста в том и только в том случае, когда каждая факторалгебра $\Phi[S_i]/\Phi[S_{i+1}]$ полупроста. Утверждение теоремы теперь следует из леммы 5.13.

Напомним (см. лемму 2.39), что любой главный фактор полугруппы S является либо 0-простым, либо простым, либо с нулевым умножением и что S называется полупростой, если каждый ее главный фактор 0-прост или прост.

Следствие 5.15. *Если алгебра $\Phi[S]$ полупроста, то полугруппа S полупроста.*

Доказательство. Если S_i/S_{i+1} — главный фактор полугруппы S, то алгебра $\Phi_0[S_i/S_{i+1}]$ является полупростой по теореме 5.14 и лемме 5.13. Если же S_i/S_{i+1} — полугруппа с нулевым умножением, то $\Phi_0[S_i/S_{i+1}]$ должна быть алгеброй с нулевым умножением и поэтому не может быть полупростой.

Следствие 5.16. *Если S имеет главный ряд* (4) *и $\Phi[S]$ полупроста, то*

$$\mathrm{Cl}(\Phi[S]) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}(\Phi_0[S_i/S_{i+1}]).$$

Доказательство. Это непосредственно следует из леммы 5.1 и из предыдущих рассуждений.

На основании теоремы 5.14 и следствия 5.15 для того, чтобы найти необходимые и достаточные условия полупростоты $\Phi[S]$, достаточно рассмотреть случай, когда полугруппа S 0-проста. К этому случаю мы сейчас и обратимся.

Пусть S — конечная 0-простая полугруппа. Тогда, согласно следствию 2.56, S является вполне простой полугруппой, а потому по теореме Риса 3.5 она изоморфна регулярной рисовской полугруппе $\mathcal{M}^0(G; m, n; P)$ над конечной группой G с сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$ $(\lambda = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m)$. Для того, чтобы найти все представления полугруппы S, или для того, чтобы выяснить, будет ли $\Phi[S]$ полупроста, мы можем, не уменьшая общности, предположить, что $S = \mathcal{M}^0(G; m, n; P)$.

Пусть $G = \{g_\sigma \mid \sigma = 1, \ldots, r\}$. Тогда ненулевые элементы из S представляют собой матрицы $(g_\sigma)_{i\lambda}$, в которых на (i, λ)-месте стоит g_σ, а на всех остальных местах — нули. Их перемножение происходит следующим образом:

$$(g_\sigma)_{i\lambda} \circ (g_\tau)_{j\mu} = (g_\sigma)_{i\lambda} P (g_\tau)_{j\mu} = (g_\sigma p_{\lambda j} g_\tau)_{i\mu}.$$

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра над Φ, а m и n — целые положительные числа. Возьмем фиксированную $n \times m$-матрицу P над $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathcal{M}(\mathfrak{A}; m, n; P)$ — векторное пространство всех $m \times n$-матриц над $\mathfrak{A}$. Зададим умножение ($\circ$) в $\mathcal{M}$ соотношением

$$A \circ B = APB.$$

Тогда $\mathcal{M}$ превращается в алгебру над Φ, которую мы называем *манновской $m \times n$-матричной алгеброй над $\mathfrak{A}$ с сэндвич-матрицей P*.

Лемма 5.17. *Сжатая полугрупповая алгебра $\Phi_0[S]$ полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G; m, n; P)$ над полем Φ изоморфна манновской алгебре $\mathfrak{B} = \mathcal{M}(\Phi[G]; m, n; P)$.*

Доказательство. Отождествим нуль из G^0 с нулем из $\Phi[G]$ и, следовательно, нуль из S с нулем из $\mathfrak{B}$. Поскольку $G \subseteq \Phi[G]$, отсюда следует, что $S \subseteq \mathfrak{B}$. Каждый элемент A из $\mathfrak{B}$ является $m \times n$-матрицей $(a_{i\lambda})$ с элементами $a_{i\lambda}$ из $\Phi[G]$, т. е.

$$a_{i\lambda} = \sum_{\sigma=1}^{r} \alpha_{\sigma;\, i,\, \lambda} g_\sigma \quad (\alpha_{\sigma;\, i,\, \lambda} \in \Phi).$$

Тогда

$$A = \sum_{\sigma=1}^{r} \sum_{i=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_{\sigma;\, i,\, \lambda} (g_\sigma)_{i\lambda},$$

и, следовательно, каждый элемент из $\mathfrak{B}$ представляет собой линейную комбинацию ненулевых элементов $(g_\sigma)_{i\lambda}$ из S с коэффициентами из Φ. Так как множество $S \setminus 0$, очевидно, линейно независимо над Φ, оно является базисом для $\mathfrak{B}$, и утверждение леммы следует из определения алгебры $\Phi_0[S]$.

Лемма 5.18. *Манновская алгебра $\mathfrak{B} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}; m, n; P)$ над алгеброй $\mathfrak{A}$, имеющей конечную размерность над полем Φ, тогда и только тогда содержит единицу, когда* (i) *$\mathfrak{A}$ содержит единицу и* (ii) *сэндвич-матрица P невырожденна (в частности, $m = n$). В этом случае отображение $A \to AP$ есть изоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ на полную матричную алгебру $(\mathfrak{A})_n$ над $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathfrak{B}$ содержит единицу E. Тогда

$$X \circ E = XPE = X,$$
$$E \circ Y = EPY = Y,$$

для любых X, Y из $\mathfrak{B}$. Отсюда $m = n$, так как если бы было $n > m$, то по теореме 5.11 существовала бы такая ненулевая $m \times n$-матрица X над $\mathfrak{A}$, что $XP = 0$, а это противоречит соотношению $XPE = X \neq 0$. Аналогично, предположение $m > n$ противоречит соотношению $EPY = Y$. Теперь ясно, что P не является ни левым, ни правым делителем нуля в $(\mathfrak{A})_n$. По следствию 5.10 $\mathfrak{A}$ содержит единицу, а матрица P невырожденна.

Обратно, предположим, что (i) $\mathfrak{A}$ содержит единицу и (ii) P невырожденна. По определению невырожденности мы должны иметь $m = n$. Если P^{-1} — матрица, обратная к P в $(\mathfrak{A})_n$, то $E = P^{-1}$ является единицей в $\mathfrak{B}$.

Если (i) и (ii) имеют место, то $\mathfrak{B}$ как множество совпадает с $(\mathfrak{A})_n$ и отображение $A \to AP$ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{B}$ на $(\mathfrak{A})_n$. Действительно, оно взаимно однозначно и является отображением на, поскольку матрица P невырожденна и для $A, B \in \mathfrak{B}$ имеем $A \to AP$, $B \to BP$ и

$$A \circ B \to (A \circ B) P = (APB) P = (AP)(BP).$$

Теорема 5.19. *Манновская алгебра*

$$\mathfrak{B} = \mathcal{M}(\mathfrak{A};\ m,\ n;\ P)$$

над алгеброй $\mathfrak{A}$, *имеющей конечную размерность над полем* Φ, *является полупростой тогда и только тогда, когда* (i) *алгебра* $\mathfrak{A}$ *полупроста и* (ii) *матрица* P *невырожденна. В этом случае* $\mathfrak{B} \cong (\mathfrak{A})_n$.

Доказательство. Поскольку (см. § 5.1) полупростая конечномерная алгебра обладает единицей, из предположения о том, что либо $\mathfrak{B}$ полупроста, либо имеют место (i) и (ii), следует выполнимость требований последнего утверждения леммы 5.18. Следовательно, в любом из этих случаев отображение $A \to AP$ есть изоморфизм алгебры $\mathfrak{B}$ на $(\mathfrak{A})_n$. Но по теореме 5.5 $(\mathfrak{A})_n$ полупроста тогда и только тогда, когда полупроста $\mathfrak{A}$.

Следующая теорема теперь непосредственно вытекает из леммы 5.17, теоремы 5.19 и теоремы Машке.

Теорема 5.20. *Пусть* S — *конечная* 0-*простая полугруппа, и пусть она представлена (в соответствии с теоремой Риса) как регулярная рисовская полугруппа* $\mathcal{M}^0(G;\ m,\ n;\ P)$ *над конечной группой* G *с сэндвич-матрицей* P. *Пусть* Φ — *поле и, кроме того, нулевые элементы из* G^0 *и* $\Phi[G]$ *отождествлены. Тогда алгебра* $\Phi[S]$ *полупроста в том и только в том случае, когда* (i) *характеристика поля* Φ *не делит порядок группы* G *и* (ii) P, *рассматриваемая как матрица над* $\Phi[G]$, *невырожденна (в частности,* $m = n$).

Сделаем небольшое отступление для того, чтобы применить предыдущие результаты к коммутативным полугруппам.

Теорема 5.21. *Пусть* S — *конечная коммутативная полугруппа, а* Φ — *поле. Алгебра* $\Phi[S]$ *является полупростой тогда и только тогда, когда* S *есть объединение групп, порядки которых не делятся на характеристику поля* Φ.

Доказательство. Пусть (4) — главный ряд полугруппы S. Предположим, что алгебра $\Phi[S]$ полупроста. По следствию 5.15 S также полупроста. Каждый главный фактор S_i/S_{i+1} полугруппы S является коммутативной вполне 0-простой полугруппой, т. е. группой G_i^0 с нулем (при $i = n$ без нуля). Соответствующий $\mathcal{H}$-класс представляет собой группу G_i и, следовательно, $S = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$. По теореме 5.14 и лемме 5.13 каждая алгебра $\Phi[G_i]$ полупроста, а по теореме Машке характеристика поля Φ не делит порядок ни одной из групп G_i.

Обратно, предположим, что S является объединением групп, порядки которых не делятся на характеристику поля Φ. Пусть E — полуструктура идемпотентов полугруппы S и для каждого e из E пусть H_e обозначает максимальную подгруппу из S, содержащую e. Сразу видно (в силу коммутативности S), что $H_e H_f \subseteq \subseteq H_{ef}$ (e, $f \in E$). Следовательно, S является объединением полуструктуры E групп H_e. Отсюда ясно, что каждый главный фактор полугруппы S является группой с нулем (кроме ядра, которое просто есть группа). Поэтому, возвращаясь к главному ряду (4), мы заключаем, что $S_i \setminus S_{i+1}$ является группой G_i ($i = 1, \ldots, n$) и группы G_i — это группы H_e, расположенные в некотором порядке. В силу теоремы Машке и предположения о характеристике поля Φ каждая алгебра $\Phi[G_i]$ полупроста. Очевидно,

$$\Phi[G_i] \cong \Phi_0[S_i/S_{i+1}]$$

и, следовательно, $\Phi[S]$ полупроста по лемме 5.13 и теореме 5.14.

В связи с теоремой 5.20 было бы интересно найти условия невырожденности $n \times n$-матрицы P над полупростой алгеброй $\mathfrak{A}$. Если Γ — некоторое представление степени r этой алгебры над Φ и $P = (p_{ij})$, то (см. § 5.1) под $\Gamma^n(P)$ мы понимаем $nr \times nr$-матрицу $(\Gamma(p_{ij}))$ над Φ, получаемую заменой каждого элемента p_{ij} из P $r \times r$-матрицей $\Gamma(p_{ij})$ над Φ.

Лемма 5.22. *Пусть Γ — любое точное представление полупростой алгебры $\mathfrak{A}$ и P есть $n \times n$-матрица над $\mathfrak{A}$. Тогда P невырожденна в том и только в том случае, когда $\Gamma^n(P)$ невырожденна.*

Доказательство. Пусть $A = (a_{ij}) \in (\mathfrak{A})_n$. Если $\Gamma^n(A) = 0$, то $\Gamma(a_{ij}) = 0$ для каждого $i, j = 1, \ldots, n$. Так как представление Γ точно, то каждый элемент a_{ij} равен нулю, т. е. $A = 0$. Следовательно, представление Γ^n алгебры $(\mathfrak{A})_n$, ассоциированное с представлением Γ, также является точным. Требуемый результат вытекает теперь из следствия 5.10.

Теорема 5.23. *Пусть $\{\Gamma_\sigma \mid \sigma = 1, \ldots, c\}$ — полное множество неэквивалентных неприводимых представлений полупростой алгебры $\mathfrak{A}$ над Φ и $P \in (\mathfrak{A})_n$. Матрица P невырожденна тогда и только тогда, когда каждая матрица $\Gamma_\sigma^n(P)$ невырожденна.*

Доказательство. Пусть Γ — регулярное представление алгебры $\mathfrak{A}$. По основной теореме о представлении полупростых алгебр (§ 5.1) Γ в приведенной форме имеет клеточно-диагональный вид, где каждая клетка представляет собой одно из Γ_σ и каждое Γ_σ встречается хотя бы один раз в Γ. Легко видеть, что Γ^n может быть приведено к соответствующему клеточному виду заменой каждого Γ_σ в Γ на Γ_σ^n. Следовательно, $\Gamma^n(P)$ невырожденна тогда и только тогда, когда каждая $\Gamma_\sigma^n(P)$ невырожденна, и утверждение теоремы вытекает из леммы 5.22.

Следующее утверждение принадлежит Марианне Тесье [1952b].

Следствие 5.24. *Если полугрупповая алгебра $\Phi[S]$ конечной простой полугруппы S полупроста, то S является группой.*

Доказательство. Согласно следствию 2.56 и теореме 3.5, полугруппа S изоморфна рисовской полугруппе матричного типа над группой G с сэндвич-матрицей P. Каждый элемент из P принадлежит G, и $m = n$ по теореме 5.20. Пусть Γ_1 —«единичное представление» алгебры $\Phi[S]$, т. е. представление степени 1, при котором каждому элементу из S ставится в соответствие единица 1 поля Φ. Тогда $\Gamma_1^n(P)$ есть матрица над Φ, каждый элемент которой равен 1. Но на основании теорем 5.20 и 5.23 эта матрица должна быть невырожденна, откуда, очевидно, вытекает, что $n = 1$. Следовательно, $S \cong G$.

Следствие 5.25. *Если полугрупповая алгебра $\Phi[S]$ конечной полугруппы S полупроста, то ядро полугруппы S является группой.*

Следующая теорема была также получена Оганесяном [1955].

Теорема 5.26. *Полугрупповая алгебра $\Phi[S]$ конечной инверсной полугруппы S над полем Φ полупроста тогда и только тогда, когда характеристика поля равна нулю или является простым числом, не делящим порядок никакой подгруппы из S.*

Доказательство. Пусть J есть $\mathcal{J}$-класс из S, и пусть $Q = J \cup z$ — соответствующий главный фактор. Если $a \in J$, то и $a^{-1} \in J$, поэтому Q есть инверсная полугруппа. Будучи 0-простой (или простой) она является либо полугруппой Брандта (теорема 3.9), либо идеалом в S, являющимся группой. По теореме 3.9 $Q \cong \mathcal{M}^0(G; n, n; \Delta_n)$ для некоторой конечной группы G и некоторого целого числа n, где сэндвич-матрица Δ_n является единичной $n \times n$-матрицей над G^0. Так как Δ_n невырожденна в $\Phi[G]$, из теоремы 5.20 следует, что алгебра $\Phi[Q]$ полупроста в том и только в том случае, когда характеристика поля Φ равна нулю или есть простое число, не делящее порядок группы G. Утверждение теоремы следует теперь из теоремы 5.14.

Лемма 5.27. *Пусть $\{\Gamma_\sigma \mid \sigma = 1, \ldots, c\}$ — полное множество неэквивалентных неприводимых представлений полупростой алгебры $\mathfrak{A}$ над полем Φ, и пусть P — невырожденная $n \times n$-матрица над $\mathfrak{A}$. Для каждого элемента A из $\mathfrak{B} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}; n, n; P)$ пусть $\Gamma'_\sigma(A) = \Gamma_\sigma^n(AP)$. Тогда $\{\Gamma'_\sigma \mid \sigma = 1, \ldots, c\}$ есть полное множество неэквивалентных неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{B}$.*

Доказательство. По теореме 5.5 $\{\Gamma_\sigma^n \mid \sigma = 1, \ldots, c\}$ есть полное множество неэквивалентных неприводимых представлений алгебры $(\mathfrak{A})_n$. По теореме 5.19 $\mathfrak{B} = \mathcal{M}(\mathfrak{A}; n, n; P)$ полупроста и отображение $A \to AP$ есть изоморфизм $\mathcal{M}$ на $(\mathfrak{A})_n$. Таким образом, каждое Γ'_σ является представлением алгебры $\mathfrak{B}$, а неприводимость и взаимная неэквивалентность для Γ'_σ непосредственно вытекает из тех же свойств для Γ_σ^n.

Следующая теорема определяет все неприводимые представления, а следовательно, и все представления над полем Φ конечной 0-простой полугруппы S, для которой $\Phi[S]$ полупроста. Характеризация таких полугрупп дана в теореме 5.20.

Теорема 5.28. *Пусть S — рисовская полугруппа $\mathcal{M}^0(G; n, n; P)$ над конечной группой G, порядок которой не делится на характеристику поля Φ, с сэндвич-матрицей P, которая как матрица над $\Phi[G]$ невырожденна. Пусть $\{\Gamma_\sigma \mid \sigma = 1, \ldots, c\}$ — полное множество неэквивалентных неприводимых представлений группы G над Φ. Для каждого элемента $(a)_{ij}$ из S положим*

$$\Gamma'_\sigma((\ )_{ij}) = \Gamma^n_\sigma((a)_{ij}P) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^n_\sigma((ap_{ik})_{ik}). \tag{5}$$

Тогда $\{\Gamma'_\sigma \mid \sigma = 1, \ldots, c\}$ есть полное множество неэквивалентных неприводимых представлений полугруппы S над Φ, каждое из которых отображает нуль полугруппы S в нулевую матрицу соответствующей размерности.

Замечание. Единственным неприводимым представлением полугруппы S, не вошедшим в множество $\{\Gamma'_\sigma\}$, является *единичное представление*, при котором каждый элемент из S отображается в единицу 1 поля Φ (см. упр. 1 ниже).

Доказательство. Все утверждения теоремы, за исключением вычислений в (5), непосредственно вытекают из лемм 5.17 и 5.27. Что касается указанных вычислений, то $(a)_{ij}P$ является матрицей, в которой i-я строка есть

$$ap_{j1}, \ldots, ap_{jk}, \ldots, ap_{jn},$$

а остальные строки состоят из нулей. Отсюда вытекает, что в $(\Phi[G])_n$ матрица $(a)_{ij}P$ является суммой n рисовских матриц $(ap_{jk})_{ik}$ $(k = 1, \ldots, n)$ и, следовательно,

$$\Gamma^n_\sigma((a)_{ij}P) = \Gamma^n_\sigma\Big(\sum_{k=1}^{n} (ap_{jk})_{ik}\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Gamma^n_\sigma((ap_{jk})_{ik}).$$

Смысл этих вычислений состоит в том, что $\Gamma'_\sigma((a)_{ij})$ оказывается, таким образом, выраженной через матрицы, содержащие элементы из самой группы G, а не из $\Phi[G]$.

Теорема 5.29. *Простая конечномерная алгебра над полем Φ является сжатой полугрупповой алгеброй над Φ тогда и только тогда, когда она изоморфна алгебре $(\Phi)_n$ для некоторого целого положительного числа n.*

Доказательство. Рассмотренный выше пример 2 показывает, что $(\Phi)_n$ является сжатой полугрупповой алгеброй. Обратно, пусть S — конечная полугруппа с нулем и $\Phi_0[S]$ проста.

Тогда S, очевидно, 0-проста и поэтому представима как рисовская полугруппа $\mathcal{M}^0(G; m; n; P)$. По лемме 5.17 $\Phi_0[S] \cong \mathcal{M}(\Phi[G]; m, n; P)$. По теореме 5.19 $\Phi_0[S] \cong (\Phi[G])_n$. Последняя алгебра, согласно теореме 5.4, проста в том и только в том случае, когда проста $\Phi[G]$. Но $\Phi[G]$ проста тогда и только тогда, когда G — одноэлементная группа, ибо если w представляет собой сумму элементов из G, то $\Phi[w]$ — идеал в $\Phi[G]$. Следовательно, $\Phi[G] \cong \Phi$ и $\Phi_0[S] \cong (\Phi)_n$.

В частности, заметим, что *некоммутативная алгебра с делением над Φ не может быть сжатой полугрупповой алгеброй над Φ.*

Здесь мы прервем изложение исследований Манна и закончим параграф двумя результатами Хьюитта и Цукермана ([1955], теоремы 4.2 и 5.22), первый из которых тесно связан с теоремой 5.29. (Мы продолжим изложение результатов Манна в следующем параграфе.)

Теорема 5.30. *Пусть $\mathfrak{A}$ — полупростая конечномерная алгебра над полем Φ. Если $\mathfrak{A} = \Phi[S]$ для некоторой (конечной) полугруппы S, то одна из простых компонент этой алгебры имеет над Φ размерность 1. Обратное утверждение справедливо, если поле Φ алгебраически замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A} = \Phi[S]$. Так как по предположению $\mathfrak{A}$ полупроста, то, согласно следствию 5.25, ядро K полугруппы S является группой. Пусть w — сумма в $\mathfrak{A}$ всех элементов из K, и пусть e — единица группы K. Для произвольного $s \in S$ имеем $sw = s(ew) = (se)w = w$, так как элемент se из K просто переставляет слагаемые в w. Аналогично, $ws = w$. Следовательно, $\Phi[w]$ есть идеал из $\mathfrak{A}$ размерности 1 над Φ.

Обратно, предположим, что Φ алгебраически замкнуто и что одна из простых компонент алгебры $\mathfrak{A}$ имеет размерность 1. Тогда

$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}' = (\Phi)_{n_1} \oplus (\Phi)_{n_2} \oplus \ldots \oplus (\Phi)_{n_c},$$

где, допустим, $n_1 = 1$. Пусть $E_{ij}^{(\sigma)}$ $(i, j = 1, \ldots, n_\sigma)$ обозначает единичную матрицу в $(\Phi)_{n_\sigma}$ $(\sigma = 1, \ldots, c)$. Тогда матрицы

$$E_{11}^{(1)},\ E_{11}^{(1)} + E_{ij}^{(\sigma)}\ (i,\ j = 1, \ldots, n_\sigma,\ \sigma = 2, \ldots, c)$$

образуют одновременно и полугруппу S, и базис в $\mathfrak{A}'$, так что $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}' = \Phi[S]$.

Относительно обратного утверждения в теореме 5.30 см. упражнение 8 к настоящему параграфу.

Пусть S — конечная коммутативная полугруппа. Если $a \in S$, то $a^k = e$ точно для одного идемпотента e из S и для некоторого положительного целого k. Мы говорим, что *a принадлежит идемпотенту e.* Множество S_e всех элементов из S, принадлежащих e, является подполугруппой, содержащей e и не содержащей других идемпотентов; S_e обладает максимальной подгруппой H_e из S, для которой e является единицей, и H_e является идеалом (ядром) в S_e. Пусть E — множество идемпотентов из S. Тогда S является объединением полуструктуры E полугрупп S_e. Мы называем $H = \bigcup\limits_{e \in E} H_e$ *групповой частью* S; H является подполугруппой из S и объединением полуструктуры E групп H_e.

Теорема 5.31. *Пусть S — конечная коммутативная полугруппа и H — ее групповая часть. Пусть Φ — поле, характеристика которого не делит порядок никакой подгруппы из S. Предположим, что $H \neq S$ и что $S \setminus H$ содержит r элементов $t_1, t_2, \ldots, t_r$. Пусть e_i — идемпотент, которому принадлежит t_i. Тогда r элементов $t_i - t_ie_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ образуют базис радикала $\mathfrak{R}$ алгебры $\Phi[S]$.*

Доказательство. Если $t \in S$ и $e \in E$, то (так как S коммутативна)

$$(t - te)(t^m - t^m e) = t^{m+1} - t^{m+1}e.$$

По индукции

$$(t - te)^m = t^m - t^m e$$

для каждого целого положительного m. Если t принадлежит e, то для некоторого k имеем $t^k = e$ и, следовательно, разность $t - te$ нильпотентна. Поэтому r элементов $t_i - t_ie_i$ лежат в $\mathfrak{R}$.

Покажем сейчас, что они линейно независимы. Предположим, что для элементов $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ из Φ имеем

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i (t_i - t_ie_i) = 0.$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i t_i - y = 0,$$

где $y = \sum \alpha_i t_i e_i$. Поскольку векторные пространства $\Phi[H]$ и $\Phi[S \setminus H]$ дополняют друг друга и поскольку элементы $t_1, \ldots, t_r$ линейно независимы, мы заключаем, что $\alpha_i = 0$ для каждого $i = 1, \ldots, r$.

По теореме 5.21 алгебра $\Phi[H]$ полупроста, так что $\Phi[H] \cap \mathfrak{R} = 0$. Следовательно, размерность $\mathfrak{R}$ не может превосходить r. Но $\mathfrak{R}$ содержит r линейно независимых элементов $t_i - t_ie_i$, а потому они должны составлять базис в $\mathfrak{R}$.

В [1952a] Марианна Тесье нашла радикал $\mathfrak{R}$ алгебры $\mathfrak{A} = \Phi[S]$, когда S является конечной простой слева полугруппой, а Φ имеет характеристику 0; она показала, что $\mathfrak{A}\mathfrak{R} = 0$ и $\mathfrak{A}/\mathfrak{R} \cong \Phi[G]$, где G — структурная группа полугруппы S. Она показала в [1952b], что если S — конечная простая полугруппа, $\mathfrak{R}$ — радикал из $\mathfrak{A} = \Phi[S]$, а характеристика Φ равна нулю, то $\mathfrak{A}\mathfrak{R}\mathfrak{A} = 0$ и $\mathfrak{R} \neq 0$, если S не является группой (следствие 5.24). Этот результат был распространен Манном [1955a] на любую конечную 0-простую полугруппу S и $\mathfrak{A} = \Phi_0[S]$. Если $S = \mathcal{M}(G;\ m,\ n;\ P)$ и каждый элемент из P является единицей группы G, то также имеет место $\mathfrak{A}/\mathfrak{R} \cong \Phi[G]$. Вопрос об описании радикала $\mathfrak{R}$ в общем случае остается открытым.

Упражнения к § 5.2

1. Пусть S — полугруппа с нулем z и Γ — представление степени n этой полугруппы над полем Φ. Пусть r — ранг матрицы $\Gamma(z)$. Так как $\Gamma(z)$ — идемпотент, то существует такая невырожденная $n \times n$-матрица C, что

$$C\Gamma(z)C^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где I_r есть единичная $r \times r$-матрица. Для любого a из S мы имеем

$$C\Gamma(a)C^{-1} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & \Gamma_2(a) \end{pmatrix},$$

где $\Gamma_2(a)$ — некоторая $(n-r) \times (n-r)$-матрица над Φ. Если $r = n$, то $\Gamma(a) = I_n$ для каждого a из S. Если $0 < r < n$, то Γ распадается на представление Γ_1 степени r, для которого $\Gamma_1(a) = I_r$ при любом a из S, и представление Γ_2 степени $n-r$, для которого $\Gamma_2(z) = 0$. Если Γ неприводимо, то или $\Gamma(z) = 0$, или же Γ есть единичное представление для S.

2. Пусть S — конечная связка (полугруппа идемпотентов). Тогда $\Phi[S]$ полупроста в том и только в том случае, когда S — коммутативна. (Хьюитт и Цукерман [1955], теорема 5.27.)

3. (a) Пусть P — [не]вырожденная $n \times n$-матрица над алгеброй $\mathfrak{A}$ над полем Φ. Пусть Φ^* — поле, содержащее Φ, и пусть $\mathfrak{A}^*$ — алгебра, полученная из $\mathfrak{A}$ путем расширения основного поля до Φ^*. Тогда матрица P остается над $\mathfrak{A}^*$ [не]вырожденной.

(b) Пусть S — конечная 0-простая полугруппа, а Φ_1 и Φ_2 — два поля одной и той же характеристики. Тогда $\Phi_1[S]$ и $\Phi_2[S]$ либо обе полупросты, либо обе неполупросты (Манн [1955b], лемма 6.3.)

4. Пусть $G = \{i,\ a\}$ — циклическая группа порядка 2 ($a^2 = i$) и характеристика поля Φ отлична от 2. Рассмотрим матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & i & i \\ i & 0 & a \\ i & i & 0 \end{pmatrix}.$$

Если Γ_1 — единичное представление группы G и Γ_2 — другое неприводимое представление этой группы, такое, что $\Gamma_2(i) = 1$ и $\Gamma_2(a) = -1$, то $\Gamma_1^3(P)$ невырожденна, а $\Gamma_2^3(P)$ вырожденна. Таким образом, P вырожденна в $\Phi[G]$.

5. Пусть $Q = \mathscr{M}^0(G; n, n; \Delta_n)$ — конечная полугруппа Брандта (§ 3.3), а Φ — поле, характеристика которого не делит порядок группы G. Тогда $\Phi[Q]$ полупроста. Пусть Γ — неприводимое представление степени r группы G над Φ, а Γ' — соответствующее неприводимое представление полугруппы Q, задаваемое так же, как в теореме 5.28. Если $(a)_{ij} \in Q$, то $\Gamma'((a)_{ij})$ представляет собой блочную $n \times n$-матрицу, получаемую заменой каждого элемента a в $(a)_{ij}$ на $\Gamma(a)$, а каждого элемента 0 в $(a)_{ij}$ — на нулевую $r \times r$-матрицу. (Клиффорд [1942], стр. 342; Манн [1957a], теорема 4.5.)

6. Алгебра кватернионов не может быть сжатой полугрупповой алгеброй над полем действительных чисел ни для какой полугруппы, но она является сжатой полугрупповой алгеброй над полем комплексных чисел.

7. Пусть S — бесконечная циклическая полугруппа, порожденная элементом x, и пусть Φ — поле. Тогда $\Phi[S^1]$ есть кольцо $\Phi[x]$ полиномов от x над Φ. Пусть $\alpha \in \Phi$, $\alpha \neq 0$ и

$$\Gamma(f) = \begin{pmatrix} f(\alpha) & 0 \\ f'(\alpha) & f(\alpha) \end{pmatrix},$$

где f' обозначает формальную производную от полинома f. Тогда Γ есть представление алгебры $\Phi[x]$ и, следовательно, также представление полугруппы S, причем оно не вполне приводимо. (Указано Джекобсоном (Jacobson N., *Trans. Amer. Math. Soc.* 42 (1937), 206—224).)

8. Пусть $\mathfrak{A}$ — полупростая алгебра $R \oplus Q$ над полем R действительных чисел, простыми компонентами которой являются само R и алгебра Q кватернионов над R. Не существует такой полугруппы S, что $\mathfrak{A} \cong R[S]$. (См. теорему 5.30.)

§ 5.3. Главные неприводимые представления полугруппы

Пусть S — произвольная полугруппа и Φ — поле. Основной результат этого параграфа (теорема 5.33) состоит в описании некоторых неприводимых представлений полугруппы S (которые мы называем «главными») на языке неприводимых представлений главных факторов этой полугруппы. Кроме того (утверждение (D) теоремы 5.33), доказывается, что если полугруппа S удовлетворяет условию минимальности M_J для главных идеалов, то каждое ее ненулевое неприводимое представление является главным. В этом случае мы имеем взаимно однозначное соответствие между ненулевыми неприводимыми представлениями полугруппы S над Φ и такими же представлениями ее всевозможных главных факторов.

В таком общем виде теорема принадлежит Манну [1960]. Идея доказательства восходит к работе Хьюитта и Цукермана [1957], в которой рассматривались неприводимые представления полной полугруппы преобразований конечного множества. Случай, когда полугруппа S конечна, а алгебра $\Phi[S]$ полупроста (следствие 5.34), был рассмотрен Манном [1955a] и независимо Понизовским [1956]. Их результат вместе с теоремой 5.28 дает описание всех представлений такой полугруппы.

Напомним (см. § 2.1), что существует естественная частичная упорядоченность $\mathcal{J}$-классов любой полугруппы S, а именно $J_1 \leqslant J_2$, если $S^1J_1S^1 \subseteq S^1J_2S^1$. В действительности $J \leftrightarrow S^1JS^1$ есть взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{J}$-классами и главными идеалами полугруппы S, и отношение $\leqslant$ в точности соответствует отношению включения.

Если $\mathfrak{X}$ — множество $\mathcal{J}$-классов, то класс J из $\mathfrak{X}$ называется (i) *минимальным в* $\mathfrak{X}$, если из $J' \in \mathfrak{X}$ следует $J' \nless J$ и (ii) *наименьшим*[1]) *в* $\mathfrak{X}$, если из $J' \in \mathfrak{X}$ следует $J \leqslant J'$. Мы говорим, что S удовлетворяет условию M_J, если каждое непустое множество $\mathcal{J}$-классов из S содержит по крайней мере один минимальный класс. Подгруппа S удовлетворяет условию M_J тогда и только тогда, когда каждый строго убывающий ряд главных идеалов в S конечен, т. е. M_J эквивалентно условию *обрыва убывающих цепей для главных идеалов.*

Напомним также (см. § 2.6), что существует взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{J}$-классами и *главными факторами* полугруппы S, причем главный фактор $Q(J)$, соответствующий $\mathcal{J}$-классу J — это по определению факторполугруппа Риса $S^1JS^1/I(J)$, где $I(J) = S^1JS^1 \setminus J$ (легко видеть, что $I(J)$ есть идеал в S). Для фиксированного $\mathcal{J}$-класса J мы будем обозначать через $x \to \bar{x}$ естественный гомоморфизм S^1JS^1 на $Q(J)$, а именно

$$\bar{x} = \begin{cases} x & \text{для всех } x \text{ из } J, \\ z & \text{для всех } x \text{ из } I(J), \end{cases} \tag{1}$$

где z — нулевой элемент из $Q(J)$. Напомним еще (см. лемму 2.39), что $Q(J)$ является либо полугруппой с нулевым умножением, либо 0-простой полугруппой (или простой в случае, когда J есть ядро полугруппы S). Будем говорить, что J есть 0-простой класс, если Q 0-проста или проста.

Пусть теперь Φ — поле и $\Phi[S]$ — полугрупповая алгебра полугруппы S над Φ. Если $T \subseteq S$, то через $\Phi[T]$ обозначаем (как в § 5.2) линейное подпространство в $\Phi[S]$, натянутое на T.

---

[1]) В оригинале — универсально минимальным.— *Прим. перев.*

Продолжим естественный гомоморфизм $x \to \bar{x}$ идеала S^1JS^1 на $Q(J)$ до гомоморфизма алгебры $\Phi[S^1JS^1]$ на $\Phi[Q(J)]$ следующим образом: если

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in \Phi[S^1JS^1],$$

т. е. $\alpha_i \in \Phi$ и $x_i \in S^1JS^1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то положим

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \bar{x}_i.$$

Если Γ — представление степени n полугруппы S над Φ, то $\Gamma(S)$ содержится в полной матричной алгебре $(\Phi)_n$ степени n над Φ. Для произвольного подмножества $T \subseteq S$ через $[\Gamma(T)]$ обозначим подпространство из $(\Phi)_n$, натянутое на подмножество $\Gamma(T)$. Очевидно,

$$[\Gamma(T)] = \Gamma(\Phi[T]).$$

Как и в § 5.2 мы не делаем различия между представлением полугруппы S над Φ и его продолжением до представления алгебры $\Phi[S]$. Отметим также, что $[\Gamma(S)]$ есть подалгебра из $(\Phi)_n$.

Лемма 5.32. *Пусть Γ — неприводимое представление степени n полугруппы S над Φ и T — такое подмножество из S, что $[\Gamma(T)]$ есть неприводимая подалгебра в $(\Phi)_n$. Тогда в $\Phi[T]$ существует такой элемент e, что $\Gamma(e) = I_n$ есть единичная $n \times n$-матрица над Φ.*

Доказательство. По теореме 5.7 $[\Gamma(T)]$ — простая алгебра и поэтому содержит единицу E (как было отмечено в § 5.1 после второй теоремы Веддербёрна). Матрица E коммутирует с каждым элементом неприводимого множества $[\Gamma(T)]$, и, поскольку $E \neq 0$, согласно лемме Шура (§ 5.1), она должна быть невырожденной. Однако лишь матрица I_n является невырожденным идемпотентом в $(\Phi)_n$ и, следовательно, $E = I_n$. Так как $E \in [\Gamma(T)]$, существует конечное число таких элементов x_i из T и α_i из Φ, что $E = \sum_i \alpha_i \Gamma(x_i)$. Полагая $e = \sum_i \alpha_i x_i$, мы имеем $e \in \Phi[T]$ и $\Gamma(e) = E = I_n$.

Если Γ — представление полугруппы S над Φ, то через $\Gamma^{-1}(0)$ мы обозначаем множество всех таких элементов s из S, что $\Gamma(s) = 0$. Очевидно, что $\Gamma^{-1}(0)$ является идеалом в S. Представление Γ называется *главным*, если совокупность всех $\mathcal{J}$-классов из S, не содержащихся в $\Gamma^{-1}(0)$, обладает наименьшим классом J. Ясно, что J единственным образом определяется представлением Γ, и мы будем называть его *вершиной* представления Γ. Таким образом, представление Γ является главным представлением с вершиной J тогда и только тогда, когда (i) $\Gamma(x) \neq 0$ для некоторого и, следовательно, для каждого элемента x из J и (ii), если s — такой элемент из S, что $J_s \not\geqslant J$, то $\Gamma(s) = 0$. Отсюда следует, что при $J_s \geqslant J$ имеем $\Gamma(s) \neq 0$. (Заметим, что если J — произвольный $\mathcal{J}$-класс из S, то объединение всех $\mathcal{J}$-классов J' из S, таких, что $J' \not\geqslant J$, является идеалом в S.)

Пусть J есть $\mathcal{J}$-класс из S, и пусть Γ — такое представление полугруппы S над Φ, что $\Gamma(y) = 0$ для любого y из $I(J)$. Тогда мы можем задать представление Γ' полугруппы $Q(J)$ так:

$$\Gamma'(\bar{x}) = \Gamma(x) \text{ для всех } x \in S^1JS^1, \tag{2}$$

где $x \to \bar{x}$ — естественный гомоморфизм (1). Мы называем Γ' представлением, *индуцированным* представлением Γ, а Γ называем *продолжением* Γ' на S. Мы говорим, что Γ — *главное продолжение* представления Γ', если Γ является главным представлением полугруппы S с вершиной J. Если считать Γ представлением алгебры $\Phi[S]$, то условие

$$\Gamma'(\bar{x}) = \Gamma(x) \text{ для всех } x \text{ из } \Phi[S^1JS^1] \tag{2'}$$

задает представление алгебры $\Phi[Q(J)]$, соответствующее Γ'; здесь $x \to \bar{x}$ есть продолжение отображения (1) на $\Phi[S^1JS^1]$. Следующая теорема устанавливает взаимно однозначное соответствие между неприводимыми главными представлениями Γ полугруппы S над Φ и ненулевыми неприводимыми представлениями Γ' различных ее 0-простых главных факторов, переводящими в нуль нулевые элементы этих факторов.

Теорема 5.33 (Манн). *Пусть S — полугруппа и Φ — поле.*

(A) *Если Γ — неприводимое главное представление степени n полугруппы S над Φ и J — его вершина, то J 0-проста и представление Γ' главного фактора $Q(J)$, индуцированное представлением Γ, также является неприводимым и ненулевым. Существует элемент e из $\Phi[J]$, для которого $\Gamma'(e) = I_n$, и для любого такого элемента e*

$$\Gamma(s) = \Gamma'(\overline{se}) \text{ при всех } s \text{ из } S. \tag{3}$$

Здесь $x \to \bar{x}$ обозначает естественный гомоморфизм алгебры $\Phi[S^1JS^1]$ на $\Phi[Q(J)]$.

(B) *Если J есть 0-простой $\mathcal{J}$-класс из S и Γ' — ненулевое неприводимое представление степени n полугруппы $Q(J)$ над Φ, причем $\Gamma'(z) = 0$, где z — нуль, то существует такой элемент e из $\Phi[J]$, что $\Gamma'(e) = I_n$, и для каждого такого элемента e соотношение (3) задает неприводимое главное продолжение Γ представления Γ'.*

(C) *Два неприводимых главных представления полугруппы S эквивалентны тогда и только тогда, когда (i) они обладают одной* *и той же вершиной J и* (ii) *они индуцируют эквивалентные представления в $Q(J)$.*

(D) ***Если S удовлетворяет условию M_J, то каждое ненулевое неприводимое представление полугруппы S над Φ является главным.***

Доказательство. (A) Так как $[\Gamma(J)] = [\Gamma(S^1JS^1)]$, то ясно, что $[\Gamma(J)]$ не отображается на нуль. Но по предположению $\Gamma(S)$ — неприводимая алгебра матриц и, следовательно, по теореме 5.7 она проста. Поэтому

$$[\Gamma(J)] = [\Gamma(S)].$$

Будем писать Q вместо $Q(J)$. Согласно (2), $[\Gamma'(Q)] = [\Gamma(J)]$ и, следовательно, представление Γ' является неприводимым и ненулевым. Снова по теореме 5.7 $[\Gamma'(Q)]$ — простая алгебра, а поэтому Q или 0-проста, или проста, поскольку она, конечно, не является нулевой. Таким образом, идеал J 0-прост по определению.

По лемме 5.32, где T заменено на J, в $\Phi[J]$ существует такой элемент e, что $\Gamma(e) = I_n$. Для любого такого элемента e и любого $s \in S$ мы имеем $se \in \Phi[S^1JS^1]$. Следовательно, используя (2′), получаем

$$\Gamma(s) = \Gamma(s)\, I_n = \Gamma(s)\, \Gamma(e) = \Gamma(se) = \Gamma'(\overline{se}),$$

что и доказывает (3).

(B) Из предположений пункта (B) следует, что $[\Gamma'(J)]$ — неприводимая алгебра матриц. По лемме 5.32 существует такой элемент e из $\Phi[J]$, что $\Gamma'(e) = I_n$. Отметим, что $\bar{e} = e$. Покажем, что отображение Γ, задаваемое соотношением (3), при любом таком элементе e является представлением полугруппы S.

Сначала заметим, что для любого элемента $s \in S$

$$\Gamma'(\overline{se}) = \Gamma'(\overline{ese}) = \Gamma'(\overline{es}).$$

Действительно,

$$\Gamma'(\overline{se}) = I_n\Gamma'(\overline{se}) = \Gamma'(e)\,\Gamma'(\overline{se}) = \Gamma'(\bar{e})\,\Gamma'(\overline{se}) =$$
$$= \Gamma'(\bar{e}\cdot\overline{se}) = \Gamma'(\overline{ese}),$$

и другая половина доказывается аналогично. (Обращаем внимание читателя на то, что мы не можем сказать, что $\overline{se} = \bar{s}\cdot\bar{e}$, так как $\bar{s}$ определено только при $s \in S^1JS^1$.) Теперь для любых s и t из S

$$\Gamma(s)\,\Gamma(t) = \Gamma'(\overline{se})\,\Gamma'(\overline{te}) = \Gamma'(\overline{es})\,\Gamma'(\overline{te}) = \Gamma'(\overline{es}\cdot\overline{te}) = \Gamma'(\overline{este}) =$$
$$= \Gamma'(\overline{ste}) = \Gamma(st).$$

Если $x \in S^1JS^1$, то

$$\Gamma(x) = \Gamma'(\overline{xe}) = \Gamma'(\bar{x}\bar{e}) = \Gamma'(\bar{x})\,\Gamma'(\bar{e}) = \Gamma'(\bar{x}).$$

Это показывает, что, во-первых, Γ индуцирует Γ' и является поэтому продолжением представления Γ', во-вторых, $\Gamma(S) = \Gamma'(Q)$ и, следовательно, представление Γ неприводимо.

Наконец, мы должны доказать, что Γ есть главное представление с вершиной J. Очевидно, $\Gamma(J) \neq 0$, и остается показать, что если s — элемент из S, для которого $J_s \not\geqslant J$, то $\Gamma(s) = 0$. Если $x \in J$, то $J_{sx} \leqslant J_x$; далее, $J_{sx} < J_x$, поскольку при $J_{sx} = J_x$ мы имели бы $J_s \geqslant J_{sx} = J_x = J$. Отсюда $sx \in I(J)$ и на основании условия (3) $\Gamma(sx) = \Gamma'(\overline{sxe}) = \Gamma'(z)$. Но $\Gamma'(z) = 0$ по предположению, поэтому $\Gamma(sx) = 0$.

Имеем $e = \sum\limits_i \alpha_i x_i$ для некоторых x_i из J и α_i из Φ. Следовательно,

$$\Gamma(s) = \Gamma(se) = \sum_i \alpha_i \Gamma(sx_i) = 0.$$

(C) Пусть Γ_1 и Γ_2 — неприводимые главные представления полугруппы S над Φ. Если они эквивалентны, то существует такая невырожденная постоянная матрица C над Φ, что

$$\Gamma_1(s) = C\Gamma_2(s)C^{-1} \text{ для всех } s \text{ из } S.$$

Очевидно, $\Gamma_1^{-1}(0) = \Gamma_2^{-1}(0)$ и поэтому Γ_1 и Γ_2 обладают одной и той же вершиной J. Тогда в силу (2) для любого x из S^1JS^1

$$\Gamma_1'(\bar{x}) = \Gamma_1(x) = C\Gamma_2(x)C^{-1} = C\Gamma_2'(\bar{x})C^{-1},$$

так что Γ_1' и Γ_2' эквивалентны.

Обратно, предположим, что представления Γ_1 и Γ_2 обладают одной и той же вершиной J и что Γ_1' и Γ_2' эквивалентны. Тогда существует такая постоянная невырожденная матрица C, что

$$\Gamma_1'(\bar{x}) = C\Gamma_2'(\bar{x})C^{-1} \quad \text{для всех } \bar{x} \text{ из } Q.$$

Согласно (A), существует элемент e из $\Phi[J]$, для которого $\Gamma_2'(e) = I_n$ и $\Gamma_2(s) = \Gamma_2'(\overline{se})$ при всех s из S. Тогда $\Gamma_1'(e) = C\Gamma_2'(e)C^{-1} = I_n$ и снова в силу утверждения (A) мы имеем $\Gamma_1(s) = \Gamma_1'(\overline{se})$. Отсюда

$$\Gamma_1(s) = \Gamma_1'(\overline{se}) = C\Gamma_2'(\overline{se})C^{-1} = C\Gamma_2(s)C^{-1},$$

так что Γ_1 и Γ_2 эквивалентны.

(D) Предположим теперь, что S удовлетворяет условию M_J. Пусть Γ — ненулевое неприводимое представление степени n полугруппы S над Φ. Поскольку Γ ненулевое, множество $\mathcal{J}$-классов из S, не содержащихся в $\Gamma^{-1}(0)$, не пусто. На основании условия M_J оно содержит минимальный класс J.

Если $y \in I(J)$, т. е. $J_y < J$, то $\Gamma(y) = 0$ по определению J. Отсюда $[\Gamma(J)] = [\Gamma(S^1JS^1)]$ и, таким образом, идеал $[\Gamma(J)]$ из $[\Gamma(S)]$ не отображается в нуль. Поскольку в силу предположения алгебра $[\Gamma(S)]$ неприводима, то по теореме 5.7 она проста и, следовательно, $[\Gamma(J)] = [\Gamma(S)]$. По лемме 5.32

существует такой элемент e из $\Phi[J]$, что $\Gamma(e) = I_n$. Тогда

$$\Gamma(s) = \Gamma(s) I_n = \Gamma(s)\Gamma(e) = \Gamma(se) \quad \text{для всех } s \text{ из } S.$$

Тот факт, что Γ есть главное представление с вершиной J, доказывается теперь точно так же, как в последнем разделе доказательства утверждения (B). Незначительное изменение состоит в том, что мы получаем равенство $\Gamma(sx) = 0$ из включения $sx \in I(J)$ прямо по определению J.

Приводимое ниже следствие непосредственно вытекает из теоремы 5.33. Оно дополняет исследования предыдущего параграфа. Неприводимые представления каждого из главных факторов полугруппы S описаны в теореме 5.28.

Следствие 5.34. *Пусть Φ — поле и S — такая конечная полугруппа, что алгебра $\Phi[S]$ полупроста. Через J_i ($i = 1, \ldots, n$) обозначим $\mathcal{J}$-классы из S и для каждого i пусть $Q_i = J_i \cup z_i$ — главный фактор, соответствующий J_i. Тогда сжатая полугрупповая алгебра $\Phi_0[Q_i]$ полупроста (лемма 5.13 и теорема 5.14) и потому обладает единицей e_i. Очевидно, $e_i \in \Phi[J_i]$. Пусть $\{\Gamma'_{i\sigma} \mid \sigma = 1, \ldots, c_i\}$ — полное множество неэквивалентных неприводимых представлений полугруппы Q_i над Φ, переводящих каждый элемент z_i в нуль. Зададим $\Gamma_{i\sigma}$ следующим образом:*

$$\Gamma_{i\sigma}(s) = \Gamma'_{i\sigma}(\overline{se_i}) \quad \textit{для всех } s \textit{ из } S,$$

где $x \to \bar{x}$ — естественный гомоморфизм алгебры $\Phi[S^1 J_i S^1]$ на $\Phi[Q_i]$. Тогда $\{\Gamma_{i\sigma} \mid \sigma = 1, \ldots, c_i;\ i = 1, \ldots, n\}$ есть полное множество неэквивалентных неприводимых представлений полугруппы S над Φ.

Мы завершаем параграф еще одним результатом Манна [1960], касающимся полной приводимости. Сначала докажем лемму.

Лемма 5.35. *Пусть J есть 0-простой $\mathcal{J}$-класс полугруппы S и Γ — представление степени m полугруппы S над Φ. Пусть для каждого s из S $\Gamma(s) = (\gamma_{ij}(s))$ ($i, j = 1, \ldots, m$). Если $\gamma_{ij}(x) = 0$ при всех i, j, таких, что $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m$, и для всех x из J, то $\Gamma(x) = 0$ для всех x из J.*

Доказательство. Пусть $x \in J$. Тогда существуют такие a и b из J, что $axb = x$. Отсюда $a^m x b^m = x$. Но $\Gamma(a)^m = \Gamma(b)^m = 0$, так как $\Gamma(a)$ и $\Gamma(b)$ — треугольные матрицы с нулями на главной диагонали. Поэтому $\Gamma(x) = \Gamma(a)^m \Gamma(x)\Gamma(b)^m = 0$.

Теорема 5.36. *Пусть S — полупростая полугруппа, удовлетворяющая условию M_J, и Φ — поле. Если каждое представление любого из главных факторов полугруппы S над Φ вполне приводимо, то каждое представление полугруппы S над Φ вполне приводимо.*

Доказательство. Пусть

$$\Gamma(s)=\begin{pmatrix}\Gamma_1(s) & 0 & \ldots & 0\\ \Gamma_{21}(s) & \Gamma_2(s) & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \Gamma_{n1}(s) & \Gamma_{n2}(s) & \ldots & \Gamma_n(s)\end{pmatrix}\qquad (s\in S)$$

есть представление полугруппы S над Φ в полностью приведенном виде (§ 5.1), а представления $s\to\Gamma_i(s)$ $(i=1,\ldots,n)$ — его неприводимые конституэнты. Так как нулевое представление является, очевидно, вполне приводимым, мы можем предполагать, что Γ ненулевое. Будем доказывать теорему индукцией по числу $n=N(\Gamma)$ неприводимых конституэнт представления Γ. Теорема тривиальна для $N(\Gamma)=1$, и мы можем предполагать, что каждое представление Γ' полугруппы S, для которого $N(\Gamma')<n$, вполне приводимо.

Произвольный элемент s полугруппы S принадлежит некоторому ее $\mathcal{J}$-классу, а каждый $\mathcal{J}$-класс по предположению 0-прост. Если бы все $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$ были нулевыми, то из леммы 5.35 следовало бы, в противоречие с предположением, что Γ — нулевое представление. Следовательно, не все Γ_i нулевые. Каждое ненулевое представление является главным ввиду условия M_J и теоремы 5.33. Пусть J_i — вершина представления Γ_i и J_k — минимальная среди таких J_i. Иными словами, представление Γ_k не является нулевым, и если Γ_i также ненулевое, то $J_i \not< J_k$.

Если x — такой элемент из S, что $J_x<J_k$, то, очевидно, $J_x\not\geq J_i$ для каждого i, такого, что представление Γ_i — ненулевое. Поэтому $\Gamma_i(x)=0$ для каждого такого i и, следовательно, для $i=1,\ldots,n$. Из леммы 5.35 мы выводим, что $\Gamma(x)=0$.

Пусть $Q_k=J_k\cup z_k$ (или $Q_k=J_k$ для ядра полугруппы S) есть главный фактор, соответствующий J_k. Поскольку, как мы только что показали, $\Gamma(x)=0$ для x из $I(J_k)$, отсюда следует, что условие

$$\Gamma'(\bar{x})=\Gamma(x)\quad \text{для всех } x \text{ из } S^1J_kS^1$$

задает представление Γ' полугруппы Q_k. Здесь $x\to\bar{x}$ — естественный гомоморфизм $S^1J_kS^1$ на Q_k. Далее, представление Γ' — ненулевое, так как Γ_k является ненулевым на J_k, а Γ' содержит представление Γ_k' полугруппы Q_k, индуцированное представлением Γ_k. По предположению представление Γ' вполне приводимо, а Γ_k' по теореме 5.33 (А) неприводимо. Следовательно, существует постоянная невырожденная матрица C, такая, что

$$C\Gamma'(\bar{x})C^{-1}=\begin{pmatrix}\Gamma_k'(\bar{x}) & 0\\ 0 & \Delta'(\bar{x})\end{pmatrix}\ \text{для всех } \bar{x} \text{ из } Q_k,$$

где Δ' — некоторое представление полугруппы Q_k.

Если мы определим Δ соотношением

$$\Delta(x) = \Delta'(\bar{x}) \quad (\text{для всех } x \text{ из } S^1 J_k S^1),$$

то Δ превратится в представление для $S^1 J_k S^1$, отображающее $I(J_k)$ в нуль. Кроме того, имеем

$$C\Gamma(x)C^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_k(x) & 0 \\ 0 & \Delta(x) \end{pmatrix} \text{ для всех } x \text{ из } S^1 J_k S^1. \tag{4}$$

Представим $C\Gamma(s)C^{-1}$ следующим образом:

$$C\Gamma(s)C^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^*(s) & \Gamma_{12}^*(s) \\ \Gamma_{21}^*(s) & \Gamma_{22}^*(s) \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\Gamma_{11}^*(s)$ имеет тот же порядок, что и $\Gamma_k(x)$.

Пусть $s \in S$ и $x \in J_k$. Тогда $sx \in S^1 J_k S^1$ и из равенства

$$C\Gamma(sx)C^{-1} = C\Gamma(s)C^{-1} \cdot C\Gamma(x)C^{-1}$$

выводим

$$\begin{pmatrix} \Gamma_k(sx) & 0 \\ 0 & \Delta(sx) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11}^*(s) & \Gamma_{12}^*(s) \\ \Gamma_{21}^*(s) & \Gamma_{22}^*(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_k(x) & 0 \\ 0 & \Delta(x) \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\Gamma_{21}^*(s)\,\Gamma_k(x) = 0$ для каждого s из S и x из J_k. По теореме 5.33 (B) в алгебре $\Phi[J_k]$ существует такое e, что $\Gamma_k(e) = I$. Поскольку e есть линейная комбинация элементов x из J_k, отсюда следует, что

$$\Gamma_{21}^*(s) = \Gamma_{21}^*(s)\,I = \Gamma_{21}^*(s)\,\Gamma_k(e) = 0 \text{ для всех } s \text{ из } S.$$

Точно так же, рассматривая xs вместо sx, мы можем показать, что $\Gamma_{12}^*(s) = 0$. Таким образом, Γ распадается на два представления Γ_{11}^* и Γ_{22}^*. Поскольку они оба имеют степень, меньшую, чем Γ, они содержат меньшее, чем $N(\Gamma)$, число неприводимых конституэнт. Поэтому утверждение теоремы следует по индукции.

Хотя и нет необходимости это доказывать, но мы отметим, что Γ_{11}^* эквивалентно Γ_k. Так, если в (5) мы в качестве s возьмем элемент x из $S^1 J_k S^1$ и сравним с (4), то увидим, что $\Gamma_{11}^*(x) = \Gamma_k(x)$. Отсюда легко вывести, что Γ_{11}^* имеет ту же вершину, что и Γ_k, и индуцирует то же самое представление Γ_k' в Q_k; эквивалентность представлений Γ_{11}^* и Γ_k следует тогда из теоремы 5.33 (C).

Упражнения к § 5.3

1. Пусть S — полугруппа с ядром K. Тогда расширение на S единичного представления ядра K есть единичное представление полугруппы S.

2. Пусть S — конечная инверсная полугруппа, J_i $(i = 1, \ldots, n)$ — ее $\mathcal{J}$-классы и $Q_i = J_i \cup z_i$ (или $Q_i = J_i$ для

ядра) — соответствующие главные факторы. В силу упр. 3 из § 3.3 каждый класс Q_i есть полугруппа Брандта (или группа). Пусть e_{ij} ($j = 1, \ldots, m_i$) — идемпотенты из J_i. Тогда единица алгебры $\Phi_0 [Q_i]$ есть $e_i = \sum_{j=1}^{m_i} e_{ij}$. Предположим, что характеристика поля Φ не делит порядок ни одной подгруппы из S. В обозначениях следствия 5.34 отсюда вытекает, что

$$\Gamma_{i\sigma}(s) = \sum_{j=1}^{m_i} \Gamma'_{i\sigma}(\overline{se_{ij}}).$$

(Манн [1957a], теорема 4.7.)

3. Пусть S — бесконечная циклическая полугруппа $\{x, x^2, \ldots\}$ и Φ — поле. Полугруппа S не удовлетворяет условию M_J. Каждому элементу α из Φ соответствует представление Γ_α степени 1 полугруппы S, а именно $\Gamma_\alpha(x^n) = \alpha^n$. Только эти Γ_α являются абсолютно неприводимыми представлениями полугруппы S над Φ и ни одно из них не является главным.

§ 5.4. *Представление вполне 0-простых полугрупп*

Идеи и методы, лежащие в основе этого параграфа, а также первая часть теоремы 5.37 принадлежат Сушкевичу [1933], а большинство остальных результатов — Клиффорду ([1942] и [1960]).

Пусть S — вполне 0-простая полугруппа. По теореме Риса 3.5 S изоморфна регулярной рисовской полугруппе $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ над группой G с $\Lambda \times I$-сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$. Следовательно, мы можем считать, что сама S является такой полугруппой.

Мы увидим, что каждое представление Γ^* полугруппы S над полем Φ является в определенном смысле продолжением некоторого представления Γ группы G над Φ. Не все представления группы G могут быть продолжены до представлений полугруппы S. Если Γ — представление группы G, которое обладает таким продолжением, то среди всех таких продолжений существует одно, имеющее наименьшую возможную степень; оно единственным образом с точностью до эквивалентности определяется по Γ, и мы называем его *базисным продолжением* Γ_0^* представления Γ. Любое другое продолжение представления Γ сводится к Γ_0^* и к нулевым представлениям. Это соответствие между продолжаемыми представлениями группы G и их базисными продолжениями на S сохраняет разложимость (теорема 5.50) и приводимость в ограниченном смысле (теорема 5.51); в частности, мы получаем все неприводимые представления полугруппы S как базисные продолжения неприводимых представлений группы G.

Комбинируя сказанное выше с теоремой Манна 5.33, мы можем утверждать следующее. *Если S — полугруппа, удовлетворяющая условию M_J и такая, что каждый ее 0-простой главный фактор вполне 0-прост, то все неприводимые представления полугруппы S могут быть описаны в терминах неприводимых представлений подгрупп из S. Как мы увидим в гл. 6, этот класс полугрупп включает класс полугрупп, удовлетворяющих условиям M_R и M_L.*

Представление Γ полугруппы S будет называться *собственным*, если (i) $\Gamma(z) = 0$ в том случае, когда S обладает нулем z и (ii) Γ неразложимо на два представления, одно из которых нулевое. Мы не ограничим существенно общность рассмотрений, уделяя внимание лишь собственным представлениям. (См. упражнение 1 к § 5.2.) Собственное представление Γ группы G единственным образом продолжается до представления полугруппы G^0, если положить $\Gamma(0) = 0$; *всюду в этом параграфе мы будем предполагать, что это сделано*. Обратимся теперь к рассмотрению собственных представлений полугруппы $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda, P)$.

Как и в § 3.2, мы можем предполагать, что множества индексов I и Λ обладают общим элементом 1 и (как отмечено после доказательства леммы 3.6) сэндвич-матрица P нормализована так, что $p_{11} = e$, где e — единица группы G. Произведение двух элементов $(a)_{i\lambda}$ и $(b)_{j\mu}$ из S задается следующим образом:

$$(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu} = (ap_{\lambda j}b)_{i\mu} \quad (a,\ b \in G;\ i,\ j \in I,\ \lambda,\ \mu \in \Lambda). \tag{1}$$

Поскольку $p_{11} = e$, справедливы следующие соотношения, которые нам понадобятся в дальнейшем:

$$(a)_{11} \circ (b)_{11} = (ab)_{11}, \tag{2}$$
$$(e)_{11} \circ (e)_{i1} = (p_{1i})_{11}, \tag{3}$$
$$(e)_{i1} \circ (e)_{11} = (e)_{i1}, \tag{4}$$
$$(e)_{11} \circ (e)_{1\lambda} = (e)_{1\lambda}, \tag{5}$$
$$(e)_{1\lambda} \circ (e)_{11} = (p_{\lambda 1})_{11}, \tag{6}$$
$$(e)_{1\lambda} \circ (e)_{i1} = (p_{\lambda i})_{11}, \tag{7}$$
$$(e)_{i1} \circ (a)_{11} \circ (e)_{1\lambda} = (a)_{i\lambda}. \tag{8}$$

В силу формулы (2) множество G_{11} всех элементов $(a)_{11}$ из S есть подгруппа, изоморфная группе G. Отождествим G_{11} с G.

Пусть Γ^* — ненулевое представление степени m полугруппы S. Тогда Γ^* индуцирует представление подгруппы G из S. Пусть n — ранг идемпотентной матрицы $\Gamma^*[(e)_{11}]$. Выбирая подходящим образом базис пространства представления для Γ^*, мы можем считать, что

$$\Gamma^*[(e)_{11}] = \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая в (2) по очереди $b=e$ и $a=e$, получаем

$$\Gamma^*[(a)_{11}]=\begin{pmatrix}\Gamma(a) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \text{ для всех } a \text{ из } G, \tag{9}$$

где $a \to \Gamma(a)$ — собственное представление степени n группы G. Заметим, что $n>0$, поскольку в противном случае из (8) следовало бы, что Γ^* — нулевое представление. Мы называем Γ^* *продолжением на S представления Γ группы G.*

Ниже для всех матриц $\Gamma^*[(a)_{i\lambda}]$ мы будем использовать представление в виде, аналогичном (9), где в левом верхнем углу стоит $n \times n$-матрица. Пусть $i \in I$ и

$$\Gamma^*[(e)_{i1}]=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Из (3), (4), (9) и (10) выводим

$$\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma(p_{1i}) & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_n & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{11} & 0\\ R_{21} & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_{11} & R_{12}\\ R_{21} & R_{22}\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $R_{11}=\Gamma(p_{1i})$, $R_{12}=0$, $R_{22}=0$. Обозначая R_{21} через R_i, имеем

$$\Gamma^*[(e)_{i1}]=\begin{pmatrix}\Gamma(p_{1i}) & 0\\ R_i & 0\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Аналогично, из (5), (6) и (9) получаем

$$\Gamma^*[(e)_{1\lambda}]=\begin{pmatrix}\Gamma(p_{\lambda 1}) & Q_\lambda\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \tag{12}$$

где Q_λ есть некоторая $n \times (m-n)$-матрица над Φ. Наконец, из (8) следует, что $\Gamma^*[(a)_{i\lambda}]$ есть произведение трех матриц (11), (9) и (12) в указанной последовательности. Используя равенство $\Gamma(ab)=\Gamma(a)\,\Gamma(b)$, мы выводим

$$\Gamma^*[(a)_{i\lambda}]=\begin{pmatrix}\Gamma(p_{1i}ap_{\lambda 1}) & \Gamma(p_{1i}a)\,Q_\lambda\\ R_i\Gamma(ap_{\lambda 1}) & R_i\Gamma(a)\,Q_\lambda\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Пусть $t=m-n$. Тогда R_i есть $t \times n$-матрица, а Q_λ есть $n \times t$-матрица. Отметим, что

$$Q_1=0,\quad R_1=0. \tag{14}$$

Мы доказали, таким образом, последнее утверждение следующей теоремы.

Теорема 5.37. *Пусть* Γ — *собственное представление группы* G. *Тогда равенства* (13) *и* (14) *задают представление* Γ^* *полугруппы* S *в том и только в том случае, когда матрицы* Q_λ *и* R_i *удовлетворяют условию*

$$Q_\lambda R_i = \Gamma(p_{\lambda i}) - \Gamma(p_{\lambda 1} p_{1i}) \tag{15}$$

для всех $i \neq 1$ *из* I *и всех* $\lambda \neq 1$ *из* Λ. *Любое ненулевое представление полугруппы* S *эквивалентно представлению, полученному таким способом.*

Замечание. В силу равенств (14) и предположения о том, что $p_{11} = e$, условие (15) автоматически выполняется для $i = 1$ или $\lambda = 1$. Кроме того, имеет место (9) и, следовательно, Γ^* есть продолжение представления Γ.

Доказательство. Пусть Γ — собственное представление группы G, и пусть Γ^* задается равенствами (13) и (14). Отметим, что если мы введем обозначения

$$\bar{R}_i = \begin{pmatrix} \Gamma(p_{1i}) \\ R_i \end{pmatrix}, \quad \bar{Q}_\lambda = (\Gamma(p_{\lambda 1}) \quad Q_\lambda), \tag{16}$$

где $\bar{R}_i$, таким образом, есть $m \times n$-матрица, а $\bar{Q}_\lambda$ есть $n \times m$-матрица, то равенство (13) превратится в

$$\Gamma^*[(a)_{i\lambda}] = \bar{R}_i \Gamma(a) \bar{Q}_\lambda, \tag{17}$$

а равенство (15) — в

$$\bar{Q}_\lambda \bar{R}_i = \Gamma(p_{\lambda i}). \tag{18}$$

Предположим теперь, что имеет место (15) и, следовательно, (18). Тогда для любых двух элементов $(a)_{i\lambda}$ и $(b)_{j\mu}$ из S имеем

$$\begin{aligned} \Gamma^*[(a)_{i\lambda}]\,\Gamma^*[(b)_{j\mu}] &= \bar{R}_i \Gamma(a) \bar{Q}_\lambda \bar{R}_j \Gamma(b) \bar{Q}_\mu = \\ &= \bar{R}_i \Gamma(a)\, \Gamma(p_{\lambda j})\, \Gamma(b) \bar{Q}_\mu = \\ &= \bar{R}_i \Gamma(a p_{\lambda j} b) \bar{Q}_\mu = \\ &= \Gamma^*[(a p_{\lambda j} b)_{i\mu}] = \\ &= \Gamma^*[(a)_{i\lambda} \circ (b)_{j\mu}]. \end{aligned}$$

Таким образом, Γ^* является представлением полугруппы S.

Предположим, с другой стороны, что Γ^*, задаваемое равенствами (13) и (14), является представлением полугруппы S. Из (14) и из того, что $p_{11} = e$, следует справедливость соотношений (9), (11) и (12). Отсюда, принимая во внимание (7), выводим

$$\begin{pmatrix} \Gamma(p_{\lambda 1}) & Q_\lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma(p_{1i}) & 0 \\ R_i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma(p_{\lambda i}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

что влечет за собой (15).

Пусть Γ — собственное представление степени n полугруппы S над Φ. Когда существуют матрицы Q_λ и R_i, удовлетворяющие равенству (15), и если они существуют, то как их найти?

Как было отмечено в замечании после теоремы 5.37, нам необходимо рассматривать этот вопрос только при λ из $\Lambda_1 = \Lambda \setminus 1$ и при i из $I_1 = I \setminus 1$. Пусть

$$\Omega_{\lambda i} = \Gamma(p_{\lambda i}) - \Gamma(p_{\lambda 1} p_{1i}), \tag{19}$$

и пусть Ω есть $\Lambda_1 \times I_1$-матрица, элементами которой являются $n \times n$-матрицы, причем на (λ, i)-м месте стоит матрица $\Omega_{\lambda i}$:

$$\Omega = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \Omega_{\lambda i} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Матрица Ω является $\Lambda' \times I'$-матрицей над Φ, где $\Lambda' = n \times \Lambda_1$ и $I' = n \times I_1$. Мы называем Ω *продолжающей матрицей представления* Γ *относительно* S. Равенства (15) могут быть записаны в виде одного матричного равенства

$$\Omega = QR, \tag{21}$$

если положить

$$Q = \begin{pmatrix} \vdots \\ Q_\lambda \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad R = (\ldots R_i \ldots) \quad (\lambda \in \Lambda_1,\ i \in I_1). \tag{22}$$

Q есть $\Lambda' \times t$-матрица над Φ, а R есть $t \times I'$-матрица над Φ для некоторого пока еще не определенного целого положительного t. Мы говорим, что Γ^* является результатом *факторизации* (21) продолжающей матрицы Ω представления Γ и что Q и R являются *определяющими матрицами представления* Γ^*.

Таким образом, вопрос о существовании и строении продолжений Γ^* представления Γ сведен к проблеме из чистой теории матриц, а именно к проблеме факторизации (21) данной $\Lambda' \times I'$-матрицы Ω в произведение QR, где для некоторого целого положительного t Q есть $\Lambda' \times t$-матрица и R есть $t \times I'$-матрица. Будем называть t *шириной* факторизации. Следующие две леммы и следствия из них касаются указанной проблемы. С целью экономии обозначений мы опускаем штрихи; поскольку получаемые результаты будут справедливы для произвольных множеств индексов Λ и I, они справедливы и для Λ' и I'.

Пусть Ω — данная $\Lambda \times I$-матрица над полем Φ, где Λ и I — два любых множества индексов. Пусть $\Phi[\Lambda]$ — векторное пространство над Φ, состоящее из всевозможных отображений множества Λ в Φ. Каждый вектор-столбец матрицы Ω можно рассматривать как элемент из $\Phi[\Lambda]$. Под *пространством столбцов* матрицы Ω мы понимаем подпространство из $\Phi[\Lambda]$, натянутое на столбцы матрицы Ω. Аналогично определяется *пространство строк* матрицы Ω. *Ранг* матрицы Ω *по столбцам* [*по строкам*] мы определим здесь как размерность пространства столбцов [строк] матрицы Ω, если эта размерность конечна, и как ∞ в противном случае. Обобщая методы доказательства для конечного случая, легко видеть, что ранги матрицы Ω по столбцам и по строкам равны друг другу, и эти совпадающие числа (или символ ∞) будем называть *рангом* матрицы Ω.

Лемма 5.38. *$\Lambda \times I$-матрица Ω может быть представлена в виде произведения $\Omega = QR$ $\Lambda \times t$-матрицы Q и $t \times I$-матрицы R (при некотором целом положительном t) тогда и только тогда, когда она имеет конечный ранг $h \leqslant t$.*

Доказательство. Если $\Omega = QR$, то строки матрицы Ω являются линейными комбинациями строк матрицы R, а поскольку число последних равно t, размерность h пространства строк матрицы Ω не может превосходить t. Обратно, если $h \leqslant t$, то в качестве R мы можем взять матрицу, состоящую из любых таких t строк матрицы Ω, что все другие строки являются их линейными комбинациями. В качестве λ-строки матрицы Q могут тогда быть взяты коэффициенты некоторого представления λ-строки матрицы Ω в виде линейной комбинации строк матрицы R.

Две факторизации $\Omega = QR$ и $\Omega = Q'R'$ матрицы Ω называются *эквивалентными*, если они имеют одинаковую ширину t и существует такая невырожденная $t \times t$-матрица C, что $Q' = QC^{-1}$ и $R' = CR$. Факторизация ширины h (где h — ранг матрицы Ω) называется *базисной*.

Лемма 5.39. *Две факторизации $\Omega = QR = Q'R'$ ширины t для $\Lambda \times I$-матрицы Ω эквивалентны тогда и только тогда, когда матрицы Q и Q' обладают одним и тем же пространством столбцов, а матрицы R и R' — одним и тем же пространством строк.*

Доказательство. Случай «только тогда» очевиден. Для доказательства «тогда» предположим, что Q и Q' обладают одним и тем же пространством столбцов $\mathfrak{Q}$ размерности q, а R и R' — одним и тем же пространством строк $\mathfrak{R}$ размерности r. Тогда существуют такие невырожденные $t \times t$-матрицы C и C', что

$$CR = C'R' = \begin{pmatrix} R^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

где R^* есть $r \times I$-матрица ранга r, строки которой составляют базис в $\mathfrak{R}$. Пусть

$$QC^{-1} = (Q^* \ \ Q_0), \qquad Q'C'^{-1} = (Q'^* \ \ Q'_0),$$

где Q^* и Q'^* суть $\Lambda \times r$-матрицы. Из равенства

$$\Omega = Q^*R^* = Q'^*R^*$$

получаем $Q^* = Q'^*$, поскольку строки матрицы Ω единственным образом выражаются в виде линейной комбинации строк матрицы R^*.

Так как матрицы $(Q^* \; Q_0)$ и $(Q^* \; Q_0')$ обладают одним и тем же пространством столбцов Ω, то мы можем привести одну из них к другой посредством элементарных преобразований столбцов, не затрагивающих столбцов матрицы Q^*. Другими словами, существует невырожденная матрица

$$D = \begin{pmatrix} I_r & A \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

такая, что

$$(Q^* \; Q_0)\, D = (Q^* \; Q_0').$$

Очевидно,

$$D \begin{pmatrix} R^* \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$QC^{-1}DC' = Q', \quad C^{-1}DC'R' = R,$$

где $C^{-1}DC'$ — невырожденная матрица. Таким образом, две факторизации эквивалентны.

Следствие 5.40. *Любые две базисные факторизации матрицы Ω эквивалентны.*

Доказательство. Если $\Omega = QR = Q'R'$ — две базисные факторизации матрицы Ω, то они имеют одинаковую ширину h (ранг Ω), а Q и Q' [R и R'] обладают одним и тем же пространством столбцов [строк], а именно тем же, что и у Ω.

Следствие 5.41. *Пусть $\Omega = Q^0R^0$ — произвольная базисная факторизация матрицы Ω, и пусть $\Omega = QR$ — любая факторизация матрицы Ω ширины t. Пусть h, q, r — ранги матриц Ω, Q, R соответственно и Q^1 — такая $\Lambda \times (q - h)$-матрица, что $\Lambda \times q$-матрица $(Q^0 \; Q^1)$ обладает тем же пространством столбцов, что и Q. Пусть R^1 — такая $(r - h) \times I$-матрица, что $r \times I$-матрица*

$$\begin{pmatrix} R^0 \\ R^1 \end{pmatrix}$$

обладает тем же пространством строк, что и R. Тогда факторизация $\Omega = QR$ эквивалентна факторизации

$$\Omega = (Q^0\,0\,Q^1\,0)\begin{pmatrix} R^0 \\ R^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

имеющей ширину t и следующие размерности блоков:

$$\begin{array}{ll} Q^0\colon \Lambda \times h, & R^0\colon h \times I, \\ 0\colon \Lambda \times (r-h), & R^1\colon (r-h) \times I, \\ Q^1\colon \Lambda \times (q-h), & 0\colon (q-h) \times I, \\ 0\colon \Lambda \times (t+h-r-q), & 0\colon (t+h-r-q) \times I. \end{array}$$

Доказательство. Оно непосредственно будет следовать из леммы 5.39, как только мы докажем, что факторизация (23) действительно имеет ширину t, т. е.

$$t + h - r - q \geqslant 0.$$

Производя элементарные преобразования строк матрицы R, мы можем найти такую невырожденную $t \times t$-матрицу C, что

$$CR = \begin{pmatrix} R^* \\ 0 \end{pmatrix},$$

где R^* есть $r \times I$-матрица, строки которой образуют наперед заданный базис пространства строк $\mathfrak{R}$ матрицы R. В частности, можно считать

$$R^* = \begin{pmatrix} R^0 \\ R^1 \end{pmatrix}.$$

Пусть

$$QC^{-1} = (Q^*\ A),$$

где Q^* есть некоторая $\Lambda \times r$-матрица, а A есть некоторая $\Lambda \times (t-r)$-матрица. Тогда

$$\Omega = QC^{-1}\cdot CR = Q^*R^*.$$

Поскольку строки матрицы Ω являются векторами в $\mathfrak{R}$, они однозначно представимы в виде линейных комбинаций строк матрицы R^*, и поэтому Q^* определяется однозначно. Отсюда и из равенства

$$(Q^0\ \ 0)\begin{pmatrix} R^0 \\ R^1 \end{pmatrix} = Q^0R^0 = \Omega$$

мы заключаем, что

$$Q^* = (Q^0\ 0).$$

Так как $(Q^*\ A) = QC^{-1}$ имеет ранг q, а $Q^* = (Q^0\ 0)$ имеет ранг h, ранг матрицы A должен быть не меньше $q - h$. Поскольку в A $t - r$ столбцов, мы получаем, что $t - r \geqslant q - h$, откуда следует требуемое неравенство $t + h - r - q \geqslant 0$. Это неравенство будет использоваться ниже.

Следствие 5.42. *В предположениях следствия* 5.41 *имеем*

$$t \geqslant q \geqslant h, \quad t \geqslant r \geqslant h, \quad t \geqslant q + r - h.$$

Отметим попутно, что, поскольку эти неравенства можно переписать в виде

$$t - h \geqslant t - q,\ t - h \geqslant t - r,\ t - h \leqslant (t - q) + (t - r),$$

то предыдущая лемма сводится к неравенствам Сильвестра для ранга произведения двух $t \times t$-матриц.

Следующая теорема непосредственно вытекает из теоремы 5.37 и леммы 5.38.

Теорема 5.43. *Собственное представление* Γ *степени* n *группы* G *над* Φ *тогда и только тогда обладает продолжением* Γ^* *конечной степени на* S, *когда ранг* h *продолжающей матрицы* Ω *конечен. Определяющие матрицы* Q_λ, R_i *любого продолжения* Γ^* *степени* $m = n + t$ *над* Φ *находятся из факторизации матрицы* Ω. *Это возможно в том и только в том случае, если* $t \geqslant h$, *и поэтому каждое продолжение представления* Γ *имеет степень не менее* $n + h$.

Теорема 5.44. *Пусть* Γ^* *и* Γ'^* — *продолжения на* S *соответственно представлений* Γ *и* Γ' *группы* G. *Пусть* Γ^* *задается соотношением* (13), *а* Γ'^* — *аналогичным соотношением*

$$\Gamma'^*[(a)_{i\lambda}] = \begin{pmatrix} \Gamma'(p_{1i}ap_{\lambda 1}) & \Gamma'(p_{1i}a)\,Q'_\lambda \\ R'_i\Gamma'(ap_{\lambda 1}) & R'_i\Gamma'(a)\,Q'_\lambda \end{pmatrix}. \qquad (24)$$

Тогда Γ^* *и* Γ'^* *эквивалентны в том и только в том случае, когда существуют такие невырожденные постоянные матрицы* C_1 *и* C_2, *что*

$$\Gamma'(a) = C_1\Gamma(a)\,C_1^{-1} \text{ для всех } a \text{ из } G, \qquad (25)$$

$$Q'_\lambda = C_1Q_\lambda C_2^{-1} \text{ для всех } \lambda \neq 1 \text{ из } \Lambda, \qquad (26)$$

$$R'_i = C_2R_iC_1^{-1} \text{ для всех } i \neq 1 \text{ из } I. \qquad (27)$$

Доказательство. Предположим, что Γ^* и Γ'^* эквивалентны. В этом случае существует постоянная невырожденная матрица C, такая, что

$$\Gamma'^*[(a)_{i\lambda}] = C\Gamma^*[(a)_{i\lambda}]\,C^{-1}. \qquad (28)$$

Полагая $i = \lambda = 1$, видим, что матрицы $\Gamma'^*\,[(a)_{11}]$ и $\Gamma^*\,[(a)_{11}]$ имеют одинаковый ранг (допустим, n), откуда, поскольку Γ и Γ' — собственные представления, следует, что Γ' есть представление той же степени n, что и Γ. Пусть $n+t$ есть степень представлений Γ^* и Γ'^*, и пусть C разбита на блоки следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

где C_{11} есть $n \times n$-матрица, C_{12} есть $n \times t$-матрица и т. д. Тогда

$$\begin{pmatrix} \Gamma'(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma(a) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\begin{pmatrix} \Gamma'(a)\,C_{11} & \Gamma'(a)\,C_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}\Gamma(a) & 0 \\ C_{21}\Gamma(a) & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $a = e$ (e — единица группы G), находим, что $C_{12} = 0$, $C_{21} = 0$. Следовательно,

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}, \tag{29}$$

где матрицы $C_1 = C_{11}$ и $C_2 = C_{22}$ должны быть невырожденными. Кроме того,

$$\Gamma'(a)\,C_1 = C_1\Gamma(a),$$

так что выполняется соотношение (25), и мы видим, что Γ и Γ' эквивалентны. Имеем

$$C\Gamma^*\,[(a)_{i\lambda}] = \begin{pmatrix} C_1\Gamma(p_{1i}ap_{\lambda 1}) & C_1\Gamma(p_{1i}a)\,Q_\lambda \\ C_2R_i\Gamma(ap_{\lambda 1}) & C_2R_i\Gamma(a)\,Q_\lambda \end{pmatrix}, \tag{30}$$

$$\Gamma'^*\,[(a)_{i\lambda}]\,C = \begin{pmatrix} \Gamma'(p_{1i}ap_{\lambda 1})\,C_1 & \Gamma'(p_{1i}a)\,Q'_\lambda C_2 \\ R'_i\Gamma'(ap_{\lambda 1})\,C_1 & R'_i\Gamma'(a)\,Q'_\lambda C_2 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Эти матрицы равны в силу (28). Полагая $a = e$ и $i = 1$, получаем $C_1Q_\lambda = Q'_\lambda C_2$, что дает (26). Полагая $a = e$ и $\lambda = 1$, получаем $C_2R_i = R'_iC_1$, что дает (27).

Обратно, предположим, что существуют невырожденные матрицы C_1 и C_2, удовлетворяющие соотношениям (25), (26) и (27). Зададим невырожденную матрицу C формулой (29). Тогда имеют место равенства (30) и (31). Эквивалентность Γ^* и Γ'^* будет установлена, если мы покажем, что правые части формул (30) и (31) равны. Равенство выражений, стоящих в верхних левых углах, сразу следует из (25). Что касается выражений в правых верхних углах, то, используя (25) и (26), мы получаем

$$\Gamma'(p_{1i}a)\,Q'_\lambda C_2 = C_1\Gamma(p_{1i}a)\,C_1^{-1}Q'_\lambda C_2 = C_1\Gamma(p_{1i}a)\,Q_\lambda$$

Аналогично рассматриваются левый и правый нижние углы.

Следствие 5.45. *Пусть Γ — собственное представление группы G и Ω — продолжающая матрица этого представления. Тогда два продолжения Γ^* и Γ'^* представления Γ на S, получающиеся из двух эквивалентных факторизаций $\Omega = QR = Q'R'$ матрицы Ω, эквивалентны.*

Доказательство. Из определения эквивалентных факторизаций следует, что существует такая невырожденная матрица C_2, что

$$Q' = QC_2^{-1}, \quad R' = C_2R.$$

В силу (22) это эквивалентно тому, что

$$Q'_\lambda = Q_\lambda C_2^{-1}, \quad R'_i = C_2R_i$$

для всех $\lambda \neq 1$ из Λ и всех $i \neq 1$ из I. Беря в качестве C_1 единичную матрицу и полагая $\Gamma' = \Gamma$, заключаем, что выполняются соотношения (25), (26) и (27), следовательно, представления Γ^* и Γ'^* эквивалентны.

Теорема 5.46. *Собственное представление Γ степени n группы G над Φ с продолжающей матрицей Ω, имеющей конечный ранг h, обладает с точностью до эквивалентности единственным продолжением Γ_0^* степени $n + h$ на S. Представление Γ_0^* получается из базисной факторизации матрицы Ω.*

Доказательство. По теореме 5.43 базисная факторизация Ω приводит к продолжению Γ_0^* степени $n + h$ представления Γ, так что по крайней мере одно такое продолжение существует. Любые два продолжения степени $n + h$ представления Γ должны возникать из факторизаций ширины h матрицы Ω, т. е. из базисных факторизаций, а по следствию 5.40 и следствию 5.45 такие продолжения должны быть эквивалентны.

Мы называем Γ_0^* *базисным продолжением* представления Γ на полугруппе S. Каждое представление полугруппы S, являющееся базисным продолжением некоторого собственного представления группы G, будем называть *базисным представлением*. Следующее утверждение устанавливает взаимно однозначное соответствие между базисными представлениями полугруппы S и продолжаемыми представлениями группы G.

Следствие 5.47. *Пусть Γ и Γ' — собственные представления группы G, обладающие продолжающими матрицами конечного ранга, и пусть Γ_0^* и $\Gamma_0'^*$ — соответствующие им базисные продолжения на S. Представления Γ_0^* и $\Gamma_0'^*$ эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны представления Γ и Γ'.*

Доказательство. Если Γ и Γ' эквивалентны, то мы можем так выбрать новый базис в пространстве представления для $\Gamma_0'^*$, что Γ' совпадет с Γ. Тогда эквивалентность Γ_0^* и $\Gamma_0'^*$

следует из теоремы 5.46. Обратно, если Γ_0^* и $\Gamma_0'^*$ эквивалентны, то Γ и Γ' тоже эквивалентны по теореме 5.44.

Теорема 5.48. *Каждое собственное продолжение Γ^* собственного представления Γ группы G может быть приведено к виду*

$$\Gamma^*[(a)_{i\lambda}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma(p_{1i}a)Q_\lambda^1 & \Gamma(p_{1i}ap_{\lambda 1}) & \Gamma(p_{1i}a)Q_\lambda^0 & 0 \\ R_i^0\Gamma(a)Q_\lambda^1 & R_i^0\Gamma(ap_{\lambda 1}) & R_i^0\Gamma(a)Q_\lambda^0 & 0 \\ R_i^1\Gamma(a)Q_\lambda^1 & R_i^1\Gamma(ap_{\lambda 1}) & R_i^1\Gamma(a)Q_\lambda^0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Диагональный блок внутри пунктирной линии есть базисное продолжение Γ_0^* представления Γ на S. Если n — степень представления Γ, $n+t$ — степень представления Γ^*, h — ранг продолжающей матрицы Ω представления Γ, а q и r — соответственно ранги определяющих матриц Q и R для Γ^*, то $t = q + r - h$. Две нулевые матрицы на диагонали являются квадратными (размерностей $q - h$ и $r - h$), так что Γ_0^* является компонентой Γ^*.

Доказательство. По теореме 5.43 Γ^* получается с помощью факторизации $\Omega = QR$ ширины t матрицы Ω. В силу следствия 5.41 эта факторизация эквивалентна факторизации

$$\Omega = (Q^0\, 0\, Q^1\, 0)\begin{pmatrix} R^0 \\ R^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{33}$$

где $\Omega = Q^0R^0$ — базисная факторизация для Ω. По следствию 5.45 представление полугруппы S, получающееся из факторизации (33), эквивалентно Γ^*. Поэтому мы можем предполагать, что само Γ^* получается при этой факторизации. Вспоминая, что такое Q_λ и R_i (см. (22)), приходим к равенствам

$$Q_\lambda = (Q_\lambda^0\, 0\, Q_\lambda^1\ 0), \quad R_i = \begin{pmatrix} R_i^0 \\ R_i^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Подставляя (34) в (13), получаем

$$\Gamma^*[(a)_{i\lambda}] = \begin{pmatrix} \Gamma(p_{1i}ap_{\lambda 1}) & \Gamma(p_{1i}a)Q_\lambda^0 & 0 & \Gamma(p_{1i}a)Q_\lambda^1 & 0 \\ R_i^0\Gamma(ap_{\lambda 1}) & R_i^0\Gamma(a)Q_\lambda^0 & 0 & R_i^0\Gamma(a)Q_\lambda^1 & 0 \\ R_i^1\Gamma(ap_{\lambda 1}) & R_i^1\Gamma(a)Q_\lambda^0 & 0 & R_i^1\Gamma(a)Q_\lambda^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Поскольку представление Γ^* является собственным, последняя строка и последний столбец нулей должны отсутствовать и, следовательно, $t + h - r - q = 0$. После вычеркивания в матрице (35) последней строки и последнего столбца и перемещения четвертой строки и четвертого столбца на первое место мы получаем равенство (32). Две (невычеркнутые) нулевые матрицы на диагонали матрицы (35) являются, как легко видеть, квадратными матрицами размерностей $q - h$ и $r - h$. В матрице (32) они становятся диагональными нулевыми матрицами.

Если нам безразлично, является ли представление Γ^* собственным или нет, то равенство (32) задает продолжение Γ^* представления Γ для совершенно произвольных матриц R_i^1 и Q_λ^1. Таким образом, как только мы вычислили базисное продолжение Γ_0^* представления Γ, то все другие продолжения Γ^* этого представления могут быть сразу выписаны из соотношения (32). Если представление Γ^* не является собственным, то не обязательно $t = q + r - h$, и диагональные нулевые матрицы могут не быть квадратными.

Следствие 5.49. *Представление* Γ^* *обладает теми же ненулевыми неприводимыми конституэнтами, что и* Γ_0^*, *даже с сохранением кратностей.*

Доказательство. Учитывая вид матрицы в (32), заключаем, что полное приведение Γ_0^* к треугольно-блочной форме с неприводимыми диагональными блоками дает полное приведение и для Γ^*.

Теорема 5.50. *Собственное представление* Γ *группы* G *продолжаемо на* S *тогда и только тогда, когда каждая из его неразложимых конституэнт продолжаема. Если* Γ *продолжаемо, то неразложимые конституэнты базисного продолжения* Γ_0^* *являются базисными продолжениями неразложимых конституэнт представления* Γ. *В частности,* Γ *неразложимо в том и только в том случае, когда* Γ_0^* *неразложимо. В действительности каждое собственное продолжение на* S *неприводимого представления* Γ *группы* G *также неприводимо.*

Доказательство. Пусть сначала Γ есть неразложимое продолжаемое представление группы G и Γ^* — любое его собственное продолжение на S. Предположим, что Γ^* разлагается на два представления Δ и Δ', каждое из которых имеет меньшую степень, нежели Γ^*. Ограничения Δ и Δ' на G не могут быть частями неразложимого представления Γ. Мы можем поэтому предполагать, что ограничение представления Δ на G содержит Γ. Но тогда ограничение представления Δ' на G является нулевым представлением группы G. Как было отмечено после соотношения (9), из этого должно вытекать, что Δ' есть нулевое представление полугруппы S, а это противоречит предположению о том, что Γ^* — собственное продолжение. Следовательно, Γ^* неразложимо. Это доказывает последнее утверждение теоремы и, в частности, тот факт, что если Γ — неразложимое представление, то таково же и его базисное продолжение Γ_0^*. Тот факт, что неразложимость представления Γ_0^* влечет за собой неразложимость Γ, будет доказан, когда мы покажем, что разложение представления Γ приводит к разложению представления Γ_0^*.

Пусть Γ есть представление группы G, которое разлагается в прямую сумму $\Gamma' \oplus \Gamma''$ двух представлений Γ' и Γ'', каждое из которых имеет степень, меньшую, нежели Γ. Мы можем предположить, что базис в пространстве представления для Γ выбран таким образом, что

$$\Gamma(a) = \begin{pmatrix} \Gamma'(a) & 0 \\ 0 & \Gamma''(a) \end{pmatrix} \text{ для всех } a \text{ из } G.$$

Покажем, что Γ продолжаемо на S тогда и только тогда, когда Γ' и Γ'' продолжаемы, и что в этом случае базисное продолжение Γ_0^* разлагается на базисные продолжения $\Gamma_0'^*$ и $\Gamma_0''^*$. Тогда два первых утверждения теоремы будут получаться очевидной индукцией по числу неразложимых компонент представления Γ.

Пусть степени представлений Γ, Γ' и Γ'' равны соответственно n, n' и n'' (ясно, что $n = n' + n''$), а ранги продолжающих матриц Ω, Ω' и Ω'' для этих представлений равны h, h' и h''. В равенстве (19) каждая матрица $\Omega_{\lambda i}$ имеет блочный вид

$$\Omega_{\lambda i} = \begin{pmatrix} \Omega'_{\lambda i} & 0 \\ 0 & \Omega''_{\lambda i} \end{pmatrix},$$

и мы можем так перестроить строки и столбцы в матрице Ω, что

$$\Omega \to \begin{pmatrix} \Omega' & 0 \\ 0 & \Omega'' \end{pmatrix}.$$

Следовательно, ранг h конечен тогда и только тогда, когда конечны h' и h'', поэтому $h = h' + h''$. По теореме 5.43 представление Γ продолжаемо тогда и только тогда, когда представления Γ' и Γ'' продолжаемы.

Предположим теперь, что представление Γ и, следовательно, представления Γ' и Γ'' продолжаемы на S. По теореме 5.46 их базисные продолжения $\Gamma_0'^*$ и $\Gamma_0''^*$ имеют соответственно степени $n' + h'$ и $n'' + h''$. Следовательно, представление $\Gamma_0'^* \oplus \Gamma_0''^*$ имеет степень $(n' + h') + (n'' + h'') = n + h$ и, значит, по теореме 5.46 эквивалентно базисному продолжению Γ_0^* представления Γ.

Теорема 5.51. *Пусть Γ — продолжаемое представление группы G и Γ^* — продолжение этого представления на S. Тогда ненуле-*

вые неприводимые конституэнты представления Γ^* *являются базисными продолжениями ненулевых неприводимых конституэнт представления* Γ. *Базисное продолжение* Γ_0^* *для* Γ *неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо представление* Γ; *таким образом, мы получаем все неприводимые представления полугруппы* S *как базисные продолжения на* S *продолжаемых неприводимых представлений группы* G.

Доказательство. Предположим сначала, что Γ есть продолжаемое неприводимое представление группы G и Γ_0^* — его базисное продолжение на S. Предположим, что Γ_0^* разлагается на два представления Δ и Δ' полугруппы S, каждое из которых имеет степень, меньшую, нежели Γ_0^*. Тогда или Δ, или Δ' должно быть продолжением на S неприводимого представления Γ группы G. Но на основании теорем 5.43 и 5.46 такое продолжение представления Γ не может иметь степень, меньшую, чем степени базисного продолжения Γ_0^*. Следовательно, представление Γ_0^* неприводимо.

Обратное утверждение о том, что неприводимость представления Γ_0^* влечет за собой неприводимость представления Γ, будет доказано, когда мы покажем, что разложение Γ влечет за собой разложение Γ_0^* (даже разложение любого продолжения Γ^*). Тогда сразу будет доказано и последнее утверждение теоремы, так как по теореме 5.48 каждое неприводимое представление полугруппы S обязательно является базисным.

Пусть Γ — продолжаемое приводимое представление группы G, и пусть Γ разлагается на два представления Γ' и Γ'', каждое из которых имеет степень, меньшую, чем Γ. Мы можем тогда предположить, что базис пространства представления Γ выбран так, что

$$\Gamma(a)=\begin{pmatrix}\Gamma'(a) & 0\\ * & \Gamma''(a)\end{pmatrix}\ \text{для всех } a \text{ из } G,$$

где $*$ обозначает блок, который может содержать отличные от нуля элементы. Пусть степени представлений Γ, Γ' и Γ'' суть n, n' и n'' соответственно; тогда $n=n'+n''$, $n>n'$, $n>n''$.

Пусть Γ^* — произвольное продолжение представления Γ на S и степень Γ^* равна $n+t$. Пусть V — пространство представления для Γ^*, причем $V=V_1\oplus V_2$, где V_1 — пространство представления для Γ, а V_2 — пространство представления для нулевого представления группы G. Размерности пространств V_1 и V_2 равны соответственно n и t. По теореме 5.37 представляющие матрицы Γ^* $[(a)_{i\lambda}]$ представления Γ^* имеют вид (13).

Пусть W_1 — инвариантное подпространство из V_1, на котором реализуется представление Γ', так что представление Γ'' реализуется на факторпространстве V_1/W_1. Пусть W — подпространство из V, состоящее из всех векторов w, имеющих вид

$$w = x + \sum_{\mu \in \Lambda} x_\mu Q_\mu,$$

где $x, x_\mu \in W_1$ и сумма конечна, т. е. все x_μ, за исключением конечного числа, являются нулевыми векторами из W_1. Матрицы Q_μ ($\mu \in \Lambda$) суть $n \times t$-матрицы, появившиеся в (12) и участвующие также в (13); их можно рассматривать как линейные отображения подпространства V_1 в подпространство V_2. Таким образом, $w = x + y$, где $x \in W_1$ и $y = \sum x_\mu Q_\mu \in V_2$. Далее будет удобно записывать w в виде $(x \quad y)$, соответствующем формуле (13). Так как $W \subseteq W_1 \oplus V_2$, ясно, что W является собственным подпространством из V; мы покажем, что оно инвариантно относительно Γ^*.

Непосредственным вычислением из (13) мы выводим, что

$$(x \quad y)\, \Gamma^* [(a)_{i\lambda}] = (x' \quad y'),$$

где с учетом (15)

$$\begin{aligned} x' &= x\Gamma(p_{1i}ap_{\lambda 1}) + \sum_\mu x_\mu Q_\mu R_i \Gamma(ap_{\lambda 1}) = \\ &= x\Gamma(p_{1i}ap_{\lambda 1}) + \sum_\mu x_\mu [\Gamma(p_{\mu i}) - \Gamma(p_{\mu 1}p_{1i})]\, \Gamma(ap_{\lambda 1}) = \\ &= x\Gamma(p_{1i}ap_{\lambda 1}) + \sum_\mu x_\mu [\Gamma(p_{\mu i}ap_{\lambda 1}) - \Gamma(p_{\mu 1}p_{1i}ap_{\lambda 1})] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} y' &= x\Gamma(p_{1i}a)\, Q_\lambda + \sum_\mu x_\mu Q_\mu R_i \Gamma(a)\, Q_\lambda = \\ &= x\Gamma(p_{1i}a)\, Q_\lambda + \sum_\mu x_\mu [\Gamma(p_{\mu i}a) - \Gamma(p_{\mu 1}p_{1i}a)]\, Q_\lambda. \end{aligned}$$

Так как x и все x_μ принадлежат W_1 и W_1 инвариантно относительно $\Gamma(b)$ при любом b из G, ясно, что $x' \in W_1$. Поскольку y' имеет вид $x'_\lambda Q_\lambda$, где $x'_\lambda \in W_1$, отсюда следует, что $(x' \quad y') \in W$, и поэтому подпространство W инвариантно относительно Γ^*.

Пусть Δ' — представление полугруппы S, связанное с только что построенным инвариантным подпространством W из V, и Δ'' — представление, связанное с факторпространством V/W. Имеем $V = V_1 \oplus V_2$ и $W = W_1 \oplus W_2$, где $W_2 = W \cap V_2$. Отсюда ясно, что Δ' является продолжением представления Γ' на S. Кроме того,

$$V/W \cong V_1/W_1 \oplus V_2/W_2,$$

откуда следует, что Δ'' — продолжение представления Γ'' на S.

Мы показали, таким образом, что представление Γ^* разлагается на два представления Δ' и Δ'', причем Δ' $[\Delta'']$ есть продолжение представления Γ' $[\Gamma'']$ на S. Очевидная индукция по числу r

неприводимых конституэнт Γ_i представления Γ показывает, что Γ^* разлагается на r представлений Δ_i, причем Δ_i есть продолжение представления Γ_i ($i = 1, \ldots, r$). Если Γ_i — ненулевое представление, то по теореме 5.48 Δ_i разлагается на базисное продолжение Γ_{i0}^* представления Γ_i и (возможно) нулевое представление. В первом параграфе было показано, что базисное продолжение неприводимого представления само неприводимо и, следовательно, каждое такое представление Γ_{i0}^* неприводимо. Поэтому ненулевыми неприводимыми конституэнтами представления Γ^* являются в точности те представления Γ_{i0}^*, для которых представления Γ_i не являются нулевыми.

Замечания. (i) Упражнение 8 к настоящему параграфу показывает, что базисное продолжение Γ_0^* представления Γ может иметь наряду с конституэнтами Γ_{i0}^* нулевые конституэнты даже тогда, когда все представления Γ_i ненулевые.

(ii) Если Γ — продолжаемое представление группы G, то теорема 5.51 показывает, что неприводимые конституэнты этого представления также продолжаемы. Упражнение 9 ниже показывает, что обратное неверно.

Теорема 5.52. *Полная приводимость представлений полугруппы S над полем Φ имеет место тогда и только тогда, когда* (i) *полная приводимость имеет место для продолжаемых представлений группы G над Φ и* (ii) *базисными продолжениями являются только собственные продолжения на S собственных представлений группы G.*

Доказательство. Очевидно, полная приводимость для представлений полугруппы S над полем Φ имеет место тогда и только тогда, когда она имеет место для собственных представлений этой полугруппы.

Предположим, что выполнены условия (i) и (ii) и Γ^* — произвольное собственное представление полугруппы S. Тогда Γ^* является продолжением на S собственного представления Γ группы G. В силу условия (i) представление Γ вполне приводимо, т. е. $\Gamma \sim \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \oplus \ldots \oplus \Gamma_r$ ($\sim$обозначает эквивалентность), где каждое Γ_i — неприводимое ненулевое представление. По теореме 5.50 $\Gamma_0^* \sim \Gamma_{10}^* \oplus \ldots \oplus \Gamma_{r0}^*$. По теореме 5.51 каждое представление Γ_{i0}^* приводимо и, следовательно, Γ_0^* вполне приводимо. Но в силу условия (ii) $\Gamma^* \sim \Gamma_0^*$.

Предположим, обратно, что каждое представление полугруппы S над Φ вполне приводимо. Пусть Γ — собственное продолжаемое представление группы G и $\Gamma \sim \Gamma_1 \oplus \ldots \oplus \Gamma_r$ — разложение этого представления на (ненулевые) неразложимые представления. По теореме 5.50 $\Gamma_0^* \sim \Gamma_{10}^* \oplus \ldots \oplus \Gamma_{r0}^*$ и каждое Γ_{i0}^* является неразложимым представлением полугруппы S. Но по предположению каждое Γ_{i0}^* вполне приводимо и поэтому должно быть неприводимым. По теореме 5.51 каждое представление Γ_i неприводимо и, следовательно, представление Γ вполне приводимо. Это доказывает (i).

Из теоремы 5.48 вытекает, что представление полугруппы S, не являющееся базисным, может быть вполне приводимо, только если оно разлагается на соответствующее базисное представление и нулевое представление. Следовательно, каждое собственное представление полугруппы S над Φ должно быть базисным, что доказывает (ii).

Следствие 5.53. *Пусть полугруппа S конечна и характеристика поля Φ не делит порядок группы G. Тогда алгебра $\Phi[S]$ полупроста в том и только в том случае, когда лишь собственное представление полугруппы S, являющееся продолжением любого заданного собственного представления группы G, является базисным продолжением этого представления.*

Доказательство непосредственно вытекает из теоремы 5.52 и теоремы Машке (§ 5.2). Следствие 5.53 принадлежит Манну [1955b]. В своем доказательстве он, вычисляя ранг продолжающей матрицы представления Γ_σ, показывает, что представление Γ'_σ полугруппы S, заданное условием (5) теоремы 5.28, должно быть базисным продолжением представления Γ_σ группы G.

Упражнения к § 5.4

1. Пусть $\Gamma^{*\prime}$ — продолжение на $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ собственного представления Γ группы G и числа h, q, r и t определены так же, как в теореме 5.48. Тогда Γ^* является собственным представлением в том и только в том случае, когда $t = q + r - h$.

2. Пусть S — левая группа. По теореме 1.27 (или по теореме Риса) $S = G \times I$, где G — группа и I — полугруппа левых нулей. Элементы из S могут быть единственным образом представлены в виде $(a)_i$, где $a \in G$ и $i \in I$. Они перемножаются следующим образом:

$$(a)_i (b)_j = (ab)_i \quad (a,\ b \in G,\ i,\ j \in I).$$

Пусть Φ — поле и Γ — собственное представление степени n группы G над Φ. Тогда представление Γ продолжаемо на S и его базисное продолжение может быть определено формулой

$$\Gamma_0^* [(a)_i] = \Gamma(a).$$

Любое продолжение Γ^* представления Γ имеет вид

$$\Gamma^* [(a)_i] = \begin{pmatrix} \Gamma(a) & 0 \\ R_i\Gamma(a) & 0 \end{pmatrix},$$

где R_i — произвольная $t \times n$-матрица и t — некоторое фиксированное целое положительное число.

3. (a) Следующие утверждения относительно $m \times m$-матрицы C ранга n над полем Φ эквивалентны.

(i) C принадлежит некоторой мультипликативной подгруппе из $(\Phi)_m$.

(ii) Для каждой (базисной) факторизации $C = AB$, где A есть $m \times n$-матрица, а B есть $n \times m$-матрица, $n \times n$-матрица BA невырожденна.

(iii) Матрица C^2 имеет ранг n.

(b) Некоторая степень любой матрицы из $(\Phi)_m$ обладает перечисленными выше свойствами. (Сушкевич [1933].)

4. Пусть $S = \mathcal{M}^0 (G; \Lambda, \Lambda; \Delta)$ — полугруппа Брандта (§ 3.3), Δ — единичная $\Lambda \times \Lambda$-матрица над G^0 и Φ — поле.

(a) Если Γ есть собственное представление группы G над Φ, то продолжающая матрица Ω этого представления является единичной.

(b) S допускает собственное представление конечной степени над Φ тогда и только тогда, когда множество Λ конечно.

(c) Можно так выбрать определяющую матрицу базисного продолжения Γ_0^* представления Γ, что Γ_0^* будет иметь вид, установленный в упражнении 5 к § 5.2.

5. Два продолжения на $S = \mathcal{M}^0 (G; I, \Lambda; P)$ данного абсолютно неприводимого представления Γ группы G над Φ эквивалентны тогда и только тогда, когда они получаются из эквивалентных факторизаций продолжающей матрицы этого представления. (Клиффорд [1942].)

6. Пусть $\sigma = (123)$ и $\tau = (12)$ — образующие симметрической группы G_3 на множестве $\{1, 2, 3\}$. Тогда равенства

$$\Gamma(\sigma) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(\tau) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

задают абсолютно неприводимое представление степени 2 группы G_3.

Пусть

$$S = \mathcal{M}^0 (G_3;\ 2,2;\ P), \text{ где } P = \begin{pmatrix} \iota & \iota \\ \iota & \iota \end{pmatrix},$$

ι — единица группы G_3. Тогда продолжающая матрица Ω представления Γ является нулевой матрицей, и мы найдем ее факторизацию, если положим

$$Q = Q(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = R(\beta) = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $\Gamma^*_{\alpha,\beta}$ — соответствующее продолжение представления Γ на S, то $\Gamma^*_{\alpha,\beta}$ эквивалентно $\Gamma^*_{\alpha',\beta'}$ тогда и только тогда, когда $\alpha=\alpha'$ и $\beta=\beta'$.

Если поле Φ бесконечно, то это показывает, что конечная полугруппа (или конечная алгебра) может иметь бесконечное множество неэквивалентных неразложимых представлений заданной степени.

7. (a) Если простая [0-простая] полугруппа матриц конечной степени над полем содержит ненулевой идемпотент, то она вполне проста [0-проста]. Следовательно, не вполне простая [0-простая] полугруппа, содержащая идемпотент, не обладает точным собственным представлением.

(b) Множество матриц

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

где a и b — положительные действительные числа, является полугруппой без идемпотентов. Следовательно, не вполне простые полугруппы без идемпотентов могут обладать точными собственными представлениями.

8. Пусть $G=\{e, a\}$ — циклическая группа второго порядка, S — рисовская полугруппа 2×2-матриц над G с сэндвич-матрицей

$$P=\begin{pmatrix} e & e \\ e & a \end{pmatrix}$$

и Φ — поле вычетов по модулю 2.

Пусть

$$\Gamma(e)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma(a)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Продолжающая матрица представления Γ есть

$$\Omega=\Omega_{22}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы можем взять

$$R_2=(1\ \ 0), \quad Q_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Базисное продолжение Γ^*_0 представления Γ на S имеет степень 3. Оно разлагается (не вполне) на два единичных представления и одно нулевое. (См. замечание (i) после доказательства теоремы 5.51.)

9. Пусть G, Φ и Γ — те же, что и в упражнении 8, N — множество натуральных чисел, и пусть S — рисовская полугруппа

$N \times N$-матриц над G с сэндвич-матрицей $P = (p_{ij})$, задаваемой следующим образом:

$$p_{ij} = \begin{cases} a, & \text{если } i = j > 1, \\ e & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда

$$\Omega_{ii} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{при } i \neq j \ (i, j \in N \setminus 1).$$

Продолжающая матрица Ω представления Γ имеет бесконечный ранг и поэтому Γ не продолжаемо на S. Однако неприводимые конституэнты представления Γ продолжаемы на S. (См. замечание (ii) после доказательства теоремы 5.51.)

10. Относительно операции $\oplus$ взятия прямой суммы множество базисных представлений полугруппы S и множество продолжаемых представлений группы G являются изоморфными полугруппами. При этом мы отождествляем эквивалентные представления и имеем дело только с собственными представлениями.

§ 5.5. *Характеры коммутативных полугрупп*

В этом параграфе (который не зависит от § 5.1—5.4) мы следуем Шварцу [1954 a, b, c] и Хьюитту и Цукерману [1955, § 3; 1956, § 5], которые независимо развили теорию характеров коммутативных полугрупп. Этот параграф написан так, что допускаются две интерпретации термина «характер».

Пусть S — коммутативная полугруппа с единицей. (Мы увидим вскоре, что последнее предположение не является существенным ограничением.) Под *характером* полугруппы S мы понимаем отображение χ этой полугруппы в поле комплексных чисел, причем χ не является тождественно равным нулю отображением и удовлетворяет условию

(C1) $\qquad \chi(ab) = \chi(a)\chi(b)$ для любых $a, b \in S$.

Легко проверяется, что *все результаты этого параграфа полностью сохраняются, если мы добавим в определение термина «характер» требование, чтобы отображение χ удовлетворяло еще условию*

(C2) $\qquad |\chi(a)| = 0$ *или* 1 *для всех* $a \in S$.

Если S — группа, то в условии (C2) остается только требование $|\chi(a)| = 1$. Отметим, в частности, что классические теоремы о продолжении и об отделении для групповых характеров (теоремы 5.57 и 5.58) доказаны с учетом этого ограничения и, следовательно, соответствующие теоремы имеют место для полугрупповых характеров, удовлетворяющих условию (C 2) (см. теоремы 5.59 и 5.65).

Хьюитт и Цукерман [1956] называют отображение χ, удовлетворяющее условию (C1) «мультипликативной функцией»; если, кроме того, отображение χ является ненулевым и ограниченным, то они называют его «полухарактером». Заметим, что условие (C2) эквивалентно ограниченности, если S есть объединение групп, но в общем случае это не так. Без каких-либо подобных ограничений на S результаты этого параграфа несправедливы для полухарактеров.

Множество S^* всех характеров полугруппы S превращается в (коммутативную) полугруппу, если мы зададим произведение двух характеров χ и ψ следующей формулой:

$$(\chi\psi)(a) = \chi(a)\,\psi(a).$$

Мы называем S^* *полугруппой характеров* полугруппы S. Единицей в S^* является *единичный характер* 1^*, для которого по определению $1^*(a) = 1$ при любом a из S.

Если S — коммутативная полугруппа без единицы, то желательно видоизменить приведенное выше определение характера, допуская, чтобы отображение χ могло быть тождественно равным нулю, так как в противном случае характеры полугруппы S могут не образовывать полугруппу. Каждый характер χ полугруппы S может быть продолжен до характера полугруппы $S^1 = S \cup 1$, если положить $\chi(1) = 1$, причем *отображение* $\chi \to \chi \mid S$ *есть изоморфизм полугруппы* $(S^1)^*$ *на* S^*. Следовательно, не уменьшая общности, можно ограничиться рассмотрением полугрупп с единицей, что мы и сделаем.

Идеал P полугруппы S называется *вполне изолированным*, если $S \setminus P$ есть подполугруппа [1]). Нам будет удобно считать пустое множество, но не саму полугруппу S, вполне изолированным идеалом этой полугруппы. Объединение двух вполне изолированных идеалов полугруппы является вполне изолированным идеалом, но пересечение может не быть таковым (см. упражнение 1 ниже). Таким образом, множество всех вполне изолированных идеалов полугруппы S является полуструктурой относительно объединения.

Пусть $\chi \in S^*$. Тогда

$$V_\chi = \{a \mid a \in S,\ \chi(a) = 0\}$$

есть вполне изолированный идеал полугруппы S. Действительно, если $\chi(a) = 0$, то $\chi(ab) = \chi(a)\,\chi(b) = 0$ при любом b из S; если $\chi(a) \neq 0$ и $\chi(b) \neq 0$, то $\chi(ab) = \chi(a)\,\chi(b) \neq 0$. Мы называем V_χ *нуль-идеалом* характера χ.

---

[1]) См. примечание в упр. 9 к § 4.1.— *Прим. перев.*

Для данного вполне изолированного идеала P полугруппы S зададим отображение ε_P следующим образом:

$$\varepsilon_P(a)=\begin{cases}0, & \text{если } a\in P,\\ 1, & \text{если } a\in S\setminus P.\end{cases}$$

Иными словами, ε_P есть характеристическая функция множества $S\setminus P$. Тогда $\varepsilon_P(ab)=\varepsilon_P(a)\,\varepsilon_P(b)$ для всех a, b из S, так как обе части одновременно равны нулю или единице. Кроме того, $(\varepsilon_P)^2 = \varepsilon_P$. Таким образом, ε_P является идемпотентом полугруппы характеров S^*, и, очевидно, нуль-идеалом этого характера является P. С другой стороны, если ε есть идемпотент полугруппы характеров S^*, то для каждого a из S $\varepsilon(a)=0$ или $\varepsilon(a)=1$. Следовательно, $\varepsilon=\varepsilon_P$, где $P=V_\varepsilon$.

Отметим, что если P и P' — вполне изолированные идеалы полугруппы S, то

$$\varepsilon_{P\cup P'}=\varepsilon_P\varepsilon_{P'}.$$

Действительно, элемент из S принадлежит $S\setminus(P\cup P')$ тогда и только тогда, когда он принадлежит и $S\setminus P$ и $S\setminus P'$. Таким образом, доказана следующая лемма, принадлежащая Шварцу [1954a].

Лемма 5.54. *Существует такой изоморфизм между полуструктурой E^* идемпотентов полугруппы характеров S^* и полуструктурой Y^* вполне изолированных идеалов полугруппы S, что если ε из E^* и P из Y^* соответствуют друг другу при этом изоморфизме, то P есть нуль-идеал V_ε характера ε, а ε есть характеристическая функция ε_P множества $S\setminus P$.*

Для данного вполне изолированного идеала P из S положим

$$H_P^*=\{\chi\mid\chi\in S^*,\ V_\chi=P\}.$$

Другими словами, H_P^* состоит из всех характеров полугруппы S, отображающих в нуль в точности идеал P. Очевидно, H_P^* является подполугруппой из S^*, содержащей ε_P, а ε_P является единицей в H_P^*. Если $\chi\in H_P^*$ и мы положим

$$\chi^{-1}(a)=\begin{cases}0, & \text{если } a\in P,\\ 1/\chi(a), & \text{если } a\in S\setminus P,\end{cases}$$

то $\chi^{-1}\in H_P^*$ и $\chi\chi^{-1}=\varepsilon_P$. Следовательно, H_P^* есть подгруппа из S^*. Каждый характер χ из S^* принадлежит некоторой подгруппе H_P^*, а именно той, для которой $P=V_\chi$. Очевидно, что подгруппы H_P^* попарно не пересекаются. Если P, $P'\in Y^*$, то

$$H_P^*H_{P'}^*\subseteq H_{P\cup P'}^*.$$

В самом деле, если $\chi\in H_P^*$ и $\chi'\in H_{P'}^*$, то $\chi\chi'(a)=0$ тогда и только тогда, когда $\chi(a)=0$ или $\chi'(a)=0$, т. е. $\chi\chi'$ отображает в нуль в точности $P\cup P'$.

Мы показали, таким образом, справедливость следующей теоремы, доказанной для конечных полугрупп Шварцем ([1954a], теорема 2), для периодических полугрупп с конечным Y^* — Хьюиттом и Цукерманом ([1955], теорема 3.13), и для инверсных полугрупп — Уорном и Вильямсом [1961][1]).

Теорема 5.55. *Полугруппа характеров S^* коммутативной полугруппы S с единицей является объединением полуструктуры Y^* групп H_P^* ($P \in Y^*$), где Y^* — полуструктура вполне изолированных идеалов полугруппы S, а H_P^* состоит из всех характеров этой полугруппы, которые отображают в нуль в точности идеал P.*

Пусть T — коммутативная полугруппа, являющаяся объединением полуструктуры Y групп G_α, $\alpha \in Y$ (см. § 1.8). Через e_α обозначим единицу группы G_α. Характер χ полугруппы T тогда и только тогда отображает в нуль группу G_α, когда $\chi(e_\alpha) = 0$; в противном случае $\chi(e_\alpha) = 1$. Характер χ называется *главным*, если существует такой элемент β из Y, что $\chi(e_\alpha) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant \beta$. Такой элемент β, очевидно, единствен в Y, и он (или группа G_β) называется *вершиной* характера χ.

Следующая теорема была получена Шварцем ([1954a], стр. 230) и Хьюиттом и Цукерманом ([1955], теоремы 3.2 и 3.3) для случая конечной полугруппы T, а Уорном и Вильямсом [1961] — в предположении, что Y удовлетворяет условию минимальности.

Теорема 5.56. *Пусть T — коммутативная полугруппа с единицей, являющаяся объединением полуструктуры Y групп G_α, $\alpha \in Y$. Пусть e_α — единица группы G_α.*

(A) *Если χ — главный характер полугруппы T и β — вершина этого характера ($\beta \in Y$), то ограничение χ' характера χ на G_β является характером группы G_β и для каждого s из T*

$$\chi(s) = \begin{cases} \chi'(se_\beta), & \text{если } se_\beta \in G_\beta, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{1}$$

(B) *Если $\beta \in Y$ и χ' — произвольный характер группы G_β, то условие (1) определяет главный характер χ полугруппы T с вершиной β, совпадающий с χ' на G_β.*

(C) *Если полуструктура Y удовлетворяет условию минимальности, то каждый характер полугруппы T является главным.*

Доказательство. Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы 5.33, но мы приводим ее доказательство для того, чтобы сохранить независимость настоящего параграфа от предшествующих параграфов этой главы.

(A) Если $se_\beta \in G_\beta$, то

$$\chi(s) = \chi(s)\,1 = \chi(s)\,\chi(e_\beta) = \chi(se_\beta) = \chi'(se_\beta).$$

[1]) Абстрактная характеризация полугрупп характеров дана М. М. Лесохиным [1970].— *Прим. ред.*

Если $se_\beta \notin G_\beta$ и $s \in G_\alpha$, то $se_\beta \in G_{\alpha\beta}$, причем $\alpha\beta < \beta$. Следовательно, по определению элемента β имеем $\chi(se_\beta) = 0$ и снова $\chi(s) = \chi(se_\beta)$.

(B) Если se_β и te_β принадлежат G_β, то $(se_\beta)(te_\beta) = (st)e_\beta$ и поэтому

$$\chi(st) = \chi'((st)e_\beta) = \chi'((se_\beta)(te_\beta)) = \\ = \chi'(se_\beta)\chi'(te_\beta) = \chi(s)\chi(t).$$

Если не каждый из этих элементов принадлежит G_β, например, $se_\beta \notin G_\beta$ и $s \in G_\alpha$, то $se_\beta \in G_{\alpha\beta}$, где $\alpha\beta < \beta$. Тогда ясно, что $ste_\beta \notin G_\beta$, откуда

$$\chi(st) = 0 = 0\chi(t) = \chi(s)\chi(t).$$

(C) Пусть χ — характер полугруппы T. По предположению существует минимальный элемент β из Y, такой, что χ не отображает в нуль группу G_β, т. е. $\chi(e_\beta) = 1$. Если χ не отображает в нуль G_α, то

$$\chi(e_{\alpha\beta}) = \chi(e_\alpha e_\beta) = \chi(e_\alpha)\chi(e_\beta) = 1 \cdot 1 = 1.$$

Учитывая выбор β и тот факт, что $\alpha\beta \leqslant \beta$, мы заключаем, что $\alpha\beta = \beta$ и, следовательно, $\alpha \geqslant \beta$. Обратно, если $\alpha \geqslant \beta$, то $e_\alpha e_\beta = e_\beta$, откуда $\chi(e_\alpha) = 1$. Следовательно, χ — главный характер с вершиной β.

Теперь мы рассмотрим вопрос о том, когда характеры коммутативной полугруппы S отделяют элементы этой полугруппы. Мы понимаем под этим, что для двух любых различных элементов из S найдется такой характер χ, что $\chi(a) \neq \chi(b)$. Мы докажем хорошо известную теорему о том, что указанное свойство справедливо для коммутативных групп. Однако сначала мы должны доказать классическую теорему о продолжении характера подгруппы на всю группу. Это будет необходимо позднее при доказательстве аналогичного результата для полугрупп. Для полноты изложения мы приводим доказательство.

Теорема 5.57. *Пусть H_0 — подгруппа коммутативной группы G и χ_0 — характер этой подгруппы. Тогда существует характер χ группы G, совпадающий с χ_0 на H_0.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{P}$ — множество всех пар (H, χ), где H — подгруппа из G и χ — характер этой подгруппы. Частично упорядочим множество $\mathcal{P}$, считая $(H, \chi) \leqslant (H', \chi')$ тогда и только тогда, когда $H \subseteq H'$ и χ' совпадает с χ на H. Если $\{(H_\lambda, \chi_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ — цепь элементов из $\mathcal{P}$, то она имеет в $\mathcal{P}$ верхнюю грань (H, χ), где $H = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda$ и χ определяется (однозначно) равенством $\chi(a) = \chi_\lambda(a)$, если $a \in H_\lambda$. Пусть $\mathcal{P}_0$ — множество всех пар из $\mathcal{P}$, которые $\geqslant (H_0, \chi_0)$. По лемме Цорна $\mathcal{P}_0$ обладает максимальным элементом (H, χ). Теорема будет доказана, если мы покажем, что $H = G$.

Предположим противное: существует $a \in G \setminus H$. Пусть H' — подгруппа из G, порожденная H и a. Покажем, что можно построить характер χ' подгруппы H', совпадающий с χ на H, что будет противоречить максимальности пары (H, χ) в $\mathcal{F}_0$.

Если $a^n \in H$ лишь при $n = 0$, то положим

$$\chi'(ha^k) = \chi(h) \quad (h \in H;\ k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

В противном случае обозначим через n наименьшее положительное целое число, для которого $a^n \in H$. Пусть $b = a^n$ и ξ — некоторый корень n-й степени из $\chi(b)$. Положим

$$\chi'(ha^k) = \xi^k \chi(h) \quad (h \in H;\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

В любом случае χ' является, как легко видеть, характером подгруппы H', совпадающим с χ на H.

Теорема 5.58. *Если a и b — различные элементы коммутативной группы G, то существует такой характер χ этой группы, что $\chi(a) \neq \chi(b)$.*

Доказательство. Пусть $c = ab^{-1}$. Достаточно показать, что существует характер χ группы G, для которого $\chi(c) \neq 1$. Пусть H_0 — циклическая подгруппа группы G, порожденная элементом c. Если H_0 имеет бесконечный порядок, то положим

$$\chi_0(c^k) = (-1)^k \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots).$$

Если H_0 имеет конечный порядок n, то, обозначая через ω некоторый корень n-й степени из единицы, отличный от 1, положим

$$\chi_0(c^k) = \omega^k \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

В любом случае χ_0 является характером группы H_0, причем $\chi_0(c) \neq 1$. Утверждение теоремы теперь непосредственно вытекает из теоремы 5.57.

Следующая теорема, принадлежащая Хьюитту и Цукерману [1956, § 5], отвечает на поставленный выше вопрос о том, когда характеры коммутативной полугруппы отделяют элементы этой полугруппы. Напомним, что полугруппа S называется *сепаративной*, если из $a^2 = b^2 = ab$ $(a, b \in S)$ следует $a = b$.

Теорема 5.59. *Характеры коммутативной полугруппы S с единицей отделяют элементы из S тогда и только тогда, когда S сепаративна.*

Доказательство. Предположим сначала, что характеры полугруппы S отделяют элементы этой полугруппы. Пусть a и b — такие элементы полугруппы, что $a^2 = b^2 = ab$. Тогда $\chi(a)^2 = \chi(b)^2 = \chi(a)\chi(b)$ и, следовательно, $\chi(a) = \chi(b)$ для любого характера χ. Отсюда $a = b$, так как в противном случае должен был бы существовать такой характер χ полугруппы S, что $\chi(a) \neq \chi(b)$. Следовательно, полугруппа S сепаративна.

Предположим теперь, что S — сепаративная полугруппа. По теореме 4.18 S является объединением полуструктуры Y архимедовых полугрупп с сокращениями S_α ($\alpha \in Y$) и S может быть вложена в полугруппу T, которая является объединением такой же полуструктуры Y групп G_α, где G_α (для каждого α из Y) является группой частных полугруппы S_α.

Пусть a и b — различные элементы из S. Тогда существуют такие α и β из Y, что $a \in S_\alpha$ и $b \in S_\beta$. Предположим сначала, что $\alpha \neq \beta$. В этом случае либо $\alpha \not\leqslant \beta$, либо $\beta \not\leqslant \alpha$; пусть, например, $\beta \not\leqslant \alpha$. Пусть χ' — произвольный характер группы G_β. Из теоремы 5.56(B) следует, что условие (1) определяет характер χ полугруппы T. Из $ae_\beta \in G_{\alpha\beta} \neq G_\beta$ следует $\chi(a) = 0$. Так как $b \in G_\beta$, мы имеем $\chi(b) \neq 0$. Ограничение характера χ на S является, очевидно, характером полугруппы S, отделяющим элементы a и b.

Предположим теперь, что $\alpha = \beta$. Тогда a и b являются различными элементами коммутативной группы G_β. По теореме 5.58 существует характер χ' этой группы, отделяющий элементы a и b. Задавая отображение χ условием (1), мы снова получаем характер, ограничение которого на S является характером полугруппы S, отделяющим a и b. Это завершает доказательство теоремы 5.59.

В § 4.3 мы следующим образом ввели конгруэнцию σ на любой коммутативной полугруппе S: $a\sigma b$, если существует такое целое положительное число n, что $ab^n = b^{n+1}$ и $ba^n = a^{n+1}$. По теореме 4.14 $S' = S/\sigma$ есть максимальный сепаративный гомоморфный образ полугруппы S. Обозначим через θ естественный гомоморфизм полугруппы S на S'. Если χ — произвольный характер полугруппы S', то отображение χ_θ, задаваемое соотношением

$$\chi_\theta(a) = \chi(a\theta) \quad (\text{для всех } a \in S), \qquad (2)$$

является, очевидно, характером полугруппы S.

Следствие 5.60. *Если a и b — элементы полугруппы S, то $a\sigma b$ тогда и только тогда, когда $\psi(a) = \psi(b)$ для любого характера ψ полугруппы S. Отображение $\chi \to \chi_\theta$, где χ_θ задается равенством* (2), *есть изоморфизм полугруппы характеров S'^* на полугруппу характеров S^*.*

Доказательство. Пусть $a, b \in S$ и $\psi \in S^*$. Если $a\sigma b$, то существует такое целое положительное число n, что

$$\psi(a)\psi(b)^n = \psi(b)^{n+1} \text{ и } \psi(b)\psi(a)^n = \psi(a)^{n+1}.$$

Следовательно, $\psi(a) = \psi(b)$. Обратно, если $(a, b) \notin \sigma$, то $a\theta \neq b\theta$ и по теореме 5.59 существует $\chi \in S'^*$, для которого $\chi(a\theta) \neq$

$\neq \chi(b\theta)$. Следовательно, $\psi = \chi_\theta$ есть характер полугруппы S, причем $\psi(a) \neq \psi(b)$.

Отображение $\chi \to \chi_\theta$ является, очевидно, изоморфизмом S'^* в S^*. Покажем, что оно отображает S'^* на S^*. Возьмем $\psi \in S^*$. Мы можем задать χ соотношением $\chi(a\theta) = \psi(a)$; действительно, если $a\theta = b\theta$ $(a, b \in S)$, то $a\sigma b$, откуда $\psi(a) = \psi(b)$, как показано выше. Очевидно, $\chi \in S'^*$ и $\psi = \chi_\theta$.

Следующая теорема принадлежит Хьюитту и Цукерману [1956, § 5].

Теорема 5.61. *Пусть S — сепаративная коммутативная полугруппа с единицей. По теореме 4.18 S есть объединение полуструктуры Y архимедовых полугрупп с сокращениями S_α $(\alpha \in Y)$. Пусть T — объединение полуструктуры Y соответствующих групп частных G_α $(\alpha \in Y)$. Тогда каждый характер χ полугруппы S может быть получен как ограничение на S единичного характера χ^* полугруппы T. Отображение $\chi \to \chi^*$ есть изоморфизм полугруппы характеров S^* на полугруппу характеров T^*.*

Доказательство. Пусть χ — характер полугруппы S и a, b — элементы этой полугруппы, принадлежащие одной и той же ее архимедовой компоненте S_α. Тогда или $\chi(a) = \chi(b) = 0$, или одновременно $\chi(a) \neq 0$ и $\chi(b) \neq 0$. Действительно, по определению архимедовости (§ 4.3) каждый из элементов a и b делит степень другого, например, $ax = b^m$ и $by = a^n$ $(x, y \in S$; m, n — целые положительные числа). Следовательно, $\chi(a)\chi(x) = \chi(b)^m$ и $\chi(b)\chi(y) = \chi(a)^n$. Отсюда ясно, что $\chi(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $\chi(b) = 0$.

Каждый элемент из T принадлежит некоторой группе G_α и поэтому представим в виде ab^{-1}, где $a, b \in S_\alpha$. Положим

$$\chi^*(ab^{-1}) = \begin{cases} \chi(a)/\chi(b), & \text{если } \chi(a) \neq 0 \text{ и } \chi(b) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \chi(a) = \chi(b) = 0. \end{cases}$$

Проверим, что χ^* есть однозначное отображение. Возьмем элементы a, b, c, d из S_α, для которых $ab^{-1} = cd^{-1}$. Комплексные числа $\chi(a)$, $\chi(b)$, $\chi(c)$, $\chi(d)$ либо все равны нулю, либо все не равны нулю. В первом случае

$$\chi^*(cd^{-1}) = 0 = \chi^*(ab^{-1}).$$

Во втором случае, так как $ad = bc$, мы имеем $\chi(a)\chi(d) = \chi(b)\chi(c)$ и, следовательно,

$$\chi^*(cd^{-1}) = \chi(c)/\chi(d) = \chi(a)/\chi(b) = \chi^*(ab^{-1}).$$

Мы показали, что χ^* является характером полугруппы T. Если s и t — элементы из T, то $s = ab^{-1}$ для некоторых элементов $a, b \in S_\alpha$ и $t = cd^{-1}$ для некоторых $c, d \in S_\beta$ $(\alpha, \beta \in Y)$. По определению произведения в T $(ab^{-1})(cd^{-1}) = (ac)(bd)^{-1}$ и поэтому

$$\chi^*(st) = \begin{cases} \chi(ac)/\chi(bd), & \text{если } \chi(ac) \neq 0 \text{ и } \chi(bd) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \chi(ac) = \chi(bd) = 0. \end{cases}$$

Число $\chi(ac)$ отлично от нуля тогда и только тогда, когда $\chi(a)$ и $\chi(c)$ не равны нулю, а это имеет место тогда и только тогда, когда $\chi(b)$ и $\chi(d)$ не равны нулю. В этом случае

$$\chi^*(st) = \chi(a)\chi(c)/\chi(b)\chi(d) = \\ = \chi^*(ab^{-1})\chi^*(cd^{-1}) = \chi^*(s)\chi^*(t).$$

Если же $\chi(a) = 0$ или $\chi(c) = 0$, то

$$\chi^*(st) = 0 = \chi^*(ab^{-1})\chi^*(cd^{-1}) = \chi^*(s)\chi^*(t).$$

Покажем, что ограничение характера χ^* на S совпадает с χ. Возьмем $a \in S$. Для некоторого $\alpha \in Y$ имеем $a \in S_\alpha$. Поскольку $a = a^2a^{-1}$, то

$$\chi^*(a) = \begin{cases} \chi(a^2)/\chi(a), & \text{если } \chi(a) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \chi(a) = 0. \end{cases}$$

В любом случае $\chi^*(a) = \chi(a)$.

Проверим, что χ^* является единственным характером полугруппы T, совпадающим с χ на S. Предположим, что ψ^* — другой такой характер. Возьмем $t \in T$. Тогда $t = ab^{-1}$, где $a, b \in S_\alpha$. Если $\chi(a) \neq 0$ и $\chi(b) \neq 0$, то, поскольку ψ^* индуцирует в G_α обычный групповой характер, имеем

$$\psi^*(ab^{-1}) = \psi^*(a)/\psi^*(b) = \chi(a)/\chi(b) = \chi^*(ab^{-1}).$$

Если $\chi(a) = \chi(b) = 0$, то $\psi^*(a) = 0$. Отсюда следует, что характер ψ^* должен переводить в нуль любую группу G_α. Следовательно,

$$\psi^*(ab^{-1}) = 0 = \chi^*(ab^{-1}).$$

Таким образом, $\psi^* = \chi^*$.

Теперь очевидно, что отображение $\chi \to \chi^*$ есть изоморфизм полугруппы S^* на полугруппу T^*.

Завершив доказательство теоремы 5.61, вернемся к вопросу о строении полугруппы характеров S^* произвольной коммутативной полугруппы S с единицей.

Пусть $S' = S/\sigma$ есть максимальный сепаративный гомоморфный образ полугруппы S и T есть объединение полуструктуры Y групп G_α $(\alpha \in Y)$, в которое в силу теоремы 4.18 вложимо S'. Согласно следствию 5.60 полугруппы S^* и S'^* изоморфны, а по теореме 5.61, если в ней заменить S на S', в свою очередь S'^* и T^* изоморфны. Следовательно, $S^* \cong T^*$. Более того, очевиден и метод нахождения характеров полугруппы S по характерам полугруппы T. Отправляясь от характера χ^* полугруппы T, берем сначала его ограничение на S', а затем строим характер χ полугруппы S, заданный формулой (2), предшествующей следствию 5.60. Таким образом, проблема сведена к описанию полугруппы T^*, чем мы сейчас и займемся. Мы в состоянии сделать это в настоящее время лишь в предположении, что Y удовлетворяет условию минимальности (которое эквивалентно условию M_J для T).

Нам понадобится понятие сопряженного гомоморфизма, аналогичное понятию сопряженного линейного преобразования. Пусть G и H — коммутативные группы, а G^* и H^* — соответствующие им группы характеров. Если φ — гомоморфизм группы G в H, то для каждого характера $\chi \in H^*$ зададим отображение $\chi\varphi^*$ группы G в поле комплексных чисел формулой

$$(\chi\varphi^*)(a) = \chi(a\varphi) \quad (a \in G). \tag{3}$$

Легко проверить, что $\chi\varphi^* \in G^*$ и $\chi \to \chi\varphi^*$ есть гомоморфизм φ^* группы H^* в G^*. Мы называем гомоморфизм φ^* *сопряженным* гомоморфизму φ группы G в H.

Лемма 5.62. *Пусть G и H — коммутативные группы, а G^* и H^* — соответствующие им группы характеров. Если φ — гомоморфизм группы G в H и φ^* — сопряженный к нему гомоморфизм, то группа $H^*\varphi^*$ изоморфна группе характеров группы $G\varphi$.*

Доказательство. Пусть Ψ — подгруппа из G^*, состоящая из всех характеров ψ группы G, для которых из $a\varphi = b\varphi$ следует $\psi(a) = \psi(b)$, т. е. таких, что $\psi(c) = 1$ для всякого элемента c, принадлежащего ядру гомоморфизма φ. Каждый элемент $\psi \in \Psi$ определяет характер χ_0 группы $G\varphi$ по правилу

$$\chi_0(a\varphi) = \psi(a) \quad (\text{для всех } a \in G). \tag{4}$$

Обратно, на (4) можно смотреть как на условие, определяющее элемент $\psi \in \Psi$; при этом отображение $\psi \to \chi_0$ является, очевидно, изоморфизмом группы Ψ на группу характеров группы $G\varphi$. Осталось показать, что $\Psi = H^*\varphi^*$.

Пусть $\psi \in H^*\varphi^*$ и $a\varphi = b\varphi$, тогда $\psi = \chi\varphi^*$ для некоторого $\chi \in H^*$ и поэтому

$$\psi(a) = (\chi\varphi^*)(a) = \chi(a\varphi) = \chi(b\varphi) = (\chi\varphi^*)(b) = \psi(b).$$

Обратно, пусть $\psi \in \Psi$ и χ_0 определяется равенством (4). По теореме 5.57 характер χ_0 может быть продолжен до характера χ группы H. Если $a \in G$, то

$$(\chi\varphi^*)(a) = \chi(a\varphi) = \chi_0(a\varphi) = \psi(a),$$

следовательно, $\psi = \chi\varphi^* \in H^*\varphi^*$.

Пусть T — коммутативная полугруппа, являющаяся объединением полуструктуры Y групп G_α $(\alpha \in Y)$. В силу теоремы 4.11 строение полугруппы T определяется системой отображений

$\varphi_{\alpha,\beta}$ ($\alpha \geqslant \beta$ в Y), где каждое $\varphi_{\alpha,\beta}$ есть гомоморфизм группы G_α в G_β. Эти гомоморфизмы задаются следующим образом:

$$a_\alpha\varphi_{\alpha,\beta} = a_\alpha e_\beta \text{ для каждого } a_\alpha \in G_\alpha, \tag{5}$$

где e_β — единица группы G_β. Они удовлетворяют условию совместимости

$$\varphi_{\alpha,\beta}\varphi_{\beta,\gamma} = \varphi_{\alpha,\gamma} \quad (\text{где } \alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma \text{ в } Y), \tag{6}$$

и $\varphi_{\alpha,\alpha}$ является тождественным автоморфизмом группы G_α. Тогда произведение двух произвольных элементов a_α и b_β из T ($a_\alpha \in G_\alpha$, $b_\beta \in G_\beta$) определяется формулой

$$a_\alpha b_\beta = (a_\alpha\varphi_{\alpha,\gamma})(b_\beta\varphi_{\beta,\gamma}), \tag{7}$$

где $\gamma = \alpha\beta$ и умножение в правой части формулы выполняется в группе G_γ.

Следующая теорема полностью описывает полугруппу T^* в предположении, что Y удовлетворяет условию минимальности. Эта теорема для конечного T была получена Шварцем [1954a], а в общем виде — Уорном и Вильямсом [1961], но без выделения системы гомоморфизмов $\theta_{\beta,\alpha}$. Шварц по существу показал, что для конечного T имеет место $G_\beta^*\theta_{\beta\alpha} \cong G_\alpha\varphi_{\alpha,\beta}$ (см. следствие 5.64).

Теорема 5.63. *Пусть T — коммутативная полугруппа с единицей, являющаяся объединением полуструктуры Y групп G_α ($\alpha \in Y$), причем Y удовлетворяет условию минимальности. Пусть $\varphi_{\alpha,\beta}$ ($\alpha \leqslant \beta$) — гомоморфизм группы G_α в группу G_β, определяемый равенством* (5). *Тогда Y есть структура. Если Y^* есть полуструктура, двойственная Y, и T^* — полугруппа характеров полугруппы T, то T^* является полугруппой, изоморфной объединению полуструктуры Y^* групп характеров G_α^* и определяемой системой гомоморфизмов $\theta_{\beta,\alpha} = \varphi_{\alpha,\beta}^*$, где $\theta_{\beta,\alpha}$ есть гомоморфизм группы G_β^* в G_α^* ($\beta \geqslant \alpha$ в Y^*, т. е. $\alpha \geqslant \beta$ в Y) и $\varphi_{\alpha,\beta}^*$ есть гомоморфизм, сопряженный к $\varphi_{\alpha,\beta}$.*

Доказательство. Полуструктура, удовлетворяющая условию минимальности и обладающая наибольшим элементом, является структурой, так что Y есть структура. Обозначим объединение двух элементов α, $\beta \in Y$ через $\alpha \vee \beta$.

Пусть χ'_β — характер группы G_β. Для каждого $s \in T$ положим

$$\chi_\beta(s) = \begin{cases} \chi'_\beta(se_\beta), & \text{если } se_\beta \in G_\beta, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В силу утверждения (B) теоремы 5.56 заданный таким образом характер χ_β является главным характером полугруппы T с вершиной G_β, причем ограничение χ_β на G_β в точности совпадает с χ'_β. Так как Y по предположению удовлетворяет условию минимальности, из утверждений (A) и (C) теоремы 5.56 следует, что каждый характер полугруппы T может быть получен таким способом. Если χ'_β пробегает группу характеров G^*_β группы G_β, то χ_β пробегает подгруппу H_β из T^*, изоморфную G^*_β. Единица ε_β подгруппы H_β задается условием

$$\varepsilon_\beta(s) = \begin{cases} 1, & \text{если } se_\beta \in G_\beta, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Очевидно, что различные группы H_β не пересекаются и их объединение совпадает с T^*.

Пусть Y^* — полуструктура, двойственная Y. Если мы покажем, что $\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\alpha\vee\beta}$, то отсюда будет следовать, что T^* есть объединение полуструктуры Y^* групп G_β ($\beta \in Y^*$). Для элемента $s \in T$ имеем $(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta)(s) = \varepsilon_\alpha(s)\,\varepsilon_\beta(s)$, и этот элемент равен 1 тогда и только тогда, когда $se_\alpha \in G_\alpha$ и $se_\beta \in G_\beta$. Но ясно, что $se_\alpha \in G_\alpha$ тогда и только тогда, когда $s \in G_\gamma$ при любом $\gamma \geqslant \alpha$. Таким образом, $(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta)(s) = 1$ в том и только в том случае, когда $\gamma \geqslant \alpha$ и $\gamma \geqslant \beta$, т. е. $\gamma \geqslant \alpha \vee \beta$. Но $\varepsilon_{\alpha\vee\beta}(s)$ при $s \in G_\gamma$ равен 1 тогда и только тогда, когда $\gamma \geqslant \alpha \vee \beta$, откуда мы заключаем, что $(\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta)(s) = \varepsilon_{\alpha\vee\beta}(s)$. Поскольку s — произвольный элемент, имеем

$$\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta = \varepsilon_{\alpha\vee\beta}.$$

Отождествим теперь изоморфные группы H_α и G^*_α, что избавит нас от некоторых затруднений в заключительной части доказательства теоремы.

Система гомоморфизмов $\theta_{\beta,\alpha}$, которая определяет строение полугруппы T^*, задается, аналогично (5), условием

$$\chi_\beta\theta_{\beta,\alpha} = \chi_\beta\varepsilon_\alpha \quad \text{для каждого} \quad \chi_\beta \in G^*_\beta.$$

Гомоморфизм $\varphi^*_{\alpha,\beta}$, сопряженный к $\varphi_{\alpha,\beta}$ ($\alpha \geqslant \beta$), задается равенством (3), которое принимает вид

$$(\chi_\beta\varphi^*_{\alpha,\beta})(a_\alpha) = \chi_\beta(a_\alpha\varphi_{\alpha,\beta}) \quad (\text{для всех } a_\alpha \in G_\alpha). \tag{8}$$

Осталось лишь показать, что $\theta_{\beta,\alpha} = \varphi^*_{\alpha,\beta}$. Для каждого элемента $a_\alpha \in G_\alpha$ имеем

$$\begin{aligned}(\chi_\beta\theta_{\beta,\alpha})(a_\alpha) &= (\chi_\beta\varepsilon_\alpha)(a_\alpha) = \chi_\beta(a_\alpha)\,\varepsilon_\alpha(a_\alpha) = \\ &= \chi_\beta(a_\alpha)\cdot 1 = \chi_\beta(a_\alpha)\,\chi_\beta(e_\beta) = \\ &= \chi_\beta(a_\alpha e_\beta) = \chi_\beta(a_\alpha\varphi_{\alpha,\beta}).\end{aligned}$$

Сравнивая это с (8), мы заключаем, что $\chi_\beta\theta_{\beta,\alpha} = \chi_\beta\varphi^*_{\alpha,\beta}$. Это выполняется для каждого χ_β из G^*_β, откуда $\theta_{\beta,\alpha} = \varphi^*_{\alpha,\beta}$.

Как было отмечено выше, следующее утверждение принадлежит Шварцу [1954a].

Следствие 5.64. *При обозначениях и предположениях теоремы* 5.63, *если* α *и* β — *такие элементы из* Y, *что* $\alpha \geqslant \beta$, *то группа* $G_\beta^*\theta_{\beta,\alpha}$ $(= G_\beta^*\varepsilon_\alpha)$ *изоморфна группе характеров группы* $G_\alpha\varphi_{\alpha,\beta}$ $(= G_\alpha e_\beta)$. *Если полугруппа* T *конечна, то* $G_\beta^*\varepsilon_\alpha \cong G_\alpha e_\beta$.

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из леммы 5.62 и теоремы 5.63. В силу определения гомоморфизмов $\varphi_{\alpha,\beta}$ и $\theta_{\beta,\alpha}$ имеем $G_\alpha\varphi_{\alpha,\beta} = G_\alpha e_\beta$ и $G_\beta^*\theta_{\beta,\alpha} = G_\beta^*\varepsilon_\alpha$. Тогда второе утверждение следует из хорошо известной теоремы о том, что конечная абелева группа изоморфна своей группе характеров.

Мы закончим этот параграф теоремой о продолжении характера подполугруппы на всю полугруппу. Она была доказана для инверсных коммутативных полугрупп Уорном и Вильямсом [1961], использовавшими следующую более общую теорему, принадлежащую Россу [1959]. *Полухарактер* χ *подполугруппы* S *коммутативной полугруппы* T *может быть продолжен до полухарактера полугруппы* T *тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему условию: если* a *и* b — *такие элементы из* S, *что* a *делит* b *относительно* T, *то* $|\chi(a)| \geqslant |\chi(b)|$. (Необходимость очевидна: действительно, $at = b$, где $t \in T$, и $|\chi(t)| \leqslant 1$.) Как и все результаты этого параграфа, теорема 5.65 справедлива независимо от того, выполняется или нет условие унимодулярности (С 2). Из недавних работ, относящихся к этому вопросу, см. статьи Комфорта [1960] и Росса [1961].

Теорема 5.65. *Пусть* T — *такая коммутативная полугруппа с единицей, что ее максимальный полуструктурный гомоморфный образ удовлетворяет условию минимальности, и пусть* S — *произвольная подполугруппа из* T, *такая, что для каждой архимедовой компоненты* T_α *полугруппы* T *пересечение* $S \cap T_\alpha$ *либо пусто, либо является архимедовой полугруппой. Тогда каждый характер подполугруппы* S *может быть продолжен до характера полугруппы* T [1]).

Доказательство. Предположим сначала, что T является объединением полуструктуры Y групп G_α. Если χ — характер подполугруппы S, то он может быть продолжен на $S \cup 1$, если положить $\chi(1) = 1$. Поэтому можно предполагать, что $1 \in S$.

Пусть $S_\alpha = S \cap G_\alpha$ и Y' — множество всех таких $\alpha \in Y$, что S_α непусто. Очевидно, что Y' — подполуструктура из Y. Для каждого $\alpha \in Y'$ обозначим через G'_α подгруппу группы G_α, порожден-

[1]) Здесь приводится исправленная по сравнению с оригиналом формулировка теоремы, в которой учтен результат Фулпа [1967].— *Прим. ред.*

ную S_α. Пусть S' — объединение всех групп G'_α. Согласно условию, подполугруппы S_α $(\alpha \in Y')$ являются архимедовыми компонентами полугруппы S, так что по теореме 5.61 характер χ может быть единственным образом продолжен на S'.

Поскольку условие минимальности справедливо для Y, оно справедливо и для Y'. По теореме 5.56 характер χ является главным и определяется через характер χ' его вершины G'_β следующим образом:

$$\chi(s) = \begin{cases} \chi'(se_\beta), & \text{если } se_\beta \in G'_\beta, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь $\beta \in Y'$ и $s \in S'$. В силу теоремы 5.57 χ' может быть продолжен до характера ψ' группы G_β. Но тогда снова по теореме 5.56 отображение ψ, заданное условием

$$\psi(s) = \begin{cases} \psi'(se_\beta), & \text{если } se_\beta \in G_\beta, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

является характером полугруппы T, совпадающим с χ на S' и, следовательно, на S. Действительно, $e_\beta \in G'_\beta \subseteq S'$, и поэтому, если $s \in S'$, то $se_\beta \in G_\beta$ тогда и только тогда, когда $se_\beta \in G'_\beta$.

Предположим, далее, что полугруппа T сепаративна. По теореме 4.18 T является объединением полуструктуры Y полугрупп с сокращениями T_α $(\alpha \in Y)$ и может быть вложена в полугруппу T', являющуюся объединением той же самой полуструктуры Y групп частных G_α для полугрупп T_α. Но тогда S также является подполугруппой из T' и в силу предыдущего характер χ может быть продолжен до характера ψ' полугруппы T'. Ограничение ψ характера ψ' на T является, очевидно, продолжением характера χ на T.

Наконец, будем предполагать лишь, что T является коммутативной полугруппой с единицей. Пусть σ — конгруэнция на T, определяемая, как в § 4.3: $a\sigma b$, если $ab^n = b^{n+1}$ и $ba^n = a^{n+1}$ для некоторого n. Тогда $T' = T/\sigma$ есть максимальный сепаративный гомоморфный образ полугруппы T и в силу следствия 5.60 соотношение

$$\psi_\theta(a) = \psi(a\theta) \quad (\text{для всех } a \in T)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между характерами ψ полугруппы T' и характерами ψ_θ полугруппы T, где θ — естественный гомоморфизм T на T'.

Но из определения конгруэнции σ следует, что ее пересечение с $S \times S$ есть конгруэнция на S, факторполугруппа S' по которой является максимальным сепаративным гомоморфным образом полугруппы S, так что S' можно считать подполугруппой из T'. Ограничение θ' гомоморфизма θ на S является тогда естественным гомоморфизмом S на S', и формула

$$\chi_{\theta'}(a) = \chi(a\theta') \qquad (\text{для всех } a \in S)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между характерами χ полугруппы S' и характерами $\chi_{\theta'}$ полугруппы S.

Пусть теперь $\chi_{\theta'}$ — заданный характер полугруппы S. Согласно уже доказанному, соответствующий характер χ полугруппы S' может быть продолжен до характера ψ полугруппы T'. Очевидно, что характер ψ_θ полугруппы T является тогда продолжением характера $\psi_{\theta'}$.

Упражнения к § 5.5

1. Пусть S — мультипликативная полугруппа целых положительных чисел и Ω — подмножество множества Π всех простых чисел. Если P_Ω — множество всех целых положительных чисел, делящихся хотя бы на одно число из Ω, то P_Ω есть вполне изолированный идеал полугруппы S и каждый вполне изолированный идеал из S есть P_Ω для некоторого $\Omega \subseteq \Pi$. Имеем $P_{\Omega_1} \cup P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cup \Omega_2}$, но $P_{\Omega_1} \cap P_{\Omega_2}$ не является, вообще говоря, вполне изолированным идеалом. Тем не менее множество Y^* вполне изолированных идеалов полугруппы S является структурой по включению, в которой пересечением P_{Ω_1} и P_{Ω_2} является $P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$. Таким образом, структура Y^* изоморфна структуре всех подмножеств счетного множества Π. Максимальная подгруппа $H^*_{P_\Omega}$ полугруппы характеров S^* полугруппы S изоморфна (полному) прямому произведению $|\Pi \setminus \Omega|$ экземпляров мультипликативной группы отличных от нуля комплексных чисел [или комплексных чисел с модулем, равным 1, если мы потребуем выполнения условия (С 2)].

2. Пусть S — такая конечная коммутативная полугруппа, что если $a \neq b$, то существует характер χ полугруппы S, нигде на ней не обращающийся в нуль, для которого $\chi(a) \neq \chi(b)$. Тогда S есть группа. (Хьюитт и Цукерман [1955], § 3.1.6.)

3. Ненулевые характеры конечной коммутативной полугруппы S образуют линейно независимое множество функций на S. (Хьюитт и Цукерман [1955], § 3.3.1.)

4. Если H_S — объединение максимальных подгрупп конечной коммутативной полугруппы S, то число ненулевых характеров полугруппы S равно $|H_S|$. (Хьюитт и Цукерман [1955], § 3.6.2.)

5. Пусть S — такая коммутативная полугруппа, что некоторая степень каждого ее элемента лежит в подгруппе из S. Как и в упражнении 5 к § 4.3, пусть $\{S_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ — ее архимедовы компоненты, H_α — ядро полугруппы S_α и e_α — единица группы H_α. Пусть $H_S = \bigcup\{H_\alpha \mid \alpha \in Y\}$ есть «групповая часть» полугруппы S.

(a) Если a, $b \in S$, то $\chi(a) = \chi(b)$ для каждого характера χ полугруппы S тогда и только тогда, когда (i) a и b принадлежат одной и той же архимедовой компоненте S_α и (ii) $ae_\alpha = be_\alpha$.

(b) Пусть χ — характер полугруппы S и χ' — его ограничение на H_S. Тогда для каждого $\alpha \in Y'$ и каждого $a_\alpha \in S_\alpha$ имеем $\chi(a_\alpha) = \chi'(a_\alpha e_\alpha)$. Обратно, при заданном характере χ' группы H_S определенное указанным образом отображение χ является характером полугруппы S. Отображение $\chi \to \chi'$ есть изоморфизм полугруппы характеров S^* полугруппы S на полугруппу характеров H_S^* группы H_S.

(Шварц [1954b] для периодической полугруппы S.)

6. В условиях упражнения 5 предположим дополнительно, что для Y выполняется условие минимальности (оно не является обязательным для пунктов (a) и (g) ниже). Напомним (§ 4.1), что идеал A полугруппы S называется изолированным, если из $a \in S$ и $a^2 \in A$ следует, что $a \in A$.

(a) Характер χ отображает S_α в нуль тогда и только тогда, когда $\chi(e_\alpha) = 0$. Во всех остальных случаях $\chi(e_\alpha) = 1$. Характер χ назовем *главным*, если существует такое $\beta \in Y$, что $\chi(e_\alpha) = 1$ тогда и только тогда, когда $\alpha \geqslant \beta$; β назовем *вершиной* характера χ. Тогда справедлива теорема 5.56, если заменить в ней T на S и (для каждого $\alpha \in Y$) G_α на S_α.

(b) Существует взаимно однозначное соответствие между вполне изолированными идеалами P полугруппы S и такими элементами β из Y, что если P и β соответствуют друг другу, то $P = \bigcup\{S_\alpha \mid \alpha \ngeqslant \beta\}$ и β — наименьший элемент в Y, для которого $P \cap S_\beta = \varnothing$.

(c) Если P и β соответствуют друг другу, как в пункте (b), то множество H_β^* всех характеров полугруппы S с вершиной β совпадает с группой H_P^* всех характеров этой полугруппы, отображающих в нуль точно P (теорема 5.55). Тогда полуструктура Y является в действительности структурой, и если эту структуру, рассматриваемую как полуструктура относительно объединения, обозначить через Y^*, то $H_\alpha^* H_\beta^* \subseteq H_{\alpha\vee\beta}^*$ и S^* есть объединение полуструктуры Y^* групп H_α^* $(\alpha \in Y^*)$.

(d) Каждый идеал в S^* изолирован. Если A $[A^*]$ — идеал полугруппы S $[S^*]$ и $A\pi$ $[A^*\pi^*]$ — множество всех χ из S^* [всех a из S], таких, что $\chi(a) = 0$ для всех $a \in A$ (всех $\chi \in A^*$), то π и π^* являются взаимно обратными антиизоморфизмами структуры всех изолированных идеалов полугруппы S и структуры всех идеалов полугруппы S^* друг на друга.

(e) Структура всех вполне изолированных идеалов полугруппы S и структура всех главных идеалов полугруппы S^* соответствуют друг другу при антиизоморфизмах π и π^*.

(f) Если A — произвольный идеал полугруппы S, то полугруппа характеров полугруппы A изоморфна $S^* \setminus A\pi$, если A имеет единицу, и изоморфна факторполугруппе $S^*/A\pi$ в противном случае.

(g) Полугруппа, полученная из полугруппы характеров факторполугруппы S/A удалением единицы, изоморфна полугруппе $A\pi$. (Шварц [1954c], Исеки [1957] для случая, когда S — периодическая полугруппа с конечным числом идемпотентов.)

7. (a) Если полугруппа S сепаративна, то она изоморфна подполугруппе полугруппы характеров S^{**} для полугруппы характеров S^* исходной полугруппы.

(b) Если S — конечная коммутативная полугруппа с единицей, являющаяся объединением групп, то $S^{**} \cong S$.

Приложение

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ СТАТЬИ СУШКЕВИЧА [1928]

Для произвольной конечной полугруппы S рассматриваются подмножества вида Sa, имеющие наименьшее возможное число элементов. Этими подмножествами, очевидно, исчерпываются все минимальные левые идеалы из S, так что мы будем пользоваться соответствующей современной терминологией. Показано, что каждый минимальный левый идеал есть левая группа, и (без использования термина «прямое произведение») установлено, что левая группа есть прямое произведение группы и полугруппы левых нулей (соответствующее утверждение для общего случая — теорема 1.27). Кроме того, все минимальные левые идеалы полугруппы S изоморфны и каждый из них является объединением одного и того же числа r изоморфных групп.

Объединение K всех минимальных левых идеалов из S названо ядром («Kern-gruppe») полугруппы S. Если s — число различных минимальных левых идеалов, то K есть объединение rs изоморфных групп. Они могут быть расположены в прямоугольную таблицу:

K	L_1	L_2	$\ldots$	L_s
R_1	H_{11}	H_{12}	$\ldots$	H_{1s}
R_2	H_{21}	H_{22}	$\ldots$	H_{2s}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
R_r	H_{r1}	H_{r2}	$\ldots$	H_{rs}

(Это источник нашей «egg-box»-картины, описанной в § 2.1.) Объединение групп $H_{1\lambda}, \ldots, H_{r\lambda}$ из λ-го столбца является минимальным левым идеалом L_λ ($\lambda = 1, \ldots, s$). Пусть $e_{i\lambda}$ — единица группы $H_{i\lambda}$. Показано, что группы $H_{i\lambda}$ можно расположить так, что каждое $e_{i\lambda}$ действует как левая единица на все группы $H_{i\lambda}$ из одной строки. После указанной перестановки объединение R_i групп $H_{i1}, \ldots, H_{is}$ из i-й строки ($i = 1, \ldots, r$) будет минимальным правым идеалом. Более того, каждый минимальный правый идеал полугруппы S совпадает с одним из R_i. Следовательно, *каждая конечная полугруппа содержит ядро, которое* *является объединением всех ее минимальных левых идеалов, а также объединением всех ее минимальных правых идеалов. Пересечение минимального левого и минимального правого идеалов совпадает с (максимальной) подгруппой данной полугруппы.* Эти результаты позже были распространены на полугруппы, обладающие минимальными левыми идеалами и минимальными правыми идеалами (см. упражнение 13 к § 2.7). Мы теперь знаем, что проще независимо ввести идеалы L_i и R_λ, а группы $H_{i\lambda}$ сразу считать их пересечениями. Сушкевич показал далее (весьма сложным способом), что *ядро однозначно определяется* (1) *абстрактной группой* H, *которой изоморфна каждая группа* $H_{i\lambda}$, (2) *числами* r *и* s (3) $(r-1)(s-1)$ *произведениями* $e_{11}e_{i\lambda}$ $(i=2, \ldots, r; \lambda = 2, \ldots, s)$. *При этом группа* H, *числа* r *и* s, *произведения* $e_{11}e_{i\lambda}$ *могут быть заданы, вообще говоря, произвольным образом, что было установлено с использованием преобразований конечного множества.* Таким образом, ему удалось определить строение произвольной конечной простой полугруппы, но еще в не очень удобном для применения виде (в отличие от описания, данного более поздней теоремой Риса).

Эти результаты занимают большую часть главы 3 книги Сушкевича [1937].

Библиография [1])

А м и ц у р (A m i t s u r S.)

[1951] Semi-group rings, *Riveon Lematematika*, 5, 5—9.

А н д е р с е н (A n d e r s e n O.)

[1952] Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen, Thesis, Гамбург.

Б а л ь е (B a l l i e u R.)

[1950] Une relation d'équivalence dans les groupoïdes et son application à une class de demi-groupes, IIIe Congrès National des Sciences, Bruxelles, 2, 46—50.

Б р а к (B r u c k R. H.)

[1958] A Survey of Binary Systems, Ergebnise der Math., Heft 20, Springer, Berlin.

Б р а н д т (B r a n d t H.)

[1927] Über eine Verallgemeinerung des Gruppenbegriffes, *Math. Ann.*, 96, 360—366.

[1940] Über die Axiome des Gruppoids, Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich, 85, 95—104.

Б э р, Л е в и (B a e r R., L e v i F.)

[1932] Vollständige irreduzibele Systeme von Gruppenaxiomen (Beiträge zur Algebra № 18), Sitzber. Heidelberger Akad. Wiss., Abh., 2, 1—12.

В а г н е р В. В.

[1952a] К теории частичных преобразований, *ДАН СССР*, 84, 653—656.

[1952b] Обобщенные группы, *ДАН СССР*, 84, 1119—1122.

В а н д и в е р (V a n d i v e r H. S.)

[1940] On the imbedding of one semi-group in another, with application to semi-rings, *Amer. J. Math.*, 62, 72—78.

В и г а н д т (W i e g a n d t R.)

[1958a] On complete semi-groups, *Acta Sci. Math. Szeged*, 19, 93—97.

[1958b] On complete semi-modules, *Acta Sci. Math. Szeged*, 19, 219—223.

В о р о б ь е в Н. Н.

[1953a] Ассоциативные системы, всякая подсистема которых имеет единицу, *ДАН СССР*, 88, 393—396.

---

[1]) Звездочкой отмечены работы, добавленные при переводе.— *Прим. ред.*

[1953b] О симметрических ассоциативных системах, *Уч. зап. ЛГП им. А. И. Герцена*, 89, 161—166.

Г л у с к и н Л. М.

[1957] Элементарные обобщенные группы, *Матем. сб.*, 41, 23—36.

Г р и л л е, П е т р и ч (G r i l l e t P. A., P e t r i c h M.)

[1968*] Ideal extentions of semigroups, *Pacif. J. Math.*, 26, 493—508.

Г р и м б л (G r i m b l e Helen B.)

[1950] Prime ideals in semigroups, Thesis, Univ. of Tennessee.

Г р и н (G r e e n J. A.)

[1951] On the structure of semigroups, *Ann. of Math.*, 54, 163—172.

Г р и н, Р и с (G r e e n J. A., R e e s D.)

[1952] On semigroups in which $x^r = x$, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 48, 35—40.

Г у д, Х ь ю з (G o o d R. A., H u g h e s D. R.)

[1952] Associated groups for a semigroup, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 58, 624—625.

Д и к с о н (D i c k s o n L. E.)

[1905] On semi-groups and the general isomorphism between infinite groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 6, 205—208.

Д о с с (D o s s C. G.)

[1955] Certain equivalence relations in transformation semigroups, Thesis, Univ. of Tennessee.

Д ю б р е й (D u b r e i l P.)

[1941] Contribution à la théorie des demi-groupes, Mèm. Acad. Sci. Inst. France, (2) 63, № 3, 52.

[1943] Sur les problèmes d'immersion et la thèorie des modules, *C. R. Acad. Sci.*, Paris, 216, 625—627.

И в а н (I v a n J.)

[1953] On the direct product of semigroups, Mat.-Fyz. Časopis. Slovensk. Akad. Vied, 3, 57—66.

[1954] On the decomposition of simple semigroups into a direct product, *Mat.-Fyz. Časopis. Slovensk. Akad. Vied*, 4, 181—202.

И с е к и (I s é k i K.)

[1956a] Contribution to the theory of semigroups, I, *Proc. Japan. Acad.*, 32, 174—175.

[1956b] Contribution to the theory of semigroups, III, *Proc. Japan Acad* 32, 323—324.

[1956c] Contribution to the theory of semigroups, IV, *Proc. Japan Acad.*, 32, 430—435.

[1956d] A characterisation of regular semigroup, *Proc. Japan Acad.*, 32, 676—677.

[1957] Contribution to the theory of semigroups, VI, *Proc. Japan Acad.*, 33, 29—30.

К а р м э н (C a r m a n K. S.)

[1949] Semigroup ideals, Thesis, Univ. of Tennessee.

Кимура (Kimura N.)
[1954] Maximal subgroups of a semigroup, Kôdai Math. Sem. Rep., 1954, 85—88.
[1957] Note on idempotent semigroups, I, *Proc. Japan Acad.*, 33, 642—645.
[1958a] Note on idempotent semigroups, III, *Proc. Japan Acad.*, 34, 113—114.
[1958b] Note on idempotent semigroups, IV, *Proc. Japan Acad.*, 34, 121—123.
[1958c] The structure of idempotent semigroup, I, *Pacific J. Math.*, 8, 257—275.
[1958d] On some existence theorems on multiplicative systems, I, Greatest quotient, *Proc. Japan Acad.*, 34, 305—309.

Кларк (Clark E. W.)
[1965*] Remarks on the kernel of a matrix semigroup, *Czech. Math. J.*, 15, 305—310.

Клейн-Бармен (Klein-Barmen F.)
[1940] Über eine weitere Verallgemeinerung des Verbandsbegriffes, *Math. Zeits.*, 46, 472—480.

Климеску (Climescu A. C.)
[1946] Sur les quasicycles, *Bull. Ecole Polytech. Jassy*, 1, 5—14.

Клиффорд (Clifford A. H.)
[1933] A system arising from a weakened set of group postulates, *Ann. of Math.*, 34, 865—871.
[1941] Semigroups admitting relative inverses, *Ann. of Math.*, 42, 1037—1049.
[1942] Matrix representations of completely simple semigroups, *Amer. J. Math.*, 64, 327—342.
[1948] Semigroups containing minimal ideals, *Amer. J. Math.*, 70, 521—526.
[1949] Semigroups without nilpotent ideals, *Amer. J. Math.*, 71, 834—844.
[1950] Extensions of semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 68, 165—173.
[1953] A class of *d*-simple semigroups, *Amer. J. Math.*, 75, 547—556.
[1954] Bands of semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 5, 499—504.
[1960] Basic representation of completely simple semigroups, *Amer. J. Math.*, 82, 430—434.

Клиффорд, Миллер (Clifford A. H., Miller D. D.)
[1948] Semigroups having zeroid elements, *Amer. J. Math.*, 70, 117—125.

Комфорт (Comfort W. W.)
[1960] The isolated points in the dual of a commutative semigroup, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11, 227—233.

Конрад (Conrad P. F.)
[1957] Generalized semigroup rings, *J. Indian Math. Soc.* (N. S.), 21, 73—95.

Кох (Koch R. J.)
[1953] On topological semigroups, Thesis, The Tulane Univ. of Louisiana.

К р у а з о (C r o i s o t R.)

[1948a] Une interprétation des relations d'équivalence dans un ensemble, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **226**, 616—617.

[1948b] Condition suffisante pour l'égalité des longueure de deux chaines de mêmes extrémités dans une structure. Application aux relations d'équivalence et aux sous-groupes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **226**, 767—768.

[1953] Demi-groupes inversif et demi-groupes rèunions de demi-groupes simples, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.* (3), **70** (1953), 361—379.

Л а й о ш (L a j o s S.)

[1961] Generalized ideals in semigroups, *Acta Sci. Math. Seged*, **22**, 217—222.

Л е с о х и н М. М.

[1970*] Характеры коммутативных полугрупп, I, *Изв. вузов*, Математика, № 8 (99), 67—74.

Л и б е р А. Е.

[1954] К теории обобщенных групп, *ДАН СССР*, **97**, 25—28.

Л о в и (L o e w y A.)

[1927] Uber abstrakt definierte Transmutationssysteme oder Mischgruppe, *J. Reine Angew. Math.*, **157**, 239—254.

Л я п и н Е. С.

[1953a] Ассоциативные системы всех частичных преобразований, *ДАН СССР*, **88**, 13—15 (поправка, см. 92 (1953), 692).

[1953b] Канонический вид элементов одной ассоциативной системы, заданной определяющими соотношениями, *Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена*, **89**, 45—54.

[1953c] Увеличительные элементы ассоциативных систем, *Уч. зап. ЛГПИ им. А. И. Герцена*, **89**, 55—65.

[1954] Полугруппы, во всех представлениях которых операторы имеют неподвижные точки, 1, *Матем. сб.*, **34**, 289—306.

М а к л и н (M c L e a n D.)

[1954] Idempotent semigroups, *Amer. Math. Monthly*, **61**, 110—113.

М а л ь ц е в А. И.

[1939] О включении ассоциативных систем в группы, *Матем. сб.*, **6**, 331—336.

[1952] Симметрические группоиды, *Матем. сб.*, **31**, 136—151.

М а н н (M u n n W. D.)

[1955a] Semigroups and their algebras, Diss., Cambridge Univ., 1955.

[1955b] On semigroup algebras, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **51**, 1—15.

[1957a] Matrix representations of semigroups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **53**, 5—12.

[1957b] The characters of the symmetric inverse semigroup, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **53**, 13—18.

[1960] Irreducible matrix representations of semigroups, *Quarterly J. Math. Oxford*, Ser. (2) **11**, 295—309.

[1961] Pseudo-inverses in semigroups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **57**, 247—250.

М а н н, П е н р о у з (M u n n W. D., P e n r o s e R.)

[1955] A note on inverse semigroups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **51**, 396—399.

Миллер, Клиффорд (Miller D. D., Clifford A. H.)
[1956] Regular D-classes in semigroups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **82**, 270—280.

Мэнн (Mann H. B.)
[1944] On certain systems which are almost groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50**, 879—881.

Нумакура (Numakura K.)
[1954] A note on the structure of commutative semigroups, *Proc. Japan Akad.*, 30, 262—265.

Оганесян В. А.
[1955] О полупростоте системной алгебры, *ДАН Арм.ССР*, **21**, 145—147.

Понизовский И. С.
[1956] О матричных представлениях ассоциативных систем, *Матем. сб.*, 38, 241—260.
[1958] О матричных неприводимых представлениях конечных полугрупп, *УМН*, **13**, 139—144.

Поси (Posey E. E.)
[1949] Endomorphisms and translations of semigroups, Thesis, Univ. of Tennessee.

Прахар (Prachar K.)
[1947] Zur Axiomatik der Gruppen, *Akad. Wiss. Wien. S.-B.* II a, **155**, 97—102.

Престон (Preston G. B.)
[1954a] Inverse semi-groups, *J. London. Math. Soc.*, 29, 396—403.
[1954b] Inverse semi-groups with minimal right ideals, *J. Lond. Math. Soc.*, **29**, 404—411.
[1954c] Representations of inverse semigroups, *J. Lond. Math. Soc.*, **29**, 411—419.
[1957] A note on representations of inverse semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 8, 1144—1147.
[1958] Matrix representations of semigroups, *Quarterly J. Math. Oxford*, Ser. (2) 9, 169—176.

Пул (Poole A. R.)
[1937] Finite ova, *Amer. J. Math.*, 59, 23—32.

Редеи (Rèdei L.)
[1952] Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math. Szeged*, **14**, 252—273.

Рис (Rees D.)
[1940] On semi-groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **36**, 387—400.
[1941] Note on semi-groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **37**, 434—435.
[1948a] On the ideal structure of a semi-group satisfying a cancellation law, *Quarterly J. Math. Oxford*, Ser. 19, 101—108.
[1948b] On the group of a set of partial transformations, *J. Lond. Math. Soc.*, 22, 281—284.

Рич (Rich R. P.)
[1949] Completely simple ideals of a semigroup, *Amer. J. Math. Soc.* **71**, 883—885.

Р о с с (R o s s K. A.)

[1959] A note on extending semicharacters on semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10**, 579—583.

[1961] Extending characters on semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **12**.

С е п (S z é p J.)

[1956] Zur Theorie der Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen*, **4**, 344—346.

С к о л е м (S k o l e m T.)

[1951] Some remarks on semi-groups, *Norske Vid. Selsk. Forh. Trondheim*, **24**, 42—47.

С т о л л (S t o l l R. R.)

[1944] Representation of finite simple semigroups, *Duke Math. J.*, **11**, 251—265.

[1951] Homomorphisms of a semigroup onto a group, *Amer. J. Math.*, **73**, 475—481.

С т о л т (S t o l t B.)

[1956] Über eine besondere Halbgruppe, *Ark. Mat.*, **3**, 275—286.

С у ш к е в и ч А. К.

[1928] Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit, *Math. Ann.*, **99**, 30—50.

[1933] Über die Matrizendarstellung der verallgemeinerte Gruppen, *Зап. матем. т-ва*, Харьков, **6**, 27—38.

[1937] Теория обобщенных групп, Харьков—Киев ГНТИ, 1937.

[1940a] Исследования о бесконечных подстановках, Сб. памяти акад. Граве, Москва, 245—253.

[1940b] Исследования о бесконечных подстановках, *Зап. матем. т-ва*, Харьков, **18**, 27—37.

Т а м а р и (T a m a r i Dov.)

[1948] On a certain classification of rings and semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54**, 153—158.

Т а м у р а (T a m u r a T.)

[1950] Characterization of groupoids and semilattices by ideals in a semigroup, *J. Sci. Gakugei Fac. Tokushima Univ.*, **1**, 37—44.

[1954a] On finite one-idempotent semigroups, I, *J. Gakugei Tokushima Univ.* (Nat. Sci.), **4**, 11—20.

[1954b] Note on unipotent inversible semigroups, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 1954, 93—95.

[1955a] One-sided bases and translations of a semigroup, *Math. Japonica*, **3**, 137—141.

[1955b] On translations of a semigroup, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **7**, 67—70.

[1957] Commutative nonpotent archimedean semigroup with cancellation law, I, *J. Gakugei Tokushima Univ.*, **8**, 5—11.

[1958] Notes on translations of a semigroup, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **10**, 9—26.

Т а м у р а, Г р э х э м (T a m u r a T., G r a h a m N.)

[1964*] Certain embedding problems of semigroups, *Proc. Japan. Acad.*, **40**, № 1, 8—13.

Тамура, Кимура (Tamura T., Kimura N.)
[1954] On decompositions of a commutative semigroup, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 1954, 109—112.
[1955] Existence of greatest decomposition of a semigroup, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 7, 83—84.

Тамура, Меркель, Латимер (Tamura T., Merkel R. B., Latimer J. F.)
[1963*] The direct product of right singular semigroups and certain groupoids, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 14, № 1, 118—123.

Тесье (Teissier Marianne)
[1952a] Sur l'algèbre d'un demi-groupe fini simple, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 234, 2413—2414.
[1952b] Sur l'algèbre d'un demi-groupe fini simple, II. Cas gènèral, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234, 2511—2513.

Тулли (Tully E. J.)
[1960] Representation of a semigroup by transformations of a set, Thesis, The Tulane Univ. of Louisiana.

Тьеррен (Thierrin G.)
[1951] Sur une condition nècessaire et sufficante pour qu'un semi-groupe soit un groupe, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 232, 376—378.
[1952a] Sur les éléments inversifs et les éléments unitaires d'un demi-groupe inversif, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 234, 33—34.
[1952b] Sur une classe de demi-groupes inversifs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 234, 177—179.
[1954a] Sur quelques classes de demi-groupes possédant certaines propriétés des semigroupes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 238, 1765—1767.
[1954b] Sur quelques propriétés de certaines classes de demigroupes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 239, 1335—1337.
[1955a] Demi-groupes inversès et rectangulaires, Acad. Roy; Belg. Bull. Cl. Sci. (5), 41, 83—92.
[1955b] Sur une propriété caractéristique des demi-groupes inversés et rectangulaires, *C. R. Acad. Sci., Paris*, 241, 1192—1194.
[1955c] Contribution à la théorie des équivalences dans les demi-groupes, *Bull. Soc. Math. France*, 83, 103—159.
[1956] Sur quelques decompositions des groupoides, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 242, 596—598.

Уоллес (Wallace A. D.)
[1953] A note on mobs, II, *Anais Acad. Brasil Ci.*, 25, 335—336.
[1955] The structure of topological semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 61, 95—112.
[1957] Retractions in semigroups, *Pacific J. Math.*, 7, 1513—1517.

Уорн, Вильямс (Warne R. J., Williams L. K.)
[1961] Characters on inverse semi-groups, *Czec. Math. J.*, 11, 150—155.

Фулп (Fulp R. O.)
[1967*] On extending semigroup characters, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 15, 199—202.

Хенкок (Hancock V. R.)
[1960a] On complete semimodules, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11, 71—76.
[1960b] Commutative Schreier extensions of semigroups, Thesis, The Tulane University of Louisiana.

Хашимото (Hashimoto H.)
[1954] On a generalization of groups, *Proc. Japan. Acad.*, 30, 548—549

Хьюитт, Цукерман (Hewitt E., Zuckerman H. S.)
[1955] Finite dimensional convolution algebras, *Acta Math.*, 93, 67—119.
[1956] The l_1-algebra of a commutative semigroup, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 83, 70—97.
[1957] The irreducible representations of a semigroup related to the symmetric group, *Ill. J. Math.*, 1, 188—213.

Шайн Б. М.
[1965*] К теории обобщенных групп и обобщенных груд, в сб. «Теория полугрупп и ее приложения», вып. 1, Саратов, 286—324.

Шварц (Schwarz Š.)
[1943] Zur Theorie der Halbgruppen, Sbornik pràc Prirodovedekej Fakulty Slov. Univ. v Bratislave, № 6.
[1951] On the structure of simple semigroups without zero, *Czechoslovak Math. J.*, 1, 41—53.
[1953a] К теории периодических полугрупп, *Czechoslovak Math. J.*, 3, 7—21.
[1953b] О максимальных идеалах в теории полугрупп, I, *Czechoslovak Math. J.*, 3, 139—153.
[1953c] О максимальных идеалах в теории полугрупп, II, *Czechoslovak Math. J.*, 3, 365—383.
[1954a] Теория характеров коммутативных полугрупп, *Czechoslovak Math. J.*, 4, 219—247.
[1954b] Характеры коммутативных полугрупп как функции классов, *Czechoslovak Math. J.*, 4, 291—295.
[1954c] О некоторой связи Галуа в теории характеров полугрупп, *Czechoslovak Math. J.*, 4, 296—313.
[1956] Semigroups satisfying some weakened forms of the cancellation law, *Mat.-Fyz. Časopis Slovensk. Akad. Vied*, 6, 149—158.

Шеврин Л. Н.
[1966*] Вполне простые полугруппы без нуля и идеализаторы подполугрупп, *Изв. вузов, Математика*, № 6 (35), 157—160.

Штейнфельд (Steinfeld O.)
[1956] Über die Quasiideale von Halbgruppen, *Publ. Math. Debrecen*, 4, 262—275.
[1957] Über die Quasiideale von Halbgruppen mit eigentlichen Suschkewitsch-Kern, *Acta Sci. Math. Szeged*, 18, 235—242.

Шютценберже (Schützenberger M. P.)
[1947] Sur certains treillis gauches, *C. R. Acad. Sci.*, *Paris*, 224, 776—778.
[1956a] Sur une représentation des demi-groupes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 242, 2907—2908.
[1956b] Sur deux représentations des demi-groupes finis, *C. R. Acad. Sci.*, *Paris*, 243, 1385-1387.
[1957a] $\overline{\mathscr{D}}$ représentation des demi-groupes, *C. R. Acad. Sci.*, *Paris*, 244, 1994—1996.
[1957b] Applications des $\overline{\mathscr{D}}$ représentations à l'étude des homomorphismes des demigroupes, *C. R. Acad. Sci.*, *Paris*, 244, 2219—2221.

[1958] Sur la représentation monomiale des demi-groupes, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **246**, 865—867.

Ямада (Yamada M.)

[1955a] A note on middle unitary semigroups, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **7**, 49—52.

[1955b] On the greatest semilattice decomposition of a semigroup, *Kōdai Math. Sem. Rep.*, **7**, 59—62.

Ямада, Кимура (Yamada M., Kimura N.)

[1958] Note on idempotent semigroups, II, *Proc. Japan Acad.*, **34**, 110—112.

Указатель обозначений

Знак $\circ$ используется для обозначения умножения отношений. Он будет обычно опускаться в случае умножения отображений. (§ 1.4).

Если A — подмножество полугруппы S, то $\langle A\rangle$ обозначает подполугруппу из S, порожденную подмножеством A.

S^1 $[S^0]$ обозначает полугруппу $S\cup 1$ $[S\cup 0]$, полученную из полугруппы S присоединением единицы 1 [нуля 0], если S не имеет единицы [нуля], и совпадающую с S в противном случае. (§ 1.1)

ρ_a $[\lambda_a]$ обозначает внутренний правый [левый] сдвиг $x\to xa$ $[x\to ax]$ полугруппы S, где a — фиксированный элемент из S. (§ 1.3)

Пусть ρ — конгруэнция на полугруппе S. Тогда S/ρ обозначает факторполугруппу S по mod ρ и $\rho^\natural$ — естественное отображение полугруппы S на S/ρ. S/J обозначает факторполугруппу Риса S по идеалу J. (§ 1.5)

Пусть S — полугруппа и $a\in S$.

$L(a)$ обозначает главный левый идеал S^1a.

$R(a)$ обозначает главный правый идеал aS^1.

$J(a)$ обозначает главный двусторонний идеал S^1aS^1.

$\mathscr{L}$ обозначает $\{(a,\ b)\in S\times S\mid L(a)=L(b)\}$.

$\mathscr{R}$ обозначает $\{(a,\ b)\in S\times S\mid R(a)=R(b)\}$.

$\mathscr{J}$ обозначает $\{(a,\ b)\in S\times S\mid J(a)=J(b)\}$.

$\mathscr{H}$ обозначает $\mathscr{L}\cap\mathscr{R}$.

$\mathscr{D}$ обозначает $\mathscr{L}\circ\mathscr{R}\ (=\mathscr{R}\circ\mathscr{L})$.

L_a, R_a, J_a, H_a, D_a обозначает соответственно $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{J}$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}$-класс, содержащий a. (§ 2.1)

$I(a)$ обозначает $J(a)\setminus J_a$.

$J(a)/I(a)$ — главный фактор полугруппы S, соответствующий a. (§ 2.6)

$\mathscr{T}_X$ — полугруппа всех преобразований множества X. (§ 1.1)

$\mathscr{G}_X$ — группа всех подстановок на множестве X. (§ 1.1)

$\mathfrak{J}_X$ — симметрическая инверсная полугруппа на множестве X. (§ 1.9)

$\mathscr{B}_X$ — полугруппа всех бинарных отношений на множестве X. (§ 1.4)

$\mathscr{F}_X$ — свободная полугруппа на X. (§ 1.12)
$\mathscr{F}\mathscr{G}_X$ — свободная группа на X. (§ 1.12)
$\mathscr{C}$ — бициклическая полугруппа. (§ 1.12)
$\mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ — рисовская полугруппа $I \times \Lambda$-матриц с сэндвич-матрицей P над группой с нулем G^0. (§ 3.1)
$\mathscr{M}(G; I, \Lambda, P)$ — рисовская полугруппа $I \times \Lambda$-матриц с сэндвич-матрицей P над группой G. (§ 3.1)
$\mathscr{L}\mathscr{T}(V)$ — алгебра всех линейных преобразований векторного пространства V. (§ 2.2, 5.1)
$(\mathfrak{A})_n$ — алгебра всех $n \times n$-матриц над алгеброй $\mathfrak{A}$. (§ 5.1)
$\Phi[S]$ — полугрупповая алгебра полугруппы S над полем Φ. (§ 5.1)
Γ^n — представление алгебры $(\mathfrak{A})_n$, соответствующее представлению Γ алгебры $\mathfrak{A}$. (§ 5.1)

Предметный указатель

Оглавление

А. Клиффорд, Г. Престон

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛУГРУПП

Редактор Г. М. *Цукерман*
Художник Г. Д. *Коняхина*
Художественный редактор В. И. *Шаповалов*
Технический редактор Л. П. *Бирюкова*
Корректор И. П. *Максимова*

Сдано в набор 6/VIII 1971 г.
Подписано к печати 10/III 1972 г.
Бумага кн. журн. $60\times90^1/_{16}$=9 бум. л.
18 усл. печ. л.
Уч.-изд. л. 16,88. Изд. № 1/5492.
Цена 1 р. 90 к. Зак. 1159

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9.